l^p-Kohomologie, insbesondere Verschwindungssätze für l^p-Kohomologie

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Georg-August-Universität Göttingen

vorgelegt von
Elias Kappos
aus
Frankfurt am Main

Göttingen 2007

D7
Referent: Prof. Dr. Thomas Schick
Korreferent: Prof. Dr. Ulrich Stuhler
Tag der mündlichen Prüfung: 10. Juli 2007

Abstract

In this dissertation we study the l^p-cohomology of discrete groups of type FP_n. We give a duality statement and prove some vanishing results, in particular for groups with an infinite center. As an application we introduce certain types of acyclicity to prove a Künneth formula. Furthermore we introduce the notion of l^p-Quasibetti numbers. These lead to an interesting example for a significant difference between l^2-cohomology and l^p-cohomology for general p. Finally, we give a new approach to prove the vanishing of l^p-cohomology of amenable groups.

Danksagung

Zuallererst möchte ich mich bei meinem Doktorvater Prof. Dr. Thomas Schick für die Themenstellung und die Betreuung dieser Arbeit bedanken.

Weiterhin gilt mein Dank dem Graduiertenkolleg „Gruppen und Geometrie“ an der Georg-August-Universität Göttingen für die finanzielle Unterstützung und mathematische Ausbildung sowie dem Deutschen Akademischen Austauschdienst und der Forschungsgruppe „Geometrie und Funktionalanalysis“ an der Pennsylvania State University für die Ermöglichung eines inspirierenden Forschungsaufenthaltes.

Ich bin meinen Kommilitonen Dr. Stephan Elsenhans, Ingo Schröder und insbesondere Karsten Roeseler sehr dankbar für das mühevolle und sorgfältige Korrekturlesen dieser Arbeit.

Mein besonderer Dank geht an Dr. Jörg Jahnel, der den hier genutzten, klassischen Garamond-Schriftfont zur Verfügung stellte.

Größten Dank schulde ich meiner Frau Anne für vielerlei Dinge: Sie stand mir immer zur Seite, munterte mich auf, hatte stets ein offenes Ohr und tat so vieles mehr, was ich nicht in Worte fassen kann.

Nicht zuletzt möchte ich meinen Freunden danken, die Göttingen erst zu dem gemacht haben, was es ist: ein wunderbarer Ort zum Leben und Studieren; und meinen Eltern, ohne die diese Arbeit niemals möglich gewesen wäre.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Das Konzept der L^2-Kohomologie stammt aus der Mitte des 20. Jahrhunderts. Die erste Veröffentlichung – ohne einen Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben –, die den Begriff L^2-Kohomologie im Titel trägt, stammt aus dem Jahr 1971 [43]. Dieses weite und reiche Feld zog und zieht viele interessierte Forscher an. Einen guten Überblick über den Wissensstand von 2002 gibt das Buch von Lück [32].

L^p-Kohomologie für allgemeine p hingegen wurde erst Anfang der 1980er Jahre von Gromov und Pansu eingeführt und die erste so bezeichnete Veröffentlichung stammt aus dem Jahr 1987 [19]. Weiterhin ist das allgemeine Interesse eher gering, bis heute sind bei MathSciNet nur circa 30 Arbeiten mit einem Titel, der auf L^p-Kohomologie verweist, auffindbar. Noch 1993 schreibt Zucker [65]: „The case of L^2-cohomology is the easiest one, as L^2 is a Hilbert space, its own dual by means of the inner product; it is the most important. The level of importance of $p \neq 2$ is not clear at this time.“ Während der erste Teil ohne Zweifel wahr ist und sich so schnell an dem zweiten nichts ändern wird, ist es mit ein Anliegen dieser Arbeit, den letzten Satz zu ändern.

L^p-Kohomologie wurde nach Gol'dstein, Kuz'minov und Shvedov [19, 20], die sich mit dem de-Rham-Isomorphismus beschäftigten, ausgebaut durch Gromov [23] und Pansu [39, 41, 42]. Während Letzterer hauptsächlich homogene Riemannsche Mannigfaltigkeiten studierte, wie auch Elek in [16], interessierte sich Ersterer für diskrete metrische Räume und Gruppen. Viele Ideen und Ansätze, die in dieser Arbeit verwendet werden, tauchen bei Gromov in [23, Chapter 8] auf. Doch leider sind die Beweise im Normalfall nur angedeutet, wenn sie überhaupt erwähnt werden. Ein weiteres Ziel dieser Arbeit ist es, zumindest einen Teil dieser Ideen umzusetzen und die Beweise auf ein tragfähiges Fundament zu stellen. Da wir uns in dieser Arbeit auch wie Gromov auf diskrete Gruppen beschränken, ist die Bezeichnung l^p-Kohomologie statt L^p-Kohomologie gewählt worden, um diese Einschränkung deutlich zu machen.

Die meisten Autoren in jüngerer Zeit sind hauptsächlich an der ersten reduzierten Kohomologie interessiert, da hierfür – als sehr spezielle Eigenschaft der 1-Kozykel – die Theorie der harmonischen Funktionen genutzt werden kann. In diesem Zusammenhang wurden eine Reihe interessanter Resultate erzielt. Beispielsweise seien hier [6], [7] und [33] erwähnt. In diesem Zusammenhang soll auch nicht die Arbeit von Puls [49] unerwähnt bleiben. Er zeigt, dass Gruppen mit einem Zentrumselement unendlicher Ordnung verschwindende reduzierte l^p-Kohomologie haben. In seinem Beweis ist allerdings eine Lücke, die wir hier auf eine andere Art und Weise schließen als in [33].

Das erste Kapitel dieser Arbeit legt das Fundament für die folgenden Abschnitte. Es werden die für diese Zwecke wichtigsten Sätze der Gruppenkohomologie zitiert. Auch wird noch an den Zusammenhang zwischen Gruppenkohomologie und der simplizialen Kohomologie von CW-Komplexen erinnert. Abschließend werden noch einige Endlichkeitsbedingungen erwähnt. Alles in diesem Kapitel sind gut bekannte Resultate, die man in den meisten Büchern über Gruppenkohomologie findet, zum Beispiel [9] und [17].

Im zweiten Kapitel wird l^p-Kohomologie definiert, die Dualität zwischen l^p-Homologie und l^q-Kohomologie für $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gezeigt und die Beweislücke von [49] geschlossen. Aufbauend auf unserem Hauptsatz 2.24 lassen sich recht leicht noch eine Reihe weiterer Verallgemeinerungen beweisen.

Kapitel 3 stellt nun einige Anwendungsbeispiele vor. Das l^p-Azyklizitätskonzept von Gromov wird ausgebaut und dazu genutzt eine Künnethformel für reduzierte l^p-Kohomologie zu beweisen (Satz 3.16). Weiterhin sind wir interessiert an einem neuen Konzept für l^p-Bettizahlen. Eine Idee in [23] nutzend, geben wir eine Definition für l^p-Quasibettizahlen an. Exakte und numerische Berechnungen geben uns einen signifikanten Unterschied zwischen l^p-Kohomologie und l^2-Kohomologie, zumindest im Falle $p = 1$ (Satz 3.33).

Das letzte Kapitel ist dem Versuch gewidmet, Vermutung A.21 zu beweisen. Diese stammt ebenfalls grundsätzlich von Gromov [23], ist aber noch immer unbewiesen. Einen Erfolg für die erste reduzierte Kohomologiegruppe gibt es in [62] für alle Gruppen, die die Eigenschaft (CF) haben.

KAPITEL 1

Grundlagen

Das Ziel dieses Kapitels ist es, das – hauptsächlich algebraische – Fundament für die nachfolgenden Kapitel zu legen. Die Ausführungen folgen im Wesentlichen dem Buch von Brown über Gruppenhomologie [9]. Sie sind aber nicht sonderlich außergewöhnlich und können auch in den meisten anderen Büchern über dieses Thema gefunden werden, zum Beispiel bei Lang [28], bei Weiss [63] oder auch im ersten Teil von Neukirch [36]. Aus dem gleichen Grund wird auch auf die Beweise zu diesen Aussagen verzichtet. Basiswissen über Kettenkomplexe wird vorausgesetzt, ansonsten vergleiche [8], [26] oder [60].

1.1. Gruppenkohomologie

Dieser Abschnitt ist der Gruppenkohomologie als dem algebraischen Hilfsmittel für diese Arbeit schlechthin gewidmet.

1.1.1. Auflösungen.

In diesem Unterabschnitt werden die grundlegenden algebraischen Objekte dieser Arbeit eingeführt, wie zum Beispiel Auflösungen, Gruppenringe oder das Erweiterungsideal.

Definition 1.1. Sei R ein Ring (kommutativ, unital) und M ein linker R-Modul. Eine *Auflösung* von M ist eine exakte Sequenz von R-Moduln

$$\cdots \to F_2 \xrightarrow{\partial_2} F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0.$$

Ist jeder dieser R-Moduln F_i frei, so wird diese exakte Sequenz als *freie Auflösung* bezeichnet.

Bemerkung 1.2. Freie Auflösungen existieren für alle Moduln M. Sie können einfach schrittweise erzeugt werden, indem man – rechts beginnend – immer einen freien Modul und eine Surjektion in den Kern der rechts folgenden Abbildung frei wählt.

Das Anfangssegment $F_1 \to F_0 \to M \to 0$ einer freien Auflösung ist die Präsentation von M durch Erzeuger und Relationen.

Definition 1.3. Den *erweiterten Kettenkomplex* assoziert zu einer Auflösung erhält man, indem man die Auflösung an sich als Kettenkomplex interpretiert. Hierbei wird M als F_{-1} interpretiert.

Die zweite Methode, aus einer Auflösung einen Kettenkomplex zu erhalten, besteht darin, den nichtnegativen Kettenkomplex

$$F = (F_i, \partial_i)_{i \geq 0}$$

zu betrachten und $\varepsilon : F \to M$ als Kettenabbildung zu interpretieren, wobei M ein in Dimension 0 konzentrierter Kettenkomplex ist.

Definition 1.4. Sei G eine multiplikativ geschriebene Gruppe. Sei $\mathbb{Z}[G]$ der durch G erzeugte freie $\mathbb{Z}$-Modul. Das heißt, ein Element in $\mathbb{Z}[G]$ wird eindeutig repräsentiert durch $\sum\limits_{g \in G} a(g)g$ mit $a(g) \in \mathbb{Z}$ und $a(g) = 0$ für fast alle $g \in G$. Die Multiplikation in G macht aus $\mathbb{Z}[G]$ einen Ring, den *ganzzahligen Gruppenring* von G.

Bemerkung 1.5. G ist eine Untergruppe in $(\mathbb{Z}[G])^*$, den Einheiten in $\mathbb{Z}[G]$. Weiterhin hat man die *universelle Abbildungseigenschaft*:

Seien ein assoziativer Ring R mit Eins und ein Gruppenhomomorphismus $f : G \to R^*$ gegeben. Dann existiert eine und nur eine Erweiterung von f zu einem Ringhomomorphismus von $\mathbb{Z}[G] \to R$. Das heißt, es gilt:

$$\mathrm{Hom}_{(Ring)}(\mathbb{Z}[G], R) \cong \mathrm{Hom}_{(Gruppe)}(G, R^*)$$

Die universelle Abbildungseigenschaft ist erfüllt, da G eine Basis für $\mathbb{Z}[G]$ bildet und man einen Homomorphismus durch seine Wirkung auf die Basis beschreiben kann.

Definition 1.6. Für jede Gruppe G ist die *Augmentation* ein Ringhomomorphismus $\varepsilon : \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}$, der alle Gruppenelemente auf 1 abbildet.

Der Kern von ε wird als *Augmentationsideal* IG bezeichnet.

Definition 1.7. Ein linker $\mathbb{Z}[G]$-*Modul*, oder auch G-*Modul*, ist eine abelsche Gruppe A zusammen mit einem Ringhomomorphismus von $\mathbb{Z}[G]$ in den Ring der Endomorphismen von A. Nach der Bemerkung 1.5 korrespondiert ein solcher Ringhomomorphismus mit einem Gruppenhomomorphismus von G nach A. Von daher lässt sich ein G-Modul auch beschreiben als eine abelsche Gruppe A zusammen mit einer Operation von G auf A.

Sei X eine G-*Menge*, also eine Menge, auf der G operiert. Dann lässt sich die freie abelsche Gruppe $\mathbb{Z}[X]$ bilden und die Gruppenoperation von G auf X zu einer $\mathbb{Z}$-linearen Operation von G auf $\mathbb{Z}[X]$ erweitern. Der G-Modul, der hieraus resultiert, wird *Permutationsmodul* genannt.

Proposition 1.8. *Sei X eine freie G-Menge und sei E eine Menge von Repräsentanten der G-Orbits in X. Dann ist $\mathbb{Z}[X]$ ein freier G-Modul mit Basis E.*

1.1.2. Projektive Moduln. Dieser Unterabschnitt ist dem Beweis der Eindeutigkeit der Auflösung bis auf Homotopieäquivalenz gewidmet.

Definition 1.9. Ein R-Modul P heißt *projektiv*, wenn $\mathrm{Hom}_R(P,-)$ als Funktor exakt ist, beziehungsweise, wenn im Diagramm

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dotted, "\psi"'] \arrow[d, "\phi"] \arrow[dr, "0"] & \\ M' \arrow[r, "i"'] & M \arrow[r, "j"'] & M'' \end{tikzcd}$$

mit $j\phi = 0$ für jede exakte Reihe ein $\psi : P \to M'$ so existiert, dass $i\psi = \phi$ gilt.

Bemerkung 1.10. Diese Definition lässt sich auch in folgender Form formulieren: Ein R-Modul P heißt projektiv, wenn für jede Surjektion $\pi : M' \to M$ und jede Abbildung $\phi : P \to M$ eine weitere Abbildung $\psi : P \to M'$ so existiert, dass $\phi = \pi\psi$.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dotted, "\psi"'] \arrow[d, "\phi"] \\ M' \arrow[r, "\pi"'] & M \end{tikzcd}$$

Bemerkung 1.11. Analog heißt ein Modul I *injektiv*, wenn der Funktor $\mathrm{Hom}_R(-,I)$ exakt ist.

Lemma 1.12. *Freie Moduln sind projektiv.*

Lemma 1.13. *Sei P ein projektiver Modul und*

a) *sei ein Diagramm*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "d"] \arrow[d, dotted, "g"'] & Q \arrow[d, "f"] & \\ M' \arrow[r, "d_1"'] & M \arrow[r, "d_2"'] & M'' \end{tikzcd}$$

gegeben mit $d_2fd = 0$ und exakter unterer Reihe. Dann existiert ein g mit $d_1g = fd$.

b) *sei ein Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[r, "d"] \arrow[dl, dotted, "k"'] \arrow[d, "f"'] & Q \arrow[dl, "h"] \\
M' \arrow[r, "d_1"'] & M \arrow[r, "d_2"'] & M''
\end{tikzcd}$$

gegeben mit $d_2hd = d_2f$ *und exakter unterer Reihe. Dann existiert ein* k *mit* $d_1k + hd = f$.

Lemma 1.14. *Seien* (C,∂) *und* (C',∂') *Kettenkomplexe und sei* $r \in \mathbb{Z}$. *Sei* $(f_i : C_i \to C'_i)_{i \leq r}$ *eine solche Familie von Abbildungen, dass*

$$\partial'_i f_i = f_{i-1}\partial_i$$

für $i \leq r$. *Sei* C_i *projektiv für* $i > r$ *und die Homologiegruppen*

$$H_i(C') := \ker \partial'_i / \operatorname{im} \partial'_{i+1} = 0$$

für $i \geq r$, *dann lässt sich* $(f_i)_{i \leq r}$ *erweitern zu einer Kettenabbildung* $f : C \to C'$ *und* f *ist eindeutig bis auf Homotopie.*

Genauer gesagt: Je zwei Erweiterungen sind homotop über eine Homotopie h *und für dieses* h *gilt* $h_i = 0$ *für* $i \leq r$.

Definition 1.15. Eine Kettenabbildung f zwischen zwei projektiven Auflösungen $\varepsilon : F \to M$ und $\varepsilon' : F' \to M$ heißt *augmentationserhaltend*, wenn $\varepsilon' f = \varepsilon$ gilt.

Theorem 1.16. *Seien* F *und* F' *projektive Auflösungen eines Moduls* M, *dann existiert eine augmentationserhaltende Kettenabbildung* $f : F \to F'$, *die bis auf Homotopie eindeutig ist, und* f *ist eine Homotopieäquivalenz.*

Korollar 1.17. *Sei* $\varepsilon : F \to \mathbb{Z}$ *eine freie Auflösung von* $\mathbb{Z}$ *als* $\mathbb{Z}$*-Modul. Dann ist* ε *eine Homotopieäquivalenz.*

Zum Schluss dieses Abschnittes sollen noch drei Aussagen über Kettenkomplexe projektiver Moduln zitiert werden. Sie gehören zum Standardrepertoire der homologischen Algebra.

Satz 1.18. *Sei* $f : P' \to P$ *eine schwache Äquivalenz zwischen nichtnegativen Komplexen von projektiven Moduln, dann ist* f *eine Homotopieäquivalenz.*

Satz 1.19. *Sei* $f : C' \to C$ *eine schwache Äquivalenz zwischen beliebigen Komplexen. Sei* P *ein nichtnegativer Komplex projektiver Moduln, dann ist*

$$\operatorname{Hom}_R(P,f) : \operatorname{Hom}_R(P,C') \to \operatorname{Hom}_R(P,C)$$

eine schwache Äquivalenz.

Satz 1.20. *Sei $f : C' \to C$ eine schwache Äquivalenz zwischen Komplexen rechter R-Moduln. Sei P ein nichtnegativer Komplex projektiver linker R-Moduln, dann ist*

$$f \otimes_R P : C' \otimes_R P \to C \otimes_R P$$

eine schwache Äquivalenz.

Bemerkung 1.21. Ein Modul F heißt *flach*, wenn der Funktor

$$- \otimes_R F$$

exakt ist. Da freie Moduln flach sind und projektive Moduln direkte Summanden freier Moduln sind, sind auch projektive Moduln flach.

Die Aussage, dass projektive Moduln direkte Summanden freier Moduln sind, lässt sich beweisen, indem man eine kurze exakte Sequenz $0 \to M' \to F \to P \to 0$ wählt mit F frei und P projektiv. Aus der Projektivität folgt, dass sich die Identität auf P zu einer Abbildung $P \to F$ liften lässt. Somit spaltet die Sequenz.

Satz 1.22. *Sei P ein endlich erzeugter projektiver linker R-Modul, dann*

i) *ist P^*, der Dualraum von P, ein endlich erzeugter projektiver rechter R-Modul,*

ii) *existiert für jeden linken R-Modul M ein Isomorphismus*

$$\varphi : P^* \otimes_R M \to \mathrm{Hom}_R(P,M)$$

von abelschen Gruppen, gegeben durch $\varphi(u \otimes m)(x) = u(x) \cdot m$ für alle $u \in P^*$, $m \in M$, $x \in P$,

iii) *existiert für jeden rechten R-Modul M ein Isomorphismus*

$$\varphi' : M \otimes_R P \to \mathrm{Hom}_R(P^*,M),$$

gegeben durch $\varphi'(m \otimes x)(u) = m \cdot u(x)$ für alle $m \in M$, $x \in P$, $u \in P^*$,

iv) *existiert ein Isomorphismus $\varphi'' : P \to P^{**}$ von linken R-Moduln, gegeben durch $\varphi''(x)(u) = u(x)$ für $x \in P, u \in P^*$.*

1.1.3. Homologie von Gruppen. Jetzt ist man endlich in der Lage, mit Hilfe von projektiven Auflösungen von $\mathbb{Z}$ über $\mathbb{Z}[G]$ die Homologie einer Gruppe einzuführen.

Definition 1.23. Sei G eine Gruppe und M ein G-Modul. Dann wird mit $M^G = \{m \in M | \ gm = m \ \forall g \in G\}$ die *Fixgruppe* beziehungsweise die *Gruppe der Invarianten* von M bezeichnet.

Definition 1.24. Sei G eine Gruppe und M ein G-Modul. Dann wird mit M_G die *Gruppe der Koinvarianten* von M bezeichnet. Diese Gruppe ist definiert als der Quotient M modulo der von Elementen der Form $mg - m$ erzeugten Untergruppe.

Bemerkung 1.25. Man kann M_G auf zwei weitere Arten beschreiben, zum einen als $M = M/IM$, wobei IM die Menge aller endlichen Summen $\sum a_i b_i$ mit $a_i \in$ IG und $b_i \in M$ bezeichnet.

Die zweite Möglichkeit, M_G zu beschreiben, ist

$$M_G \cong \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} M.$$

Hierbei wird $\mathbb{Z}$ als rechter $\mathbb{Z}[G]$-Modul interpretiert. Dass dies stimmt, folgt aus folgender Konstruktion.

Durch die Identität $1 \otimes gm = 1 \cdot g \otimes m = 1 \otimes m$ in $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} M$ existiert eine Abbildung $M_G \to \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} M$, die gegeben wird durch $\overline{m} \mapsto 1 \otimes m$, wobei $\overline{m}$ das Bild von $m \in M$ in M_G ist. Die hierzu inverse Umkehrabbildung $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} M \to M_G$ wird gegeben durch $a \otimes m \mapsto a\overline{m}$.

Die Standardeigenschaften des Tensorprodukts liefern uns für den Funktor $-_G$

a) Sei $M' \to M \to M'' \to 0$ eine exakte Sequenz von G-Moduln, dann ist auch die induzierte Sequenz $M'_G \to M_G \to M''_G$ exakt.
b) Wenn F ein freier $\mathbb{Z}[G]$-Modul mit Basis (e_i) ist, dann ist F_G ein freier $\mathbb{Z}$-Modul mit Basis $(\bar{e}_i)$.

Definition 1.26. Sei G eine Gruppe und $\varepsilon : F \to \mathbb{Z}$ eine projektive Auflösung von $\mathbb{Z}$ über $\mathbb{Z}[G]$. Die *Homologiegruppen* von G sind definiert durch

$$H_i(G) = H_i(F_G).$$

Hierbei ist die rechte Seite bis auf Isomorphie unabhängig von der Wahl der Auflösung (vgl. Theorem 1.16).

Lemma 1.27. *Sei $F_n \to \cdots \to F_0 \to \mathbb{Z} \to 0$ eine exakte Sequenz von $\mathbb{Z}[G]$-Moduln und sei jedes der F_i projektiv. Dann ist*

$$H_i(G) \cong H_i(F_G)$$

für $i < n$ und es existiert eine exakte Sequenz

$$0 \to H_{n+1}(G) \to (H_n F)_G \to H_n(F_G) \to H_n(G) \to 0.$$

1.1.4. Homologie und Kohomologie mit Koeffizienten. Dieser Unterabschnitt schließt die Grundlagen der Gruppenkohomologie mit der Einführung von Koeffizienten ab.

Bemerkung 1.28. Das Tensorprodukt $M \otimes_{\mathbb{Z}[G]} N$ ist definiert, wenn M ein rechter $\mathbb{Z}[G]$-Modul und N ein linker $\mathbb{Z}[G]$-Modul ist. Über den Antiautomorphismus $g \mapsto g^{-1}$ kann man aber jeden linken G-Modul M zu einem rechten G-Modul machen, und daher macht es Sinn, das Tensorprodukt $M \otimes_{\mathbb{Z}[G]} N$ zweier linker G-Moduln zu betrachten. Dies wird im Folgenden mit $M \otimes_G N$ bezeichnet.

Sei $M \otimes N$ die Kurzschreibweise für $M \otimes_{\mathbb{Z}} N$, dann erhält man $M \otimes_G N$ durch Einführen der Relation $g^{-1}m \otimes n = m \otimes gn$. Folglich erhält man

$$M \otimes_G N = (M \otimes N)_G,$$

wobei G diagonal auf $M \otimes N$ operiert: $g(m \otimes n) = gm \otimes gn$. Die Gleichung gilt, da man obige Relation auch zu $m \otimes n = gm \otimes gn$ umformulieren kann. Mit dieser Gleichung folgt, dass $- \otimes_G -$ kommutativ ist.

Bemerkung 1.29. Analog zu Bemerkung 1.28 kann man auch G diagonal operieren lassen auf $\mathrm{Hom}(M,N) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,N)$ durch die Gleichung

$$(gu)(m) = g \cdot u(g^{-1}m)$$

für $g \in G, u \in \mathrm{Hom}(M,N)$ und $m \in M$.

Es gilt $gu = u$ genau dann, wenn u mit der Operation von g kommutiert. Folglich gilt:

$$\mathrm{Hom}_G(M,N) = \mathrm{Hom}(M,N)^G.$$

Definition 1.30. Sei G eine Gruppe und $\varepsilon : F \to \mathbb{Z}$ eine projektive Auflösung. Dann wird die *Homologie von G mit Koeffizienten in M* definiert als

$$H_*(G,M) := H_*(F \otimes_G M).$$

Die *Kohomologie mit Koeffizienten in M* ist

$$H^*(G,M) := H_*(\mathrm{Hom}_G(F,M)).$$

Bemerkung 1.31. Es gilt

$$H_0(G,M) = M_G$$

und

$$H^0(G,M) = M^G.$$

Bemerkung 1.32. Wenn man $\mathbb{Z}$ für M einsetzt, so erhält man

$$H_*(G,\mathbb{Z}) = H_*(G).$$

Der Vollständigkeit halber werden nun noch zum Ende dieses Abschnittes zwei Verallgemeinerungen der zwei Funktoren $H_*(G,-)$ und $H^*(G,-)$ angegeben.

Definition 1.33. Sei R ein Ring und seien $F \to M$ und $P \to N$ zwei projektive Auflösungen beliebiger R-Moduln M und N. Dann ist

$$\mathrm{Tor}_*^R(M,N) := H_*(F \otimes_R N) = H_*(F \otimes_R P) = H_*(M \otimes_R P)$$

und

$$\mathrm{Ext}_R^*(M,N) := H_*(\mathrm{Hom}_R(F,N)).$$

Speziell ist $H_*(G,-) = \mathrm{Tor}_*^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},-)$ und $H^*(G,-) = \mathrm{Ext}^*_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},-)$.

Bemerkung 1.34. Die Aussagen dieses Kapitels über die Kohomologie von G ändern sich nicht, wenn man $\mathrm{Hom}(A,B)$ nicht als die linearen Abbildungen, sondern als die beschränkten linearen Abbildungen von A nach B auffasst. Da aber in dem Rest dieser Arbeit die topologische Dualität von $l^p(G)$ zu $l^q(G)$ mit $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ausgenutzt werden soll, die algebraisch nicht gegeben ist, bezeichnet $\mathrm{Hom}(A,B)$ ab sofort die beschränkten linearen Abbildungen auf.

Bemerkung 1.35. [17, S. 3] Sei $\varepsilon : F \to \mathbb{Z}$ eine projektive Auflösung von $\mathbb{Z}$ über $\mathbb{Z}[G]$. Da ein projektiver $\mathbb{Z}[G]$-Modul $\mathbb{Z}$-frei ist, kann man diese Auflösung auch aus kurzen exakten, spaltenden Sequenzen zusammenspleißen. Wenn man nun mit einem Körper k über $\mathbb{Z}$ tensoriert, bleibt die Eigenschaft zu spalten erhalten. Mit $k \otimes \mathbb{Z}[G] = k[G]$ folgt, dass $k \otimes F \to k$ eine Auflösung von k über $k[G]$ liefert. Insbesondere heißt dies, dass im Folgenden immer eine Auflösung von $\mathbb{Z}$ über $\mathbb{Z}[G]$ durch eine Auflösung von $\mathbb{C}$ über $\mathbb{C}[G]$ ersetzt werden kann, solange die Koeffizienten projektive Moduln über $\mathbb{C}[G]$ sind. Diese Bedingung wird erfüllt sein, da als Koeffizienten nur $l^p(G)$ von Interesse ist.

1.2. CW-Komplexe und Gruppen

Die Aufgabe dieses Abschnittes ist es, zu zeigen, dass unter bestimmten Voraussetzungen die (Ko-)Homologie einer Gruppe G mit der eines CW-Komplexes X übereinstimmt. Dass dies nicht für beliebige CW-Komplexe gelten kann, ist selbstverständlich. Daher müssen zuerst einmal in den beiden folgenden Unterabschnitten Einschränkungen erarbeitet werden.

1.2.1. G-Komplex und Standardauflösung.

Zu Anfang soll hier die sogenannte Standardauflösung eingeführt werden.

Definition 1.36. Ein *G-Komplex* ist ein CW-Komplex X zusammen mit einer *G-Operation* auf X, die nur die Zellen permutiert. Also existiert für alle $g \in G$ ein Homöomorphismus $x \mapsto gx$ von X so, dass für jede Zelle σ von X das Bild $g\sigma$ wiederum eine Zelle von X ist. Zum Beispiel ist ein Simplizialkomplex X mit einer simplizialen G-Operation ein G-Komplex.

X ist ein *freier G-Komplex*, wenn die G-Operation die Zellen frei permutiert, also $g\sigma \neq \sigma$ für alle σ und $g \neq 1$. In diesem Fall hat jeder Kettenmodul eine $\mathbb{Z}$-Basis, die frei von G permutiert wird. Nach Proposition 1.8 ist $C_n(X)$ ein freier $\mathbb{Z}[G]$-Modul mit einem Basiselement für jeden G-Orbit von Zellen.

Proposition 1.37. *Sei X ein zusammenziehbarer freier G-Komplex. Dann ist der erweiterte Kettenkomplex eine freie Auflösung von $\mathbb{Z}$ über $\mathbb{Z}[G]$.*

Definition 1.38. Sei X ein simplizialer Komplex, auf dem G frei operiert. Dann ist $C'_*(X)$, der *gerichtete Kettenkomplex* zu X, so definiert, dass $C'_*(X)$ eine Basis aus gerichteten $(n+1)$-Tupeln $(\nu_0,\dots,\nu_n)$ von Ecken von X derart hat, dass $\{\nu_0,\dots,\nu_n\}$ ein Simplex von X ist. Da G frei auf diesen $(n+1)$-Tupeln operiert, erhält man eine freie Auflösung von $\mathbb{Z}$ über $\mathbb{Z}[G]$.

Definition 1.39. Sei X das „Simplex", welches von G aufgespannt wird, seien also die Ecken von X die Elemente von G und sei jede endliche Teilmenge von G ein Simplex von X. Die hierzu korrespondierende freie Auflösung $F_* = C'_*(X)$ wird als die *Standardauflösung* von $\mathbb{Z}$ über $\mathbb{Z}[G]$ bezeichnet.

Explizit sind die F_n freie $\mathbb{Z}$-Moduln, die von den $(n+1)$-Tupeln $(g_0,\dots,g_n)$ von Elementen von G erzeugt werden. G operiert hierauf durch

$$g\cdot(g_0,\dots,g_n) = (g\cdot g_0,\dots,g\cdot g_n).$$

Der Randoperator $\partial : F_n \to F_{n-1}$ wird gegeben durch

$$\partial = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i d_i$$

mit

$$d_i(g_0,\dots,g_n) = (g_0,\dots,\widehat{g_i},\dots,g_n).$$

Die Augmentation $\varepsilon : F_0 \to \mathbb{Z}$ wird gegeben durch

$$\varepsilon(g_0) = 1.$$

Noch einen Schritt expliziter seien die $(n+1)$-Tupel mit erstem Eintrag 1 die Basis von F_n als freiem $\mathbb{Z}[G]$-Modul. Diese bilden eine Basis, da sie die Bahnen unter G-Operation repräsentieren. Manchmal ist es angenehmer, die $(n+1)$-Tupel in der Form $(1,g_1,g_1g_2,\dots,g_1\cdots g_n)$ zu schreiben. Für diese kann man folgende Notation einführen: $[g_1|\dots|g_n]$. Mit dieser $\mathbb{Z}[G]$-Basis kann man die d_i schreiben als

$$d_i\,[g_1|\dots|g_n] = \begin{cases} g_1\,[g_2|\dots|g_n] & i=0 \\ [g_1|\dots|g_{i-1}|g_ig_{i+1}|g_{i+2}|\dots|g_n] & 0<i<n \\ [g_1|\dots|g_{n-1}] & i=n. \end{cases} \tag{1.1}$$

Es sei erinnert an Definition 1.26. Hier kann man für jede Gruppe G als Auflösung F die Standardauflösung nehmen. In diesem Fall schreibt man $C_*(G)$ für den Kettenkomplex F_G.

Hierbei kann man $C_*(G)$ explizit wie folgt beschreiben. Zuerst definiert man sich die Äquivalenzrelation $(g_0,\dots,g_n) \sim (gg_0,\dots,gg_n)$ auf den $(n+1)$-Tupeln $(g_0,\dots,g_n)$ mit $g_i \in G$. Es bezeichne $[g_0,\dots,g_n]$ die

Äquivalenzklasse von $(g_0, \dots, g_n)$. Dann hat $C_n(G)$ eine $\mathbb{Z}$-Basis bestehend aus diesen Äquivalenzklassen, und die Randabbildung

$$\partial : C_n(G) \to C_{n-1}(G)$$

ist gegeben durch $\partial = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i d_i$ mit

$$d_i[g_0, \dots, g_n] = [g_0, \dots, \widehat{g_i}, \dots, g_n]$$

Diese Beschreibung von $C_*(G)$ wird als der *homogene Kettenkomplex* bezeichnet.

Die *inhomogene* Beschreibung von $C_*(G)$ wird durch

$$d_i\,[g_1|\dots|g_n] = \begin{cases} g_1\,[g_2|\dots|g_n] & i=0 \\ [g_1|\dots|g_{i-1}|g_ig_{i+1}|g_{i+2}|\dots|g_n] & 0<i<n \\ [g_1|\dots|g_{n-1}] & i=n \end{cases}$$

analog zur Formel 1.1 gegeben. Hierbei sind aber die $[g_1|\dots|g_n]$ die Bilder in $C_n(G) = (F_n)_G$ der $[g_1|\dots|g_n]$ aus 1.1. Sie bilden eine $\mathbb{Z}$-Basis, aber keine $\mathbb{Z}[G]$-Basis.

1.2.2. $K(G,1)$-Komplexe. Dies sind diejenigen CW-Komplexe, deren (Ko-)Homologie mit derjenigen der Gruppe G übereinstimmt.

Definition 1.40. Der CW-Komplex X ist ein *Eilenberg-MacLane-Komplex vom Typ* $(G,1)$ oder einfacher ein $K(G,1)$*-Komplex*, wenn X die folgenden drei Bedingungen erfüllt:

i) X ist zusammenhängend,
ii) $\pi_1 X = G$ und
iii) die universelle Überlagerung $\tilde{X}$ von X ist zusammenziehbar.

Bemerkung 1.41. Die letzte Bedingung kann ersetzt werden durch eine der beiden folgenden Bedingungen:

iii') $H_i\tilde{X} = 0$ für $i \geq 2$ oder
iii") $\pi_i X = 0$ für $i \geq 2$.

Proposition 1.42. *Wenn X ein $K(G,1)$-Komplex ist, dann ist der erweiterte zelluläre Kettenkomplex der universellen Überlagerung von X eine freie Auflösung von $\mathbb{Z}$ über $\mathbb{Z}[G]$.*

Satz 1.43. *Für jede Gruppe G existiert ein $K(G,1)$-Komplex, und die Standardauflösung von G entspricht dem zum $K(G,1)$-Komplex gehörenden Kettenkomplex.*

Bemerkung 1.44. Die Umkehrung dieser Aussage gilt ebenfalls. Man setzt einfach $G = \pi_1 X$.

Folgende Aussage ist ein Korollar zu Theorem 1.16.

Korollar 1.45. *Wenn F ein nicht-negativer azyklischer*[1] *Kettenkomplex von projektiven Moduln über einem beliebigen Ring R ist, dann ist F zusammenziehbar*[2].

Proposition 1.46. *Sei X ein freier G-Komplex. Dann gilt*

$$C_*(X/G) \cong C_*(X)_G,$$

wobei X/G der Orbitraum von G über X ist. Dieser ist durch die Konstruktion wiederum ein G-Komplex.

Satz 1.47. *Sei X ein $K(G,1)$-Komplex. Dann ist $H_*(G) = H_*(X)$.*

1.2.3. Satz von Hopf. Das Theorem 1.48 ist eine Folgerung aus dem Satz von Hopf 1.51, wobei 1.51 in unserem Zusammenhang die interessantere Beschreibung ist. Insbesondere ist Satz 1.51 einer der zentralen Ausgangspunkte für die Entwicklung der Gruppenkohomologie (vgl. [9, Introduction]).

Theorem 1.48. *Für jeden zusammenhängenden CW-Komplex X existiert eine kanonische Abbildung $\psi : H_*X \to H_*G$ mit $G = \pi_1 X$. Wenn es ein $n \geq 2$ gibt mit $\pi_i X = 0$ für $1 < i < n$, dann ist ψ ein Isomorphismus $H_i X \xrightarrow{\cong} H_i G$ für $i < n$ und die Sequenz*

$$\pi_n X \xrightarrow{h} H_n X \xrightarrow{\psi} H_n G \to 0$$

ist exakt. Hierbei ist $h : \pi_n X \to H_n X$ die Hurewiczabbildung.

Definition 1.49. Ein *kombinatorischer Pfad* in einem CW-Komplex ist eine Sequenz von orientierten 1-Zellen $e_1, \dots, e_n$, bei denen die Anfangsecke von e_{i+1} gleich der Endecke von e_i ist (für $i = 1, \dots, n-1$).

Bemerkung 1.50. Sei $G = \langle S \rangle$ die freie Gruppe erzeugt durch die Menge S. Sei X ein *Bukett* von Kreisen mit Indexmenge S, das heißt $X = \bigvee_{s \in S} S^1_s$. Dann ist X ein 1-dimensionaler CW-Komplex mit genau einer Ecke und einer 1-Zelle für jedes Element in S. Das heißt,

$$\pi_1(X) \cong G.$$

Weiterhin ist X ein $K(G,1)$-Komplex. Als Basispunkt in $\tilde{X}$ ist eine Ecke $\tilde{v}$ zu wählen. Diese repräsentatiert dann eindeutig den G-Orbit der Ecken von $\tilde{X}$ und erzeugt damit den freien $\mathbb{Z}[G]$-Modul $C_0(\tilde{x})$. Als Basis von $C_1(\tilde{X})$ nimmt man für jedes $s \in S$ eine orientierte 1-Zelle e_s von $\tilde{X}$,

[1] $H(F) = 0$

[2] homotopieäquivalent zum Nullkomplex

die über S^1_s liegt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei der Anfangspunkt von jeder dieser 1-Zellen $\tilde{v}$. Der Endpunkt ist daher $s\tilde{v}$. Es folgt $\partial e_s = s\tilde{v} - \tilde{v} = (s-1)\tilde{v}$. Man erhält also eine freie Auflösung

$$0 \to \mathbb{Z}[G]^{(S)} \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0,$$

mit $\mathbb{Z}[G]^{(S)}$ als dem freien $\mathbb{Z}[G]$-Modul mit Basis $(e_s)_{s\in S}$, $\partial e_s = s-1$ und $\varepsilon(g) = 1$ für alle $g \in G$.

Satz 1.51. **(Satz von Hopf)** *Sei $G \cong F/R$, wobei F frei und eine Einbettung von R nach F gegeben ist, die gerade die Isomorphie von G und F/R erfüllt. Dann gilt*

$$H_2(G) \cong R \cap [F,F]/[F,R].$$

Korollar 1.52. *Sei $G = F/R$ wie oben mit $F =< S >$, dann existiert eine exakte Sequenz*

$$0 \to R_{ab} \xrightarrow{\theta} \mathbb{Z}[G]^{(S)} \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

von G-Modulen, wobei $\mathbb{Z}[G]^{(S)}$ frei ist, mit Basis $(e_s)_{s\in S}$ und $\partial e_s = s-1$.

1.2.4. Lokale Koeffizientensysteme. Dieser Unterabschnitt ist dem Beweis des folgenden Satzes inklusive der darin auftauchenden Definition eines lokalen Koeffizientensystems gewidmet. Im Wesentlichen folgen diese Ausführungen Spanier [58], sie können aber zum Beispiel auch bei Cohen [12], Switzer [61] oder Whitehead [64] gefunden werden. Die ersten Ausführungen über lokale Koeffizienten stammen von Steenrod [59] und Eilenberg [15].

Satz 1.53. *Sei G eine Gruppe und M ein G-Modul. Dann gilt*

i) $H_*(G,M) = H_*(K(G,1);\mathcal{M})$
ii) $H^*(G,M) = H^*(K(G,1);\mathcal{M})$

Hierbei ist $\mathcal{M}$ das lokale Koeffizientensystem auf $K(G,1)$ assoziert zum G-Modul M.

Definition 1.54. [56] Ein *Gruppoid* ist ein Kategorie, in der jeder Morphismus ein Isomorphismus ist.

Satz 1.55. [58] *Für jeden topologischen Raum X existiert eine Kategorie $\mathcal{P}(X)$, deren Objekte die Punkte von X und deren Morphismen von a nach b die Homotopieklassen der Wege mit Endpunkt a und Anfangspunkt b sind. Die Verknüpfung der Morphismen ist das Produkt der Homotopieklassen der Wege. Diese Kategorie ist ein Gruppoid.*

Definition 1.56. [58] Die Kategorie $\mathcal{P}(X)$ wird als das *fundamentale Gruppoid* oder als die *Kategorie der Wegklassen* bezeichnet.

Definition 1.57. [58] Ein *lokales System* auf einem Raum X ist ein kovarianter Funktor vom fundamentalen Gruppoid in eine beliebige Kategorie. Für jede Kategorie $\mathcal{C}$ existiert eine Kategorie der lokalen Systeme auf X mit Werten in $\mathcal{C}$. Zwei lokale Systeme heißen äquivalent, wenn sie äquivalente Objekte in dieser Kategorie sind.

Definition 1.58. [58] Sei $q \geq 1$, sei $\sigma : \Delta^q \to X$ ein singuläres q-Simplex von X und sei ω_σ der Weg in X, den man erhält, indem man den linearen Weg von v_0 nach v_1 in Δ^q mit σ verknüpft. Sei weiterhin ein lokales System Γ von R-Moduln auf X gegeben.

Dann setzt man $\Delta_q(X,\Gamma)$ als den R-Modul der endlichen, nichtverschwindenden formalen Summen $\sum \alpha_\sigma \sigma$, in denen σ über der Menge der singulären q-Simplizes von X variiert und in denen die $\alpha_\sigma \in \Gamma(\sigma(v_0))$ für fast alle σ verschwinden. Weiterhin definiert man für $q > 0$ einen Homomorphismus $\partial : \Delta_q(X,\Gamma) \to \Delta_{q-1}(X,\Gamma)$ durch

$$\partial(\alpha\sigma) = \sum_{0<i\leq q} (-1)^i \alpha\sigma^{(i)} + \Gamma(\omega_\sigma)(\alpha)\sigma^{(0)}.$$

Unter diesen Bedingungen ist $\Delta(X,\Gamma)$ ein Kettenkomplex mit Randabbildung ∂. Wenn Γ ein lokales System von freien R-Modulen ist, dann ist auch $\Delta(X,\Gamma)$ frei. Für $A \subset X$ ist $\Delta(A,\Gamma|_A)$ ein Unterkomplex von $\Delta(X,\Gamma)$.

$H_*(X,A,\Gamma)$, die *Homologie von* (X,A) *mit lokalen Koeffizienten*, ist definiert als der Homologiemodul von

$$\Delta(X,A,\Gamma) = \Delta(X,\Gamma)/\Delta(A,\Gamma|_A).$$

Definition 1.59. [58] Sei Γ ein lokales System von R-Moduln auf X. Dann ist $\Delta^q(X,\Gamma)$ der Modul der Funktionen ϕ, die jedes singuläre q-Simplex σ von X auf ein Element $\varphi(\sigma) \in \Gamma(\sigma(v_0))$ abbilden. Man definiert einen Homomorphismus $\delta : \Delta^q(X,\Gamma) \to \Delta^{q+1}(X,\Gamma)$ durch

$$(\delta\varphi)(\sigma) = \sum_{0<i\leq q+1} (-1)^i \varphi(\sigma^{(i)}) + \Gamma(\omega_\sigma^{-1})(\varphi(\sigma^{(0)})).$$

Unter diesen Bedingungen ist $\Delta^*(X,\Gamma) = \{\Delta^q(X,\Gamma),\delta\}$ ein Kokettenkomplex und für $A \subset X$ ist die Einschränkung

$$\Delta^*(X,\Gamma) \to \Delta^*(A,\Gamma|_A)$$

ein Epimorphismus.

$H^*(X,A,\Gamma)$, die *Kohomologie von* (X,A) *mit lokalen Koeffizienten*, ist definiert als der Kohomologiemodul von

$$\Delta^*(X,A,\Gamma) = \ker[\Delta^*(X,\Gamma) \to \Delta^*(A,\Gamma|_A)].$$

Theorem 1.60. [15] *Die Homologiegruppe $H_q(X,\Gamma)$ eines Raumes X mit lokalem Koeffizientensystem Γ ist isomorph zu der äquivarianten Homologiegruppe $H_q^e(\tilde{X},A)$ der universellen Überlagerung $\tilde{X}$ von X. Hierbei ist $A = \Gamma_{x_0}$.*

Analog gilt $H^q(X,\Gamma) \cong H_e^q(\tilde{X},A)$.

Satz 1.61. [15] *Sei X ein azyklischer topologischer Raum. Sei W eine Gruppe, die fixpunktfrei auf X operiert. Dann gilt*

i) $H_q^e(X,A) \cong H_q(W,A)$,
ii) $H_e^q(X,A) \cong H^q(W,A)$.

1.3. Endlichkeitsbedingungen

Um mit den im ersten Abschnitt erarbeiteten Grundlagen arbeiten zu können, benötigt man häufig einschränkende Endlichkeitsbedingungen. Diejenigen, welche in den nachfolgenden Kapiteln genutzt werden, sollen nun im Folgenden dargestellt werden.

1.3.1. Die kohomologische Dimension. Die erste Endlichkeitsbedingung, die betrachtet werden soll, beschränkt die Länge der Auflösung.

Definition 1.62. Sei R ein Ring und M ein R-Modul. Die *projektive Dimension* $\mathrm{pd}_R(M)$ von M ist das Infimum aller ganzen Zahlen n, für die M eine projektive Auflösung $0 \to P_n \to \cdots \to P_0 \to M \to 0$ der Länge n hat.

Lemma 1.63. *Sei R ein Ring und M ein R-Modul. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

i) $\mathrm{pd}_R(M) \leq n$.
ii) $\mathrm{Ext}_R^i(M,-) = 0$ *für* $i > n$.
iii) $\mathrm{Ext}_R^{n+i}(M,-) = 0$.
iv) *Sei* $0 \to K \to P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \to M \to 0$ *eine beliebige exakte Sequenz von R-Moduln, mit P_i projektiv, dann ist K projektiv.*

Definition 1.64. Die *kohomologische Dimension* von G, bezeichnet mit $\mathrm{cd}(G)$, ist die kleinste ganze Zahl n, die die Bedingungen in Lemma 1.63 für $R = \mathbb{Z}[G]$ und $M = \mathbb{Z}$ erfüllt. Falls ein solches n nicht existiert, wird $\mathrm{cd}(G) = \infty$ gesetzt. Das heißt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{cd}(G) &= \mathrm{pd}_{\mathbb{Z}[G]}\,\mathbb{Z} \\
&= \inf\{n : \mathbb{Z} \text{ hat eine projektive Auflösung der Länge } n\} \\
&= \inf\{n : H^i(G,-) = 0 \text{ für } i > n\} \\
&= \sup\{n : H^n(G,M) \neq 0 \text{ für einen } G\text{-Modul } M\}
\end{aligned}$$

Bemerkung 1.65. Die *geometrische Dimension* von G, bezeichnet mit $\mathrm{gd}(G)$, ist definiert als die minimale Dimension eines $K(G,1)$-Komplexes. Da der zelluläre Kettenkomplex der universellen Überlagerung eines $K(G,1)$-Komplexes Y eine freie Auflösung von $\mathbb{Z}$ über $\mathbb{Z}[G]$ (mit einer Länge gleich der Dimension von Y) liefert, gilt:

$$\mathrm{cd}(G) \leq \mathrm{gd}(G)$$

Lemma 1.66. (Eilenberg-Trick) *Sei P ein projektiver Modul über einem beliebigen Ring R. Dann existiert ein freier Modul F so, dass*

$$P \oplus F \cong F.$$

Satz 1.67. *Für jede Gruppe G existiert eine freie Auflösung von $\mathbb{Z}$ über $\mathbb{Z}[G]$ der Länge $\mathrm{cd}(G)$.*

1.3.2. Gruppen vom Typ FP_n. Die zweite Endlichkeitsbedingung betrachtet nur die Dimension der in der Auflösung auftauchenden Moduln.

Definition 1.68. Eine (Teil-)Auflösung F ist *von endlichem Typ*, wenn alle F_i endlich erzeugt sind.

Ein Modul M ist *vom Typ* FP_n, mit $n \geq 0$, falls es eine partielle Auflösung $F_n \to \cdots \to F_0 \to M$ von M gibt so, dass die einzelnen F_i projektiv und endlich erzeugt sind.

Lemma 1.69. (Schanuels Lemma) *Seien P und P' projektiv und seien $0 \to K \to P \to M \to 0$ und $0 \to K' \to P' \to M \to 0$ exakt. Dann gilt $P \oplus K' \cong P' \oplus K$.*

Lemma 1.70. *Seien $0 \to F_n \to \cdots \to F_0 \to M \to 0$ sowie $0 \to F'_n \to \cdots \to F'_0 \to M \to 0$ exakte Sequenzen mit F_i und F'_i projektiv für $i \leq n-1$. Dann gilt:*

$$F_0 \oplus F'_1 \oplus F_2 \oplus \ldots \cong F'_0 \oplus F_1 \oplus F'_2 \oplus \ldots$$

Das heißt, wenn die F_i und die F'_i endlich erzeugt sind für $i \leq n-1$, dann ist F_n endlich erzeugt genau dann, wenn auch F'_n endlich erzeugt ist.

Satz 1.71. *Sei M ein Modul und $n \geq 0$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

i) *Es gibt eine Teilauflösung $F_n \to \cdots \to F_0 \to M \to 0$, wobei die F_i alle frei und endlich erzeugt sind.*
ii) *M ist vom Typ FP_n.*
iii) *M ist endlich erzeugt und für jede projektive Teilauflösung*

$$P_k \to \cdots \to P_0 \to M \to 0$$

von endlichem Typ mit $k < n$ ist $\ker\{P_k \to P_{k-1}\}$ endlich erzeugt.

Korollar 1.72. *Sei M ein Modul und $n \geq 0$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

i) *M besitzt eine freie Auflösung endlichen Typs.*
ii) *M besitzt eine projektive Auflösung endlichen Typs.*
iii) *M ist vom Typ FP_n für alle $n \geq 0$.*

Bemerkung 1.73. Wenn die Bedingungen des Korollars erfüllt sind, nennt man M *vom Typ* FP_∞.

Definition 1.74. Eine Gruppe G ist *vom Typ* FP_n, wenn $\mathbb{Z}$ als $\mathbb{Z}[G]$-Modul vom Typ FP_n ist.

Satz 1.75. *Sei $H \subset G$ eine Untergruppe von endlichem Index. Dann ist G vom Typ FP_n genau dann, wenn H vom Typ FP_n ist.*

1.3.3. Die Typen FP und FL.

Im Folgenden werden nun die beiden obigen Endlichkeitsbedingungen zusammengeführt, um aus ihnen zwei weitere zu gewinnen, die tiefergehende topologische Aussagen zulassen.

Definition 1.76. Eine Gruppe G ist *vom Typ* FP, wenn $\mathbb{Z}$ eine endliche projektive Auflösung von endlichem Typ über $\mathbb{Z}[G]$ zulässt.

Satz 1.77. *G ist vom Typ* FP *genau dann, wenn* $\mathrm{cd}(G) < \infty$ *und G vom Typ* FP_∞ *ist.*

Bemerkung 1.78. Die projektive Teilauflösung, die im Beweis des Satzes gewählt wurde, hätte auch frei gewählt werden können, so dass man am Ende eine Auflösung

$$0 \to P \to F_{n-1} \to \cdots \to F_0 \to \mathbb{Z} \to 0$$

mit F_i frei erhalten hätten. Leider gibt es keinen Grund, warum auch P dann frei sein sollte. Dies führt uns zur Definition 1.79. Allerdings ist bis heute noch kein Gegenbeispiel bekannt, in dem eine Gruppe vom Typ FP ist und $\mathbb{Z}$ keine endliche freie Auflösung von endlichem Typ über $\mathbb{Z}[G]$ zulässt (vgl. [9, S. 201]).

Definition 1.79. Eine Gruppe G ist *vom Typ* FL, wenn $\mathbb{Z}$ eine endliche freie Auflösung von endlichem Typ über $\mathbb{Z}[G]$ zulässt.

1.3.4. Induktion und Koinduktion.

Die Induktion ist ein wichtiges Hilfsmittel, da sie die Homologie einer Gruppe zu der Homologie einer Untergruppe in Beziehung setzt.

Definition 1.80. Sei G eine Gruppe und H eine Untergruppe von G. Dann ist die *Induktion von H nach G*

$$\mathrm{Ind}_H^G(M) := \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[H]} M$$

und die *Koinduktion von H nach G*

$$\mathrm{Coind}_H^G(M) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[H]}(\mathbb{Z}[G],M).$$

Hierbei ist M ein H-Modul. Ein Modul der Form $\mathrm{Ind}_1^G(M)$ wird als *induzierter Modul* bezeichnet. Ein Modul der Form $\mathrm{Coind}_1^G(M)$ heißt *koinduzierter Modul*.

Bemerkung 1.81. Alle freien Moduln sind induziert.

Lemma 1.82. [5] *Sei B ein rechter G-Modul und A ein induzierter linker G-Modul, dann ist auch $B \otimes A$ (mit diagonaler G-Operation) induziert.*

Satz 1.83. *Sei G eine Gruppe und seien M,M',M'' beliebige $\mathbb{Z}[G]$-Moduln.*

i) $H_0(G,M) \cong M_G$.
ii) $H^0(G,M) \cong M^G$.
iii) *Sei $0 \to M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{j} M'' \to 0$ eine exakte Sequenz und n eine beliebige ganze Zahl, dann existiert ein natürlicher Homomorphismus $\partial : H_n(G,M'') \to H_{n-1}(G,M')$ so, dass die Sequenz*

$$\begin{aligned} \cdots \to H_1(G,M) &\to H_1(G,M'') \xrightarrow{\partial} H_0(G,M') \\ &\to H_0(G,M) \to H_0(G,M'') \to 0 \end{aligned}$$

exakt ist.
iv) *Sei $0 \to M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{j} M'' \to 0$ eine exakte Sequenz und n eine beliebige ganze Zahl, dann existiert ein natürlicher Homomorphismus $\delta : H^n(G,M'') \to H^{n+1}(G,M')$ so, dass die Sequenz*

$$\begin{aligned} 0 \to H^0(G,M') &\to H^0(G,M) \to H^0(G,M'') \\ &\xrightarrow{\delta} H^1(G,M') \to H^1(G,M) \to \cdots \end{aligned}$$

exakt ist.
v) *Wenn P ein projektiver $\mathbb{Z}[G]$-Modul ist, dann ist $H_n(G,P) = 0$ für $n > 0$.*
vi) *Wenn Q ein injektiver $\mathbb{Z}[G]$-Modul ist, dann ist $H^n(G,Q) = 0$ für $n > 0$.*

Satz 1.84. (Shapiros Lemma) *Sei $H \subset G$ und M ein H-Modul, dann gilt*

$$H_*(H,M) \cong H_*(G, \mathrm{Ind}_H^G(M))$$

und

$$H^*(H,M) \cong H^*(G, \mathrm{Coind}_H^G(M)).$$

Lemma 1.85. *Sei G eine Gruppe, H eine Untergruppe von endlichem Index k und M ein H-Modul. Dann gilt $\mathrm{Ind}_H^G M = \mathrm{Coind}_H^G M$.*

1.3.5. Dualitätsgruppen. Schlussendlich wird hier noch ein letzter Typus von Gruppen eingeführt, die Dualitätsgruppen, um unter gewissen Voraussetzungen die Poincaré-Dualität ausnutzen zu können.

Theorem 1.86. [5] *Sei G eine Gruppe vom Typ* FP. *Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

i) *Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ und einen G-Modul D so, dass*
$$H^i(G,M) \cong H_{n-i}(G,D \otimes M)$$
für alle G-Moduln M und alle $i \in \mathbb{N}$.

ii) *Es existiert ein $n \in \mathbb{N}$ so, dass $H^i(G,\mathbb{Z}[G] \otimes A) = 0$ für alle $i \neq n$ und alle abelschen Gruppen A.*

iii) *Es existiert ein $n \in \mathbb{N}$ so, dass $H^i(G,\mathbb{Z}[G]) = 0$ für alle $i \neq n$, und $H^n(G,\mathbb{Z}[G])$ ist torsionsfrei.*

iv) *Es gibt natürliche Isomorphismen*
$$H^i(G,-) \cong H_{n-i}(G,D \otimes -),$$
mit $n = \mathrm{cd}(G)$ und $D = H^n(G,\mathbb{Z}[G])$, die kompatibel sind mit den Verknüpfungshomomorphismen sowohl in der langen Homologiesequenz als auch in der langen Kohomologiesequenz assoziert zu einer kurzen exakten Sequenz von Moduln.

Definition 1.87. Eine Gruppe G, die die Bedingungen in Theorem 1.86 erfüllt, wird als *Dualitätsgruppe* bezeichnet.

Wenn zusätzlich das auftauchende D als abelsche Gruppe unendlich zyklisch ist, nennt man G eine *Poincaré-Dualitätsgruppe*. In diesem Fall heißt G *orientierbar*, wenn G trivial auf D operiert, und ansonsten *nicht-orientierbar*.

Bemerkung 1.88. Wenn G eine orientierbare Poincaré-Dualitätsgruppe ist, so nimmt iv) aus Theorem 1.86 die bekannte Form
$$H^i(G,M) \cong H_{n-i}(G,M)$$
an.

Die in Theorem 1.86 auftauchenden Dualitätsisomorphismen werden gegeben durch das Cap-Produkt
$$\cap z : H^i(G,M) \xrightarrow{\cong} H_{n-i}(G,D \otimes M)$$
mit einem festen Element z aus $H_n(G,D)$.

KAPITEL 2

l^p-Kohomologie

Nach diesen Vorarbeiten wird es nun langsam Zeit, sich mit dem eigentlichen Thema dieser Arbeit zu beschäftigen.

2.1. Definition

Am Anfang dieses Kapitels stehen zwei Definitionen, die sich sofort aus den Vorarbeiten und ein wenig Banachraumtheorie ableiten.

Definition 2.1. Sei $\mathcal{F}(G)$ die Menge der komplexwertigen Funktionen auf einer Gruppe G. Dann lässt sich jedes $f \in \mathcal{F}$ als formale Summe $\sum\limits_{g\in G} f_g g$ repräsentieren mit $f_g \in \mathbb{C}$ und $f(g) = f_g$. Für jede reelle Zahl $p \geq 1$ besteht $l^p(G)$ aus den formalen Summen $f = \sum\limits_{g\in G} f_g g$ in $\mathcal{F}(G)$, in denen nur abzählbar viele Einträge ungleich null sind und für die $\sum\limits_{g\in G} |f_g|^p = (|f|_p)^p < \infty$ gilt. Entsprechend besteht $l^\infty(G)$ aus den formalen Summen mit nur abzählbar vielen Einträgen ungleich null, für die $\sup_{g\in G}(f_g) = |f|_\infty < \infty$ gilt. $l^p(G)$ ist mit den angegebenen Normen ein Banachraum.

Nach Definition 1.7 ist $l^p(G)$ ein G-Modul, da G von rechts auf $l^p(G)$ operiert. Somit lassen sich die Ergebnisse aus den letzten Kapiteln auf diesen Fall übertragen.

Nach Huppert [27] lässt sich bis auf Isomorphie die l^p-Kohomologie über die Standardauflösung von $\mathbb{Z}$ über $\mathbb{Z}[G]$ definieren.

Definition 2.2. Sei $C^0_{(p)}(G) := l^p(G)$ und für $n \geq 1$ sei $C^n_{(p)}(G)$ die Menge aller Homomorphismen von dem n-fachen direkten Produkt von G nach $l^p(G)$. Die Addition sei jeweils punktweise definiert.

Dann definiert man $\delta_n \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C^n_{(p)}(G), C^{n+1}_{(p)}(G))$ durch

$$(\delta_0 f)(g) := f - fg$$

für $f \in C^0_{(p)}(G)$ und

$$(\delta_n f)(g_1, \ldots, g_{n+1}) \;\; := \;\; f(g_2, \ldots, g_{n+1})$$

$$+\sum_{i=1}^{n}(-1)^i f(g_1,\dots,g_{i-1},g_{i+1},\dots,g_{n+1})$$
$$+(-1)^{n+1}f(g_1,\dots,g_n)g_{n+1}$$

für $f \in C^n_{(p)}(G)$.

Man setzt nun $Z^n_{(p)}(G) := \ker(\delta_n)$ für $n \geq 0$, $B^0_{(p)}(G) := 0$ und $B^n_{(p)}(G) := \operatorname{im}(\delta_{n-1})$ für $n \geq 1$. Die Elemente von $C^n_{(p)}(G)$ heißen *n-Koketten*, die von $Z^n_{(p)}(G)$ *n-Kozykeln* und die von $B^n_{(p)}(G)$ *n-Koränder*.

Die Standardauflösung ist aber in unserem Kontext normalerweise kein sinnvolles Arbeitsmittel, deshalb definiert man mit Verweis auf Definition 1.30:

Definition 2.3. Sei G eine Gruppe und

$$\cdots \to F_2 \xrightarrow{\partial_2} F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\partial_0} \mathbb{Z} \to 0$$

eine projektive Auflösung von $\mathbb{Z}$ über $\mathbb{Z}[G]$. Dann ist die *l^p-Homologie von G* definiert als

$$H^{(p)}_n(G) := H_n(G,l^p(G)) = \ker(\partial_n \otimes 1)/\operatorname{im}(\partial_{n+1} \otimes 1)$$

und die *l^p-Kohomologie von G* als

$$H^n_{(p)}(G) := H^n(G,l^p(G)) = \ker(\partial^*_{n+1})/\operatorname{im}(\partial^*_n).$$

Die *reduzierte l^p-Homologie von G* ist definiert als

$$\overline{H^{(p)}_n(G)} := \ker(\partial_n \otimes 1)/\overline{\operatorname{im}(\partial_{n+1} \otimes 1)},$$

und die *reduzierte l^p-Kohomologie von G* als

$$\overline{H^n_{(p)}(G)} := \ker(\partial^*_{n+1})/\overline{\operatorname{im}(\partial^*_n)}.$$

Hierbei ist ∂^*_i die *duale Abbildung* zu ∂_i definiert durch $\partial^*_i(\varphi) := \varphi \circ \partial_i$.

Bemerkung 2.4. Diese ausführliche Wiederholung ist notwendig, da die unreduzierte Kohomologie erst einmal nur ein Objekt der Algebra ist. Um die Eigenschaften der l^p-Räume als Banachräume nutzen zu können, ist es sinnvoll zu erwarten, dass auch die Homologiegruppen Banachräume sind. Der Kern einer Randabbildung ist ein Banachraum mit der von $l^p(G)$ transportierten Norm. Das Bild hingegen ist im Allgemeinen nicht vollständig, sondern trägt erst einmal nur die Norm des großen Raumes. Damit der Quotient ein Banachraum ist, muss das Bild abgeschlossen sein (vgl. [34, Kapitel 1.7]).

In diesem Zusammenhang ist es sinnvoll, ein paar Bemerkungen über die Normen, die genutzt werden, zu verlieren. Üblicherweise beschäftigt man sich im Folgenden mit Gruppen vom Typ FP_n, daher sind die behandelten Moduln jeweils endlich viele Kopien von $l^p(G)$. Es ist klar, dass die „innere“ Norm innerhalb der einzelnen Komponenten dieselbe ist wie in $l^p(G)$. Da man sich aber mit endlich vielen Kopien beschäftigen, ist es prinzipiell egal, welche „äußere“ Norm auf dem Gesamtraum genutzt wird, da sie alle äquivalent zueinander sind. Normalerweise wird aus Gründen der Einfachheit im Folgenden die 1-Norm als äußere Norm nutzen.

Aus Satz 1.53 ergibt sich als direkte Folgerung aus der Definition:

Satz 2.5. *Sei G eine Gruppe und X ein $K(G,1)$-Komplex. Dann gilt:*
$H_*^{(p)}(G) = H_*(X; l^p(G))$ *und*
$H^*_{(p)}(G) = H^*(X; l^p(G))$.

Lemma 2.6. *Sei $n \in \mathbb{N}$ und G eine Gruppe vom Typ FP_n, dann existiert eine projektive Teilauflösung*

$$\cdots \to P \xrightarrow{\partial_{n+1}} F_n \xrightarrow{\partial_n} \dots \xrightarrow{\partial_2} F_1 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z} \to 0$$

so, dass die F_i freie, endlich erzeugte $\mathbb{Z}[G]$-Moduln und die Randabbildungen $\partial_i \otimes 1$ des dazugehörenden, mit $l^p(G)$ tensorierten Komplexes für $i \leq n+1$ beschränkte lineare Operatoren sind.

Beweis. Satz 1.71 liefert uns eine solche Auflösung, nur dass die Randabbildungen noch nicht notwendigerweise beschränkt sind.

Die 0-te Randabbildung im tensorierten Komplex ist die Nullabbildung und somit beschränkt.

Die Randabbildungen ∂_i für $1 \leq i \leq n$ lassen sich beschreiben durch die Multiplikation mit einer Matrix $A_i \in M_{d_{i-1} \times d_i}(\mathbb{Z}[G])$, wobei d_i die Dimension von F_i ist. Das heißt, dass die Abbildungen $\partial_i \otimes 1$ weiterhin als Multiplikation mit der Matrix A_i aufzufassen ist, nur dass diese Multiplikation nicht mehr mit Elementen in $\mathbb{Z}[G]^{d_i}$ passiert, sondern mit Elementen in $l^p(G)^{d_i}$. Das heißt, mit $\|x\| = \sum_{n=1}^{d_i} \|x_i\|_p$ für alle $x \in l^p(G)^{d_i}$ gilt

$$\|A_i x\| \leq \left(\sum_{k=1}^{d_{i-1}} \sum_{l=1}^{d_i} |a_{kl}| \right) \|x\| .$$

Folglich sind diese Randabbilungen des tensorierten Komplexes ebenfalls beschränkte lineare Operatoren.

Die letzte zu betrachtende Randabbildung $\partial_{n+1} \otimes 1$ ist als beschränkter linearer Operator frei wählbar. Das einzige, worauf man achten muss, ist, dass sich der Definitionsbereich schreiben lässt als beliebiger projektiver

$\mathbb{Z}[G]$-Modul P tensoriert mit $l^p(G)$. Zum Beispiel lässt sich dieser folgendermaßen konstruieren: $\ker(\partial_n)$ ist ein abgeschlossener Unterraum, folglich kann man diesen durch eine – nicht notwendigerweise endliche – Menge von Erzeugern beschreiben. Als P wählt man nun einen freien Modul mit einer Dimension pro Erzeuger. Der Randoperator bildet dann Erzeuger auf Erzeuger ab, ist dementsprechend beschränkt. Dieses Verfahren lässt sich natürlich auch für höhere Randoperatoren durchführen, was aber weniger interessant wird, da dann die zugehörigen Moduln nicht mehr endlich erzeugt sind. □

2.2. Dualität von Homologie und Kohomologie

Bevor man sich den interessanteren Fragestellungen widmet, müssen noch einige funktionalanalytische Grundlagen zitiert werden.

Definition 2.7. Sei X ein normierter Raum und seien A und B Teilmengen von X beziehungsweise des topologischen Dualraums X^*. Dann sind die *Annihilatoren* $A^\perp$ und ${}^\perp B$ definiert als

$$A^\perp := \{x^* : x^* \in X^*, x^*x = 0 \; \forall \, x \in A\}$$

$${}^\perp B := \{x : x \in X, x^*x = 0 \; \forall \, x^* \in B\}.$$

Proposition 2.8. [34] *Sei X ein normierter Raum und seien A und B Teilmengen von X bzw. X^*. Dann sind $A^\perp$ und ${}^\perp B$ abgeschlossene Unterräume von X^* bzw. X. Weiterhin gilt ${}^\perp(A^\perp) = \overline{A}$, falls A ein Unterraum von X ist.*

Theorem 2.9. [34] *Sei M ein Unterraum eines normierten Raumes X. Dann gibt es einen isometrischen Isomorphismus, der M^* mit $X^*/M^\perp$ identifiziert.*

Wenn M abgeschlossen ist, dann gibt es einen isometrischen Isomorphismus, der $(X/M)^*$ mit $M^\perp$ identifiziert.

Lemma 2.10. [34] *Seien X, Y normierte Räume und sei $T \in B(X,Y)$. Dann gilt* $\ker(T) = {}^\perp(T^*(Y^*))$ *und* $\ker(T^*) = (T(X))^\perp$.

Satz 2.11. *Sei $1 < p \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ und G eine Gruppe vom Typ FP_n. Dann ist $\overline{H^i_{(p)}(G)}$ dual zu $\overline{H_i^{(q)}(G)}$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ für $i \leq n$.*

BEWEIS. Da die einzelnen F_i endlich erzeugt und projektiv sind für $i \leq n$, sind die Räume $F_i \otimes_G l^p(G)$ und $\mathrm{Hom}_G(F_i, l^q(G))$ dual zueinander:

$$\begin{aligned} (F_i \otimes_G l^p(G))^* &\cong F_i^* \otimes_G l^p(G)^* \\ &\cong \mathrm{Hom}_G(F_i^{**}, l^p(G)^*) \\ &\cong \mathrm{Hom}_G(F_i, l^q(G)). \end{aligned}$$

Die jeweiligen Randabbildungen sind zueinander dual, da $-\otimes_G l^p(G)$ ein kovarianter Funktor und $\mathrm{Hom}_G(-, l^q(G))$ ein kontravarianter Funktor ist (vgl. [9, Kapitel III.1]).

Aus Gründen der klareren Darstellung sei hier die Kurzschreibweise $C_i := F_i \otimes_G l^p(G)$ mit der Randabbildung $\varphi_i : C_{i+1} \to C_i$ und entsprechend $C_i^* := \mathrm{Hom}_G(F_i, l^q(G))$ mit der entsprechenden Randabbildung $\varphi_i^* : C_i^* \to C_{i+1}^*$ genutzt.

Die Sequenz

$$0 \to \{f \in C_i^* : f|_{\ker(\varphi_{i-1})} \equiv 0\} \to C_i^* \to \ker(\varphi_{i-1})^* \to 0$$

ist exakt, da C_i^* die direkte Summe der beiden anderen Räume ist. Wenn man diese Sequenz einschränkt auf $\{f \in C_i^* : f|_{\overline{\mathrm{im}(\varphi_i)}} \equiv 0\}$, ergibt sich die Exaktheit von

$$\begin{aligned} 0 \quad \to \quad & \{f \in C_i^* : f|_{\ker(\varphi_{i-1})} \equiv 0\} \to \{f \in C_i^* : f|_{\overline{\mathrm{im}(\varphi_i)}} \equiv 0\} \\ \to \quad & \{f \in \ker(\varphi_{i-1})^* : f|_{\overline{\mathrm{im}(\varphi_i)}} \equiv 0\} \to 0. \end{aligned}$$

Nun gilt nach Lemma 2.10 aber

$$\begin{aligned} \ker(\varphi_i^*) &= \mathrm{im}(\varphi_i)^\perp \\ &= \{f \in C_i^* : f|_{\mathrm{im}(\varphi_i)} \equiv 0\} \\ &= \{f \in C_i^* : f|_{\overline{\mathrm{im}(\varphi_i)}} \equiv 0\}. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung gilt wegen der Stetigkeit von f. Mit Lemma 2.10 und Proposition 2.8 erhält man

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{im}(\varphi_{i-1}^*)} &= ({}^\perp\mathrm{im}(\varphi_{i-1}^*))^\perp \\ &= \ker(\varphi_{i-1})^\perp \\ &= \{f \in C_i^* : f|_{\ker(\varphi_{i-1})} \equiv 0\}. \end{aligned}$$

Weiterhin folgt $\Big((\ker(\varphi_{i-1})/\overline{\mathrm{im}(\varphi_i)}\Big)^* = \{f \in \ker(\varphi_{i-1})^* : f|_{\overline{\mathrm{im}(\varphi_i)}} \equiv 0\}$ aus Theorem 2.9. Somit gilt

$$\Big(\ker(\varphi_{i-1})/\overline{\mathrm{im}(\varphi_i)}\Big)^* = \ker(\varphi_i^*)/\overline{\mathrm{im}(\varphi_{i-1}^*)}.$$

□

Bemerkung 2.12. Der Beweis dieses Satzes beinhaltet, dass durch jede Bilinearform auf den Komplexen eine Bilinearform auf den (Ko-)Homologiegruppen induziert wird. Insbesondere gilt dies für die Auswertungspaarung.

2.3. Beispiele

Beispiel 2.13. Sei $p \geq 1$ und sei G die triviale Gruppe. Dann ist $H_i^{(p)}(G) = 0$ für $i > 0$ und $H_0^{(p)}(G) = \mathbb{C}$.

BEWEIS. Die triviale Gruppe hat als Auflösung $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{id} \mathbb{Z} \to 0$, die l^p-Funktionen auf G sind isomorph zu $\mathbb{C}$, also ergibt das Tensorieren der Auflösung mit den l^p-Funktionen auf G den Komplex $0 \to \mathbb{C} \to 0$. Dieser hat an der Stelle 0 die Homologiegruppe $\mathbb{C}$.

Beispiel 2.14. Sei $p \geq 1$ und G eine endliche Gruppe. Dann gilt
$$H_i^{(p)}(G) = 0$$
für $i > 0$ und $H_0^{(p)}(G) = \mathbb{C}$.

BEWEIS. Dies lässt sich auf zweierlei Arten beweisen. Zum einen mit Satz 2.16 und Beispiel 2.13 oder direkt: Jede endliche Gruppe hat die triviale Gruppe als Untergruppe von endlichem Index, ist also insbesondere nach Satz 1.75 vom Typ FP_∞. Die l^p-Funktionen auf G sind isomorph zum komplexen Gruppenring $\mathbb{C}[G]$. Das Tensorieren mit $\mathbb{C}[G]$ macht aus den $\mathbb{Z}[G]$-linearen Randabbildungen $\mathbb{C}[G]$-lineare Randabbildungen, gleichzeitig werden aus den freien $\mathbb{Z}[G]$-Moduln $\mathbb{C}[G]$-Moduln. Die Exaktheit der Auflösung außer an der 0-ten Stelle (der Modul $\mathbb{Z}$ wird abgeschnitten) bleibt also gewahrt.

Bemerkung 2.15. Im Gegensatz zu der normalen Gruppenhomologie (vgl. [1]) kann l^p-Homologie also keine Unterschiede zwischen endlichen Gruppen entdecken.

Satz 2.16. *Sei $H \subset G$ eine Untergruppe von G von endlichem Index. Dann gilt $H_i^{(p)}(G) = H_i^{(p)}(H)$ und $H^i_{(p)}(G) = H^i_{(p)}(H)$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$ und $p \geq 1$.*
Weiterhin gilt $\overline{H_i^{(p)}(G)} = \overline{H_i^{(p)}(H)}$ und $\overline{H^i_{(p)}(G)} = \overline{H^i_{(p)}(H)}$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$ und $1 < p \in \mathbb{R}$.

BEWEIS. Die erste Aussage ist eine direkte Folgerung aus Satz 1.84, Lemma 1.85 und der Tatsache $\operatorname{Ind}_H^G(l^p(H)) = \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[H]} l^p(H) \cong l^p(G)$. Die zweite Aussage folgt aus dem Beweis von Shapiros Lemma bei Brown [9, S. 73], der Tatsache, dass $\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[H]} l^p(H)$ isometrisch isomorph zu $l^p(G)$ ist, falls H in G endlichen Index hat, der Stetigkeit der Randabbildungen (Lemma 2.6) und aus dem Dualitätssatz 2.11.

Lemma 2.17. *Sei $1 < p < \infty$ und sei G eine unendliche Gruppe. Dann gilt*
$$\overline{H_0^{(p)}(G)} = \overline{H^0_{(p)}(G)} = 0.$$

BEWEIS. Mit Bemerkung 1.31 und der Dualität aus Satz 2.11 reicht es zu zeigen, dass $l^p(G)^G$ verschwindet. Das einzige Element m aus $l^p(G)$ das $gm = m$ für alle $g \in G$ erfüllt, ist aber die Null. □

Bemerkung 2.18. Es gilt $H_0^{(\infty)}(G) = \mathbb{C}$, da $l^\infty(G)^G$ aus den auf G konstanten Funktionen besteht.

Lemma 2.19. *Sei $1 < p < \infty$. Dann ist $H_i^{(p)}(\mathbb{Z}) = H^i_{(p)}(\mathbb{Z}) = 0$ für $i > 1$, $H_1^{(p)}(\mathbb{Z}) = H^0_{(p)}(\mathbb{Z}) = 0$ und $\overline{H_i^{(p)}}(\mathbb{Z}) = \overline{H^i_{(p)}}(\mathbb{Z}) = 0$ für alle i.*

BEWEIS. Zuerst schreibt man $\mathbb{Z}$ als unendliche zyklische Gruppe G mit Erzeuger t. In diesem Fall erhält man als Auflösung

$$0 \to \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z} \to 0.$$

Folglich ist $H_*^{(p)}(G)$ die Homologie und $H^*_{(p)}(G)$ die Kohomologie von

$$0 \to l^p(G) \xrightarrow{t-1} l^p(G) \to 0.$$

Die Aussage folgt dann aus Lemma 2.17 und dem dazugehörigen Beweis. □

Bemerkung 2.20. Lemma 2.19 gibt ein gutes Beispiel für den Unterschied zwischen reduzierter und unreduzierter Homologie und Kohomologie. Das Bild von $t-1$ ist nämlich nicht gleich $l^p(G)$. Zum Beispiel ist das Element t selbst nicht im Bild dieser Abbildung. Nur der Abschluss des Bildes repariert dieses Problem.

2.4. Ein erster Verschwindungssatz

Lemma 2.21. *Sei G eine Gruppe und $\underline{h} \in Z(G)$ ein Element aus dem Zentrum der Gruppe. Sei weiterhin $\varepsilon : F \to \mathbb{Z}$ eine projektive Auflösung von $\mathbb{Z}$ über $\mathbb{Z}[G]$. Dann ist h, die Multiplikation mit dem Element $\underline{h}$, kettenhomotop zur Identität auf $F^* := \mathrm{Hom}_G(F, l^p(G))$. Weiterhin ist h eine Homotopieäquivalenz.*

BEWEIS. Der Beweis läuft in drei Schritten ab. Erstens ist zu zeigen, dass h eine Kettenabbildung und Homotopieäquivalenz ist, zweitens, dass für die Standardauflösung die Aussage des Lemmas gilt, und zu guter Letzt, dass man die Eigenschaft von der Standardauflösung übertragen kann auf eine beliebige andere projektive Auflösung.

Schritt 1: h ist beschränkt, da $|\varphi|_p = |\underline{h}\varphi|_p = |h(\varphi)|_p$ gilt. Da $\underline{h}$ ein Element aus dem Zentrum der Gruppe G ist, bleibt die Gleichheit $\varphi(x) = (a\varphi)(a^{-1}x)$ auch bei Multiplikation mit $\underline{h}$ erhalten. Da die F_i und damit auch $\mathrm{Hom}_G(F_i, l^p(G))$ insbesondere $\mathbb{Z}[G]$-Moduln sind, ist die Multiplikation mit einem Element aus G ein $\mathbb{Z}[G]$-Modulhomomorphismus.

Schlussendlich sind auch die Randabbildungen $\mathbb{Z}[G]$-Homomorphismen, vertauschen also mit der Multiplikation mit einem Element aus $\mathbb{Z}[G]$. Folglich ist h eine Kettenabbildung. Die gesuchte Umkehrabbildung h^{-1} ist die Multiplikation mit $\underline{h}^{-1}$.

Schritt 2: Sei nun $\zeta : C \to \mathbb{Z}$ die Standardauflösung (vgl. 1.39) von $\mathbb{Z}$ über $\mathbb{Z}[G]$. Das heißt, die Randabbildung ∂ ist definiert als

$$\partial\varphi(x_0,\dots,x_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \varphi(x_0,\dots,x_{i-1},\widehat{x_i},x_{i+1},\dots,x_n),$$

wobei „$\widehat{\ }$" wie üblich das Weglassen des ausgezeichneten Terms bedeutet. Sei nun $j : F_n \to F_{n+1}$[1] definiert als

$$j\varphi(x_0,\dots,x_n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \varphi(x_0,\dots,x_k,h(x_k),\dots,h(x_n)),$$

dann ist j erneut ein $\mathbb{Z}[G]$-Modulhomomorphismus und beschränkt. Folglich gilt

$$\begin{aligned}
&(\partial j + j\partial)(\varphi(x)) \\
= \;& \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k} (-1)^{i+k+1} \varphi(x_0,\dots,\widehat{x_i},\dots,x_k,h(x_k),\dots,h(x_n)) \\
&+ \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=k}^{n} (-1)^{i+k+2} \varphi(x_0,\dots,x_k,h(x_k),\dots,\widehat{h(x_i)},\dots,h(x_n)) \\
&+ \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{i-1} (-1)^{i+k+1} \varphi(x_0,\dots,x_k,h(x_k),\dots,\widehat{h(x_i)},\dots,h(x_n)) \\
&+ \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=i+1}^{n} (-1)^{i+k} \varphi(x_0,\dots,\widehat{x_i},\dots,x_k,h(x_k),\dots,h(x_n)) \\
= \;& \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k} (-1)^{i+k+1} \varphi(x_0,\dots,\widehat{x_i},\dots,x_k,h(x_k),\dots,h(x_n)) \\
&+ \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{i+k} \varphi(x_0,\dots,\widehat{x_i},\dots,x_k,h(x_k),\dots,h(x_n)) \\
&+ \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=k}^{n} (-1)^{i+k+2} \varphi(x_0,\dots,x_k,h(x_k),\dots,\widehat{h(x_i)},\dots,h(x_n))
\end{aligned}$$

[1]Die Grundidee für diese Kettenhomotopie stammt in einem anderen Kontext aus [53].

$$
\begin{aligned}
& + \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=k+1}^{n} (-1)^{i+k+1} \varphi(x_0, \ldots, x_k, h(x_k), \ldots, \widehat{h(x_i)}, \ldots, h(x_n)) \\
= \quad & - \sum_{k=0}^{n} \varphi(x_0, \ldots, x_{k-1}, h(x_k), \ldots, h(x_n)) \\
& + \sum_{k=0}^{n} \varphi(x_0, \ldots, x_k, h(x_{k+1}), \ldots, h(x_n)) \\
= \quad & \varphi(x) - h(\varphi(x)),
\end{aligned}
$$

mit $x = (x_0, \ldots, x_n)$. Somit ist j eine Kettenhomotopie zwischen der Identität und h.

Schritt 3: Sei nun $\varepsilon : F \to \mathbb{Z}$ eine weitere projektive Auflösung von $\mathbb{Z}$ über $\mathbb{Z}[G]$. Nach Theorem 1.16 existiert eine Homotopieäquivalenz $f^* : C^* \to F^*$ mit inverser Homotopieäquivalenz $g^* : F^* \to C^*$ so, dass $f \circ g \simeq id_{C^*}$ und $g \circ f \simeq id_{F^*}$. Das heißt, man erhält folgendes Diagramm:

$$
\begin{tikzcd}
C^* \arrow[d, shift right, "\mathrm{id}"'] \arrow[d, shift left, "h"] & F^* \arrow[l, "f"'] \arrow[d, shift right, "\mathrm{id}"'] \arrow[d, shift left, "h"] \\
C^* \arrow[r, "g"'] & F^*
\end{tikzcd}
$$

Die Pfeile auf der rechten Seite des Diagramms sind erst einmal so gewählt, dass das Diagramm kommutiert. Da aber die beiden Homotopieäquivalenzen jeweils $\mathbb{Z}[G]$-Modulhomomorphismen sind und daher mit h vertauschen, gilt:

$$
f \circ g \circ h = f \circ h \circ g = h \circ f \circ g \simeq h \circ \mathrm{id} = h
$$

Folglich sind die auf der rechten Seite des Diagramms eingetragenen Abbildungen zumindest in derselben Homotopieklasse wie die induzierten Abbildungen. Nach Definition einer Homotopieäquivalenz sind durch die Kettenhomotopie zwischen id und h auf der linken Seite des Diagrammes auch je ein Vertreter der beiden Homotopieklassen auf der rechten Seite homotop zueinander. $\square$

Bemerkung 2.22. Der Beweis der Aussage des Lemmas 2.21 lässt sich fast eins zu eins übertragen auf den Fall $\underline{h} \in \mathbb{Z}[G]^\times \cap Z(\mathbb{Z}[G])$. Eine Änderung wird nur nötig, um zu zeigen, dass die neue Abbildung h beschränkt ist. Dies folgt aber sofort aus der Hölder-Ungleichung.

Bemerkung 2.23. Das Lemma lässt sich analog formulieren und genauso beweisen für $F_* = F \otimes_G l^p(G)$.

Der folgende Satz ist eine Verallgemeinerung einer Aussage von Martin und Valette [33] auf höhere (Ko-)Homologiegruppen. Die hier gewählte Beweismethode ist deutlich elementarer und stärker.

Satz 2.24. *Sei $1 < p \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ und G eine Gruppe vom Typ FP_n mit unendlich vielen Elementen im Zentrum der Gruppe. Dann gilt*

$$\overline{H_i^{(p)}(G)} = \overline{H^i_{(p)}(G)} = 0$$

für $i \leq n$.

BEWEIS. Nach Satz 1.71 gibt es eine Teilauflösung von $\mathbb{Z}$ über $\mathbb{Z}[G]$ aus freien, endlich erzeugten Moduln F_i. Das heisst, $F_i \otimes_G l^p(G)$ ist isomorph zu $l^p(G)^{m_i}$ und entsprechend $\mathrm{Hom}_G(F_i, l^q(G))$ zu $l^q(G)^{m_i}$, wobei m_i die Dimension von F_i ist.

Sei $\overline{b}$ nun die induzierte Bilinearform nach Bemerkung 2.12. Diese ist wohldefiniert, da die Bilder der Randabbildungen $\mathbb{Z}[G]$-Untermoduln sind.

Angenommen, es gäbe nun ein $\overline{x} \in \overline{H_i^{(p)}(G)}$ ungleich null, beliebig, vertreten durch

$$x = \left(\sum_{h \in G} \xi_{1,h} h, \ldots, \sum_{h \in G} \xi_{m_i,h} h \right).$$

Aufgrund der Dualität, vgl. Satz 2.11, existiert auch ein $\overline{y} \in \overline{H^i_{(q)}(G)}$ vertreten durch

$$y = \left(\sum_{h \in G} \zeta_{1,h} h, \ldots, \sum_{h \in G} \zeta_{m_i,h} h \right)$$

so gewählt, dass $\overline{b}(\overline{y}, \overline{x}) \neq 0$. Insbesondere sind nur abzählbar viele ζ_i und ξ_i ungleich 0. Dann ist die induzierte Auswertungspaarung von $\overline{x}$ und $\overline{y}$ gegeben durch

$$\overline{b}(\overline{y}, \overline{x}) = \sum_{j=1}^{m_i} \sum_{h \in G} \zeta_{j,h} \xi_{j,h},$$

Diese Summe konvergiert als endliche Summe absolut konvergierender Reihen absolut.

Sei nun D eine unendliche abzählbare Teilmenge von $Z(G)$ so, dass $1 \in D$, $g_i \in D \Rightarrow g_i^{-1} \in D$ und $g_i, g_j \in D \Rightarrow g_i g_j \in D$. Seien die Elemente in D so indiziert, dass $1 = g_0$. Dann konvergiert entsprechend

$$\overline{b}(\overline{y}, g_k \overline{x}) = \sum_{j=1}^{m_i} \sum_{h \in G} \zeta_{j,h} \xi_{j, g_k^{-1} h}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$.

Sei nun $\varepsilon > 0$. Dann gibt es endliche Indexmengen A und B in G und eine Teilmenge I von $\{1,\ldots,m_i\}$, so dass $\|x\|_p^p - \sum_{a\in I\times A} |\xi_a|^p < \varepsilon$ und $\|y\|_q^q - \sum_{b\in I\times B} |\zeta_b|^q < \varepsilon$. Das heißt, es gibt abzählbare Indexmengen $A' = \{cg_k | c \in A, k \in \mathbb{Z}\}$ und $B' = \{dg_k | d \in B, k \in \mathbb{Z}\}$, die die Elemente der verallgemeinerten Bahnen x^D von Elementen aus A respektive B enthalten (vgl. [27]). Mit der Kurzschreibweise $\tilde{A} = G^{m_i}\backslash(I \times A')$ und $\tilde{B} = G^{m_i}\backslash(I \times B')$ gilt dementsprechend

$$\begin{aligned} b(y,x) &= \sum_{j=1}^{m_i} \sum_{h\in G} \zeta_{j,h}\xi_{j,h} \\ &= \sum_{\substack{c\in\tilde{A},\\ d\in\tilde{B}}} \zeta_d\xi_c + \sum_{\substack{c\in\tilde{A},\\ d\in(I\times B')}} \zeta_d\xi_c + \sum_{\substack{c\in(I\times A'),\\ d\in\tilde{B}}} \zeta_d\xi_c + \sum_{\substack{c\in(I\times A'),\\ d\in(I\times B')}} \zeta_d\xi_c, \end{aligned}$$

wobei die Paare $c = (i,c')$ und $d = (i,d')$ im selben Summanden immer den gleichen ersten Tupeleintrag haben. Indem man die Norm nimmt und die Hölderungleichung nutzt, sieht man, dass die ersten drei Summanden beschränkt sind durch $\varepsilon(\varepsilon + \|x\|_p + \|y\|_p)$. Translation mit g_i ändert die ersten drei Summanden nicht. Von Interesse ist also nur noch der letzte Summand. Dieser lässt sich umformen zu

$$\sum_{i\in I} \sum_{\substack{a\in\bar{A},\\ b\in\bar{B}}} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \zeta_{i,bg_r}\xi_{i,ag_r}, \tag{2.1}$$

wobei $\bar{A}$ (repektive $\bar{B}$) eine Teilmenge von A' (resp. B') ist, die nur noch einen Vertreter für jede Bahn in A' (resp. B') enthält.

Auf diesen Term nun die Translation mit g_k angewandt, ergibt:

$$\sum_{i\in I} \sum_{\substack{a\in\bar{A},\\ b\in\bar{B}}} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \zeta_{i,g_r b}\xi_{i,g_i^{-1}g_r a}.$$

Nun kann man ein ähnliches Abschneideargument auf jeden Orbit anwenden, da D unendlich viele Elemente enthält. Um genau zu sein: Man erhält eine endliche Teilmenge $R \subset \mathbb{Z}$ mit

$$\sum_{i\in I} \sum_{r=-\infty}^{\infty} |\xi_{i,g_r a}|^p - \sum_{i\in I} \sum_{r\in R} |\xi_{i,g_r a}|^p < \varepsilon$$

für alle $a \in \bar{A}$ und eine endliche Teilmenge $S \subset \mathbb{Z}$ mit

$$\sum_{i \in I} \sum_{r=-\infty}^{\infty} |\zeta_{i,g_r b}|^q - \sum_{i \in I} \sum_{r \in S} |\zeta_{i,g_r b}|^q < \varepsilon$$

für alle $b \in \bar{B}$. Sei $T = R \cup S$. Nun spaltet man die Summe in Gleichung 2.1 erneut auf und erhält

$$\begin{aligned}\sum_{i \in I} \sum_{\substack{a \in \bar{A},\\ b \in \bar{B}}} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \zeta_{i,bg_r} \xi_{i,ag_r} &= \sum_{i \in I} \sum_{\substack{a \in \bar{A},\\ b \in \bar{B}}} \sum_{r \notin T} \zeta_{i,bg_r} \xi_{i,ag_r} \\ &\quad + \sum_{i \in I} \sum_{\substack{a \in \bar{A},\\ b \in \bar{B}}} \sum_{r \in T} \zeta_{i,bg_r} \xi_{i,ag_r}\end{aligned}$$

Nimmt man nun wie oben die Norm, so ist der erste Term bei Translation mit g_k beschränkt durch $\varepsilon \|x\|_p$. Wählt man jetzt i so, dass für $g_j = g_i^{-1} g_r$ der Index j nicht in T ist für alle $r \in T$, erhält man für alle $\varepsilon > 0$ ein $i_\varepsilon \in \mathbb{Z}$ mit $b(y, g_{i_\varepsilon}) < W \cdot \varepsilon$ und W konstant.

Somit existiert im Widerspruch zur Annahme für jedes x, welches $\overline{x} \in \overline{H_i^{(p)}(G)}$ repräsentiert, und jedes y, das $\overline{y} \in \overline{H^i_{(q)}(G)}$ repräsentiert, ein *Netz*[2] $\{g_{i_\varepsilon}\}$ mit $\lim \bar{b}(\overline{y}, g_i \overline{x}) = 0$, wobei die Multiplikation mit g_i nach Lemma 2.21 eine Homotopieäquivalenz ist. □

Als Korollar erhält man sofort die folgende Aussage, die auch bei Puls [49] steht und ursprünglich von Gromov [23, S. 221] stammt. Während Gromov einen Beweis aber nur andeutet, ist im Beweis von Puls eine Lücke, die hier auf eine andere Art und Weise als bei Martin und Valette [33] geschlossen wurde.

Korollar 2.25. *Sei $1 < p \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ und sei G eine Gruppe vom Typ* FP_n *mit einem zentralen Element unendlicher Ordnung. Dann ist*

$$\overline{H_i^{(p)}(G)} = \overline{H^i_{(p)}(G)} = 0$$

für $i \leq n$.

[2]Ein Netz in einer Menge X ist eine Abbildung von einer geordneten Menge I in die Menge X. Hierbei ist eine geordnete Menge eine Menge mit einer Relation „$\preceq$", die reflexiv und transitiv ist und für die gilt, dass man für jedes Pärchen α und β ein γ findet mit $\alpha \preceq \gamma$ und $\beta \preceq \gamma$.

2.5. Verallgemeinerungen des ersten Verschwindungssatzes

Korollar 2.26. *Sei $1 < p \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ und sei G eine unendliche Gruppe vom Typ FP_n und diese Gruppe sei FCC, das heißt, alle Konjugiertenklassen enthalten nur endlich viele Elemente. Dann gilt $\overline{H_i^{(p)}}(G) = 0$ und $\overline{H^i_{(p)}}(G) = 0$ für $i \leq n$.*

BEWEIS. Sei g ein Element in G und $<g>$ die Konjugiertenklasse von g in G. Weiterhin sei $Z(g)$ der Zentralisator von g und erneut $Z(G)$ das Zentrum der Gruppe. Dann gilt

$$|{<g>}| = |G/Z(g)|\,.$$

Da G vom Typ FP_n ist, ist G insbesondere endlich erzeugt. Sei nun $\{g_1, \ldots, g_k\}$ ein endliches Erzeugendensystem von G. Somit ist

$$Z(G) = \bigcap_{i=1}^{k} Z(g_i).$$

Daraus folgt, dass

$$|G/Z(G)| \leq \prod_{i=1}^{k} |G/Z(g_i)| < \infty.$$

Das heißt, das Zentrum der Gruppe ist eine Untergruppe von endlichem Index. Entweder enthält das Zentrum nun unendlich viele Elemente oder die Gruppe ist endlich im Widerspruch zur Annahme. Damit folgt die Behauptung aus Satz 2.24. □

Bevor man sich der nächsten Verallgemeinerung zugewenden kann, muss zuerst ein Blick auf die Struktur des Gruppenringes $\mathbb{Z}[G]$ geworfen werden. Sei nun k eine endliche Konjugiertenklasse und $\hat{k}$ die Summe der Elemente in k als Element in $\mathbb{Z}[G]$.

Lemma 2.27. [45, 46] *Das Zentrum $Z(\mathbb{Z}[G])$ des Gruppenringes $\mathbb{Z}[G]$ hat als $\mathbb{Z}$-Basis die Menge*

$$\{\hat{k} : k \text{ ist endliche Konjugiertenklasse in } G\}$$

aller endlichen Konjugiertensummen.

BEWEIS. Sei $\alpha = \sum_{x \in G} a_x x \in \mathbb{Z}[G]$. Dann gilt $\alpha \in Z(\mathbb{Z}[G])$ genau dann, wenn $g^{-1}\alpha g = \alpha$ für alle $g \in G$. Da nun

$$g^{-1}\alpha g = \sum_{x \in G} a_x (g^{-1}xg) = \sum_{y \in G} a_{gyg^{-1}} y$$

gilt, ist α genau dann zentral, wenn die Koeffizienten a_x konstant sind auf den Konjugationsklassen von G. α hat endlichen Träger, also können hier nur die endlichen Konjugationsklassen auftreten, womit die endlichen Konjugiertensummen ein Erzeugendensystem bilden. Gleichzeitig haben sie aber disjunkte Träger, sind also linear unabhängig. $\square$

Lemma 2.28. *Sei G eine Gruppe und sei $\underline{h} \in Z(\mathbb{Z}[G]) \setminus \{0\}$ ein Element ungleich null im Zentrum des Gruppenringes. Sei $\varepsilon : F \to \mathbb{Z}$ eine projektive Auflösung von $\mathbb{Z}$ über $\mathbb{Z}[G]$. Dann ist h, die Multiplikation mit $\underline{h}$, eine Homotopieäquivalenz auf $F^* := \operatorname{Hom}_G(F,l^p(G))$ kettenhomotop zur Identität.*

Beweis. Sei k eine Konjugiertenklasse mit n_k Elementen. Nach Lemma 2.27 ist dann $\underline{b_k} = \sum_{g\in k} g$ ein Element in der Basis des Zentrums des Gruppenringes. Sei φ ein Element in F^i, dann ist

$$\sum_{g\in k} g \cdot \varphi(x) = (\underline{b_k} \cdot \varphi)(x) = \varphi(\underline{b_k} \cdot x) = \sum_{g\in k} \varphi(g \cdot x).$$

Das heißt, dass die Multiplikation mit $\underline{b_k}$ von links bis auf eine etwaige Permutation innerhalb der endlichen Summe gleich der Multiplikation von rechts ist. Folglich kann man dasselbe Argument wie in Lemma 2.21 anwenden und hat somit gezeigt, dass diese Multiplikation kettenhomotop zu $n_k \cdot \mathrm{id}$ und somit kettenhomotop zur Identität ist.

Die $\underline{b_k}$ bilden eine Basis des Zentrums des Gruppenringes, daher lässt sich jedes Element $\underline{h} \in Z(\mathbb{Z}[G])\setminus\{0\}$ schreiben als $\sum \lambda_k \underline{b_k}$ mit mindestens einem λ_k ungleich null. Folglich ist die Abbildung h kettenhomotop zu $\sum |\lambda_k| \cdot \mathrm{id}$. Aber dies ist wiederum kettenhomotop zur Identität. $\square$

Theorem 2.29. *Sei $1 < p \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ und G eine Gruppe vom Typ FP_n mit unendlich vielen endlichen Konjugiertenklassen. Dann gilt $\overline{H_i^{(p)}(G)} = 0$ und $\overline{H^i_{(p)}(G)} = 0$ für $i \leq n$.*

Beweis. Nach Lemma 2.27 hat das Zentrum des Gruppenringes unendlich viele Basiselemente. Folglich muss nur gezeigt werden, dass im Beweis von Satz 2.24 ein Element aus dem Zentrum der Gruppe durch eines aus dem Zentrum des Gruppenringes ersetzt werden kann.

Die verallgemeinerte Definition eines Orbits (vgl. [27]) lässt sich erneut erweitern, indem man die Orbits einer Menge von Ringelementen betrachtet. Sei

$$S = \left\{ h_r = \sum_{j=1}^{n_r} (\alpha_r)_{g_j} g_j \,\middle|\, h_r \in Z(\mathbb{Z}[G]) \right\}$$

eine unendliche, abzählbare Teilmenge der Basis des Zentrums des Gruppenringes nach Lemma 2.27. Insbesondere bedeutet dies, dass die α_r nur die Werte 0 oder 1 annehmen. Weiterhin kann jedes Gruppenelement g_j den Koeffizienten 1 nur in maximal einem h_r haben. Somit kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit jedes h_r schreiben als $h_r = \sum_{j=1}^{n_r} g_{r_j}$. Um nun einen Orbit ähnlich zu dem in Satz 2.24 zu erhalten, benötigt man ein multiplikativ Inverses für jedes zentrale Element im Gruppenring. Mit Lemma 2.28 kann man nun eine Funktion g_r finden so, dass $g_r h_r \simeq h_r g_r \simeq \mathrm{id}$ gilt. Dies in Betracht ziehend und den Beweis von Satz 2.24 erneut durchgehend, stellt man fest, dass sich bis zur Gleichung 2.1 nicht ändert bis auf ein Ausufern der Indizes. Man erhält

$$\sum_{i\in I} \sum_{\substack{a\in\bar{A},\\ b\in\bar{B}}} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n_r} \zeta_{i,g_{r_j}b} \xi_{i,g_{r_j}a}.$$

Das heißt, dass in diesem Fall anstelle von einem jetzt zwei weitere Abschneideargumente benötigt werden. Das erste von diesen wählt das Maximum der relevanten j für alle r, so dass die innere Summe nur bis zu diesem Maximum geht und der Endwert der Reihe unabhängig von r wird. Genauer: Es gibt nur endlich viele Indizes u,v mit $\|y\|_p^p - \sum \zeta_u < \varepsilon$ und $\|x\|_p^p - \sum \xi_v < \varepsilon$. Man setzt nun n als das Maximum der auftauchenden j. Für den Fall, dass es ein r gibt mit $n_r < n$, wählt man für alle $n_r < j < n$ solche g_{r_j}, dass $\zeta_{i,g_{r_j}}$ und $\xi_{i,g_{r_j}}$ klein genug sind. Folglich kann man die inneren beiden Summationszeichen vertauschen.

Das zweite Abschneideargument ist nun analog zum letzten Abschneideargument im Beweis von Satz 2.24. Zusammen mit Lemma 2.28 ist der Satz somit bewiesen. □

Definition 2.30. Eine Gruppe G heißt *nilpotent*, wenn sie eine *Zentralreihe* besitzt. Das heißt, es existiert eine Inklusionsreihe von Normalteilern

$$G = G_n \triangleright G_{n-1} \triangleright \cdots \triangleright G_1 \triangleright G_0 = 1$$

so, dass G_{i+1}/G_i im Zentrum von G/G_i liegt für alle i. Die Länge der kürzesten Zentralreihe von G ist die *Nilpotenzklasse* von G.

Satz 2.31. *Sei $1 < p \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ und sei G eine unendliche nilpotente Gruppe vom Typ FP_n. Dann gilt $\overline{H_i^{(p)}}(G) = 0$ und $\overline{H^i_{(p)}}(G) = 0$ für $i \leq n$.*

Beweis. Wenn G ein unendliches Zentrum hat, folgt die Behauptung aus Satz 2.24. Im anderen Fall findet man eine Zentralreihe und ein $k \in \mathbb{N}$ so, dass G_k unendlich viele Elemente hat und G_{k-1} nur endlich viele.

Nach der Definition einer nilpotenten Gruppe liegt G_k/G_{k-1} im Zentrum von G/G_{k-1}. Das heißt, mit $g \in G$ und $g_k \in G_k$ gilt

$$g^{-1}g_k g = g^{-1}g g_k = g_k$$

modulo G_{k-1}. Folglich ist die Konjugiertenklasse von g_k in der Nebenklasse $g_k G_{k-1}$ enthalten. Da G_{k-1} nur endlich viele Elemente hat, ist die Konjugiertenklasse endlich. Da g_k beliebig in G_k gewählt war, hat man unendlich viele Elemente mit endlicher Konjugiertenklasse in G gefunden. Mit Theorem 2.29 folgt die Behauptung. □

Für eine tiefergehende Behandlung von nilpotenten Gruppen sei verwiesen auf [52].

Definition 2.32. Eine lokalkompakte Gruppe G hat *polynomiales Wachstum*, wenn für alle kompakten Umgebungen C der Identität ein Polynom p so existiert, dass für alle $n \geq 1$ das Maß von C^n kleiner ist als $p(n)$. In unserem diskreten Fall ist C eine endliche Teilmenge von G, die die Identität beinhaltet, und das Maß ist das zählende Maß.

Korollar 2.33. *Sei $1 < p \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ und sei G eine Gruppe vom Typ* FP_n *mit polynomialem Wachstum. Dann gilt $\overline{H_i^{(p)}}(G) = \overline{H^i_{(p)}}(G) = 0$ für $i \leq n$.*

BEWEIS. Nach Gromov [22] enthält jede Gruppe mit polynomialem Wachstum eine nilpotente Untergruppe von endlichem Index. Zusammen mit Satz 2.16 ergibt Satz 2.31 die Behauptung. □

KAPITEL 3

Anwendungen

Nachdem im letzten Kapitel der Fokus auf Verschwindungssätzen für l^p-Kohomologie lag, sollen jetzt als Motivation für eine weitergehende Beschäftigung mit diesem Thema drei Anwendungsgebiete dargestellt werden. Das erste – l^pAzyklizität – ist mehr eine Umformulierung des Verschwindens der l^p-Kohomologie, deren Nutzen gleich im zweiten Gebiet, den Künnethformeln, gezeigt wird. Den größten Teil dieses Kapitels nimmt dann der Abschnitt über l^p-Bettizahlen ein.

3.1. Azyklizität

In dieser Arbeit ist hauptsächlich das Verschwinden der (un-)reduzierten l^p-Kohomologie von Interesse. Daher ist es sinnvoll, weitere Bedingungen einzuführen, aus der dieses Verschwinden folgt.

Definition 3.1. Sei G eine Gruppe und $\varepsilon : F \to \mathbb{Z}$ eine projektive Auflösung von $\mathbb{Z}[G]$ über $\mathbb{Z}$. G heißt

i) *l^p-azyklisch*, falls es einen beschränkten Operator h vom Grad -1 des l^p-Kokettenkomplexes gibt, der eine Kettenkontraktion ist, das heißt, es gilt $\partial h + h\partial = \mathrm{id}$.
ii) *schwach l^p-azyklisch*, falls es eine Familie beschränkter Operatoren h_t vom Grad -1 des l^p-Kokettenkomplexes gibt so, dass $(h_t\partial + \partial h_t)(c)$ für $t \to \infty$ in der q-Norm gegen c konvergiert für alle l^p-Koketten[1] c.
iii) *l^p-paarungsazyklisch*. falls es für alle l^p-Koketten c und alle l^p-Ketten d eine Familie beschränkter Operatoren h_t vom Grad -1 des l^p-Kokettenkomplexes gibt, so dass

$$b((h_t\partial + \partial h_t - \mathrm{id})(c),d) \xrightarrow{t\to\infty} 0.$$

Gilt für die Grade $i = 0,\dots,k$ eine dieser Azyklizitäten im l^p-Kokettenkomplex, so bezeichnet man G als *azyklisch in den Graden* $i = 0,\dots,k$.

Bemerkung 3.2. Wegen Satz 2.11 kann man die Definition auch für l^p-Kettenkomplexe nutzen, jeweils mit Operatoren vom Grad $+1$.

[1]Die l^p-Koketten sind natürlich l^q-Funktionen auf der Gruppe G. Dieses Notationsproblem taucht noch häufiger im Abschnitt über Bettizahlen auf.

Lemma 3.3. *Sei $n \in \mathbb{N}$, sei $i \leq n$ und sei G eine Gruppe vom Typ* FP_n. *G ist genau dann l^p-paarungsazyklisch im Grad i, wenn $\overline{H^i_{(p)}(G)} = 0$.*

BEWEIS. Das aus l^p-paarungsazyklisch das Verschwinden der reduzierten Kohomologie folgt, liegt daran, dass für jeden Vertreter in $\overline{H^i_{(p)}(G)}$ und jeden Vertreter in $\overline{H_i^{(p)}(G)}$ asymptotisch eine Kettenhomotopie zwischen der Identität und der Nullabbildung gefunden wird.

Zum Beweis der Rückrichtung sei G nicht l^p-paarungsazyklisch. Das heißt, es gibt ein c in den i-ten Koketten und ein d in den i-ten Ketten, so dass für alles Familien (h_t) beschränkter Operatoren vom Grad -1

$$b((h_t\partial + \partial h_t - \mathrm{id})(c),d) \xrightarrow{t\to\infty} k_{h_t}$$

mit $k_{h_t} \neq 0$. Sei h_t der Nulloperator, dann folgt

$$b((h_t\partial + \partial h_t - \mathrm{id})(c),d) = -b(c,d) = -\overline{b}(\overline{c},\overline{d}) = k_0.$$

Insbesondere gibt es eine Kohomologieklasse und eine Homologieklasse so, dass die induzierte Bilinearform aus Bemerkung 2.12 nicht verschwindet. Also ist $\overline{H^i_{(p)}(G)} \neq 0$. □

Bemerkung 3.4. Die ersten beiden Eigenschaften in Definition 3.1 stammen von Gromov [23, S. 247]. Es ist klar, dass aus l^p-azyklisch schwach l^p-azyklisch folgt und dass aus schwach l^p-azyklisch l^p-paarungsazyklisch folgt. Weiterhin ist es klar, dass aus l^p-azyklisch das Verschwinden der unreduzierten l^p-Kohomologie folgt. Genauso, wie aus dem Verschwinden der unreduzierten l^p-Kohomologie das Verschwinden der reduzierten l^p-Kohomologie folgt. Gromov hat seine allgemeinen Betrachtungen zur l^p-Azyklizität mit der Beobachtung abgeschlossen, dass aus schwach l^p-azyklisch das Verschwinden der reduzierten l^p-Kohomologie folgt und dass sich keine Aussagen über die Umkehrung der Folgepfeile treffen lässt. Dementsprechend liegt der Vorteil von l^p-paarungsazyklisch gegenüber schwach l^p-azyklisch darin begründet, dass es äquivalent zum Verschwinden der reduzierten l^p-Kohomologie ist. Der Beweis von Satz 2.24 basiert genau auf dieser Grundidee.

3.2. Kreuzprodukt

Die Künnethformeln sind der nächste Schritt nach Satz 2.16, um ein Verständnis für das Verhalten der l^p-Kohomologie von Gruppen zu entwickeln.

Satz 3.5. [9] *Seien $\varepsilon : F \to \mathbb{Z}$ und $\varepsilon' : F' \to \mathbb{Z}$ projektive Auflösungen von $\mathbb{Z}$ über $\mathbb{Z}[G]$ bzw. $\mathbb{Z}[G']$. Dann ist $\varepsilon \otimes \varepsilon' : F \otimes F' \to \mathbb{Z}$ eine projektive Auflösung von $\mathbb{Z}$ über $\mathbb{Z}[G \times G']$.*

BEWEIS. Seien G und G' Gruppen, sei M ein $\mathbb{Z}[G]$-Modul und sei M' ein $\mathbb{Z}[G']$-Modul. Dann ist $M \otimes M'$ ein $\mathbb{Z}[G \times G']$-Modul mit der Verknüpfung

$$(g,g') \cdot (m \otimes m') = gm \otimes g'm'.$$

Wenn M und M' jeweils projektiv sind, so ist auch $M \otimes M'$ ein projektiver Modul. Dies folgt sofort aus dem Isomorphismus

$$\mathbb{Z}[G] \otimes \mathbb{Z}[G'] \cong \mathbb{Z}[G \times G'].$$

Folglich ist der Komplex $F \otimes F'$ ein Komplex projektiver $\mathbb{Z}[G \times G']$-Moduln mit Augmentation $\varepsilon \otimes \varepsilon'$. Dies folgt aus Korollar 1.17. $\square$

Lemma 3.6. *Seien G,G' Gruppen und $\varepsilon : F \to \mathbb{Z}$ bzw. $\varepsilon' : F' \to \mathbb{Z}$ Auflösungen von $\mathbb{Z}$ über $\mathbb{Z}[G]$ bzw. $\mathbb{Z}[G']$. Dann ist für jeden $\mathbb{Z}[G]$-Modul M und jeden $\mathbb{Z}[G']$-Modul M' die Abbildung*

$$(F \otimes_G M) \otimes (F' \otimes_{G'} M') \to (F \otimes F') \otimes_{G \times G'} (M \otimes M'),$$

gegeben durch $(x \otimes m) \otimes (x' \otimes m') \mapsto (x \otimes x') \otimes (m \otimes m')$, ein Isomorphismus.

BEWEIS. Dies folgt durch

$$\begin{aligned}
(F \otimes_G M) \otimes (F' \otimes_{G'} M') &= (F \otimes M)_G \otimes (F' \otimes M')_{G'} \\
&= (F \otimes M \otimes F' \otimes M')_{G \times G'} \\
&= (F \otimes F' \otimes M \otimes M')_{G \times G'} \\
&= (F \otimes F') \otimes_{G \times G'} (M \otimes M').
\end{aligned}$$

$\square$

Bemerkung 3.7. Das Bild von $z \otimes z'$ unter dieser Abbildung wird mit $z \times z'$ bezeichnet, für $z \in F \otimes_G M$ und $z' \in F' \otimes_{G'} M'$. Also hat man

$$\partial(z \times z') = \partial z \times z' + (-1)^s z \times \partial z',$$

wobei $s = \deg(z)$ ist. Folglich ist das Produkt zweier Zykel wieder ein Zykel und die Homologieklasse dieses Zykels hängt nur von den Klassen der gegeben Zykeln ab.

Definition 3.8. Das *Homologiekreuzprodukt* ist das hiervon induzierte Produkt

$$H_i(G,M) \otimes H_j(G',M') \to H_{i+j}(G \times G',M \otimes M').$$

Analog definiert man das *Kohomologiekreuzprodukt*

$$H^i(G,M) \otimes H^j(G',M') \to H^{i+j}(G \times G',M \otimes M').$$

3.2.1. Normen auf Tensorprodukten. Im Gegensatz zum algebraischen Fall ist man jetzt an einem Tensorprodukt interessiert, das in gewisser Hinsicht die Norm der Faktoren trägt. Während dies für Hilberträume leicht zu erreichen ist, trägt das Produkt zweier Banachräume eine Vielzahl von verschiedenen Normen. Für weitergehende Fragen sei auf [13], [30] und [54] verwiesen.

Definition 3.9. Die *p-nukleare Norm* α_p auf dem algebraischen Tensorprodukt zweier l^p-Räume ist gegeben durch

$$\alpha_p(z) = \inf\left\{ \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} \mu_q(y_1,\ldots,y_n) \middle| z = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \right\}.$$

Hierbei wird das Infimum über alle Darstellungen von z genommen.

Das in der Definition auftauchende μ_q ist gegeben durch

$$\mu_q(y_1,\ldots,y_n) = \sup\left\{ \left(\sum_{i=1}^n |\psi(y_i)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \middle| \psi \in l^q(G'), \|\psi\|_q = 1 \right\}.$$

Hierbei ist zu beachten, dass q natürlich durch die Gleichung $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ festgelegt ist.

Bemerkung 3.10. Die p-nukleare Norm stimmt im Hilbertraumfall mit der Standardnorm auf dem Tensorprodukt für Hilberträume überein.

Theorem 3.11. [30, Corollary 1.52] *Sei $1 < p < \infty$ und seien G und G' zwei Gruppen. Dann gilt*

$$l^p(G) \otimes_{\alpha_p} l^p(G') = l^p(G \times G').$$

Hierbei ist $X \otimes_\alpha Y$ die Komplettierung von $X \otimes Y$ bezüglich der Norm α.

Bemerkung 3.12. Zur Vereinfachung der Notation wird auch weiterhin die Komplettierung von $X \otimes Y$ bezüglich der Norm α für zwei Banachräume X und Y mit $X \otimes_\alpha Y$ bezeichnet.

Satz 3.13. [3, 13] *Seien G_1, G_2 Gruppen, sei $1 \leq q \leq p \leq \infty$ und seien $T : l^q(G_1) \to l^p(G_1)$ und $S : l^q(G_2) \to l^p(G_2)$ beschränkte lineare Operatoren*[2]. *Dann ist*

$$\left\|T \otimes S : l^q(G_1) \otimes_{\alpha_q} l^q(G_2) \to l^p(G_1) \otimes_{\alpha_p} l^p(G_2)\right\| = \|T\|\,\|S\|$$

[2]Ein beschränkter lineare Operator T von X nach Y ist eine lineare Abbildung, deren *Operatornorm* beschränkt ist. Letztere ist definiert als

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| \mid \|x\| = 1\}$$

3.2.2. Künnethformeln. Man hätte gerne folgende Aussage, vorläufig lässt sich aber nur die Version in Satz 3.16 beweisen. Letztere basiert auf einer Idee von Gromov [23, S. 252]. Während Gromov die Aussage zwar für (schwach) l^p-azyklische Gruppen beweist, kann er nicht auf die reduzierten Homologiegruppen schließen.

Vermutung 3.14. (Künnethformeln) *Sei $1 < p \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $n \in \mathbb{N}$. Weiterhin seien G und G' Gruppen vom Typ FP_n. Dann existieren natürliche Isomorphismen*

$$K_n : \bigoplus_{i+j=k} \overline{H_i^{(p)}(G)} \otimes_{\alpha_p} \overline{H_j^{(p)}(G')} \to \overline{H_k^{(p)}(G \times G')}$$

und

$$K^n : \bigoplus_{i+j=k} \overline{H^i_{(p)}(G)} \otimes_{\alpha_q} \overline{H^j_{(p)}(G')} \to \overline{H^k_{(p)}(G \times G')}$$

für $0 \leq k \leq n$. Hierbei ist $\otimes_{\alpha_p}$ die durch die p-nukleare Norm induzierte Norm auf dem Kreuzprodukt der Homologiegruppen.

Bemerkung 3.15. Ein Ansatz zu einem Beweis ergibt sich aus Satz 3.11. Sei i die Einbettung von $l^p(G) \otimes l^p(G')$, dem algebraischen Tensorprodukt, in das topologische Tensorprodukt mit der p-nuklearen Norm α_p. Letzteres ist mit Satz 3.11 isometrisch isomorph zu $l^p(G \times G')$.

Satz 3.16. *Sei $n \in \mathbb{N}$, sei $1 < p < \infty$ und sei $i \in \{1{,}2\}$. Weiterhin seien G_i Gruppen vom Typ FP_n, die (schwach) l^p-(paarungs-)azyklisch sind bis zum Grad d_i, mit $d_i \leq n$. Dann ist $G_1 \times G_2$ eine Gruppe vom Typ FP_n und (schwach) l^p-(paarungs-)azyklisch bis zum Grad $\min\{n{,}d_1 + d_2 + 1\}$.*

BEWEIS. Der erste Teil, dass $G_1 \times G_2$ eine Gruppe vom Typ FP_n ist, folgt sofort aus Satz 3.5 und der Tatsache, dass man in einer freien, endlich erzeugten Teilauflösung die Dimension eines Moduls um endlich viele Schritte erhöhen kann. Somit kann man die Auflösung von G_1 und G_2 so wählen, dass sie in jedem Grad die gleiche Dimension haben.

Sei nun ∂_i' die Randabbildung in der, wie oben angepassten, freien und endlich erzeugten Auflösung der Gruppe G_i. Nach Bemerkung 3.7 ist die Randabbildung ∂ in der Auflösung von $G_1 \times G_2$ gegeben durch $\partial = \partial_1 + \partial_2$ mit $\partial_1 = \partial_1' \otimes \mathrm{id}$ und $\partial_2 = (-1)^s \mathrm{id} \otimes \partial_2'$, wobei s der Grad des Zykels in der ersten Komponente ist. Es gilt

$$\partial_1\partial_2 = -\partial_2\partial_1.$$

In dem Fall, dass die Aussage für l^p-azyklisch bewiesen werden soll, sei h_i^t die beschränkten Operatoren mit $h_i^t\partial_i' + \partial_i' h_i^t - \mathrm{id} = 0$. Bei der

Betrachtung von schwach l^p-azyklisch seien dementsprechend h_i^t die Familien beschränkter Operatoren mit $\|(h_i^t\partial_i' + \partial_i' h_i^t - \mathrm{id})(c)\| \xrightarrow{t\to\infty} 0$ für alle l^p-Koketten c und schliesslich seien bei der Betrachtung von l^p-paarungsazyklisch h_i^t Familien von beschränkten Operatoren mit

$$b_i((\partial_i' h_i^t + h_i^t\partial_i' - \mathrm{id})(c), d) \to 0$$

für alle Koketten c und Ketten d in den jeweiligen Komplexen.

h_i^t kann man als Operatoren im Bikomplex von $G_1 \times G_2$ interpretieren, indem man $h_1^t \otimes \mathrm{id}$ und $\mathrm{id} \otimes h_2^t$ betrachtet. Es gilt

$$\begin{aligned}
\partial_2 h_1^t(a\times b) &= (\mathrm{id}\otimes\partial_2')\circ(h_1^t\otimes\mathrm{id})(a\times b)\\
&= (\mathrm{id}\otimes\partial_2')(h_1^t(a)\times b)\\
&= (-1)^{\deg(a)\pm 1} h_1^t(a)\times\partial_2'(b)\\
&= (-1)(-1)^{\deg(a)} h_1^t(a)\times\partial_2'(b)\\
&= -(h_1^t\otimes\mathrm{id})((-1)^{\deg(a)} a\times\partial_2'(b)\\
&= -(h_1^t\otimes\mathrm{id})\circ(\mathrm{id}\otimes\partial_2')(a\times b)\\
&= -h_1^t\partial_2(a\times b).
\end{aligned}$$

Analog gilt

$$\partial_1 h_2^t(a\otimes b) \quad = \quad -h_2^t\partial_1(a\times b),$$

wobei zu beachten ist, dass h_2^t und ∂_1 antikommutieren. Dies folgt aus der Tatsache [8]

$$(f\otimes g)(a\times b) = (-1)^{\deg(g)\deg(a)} f(a)\times g(b).$$

Das heißt

$$\partial h_i^t + h_i^t\partial \quad = \quad \partial_i h_i^t + h_i^t\partial_i.$$

Setzt man jetzt $h^t = h_1^t + h_2^t(1 - \partial h_1^t - h_1^t\partial)$ (vgl. [23]), so erhält man

$$\begin{aligned}
\partial h^t + h^t\partial - \mathrm{id} &= \partial_1 h_1^t + h_1^t\partial_1 - \mathrm{id} + \partial_2 h_2^t + h_2^t\partial_2\\
&\quad -\partial h_2^t\partial h_1^t - \partial h_2^t h_1^t\partial - h_2^t\partial h_1^t\partial - h_2^t h_1^t\partial\partial\\
&= \partial_1 h_1^t + h_1^t\partial_1 - \mathrm{id} + \partial_2 h_2^t + h_2^t\partial_2\\
&\quad -\partial_1 h_2^t\partial_1 h_1^t - \partial_1 h_2^t\partial_2 h_1^t - \partial_2 h_2^t\partial_1 h_1^t - \partial_2 h_2^t\partial_2 h_1^t\\
&\quad -\partial_1 h_2^t h_1^t\partial_1 - \partial_1 h_2^t h_1^t\partial_2 - \partial_2 h_2^t h_1^t\partial_1 - \partial_2 h_2^t h_1^t\partial_2\\
&\quad -h_2^t\partial_1 h_1^t\partial_1 - h_2^t\partial_1 h_1^t\partial_2 - h_2^t\partial_2 h_1^t\partial_1 - h_2^t\partial_2 h_1^t\partial_2\\
&= \partial_1 h_1^t + h_1^t\partial_1 - \mathrm{id} + \partial_2 h_2^t + h_2^t\partial_2\\
&\quad -h_2^t\partial_2\partial_1 h_1^t - h_2^t\partial_2 h_1^t\partial_1\\
&\quad -\partial_2 h_2^t\partial_1 h_1^t - \partial_2 h_2^t h_1^t\partial_1\\
&= -(\partial_1 h_1^t + h_1^t\partial_1 - \mathrm{id})(\partial_2 h_2^t + h_2^t\partial_2 - \mathrm{id}).
\end{aligned}$$

Folglich gilt die Aussage des Satzes für l^p-azyklische Gruppen, da das Produkt verschwindet, wenn einer der beiden Faktoren verschwindet. Bei der Betrachtung von schwach l^p-azyklisch muss noch die q-Norm genommen werden. Da die h_i^t beschränkte lineare Abbildungen sind, reicht es zum Beweis der Aussage, wenn einer der beiden Faktoren in Norm gegen 0 geht.

Bei der Betrachtung l^p-paarungsazyklischer Gruppen sei zuerst daran erinnert, dass jede Bilinearform $b : V \times W \to K$ zu einer linearen Abbildung $b' : V \to W^*$ korrespondiert. In dem Fall, dass $V = l^q(G)$ und $W = l^p(G)$ mit $1 < p < \infty$ gilt und b die Auswertungspaarung ist, ist die korrespondierende lineare Abbildung ein beschränkter linearer Operator. Sei nun b die Paarung auf dem Produktraum und b_i die Paarungen für die zu G_i gehörenden Teilräumen. Dann entspricht

$$b : l^q(G_1 \times G_2) \times l^p(G_1 \times G_2) \to \mathbb{C}$$

einer Abbildung $b' : l^q(G_1 \times G_2) \to l^q(G_1 \times G_2)$. Mit Theorem 3.11 entspricht dies

$$b' : l^q(G_1) \otimes_{\alpha_q} l^q(G_2) \to l^q(G_1) \otimes_{\alpha_q} l^q(G_2).$$

Letzteres lässt sich umschreiben zu

$$b_1' \otimes b_2' : l^q(G_1) \otimes_{\alpha_q} l^q(G_2) \to l^q(G_1) \otimes_{\alpha_q} l^q(G_2).$$

Mit Satz 3.13 folgt, dass $b(c_1^t \otimes c_2^t, d_1 \otimes d_2)$ genau dann gegen 0 läuft, wenn $b_1(c_1^t, d_1)$ oder $b_2(c_2^t, d_2)$ gegen 0 laufen. $\square$

Mit Bemerkung 3.4 folgt

Korollar 3.17. *Sei $n \in \mathbb{N}$, sei $1 < p < \infty$ und sei $i \in \{1,2\}$. Weiterhin seien G_i Gruppen vom Typ FP_n mit $\overline{H_{j_i}^{(p)}(G_i)} = 0$ für $j_i \leq d_i$ mit $d_i \leq n$. Dann ist $G_1 \times G_2$ eine Gruppe vom Typ FP_n mit $\overline{H_j^{(p)}(G_1 \times G_2)} = 0$ für $j \leq \min\{n, d_1 + d_2 + 1\}$.*

3.3. l^p-Bettizahlen

Für den Fall $p = 2$ sind Bettizahlen ein Standardkonzept (vgl. [32]). Im Folgenden soll versucht werden, einen ähnlichen Begriff für den allgemeinen Fall einzuführen. Das Problem liegt hierbei darin, dass man mit Hilfskonstruktionen arbeiten muss, da sich keine „echten“ Bettizahlen konstruieren lassen, wie weiter unten gezeigt werden wird. Zuerst einmal werden in der Sprache dieser Arbeit l^2-Bettizahlen eingeführt.

3.3.1. l^2-Bettizahlen. Sei im Folgenden G immer eine Gruppe vom Typ FP_n mit der projektiven Teilauflösung

$$F_n \xrightarrow{\partial_n} F_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \xrightarrow{\partial_2} F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \to \mathbb{Z}.$$

Bemerkung 3.18. Nach Satz 1.71 kann man die F_i so wählen, dass sie frei sind. In dem Rest dieses Kapitels wird davon ausgegangen, dass die F_i isomorph zu $\mathbb{Z}[G]^{n_i}$ sind. Man kann zwar die folgenden Definitionen auch für projektive Auflösungen oder auch für Gruppen, die nicht vom Typ FP_n sind, umformulieren. Da dies aber mehr Aufwand erfordert und die Ergebnisse sich allesamt auf Teilauflösungen aus endlich erzeugten, freien Moduln beziehen, wird darauf verzichtet.

Sei weiterhin S_i eine $\mathbb{Z}$-Basis des freien $\mathbb{Z}[G]$-Moduls F_i. Insbesondere ist jedes Element σ in S_i ein Tupel der Länge n_i mit Einträgen in $\mathbb{Z}[G]$. Nun bezeichne c_σ diejenige Kokette, die an σ den Wert 1 annimmt und ansonsten verschwindet, sprich die Indikatorfunktion auf σ.

Da man sich in diesem Abschnitt nur mit l^2-Kohomologie beschäftigt, kann das orthogonale Komplement von $B^i_{(2)}(G)$ in $Z^i_{(2)}(G)$ gebildet werden. Man setzt

$$\mathcal{H}^i_{(2)}(G) := Z^i_{(2)}(G) \ominus B^i_{(2)}(G).$$

Hierbei sind $i \leq n$ und $p = 2$ und, wie in Definition 2.2, $C^i_{(2)}(G)$ die i-ten Koketten, $Z^i_{(2)}(G)$ die i-ten Kozykel und $B^i_{(2)}(G)$ die i-ten Koränder. Dann ist nach Definition $\mathcal{H}^i_{(2)}(G)$ isomorph zu $H^i_{(2)}(G)$.

Sei nun $\Pi^i_{\mathcal{H}}(x)$ die orthogonale Projektion von den i-ten Koketten auf $\mathcal{H}^i_{(2)}(G)$. Schliesslich sei $B_{\mathcal{H}}$ eine orthonormale Hilbertraumbasis von $\mathcal{H}^i_{(2)}(G)$. Dann lässt sich die Projektion beschreiben durch

$$\Pi^i_{\mathcal{H}}(c_\sigma)(\sigma') = \sum_{\tau \in B_{\mathcal{H}}} \langle c_\tau, c_\sigma \rangle \, c_\tau(\sigma').$$

Nun setzt man $\mathrm{tr}^i_{(2)}(\sigma) = \langle c_\sigma, c_\sigma \rangle$. Diese Spur[3] ist invariant[4] unter der Operation von G auf der Menge S_i.

Endlich sei $\overline{\sigma}$ der G-Orbit von σ und $\overline{S_i}$ die Menge der G-Orbits von Basiselementen. Die oben definierte Funktion $\mathrm{tr}^i_{(2)}$ ist G-invariant und

[3]Die Bezeichnung „Spur“ stammt von Gromov [23] und wird hier aus historischen Gründen weitergenutzt, obwohl diese lineare Abbildung nicht die Spureigenschaft hat, mangels einer Multiplikation auf S_i.

[4]Dies folgt aus 3.21 und 3.23.

daher auch auf dieser Menge definiert. Die l^2-*Bettizahlen* werden jetzt definiert als

$$b_i^{(2)}(G) := \sum_{\overline{\sigma} \in \overline{S_i}} \operatorname{tr}^i_{(2)}(\overline{\sigma})$$

und sind wegen obiger G-Invarianz der „Spur" unabhängig von der Wahl der Repräsentanten. Insbesondere hat die Summe nur endlich viele Summanden.

Bemerkung 3.19. Sei T_i diejenige Basis von $l^2(G)^{n_i}$, die nur aus Tupeln besteht, die in einer Komponente den Wert $g \in G$ annehmen und ansonsten null sind. Dann ist die Definition der l^2-Bettizahlen unabhängig von der Wahl der Basis S_i, solange S_i das Bild von T_i eines mit der G-Operation verträglichen isometrischen Isomorphismus von $l^2(G)^{n_i}$ nach $F_i \otimes l^2(G)$ ist. Da auch im Folgenden immer $F_i \otimes l^p(G)$ gleich als $l^p(G)^{n_i}$ interpretiert wird, ist dementsprechend die kanonische Wahl S_i als T_i zu setzen.

Ab jetzt sei also immer S_i so gewählt wie in dieser Bemerkung und ein *Simplex* sei ein Tupel $(0,\dots,0,g,0,\dots,0)$ mit $g \in G$.

3.3.2. Quasibettizahlen.

Definition 3.20. Sei $1 \leq p < \infty$ und sei erneut G eine Gruppe vom Typ FP_n mit obiger freier Auflösung. Weiterhin sei wiederum σ ein Simplex aus S_i wie in Bemerkung 3.19 und c_σ diejenige Einheitskokette mit Träger σ und $\overline{\sigma}$ der G-Orbit von σ. Sei nun

$$d(\sigma) := \inf_{c \in Z^i_{(p)}(G)} \|c - c_\sigma\|_q \text{ und } D(\sigma) := \inf_{c \in B^i_{(p)}(G)} \|c - c_\sigma\|_q\,,$$

mit dem üblichen q. Man beachte, dass $D(\sigma) \geq d(\sigma)$. Nun setzt man

$$\operatorname{tr}^i_{(p)}(\sigma) := D(\sigma)^q - d(\sigma)^q$$

und hat somit erneut eine „Spur". Diese summiert man genau so wie im Fall $p = 2$ und erhält die l^p-*Quasibettizahlen auf Kohomologiebasis*

$$b^i_{(p)}(G) := \sum_{\overline{\sigma} \in \overline{S_i}} \operatorname{tr}^i_{(p)}(\overline{\sigma})$$

Bemerkung 3.21. Die „Spur" ist G-invariant. Dies folgt aus der Tatsache, dass sowohl die Ränder als auch die Zykel G-invariant sind. Als Beispiel seien im Folgenden die Ränder und die Abbildung D betrachtet:

$$\begin{aligned} D(g\sigma) &= \inf_{c \in B^i_{(p)}(G)} \|c - c_{g\sigma}\|_q \\ &= \inf_{c \in B^i_{(p)}(G)} \|g \cdot c - c_{g\sigma}\|_q \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \inf_{c \in B^i_{(p)}(G)} \|c - c_\sigma\|_q \|g\|_q \\
&= \inf_{c \in B^i_{(p)}(G)} \|c - c_\sigma\|_q = D(\sigma).
\end{aligned}
$$

Bemerkung 3.22. Mit obiger Projektionsschreibweise ergibt sich $d(\sigma) = \|\sigma - \Pi^i_Z(\sigma)\|_2$ beziehungsweise $D(\sigma) = \|\sigma - \Pi^i_B(\sigma)\|_2$ für $p = 2$.

Lemma 3.23. *Im Fall $p = 2$ stimmen die Quasibettizahlen mit den l^2-Bettizahlen überein.*

BEWEIS. Im Fall $p = 2$ befindet man sich in einem Hilbertraum und findet daher Orthonormalbasen B_C, B_Z, B_B von $C^i_{(2)}(G)$, $Z^i_{(2)}(G)$ und $B^i_{(2)}(G)$ mit $B_C \supset B_Z \supset B_B$ und $B_Z \setminus B_B = B_{\mathcal{H}}$. Das heißt, ein Element $y \in C^i_{(2)}(G)$ lässt sich schreiben als

$$
y := \sum_{x \in B_C} \langle x,y \rangle \, x.
$$

Das heißt

$$
\begin{aligned}
D(y)^2 - d(y)^2 &= \left\|y - \Pi^i_Z(y)\right\|_2^2 - \left\|y - \Pi^i_B(y)\right\|_2^2 \\
&= \left\| \sum_{x \in B_C \setminus B_Z} \langle x,y \rangle \, x \right\|_2^2 - \left\| \sum_{x \in B_C \setminus B_B} \langle x,y \rangle \, x \right\|_2^2 \\
&= \sum_{x \in B_C \setminus B_Z} \langle x,y \rangle^2 - \sum_{x \in B_C \setminus B_B} \langle x,y \rangle^2 \\
&= \sum_{x \in B_{\mathcal{H}}} \langle x,y \rangle^2 .
\end{aligned}
$$

Der letzte Term ist nun gleich der „Spur“ zu den l^2-Bettizahlen. Dies gilt, da er für $y \notin \mathcal{H}^i_{(2)}(G)$ verschwindet und da im Falle

$$
y = \sum_{x \in B_{\mathcal{H}}} \langle x,y \rangle \, x \in \mathcal{H}^i_{(2)}(G)
$$

Folgendes gilt:

$$
\begin{aligned}
\langle y,y \rangle &= \left\langle \sum_{x \in B_{\mathcal{H}}} \langle x,y \rangle \, x, \sum_{x \in B_{\mathcal{H}}} \langle x,y \rangle \, x \right\rangle \\
&= \sum_{x \in B_{\mathcal{H}}} \langle x,y \rangle^2 .
\end{aligned}
$$

□

Bemerkung 3.24. Analog zu oben lassen sich auch die *l^p-Quasibettizahlen auf Homologiebasis* definieren. Hierzu setzt man

$$\mathrm{tr}_i^{(p)}(\sigma) := D'(\sigma)^p - d'(\sigma)^p$$

mit

$$d'(\sigma) := \inf_{c \in Z_i^{(p)}(G)} \|c - c_\sigma\|_p \text{ und } D'(\sigma) := \inf_{c \in B_i^{(p)}(G)} \|c - c_\sigma\|_p$$

und summiert wie oben, um $b_i^{(p)}(G)$ zu erhalten.

3.3.3. Homotopieinvarianz. Die erste interessante Frage, die sich im Zusammenhang mit den l^p-Quasibettizahlen stellt, ist die nach ihrer Homotopieinvarianz. Für $p = 2$ wurde dies positiv von Dodziuk [14] beantwortet (vgl. auch Pansu [40]).

Für allgemeine p ist die Frage wiederum nicht so leicht zu beantworten. Mit dem folgenden Lemma gilt die Homotopieinvarianz für Gruppen, deren reduzierte (Ko-)Homologie verschwindet.

Lemma 3.25. *Sei G eine Gruppe vom Typ FP_n mit $\overline{H^i_{(p)}(G)} = 0$. Dann gilt*

$$b_i^{(p)}(G) = b^i_{(p)}(G) = 0.$$

Beweis. Aus $\overline{H^i_{(p)}(G)} = 0$ folgt, dass $B^i_{(p)}$ dicht ist in $Z^i_{(p)}$. Das heißt

$$\inf_{c \in Z^i_{(p)}(G)} \|c - c_\sigma\|_p = \inf_{c \in B^i_{(p)}(G)} \|c - c_\sigma\|_p .$$

Somit verschwindet die „Spur“ für alle Simplizes. Analoges gilt für die Homologie. □

Aller Voraussicht nach sollte die Umkehrung ebenfalls gelten. Leider lässt sich dies im Augenblick nicht beweisen.

Bemerkung 3.26. Homotopieinvarianz lässt sich im Falle $p = 2$ recht leicht über Projektionen beweisen. Es gibt zwar so etwas wie eine Projektion auf Unterräume für alle $1 < p < \infty$, diese ist aber für $p \neq 2$ nicht orthogonal, so dass für eine Projektion P_1 auf einen Unterraum und eine Projektion P_2 auf einen Unterraum des Unterraumes im Allgemeinen nicht $P_1 \circ P_2 = P_2 \circ P_1$ gilt. Folglich ist $P_1 - P_2$ keine Projektion. Hieraus resultieren die bislang ungelösten Probleme, folgende Aussage von Lück für allgemeine p zu zeigen.

Bemerkung 3.27. Nach Lück [32, Theorem 1.35 (1)] sind die l^2-Bettizahlen invariant unter der Wahl der Auflösung.

Da die Homotopieinvarianz nicht bewiesen ist, sollte man eigentlich dementsprechend die Notation der Bettizahlen und der „Spuren" ändern. Da aber im Folgenden jeweils die Aussagen entweder für alle Auflösungen gelten oder die Wahl der Auflösung offensichtlich ist, wird auf diese weiteren Indizes verzichtet.

3.3.4. Dualität der Quasibettizahlen. Man sollte erwarten, dass für $1 < p \in \mathbb{R}$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ auch $b_i^{(p)}(G) = b^i_{(q)}(G)$ gilt. Im Falle $p = 2$ stimmt dies auch, wie folgendes Lemma zeigt.

Lemma 3.28. *Sei G eine Gruppe vom Typ FP_n, dann gilt*

$$b_i^{(2)}(G) = b^i_{(2)}(G).$$

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass für jedes Simplex die beiden „Spuren" übereinstimmen. Seien φ_i und φ_i^* die zu betrachtenden Randabbildungen. Der Beweis von Satz 2.11 zeigt, dass $\ker(\varphi_{i+1}^*) = \mathrm{im}(\varphi_{i+1})^\perp$ und $\overline{\mathrm{im}(\varphi_i^*)} = \ker(\varphi_i)^\perp$ gilt. Da $\ker \varphi_i$ orthogonal zu $\ker(\varphi_i)^\perp$ ist, ist die Summe der Quadrate der minimalen Abstände von c_σ zu diesen beiden Unterräumen gleich 1, der Norm von c_σ. Gleiches gilt für das Bild und dessen orthogonales Komplement. Sei A_U das Quadrat des Abstandes des Simplexes σ von dem Unterraum U. Dann hat man

$$\begin{aligned} A_{\ker(\varphi_i)} + A_{\ker(\varphi_i)^\perp} &= 1 \\ A_{\mathrm{im}(\varphi_{i+1})} + A_{\mathrm{im}(\varphi_{i+1})^\perp} &= 1 \end{aligned}$$

Sei $A_{\ker(\varphi_i)} - A_{\mathrm{im}(\varphi_{i+1})} = a$, dann folgt $A_{\mathrm{im}(\varphi_{i+1})^\perp} - A_{\ker(\varphi_i)^\perp} = a$. Somit sind die beiden „Spuren" gleich. □

Lemma 3.29. *Sei $1 < p < \infty$. Dann verschwinden die l^p-Bettizahlen für unendliche Gruppen und für eine Gruppe G mit $|G| < \infty$ gilt*

$$b^0_{(p)}(G) = 1 - \frac{|G| - 1}{\left(1 + \sqrt[q-1]{|G| - 1}\right)^{q-1}}$$

und

$$b_0^{(p)}(G) = \frac{1}{|G|^{p-1}}$$

mit dem üblichen $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Beweis. In dem Fall, dass G eine unendliche Gruppe ist, folgt die Behauptung aus Lemma 2.17 und Lemma 3.25.

Sei jetzt $|G| < \infty$ und sei $\dots \to \mathbb{Z}[G]^{n_1} \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$ eine freie Auflösung von $\mathbb{Z}$ über $\mathbb{Z}[G]$. Dann ist

$$\mathbb{C}[G] \xrightarrow{\tilde{\partial}_1} \mathbb{C}[G]^{n_1} \to \dots$$

der zu betrachtende Kokettenkomplex. Dementsprechend besteht $B^0_{(p)}$ nur aus der Nullabbildung, also ist $D(\sigma) = 1$ für alle Simplizes σ. Entsprechend gilt mit Bemerkung 1.31

$$\mathbb{C}[G]^G = H_0^{(p)}(G) = \ker(\partial_1).$$

Ergo ist

$$b^0_{(p)}(G) = 1 - d\,(\overline{e})^q = 1 - \left(\inf_{0<\alpha<1} \left\| 1 - \sum_{g \in G} \alpha \cdot g \right\|_q \right)^q,$$

wobei e das neutrale Element in G ist. Setzt man

$$\begin{aligned} f(\alpha) &:= \left\| 1 - \sum_{g\in G} \alpha \cdot g \right\|_q^q \\ &= |1-\alpha|^q + (|G|-1)\alpha^q, \end{aligned}$$

für $0 < \alpha < 1$, so erhält man

$$f'(\alpha) = -q \cdot (1-\alpha)^{q-1} + q(|G|-1) \cdot \alpha^{q-1}.$$

Man beachte, dass $q > 1$ ist. f' verschwindet für

$$\alpha = \frac{1}{1 + \sqrt[q-1]{|G|-1}}.$$

Wenn man dieses α, welches ein Minimum ist, in f einsetzt, erhält man die gewünschte Aussage.

Analog lässt sich die Aussage auch auf Homologiebasis beweisen. Hierbei betrachtet man

$$\dots \to \mathbb{C}[G]^{n_1} \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{C}[G].$$

Entsprechend ist $Z_0^{(p)} = \mathbb{C}[G]$ und somit $d'(\sigma) = 0$. $B_o^{(p)}$ besteht nach dem Beweis von Satz 2.11 aus der Menge ${}^\perp\{\sum_{g\in G} \alpha \cdot g \mid \alpha \in \mathbb{C}\}$. Diese wird erzeugt von den Elementen $1 \cdot e - 1 \cdot g$ in $\mathbb{C}[G]$. Folglich gilt

$$\begin{aligned} b_0^{(p)}(G) &= D'\,(\overline{e})^p \\ &= \left(\inf_{0<\alpha<1} \left\| (1-(|G|-1)\alpha) \cdot e + \sum_{\substack{g\in G,\\ g\neq e}} \alpha \cdot g \right\|_p \right)^p \end{aligned}$$

$$= \inf_{0<\alpha<1} \{(1-(|G|-1)\alpha)^p + (|G|-1)\alpha^p\}$$

Setzt man dieses Mal $f := (1-(|G|-1)\alpha)^p + (|G|-1)\alpha^p$, so ist

$$f'(\alpha) = -p(|G|-1)(1-(|G|-1)\alpha)^{p-1} + p(|G|-1)\alpha^{p-1}.$$

Letzteres verschwindet für $\alpha = \frac{1}{|G|}$, welches erneut ein Minimum ist. Einsetzen von diesem α in f ergibt das gewünschte Ergebnis. □

Bemerkung 3.30. Für $p = 2$ und G endlich ergibt sich das aus Lück [32] bekannte Ergebnis $b_0^{(2)}(G) = b^0_{(2)}(G) = \frac{1}{|G|}$.

Insgesamt heißt dies aber auch, dass die erhoffte Dualität schon im Grad 0 für endliche Gruppen im Allgemeinen nicht gilt.

3.4. l^p-Quasibettizahlen freier Gruppen

Zu guter Letzt soll noch ein Beispiel gegeben werden für unterschiedliche Ergebnisse in Abhängigkeit von der gewählten Norm.

Wenn $G = F_n$ eine freie Gruppe mit n Erzeugern ist, dann hat man mit Bemerkung 1.50 eine Auflösung

$$0 \to \mathbb{Z}[G]^n \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z} \to 0$$

mit $\partial(\varepsilon_i) = x_i - 1$, wobei ε_i die Standardbasisvektoren von $\mathbb{Z}[G]^n$ als $\mathbb{Z}[G]$-Modul und x_i die Erzeuger der Gruppe sind.

Bemerkung 3.31. Die ε_i sind auch gleich ein Vertretersystem für die G-Klassen der Simplizes. Sei (α_t) eine Folge in $Z^1_{(p)}(F_n)$ mit

$$\lim_{t\to\infty} \|\alpha_t - c_{\varepsilon_i}\|_g = d(\varepsilon_i).$$

Eine Beschreibung der α_t ist dann gegeben durch $\sum_{g\in G} a^t_g \cdot g$. Wenn man die g als vollständig gekürzte Worte in den Erzeugern von F_n und deren Inversen schreibt, gibt eine Vertauschung von x_i mit x_j und x_i^{-1} mit x_j^{-1} in dieser Beschreibung eine Folge (α'_t) in $Z^1_{(p)}(F_n)$ mit

$$\lim_{t\to\infty} \|\alpha_t - c_{\varepsilon_j}\|_g = d(\varepsilon_j).$$

Dass diese α'_t in $Z^1_{(p)}(F_n)$ sind, liegt an der symmetrischen Definition der Randabbildung ∂.

Analoge Aussagen gelten für die Koränder, Zykel und Ränder, wodurch man $\mathrm{tr}_1^{(p)}(\varepsilon_i) = \mathrm{tr}_1^{(p)}(\varepsilon_j)$ und $\mathrm{tr}^1_{(p)}(\varepsilon_i) = \mathrm{tr}^1_{(p)}(\varepsilon_j)$ erhält. Somit ist $b_1^{(p)}(F_n) = n \cdot \mathrm{tr}_1^{(p)}(\varepsilon_1)$ und $b^1_{(p)}(F_n) = n \cdot \mathrm{tr}^1_{(p)}(\varepsilon_1)$.

Im folgenden Lemma ist man eigentlich an $b^1_\infty(F_n)$ interessiert. Dafür müsste man sich aber mit dem Dualraum von $l^\infty(G)$ auseinandersetzen, was nicht der Zielrichtung dieser Arbeit entspricht. Stattdessen wird Folgendes versucht. Sei c_0 ein Prädual[5] von $l^1(G)$. Dann lässt sich auf Kokettenniveau analog zum Anfang dieses Abschnittes auch hierfür eine „Spur" definieren, die mit $\mathrm{tr}^1_{(0)}(\sigma)$ bezeichnet werden soll. Diese „Spur " hat den Vorteil, dass die involvierte Norm die 1-Norm ist.

Lemma 3.32. *Sei $G = F_n$ die freie Gruppe mit n Erzeugern. Dann gilt*

$$b^1_{(0)}(G) = n$$

für alle σ, wobei $b^1_{(0)}(G)$ die Quasibettizahl auf Kohomologiebasis von c_0, einem Prädual von $l^1(G)$, bezeichnet.

BEWEIS. Es reicht zu zeigen, dass $\mathrm{tr}^1_{(0)}(\varepsilon_1) = 1$.

In dem Fall $G = F_n$ hat man den folgenden Kettenkomplex zu betrachten:

$$0 \to l^1(G) \xrightarrow{\tilde\partial} l^1(G)^n \to 0$$

Hierbei ist $\tilde\partial$ gegeben durch

$$\tilde\partial(\alpha) = ((x_1 - 1)\alpha, \dots, (x_n - 1)\alpha),$$

wobei die x_i die Erzeuger der Gruppe $G = F_n$ sind. Die letzte Abbildung ist die Nullabbildung, also ist $Z^1_{(c_0)}(G) = l^1(G)^n$. Die „Spur" für ein Simplex $\varepsilon_1 = (e, 0, \dots, 0)$ ist also gegeben durch

$$\mathrm{tr}^1_{(c_0)}(\varepsilon_1) \;=\; \inf_{c \in B^1_{(c_0)}(G)} \|c_{\varepsilon_1} - c\|_1 = \inf_{\alpha \in l^1(G)} \left\| c_{\varepsilon_1} - \tilde\partial(\alpha) \right\|_1 .$$

Für $\alpha = 0$ ist dies gerade gleich 1. Es reicht also zu zeigen, dass

$$\|1 \cdot e - (x_1 - 1)\alpha\|_1 \geq 1$$

Sei $\alpha = \sum_{g \in G} \alpha_g \cdot g$ ein Element in $l^1(G)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|1 \cdot e - (x_1 - 1)\alpha\|_1 &= \left\| 1 \cdot e - (x_1 - 1)\left(\sum_{g \in G} \alpha_g \cdot g\right)\right\|_1 \\ &= \left\| 1 \cdot e - \sum_{g \in G} (\alpha_{x_1^{-1}g} - \alpha_g) \cdot g \right\|_1 \end{aligned}$$

[5]Sei X ein Banachraum, dann ist Y ein *Prädual* von X, wenn $X = Y^*$. Dieser Raum ist im Allgemeinen nicht eindeutig. In unserem Beispiel sind die Räume der konvergenten Folgen und der konvergenten Nullfolgen prädual zu $l^1(G)$ (vgl. [55]).

$$\begin{aligned}
&\geq \left\| 1 \cdot e - \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_{(x_1^{-1})^{k+1}} - \alpha_{(x_1^{-1})^k}) \cdot (x_1^{-1})^k \right\|_1 \\
&\quad + \left\| \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_{x_1^{k-1}} - \alpha_{x_1^k}) \cdot x_1^k \right\|_1 \\
&= \left| 1 - \alpha_{x_1^{-1}} + \alpha_e \right| \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \left| \alpha_{(x_1^{-1})^{k+1}} - \alpha_{(x_1^{-1})^k} \right| \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \left| \alpha_{x_1^{k-1}} - \alpha_{x_1^k} \right| \\
&\geq 1 - \left| \alpha_{x_1^{-1}} \right| - |\alpha_e| \\
&\quad - \sum_{k=1}^{\infty} \left| \alpha_{(x_1^{-1})^{k+1}} \right| + \sum_{k=1}^{\infty} \left| \alpha_{(x_1^{-1})^k} \right| \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \left| \alpha_{x_1^{k-1}} \right| - \sum_{k=1}^{\infty} \left| \alpha_{x_1^k} \right| \\
&\geq 1 - \left| \alpha_{x_1^{-1}} \right| - |\alpha_e| + \left| \alpha_{x_1^{-1}} \right| + |\alpha_e| \\
&= 1
\end{aligned}$$

Die vorletzte Umformung gilt, da α ein Element in $l^1(G)$ ist und somit sowohl $\left|\alpha_{x_i^k}\right| \xrightarrow{k\to\infty} 0$ als auch $\left|\alpha_{(x_i^{-1})^k}\right| \xrightarrow{k\to\infty} 0$ gilt. □

Satz 3.33. *Sei $G = F_n$ die freie Gruppe mit n Erzeugern. Dann gilt*

$$\overline{H^1_{(1)}(G)} = 0 \quad \textit{und} \quad b^1_{(1)}(G) = 0.$$

BEWEIS. Es reicht zu zeigen, dass die „Spur“ $\mathrm{tr}^1_{(1)}(\varepsilon_1)$ für das Simplex ε_1 verschwindet. Da die Simplizes eine Basis der 1-Koketten bilden, folgt daraus, dass die 1-Koränder dicht in den 1-Kozykeln liegen und somit die Kohomologie verschwindet. Hierbei umgeht man auch die Problematik der noch nicht bewiesenen Homotopieinvarianz für Quasibettizahlen, indem man die Homotopieinvarianz der Kohomologie nutzt.

In dem zu untersuchenden Fall betrachtet man den folgenden Kettenkomplex:

$$0 \to l^\infty(G) \xrightarrow{\tilde{\partial}} l^\infty(G)^n \to 0.$$

Hierbei ist $\tilde{\partial}$ erneut gegeben durch

$$\tilde{\partial}(\alpha) = (x_1 - 1, \ldots, x_n - 1) \cdot \alpha,$$

wobei die x_i die Erzeuger der Gruppe $G = F_n$ sind. Die letzte Abbildung ist die Nullabbildung, also ist $Z^1_{(1)}(G) = l^\infty(G)^n$. Die „Spur" für das Simplex $\varepsilon_1 = (e,0,\ldots,0)$ ist demnach gegeben durch

$$\mathrm{tr}^1_{(1)}(\varepsilon_1) \quad = \inf_{c \in B^1_{(1)}(G)} \|c_{\varepsilon_1} - c\|_\infty = \inf_{\alpha \in l^\infty(G)} \left\| c_{\varepsilon_1} - \tilde{\partial}(\alpha) \right\|_\infty .$$

Es reicht also, eine Funktion $\alpha \in l^\infty(G)$ so zu finden, dass

$$\|1 \cdot e - (x_1 - 1) \cdot \alpha\|_\infty = 0$$

und

$$\|(x_i - 1) \cdot \alpha\|_\infty = 0$$

für alle $i \neq 1$ gilt. Ein Element $\alpha \in l^\infty(F_n)$ lässt sich interpretieren als ein gewichteter Caleygraph der freien Gruppe F_n mit beschränkten Gewichten. Sei $\alpha = \sum_{g \in G} a_g g$ mit $a_g = 0$ für alle $g \in G$, deren vollständig gekürzte Wortdarstellung im Alphabet $\{x_i, x_i^{-1} \mid 1 \leq i \leq n\}$ mit x_1^{-1} anfängt, und $a_g = -1$ sonst. Dieses α ist in $l^\infty(G)$. Da hier der Caleygraph einer freien Gruppe betrachtet wird und es in einem solchen keine Kreise gibt, reicht es, die Aussage auf den einzelnen Geraden im Graphen zu verifizieren. Es bleibt somit zu zeigen, dass auf den Geraden im Caleygraphen, die nicht in x_1-Richtung durch e laufen, $(x_i - 1)\alpha = 0$ ist und dass auf der Geraden, die durch e in x_1-Richtung läuft, $1 \cdot e - (x_1 - 1) \cdot \alpha = 0$ gilt.

Für die erste Aussage sind zwei Teilfälle zu betrachten. Entweder sind die Gewichte für α auf der gesamten Geraden gleich 0 oder gleich -1. Zu betrachten ist also nur der zweite Teilfall. Eingeschränkt auf die fragliche Gerade lässt sich α schreiben als

$$\alpha = -\sum_{r=-\infty}^{\infty} 1 \cdot x_i^r h$$

für ein beliebiges h auf der zu untersuchenden Geraden. Somit gilt

$$\begin{aligned}(x_i - 1)\alpha &= (x_i - 1)\left(-\sum_{r=-\infty}^{\infty} x_i^r h\right) \\ &= -\sum_{r=-\infty}^{\infty} x_i^{r+1} h + \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_i^r h = 0.\end{aligned}$$

Eingeschränkt auf den zweiten Fall lässt sich α schreiben als

$$\alpha = \sum_{r=0}^{\infty} -1 \cdot x_1^r.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} 1 \cdot e - (x_i - 1) \cdot \alpha &= 1 \cdot e - x_i \alpha + \alpha \\ &= 1 \cdot e + \sum_{r=0}^{\infty} 1 \cdot x_i^{r+1} - \sum_{r=0}^{\infty} 1 \cdot x_i^r \\ &= 1 \cdot e - 1 \cdot e = 0. \end{aligned}$$

□

Bis jetzt ist dies das einzige Beispiel für einen signifikanten Unterschied zwischen l^2- und l^p-Kohomologie für $p \neq 2$, denn für $p = 2$ hat man:

Satz 3.34. [32] *Sei $G = F_n$ die freie Gruppe mit n Erzeugern. Dann gilt*

$$b^1_{(2)}(G) = n - 1.$$

Insbesondere verschwindet die l^2-Kohomologie nicht. Weiterhin vergleiche man dieses Ergebnis mit dem Satz von Pansu [41].

Satz 3.35. [41, Théorème H] *Sei M eine homogene, nicht kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann verschwindet für $p > 1$ die erste reduzierte L^p-Kohomologie genau dann, wenn M im Unendlichen beschränkt oder negativ gekrümmt ist.*

3.4.1. Numerische Berechnungen. Zusätzlich zu diesen leicht berechenbaren Bettizahlen sind einige numerische Experimente durchgeführt worden, um l^p-Quasibettizahlen auf Kohomologiebasis zu berechnen. Diese basieren darauf, dass analog zum Beweis von Lemma 3.32

$$\mathrm{tr}^1_{(p)}(\sigma) = D(\sigma)^q$$

ist. $D(\sigma)$ wiederum ist

$$D(\sigma) = \inf_{\alpha \in l^p(G)} \| c_\sigma - (x_1 - 1, \ldots, x_n - 1)\alpha \| . \tag{3.1}$$

Die „Spur" ist beschränkt nach oben durch 1 und nach unten durch 0. Mit Bemerkung 3.31 ergibt sich

$$b^1_{(p)}(F_n) = n \cdot \mathrm{tr}^1_{(p)}(\varepsilon_1).$$

Somit ist die eigentliche Aufgabe das Infimum in 3.1 zu finden. Dazu wird numerisch das Minimum über alle α approximiert, deren Träger Gruppenelemente mit Wortlänge kleiner gleich w sind.

Hierbei tauchen einige Probleme auf. Zum einen ist es wichtig, sich im Gegensatz zu Bemerkung 2.4 Gedanken über die Norm auf den Komponenten eines Tupels zu machen, da man sich jetzt für genaue Werte interessiert und nicht nur für die Frage nach dem Verschwinden oder Nichtverschwinden der Homologiegruppen. Am natürlichsten ist es hier, dieselbe Norm zu nutzen wie auch innerhalb der Komponenten, also die l^p-Norm. Für $p = 2$ ergeben die Rechnungen dann auch recht genau obiges Ergebnis von Lück.

Dazu kommen noch einige numerische Probleme. So lässt sich die „Spur“ als Infimum über alle Elemente in $l^q(G)$ aus zweierlei Gründen nur grob numerisch annähern. Zum einen können nur für explizite $\alpha \in l^p(G)$ gefundene Werte miteinander verglichen werden und zum anderen muss man sich bezüglich der Wortlänge w der Elemente g im Träger von α beschränken. Beides führt zu einer Überschätzung der Bettizahlen. Die unten aufgeführten Ergebnisse sind somit allesamt als obere Schranken zu verstehen. Die Rechenzeit auf einem Opteronprozessor beschränkt die maximale Wortlänge w, für die man α betrachtet. Bei $n = 2$ ist sinnvollerweise Schluss bei Wortlänge $w = 8$ und für $n = 3$ bei $w = 5$. Für Gruppen höherer Ordnung lassen sich somit keine guten Näherungswerte mehr berechnen.

Die Tabellen fassen die numerischen Ergebnisse getrennt für $n = 2$ und $n = 3$ zusammen. Angegeben sind jeweils die Werte für die „Spur“ von ε_1.

$n = 2$

$p\backslash w$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\frac{4}{3}$	0,205956	0,042413	0,020050	0,013409	0,011001	0,010405	0,010230	0,010181
$\frac{3}{2}$	0,401924	0,161543	0,110095	0,090868	0,081993	0,077861	0,076292	0,075830
$\frac{5}{3}$	0,554980	0,308003	0,247783	0,225517	0,216581	0,213508	0,212622	0,212362
$\frac{9}{5}$	0,647831	0,419684	0,363505	0,344050	0,336452	0,333407	0,332172	0,331681
2	0,750000	0,562500	0,519231	0,506250	0,502067	0,500688	0,500238	0,500096
$\frac{9}{4}$	0,834761	0,696825	0,669546	0,663012	0,661380	0,660968	0,660864	0,660838
$\frac{5}{2}$	0,889283	0,790824	0,774861	0,771885	0,771310	0,771201	0,771180	0,771180
3	0,948862	0,900000	0,895041	0,894495	0,894435	0,894428	0,894427	0,894427
4	0,987510	0,976046	0,975616	0,975601	0,975600	0,975600	0,975600	0,975600

$n = 3$

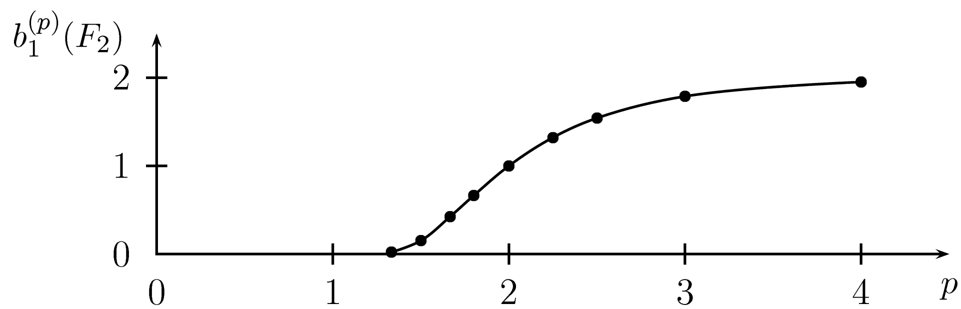
$p\backslash w$	1	2	3	4	5
$\frac{4}{3}$	0,251232	0,063117	0,035121	0,026302	0,023627
$\frac{3}{2}$	0,477458	0,227966	0,175969	0,158382	0,151897
$\frac{5}{3}$	0,643241	0,413759	0,365015	0,350504	0,345760
$\frac{9}{5}$	0,737411	0,543775	0,505769	0,496113	0,493506
2	0,833334	0,694444	0,672043	0,667736	0,666889
$\frac{9}{4}$	0,904455	0,818038	0,807857	0,806517	0,806338
$\frac{5}{2}$	0,944490	0,892060	0,887720	0,887334	0,887300
3	0,980581	0,961538	0,960800	0,960770	0,960769
4	0,997347	0,994702	0,994681	0,994681	0,994681

Für $p = 3$ und $p = 4$ wurden noch einige genauere Rechnungen durchgeführt. Insgesamt ergeben sich damit für die l^p-Quasibettizahlen auf Kohomologiebasis folgende Extrapolationen, wobei die unterschiedliche Konvergenz schon mit eingerechnet sind. Extrapoliert wurde, indem die Veränderung der Differenz aufeinanderfolgender oberer Schranken durch einen Faktor t_p nach oben abgeschätzt und dann die Differenz in einer geometrischen Reihe fortentwickelt wurde. Dementsprechend ist der angegebenen Fehler nach oben die Differenz der Extrapolation und der kleinsten berechneten oberen Schranke. Die untere Abschätzung ist ungenau. Hierbei wird davon ausgegangen, dass t_p sich auch für größere Wortlängen nicht wesentlich anderes verhält als in den beobachteten Fälle und dass t_p auch langfristig um nicht mehr als einen Faktor $\lambda = \frac{2}{1+t_p}$ unterschätzt worden ist. Da das größte angesetzte t_p für $p = \frac{3}{2}$ den Wert $0{,}48$ hat, liegt in diesem Fall der angenommene Faktor λ bei 1.35. Für kleinere t_p ist die Sicherheitsmarge deutlich größer. Zu Betonen ist aber, dass die untere Schranke nicht theoretisch begründet ist.

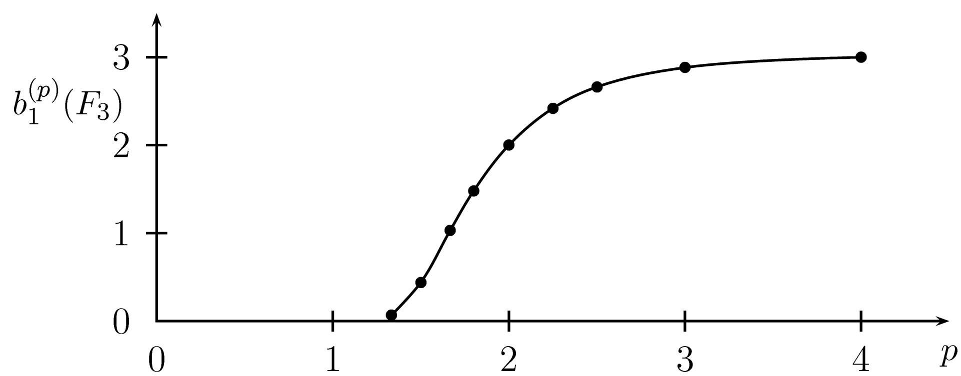
l^p-Quasibettizahlen auf Kohomologiebasis

$p\backslash n$	2		3	
$\frac{4}{3}$	0,02031	$\pm 5 \cdot 10^{-5}$	0,067	$\pm 3 \cdot 10^{-3}$
$\frac{3}{2}$	0,1508	$\pm 8 \cdot 10^{-4}$	0,44	$\pm 1 \cdot 10^{-2}$
$\frac{5}{3}$	0,4245	$\pm 3 \cdot 10^{-4}$	1,030	$\pm 6 \cdot 10^{-3}$
$\frac{9}{5}$	0,6627	$\pm 7 \cdot 10^{-4}$	1,477	$\pm 3 \cdot 10^{-3}$
2	1,0000	$\pm 1 \cdot 10^{-4}$	2,0000	$\pm 6 \cdot 10^{-4}$
$\frac{9}{4}$	1,32166	$\pm 2 \cdot 10^{-5}$	2,41893	$\pm 5 \cdot 10^{-5}$
$\frac{5}{2}$	1,542360	$\pm 5 \cdot 10^{-6}$	2,661891	$\pm 9 \cdot 10^{-6}$
3	1,788854	$\pm 1 \cdot 10^{-6}$	2,882307	$\pm 2 \cdot 10^{-6}$
4	1,951199912	$\pm 1 \cdot 10^{-9}$	2,98404225	$\pm 1 \cdot 10^{-8}$

Bei der Interpretation dieser Daten fallen einige Punkte auf. Zum einen wachsen die Werte schon für die „Spur“ mit wachsendem p und wachsendem n. Beides war zu erwarten. Interessanter ist, dass die Werte für große p deutlich schneller konvergieren und dass die Konvergenz für $p = \frac{4}{3}$ besser als erwartet ist. Gerade Letzteres ist nicht erklärbar. Zu bemerken ist weiterhin, dass für $p = 2$ das Ergebnis von Lück bestätigt wird, was ein gutes Indiz, wenn auch nicht mehr, für die Qualität der restlichen Ergebnisse ist. Graphisch ergibt sich für $n = 2$



und für $n = 3$



Insgesamt lässt sich folgende Vermutung aufstellen.

Vermutung 3.36. *Sei $G = F_2$ und $1 < p < \infty$. Dann gilt*

$$b^1_{(p)}(G) = 2 \cdot p^{-\frac{1}{(p-1)^{c(p)}}},$$

mit $1 < c(p)$ für alle p.

Betrachtet man diese Funktion, indem man p von rechts gegen 1 laufen lässt, dann ergibt sich das Ergebnis aus Satz 3.33. Für p gegen unendlich ergibt sich das, was sich aus Lemma 3.32 vermuten lässt.

ANHANG A

Mittelbare Gruppen

Das Konzept der mittelbaren oder amenablen Gruppen wurde von John von Neumann 1929 [37] eingeführt. Daraus entwickelte sich ein weites und fruchtbares Forschungsgebiet. Mittelbare Gruppen gehören zu den am besten verstandenen unendlichen Gruppen überhaupt. Einen guten Überblick geben die Bücher von Paterson [47] und Pier [48].

Aus verschiedenen Gründen liegt es nahe, zu vermuten, dass die Verschwindungssätze aus Kapitel 2, die allesamt mittelbare Gruppen betreffen, allgemein für alle mittelbaren Gruppen gelten. Dieses Kapitel soll aus einer Vielzahl von Ansätzen zwei altbekannte Teilerfolge und eine neue Beweisidee aufgreifen. Im Ganzen waren die Bemühungen um einen Beweis von Vermutung A.21 leider ohne Erfolg.

A.1. Definitionen und Beispiele

A.1.1. Mittelbarkeit. Bevor mittelbare Gruppen definiert werden können, müssen erst einige Basiskenntnisse aus der Funktionalanalysis wiederholt werden. Sei im Folgenden G eine lokalkompakte Gruppe[1], dann existiert ein linkes Haarmaß[2] λ auf G und $L_1(G) = L_1(G,\lambda)$, der Raum der komplexwertigen, integrierbaren Funktionen auf G, ist ein Banachraum mit der Norm $\|f\|_1 = \int_G |f| d\lambda$. Der Dualraum $L_1(G)^* = L_\infty(G)$ ist der Raum der beschränkten, λ-messbaren, komplexwertigen Funktionen ϕ auf G mit der essentiellen Supremumsnorm. Die Dualität wird gegeben durch $f \mapsto \int \phi f d\lambda$ für alle $f \in L_1(G)$.

Sei weiterhin $\mathcal{M}(G)$ die Familie der λ-messbaren Teilmengen von G. Sei μ ein positives, endlich additives Maß auf $\mathcal{M}(G)$ mit $\mu(G) = 1$, das auf lokalen Nullmengen verschwindet, dann korrespondiert μ zu einem $m \in L_\infty(G)^*$ folgendermaßen: Auf $A = \mathrm{span}\{\chi_E : E \in \mathcal{M}(G)\}$ ist m definiert durch

$$m\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E_i)$$

[1] jeder Punkt in G hat eine kompakte Umgebung
[2] positiv und invariant unter Linkstranslation

mit $\alpha_i \in \mathbb{C}$ und $E_i \in \mathcal{M}(G)$. Da A in der Norm dicht in $L_\infty(G)$ und m stetig auf A ist, lässt sich m auf ganz $L_\infty(G)$ ausdehnen. Umgekehrt ist $\mu(E) := m(\chi_E)$.

Definition A.1. Insgesamt ist

i) das Funktional m ein *Mittel* auf $L_\infty(G)$, das heißt $m \in L_\infty(G)^*$ so, dass $m(1) = 1$ und $\|m\| = 1$,
ii) $\mathfrak{M}(G)$ die Menge der Mittel auf $L_\infty(G)$,
iii) $P(G) := \{f \in L_1(G) \mid \hat{f} \in \mathfrak{M}(G)\}$, mit $\hat{f}(\phi) = \phi(f)$, und
iv) $P_p(G) := \{f \in L_p(G) \mid f \geq 1, \|f\|_p = 1\}$.

Grundlegend für den Gebrauch von Mitteln ist der folgende Satz, der hier nur zitiert werden soll.

Satz A.2. [47] *Es gilt:*

i) $n \in L_\infty(G)^*$ *ist genau dann ein Mittel, wenn für alle* $\varphi \in L_\infty(G)$ *mit* $\varphi \geq 0$ *gilt, dass* $n(\varphi) \geq 0$ *und* $n(1) = 1$.
Weiterhin gilt für $n \in \mathfrak{M}(G)$ *und* $\varphi \in L_\infty(G)$ *reellwertig, dass*

$$\operatorname*{ess\,inf}_{x\in G} \varphi(x) \leq n(\varphi) \leq \operatorname*{ess\,sup}_{x\in G} \varphi(x).$$

ii) $\mathfrak{M}(G)$ *ist eine schwach***-kompakte, konvexe Teilmenge, die* $L_\infty(G)^*$ *aufspannt.*
iii) $P(G) = \{f \in L_1(G) \mid f \geq 0, \int f d\lambda = 1\}$ *und* $P(G)^\wedge$ *ist dicht in* $\mathfrak{M}$ *bezüglich der Schwach***-Topologie.*[3]

Bemerkung A.3. G lässt sich in $L_1(G)$ einbetten durch $x \mapsto \chi_{\{x\}}$ für alle $x \in G$.

$L_\infty(G)$ ist eine rechte G-Menge unter der Transformation $\varphi \mapsto \varphi x$ für alle $\varphi \in L_\infty(G), x \in G$. Hierbei ist $\varphi x(y) = \varphi(xy)$. Weiterhin ist jede Abbildung $\varphi \mapsto \varphi x$ eine Isometrie auf $B(L_\infty(G))$, der Banachalgebra der beschränkten linearen Operatoren.

Definition A.4. Eine lokalkompakte Gruppe heißt *mittelbar* oder auch *amenabel*, wenn ein linksinvariantes Mittel auf G existiert.

Die Menge der linksinvarianten Mittel auf G wird mit $\mathfrak{L}(G)$ bezeichnet. Sie ist eine schwach*-kompakte, konvexe Teilmenge von $\mathfrak{M}(G)$.

Bemerkung A.5. Für $x \in G$ und $f \in L_1(G)$ ist die *Faltung* $x * f$ definiert durch $x * f(y) = f(x^{-1}y)$. Für $\varphi \in L_\infty(G)$ ergibt sich

$$(\varphi, x * f) = \int f(x^{-1}y)\varphi(y)d\lambda(y) = \int f(y)\varphi(xy)d\lambda(y) = (\varphi x, f).$$

In $L_\infty(G)^*$ bedeutet dies: $x\hat{f} = (x * f)^\wedge$

[3] $P(G)^\wedge$ ist der Bidual von $P(G)$.

Im Spezialfall $f = \frac{\chi_K}{\lambda(K)}$ folgt:

$$\|x * f - f\|_1 = \frac{1}{\lambda(K)} \int |\chi_K(x^{-1}y) - \chi_K(y)| d\lambda(y) = \frac{\lambda(xK \triangle K)}{\lambda(K)}$$

mit $A \triangle B = A \setminus B \cup B \setminus A$.

Für $f, g \in L_1(G)$ und $x \in G$, vgl. [47, S. 8], ist die Faltung gegeben durch

$$f * g(x) = \int_G f(t) g(t^{-1}x) d\lambda(t).$$

Definition A.6. Ein Mittel auf $L_\infty(G)$ heißt *topologisch linksinvariant*, falls $fm = m$ für alle $f \in P(G)$ beziehungsweise $m(\varphi * f) = m(\varphi)$ für alle $\varphi \in L_\infty(G)$ und $f \in P(G)$.

Die Menge der topologisch linksinvarianten Mittel wird mit $\mathfrak{L}_t(G)$ bezeichnet. Es ist eine schwach*-kompakte, konvexe Teilmenge von $\mathfrak{M}(G)$ und $\mathfrak{L}_t(G) \subset \mathfrak{L}(G)$. Letzteres gilt, da für alle $m \in \mathfrak{L}_t(G)$, $x \in G$ und $f \in P(G)$ gilt:

$$xm = x * (f * m) = (x * f) * m = m.$$

Die folgende Aussage ist grundlegend für die Behandlung mittelbarer Gruppen. Für den Beweis der Aussage sei unter anderem verwiesen auf [47].

Proposition A.7. (Eigenschaft P_p *oder* Reiterkriterium) *Die folgenden drei Aussagen sind äquivalent:*

i) *Die Gruppe G ist mittelbar.*
ii) *Sei C ein Kompaktum in G und $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein f in $P_p(G)$ so, dass $\|x * f - f\|_p < \varepsilon$ für alle $x \in C$.*
iii) *Es existiert ein Netz $\{f_\delta\}$ in $P_p(G)$ so, dass $\|\mu * f_\delta - f_\delta\|_p \to 0$ für alle $\mu \in P(G)$.*

Skudlarek hat in [57] eine zweiseitige Formulierung der Reiterbedingung bewiesen.

Für diskrete Gruppen, und nur solche sind im Fokus dieser Arbeit, lässt sich die Definition vereinfachen zu:

Definition A.8. [2] Eine diskrete Gruppe G ist mittelbar, wenn sie ein Maß $\mu \in [0,1]^G$ trägt so, dass

$$\mu(G) = 1 \text{ und } \mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B) \text{ und } \mu(Ag) = \mu(A)$$

für alle $g \in G$ und disjunkte $A, B \subseteq G$.

Die wohl wichtigste Charakterisierung mittelbarer Gruppen, die hier nur für diskrete Gruppen formuliert werden soll, basiert auf den Følner-Mengen

Lemma A.9. [32, Lemma 6.35] *Eine Gruppe G ist genau dann mittelbar, wenn sie die Følner-Bedingung erfüllt. Das heißt, dass für jede endliche Menge $S \subset G$ mit $s \in S \Rightarrow s^{-1} \in S$ und jedes $\varepsilon > 0$ eine nicht-leere endliche Teilmenge $A \subset G$ so existiert, dass für $\partial_S A = \{a \in A \mid \exists s \in s : a \cdot s \notin A\}$, dem S-Rand von A, gilt*

$$|\partial_S A| \leq \varepsilon \cdot |A| .$$

Die Formulierung mit Følner-Mengen folgt leicht aus der Reiterbedingung. Dementsprechend lässt sich auch das Lemma A.17 mit Hilfe von Følner-Mengen umformulieren.

A.1.2. Beispiele.

Beispiel A.10. Jede kompakte Gruppe ist mittelbar, denn die Abbildung $\varphi \mapsto \int \varphi d\lambda$ ist ein Element von $\mathfrak{L}(G)$.

Beispiel A.11. $\mathbb{Z}$ ist mittelbar.

BEWEIS. Sei $f_n = \frac{1}{2n+1} \sum\limits_{r=-n}^{n} \delta_r$. Sei weiterhin $\varphi \in L_\infty(\mathbb{Z})$ und $s \geq 0$, dann gilt:

$$\begin{aligned} |\hat{f}_n(\varphi s) - \hat{f}_n(\varphi)| &= \left| \frac{1}{2n+1} \left(\sum_{r=-n}^{n} (\varphi(r+s) - \varphi(r)) \right) \right| \\ &= \frac{1}{2n+1} \left| - \sum_{r=-n}^{-n+s-1} \varphi(r) + \sum_{r=n+1}^{n+s} \varphi(r) \right| \\ &\leq \frac{2s \|\varphi\|}{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \end{aligned}$$

Dieses gilt auch für $s < 0$, das heißt jeder Schwach*-Häufungspunkt von $\{\hat{f}_n\}$ in $\mathfrak{M}(\mathbb{Z})$ ist ein linksinvariantes Mittel. □

Bemerkung A.12. Mit $f_n = \frac{\chi_{[-n,n]}}{2n}$ folgt analog, dass $\mathbb{R}$ mittelbar ist.

Beispiel A.13. Für $n > 1$ ist F_n, die freie Gruppe mit n Erzeugern, nicht mittelbar.

BEWEIS. Seien u_i die Erzeuger von F_n. Für $x \in \{u_i, u_i^{-1}\}$ sei E_x die Menge der Elemente von F_n, die als vollständig reduzierte Worte mit x beginnen.

Angenommen, es gebe nun ein linksinvariantes Mittel m. Dann gilt

$$m(\{e\}) + \sum_x m(E_x) = m(F_n) = 1.$$

Weiterhin gilt aber auch $1 = m(F_n) = m(E_x) + m(xE_{x^{-1}})$, was zum Widerspruch führt. □

Satz A.14. *Jede lokal kompakte Gruppe von polynomialem Wachstum ist mittelbar.*

BEWEIS. Seien $x_1, \dots, x_r \in G$ und $c \in \mathcal{C}_e(G)$ so, dass $x_i, x_i^{-1} \in C$. Sei $a_n = \lambda(C^n)$. Dann gibt es ein Polynom p so, dass $0 \leq a_n \leq p(n)$. Sei $p(n) \leq Kn^r$ für $K > 0$ und $r \in \mathbb{N}$. Es gilt $a_n \leq a_{n+1}$, da C^{n+1} die Linkstranslation von C^n enthält und λ linksinvariant ist.

Jetzt gilt $0 < \lambda(C)^{\frac{1}{n}} \leq a_n{}^{\frac{1}{n}} \leq K^{\frac{1}{n}}(n^{\frac{1}{n}})^r$, das heißt $\sqrt[n]{a_n} \to 1$, woraus folgt: $\liminf\limits_{n\to\infty}(\frac{a_{n+1}}{a_n}) = 1$. Sei nun $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{\lambda(C^{N+1})}{\lambda(C^N)} < 1 + \frac{\varepsilon}{2}$. Folglich gilt $\frac{\lambda(C^{N+1} \triangle C^N)}{\lambda(C^N)} = \frac{\lambda(C^{N+1}) - \lambda(C^N)}{\lambda(C^N)} < \frac{\varepsilon}{2}$. Das heißt

$$\lambda(x_i C^N \setminus C^N) < \frac{\varepsilon}{2}\lambda(C^N)$$

und

$$\lambda(C^N \setminus x_i C^N) = \lambda(x_i{}^{-1} C^N \setminus C^N) < \frac{\varepsilon}{2}\lambda(C^N).$$

Folglich gilt $\frac{\lambda(x_i C^N \triangle C^N)}{\lambda(C^N)} < \varepsilon$. Es folgt sofort mit Bemerkung A.5, dass $\|x_i * f - f\|_1 < \varepsilon$ für $f = \frac{\chi_{C^N}}{\lambda(C^N)}$ gilt. Proposition A.7 schließt dann den Beweis dieses Satzes ab. □

Bis hierhin hat man mit Korollar 2.33, welches Gruppen von polynomialem Wachstum behandelt, und Abschnitt 3.4, in dem freie Gruppen betrachtet werden, die l^p-Kohomologie einiger Beispiele für mittelbare Gruppen und nicht-mittelbare Gruppen untersucht. Die l^p-Kohomologie verschwand für alle Beispiele mittelbarer Gruppen und war ungleich null für nicht-mittelbare Gruppen und $1 < p < \infty$.

A.1.3. Inneramenabelität.

Definition A.15. Eine lokalkompakte Gruppe G heißt *inneramenabel*, wenn es ein nichttriviales Mittel m auf $L^\infty(G)$ gibt so, dass

$$m(\pi(a)f) = m(f)$$

für alle $a \in G$ und $f \in L^\infty(G)$. Hierbei ist

$$(\pi(a)f)(x) = f(a^{-1}xa)$$

für $x \in G$.

Vermutung A.16. *Sei G eine lokalkompakte Gruppe und sei V eine kompakte Umgebung der Identität mit $x^{-1}Vx = V$ für alle $x \in G$. Sei weiterhin $P_p^V(G) = \{f \in P_p(G) \mid \int_V f(x)dx = 0\}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

i) *G ist inneramenabel.*

ii) *Sei C ein Kompaktum in G und $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein f in $P_p^V(G)$ so, dass $\|\pi(x)f - f\|_p < \varepsilon$ für alle $x \in C$.*
iii) *Es existiert ein Netz $\{h_\delta\}$ in P_p^V so, dass $\|\pi(x)h_\alpha - h_\alpha\|_p \to 0$ für alle $x \in G$.*

Im Falle $p = 2$ ist diese Vermutung bewiesen für diskrete Gruppen und $V = \{e\}$ in [44]. Ebenfalls für den Fall $p = 2$ ist die Aussage bewiesen in [29], allerdings mit der Einschränkung, dass die Rückrichtung der ersten Äquivalenz fehlt. Wenn man diese Vermutung vergleicht mit der Eigenschaft P_p von mittelbaren Gruppen, so sollte es relativ einfach sein, von $p = 2$ auf ein beliebiges $p \geq 1$ zu verallgemeinern.

Lemma A.17. *Sei G eine lokal kompakte mittelbare Gruppe und sei C ein Kompaktum in G und $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $f \in P_p(G)$ so, dass $\|\pi(x)f - f\|_p < \varepsilon$ für alle $x \in C$.*

BEWEIS. Dies ist eine einfache Verallgemeinerung des Theorems 3 von Losert und Rindler [31]. □

Bemerkung A.18. Nach [47] ist eine Gruppe mittelbar genau dann, wenn ein Mittel existiert, welches sowohl rechts- als auch linksinvariant ist. Dieses invariante Mittel liefert uns folgende leicht abgewandelte Form der Reitereigenschaft.

Lemma A.19. *Sei G eine mittelbare Gruppe, C eine kompakte Teilmenge von G und $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $f \in P_p(G)$ so, dass $\|x * f - f\|_p < \varepsilon$ und $\|f - f * x\|_p < \varepsilon$ für alle $x \in C$.*

BEWEIS. Der Beweis der Reitereigenschaft lässt sich für diesen Fall eins zu eins übertragen. □

Lemma A.20. [29] *Sei G eine lokalkompakte mittelbare Gruppe. Dann ist G auch inneramenabel.*

BEWEIS. Mit Lemma A.19 folgt

$$\begin{aligned}\|\pi(x)f - f\|_p &= \|x * f - f * x\|_p \\ &\leq \|x * f - f\|_p + \|f * x - f\|_p < 2\varepsilon.\end{aligned}$$

□

Die folgende Vermutung, die so ähnlich zuerst von Gromov [23] formuliert wurde, entzieht sich immer noch trotz intensiver Versuche jeglichen Beweises. Weder kann die Beweismethode von Martin und Valette [33] (s. Abschnitt A.2) noch die von Lück [32] (s. Abschnitt A.3) verallgemeinert werden, da sie fundamental auf den speziellen Eigenschaften von $H^1_{(p)}$ beziehungweise von l^2-Funktionen basieren. Auch andere Ansätze über den direkten Weg oder über Azyklizität (s. Abschnitt A.4) haben bis jetzt nicht gefruchtet. Betont werden soll, dass die Vermutung sich auf alle inneramenablen Gruppen bezieht und nicht nur auf amenble Gruppen.

Vermutung A.21. *Sei G eine unendliche, inneramenable Gruppe vom Typ FP_n. Dann ist $\overline{H_i^{(p)}}(G) = 0$ für $i \leq n$ und $1 < p < \infty$.*

Falls diese Vermutung nicht stimmen sollte, wäre wegen Korollar 2.33 die erste Grigorchuk-Gruppe [21] ein erster Kandidat für ein Gegenbeispiel. Eine gute Darstellung dieser Gruppe gibt es in [25].

A.2. Ergebnisse für $\overline{H^1_{(p)}(G)}$

Dieser Abschnitt beinhaltet drei Teilerfolge von Guichardet, Bourdon, Martin, Tessera und Valette. Der erste ist ein interessanter Vergleich von reduzierter und unreduzierter Kohomologie. Die Aussage A.23 von Martin und Valette [33] ist ein einfaches Korollar des folgenden Satzes von Guichardet [24, Théorème 1], der hier ohne Beweis angeführt wird.

Theorem A.22. [24] *Sei G eine lokal kompakte Gruppe mit einer abzählbaren Basis ihrer Topologie. Sei weiterhin V ein Banachmodul so, dass $V^G = 0$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

i) $H^1(G,V) = \overline{H^1}(G,V)$.

ii) *V hat keine fast invarianten Vektoren.*

Sei λ_G für $1 \leq p < \infty$ die linke reguläre Darstellung von G auf $L^p(G)$. Dann hat λ_G fast invariante Vektoren genau dann, wenn G mittelbar ist [18]. Also gilt

Korollar A.23. [33] *Sei $1 \leq p < \infty$ und sei G eine lokalkompakte, nicht kompakte Gruppe mit abzählbarer Basis ihrer Topologie. Dann ist G nicht mittelbar genau dann, wenn $H_1^{(p)}(G) = \overline{H_1^{(p)}}(G)$.*

Korollar A.23 gibt einen weiteren Beweis für die Aussage von Bemerkung 2.20.

Hierauf aufbauend waren Bourdon, Martin und Valette in der Lage, folgenden Satz zu zeigen.

Theorem A.24. [7] *Sei $N \subset H \subset G$ eine Kette von Gruppen mit H,G endlich erzeugt und N unendlich und normal in G und H nicht-mittelbar. Dann gilt*

$$\overline{H^1_{(p)}(H)} = 0 \Rightarrow \overline{H^1_{(p)}(G)} = 0.$$

Bemerkung A.25. Es ist nicht klar, ob die Bedingung H nicht-amenabel notwendig ist.

Tessera [62] schließlich war in der Lage, für eine bestimmte Klasse von mittelbaren Gruppen, sie nennt sie *kontrolliert Følner* (CF), zu zeigen, dass die erste reduzierte l^p-Kohomologie verschwindet.

Bemerkung A.26. Die eigentliche Problematik zur Verallgemeinerung dieser Ergebnisse liegt in der Tatsache begründet, dass die Beweise allesamt auf dem ersten Schritt der Standardauflösung fußen. In diesem Fall ist ein 1-Kozykel eine Abbildung α von G nach $l^p(G)$ mit

$$\alpha(g \cdot h) = (\alpha(h))g + \alpha(g),$$

für $g,h \in G$, und ein 1-Korand ist ein 1-Kozykel der Form $\alpha(g) = xg - x$ für ein $x \in l^p(G)$ und alle $g \in G$. Insbesondere der Satz von Guichardet basiert hierauf und damit auch der Rest dieses Abschnittes. Mit dieser greifbaren Definition der ersten Kohomologiegruppe lassen sich Aussagen über l^p-Kohomologie zurückziehen auf Aussagen über harmonische Funktionen und insbesondere über die Menge

$$D^p(G) = \{\beta \in \mathcal{F} \mid \beta * (g-1) \in L^p(G) \text{ für alle } g \in S\},$$

wobei S die symmetrische Menge der Erzeuger von G ist, $\mathcal{F}$ die Menge der komplexwertigen Funktionen auf G und $\beta * \alpha$ für $\alpha \in \mathbb{C}[G]$ und $\beta \in \mathcal{F}$ definiert ist durch

$$\beta * \alpha = \sum_{x,y \in G} b_x a_y xy = \sum_{x \in G} \left(\sum_{y \in G} b_{xy^{-1}} a_y \right) x$$

mit $\alpha = \sum_{x \in G} a_x x$ und $\beta = \sum_{y \in G} b_y y$. Für die Methodik vergleiche Arbeiten von Bourdon, Martin und Valette [7], Martin und Valette [33], Narkawicz [35] sowie Puls [49, 50, 51].

A.3. Das Verschwinden von $\overline{H^1_{(2)}(G)}$

Der folgende Satz stammt ursprünglich von Cheeger und Gromov [11]. Wesentliche Vorarbeiten haben diese beiden Autoren in [10] geleistet.

Theorem A.27. [11] *Sei G eine unendliche, mittelbare Gruppe. Dann ist*

$$b_i^{(2)}(G) = 0$$

für alle $i \geq 0$.

Einen alternativen Beweis hat Lück in [32, Corollary 6.75] gegeben. Letzterer Beweis basiert auf einer Aussage [32, Theorem 6.37] über die Dimensionsflachheit der Gruppen-von-Neumann-Algebra $\mathcal{N}(G)$ für eine Gruppe G über dem Gruppenring $\mathbb{C}[G]$ für mittelbare Gruppen.

Beiden Ansätzen liegen fundamentale Aussagen über orthogonale Projektionen zu Grunde. Für $p \neq 1,\infty$ lassen sich zwar eindeutig Projektionen definieren, indem man um einen Punkt x, der nicht in einem gegebenen Unterraum U liegt, l^p-Bälle legt. Dann gibt es einen eindeutigen Radius r so, dass der l^p-Ball mit Radius r exakt einen Punkt x_U enthält, der in U liegt. Diesen kann man als Projektion von x auf U interpretieren. Allerdings haben die so definierten Projektionen nicht die Eigenschaften, die man von der orthogonalen Projektion im Falle $p = 2$ kennt (vgl. Bemerkung 3.26). Solange sich dies nicht irgendwie beheben lässt, kann man auch diesen Ansatz nicht zum Beweis von Vermutung A.21 heranziehen.

A.4. Der azyklische Ansatz

Zu guter Letzt soll hier noch ein vielversprechender Ansatz dargestellt werden. Er basiert auf der Idee, die Eigenschaft l^p-paarungsazyklisch zum Beweis von Vermutung A.21 heranzuziehen. Auch hier stößt man auf einige Hindernisse, sie scheinen aber weniger schwerwiegend zu sein.

Sei G also eine inneramenable Gruppe, sei K eine Ausschöpfung der Gruppe G durch Følnermengen nach Lemma A.17 und sei $\varepsilon : F \to \mathbb{Z}$ die Standardauflösung von $\mathbb{Z}$ über $\mathbb{Z}[G]$. Dann lässt sich der Kettenkomplex beschreiben als

$$C_n^{(p)} = \mathbb{Z}[G]^{n+1} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} E$$

und der duale Kokettenkomplex als

$$C^n_{(q)} = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}\left(\mathbb{Z}[G]^{n+1}, E'\right)$$

mit $E = l^p(G)$ und $E' = l^q(G)$. Die Randabbildung auf dem Kettenkomplex ist mit Definition 1.39 gegeben durch

$$\partial((x_0,\ldots,x_n)\otimes r) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i(x_0,\ldots,x_{i-1},\widehat{x_i},x_{i+1},\ldots,x_n)\otimes r.$$

Sei m_g die Linksmultiplikation mit einem Element $g \in G$. Dann ist zu zeigen, dass eine Famile von Operatoren h_t vom Grad $+1$ so existiert, dass sie für alle t eine Kettenhomotopie von $m_{x_0 g x_0^{-1}}$ zur Identität ist und in der Auswertungspaarung aus Bemerkung 2.12 für alle $\alpha \in C_n^{(p)}$ und alle $\beta \in C^n_{(q)}$ kettenkontrahierend wirkt für $t \to \infty$. Sei nun $h_g : C_*^{(p)} \to C_{*+1}^{(p)}$ definiert durch

$$h_g(x_0,\ldots,x_n) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}(x_0,\ldots,x_k,x_0 g x_0^{-1}x_k,\ldots,x_0 g x_0^{-1}x_n).$$

Mit dem zweiten Teil des Beweises von Lemma 2.21 gilt

$$\partial h_g + h_g \partial = \mathrm{id} - m_{x_0 g x_0^{-1}}.$$

Setzt man jetzt

$$h_K = \frac{1}{|K|} \sum_{g \in K} h_g$$

für $K \subset G$. Sei $X = \sum_{j=1}^{s} (1, x_1^j, \ldots, x_n^j) \otimes r^j$ ein Element aus $C_n^{(p)}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\partial h_K(X) &= \partial \left[\frac{1}{|K|} \sum_{g \in K} \sum_{j=1}^{s} h_g(1, x_1^j, \ldots, x_n^j) \otimes r^j \right] \\
&= \frac{1}{|K|} \sum_{g \in K} \sum_{j=1}^{s} \partial h_g(1, x_1^j, \ldots, x_n^j) \otimes r^j \\
&= -\frac{1}{|K|} \sum_{g \in K} \sum_{j=1}^{s} h_g \partial (1, x_1^j, \ldots, x_n^j) \otimes r^j \\
&\quad + \frac{1}{|K|} \sum_{g \in K} \sum_{j=1}^{s} (1, x_1^j, \ldots, x_n^j) \otimes r^j \\
&\quad - \frac{1}{|K|} \sum_{g \in K} \sum_{j=1}^{s} m_{x_0 g x_0^{-1}} (1, x_1^j, \ldots, x_n^j) \otimes r^j \\
&\quad + \frac{1}{|K|} \sum_{g \in K} \sum_{j=1}^{s} m_g (1, x_1^j, \ldots, x_n^j) \otimes r^j \\
&\quad - \frac{1}{|K|} \sum_{g \in K} \sum_{j=1}^{s} m_g (1, x_1^j, \ldots, x_n^j) \otimes r^j \\
&= X - h_K \partial (X) \\
&\quad - \frac{1}{|K|} \sum_{g \in K} \sum_{j=1}^{s} m_g (1, x_1^j, \ldots, x_n^j) \otimes r^j \\
&\quad + \frac{1}{|K|} \sum_{j=1}^{s} \sum_{g \in K \triangle x_0^j K x_0^{j\,-1}} m_g (1, x_1^j, \ldots, x_n^j) \otimes r^j \\
&= X - h_K \partial (X) \\
&\quad - \frac{1}{|K|} \sum_{g \in K \cap x_0^j K x_0^{j\,-1}} \sum_{j=1}^{s} m_g (1, x_1^j, \ldots, x_n^j) \otimes r^j
\end{aligned}$$

Das heißt $-\frac{1}{|K|}\sum_{g\in K\cap x_0^j K {x_0^j}^{-1}} m_g(X)$ ist kettenhomotop zur Identität für alle K. Das Element g ist aber auf $K\cap x_0^j K {x_0^j}^{-1}$ asymptotisch zentral, d.h. asymptotisch könnte man jetzt den Beweis von Satz 2.24 nutzen. Um dies zu tun, fehlen aber noch einige wichtige, ungelöste Zwischenschritte.

Sei $\beta \in C^{n+1}_{(q)}$, beschrieben durch $\beta : G^n \to l^q(G)$. Dann wäre es zum Beispiel wichtig, dass β beschränkt wäre. Leider ist aber die Aussage, dass jeder Zykel β kohomolog zu einem beschränkten $\tilde{\beta}$ ist, falsch.

Insgesamt entzieht sich somit Vermutung A.21 leider immer noch jeglichen Versuchen, sie zu beweisen.

Literaturverzeichnis

[1] Alejandro Adem und R. James Milgram, *Cohomology of finite Groups* (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **309**), Berlin u. a. (1994). 26

[2] Laurent Bartholdi, *On Amenability of Group Algebras I*, **Preprint** (2006). 61

[3] William Beckner, *Inequalities in Fourier Analysis*, Annals of Mathematics **102** (1975), S. 159–182. 40

[4] Gérard Besson, *Riemannian Geometry* (Fields Institute Monographs 4), Providence (1996). 74

[5] Robert Bieri und Beno Eckmann, *Groups with Homological Duality Generalizing Poincaré Duality*, Inventiones mathematicae **20** (1973), S. 103–124. 19, 20

[6] Marc Bourdon und Hervé Pajot, *Cohomologie L^p et Espaces de Besov*, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik **558** (2003), S. 85–108. 2

[7] Marc Bourdon, Florian Martin und Alain Valette, *Vanishing and non-vanishing for the first L^p-cohomology of groups*, Commentarii Mathematici Helvetici **80** (2005), no. 2, S. 377–389. 2, 65, 66

[8] Glen E. Bredon, *Topology and Geometry* (Graduate Texts in Mathematics **139**), New York u .a. (1993). 3, 42

[9] Kenneth S. Brown, *Cohomology of Groups* (Graduate Texts in Mathematics **87**), New York u. a. (1982). 2, 3, 13, 18, 25, 26, 38

[10] Jeff Cheeger und Mikhael Gromov, *Bounds on the Von Neumann dimension of L^2-cohomology and the Gauss-Bonnet theorem for open manifolds*, Journal for Differential Geometry **21** (1985), S. 1–34. 66

[11] Jeff Cheeger und Mikhael Gromov, *L_2-cohomology and group cohomology*, Topology **25** (1986), no. 2, S. 189–215. 66

[12] Daniel E. Cohen, *Combinatorial Group Theory: a topological approach* (London Mathematical Society Student Texts 14), Cambridge u. a. (1989). 14

[13] Andreas Defant und Klaus Floret, *Tensor Norms and Operator Ideals* (North-Holland Mathematics Studies **176**), Amsterdam u. a. (1993). 40

[14] Jozéf Dodziuk, *De Rham-Hodge theory for L^2-cohomology of finite coverings*, Topology **16** (1977), S. 157–165. 47

[15] Samuel Eilenberg, *Homology of Spaces with Operators I*, Transactions of the American Mathematical Society **61** (1947), S. 378–417. 14, 16

[16] Gábor Elek, *Coarse Cohomology and l_p-Cohomology*, K-Theory 13 (1998), no. 1, S. 1–22. 1

[17] Leonard Evens, *The Cohomology of Groups* (Oxford Mathematical Monographs), Oxford u. a. (1991). 2, 10

[18] Pierre Eymard, *Moyennes invariantes et représentations unitaires* (Lecture Notes in Mathematics **300**), Berlin u. a. (1972). 65

[19] Vladimir M. Gol'dshtein, Vladimir I. Kuz'minov und Igor A. Shvedov, *L_p-cohomology of Riemannian manifolds*, Trudy Institute Matematiki (Novosibirsk) **7** (1987), S. 101–116, 199. 1

[20] Vladimir M. Gol'dshtein, Vladimir I. Kuz'minov und Igor A. Shvedov, *The de Rham isomorphism of the L_p-cohomology of noncompact Riemannian manifolds*, Sibirski Matematicheski Zhurnal **29** (1988), no. 2, S.34–44, 216. 1

[21] Rostislav I. Grigorchuk, *An example of a finitely presented amenable group not belonging to the class EG*, Sbornik Mathematics **189** (1998), no. 1, S. 75–95. 65

[22] Mikhael Gromov, *Groups of polynomial growth and expanding maps*, Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications Mathématiques **53** (1981), S. 53–73. 36

[23] Mikhael Gromov, *Asymptotic Invariants of Infinite Groups*. In: [38], S. 1–295. 1, 2, 32, 38, 41, 42, 44, 64

[24] Alain Guichardet, *Sur la cohomologie des groupes topologiques II*, Bulletin des Sciences Mathématiques **96** (1972), S. 305–332. 65

[25] Pierre de la Harpe, *Topics in Geometric Group Theory* (Chicago Lectures in Mathematics), Chicago u. a. (2000). 65

[26] Peter J. Hilton und Urs Stammbach, *A course in Homological Algebra* (Graduate Texts in Mathematics 4), 2. Auflage, New York u. a. (1997). 3

[27] Bertram Huppert, *Endliche Gruppen I* (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete 134), Berlin u. a. (1967). 21, 31, 34

[28] Serge Lang, *Topics in Cohomology of Groups* (Lecture Notes in Mathematics **1625**), Berlin u. a. (1996). 3

[29] Anthony T.-M. Lau und Alan L. T. Paterson, *Inner amenable locally compact groups*, Transactions of the American Mathematical Society **325** (1991), S. 155–169. 64

[30] William A. Light und Elliott W. Cheney, *Approximation Theory in Tensor Product Spaces* (Lecture Notes in Mathematics **1169**), Berlin u. a. (1985). 40

[31] Viktor Losert und Harald Rindler, *Asymptotically central functions and invariant extensions of Dirac measures*, Probability Measures on Groups VII (Oberwolfach 1983) (Lecture Notes in Mathematics **1064**, Berlin u. a. (1984), S. 368–378. 64

[32] Wolfgang Lück, *L^2- Invariants: Theory and Applications to Geometry and K-Theory*, Berlin u. a. (2002). 1, 43, 47, 50, 54, 62, 64, 66

[33] Florian Martin und Alain Valette, *1-reduced cohomology of representations, the first l^p-cohomology and applications*, **Preprint** (2005). 2, 30, 32, 64, 65, 66

[34] Rober E. Megginson, *An Introduction to Banach Space Theory* (Graduate Texts in Mathematics 183), New York (1998). 22, 24

[35] Anthony J. Narkawicz, *The first cohomology group $H^1(G,M)$*, **Preprint** (2003). 66

[36] Jürgen Neukirch, *Klassenkörpertheorie*, Mannheim u. a. (1969). 3

[37] John von Neumann, *Zur allgemeinen Theorie des Maßes*, Fundamenta Mathematicae **13** (1929), S. 73–116 und 333. 59

[38] Graham A. Niblo und Martin A. Roller, *Geometric Group Theorie. Volume 2* (London Mathematical Society Lecture Note Series **182**), Cambridge u. a. (1993). 72

[39] Pierre Pansu, *Cohomologie L^p des Variétés à courbure négative, cas du degré* 1, UniversitÃă e Politecnico di Torino. Seminario Matematico. Rendiconti **Special Issue** (1989), S. 95–119. 1

[40] Pierre Pansu, *Introduction to L^2 Betti numbers*. In: [4], S. 53–86. 47

[41] Pierre Pansu, *Cohomologie L^p, espaces homogènes et pincement*, **Preprint** (1999). 1, 54

[42] Pierre Pansu, *Cohomologie L^p: invariance sous quasiisométries*, **Preprint** (2004). 1

[43] Rajagopalan Parthasarathy, *A note on the vanishing of certain "L^2-cohomologies"*, Journal of the Mathematical Society of Japan **23** (1971), S. 676–691. 1

[44] William L. Paschke, *Inner Amenability and conjugation Operators*, Proceedings of the American Mathematical Society **71** (1978), S. 117–118. 64

[45] Donald S. Passman, *Infinite Group Rings* (Pure and Applied Mathematics. A series of monographs and textbooks **6**), New York (1971). 33

[46] Donald S. Passman, *The algebraic structure of group rings* (Pure and Applied Mathematics. A Wiley-Interscience Series of Texts, Monographs, and Tracts), New York u. a. (1977). 33

[47] Alan L. T. Paterson, *Amenability* (Mathematical Surveys and Monographs **29**), Providence R. I. (1988). 59, 60, 61, 64

[48] Jean-Paul Pier, *Amenable locally compact groups* (Pure and Applied Mathematics. A Wiley-Interscience Series of Texts, Monographs, and Tracts), New York u. a. (1984). 59

[49] Michael J. Puls, *Group Cohomology and L^p-Cohomology of finitely generated Groups*, Canadian Mathematical Bulletin **46** (2003), no. 2, S. 268–276. 2, 32, 66

[50] Michael J. Puls, *The first L^p-Cohomology of some finitely generated Groups and p-harmonic Functions*, Journal of Functional Analysis **237** (2006), no. 2, S. 391–401. 66

[51] Michael J. Puls, *The first L^p-Cohomology of some Groups with one End*, **Preprint** (2006). 66

[52] Derek J. S. Robinson, *A Course in the Theory of Groups* (Graduate Texts in Mathematics **80**), New York u. a. (1982). 36

[53] John Roe, *Lectures on Coarse Geometry* (University Lecture Series 31), Providence R. I. (2003). 28

[54] Raymond A. Ryan, *Introduction to Tensor Products of Banach Spaces* (Springer Monographs in Mathematics), London u. a. (2002). 40

[55] Shôichirô Sakai, *C^*-Algebras and W^*-Algebras* (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **60**), Berlin, 1971. 51

[56] Horst Schubert, *Categories*, Berlin u. a. (1972). 14

[57] Hans-Ludwig Skudlarek, *On a two-sided version of Reiter's condition and weak containment*, Archiv der Mathematik (Basel) 31 (1978/79), no. 6, S. 605–610. 61

[58] Edwin H. Spanier, *Algebraic Topology*, New York u. a. (1966). 14, 15

[59] Norman E. Steenrod, *Homology with local coefficients*, Annals of Mathematics 44 (1943), S. 610–627. 14

[60] Ralph Stöcker und Heiner Zieschang, *Algebraische Topologie*, Stuttgart (1994). 3

[61] Robert M. Switzer, *Algebraic Topology – Homotopy and Homology* (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete 212), Berlin u. a. (1975). 14

[62] Romain Tessera, *Vanishing of the first reduced cohomology with values in an L^p-representation*, **Preprint** (2006). 2, 66

[63] Edwin Weiss, *Cohomology of Groups* (Pure and Applied Mathematics 34), New York und London (1969). 3

[64] George W. Whitehead, *Elements of Homotopy Theory* (Graduate Texts in Mathematics **61**), Berlin u. a. (1978). 14

[65] Steven Zucker, *L^p-Cohomology: Banach Spaces and Homological Methods on Riemannian Manifolds*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 54 (1993), part 2, S. 637–655. 1

Index

Lebenslauf

Persönliche Daten

Geboren am 05.07.1977 in Frankfurt am Main.
Deutsch, verheiratet.

Schulbildung

08 / 1983–03 / 1987	Grundschule Comeniusschule, Frankfurt/Main.
03 / 1987–07 / 1987	Grundschule Windmühlenweg, Hamburg.
08 / 1987–06 / 1996	Gymnasium Christianeum, Hamburg, Abitur 06 / 1996.

Studium der Mathematik

10 / 1996–09 / 1999	Studium an der Universität Göttingen. Vordiplom 07 / 1998.
10 / 1999–07 / 2001	Masterstudium an der Universität Lund, Schweden. Abschluss: Master of Science (M. Sc.) 07 / 2001.

Studium der Mittleren und Neueren Geschichte

10 / 1996–04 / 1998	Grundstudium an der Universität Göttingen. Zwischenprüfung 04 / 1998.
10 / 2001–02 / 2004	Hauptstudium an der Universität Göttingen. Abschluss: Magister Artium (M. A.) 02 / 2004.

Promotionsstudium

Seit 04 / 2003	Promotionsstudium der Mathematik an der Universität Göttingen im Graduiertenkolleg „Guppen und Geometrie".
11 / 2005–04 / 2006	Forschungsaufenthalt an der Pennsylvania State University, USA.

Göttingen, 4. Juni 2007