

Bipower-variation bei Finanzmarktdaten mit unregelmäßigen Beobachtungsabständen

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultäten
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von

Nico Janicke

aus Weimar

Göttingen 2007

D7

Referent: Prof. Dr. Jeannette Woerner

Koreferent: Prof. Dr. Manfred Denker

Tag der mündlichen Prüfung: 07. 01. 2008

Danksagung

Mein besonderer Dank geht an Frau Professor Doktor Jeannette Woerner. Sie ermöglichte die Anfertigung dieser Arbeit. Mit ihren Vorschlägen und Ideen half sie mir stets bei Schwierigkeiten weiter. Ihre stetigen Unterstützungen und Ermutigungen, auch auf Konferenzen die Ergebnisse zu präsentieren, waren sehr wichtig für das Gelingen der Promotion.

Besonders danke ich meiner Familie, die mir immer den notwendigen Rückenhalt gab. Sie hatte immer Vertrauen und verlieh mir somit die Kraft, auch in schwierigen Phasen nicht aufzugeben. Ebenso danke ich ihr für das Verständnis bzgl. der zeitliche Einschränkungen und für die finanzielle und logistische Unterstützung.

Auch meine Freunde haben viel Verständnis aufgebracht. Trotz fehlender Zeit und abwesenden Gedanken standen sie immer hinter mir. Sie halfen mir oft, den notwendigen Abstand zur Forschung zu bekommen, um danach wieder mit neuen Ideen fortzufahren.

Sehr wichtig sind auch die Kollegen, die sich auf einem ähnlichen Weg befinden. Fruchtbare Diskussionen in der Kaffeepause, hilfreiche Anregungen und Kommentare führten unter anderem zur Erstellung dieser Arbeit. Auch ihre nicht mathematische Hilfe bei technischen oder sprachlichen Schwierigkeiten war sehr wichtig.

Eine sinnvolle Aufgabe außerhalb der Mathematik gaben mir die Kollegen im Ehrenamt. Waren es soziale Kontakte, lockere und lustige Gespräche oder auch der nächtliche Einsatz, alle diese Dinge waren mit verantwortlich für das Durchhalten in der Promotionsphase.

Die Möglichkeit über die Finanzmathematik hinweg Statistik und deren dringende Notwendigkeit kennen zu lernen, gab mir das Zentrum für Statistik. Die Interdisziplinarität und Internationalität waren nicht nur interessant sondern eröffneten ungeahnte Möglichkeiten. Den Pionieren des ZfS und dem angeschlossenen PhD Programm gilt daher mein besonderer Respekt.

Ebenso danke ich der Genetischen Epidemiologie und der Medizinischen Statistik für ihre Unterstützung in den Anfangsjahren, die bis zum Schluß anhielt.

Dem Institut für Mathematische Stochastik danke ich für die Bereitstellung des warmen Büros und die technischen Voraussetzungen.

Ein besonderer Dank geht an Prof. Dr. Corcuera von der Universität Barcelona, der mir einen sehr produktiven Forschungsaufenthalt in Barcelona ermöglichte. Dabei gilt ebenso der FES und dem ZfS mein Dank, die dies finanziell unterstützten.

Abschließend geht ein großer Dank an die Friedrich-Ebert-Stiftung. Sie unterstützte nicht nur finanziell meine Promotion, sondern stellte interessante Angebote in der nicht mathematischen Weiterbildung bereit. Viele Seminar, interessante Menschen und Freunde, ich bezeichne diese als Familie FES, habe ich kennen gelernt.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	6
2	Grundlagen	11
2.1	Wirtschaftliche Hintergründe	11
2.1.1	Institutionelle Wichtigkeit	11
2.1.2	Volatilität	11
2.2	Mathematische Grundlagen und Modellannahmen	13
3	Normierte Bipower-variation	18
3.1	Konsistenz	18
3.1.1	Prozesse ohne Mittelwertprozess und ohne Sprünge	18
3.1.2	Prozesse mit Mittelwertprozess	24
3.1.3	Prozesse mit Mittelwertprozess und Sprüngen	40
3.2	Verteilungstheorie	50
3.3	Simulation	57
3.3.1	Simulationsbedingungen	57
3.3.2	Prozesse und Algorithmen	57
3.3.3	Simulationsergebnisse	59
4	Selbstähnliche Prozesse	63
4.1	Mathematische Grundlagen	63
4.2	Integrierte Volatilitätsschätzer	68
4.2.1	Power-variation	68
4.2.2	Normierte Power-variation	71
4.2.3	Normierte Bipower-variation	73
5	Zusammenfassung und Ausblicke	74
A	Abbildungen	78
	Literaturverzeichnis	88

Abbildungsverzeichnis

A.1	BM Differenzen - Schätzer minus wahrer Wert	78
A.2	OU Differenzen - Schätzer minus wahrer Wert	79
A.3	SV Schätzer	80
A.4	BM p-Werte von Shapiro-Wilk-Test auf Normalverteilung	81
A.5	OU p-Werte von Shapiro-Wilk-Test auf Normalverteilung	82
A.6	SV p-Werte von Shapiro-Wilk-Test auf Normalverteilung	83
A.7	BM + Sprünge Differenzen Schätzer minus wahrer Wert	84
A.8	SV + Sprünge Schätzer	85
A.9	SV + Sprünge Schätzer - Abhängigkeit von λ ; Sigma=Epsilon	86
A.10	BM + Sprünge p-Werte von Shapiro-Wilk-Test auf Normalverteilung	86
A.11	SV + Sprünge p-Werte von Shapiro-Wilk-Test auf Normalverteilung	87

1 Einleitung

Die Finanzmathematik ist im Vergleich zu anderen Teilgebieten der Mathematik ein eher junges Forschungsgebiet. Viele Fragen sind aus der Praxis heraus motiviert. Unter anderem das Themengebiet, mit dem sich diese Arbeit beschäftigt. Wir bewegen uns im statistischem Bereich der Finanzmathematik und untersuchen eine Möglichkeit aus realen Daten, insbesondere hochfrequenten Daten, die integrierte Volatilität und ihre Potenzen als Risikomaß zu schätzen. Vom statistischen Standpunkt aus betrachtet, sollte man so viele Beobachtungspunkte in die Schätzung integrieren wie es nur möglich ist, um die maximale Information zu verwenden. Im Falle von hochfrequenten oder sogar ultra hochfrequenten Daten wird in der Literatur der Effekt „Microstructure noise“ diskutiert. Dies ist ein Grund dafür, dass in der Realität oft nur 5 oder 30 minütige statt sekundliche oder noch frequentere Daten verwendet werden. Die hoch und ultra hochfrequenten Daten sind auf verschiedenen Märkten, zum Beispiel auf Devisenmärkten und Aktienmärkten vorhanden und haben verschiedene Ursachen [1],[16]. Wir gehen nicht auf die „Microstructure noise“ näher ein und untersuchen den eindimensionalen Fall.

In diesem einleitenden Kapitel geben wir zu ersten einen kleinen Überblick über wesentliche Meilensteine der Finanzmathematik. Anschließend stellen wir die Motivation dieser Forschung heraus und ordnen unsere Arbeit in das aktuelle Geschehen ein. Danach geben wir eine kurze Zusammenfassung unserer Ergebnisse und schließen diesen Abschnitt mit einen Überblick bzgl. des Aufbaus der Arbeit ab.

Geschichtlicher Abriss Finanzmathematik

Der Handel mit Waren und Finanzgütern geht auf das 15. Jahrhundert zurück. So wurde die erste Börse 1409 in Brügge gegründet, die Augsburger Börse entstand 1540 als erste in Deutschland.

Auf heutigen Finanzmärkten unterscheidet man grundsätzlich zwei Arten von Finanzinstrumenten, primäre und sekundäre. Primäre sind zum Beispiel Aktien, festverzinsliche Wertpapiere, Anleihen und der Gleichen. Beispiel für sekundäre Wertpapiere sind Optionen, Futures, Swaps, Spreads oder beliebige Kombinationen dieser. Sie sind von den primären Wertpapieren abgeleitet und heißen daher auch Derivate. Seit Ende der 90er Jahre existiert auf den Finanzmärkten eine neue Art von Finanzmarktgütern. Diese handeln keine konkreten Produkte wie zum Beispiel Aktien und sind keine direkt abgeleiteten Wertpapiere, sondern haben als Grundlage das Risiko von primären bzw. sekundären Finanzmarktinstrumenten. Zu dieser Gruppe gehören Varianz- und Volatilitätsswaps und Optionen auf diese (Swaptions).

Anfang des 20. Jahrhunderts wurden mathematische Untersuchungen bzgl. primärer

Finanzinstrumente angestellt. Bachelier (1900) verwendete in seiner Arbeit erstmals die Brownsche Bewegung, um einen primären Prozess (underlying) zu beschreiben und um eine geschlossene Formel zur Bewertung von Optionen zu erhalten. In der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts wurden zwei wesentliche Eigenschaften von Wertpapieren verwendet. Zum einen wurden logarithmische Zuwächse betrachtet ($\ln S_n - \ln S_{n-1}$) und zum anderen sollten diese unabhängig sein. Dieses Konzept wurde unter anderem von Samuelson (1965) verwendet, der die geometrische Brownsche Bewegung in der Finanzmathematik einführte. Black und Scholes (1973) verwendeten dieses Konzept und entwickelten in ihrer Arbeit eine geschlossene Formel zur Berechnung von Preisen Europäischer Optionen.

Seither ist die Finanzmathematik ein sehr weites Forschungsgebiet. Annahmen und Voraussetzungen werden abgeschwächt und verändert. So wird zum Beispiel in einem Teilbereich die Preisfeststellung bei vorhandener Arbitragemöglichkeit betrachtet und in anderen Teilen der Finanzmathematik wird mit Sprungprozessen gearbeitet. Shiryayev (1999) gibt einen guten Überblick über die Entwicklungen und Möglichkeiten in der finanzmathematischen Welt.

Motivation der Forschung

Wenn wir uns in der Begriffswelt der Finanzmärkte befinden, unterscheiden wir zwei Arten von Risiken. Zum einen haben wir das systematische Risiko und zum anderen das unsystematische, welches durch Diversifikation verringert werden kann. Systematisches Risiko hingegen hat zwei Schwierigkeiten. Zum einen muss es gemessen werden, wozu ein adäquates Risikomaß notwendig ist, zum anderen sollte es minimalisiert sein. Dazu verwendet man hedging Methoden die wesentlich komplexer als reine Diversifikation sind.

Finanzinstrumente werden gehandelt, wobei der faire Preis sowie das zu Grunde liegende Risiko stark zusammenhängen. Der Preis kann am Finanzmarkt direkt abgelesen werden. Nun stellt sich aber die Frage, wie bewertet man das Risiko? Mit welchen Methoden kann man es aus historischen Daten berechnen und welche Aussagekraft hat dieses bei den zu Grunde gelegten Annahmen?

Es gibt ein Vielzahl von Risikomaßen. Wir betrachten hier die integrierte Volatilität und deren Potenzen, wie zum Beispiel die integrierte Varianz. Dabei soll das Modell so realistisch wie möglich gewählt werden, wobei die theoretischen Eigenschaften eines Schätzers erhalten bleiben.

Dieses Risikomaß wird zum Beispiel zur Bewertung von Varianzswaps genutzt, die unter anderem als Hedginginstrument zur Verringerung von Risikopositionen verwendet werden und damit praktisch zur Einsparung von Geld führen.

Mit den heutigen technischen Methoden ist es möglich, jede einzelne Handlung auf dem Finanzmarkt zu beobachten. Daher gehen wir davon aus, dass wir hochfrequente Daten bzw. ultra hochfrequente Daten, wie zum Beispiel Tick by Tick Daten zur Verfügung haben. Im Gegensatz zur bisherigen Praxis, in der nur 5 oder 30 minütige Beobachtungspunkte verwendet werden, fließen bei sekundlichen Datenpunkten 300

bzw. 1800 mal mehr Beobachtungen in die Schätzung ein und somit auch wesentlich mehr Information. Diese können aber nicht immer in regelmäßigen Abständen beobachtet werden und weisen manchmal große Unterschiede verschiedensten Ursprungs auf, so dass wir davon ausgehen können, dass ein Sprung vorlag und damit der Prozess den wir beobachten nicht rein stetig ist [16].

Einordnung in die aktuelle Forschung

Als die integrierte Volatilität als ein Maß für das Risiko und die quadratische Variation als theoretisches Konzept in der Finanzmathematik gemeinsam betrachtet wurden, war der Startpunkt für das Konzept der Power-variation gesetzt. Power-variation allein stieß schnell an die Grenzen als Schätzer für die integrierte Volatilität und deren Potenzen. Es wurde durch Barndorff-Nielsen und Shephard (2002a) eine Normierungssequenz bei der Power-Variation eingeführt. Dabei wurden zunächst nur gleiche Zeitabstände bei stochastischen Volatilitätsmodellen in der Klasse der stetigen Semimartingale betrachtet. Die Betrachtung bzgl. unterschiedlicher Zeitabstände arbeiteten Barndorff-Nielsen und Shephard (2006) heraus. Allgemeine Lévytyp Prozesse mit stochastischer Volatilität stellte Woerner (2003b) dar. Die genormte Power-variation wurde später durch Barndorff-Nielsen und Shephard und Woerner erweitert. Sie betrachteten die genormte Bipower-variation für Prozesse mit Sprüngen bei gleichen Zeitabständen. Woerner (2006) zeigte die Konsistenz und Verteilungstheorie für die genormte Power- und Multipower-variation für stochastische Volatilitätsmodelle deren Mittelwertprozess kein Semimartingal mehr sein muss. Dabei ist es möglich, einen unabhängigen Sprungprozess zu addieren.

Diese Prozesse werden verwendet, um die verschiedensten Eigenschaften von realen Verläufen von Wertpapieren darzustellen. Dabei sind viele Parameter zu schätzen. Carr et al. (2007) arbeitet mit selbstähnlichen Prozessen. Somit betrachten sie eine Klasse von Modellen, in der weniger Parameter notwendig sind, um die praktischen Eigenschaften adäquat zu beschreiben. Diese neue Idee greifen wir unter anderem in unserer Arbeit auf.

In den bisherigen Betrachtungen der genormten Bipower-variation wurde immer die Annahme von gleichen Beobachtungsabständen gemacht, welche wir durch eine unregelmäßige Zeitstruktur ersetzen.

Im folgenden Abschnitt beschreiben wir die Neuerungen in den Annahmen und stellen unsere Ergebnis kurz vor.

Ergebnisse der Arbeit

Diese Arbeit knüpft direkt an die bisherigen Ergebnisse der Power-variation als Schätzer für die integrierte Volatilität an. Insbesondere betrachten wir die genormte Bipower-variation für stochastische Volatilitätsmodelle. Dabei sind stetige Mittelwertprozesse zugelassen, die nicht in die Klasse der Semimartingale fallen und ebenso Sprungkomponenten, die Semimartingale sind.

Die praktische Relevanz der Arbeit ist im Gegensatz zu gleichen Zeitabständen daran zu sehen, dass die theoretischen Eigenschaften unseres Schätzers für unregelmäßige Beobachtungsabstände gezeigt werden.

Die Arbeit beschäftigt sich insbesondere zunächst mit der Konsistenz des genormten Bipower-variationsschätzer von stetigen Semimartingalen mit stochastischer Varianz. Dies wird erweitert durch einen stetigen Mittelwertprozess, der nicht zur Klasse der Semimartingale gehören muss. Die Konsistenzbetrachtung schließt mit der Hinzunahme einer Sprungkomponente ab, welche ein Semimartingal ist.

Damit wird eine große Klasse von Prozessen abgedeckt, die ähnliche bzw. gleiche Eigenschaften aufweisen, wie wir sie in der Realität an Finanzmärkten beobachten können. Weiterhin wurde eine Verteilungstheorie für alle drei Prozessarten angegeben. Wir arbeiteten die Konvergenz in Verteilung gegen eine Normalverteilung heraus. Somit kann man neben dem Punktschätzer auch einen Bereichsschätzer - das asymptotische Konfidenzintervall - angeben.

Diese theoretischen Ergebnisse wurden in einer Simulationstudie untersucht. Insbesondere wurde der Einfluss von unregelmäßigen Zeitabständen festgestellt, der zu einer Unterschätzung führt. Dabei kann die Zeitstruktur als Qualitätsmaßstab dienen. Kommt diese dicht an gleiche Zeitabstände heran, kann von Schätzergebnissen ausgegangen werden, die nicht sehr fehlerbehaftet sind. Jedoch konnten wir ebenso erkennen, dass mit zunehmenden Stichprobenumfang der Schätzer konsistent ist. Im Fall, dass Sprünge in den Prozessen vorkamen, haben diese mit zunehmenden Stichprobenumfang, also bei hochfrequenten Daten, eine kleiner werdende Rolle gespielt. Dies ist ebenso für die Mittelwertprozesse zu erkennen. Die Abhängigkeit des Schätzers von dem zu Grunde liegenden Volatilitätsprozess kann man in der Variation des Exponenten sehen. So kann festgestellt werden, ob dieser Volatilitätsprozess kleiner oder größer als 1 ist. Die Verteilungstheorie konnte asymptotisch bestätigt werden.

Eine Anwendung unserer Ergebnisse habe wir für selbstähnliche Prozesse gezeigt. Hier wurde zunächst nachgewiesen das H-selbstähnliche Lévy Prozesse mit der Transformation von Jeanblanc et al. (2002) wieder H-selbstähnliche Prozesse ergeben. Ebenso wendeten wir die Konzepte der Power-, genormten Power- und genormten Bipower-variation an. Dabei kamen die Ergebnisse von Barndorff-Nielsen und Woerner sowie unser Resultat bzgl. stetiger Prozesse zur Anwendung.

Aufbau der Arbeit

Im ersten Teil der Arbeit stellen wir Grundlagen zur Verfügung. Dabei wird zunächst die Volatilität und deren Formen sowie Derivate auf diese beschrieben. Danach folgen mathematische Grundlagen und insbesondere die Annahmen an die betrachteten Prozesse.

Der nächste Teil beschäftigt sich mit dem Konsistenznachweis für den genormten Bipower-variationsschätzer bei ungleichen Zeitabständen, zunächst für gleiche Potenzen und dann für ungleiche bei einem einfachen stetigem Semimartingal mit stochastischer Volatilität.

Darauf aufbauend addieren wir einen stetigen Mittelwertprozess, der nicht notwendiger Weise ein Semimartingal sein muss. Dessen Konsistenz dient weiter als Grundlage für den darauf folgenden Abschnitt, in dem die betrachteten Prozesse durch eine Semimartingal-Sprungkomponente erweitert werden.

Nach dem Konsistenzbeweis folgen Ergebnisse zur Verteilungstheorie. Zuerst wiederum für einfache Prozesse, wobei später der stetige Mittelwertprozess und dann die Sprungkomponente addiert werden.

Der Simulationsteil beschäftigt sich zuerst mit stetigen Prozessen. Daran anknüpfend werden die betrachteten Prozesse mit Sprungkomponenten erweitert.

Der letzte Teil der Arbeit beschäftigt sich mit selbstähnlichen Prozessen, wobei zuerst ein theoretisches Ergebnis präsentiert wird. Anschließend wenden wir die Konzepte der Power-, genormten Power-, und der genormten Bipower-variation an.

Die Arbeit wird durch eine Zusammenfassung und einen Ausblick abgeschlossen.

2 Grundlagen

In diesem Kapitel wollen wir einige wirtschaftliche und mathematische Begriffe näher erläutern. Dabei gehen wir im ersten Teil insbesondere auf die Volatilität ein. Im zweiten Teil dieses Abschnittes liegt das Hauptaugenmerk auf den theoretischen Annahmen, die wir in dieser Arbeit verwenden.

2.1 Wirtschaftliche Hintergründe

Die wirtschaftliche Relevanz unserer Forschung und die Verbindung der Begriffe Risiko und Volatilität liegen im Focus der folgenden Abschnitte.

2.1.1 Institutionelle Wichtigkeit

Verschärfte Anforderungen an das Risikomanagement und neue Rechnungslegungsvorschriften, wie Basel II im Bankenbereich und Solvency II im Versicherungsbereich, geben auf den Finanzmärkten den Impuls, neue Instrumente zum Handeln des Risikos zu entwickeln. Schwindende Diversifikationspotenziale globaler Wertpapierportfolios zwingen institutionelle Anleger, das Risiko ihrer Kapitalanlagen neu zu überdenken. Dynamische Absicherungsstrategien basieren auf dem reibungslosen Funktionieren der Märkte. Was unter „normalen“ Marktbedingungen funktioniert, kann in Extremsituationen zum Verhängnis werden. Daher ist es wichtig, die verschiedenen Risikopositionen des Unternehmens zu kontrollieren und abzusichern.

Nicht nur das Absichern von Risiko ist eine Motivation, mit neuen Risikowertpapieren zu handeln. Spekulanten zielen auf die zukünftige Marktentwicklung ab und schließen somit Wetten auf das kommende Schwankungsniveau des Marktes ab.

Ein dritter Grund für das Kaufen und Verkaufen ist die Ausnutzung von unterschiedlichen Schwankungsintensitäten und -höhen innerhalb des realisierten und des impliziten Risikos, als auch zwischen den beiden. Dabei versucht man, durch geeignete Handelsstrategien einen Gewinn zu erzielen [37].

Die Schwankung von Wertpapieren und anderen Gütern wird dabei Risiko genannt und im wirtschaftlichen Bereich als Volatilität bezeichnet.

Im folgendem Abschnitt betrachten wir Volatilitäten und Finanzmarktinstrumente, die sich auf diese beziehen.

2.1.2 Volatilität

Der Begriff der Volatilität ist im Bereich des Handels mit Wertpapieren ein häufig verwendeter Begriff. Er ist aus dem lateinischen Wort „volare“ abgeleitet, was soviel

wie fliegen bedeutet. Auf Finanzmärkten ist sie die unberechenbare Wechselhaftigkeit von Wertpapieren. Sie stellt also ein Maß für die Unsicherheit bzw. für das zu Grunde liegende Risiko des Wertpapiers oder eines Portfolios dar. Die Berechnung der Standardabweichung relativer Kursdifferenzen ist nur ein Beispiel für die Messung einer Volatilität.

Man unterscheidet im Wesentlichen zwei Arten von Volatilitäten, die implizite und die realisierte Volatilität.

Die implizite Volatilität wird mit der Hilfe von Optionspreisen berechnet. Sie stellt eine Erwartung der Marktteilnehmer über die künftige Schwankung des Basiswertes dar, weil die Erwartung der Marktteilnehmer schon im Kurs und damit dem Preis der Option enthalten ist. Sie ist in der Regel negativ mit dem Basiswert korreliert und hat auf lange Sicht gesehen die Eigenschaft, zu ihrem Langzeitmittel zurück zu kehren. Die implizite Volatilität kann zum Beispiel mit der Hilfe der Black-Scholes-Formel ausgerechnet werden. Der Preis einer Option hängt von der Volatilität σ ab - $c(\sigma)$. Dabei gilt für die Berechnung mit Hilfe der Black-Scholes-Formel folgendes:

$$c(\sigma) = S_0\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2).$$

Dabei sind $d_1 = \frac{\ln \frac{S_0}{K} + \frac{r+\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}}$ und $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$. Mit S_0 ist der Anfangswert des underlying, mit K der Ausübungspreis, mit T der Ausübungszeitpunkt, mit r der risikolose Zinssatz und mit σ die Volatilität des underlying bezeichnet. Black und Scholes verwendeten hier die Standardnormalverteilung Φ [11]. In der Literatur ist diese Annahme diskutiert und erweitert wurden.

Die realisierte Volatilität wird aus historischen Daten gewonnen und ist somit vergangenheitsbezogen. Sie ist ein Maß für die Schwankungsbreite des betrachteten Wertpapiers auf einen bestimmten vergangenen Zeitraum. Damit ist sie ein Maß für die Quantifizierung des Wertpapierrisikos. Da dieses vom Zeitpunkt der Messung abhängt, wird die realisierte Volatilität mit $\sigma(t)$ bezeichnet. Im Vergleich zur impliziten liegt die realisierte Volatilität meist darunter.

Der Einsatz von Volatilitätsderivaten kann einen wesentlichen Beitrag zur Stabilität und Verstetigung der Renditen im Portfoliomanagement leisten. Das erste Volatilitätswertpapier, der Volax-Future, wurde 1998 eingeführt. Er war ein Finanzterminkontrakt auf die implizite Volatilität einer DAX-Option am Geld mit drei Monaten Restlaufzeit. Neben dem Volatilitätsswap ist ein weit aus mehr gehandeltes Termingeschäft der Varianzswap, den wir hier als Beispiel darstellen [37].

Ein Varianzswap sieht theoretisch betrachtet folgendermaßen aus:

$$N(\sigma_R(S) - K)$$

Dabei berechnet sich $\sigma_R(S) = \sqrt{\frac{1}{T}\sigma^{2*}(t)}$ mit der Hilfe der integrierten Varianz $\sigma^{2*}(t) = \int_0^t \sigma^2(u)du$. R steht für realisiert und S bezeichnet das zu Grunde liegende Wertpapier. Der Parameter N beschreibt die Höhe des Swaps und K den festgelegten

Wert für die Varianz [30].

Ein weiteres Beispiel sind Swaptions. Sie sind Optionskontrakte, die es dem Inhaber ermöglichen, in einen Zinsswap einzusteigen. Der Swap ist hinsichtlich seiner Laufzeit und Zinshöhe festgesetzt. Der Käufer hat dafür wie bei einer „normalen“ Option eine Prämie, den Optionspreis, zu zahlen. Eine Swaption ermöglicht die Absicherung gegen steigende Zinssätze ohne dabei im Vergleich zum Zinsswap die Möglichkeit zu verlieren, bei sinkenden Zinssätzen günstiger zu refinanzieren.

Während die neuen Wertpapiere mehr Möglichkeiten bieten Risiken abzusichern, besteht ein wesentliches Problem in deren Bewertung. Zum einen benötigt man adäquate Messinstrumente für die verschiedenen Volatilitäten [36] und deren abgeleiteten Wertpapiere und zum anderen müssen vorhandene Methoden der Preisfeststellung immer wieder überprüft und angepasst werden. Dabei ist es wichtig zu beurteilen, ob die angewendete Methode mit den dahinter liegenden Voraussetzungen zusammenpasst. In unserer Arbeit betrachten wir die Methode der genormten Bipower-variation für das Berechnen der integrierten Volatilität und deren Potenzen, wie zum Beispiel die integrierte Varianz.

2.2 Mathematische Grundlagen und Modellannahmen

Nachdem die wirtschaftliche Relevanz der integrierten Volatilität beschrieben wurde, werden wir in diesem Abschnitt einige wichtige mathematische Grundlagen aufzeigen und die mit den Annahmen an das betrachtete Modell verknüpfen.

In dieser Arbeit verwenden wir folgende Bezeichnungen:

- $\stackrel{d}{=}$ für Gleichheit in Verteilung
- $\stackrel{P}{\rightarrow}$ Konvergenz in Wahrscheinlichkeit
- $\stackrel{d}{\rightarrow}$ Konvergenz in Verteilung.
- $\log x$ bezeichnet den natürlichen Logarithmus von x
- $a \wedge b$ bedeutet $\min(a, b)$
- $x * \mu = \int x d\mu$
- iid - identisch und unabhängig verteilt

Ein Wertpapier, zum Beispiel eine Aktie, folgt einem stochastischen Prozess. Welche Art von Prozessen wir verwenden, gibt folgende Definition an.

Definition 2.2.1 Ein stochastischer Prozess $(X_r)_{r \geq 0}$ heißt *additiv*, wenn er die folgenden Eigenschaften besitzt:

1. $X_0 = 0$ f.s.
2. für jedes $n \geq 1$ mit $0 \leq r_0 < r_1 < \dots < r_n$, sind $X_{r_0}, X_{r_1} - X_{r_0}, X_{r_2} - X_{r_1}, \dots, X_{r_n} - X_{r_{n-1}}$ unabhängig

3. der Prozess ist stochastisch stetig
4. die Pfade des Prozesses sind càdlàg.

Additive Prozesse werden auch inhomogene Lévy Prozesse genannt, weil ein Lévy Prozess ein additiver Prozess mit stationären Zuwächsen ist. Er kann eindeutig durch das Lévy Triplet $(b, c, \nu)_h$ charakterisiert werden. Dazu benötigen wir die charakteristische Funktion eines Lévy Prozesses $(X_t)_{t \geq 0}$.

$$E(e^{iuX_t}) = \exp \left(t \left(iub(h) - \frac{1}{2}u^2c + \int (e^{iux} - 1 - iuh(x))\nu(dx) \right) \right) \quad (2.1)$$

Dabei ist $h(x)$ die Abschneidefunktion, $b(h) = b + \int h(x)\nu(dx)$, $c \geq 0$, $b, c \in \mathbb{R}$ und ν das Lévymaß. Eine Möglichkeit, die Aktivität der Sprünge eines Lévy Prozesses zu beschreiben, ist der Blumenthal-Gettoor-Index, der folgendermaßen definiert ist [12]:

$$\beta := \inf \{ \alpha > 0 : \int_{-1}^1 |x|^\alpha \nu(dx) < \infty \}.$$

Dabei ist ν das Lévymaß. Weitere Details und Definitionen sind im Buch von Sato (1999) genauer beschrieben.

Ein stochastischer Prozess lebt auf dem Zeitintervall $[0, t]$ mit $t \in \mathbb{R}$ und $0 < t < \infty$. In der Realität kann eine Realisierung dieses Prozesses nur an endlich vielen Zeitpunkten t_i mit $i \in \{0, \dots, n\}$ und $0 \leq n \in \mathbb{R}$ beobachtet werden. Die t_i hängen von n ab, was bei der Bezeichnung zur Vereinfachung vernachlässigt und nur bei den Zeitzuwächsen berücksichtigt wird. Weiterhin gilt: $t_0 = 0$. Die Differenz zwischen zwei benachbarten Beobachtungszeiten bezeichnen wir mit $\delta_{n,i} = t_i - t_{i-1}$ und den dazugehörigen Prozesszuwachs mit $\Delta X_i = X_{t_i} - X_{t_{i-1}}$. Die Zerlegung des Zeitintervalls mit n Beobachtungspunkten bezeichnen wir mit Δ_n . Dabei geht $\max_i \delta_{n,i} \rightarrow 0$ und es soll weiterhin gelten, dass $n(\max_i \delta_{n,i})^2 \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.

An die Zerlegung Δ_n stellen wir folgende Bedingung, die für die gesamte Arbeit gilt.

$$\frac{\delta_{n,i}}{\delta_{n,i+1}} = (1 + c_{n,i})^4 \quad (2.2)$$

Dabei gilt für die $i \in \{1 \dots n\}$ mit $n \rightarrow \infty$:

$$\sum_{i=1}^{n-1} c_{n,i}^2 = c_n \rightarrow c < \infty \quad c_{n,i} \in \mathbb{R}$$

Es ist notwendig, dass die $c_{n,i}^2$ eine Nullfolge bilden. Damit geht der Quotient der benachbarten Zeitabstände gegen 1. Dies stellt eine Regularitätsbedingung an die Zeitstruktur dar, die wir im weiteren Verlauf der Arbeit stets annehmen. Eine weitere Bedingung verwenden Barndorff-Nielsen und Shephard (2006). Sie definieren die ϵ -Balance. Demnach ist eine Zeitstruktur ϵ -balanciert, wenn für $n \rightarrow \infty$:

$$\frac{\max_i \delta_{n,i}}{(\min_i \delta_{n,i})^\epsilon} \rightarrow 0 \quad \epsilon \in (0, 1).$$

Gleiche Zeitabstände sind 1–balanciert, also wird $\epsilon := 1$ gesetzt.

Die Lévy-Itô Zerlegung [28] ermöglicht uns die Darstellung von additiven Prozessen in der Form:

$$X_t = V_t + Z_t. \quad (2.3)$$

Dabei beschreibt V_t den rein stetigen, welcher vom reinen Sprungprozess Z_t unabhängig ist. Für den stetigen Prozess wählen wir folgende Darstellungsform:

$$V_t = Y_t^{(1)} + Y_t^{(2)} + H_t. \quad (2.4)$$

Die folgenden Bedingungen sind an die Teilprozesse gestellt:

1. $Y_t^{(1)} = \int_0^t a_u du < \infty$ und erfüllt die Lipschitzbedingung:

$$\begin{aligned} |Y_{t_i}^{(1)} - Y_{t_{i-1}}^{(1)}| &\leq L|t_i - t_{i-1}| \quad L \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow |\Delta Y_i^{(1)}| &\leq L\delta_{n,i}. \end{aligned}$$

2. $Y_t^{(2)}$ erfüllt für $n \rightarrow \infty$:

$$\sum_{i=1}^n \delta_{n,i}^{1-r} |\Delta Y_i^{(2)}|^{2r} \xrightarrow{P} 0.$$

3. $H_t = \int_0^t \sigma(u) dB_u$ mit $(\sigma(t))_{t \geq 0} > 0$ und zufällig und $(B_t)_{t \geq 0}$ bezeichnet die standard Brownsche Bewegung, wobei beide Prozesse unabhängig sind.

$$0 < \sigma^*(t) = \int_0^t \sigma(u) du < \infty \quad \text{Riemann-integrierbar}$$

Weiterhin definieren wir ein $\tau(t) = \sigma^2(t)$ mit:

$$\tau^*(t) = \int_0^t \tau(u) du \quad \text{und} \quad \tau^{r*}(t) = \int_0^t \tau^r(u) du.$$

Mit τ_i bezeichnen wir den Zuwachs des Prozesses τ der wie folgt definiert ist:

$$\tau_i = \tau^*(t_i) - \tau^*(t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \tau(u) du$$

und wir definieren $\sigma_i := \sqrt{\tau_i}$. Unter Verwendung des Mittelwertsatzes für Integrale setzen wir

$$\tilde{\tau}_i = \frac{\tau_i}{\delta_{n,i}} \quad \text{mit} \quad \inf_{t_{i-1} \leq u \leq t_i} \tau(u) \leq \tilde{\tau}_i \leq \sup_{t_{i-1} \leq u \leq t_i} \tau(u).$$

Mit diesen Voraussetzungen lässt sich zeigen, dass

$$\sum_{i=1}^n \delta_{n,i}^{1-r} \tau_i^r \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^t \tau^r(u) du = \tau^{r*}(t). \quad (2.5)$$

Für die gesamte Arbeit sei angenommen, dass $E[\tau^{r*}(t)] < \infty$ gilt. Wir betrachten unter anderem Prozesse, die Semimartingale sind.

Definition 2.2.2 ([21]) Ein Semimartingal ist ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t \geq 0}$ mit der Form $X_t = X_0 + M_t + A_t$ wobei X_0 \mathcal{F}_0 -messbar, $(M_t)_{t \geq 0}$ ein lokal integrierbares Martingal mit $M_0 = 0$ und $(V_t)_{t \geq 0}$ von beschränkter Variation ist.

Dabei bezeichnet $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ die Filtration, die von $\sigma(t)$ und $Y_t = Y_t^{(1)} + Y_t^{(2)}$ mit $t \geq 0$ erzeugt wird. Wenn wir im weiteren Verlauf im Zusammenhang mit Semimartingalen sprechen, nehmen wir an, dass diese an die Filtration \mathbf{F} adaptiert sind und die Pfade càdlàg (rechts stetig mit linken Grenzwerten) sind.

Einen Überblick bzgl. Semimartingale in theoretischer und finanzmathematischer Hinsicht gibt Shiryaev (1999). Er wählt für Semimartingale unter anderem die folgende Darstellung:

$$X_t = X_0 + B(h) + X^c + h * (\mu - \nu) + (x - h(x)) * \mu.$$

Der Prozess $(H_t)_{t \geq 0}$ gehört zu der Klasse der stetigen Semimartingale mit stochastischer Varianz ($SVSM^c$). Für $(Z_t)_{t \geq 0}$ wissen wir, dass er rein unstetig ist. Weiterhin nehmen wir im Folgenden an, dass dieser zu der Klasse der Semimartingale gehört. Die Höhe eines Sprungs zum Zeitpunkt s ist $J(Z_s)$.

$$\begin{aligned} 0 &\leq u < s \\ Z_{s-} &= \lim_{u \rightarrow s} Z_u \\ J(Z_s) &= Z_s - Z_{s-} \end{aligned}$$

Nun können wir mit $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ einen Prozess $Z_t^\varepsilon = Z_t - \sum(J(Z_s) : |J(Z_s)| > \varepsilon, 0 < s \leq t)$ angeben, dessen Sprünge kleiner als ε sind. Ebenso definieren wir eine Funktion $\mathbf{1}_j(\varepsilon)$ die den Wert 1 annimmt, wenn im Intervall $[t_i, t_{i-1}]$ mindestens ein Sprung größer als ε ist und sonst den Wert 0 hat. Dabei ist leicht zu erkennen, dass

$$|\Delta Z_i^\varepsilon \mathbf{1}_i(\varepsilon)|^s \leq |\Delta Z_i^\varepsilon|^s \quad (2.6)$$

gilt. Nachdem wir die Annahmen und Bezeichnungen der stochastischen Prozesse, die wir im Verlauf dieser Arbeit betrachten werden, eingeführt haben, werden mit der nächsten Definition verschiedene Arten der Variationsmessung definiert.

Definition 2.2.3 Es sei $(X_t)_{t \geq 0}$ ein stochastischer Prozess und $r, s, p \in \mathbb{R}$ mit $r, s, p \geq 0$. Dann heißt

$$V_p(X_t) = \sum_{i=1}^n |\Delta X_i|^p \quad (2.7)$$

Power-variation,

$$V_p(X_t, \Delta_n^\gamma) = \sum_{i=1}^n \delta_{n,i}^\gamma |\Delta X_i|^p \quad (2.8)$$

genormte (normierte) Power-variation,

$$V_{r,s}(X_t, \Delta_n^{\gamma,\eta}) = \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^\gamma \delta_{n,i+1}^\eta |\Delta X_i|^r |\Delta X_{i+1}|^s \quad (2.9)$$

genormte (normierte) Bipower-variation und

$$V_{r_1, r_2, r_3}(X_t, \Delta_n^{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3}) = \sum_{i=1}^{n-2} \delta_{n,i}^{\gamma_1} \delta_{n,i+1}^{\gamma_2} \delta_{n,i+2}^{\gamma_3} |\Delta X_i|^{r_1} |\Delta X_{i+1}|^{r_2} |\Delta X_{i+2}|^{r_3} \quad (2.10)$$

genormte (normierte) Tripower-variation.

Wir verwenden im Verlauf dieser Arbeit die Bezeichnung

$$E_{\mathcal{F}_t}(f(X_t, u)) := E(f(X_t, u) | \mathcal{F}_t).$$

Dabei sei das u eine von $(X_t)_{t \geq 0}$ und von \mathcal{F}_t unabhängige Zufallsgröße und X_t sei \mathcal{F}_t messbar. Weiterhin gilt für eine standard normalverteilte Zufallsgröße u folgende Bezeichnung für $r > 0$: $E|u|^r = \mu_r$.

In diesem Abschnitt haben wir die grundlegenden Definitionen und Bezeichnungen für die weitere Arbeit eingeführt. Weiterhin wurde das Modell und dessen Voraussetzungen, mit denen wir in nächsten Kapiteln arbeiten, beschrieben.

3 Normierte Bipower-variation

Neben der normierten Power-variation betrachtete Woerner (2006) in ihrer Arbeit die normierte Multipower-variation. Dabei war eine wesentliche Voraussetzung, dass gleiche Zeitabstände vorlagen. Barndorff-Nielsen und Shephard (2006) geben Resultate für ungleiche Zeitabstände aber nur für die genormte Power-variation an. Wir entwickeln in den folgenden Abschnitten für Prozesse die einen Mittelwert- und einen Sprunganteil besitzen eine Konsistenzaussage und eine Verteilungstheorie sowie eine Simulationsstudie für unregelmäßige Zeitabstände. Dabei sei darauf hingewiesen, dass die Annahmen an die Prozesse und die Zeitstruktur im Kapitel 2.2 beschrieben sind.

3.1 Konsistenz

Die Betrachtung der Konsistenz erfolgt in drei Schritten. Zuerst zeigen wir die Konsistenz für einfache Semimartingale mit stochastischer Volatilität. Darauf aufbauend nehmen wir im zweiten Schritt einen unabhängigen Mittelwertprozess dazu. Dieses Ergebnis verwenden wir und addieren eine unabhängige Sprungkomponente.

3.1.1 Prozesse ohne Mittelwertprozess und ohne Sprünge

Zunächst betrachten wir den Prozess $(H_t)_{t \geq 0}$. Dabei setzen wir $r = s$ in der genormten Bipower-variation. Somit wird der einfachste Fall untersucht, der als Grundlage für spätere Verallgemeinerungen dient.

Satz 3.1.1 *Es seien die Bedingungen für $(H_t)_{t \geq 0}$ aus Kapitel 2.2 erfüllt. Weiterhin gilt für den Prozess τ :*

$$\frac{\sum_{i=1}^{n-1} |\delta_{n,i+1} \tau^\gamma(\eta_{i+1}) - \delta_{n,i} \tau^\gamma(\eta_i)|}{\min_i \delta_{n,i}} \rightarrow 0 \quad (3.1)$$

für $n \rightarrow \infty$, $t_{i-1} < \eta_i < t_i$ und $\gamma > 0$.

Dann gilt für jedes $r > 0$:

$$V_{r,r} \left(H_t, \Delta_n^{\frac{1-r}{2}, \frac{1-r}{2}} \right) \xrightarrow{P} \mu_r^2 \int_0^t \tau^r(u) du. \quad (3.2)$$

Beweis:

Wir konstruieren eine Sequenz von Zufallsgrößen \tilde{v}_i mit $\tilde{v}_i = \tau_i^{\frac{1}{2}} u_i$. Dabei seien die u_i i.i.d. standard normal verteilt und unabhängig von τ . Es ist $\tau(t) > 0$ und es ergibt sich

für die genormte Bipower-variation in Verteilung folgendes (Vergleich [7]):

$$\begin{aligned}
 V_{r,r} \left(H_t, \Delta_n^{\frac{1-r}{2}, \frac{1-r}{2}} \right) &= \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1-r}{2}} |\Delta H_i|^r \delta_{n,i+1}^{\frac{1-r}{2}} |\Delta H_{i+1}|^r \\
 &\stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1-r}{2}} |\tilde{v}_i|^r \delta_{n,i+1}^{\frac{1-r}{2}} |\tilde{v}_{i+1}|^r \\
 &= \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1-r}{2}} \tau_i^{\frac{r}{2}} |u_i|^r \delta_{n,i+1}^{\frac{1-r}{2}} \tau_{i+1}^{\frac{r}{2}} |u_{i+1}|^r.
 \end{aligned}$$

Damit gilt folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}
 V_{r,r} \left(H_t, \Delta_n^{\frac{1-r}{2}, \frac{1-r}{2}} \right) - \mu_r^2 \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1-r}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1-r}{2}} \tau_i^{\frac{r}{2}} \tau_{i+1}^{\frac{r}{2}} \\
 \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1-r}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1-r}{2}} \tau_i^{\frac{r}{2}} \tau_{i+1}^{\frac{r}{2}} (|u_i|^r |u_{i+1}|^r - \mu_r^2). \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

Wir erhalten mit $\mu_r = E|u_i|^r$ und mit der Unabhängigkeit von τ_i und u_i und der Messbarkeit von τ_i bzgl. \mathcal{F}_t folgendes:

$$\begin{aligned}
 E \left(\sum_{i=1}^{n-1} |\Delta H_i|^r |\Delta H_{i+1}|^r \middle| \mathcal{F}_t \right) &= E \left(\sum_{i=1}^{n-1} |\tau_i^{\frac{1}{2}} u_i|^r |\tau_{i+1}^{\frac{1}{2}} u_{i+1}|^r \middle| \mathcal{F}_t \right) \\
 &= \sum_{i=1}^{n-1} E \left(\tau_i^{\frac{r}{2}} \tau_{i+1}^{\frac{r}{2}} \middle| \mathcal{F}_t \right) E(|u_i|^r |u_{i+1}|^r) \\
 &= \sum_{i=1}^{n-1} E \left(\tau_i^{\frac{r}{2}} \tau_{i+1}^{\frac{r}{2}} \middle| \mathcal{F}_t \right) \mu_r \mu_r \\
 &= \mu_r^2 \sum_{i=1}^{n-1} \tau_i^{\frac{r}{2}} \tau_{i+1}^{\frac{r}{2}}.
 \end{aligned}$$

Dies gilt auch für ungleiche Exponenten bei den Potenzen $|\Delta H_i|^r$ und $|\Delta H_{i+1}|^s$. Um die Aussage des Satzes nachzuweisen, müssen folgende Beziehungen gezeigt werden. Für $\max_i \delta_{n,i} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ müssen die folgenden Beziehungen (3.4) und (3.5) gelten:

$$R = \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1-r}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1-r}{2}} \tau_i^{\frac{r}{2}} \tau_{i+1}^{\frac{r}{2}} (|u_i|^r |u_{i+1}|^r - \mu_r^2) \xrightarrow{P} 0 \quad (3.4)$$

und

$$\left| \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1-r}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1-r}{2}} \tau_i^{\frac{r}{2}} \tau_{i+1}^{\frac{r}{2}} - \int_0^t \tau_u^r du \right| \xrightarrow{P} 0. \quad (3.5)$$

Um die Beziehung (3.4) zu zeigen, konstruieren wir eine Kopie R' von R die genau wie R verteilt, aber unabhängig von R und bedingt auf \mathcal{F}_t ist.

$$\begin{aligned} R &= \sum_{i=1}^{n-1} v_i \\ v_i &= \delta_{n,i}^{\frac{1-r}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1-r}{2}} \tau_i^{\frac{r}{2}} \tau_{i+1}^{\frac{r}{2}} (|u_i|^r |u_{i+1}|^r - \mu_r^2) \\ R' &= \sum_{i=1}^{n-1} z_i \\ z_i &= \delta_{n,i}^{\frac{1-r}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1-r}{2}} \tau_i^{\frac{r}{2}} \tau_{i+1}^{\frac{r}{2}} (|u'_i|^r |u'_{i+1}|^r - \mu_r^2) \end{aligned}$$

Dabei sind u_i und u'_j unabhängig für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Wir wissen, dass v_i und v_{i+s} für $s > 1$ unabhängig sind. Die Summe aus R und R' wird umsortiert und ergibt:

$$\begin{aligned} R + R' &= (v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1}) + (z_1 + z_2 + \dots + z_{n-1}) \\ &= (v_1 + z_2 + v_3 + z_4 + \dots + z_{n-1}) + (z_1 + v_2 + z_3 + v_4 + \dots + v_{n-1}) \\ &= S + S'. \end{aligned}$$

Dabei sind S und S' nicht unabhängig, aber identisch verteilt. Im folgenden zeigen wir, dass $S \xrightarrow{P} 0$ gilt. Dazu verwenden wir das Korollar 4.3 aus [8].

$$\begin{aligned} S &= v_1 + z_2 + v_3 + z_4 + \dots + z_{n-1} = s_1 + s_2 + \dots + s_{n-1} \\ s_i &= d_i x_i \\ d_i &= \delta_{n,i}^{\frac{1-r}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1-r}{2}} \tau_i^{\frac{r}{2}} \tau_{i+1}^{\frac{r}{2}} \\ x_i &= \omega_i - \mu_r^2 \end{aligned}$$

Es ist ω_i i.i.d verteilt wie $|u_i||u'_i|$ (mit u_i und $u'_i \sim N(0, 1)$ iid) und $d = \max_i d_i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, weil $\tau_i < \infty$ und $\max_i \delta_{n,i} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Weiterhin ist $nP\{|x| \geq d^{-1}\varepsilon\} \rightarrow 0$, weil

$$nP\{|x| \geq d^{-1}\varepsilon\} \leq n \frac{E|x|^2}{(d^{-1}\varepsilon)^2} = nd^2 \frac{E|x|^2}{\varepsilon^2}.$$

Es gilt $\sup \sum_{i=1}^{n-1} d_i < \infty$, da $\delta_{n,i} > 0$ und $\tau_i < \infty$. Damit gilt nach dem Korollar 4.3 aus [8], dass $S \xrightarrow{P} 0$ ist. Somit geht auch S' in Wahrscheinlichkeit gegen Null und die Summe $S + S' = R + R' \xrightarrow{P} 0$. Mit der Unabhängigkeit von R und R' erhalten wir $R \xrightarrow{P} 0$. Damit wäre die Beziehung (3.4) gezeigt.

Nun wird die Beziehung (3.5), unter Verwendung der Dreiecksungleichung gezeigt:

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1-r}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1-r}{2}} \tau_i^{\frac{r}{2}} \tau_{i+1}^{\frac{r}{2}} - \int_0^t \tau^r(u) du \right| \\ &\leq \underbrace{\left| \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1-r}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1-r}{2}} \tau_i^{\frac{r}{2}} \tau_{i+1}^{\frac{r}{2}} - \sum_{i=1}^n \delta_{n,i}^{1-r} \tau_i^r \right|}_{(a)} + \underbrace{\left| \sum_{i=1}^n \delta_{n,i}^{1-r} \tau_i^r - \int_0^t \tau^r(u) du \right|}_{(b)} \end{aligned}$$

Der Term (b) geht auf Grund (2.5) gegen Null. Für den Ausdruck (a) ergeben sich folgende Umformungen:

$$\begin{aligned}
 (a) &= \left| \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1-r}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1-r}{2}} \tau_i^{\frac{r}{2}} \tau_{i+1}^{\frac{r}{2}} - \delta_{n,i}^{1-r} \tau_i^r - \delta_{n,n}^{1-r} \tau_n^r \right| \\
 &= \left| \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\delta_{n,i}^{\frac{1-r}{2}} \tau_i^{\frac{r}{2}}}{\delta_{n,i+1}^{\frac{1-r}{2}} \tau_{i+1}^{\frac{r}{2}} + \delta_{n,i}^{\frac{1-r}{2}} \tau_i^{\frac{r}{2}}} (\delta_{n,i+1}^{1-r} \tau_{i+1}^r - \delta_{n,i}^{1-r} \tau_i^r) - \delta_{n,n}^{1-r} \tau_n^r \right| \\
 &= \left| \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{2\delta_{n,i}^{\frac{1-r}{2}} \tau_i^{\frac{r}{2}}}{\delta_{n,i+1}^{\frac{1-r}{2}} \tau_{i+1}^{\frac{r}{2}} + \delta_{n,i}^{\frac{1-r}{2}} \tau_i^{\frac{r}{2}}} (\delta_{n,i+1}^{1-r} \tau_{i+1}^r - \delta_{n,i}^{1-r} \tau_i^r) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} (\delta_{n,i+1}^{1-r} \tau_{i+1}^r - \delta_{n,i}^{1-r} \tau_i^r) - \frac{1}{2} (\delta_{n,1}^{1-r} \tau_1^r + \delta_{n,n}^{1-r} \tau_n^r) \right| \\
 &= \left| -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\delta_{n,i+1}^{\frac{1-r}{2}} \tau_{i+1}^{\frac{r}{2}} - \delta_{n,i}^{\frac{1-r}{2}} \tau_i^{\frac{r}{2}}}{\delta_{n,i+1}^{\frac{1-r}{2}} \tau_{i+1}^{\frac{r}{2}} + \delta_{n,i}^{\frac{1-r}{2}} \tau_i^{\frac{r}{2}}} (\delta_{n,i+1}^{1-r} \tau_{i+1}^r - \delta_{n,i}^{1-r} \tau_i^r) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} (\delta_{n,1}^{1-r} \tau_1^r + \delta_{n,n}^{1-r} \tau_n^r) \right| \\
 &= \left| -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \underbrace{\frac{(\delta_{n,i+1}^{1-r} \tau_{i+1}^r - \delta_{n,i}^{1-r} \tau_i^r)^2}{(\delta_{n,i+1}^{\frac{1-r}{2}} \tau_{i+1}^{\frac{r}{2}} + \delta_{n,i}^{\frac{1-r}{2}} \tau_i^{\frac{r}{2}})^2}}_{(c)} - \underbrace{\frac{1}{2} (\delta_{n,1}^{1-r} \tau_1^r + \delta_{n,n}^{1-r} \tau_n^r)}_{(d)} \right|.
 \end{aligned}$$

Betrachten wir zuerst den Teil (d) dieser Gleichung, für den sich mit den Modellvoraussetzungen ergibt:

$$(d) = \frac{1}{2} (\delta_{n,1} \tilde{\tau}_1^r + \delta_{n,n} \tilde{\tau}_n^r) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Betrachtet man nun die Teilgleichung (c), erhält man:

$$(c) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(\delta_{n,i+1} \tilde{\tau}_{i+1}^r - \delta_{n,i} \tilde{\tau}_i^r)^2}{\left(\delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \tilde{\tau}_{i+1}^{\frac{r}{2}} + \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \tilde{\tau}_i^{\frac{r}{2}} \right)^2} \leq \frac{1}{4 \min_i \delta_{n,i} \inf_{u \in [0,t]} \tau^r(u)} \sum_{i=1}^{n-1} (\delta_{n,i+1} \tilde{\tau}_{i+1}^r - \delta_{n,i} \tilde{\tau}_i^r)^2.$$

Mit der Bedingung (3.1) geht (c) gegen Null.

Somit geht mit diesen Beziehungen auch (c) – (d) gegen Null. Damit geht (a) gegen Null und somit auch (a) + (b). Mit den Nachweisen von (3.4) und (3.5) haben wir die Aussage des Satzes gezeigt.

□

Im Weiteren interessiert uns die genormte Bipower-variation für ungleiche Exponenten. Die folgende Aussage liefert die gewünschte Verallgemeinerung unter Einbeziehung der Regularitätsbedingung für die Zeitabstände.

Satz 3.1.2 *Es seien die Bedingungen für $(H_t)_{t \geq 0}$ aus Kapitel 2.2 erfüllt. Weiterhin gelte für die Zerlegung Δ_n die Bedingung (2.2). Dann gilt für jedes $r, s > 0$:*

$$V_{r,s} \left(H_t, \Delta_n^{\frac{1-r}{2}, \frac{1-s}{2}} \right) \xrightarrow{P} \mu_r \mu_s \int_0^t \tau^{\frac{r+s}{2}}(u) du. \quad (3.6)$$

Beweis:

Der Beweis von Satz 2 läuft in den wesentlichen Schritten wie der des Satzes 1. Analog konstruieren wir uns eine Sequenz von Zufallsgrößen \tilde{v}_i mit $\tilde{v}_i = \tau_i^{\frac{1}{2}} u_i$. Somit ergibt sich für die genormte Bipower-variation folgendes:

$$\begin{aligned} V_{r,s} \left(H_t, \Delta_n^{\frac{1-r}{2}, \frac{1-s}{2}} \right) &\stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1-r}{2}} |\tilde{v}_i|^r \delta_{n,i+1}^{\frac{1-s}{2}} |\tilde{v}_{i+1}|^s \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1-r}{2}} \tau_i^{\frac{r}{2}} |u_i|^r \delta_{n,i+1}^{\frac{1-s}{2}} \tau_{i+1}^{\frac{s}{2}} |u_{i+1}|^s. \end{aligned}$$

Damit gilt folgende Beziehung:

$$\begin{aligned} V_{r,s} \left(H_t, \Delta_n^{\frac{1-r}{2}, \frac{1-s}{2}} \right) - \mu_r \mu_s \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1-r}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1-s}{2}} \tau_i^{\frac{r}{2}} \tau_{i+1}^{\frac{s}{2}} \\ \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1-r}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1-s}{2}} \tau_i^{\frac{r}{2}} \tau_{i+1}^{\frac{s}{2}} (|u_i|^r |u_{i+1}|^s - \mu_r \mu_s). \quad (3.7) \end{aligned}$$

Es müssen analog zu den Beziehungen (3.4) und (3.5) aus Satz 1 die folgenden Beziehungen (3.8) und (3.9) für $\max_i \delta_{n,i} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, gezeigt werden:

$$R = \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1-r}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1-s}{2}} \tau_i^{\frac{r}{2}} \tau_{i+1}^{\frac{s}{2}} (|u_i|^r |u_{i+1}|^s - \mu_r \mu_s) \xrightarrow{P} 0 \quad (3.8)$$

und

$$\left| \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1-r}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1-s}{2}} \tau_i^{\frac{r}{2}} \tau_{i+1}^{\frac{s}{2}} - \int_0^t \tau^{\frac{r+s}{2}}(u) du \right| \xrightarrow{P} 0. \quad (3.9)$$

Um die erste Beziehung zu zeigen, gehen wir genauso vor wie im Beweis oben und konstruieren ein zu dem R unabhängiges R' , welches ebenso unter \mathcal{F}_t bedingt ist. Die Summe wird umsortiert und wir erhalten $S + S'$. Dann wenden wir wieder das Korollar aus 4.3 aus [8] an und argumentieren wie oben.

Um die zweite Beziehung zu zeigen, nutzen wir die Dreiecksungleichung mit $p = r + s$.

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1-r}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1-s}{2}} \tau_i^{\frac{r}{2}} \tau_{i+1}^{\frac{s}{2}} - \int_0^t \tau^{\frac{r+s}{2}}(u) du \right| \\ & \leq \underbrace{\left| \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1-r}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1-s}{2}} \tau_i^{\frac{r}{2}} \tau_{i+1}^{\frac{s}{2}} - \sum_{i=1}^n \delta_{n,i}^{1-\frac{p}{2}} \tau_i^{\frac{p}{2}} \right|}_{(e)} + \underbrace{\left| \sum_{i=1}^n \delta_{n,i}^{1-\frac{p}{2}} \tau_i^{\frac{p}{2}} - \int_0^t \tau^{\frac{r+s}{2}}(u) du \right|}_{(f)} \end{aligned}$$

Wir betrachten wieder die Teilgleichungen (e) und (f) einzeln. Die Beziehung (2.5) gewährleistet, dass die Teilgleichung (f) gegen Null geht. So ist im letzten Schritt zu zeigen, dass die Teilgleichung (e) gegen Null geht.

$$\begin{aligned} (e) & = \left| \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1-r}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1-s}{2}} \tau_i^{\frac{r}{2}} \tau_{i+1}^{\frac{s}{2}} - \sum_{i=1}^n \delta_{n,i}^{1-\frac{p}{2}} \tau_i^{\frac{p}{2}} \right| \\ & = \left| \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1-r}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1-s}{2}} \tau_i^{\frac{r}{2}} \tau_{i+1}^{\frac{s}{2}} - \delta_{n,i}^{1-\frac{p}{2}} \tau_i^{\frac{p}{2}} - \delta_{n,n}^{1-\frac{p}{2}} \tau_n^{\frac{p}{2}} \right| \\ & = \left| \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1-r}{2}} \tau_i^{\frac{r}{2}} \left(\delta_{n,i+1}^{\frac{1-s}{2}} \tau_{i+1}^{\frac{s}{2}} - \delta_{n,i}^{\frac{1-s}{2}} \tau_i^{\frac{s}{2}} \right) - \delta_{n,n}^{1-\frac{p}{2}} \tau_n^{\frac{p}{2}} \right| \end{aligned}$$

Der Term $\delta_{n,n}^{1-\frac{p}{2}} \tau_n^{\frac{p}{2}} = \delta_{n,n} \tilde{\tau}_n^{\frac{p}{2}}$ konvergiert für $n \rightarrow \infty$ gegen Null. Daher betrachten wir nur die Summe, die wir unter der Anwendung der Hölder Ungleichung umformen:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1-r}{2}} \tau_i^{\frac{r}{2}} \left(\delta_{n,i+1}^{\frac{1-s}{2}} \tau_{i+1}^{\frac{s}{2}} - \delta_{n,i}^{\frac{1-s}{2}} \tau_i^{\frac{s}{2}} \right) \right| \\ & \leq \left| \left(\sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{1-r} \tau_i^r \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \left(\delta_{n,i+1}^{\frac{1-s}{2}} \tau_{i+1}^{\frac{s}{2}} - \delta_{n,i}^{\frac{1-s}{2}} \tau_i^{\frac{s}{2}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right| \\ & \leq \left| \left(\max_i \delta_{n,i} \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i} \tilde{\tau}_i^r \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \left(\tilde{\tau}_{i+1}^{\frac{s}{2}} - \frac{\delta_{n,i}^{\frac{1}{2}}}{\delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}}} \tilde{\tau}_i^{\frac{s}{2}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right|. \end{aligned}$$

Betrachten wir nun die beiden Klammerausdrücke getrennt. Für den ersten Teil ergibt sich mit der Riemann-Integrierbarkeit:

$$\left(\max_i \delta_{n,i} \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i} \tilde{\tau}_i^r \right)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Betrachten wir nun den zweiten Klammerausdruck. Unter der Anwendung der Minkowski Ungleichung ergibt sich:

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=1}^{n-1} \left(\tilde{\tau}_{i+1}^{\frac{s}{2}} - \frac{\delta_{n,i}^{\frac{1}{2}}}{\delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}}} \tilde{\tau}_i^{\frac{s}{2}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n-1} \left(\tilde{\tau}_{i+1}^{\frac{s}{2}} - \tilde{\tau}_i^{\frac{s}{2}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{(*)} + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n-1} \left(\tilde{\tau}_i^{\frac{s}{2}} - \left(\frac{\delta_{n,i}}{\delta_{n,i+1}} \right)^{\frac{1}{2}} \tilde{\tau}_i^{\frac{s}{2}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{(**)}. \end{aligned}$$

Dabei betrachten wir zuerst (*). Der Prozess $\sigma^2(t) = \tau(t)$ ist ein Semimartingal und somit die quadratische Variation endlich.

Um (**) zu betrachten, klammern wir $0 \leq \sup_i \tilde{\tau}_i^s < \infty$ aus:

$$(**) \leq \sup_i \tilde{\tau}_i^{\frac{s}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \left(1 - \left(\frac{\delta_{n,i}}{\delta_{n,i+1}} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Es bleibt, die Konvergenz der Summe zu zeigen. Mit der Voraussetzung (2.2) erhalten wir:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} \left(1 - \left(\frac{\delta_{n,i}}{\delta_{n,i+1}} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 &= \sum_{i=1}^{n-1} (1 - (1 + c_{n,i})^2) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} 4c_{n,i}^2 + 2c_{n,i}^3 + c_{n,i}^4. \end{aligned}$$

Mit der Konvergenz von $\sum_{i=1}^{n-1} c_{n,i}^2$ für $n \rightarrow \infty$ erhalten wir die Konvergenz von (**). Somit konvergiert (e) gegen Null.

□

Nun haben wir die Grundlage gelegt, um allgemeinere Prozesse zu betrachten. Wir werden stetige Mittelwertprozesse hinzunehmen und die Klasse der Semimartingale verlassen. Später addieren wir noch einen Sprungprozess.

3.1.2 Prozesse mit Mittelwertprozess

In diesem Abschnitt addieren wir zu unserem Prozess $(H_t)_{t \geq 0}$ einen stetigen Prozess $(Y_t)_{t \geq 0}$. Dieser Prozess ist nicht notwendig eine Semimartingal und genügt den Anforderungen des Kapitels 2.2. Wir betrachten die genormte Bipower-variation von Prozessen der Form

$$X_t = V_t = Y_t + H_t = Y_t^{(1)} + Y_t^{(2)} + H_t.$$

Dabei genügt der Mittelwertprozess $Y_t = Y_t^{(1)} + Y_t^{(2)}$ den Bedingungen, die wir in Kapitel 2.2 eingeführt haben. Für den Beweis der Konsistenz der genormten Bipowervariation benötigen wir einige technische Lemmata, die wir voranstellen. Deren Beweise führen wir am Ende dieses Kapitels.

Lemma 3.1.3 *Es seien die Bedingungen an den Prozess $\tau(t)$ aus dem Kapitel 2.2 erfüllt. Dann gilt für $n \rightarrow \infty$ mit (2.2):*

$$V_{r,s} \left(\tau(t), \Delta_n^{\frac{1}{2}-r, \frac{1}{2}-s} \right) = \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}-r} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}-s} \tau_i^r \tau_{i+1}^s \rightarrow \int_0^t \tau^{r+s}(u) du. \quad (3.10)$$

Lemma 3.1.4 *Es seien die Bedingungen an den Prozess $\tau(t)$ aus dem Kapitel 2.2 erfüllt. Dann gilt für $n \rightarrow \infty$ mit (2.2):*

$$V_{\frac{r}{2}, \frac{r+s}{2}, \frac{s}{2}} \left(\tau(t), \Delta_n^{\frac{1}{4}-\frac{r}{2}, \frac{1}{2}-\frac{r+s}{2}, \frac{1}{4}-\frac{s}{2}} \right) = \sum_{i=1}^{n-2} \delta_{n,i}^{\frac{1}{4}-\frac{r}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}-\frac{r+s}{2}} \delta_{n,i+2}^{\frac{1}{4}-\frac{s}{2}} \tau_i^{\frac{r}{2}} \tau_{i+1}^{\frac{r+s}{2}} \tau_{i+2}^{\frac{s}{2}} \rightarrow \int_0^t \tau^{r+s}(u) du.$$

Für das dritte Lemma dieses Abschnittes machen wir zuvor einige Umformungen. Mit der Hilfe des Lemmas können wir dann folgendes zeigen:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{1-r} \left| \Delta Y_i^{(1)} + \Delta H_i \right|^{2r} \xrightarrow{P} \mu_{2r} \int_0^t \tau^r(u) du. \quad (3.11)$$

Dabei gilt:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{1-r} \left| \Delta Y_i^{(1)} + \Delta H_i \right|^{2r} + \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{1-r} |\Delta H_i|^{2r} - \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{1-r} |\Delta H_i|^{2r} - \mu_{2r} \int_0^t \tau^r(u) du \right| \\ & \leq \left| \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{1-r} \left| \Delta Y_i^{(1)} + \Delta H_i \right|^{2r} - \sum_{k=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{1-r} |\Delta H_i|^{2r} \right| + \left| \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{1-r} |\Delta H_i|^{2r} - \mu_{2r} \int_0^t \tau^r(u) du \right|. \end{aligned}$$

Die Konvergenz des zweiten Betrages ist für eine $\frac{1}{2}$ -balancierte Zeiterlegungen bekannt [9]. Somit betrachten wir den Inhalt des ersten Betrages:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{1-r} \left| \Delta Y_i^{(1)} + \Delta H_i \right|^{2r} - \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{1-r} |\Delta H_i|^{2r} \\ & \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{1-r} \left[\left| \Delta Y_i^{(1)} + \tau_i^{\frac{1}{2}} u_i \right|^{2r} - \left| \tau_i^{\frac{1}{2}} u_i \right|^{2r} \right]. \end{aligned}$$

Dabei sind die u_i mit $i = 1, \dots, n$ unabhängig und standard normalverteilt. Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{1-r} \left[\left| \Delta Y_i^{(1)} + \tau_i^{\frac{1}{2}} u_i \right|^{2r} - \left| \tau_i^{\frac{1}{2}} u_i \right|^{2r} \right] &= \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i} \tilde{\tau}_i^r \left[\left| \frac{\tilde{Y}_i}{\tilde{\tau}_i^{\frac{1}{2}}} \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} + u_i \right|^{2r} - |u_i|^{2r} \right] \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i} \tilde{\tau}_i^r \left[h_{2r} \left(u_i; \gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \right) \right]. \end{aligned}$$

Hierbei ist $\tilde{Y}_i = \frac{\Delta Y_i^{(1)}}{\delta_{n,i}}$. Zeigen wir mit dem folgenden Lemma zwei Eigenschaften der Funktion $h_r \left(u_i; \gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \right) = \left| \frac{\tilde{Y}_i}{\tilde{\gamma}_i^{\frac{1}{2}}} \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} + u_i \right|^r + |u_i|^r$ mit $\gamma_i = \frac{\tilde{Y}_i}{\tilde{\gamma}_i^{\frac{1}{2}}} < \infty$, können wir (3.11) daraus direkt folgern.

Lemma 3.1.5 *Es seien die u_i für $i = 1, \dots, n$ unabhängig und standard normalverteilt und unabhängig von den γ_i . Dann gilt für die Funktion $h_r \left(u_i; \gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \right)$:*

1.

$$E \left(h_r \left(u_i; \gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \right) \middle| \mathcal{F}_t \right) = O_P(\gamma_i^2 \delta_{n,i}), \quad (3.12)$$

2.

$$E \left(\left(h_r \left(u_i; \gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \right) \right)^2 \middle| \mathcal{F}_t \right) = O_P \left(\gamma_{n,i}^{1+1 \wedge r} \delta_{n,i}^{\frac{1+1 \wedge r}{2}} \right). \quad (3.13)$$

Wir formulieren im folgenden das zentrale Ergebnis dieses Abschnittes.

Satz 3.1.6 *Es gelten die Voraussetzungen aus dem Kapitel 2.2 für die Prozesse $(Y_t)_{t \geq 0}$ und $(H_t)_{t \geq 0}$. Dann gilt für $n \rightarrow \infty$ mit (2.2) sowie der $\frac{1}{2}$ -Balanciertheit von Δ_n :*

$$\left| \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1-r}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1-s}{2}} |\Delta Y_i + \Delta H_i|^r |\Delta Y_{i+1} + \Delta H_{i+1}|^s - \mu_r \mu_s \int_0^t \tau^{\frac{r+s}{2}}(u) du \right| \xrightarrow{P} 0. \quad (3.14)$$

Beweis:

Mit der Dreiecksungleichung gilt:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1-r}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1-s}{2}} |\Delta Y_i + \Delta H_i|^r |\Delta Y_{i+1} + \Delta H_{i+1}|^s - \mu_r \mu_s \int_0^t \tau^{\frac{r+s}{2}}(u) du \right| \\ & \leq \left| \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1-r}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1-s}{2}} |\Delta Y_i + \Delta H_i|^r |\Delta Y_{i+1} + \Delta H_{i+1}|^s - \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1-r}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1-s}{2}} |\Delta H_i|^r |\Delta H_{i+1}|^s \right| \\ & + \left| \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1-r}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1-s}{2}} |\Delta H_i|^r |\Delta H_{i+1}|^s - \mu_r \mu_s \int_0^t \tau^{\frac{r+s}{2}}(u) du \right|. \end{aligned}$$

Dabei ist aus Satz 3.1.2 bekannt, dass

$$\left| \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1-r}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1-s}{2}} |\Delta H_i|^r |\Delta H_{i+1}|^s - \mu_r \mu_s \int_0^t \tau^{\frac{r+s}{2}}(u) du \right| \xrightarrow{P} 0.$$

Bleibt also zu zeigen, dass

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1-r}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1-s}{2}} |\Delta Y_i + \Delta H_i|^r |\Delta Y_{i+1} + \Delta H_{i+1}|^s \right. \\ & \quad \left. - \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1-r}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1-s}{2}} |\Delta H_i|^r |\Delta H_{i+1}|^s \right| \xrightarrow{P} 0 \quad (3.15) \end{aligned}$$

bzw. für $s > 1$

$$\left| \left(\sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1-r}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1-s}{2}} |\Delta Y_i + \Delta H_i|^r |\Delta Y_{i+1} + \Delta H_{i+1}|^s \right)^{\frac{1}{s}} - \left(\sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1-r}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1-s}{2}} |\Delta H_i|^r |\Delta H_{i+1}|^s \right)^{\frac{1}{s}} \right| \xrightarrow{P} 0. \quad (3.16)$$

gilt.

Wir benötigen folgende Umformungen:

$$0 < r, s \leq 1$$

$$\sum |a + b + c|^r |d + e + f|^s \leq \sum (|a + b|^r |d + e|^s + |c|^r |d + e|^s + |a + b|^r |f|^s + |c|^r |f|^s),$$

$$r < s, 0 < r \leq 1, s > 1$$

$$\begin{aligned} \left(\sum |a + b + c|^r |d + e + f|^s \right)^{\frac{1}{s}} &= \left(\sum \left[|a + b + c|^{\frac{r}{s}} (d + e) + |a + b + c|^{\frac{r}{s}} f \right]^s \right)^{\frac{1}{s}} \\ &\leq \left(\sum |a + b + c|^r |d + e|^s \right)^{\frac{1}{s}} + \left(\sum |a + b + c|^r |f|^s \right)^{\frac{1}{s}} \\ &\leq \left(\sum |a + b|^r |d + e|^s \right)^{\frac{1}{s}} + \left(\sum |c|^r |d + e|^s \right)^{\frac{1}{s}} + \left(\sum |a + b|^r |f|^s \right)^{\frac{1}{s}} + \left(\sum |c|^r |f|^s \right)^{\frac{1}{s}} \end{aligned}$$

$$\text{o.B.d.A. } r < s; r, s > 1 \Rightarrow \frac{r}{s} < 1$$

$$\begin{aligned} \left(\left[\sum |a + b + c|^r |d + e + f|^s \right]^{\frac{1}{r}} \right)^{\frac{r}{s}} &= \left(\left[\sum \left[|(a + b)|d + e + f|^{\frac{s}{r}} + |c|d + e + f|^{\frac{s}{r}} \right]^r \right]^{\frac{1}{r}} \right)^{\frac{r}{s}} \\ &\leq \left(\left[\sum \left[|(a + b)|d + e + f|^{\frac{s}{r}} \right]^r \right]^{\frac{1}{r}} \right)^{\frac{r}{s}} + \left(\left[\sum |c|d + e + f|^{\frac{s}{r}} \right]^r \right)^{\frac{1}{r}} \right)^{\frac{r}{s}} \\ &\leq \left[\sum |a + b|^r |d + e|^s \right]^{\frac{1}{s}} + \left[\sum |a + b|^r |f|^s \right]^{\frac{1}{s}} + \left[\sum |c|^r |d + e|^s \right]^{\frac{1}{s}} + \left[\sum |c|^r |f|^s \right]^{\frac{1}{s}} \end{aligned}$$

Mit diesen Umformungen können wir (3.15) und (3.16) nun folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1-r}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1-s}{2}} |\Delta Y_i + \Delta H_i|^r |\Delta Y_{i+1} + \Delta H_{i+1}|^s - \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1-r}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1-s}{2}} |\Delta H_i|^r |\Delta H_{i+1}|^s \right| \\ &\leq \left| \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1-r}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1-s}{2}} \left[\left| \Delta Y_i^{(1)} + \Delta H_i \right|^r \left| \Delta Y_{i+1}^{(1)} + \Delta H_{i+1} \right|^s - |\Delta H_i|^r |\Delta H_{i+1}|^s \right] \right| \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1-r}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1-s}{2}} \left| \Delta Y_i^{(2)} \right|^r \left| \Delta Y_{i+1}^{(1)} + \Delta H_{i+1} \right|^s \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1-r}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1-s}{2}} \left| \Delta Y_i^{(1)} + \Delta H_i \right|^r \left| \Delta Y_{i+1}^{(2)} \right|^s \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1-r}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1-s}{2}} \left| \Delta Y_i^{(2)} \right|^r \left| \Delta Y_{i+1}^{(2)} \right|^s \end{aligned}$$

bzw. für $s > 1$

$$\begin{aligned}
 & \left| \left(\sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1-r}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1-s}{2}} |\Delta Y_i + \Delta H_i|^r |\Delta Y_{i+1} + \Delta H_{i+1}|^s \right)^{\frac{1}{s}} - \left(\sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1-r}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1-s}{2}} |\Delta H_i|^r |\Delta H_{i+1}|^s \right)^{\frac{1}{s}} \right| \\
 & \leq \left| \left(\sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1-r}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1-s}{2}} |\Delta Y_i^{(1)} + \Delta H_i|^r |\Delta Y_{i+1}^{(1)} + \Delta H_{i+1}|^s - \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1-r}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1-s}{2}} |\Delta H_i|^r |\Delta H_{i+1}|^s \right)^{\frac{1}{s}} \right| \\
 & + \left(\sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1-r}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1-s}{2}} |\Delta Y_i^{(2)}|^r |\Delta Y_{i+1}^{(1)} + \Delta H_{i+1}|^s \right)^{\frac{1}{s}} \\
 & + \left(\sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1-r}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1-s}{2}} |\Delta Y_i^{(1)} + \Delta H_i|^r |\Delta Y_{i+1}^{(2)}|^s \right)^{\frac{1}{s}} \\
 & + \left(\sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1-r}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1-s}{2}} |\Delta Y_i^{(2)}|^r |\Delta Y_{i+1}^{(2)}|^s \right)^{\frac{1}{s}}.
 \end{aligned}$$

Für $\sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1-r}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1-s}{2}} |\Delta Y_i^{(1)} + \Delta H_i|^r |\Delta Y_{i+1}^{(2)}|^s$ gilt:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1-r}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1-s}{2}} |\Delta Y_i^{(1)} + \Delta H_i|^r |\Delta Y_{i+1}^{(2)}|^s \\
 & \leq \left(\sum_{i=1}^{n-1} \left[\delta_{n,i}^{\frac{1-r}{2}} |\Delta Y_i^{(1)} + \Delta H_i|^r \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \left[\delta_{n,i+1}^{\frac{1-s}{2}} |\Delta Y_{i+1}^{(2)}|^s \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

Der zweite Faktor ist die genormte Power-variation von $(Y_t^{(2)})_{t \geq 0}$, welche nach Voraussetzung gegen Null geht. Weiterhin wissen wir folgendes:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{1-2r} |\Delta Y_i^{(1)} + \Delta H_i|^{2r} \xrightarrow{P} \mu_{2r} \int_0^t \tau^r(u) du. \quad (3.17)$$

Dies folgt aus der Beziehung (3.11) und deren folgenden Umformungen, sowie die Anwendung des Lemma 3.1.5. Damit geht diese Summe in Wahrscheinlichkeit gegen Null. Für $\sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1-r}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1-s}{2}} |\Delta Y_i^{(2)}|^r |\Delta Y_{i+1}^{(1)} + \Delta H_{i+1}|^s$ gelten die gleichen Argumentationen, so dass dieser Ausdruck auch in Wahrscheinlichkeit gegen Null konvergiert. Im folgenden wenden wir die Hölder Ungleichung an.

$$\sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1-r}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1-s}{2}} |\Delta Y_i^{(2)}|^r |\Delta Y_{i+1}^{(2)}|^s \leq \left(\sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{1-r} |\Delta Y_i^{(2)}|^{2r} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i+1}^{1-s} |\Delta Y_{i+1}^{(2)}|^{2s} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Wiederum streben die beiden Klammerterme gegen Null. Somit geht der gesamte Ausdruck gegen Null. Es bleibt zu zeigen, dass

$$\left| \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1-r}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1-s}{2}} \left| \Delta Y_i^{(1)} + \Delta H_i \right|^r \left| \Delta Y_{i+1}^{(1)} + \Delta H_{i+1} \right|^s - \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1-r}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1-s}{2}} |\Delta H_i|^r |\Delta H_{i+1}|^s \right| \xrightarrow{P} 0.$$

Wir haben schon früher folgende Eigenschaft genutzt:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1-r}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1-s}{2}} \left| \Delta Y_i^{(1)} + \Delta H_i \right|^r \left| \Delta Y_{i+1}^{(1)} + \Delta H_{i+1} \right|^s - \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1-r}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1-s}{2}} |\Delta H_i|^r |\Delta H_{i+1}|^s \\ & \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1-r}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1-s}{2}} \left[\left| \Delta Y_i^{(1)} + \tau_i^{\frac{1}{2}} u_i \right|^r \left| \Delta Y_{i+1}^{(1)} + \tau_{i+1}^{\frac{1}{2}} u_{i+1} \right|^s - \left| \tau_i^{\frac{1}{2}} u_i \right|^r \left| \tau_{i+1}^{\frac{1}{2}} u_{i+1} \right|^s \right]. \end{aligned}$$

Dabei sind die u_i mit $i = 1, \dots, n$ unabhängig und standard normalverteilt. Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1-r}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1-s}{2}} \left[\left| \Delta Y_i^{(1)} + \tau_i^{\frac{1}{2}} u_i \right|^r \left| \Delta Y_{i+1}^{(1)} + \tau_{i+1}^{\frac{1}{2}} u_{i+1} \right|^s - \left| \tau_i^{\frac{1}{2}} u_i \right|^r \left| \tau_{i+1}^{\frac{1}{2}} u_{i+1} \right|^s \right] \\ & = \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \tilde{\tau}_i^{\frac{r}{2}} \tilde{\tau}_{i+1}^{\frac{s}{2}} \left[\left| \frac{\tilde{Y}_i}{\tilde{\tau}_i^{\frac{1}{2}}} \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} + u_i \right|^r \left| \frac{\tilde{Y}_{i+1}}{\tilde{\tau}_{i+1}^{\frac{1}{2}}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} + u_{i+1} \right|^s - |u_i|^r |u_{i+1}|^s \right] \\ & = \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \tilde{\tau}_i^{\frac{r}{2}} \tilde{\tau}_{i+1}^{\frac{s}{2}} \left[h_{r,s} \left(u_i, u_{i+1}; \gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}}, \gamma_{i+1} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \right) \right]. \end{aligned}$$

Dabei ist:

$$h_{r,s} \left(u_i, u_{i+1}; \gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}}, \gamma_{i+1} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \right) = \left| \gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} + u_i \right|^r \left| \gamma_{i+1} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} + u_{i+1} \right|^s - |u_i|^r |u_{i+1}|^s.$$

Schauen wir uns im Folgenden den Erwartungswert und die Varianz der Funktion $h_{r,s}$ an, bedingt unter \mathcal{F}_t . Konvergieren beide gegen Null, so haben wir Konvergenz in \mathcal{L}^2 und somit auch Konvergenz in Wahrscheinlichkeit. Die γ_i sind unabhängig und \mathcal{F}_t messbar. Es sei darauf hingewiesen, dass γ_i bzgl. \mathcal{F}_t messbar und unabhängig von u_i ist.

$$\begin{aligned} & E_{\mathcal{F}_t} \left(h_{r,s} \left(u_i, u_{i+1}; \gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}}, \gamma_{i+1} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \right) \right) \\ & = E_{\mathcal{F}_t} \left| \gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} + u_i \right|^r E_{\mathcal{F}_t} \left| \gamma_{i+1} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} + u_{i+1} \right|^s - E |u_i|^r E |u_{i+1}|^s \\ & = E_{\mathcal{F}_t} \left(h_r \left(u_i; \gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \right) \right) E_{\mathcal{F}_t} \left(h_s \left(u_{i+1}; \gamma_{i+1} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \right) \right) \\ & + E_{\mathcal{F}_t} \left(h_r \left(u_i; \gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \right) \right) E |u_{i+1}|^s + E_{\mathcal{F}_t} \left(h_s \left(u_{i+1}; \gamma_{i+1} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \right) \right) E |u_i|^r \end{aligned}$$

Es ergibt sich für den Erwartungswert:

$$\begin{aligned} E_{\mathcal{F}_t} \left(h_{r,s} \left(u_i, u_{i+1}; \gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}}, \gamma_{i+1} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \right) \right) \\ = O_P(\gamma_i^2 \delta_{n,i}) O_P(\gamma_{i+1}^2 \delta_{n,i+1}) + O_P(\gamma_i^2 \delta_{n,i}) + O_P(\gamma_{i+1}^2 \delta_{n,i+1}) = O_P(\max_i (\gamma_i^2 \delta_{n,i})). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Weiterhin erhalten wir:

$$\begin{aligned} \left(h_{r,s} \left(u_i, u_{i+1}; \gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}}, \gamma_{i+1} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \right) \right)^2 &= h_{2r,2s} \left(u_i, u_{i+1}; \gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}}, \gamma_{i+1} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \right) \\ &\quad + 2|u_i|^{2r}|u_{i+1}|^{2s} - 2 \left| \gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} + u_i \right|^r \left| \gamma_{i+1} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} + u_{i+1} \right|^s |u_i|^r |u_{i+1}|^s. \end{aligned}$$

Damit können wir schreiben:

$$\begin{aligned} E_{\mathcal{F}_t} \left(\left(h_{r,s} \left(u_i, u_{i+1}; \gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}}, \gamma_{i+1} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \right) \right)^2 \right) \\ = E_{\mathcal{F}_t} \left(h_{2r,2s} \left(u_i, u_{i+1}; \gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}}, \gamma_{i+1} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \right) \right) + 2E(|u_i|^{2r}|u_{i+1}|^{2s}) \\ - 2E_{\mathcal{F}_t} \left(\left| \gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} + u_i \right|^r \left| \gamma_{i+1} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} + u_{i+1} \right|^s |u_i|^r |u_{i+1}|^s \right) \\ = O_P(\max_i (\gamma_i^2 \delta_{n,i})) \\ - 2E_{\mathcal{F}_t} \left[\left(\left| \gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} + u_i \right|^r \left| \gamma_{i+1} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} + u_{i+1} \right|^s |u_i|^r |u_{i+1}|^s \right) - E(|u_i|^{2r}|u_{i+1}|^{2s}) \right]. \end{aligned}$$

Formen wir den verbleibenden Erwartungswert um, erhalten wir:

$$\begin{aligned} E_{\mathcal{F}_t} \left(\left| \gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} + u_i \right|^r \left| \gamma_{i+1} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} + u_{i+1} \right|^s |u_i|^r |u_{i+1}|^s \right) - E(|u_i|^{2r}|u_{i+1}|^{2s}) \\ = E_{\mathcal{F}_t} \left(\left| \gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} + u_i \right|^r |u_i|^r - |u_i|^{2r} \right) E_{\mathcal{F}_t} \left(\left| \gamma_{i+1} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} + u_{i+1} \right|^s |u_{i+1}|^s \right) \\ + E(|u_i|^{2r}) E_{\mathcal{F}_t} \left(\left| \gamma_{i+1} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} + u_{i+1} \right|^s |u_{i+1}|^s \right) - E(|u_i|^{2r}|u_{i+1}|^{2s}) \\ = E_{\mathcal{F}_t} \left(|u_i|^r h_r \left(u_i; \gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \right) \right) E_{\mathcal{F}_t} \left(|u_{i+1}|^s h_s \left(u_{i+1}; \gamma_{i+1} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \right) \right) \\ + E(|u_{i+1}|^{2s}) E_{\mathcal{F}_t} \left(|u_i|^r h_r \left(u_i; \gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \right) \right) + E(|u_i|^{2r}) E_{\mathcal{F}_t} \left(|u_{i+1}|^s h_s \left(u_{i+1}; \gamma_{i+1} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \right) \right). \end{aligned}$$

Mit den Beziehungen (3.21) und (3.24) ergibt sich:

$$E_{\mathcal{F}_t} \left(\left(h_{r,s} \left(u_i, u_{i+1}; \gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}}, \gamma_{i+1} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \right) \right)^2 \right) = O_P \left(\max_i (\gamma_i^2 \delta_{n,i})^{\frac{1+1 \wedge r \wedge s}{2}} \right).$$

Somit gilt für die Varianz:

$$\begin{aligned}
 & \text{Var} \left(h_{r,s} \left(u_i, u_{i+1}; \gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}}, \gamma_{i+1} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \right) \middle| \mathcal{F}_t \right) \\
 &= O_P \left(\max_i (\gamma_i^2 \delta_{n,i})^{\frac{1+1 \wedge r \wedge s}{2}} \right) - \left(O_P \left(\max_i (\gamma_i^2 \delta_{n,i}) \right) \right)^2 = O_P \left(\max_i (\gamma_i^2 \delta_{n,i})^{\frac{1+1 \wedge r \wedge s}{2}} \right).
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Nun sind noch die Kovarianzen benachbarter Zeitabstände zu betrachten. Alle weiteren Kovarianzen sind Null. Dabei gilt:

$$\begin{aligned}
 & \text{Cov} \left(h_{r,s} \left(u_i, u_{i+1}; \gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}}, \gamma_{i+1} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \right), h_{r,s} \left(u_{i+1}, u_{i+2}; \gamma_{i+1} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}}, \gamma_{i+2} \delta_{n,i+2}^{\frac{1}{2}} \right) \middle| \mathcal{F}_t \right) \\
 &= E_{\mathcal{F}_t} \left(h_{r,s} \left(u_i, u_{i+1}; \gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}}, \gamma_{i+1} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \right) h_{r,s} \left(u_{i+1}, u_{i+2}; \gamma_{i+1} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}}, \gamma_{i+2} \delta_{n,i+2}^{\frac{1}{2}} \right) \right) \\
 &\quad - E_{\mathcal{F}_t} \left(h_{r,s} \left(u_i, u_{i+1}; \gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}}, \gamma_{i+1} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \right) \right) E_{\mathcal{F}_t} \left(h_{r,s} \left(u_{i+1}, u_{i+2}; \gamma_{i+1} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}}, \gamma_{i+2} \delta_{n,i+2}^{\frac{1}{2}} \right) \right) \\
 &= E_{\mathcal{F}_t} \left(h_{r,s} \left(u_i, u_{i+1}; \gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}}, \gamma_{i+1} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \right) h_{r,s} \left(u_{i+1}, u_{i+2}; \gamma_{i+1} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}}, \gamma_{i+2} \delta_{n,i+2}^{\frac{1}{2}} \right) \right) \\
 &\quad - O_P(\max_i (\gamma_i^2 \delta_{n,i})) O_P(\max_i (\gamma_i^2 \delta_{n,i})).
 \end{aligned}$$

Der verbleibende Erwartungswert ist noch umzuformen. Dies geschieht im gleichen System wie bei der Varianz, so dass wir auf die umfangreichen Transformationsschritte hier verzichten. Das Ergebnis lautet:

$$\begin{aligned}
 & \text{Cov} \left(h_{r,s} \left(u_i, u_{i+1}; \gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}}, \gamma_{i+1} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \right), h_{r,s} \left(u_{i+1}, u_{i+2}; \gamma_{i+1} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}}, \gamma_{i+2} \delta_{n,i+2}^{\frac{1}{2}} \right) \middle| \mathcal{F}_t \right) \\
 &= O_P \left(\max_i (\gamma_i^2 \delta_{n,i})^{\frac{1+1 \wedge r \wedge s}{2}} \right).
 \end{aligned}$$

Bilden wir den Erwartungswert und die Varianz unter der Bedingung \mathcal{F}_t von $\sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \tilde{\tau}_i^{\frac{r}{2}} \tilde{\tau}_{i+1}^{\frac{s}{2}} h_{r,s} \left(u_i, u_{i+1}; \gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}}, \gamma_{i+1} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \right)$ können wir schreiben:

$$\begin{aligned}
 & E \left(\sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \tilde{\tau}_i^{\frac{r}{2}} \tilde{\tau}_{i+1}^{\frac{s}{2}} h_{r,s} \left(u_i, u_{i+1}; \gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}}, \gamma_{i+1} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \right) \middle| \mathcal{F}_t \right) \\
 &= \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \tilde{\tau}_i^{\frac{r}{2}} \tilde{\tau}_{i+1}^{\frac{s}{2}} E \left[h_{r,s} \left(u_i, u_{i+1}; \gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}}, \gamma_{i+1} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] \\
 &= O_P \left(\max_i (\gamma_i^2 \delta_{n,i}) \right) \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \tilde{\tau}_i^{\frac{r}{2}} \tilde{\tau}_{i+1}^{\frac{s}{2}} \xrightarrow{P} 0.
 \end{aligned}$$

weil $O_P(\max_i (\gamma_i^2 \delta_{n,i})) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ gilt und wir aus Satz 3.1.2 wissen, dass

$\sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \tilde{\tau}_i^{\frac{r}{2}} \tilde{\tau}_{i+1}^{\frac{s}{2}} \xrightarrow{P} \int_0^t \tau^{\frac{r+s}{2}}(u) du < \infty$ ist. Für die bedingte Varianz können wir

folgendes zeigen:

$$\begin{aligned}
 & \text{Var} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \tilde{\tau}_i^{\frac{r}{2}} \tilde{\tau}_{i+1}^{\frac{s}{2}} h_{r,s} \left(u_i, u_{i+1}; \gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}}, \gamma_{i+1} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \right) \middle| \mathcal{F}_t \right) \\
 &= \sum_{i=1}^{n-1} \text{Var} \left(\delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \tilde{\tau}_i^{\frac{r}{2}} \tilde{\tau}_{i+1}^{\frac{s}{2}} h_{r,s} \left(u_i, u_{i+1}; \gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}}, \gamma_{i+1} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \right) \middle| \mathcal{F}_t \right) \\
 &+ 2 \sum_{i=1}^{n-2} \text{Cov} \left(\delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \tilde{\tau}_i^{\frac{r}{2}} \tilde{\tau}_{i+1}^{\frac{s}{2}} h_{r,s} \left(u_i, u_{i+1}; \gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}}, \gamma_{i+1} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \right), \right. \\
 &\left. \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \delta_{n,i+2}^{\frac{1}{2}} \tilde{\tau}_{i+1}^{\frac{r}{2}} \tilde{\tau}_{i+2}^{\frac{s}{2}} h_{r,s} \left(u_{i+1}, u_{i+2}; \gamma_{i+1} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}}, \gamma_{i+2} \delta_{n,i+2}^{\frac{1}{2}} \right) \middle| \mathcal{F}_t \right) \\
 &= \sum_{i=1}^{n-1} \left(\delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \tilde{\tau}_i^{\frac{r}{2}} \tilde{\tau}_{i+1}^{\frac{s}{2}} \right)^2 O_P \left(\max_i (\gamma_i^2 \delta_{n,i})^{\frac{1+1 \wedge r \wedge s}{2}} \right) \\
 &+ 2 \sum_{i=1}^{n-2} \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \tilde{\tau}_i^{\frac{r}{2}} \tilde{\tau}_{i+1}^{\frac{s}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \delta_{n,i+2}^{\frac{1}{2}} \tilde{\tau}_{i+1}^{\frac{r}{2}} \tilde{\tau}_{i+2}^{\frac{s}{2}} O_P \left(\max_i (\gamma_i^2 \delta_{n,i})^{\frac{1+1 \wedge r \wedge s}{2}} \right) \\
 &= O_P \left(\max_i (\gamma_i^2 \delta_{n,i})^{\frac{1+1 \wedge r \wedge s}{2}} \right) \sum_{i=1}^{n-1} \left(\left(\delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \tilde{\tau}_i^{\frac{r}{2}} \tilde{\tau}_{i+1}^{\frac{s}{2}} \right)^2 + 2 \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \delta_{n,i+2}^{\frac{1}{2}} \tilde{\tau}_i^{\frac{r}{2}} \tilde{\tau}_{i+1}^{\frac{r+s}{2}} \tilde{\tau}_{i+2}^{\frac{s}{2}} \right).
 \end{aligned}$$

Die Summe

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left(\delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \tilde{\tau}_i^{\frac{r}{2}} \tilde{\tau}_{i+1}^{\frac{s}{2}} \right)^2 \leq \max_i \delta_{n,i} \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \tilde{\tau}_i^r \tilde{\tau}_{i+1}^s$$

geht unter Anwendung von Lemma 3.1.3 und

$$\sum_{i=1}^{n-1} 2 \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \delta_{n,i+2}^{\frac{1}{2}} \tilde{\tau}_i^{\frac{r}{2}} \tilde{\tau}_{i+1}^{\frac{r+s}{2}} \tilde{\tau}_{i+2}^{\frac{s}{2}} \leq \max_i \delta_{n,i} \sum_{i=1}^{n-1} 2 \delta_{n,i}^{\frac{1}{4}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \delta_{n,i+2}^{\frac{1}{4}} \tilde{\tau}_i^{\frac{r}{2}} \tilde{\tau}_{i+1}^{\frac{r+s}{2}} \tilde{\tau}_{i+2}^{\frac{s}{2}}$$

mit 3.1.4 gegen Null und $O_P \left(\max_i (\gamma_i^2 \delta_{n,i})^{\frac{1+1 \wedge r \wedge s}{2}} \right) \rightarrow 0$. Damit schließen wir, dass für die bedingte Varianz

$$\text{Var} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \tilde{\tau}_i^{\frac{r}{2}} \tilde{\tau}_{i+1}^{\frac{s}{2}} h_{r,s} \left(u_i, u_{i+1}; \gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}}, \gamma_{i+1} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \right) \middle| \mathcal{F}_t \right) \xrightarrow{P} 0 \quad (3.20)$$

gilt. Somit haben wir die L^2 -Konvergenz von

$\sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \tilde{\tau}_i^{\frac{r}{2}} \tilde{\tau}_{i+1}^{\frac{s}{2}} h_{r,s} \left(u_i, u_{i+1}; \gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}}, \gamma_{i+1} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \right)$ erhalten. Damit konvergiert dieser Term auch in Wahrscheinlichkeit gegen Null und die Aussage des Satzes ist bewiesen. \square

Nachdem wir den Satz 3.1.6 mit Hilfe der Lemmata 3.1.3, 3.1.4 und 3.1.5 bewiesen haben, führen wir auf den folgenden Seiten die Beweise der Lemmata. Dazu sei daran erinnert, dass $\tau(t)$ ein càdlàg Prozess mit endlicher Variation in einem endlichen Zeitintervall ist, also ein Semimartingal ([21], S.45 Prop. 4.28). Außerdem wissen wir, dass eine konvexe Funktion eines Semimartingales wieder ein Semimartingal ist ([23], S.218).

Beweis Lemma 3.1.3:

Können wir zeigen, dass mit $p = 2r + 2s$

$$\left| \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}-r} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}-s} \tau_i^r \tau_{i+1}^s - \sum_{i=1}^n \delta_{n,i}^{1-\frac{p}{2}} \tau_i^{\frac{p}{2}} \right| \xrightarrow{P} 0$$

gilt, haben wir die Aussage bewiesen. Fassen wir die beiden Summen im Betrag zusammen, erhalten wir:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}-r} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}-s} \tau_i^r \tau_{i+1}^s - \sum_{i=1}^n \delta_{n,i}^{1-\frac{p}{2}} \tau_i^{\frac{p}{2}} \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}-r} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}-s} \tau_i^r \tau_{i+1}^s - \delta_{n,i}^{1-(r+s)} \tau_i^{r+s} - \delta_{n,n}^{1-\frac{p}{2}} \tau_n^{\frac{p}{2}} \right|. \end{aligned}$$

Es genügt zu zeigen, dass folgende Summe gegen Null konvergiert:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \tilde{\tau}_i^r \tilde{\tau}_{i+1}^s - \delta_{n,i} \tilde{\tau}_i^{r+s} \right| = \left| \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \tilde{\tau}_i^r \left(\tilde{\tau}_{i+1}^s - \frac{\delta_{n,i}^{\frac{1}{2}}}{\delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}}} \tilde{\tau}_i^s \right) \right| \\ & \leq \left(\sum_{i=1}^{n-1} \left(\delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \tilde{\tau}_i^r \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \left(\tilde{\tau}_{i+1}^s - \frac{\delta_{n,i}^{\frac{1}{2}}}{\delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}}} \tilde{\tau}_i^s \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Betrachten wir den ersten Faktor, so konvergiert dieser für $n \rightarrow \infty$ gegen Null und der zweite konvergiert gegen eine Konstante. Es gilt also:

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1} \left(\delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \tilde{\tau}_i^r \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\max_i \delta_{n,i}} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i} \tilde{\tau}_i^{2r} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dabei geht $\sqrt{\max_i \delta_{n,i}}$ gegen Null und $(\sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i} \tilde{\tau}_i^{2r})^{\frac{1}{2}} \rightarrow (\int_0^t \tau^{2r}(u) du)^{\frac{1}{2}}$, also strebt der gesamte Ausdruck gegen Null für $n \rightarrow \infty$. Für den zweiten Faktor erhalten wir:

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=1}^{n-1} \left(\tilde{\tau}_{i+1}^s - \frac{\delta_{n,i}^{\frac{1}{2}}}{\delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}}} \tilde{\tau}_i^s \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \left(\tilde{\tau}_{i+1}^s - \tilde{\tau}_i^s + \tilde{\tau}_i^s - \frac{\delta_{n,i}^{\frac{1}{2}}}{\delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}}} \tilde{\tau}_i^s \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \left(\sum_{i=1}^{n-1} (\tilde{\tau}_{i+1}^s - \tilde{\tau}_i^s)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n-1} \left(\tilde{\tau}_i^s - \frac{\delta_{n,i}^{\frac{1}{2}}}{\delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}}} \tilde{\tau}_i^s \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Dabei ist bekannt, dass der erste Summand konvergiert (Endlichkeit quad. Variation von Semimartingalen), so dass wir im folgenden den zweiten Summanden betrachten.

$$\begin{aligned}
 \left(\sum_{i=1}^{n-1} \left(\tilde{\tau}_i^s - \frac{\delta_{n,i}^{\frac{1}{2}}}{\delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}}} \tilde{\tau}_i^s \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\sum_{i=1}^{n-1} \tilde{\tau}_i^{2s} \left(1 - \frac{\delta_{n,i}^{\frac{1}{2}}}{\delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq \left(\sup_{0 < u \leq t} \tau^{2s}(u) \sum_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{\delta_{n,i}^{\frac{1}{2}}}{\delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \sup_{0 < u \leq t} \tau^s(u) \left(\sum_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{\delta_{n,i}^{\frac{1}{2}}}{\delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

Die Summe konvergiert unter Verwendung der gleichen Argumentation wie im Beweis von Satz 3.1.2. Wir können also direkt die Behauptung dieses Lemmas schlussfolgern. \square

Beweis Lemma 3.1.4:

Es genügt zu zeigen, dass der folgende Ausdruck für $n \rightarrow \infty$ gegen Null geht.

$$\begin{aligned}
 &\left| \sum_{i=1}^{n-2} \delta_{n,i}^{\frac{1}{4}-\frac{r}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}-\frac{r+s}{2}} \delta_{n,i+2}^{\frac{1}{4}-\frac{s}{2}} \tilde{\tau}_i^{\frac{r}{2}} \tilde{\tau}_{i+1}^{\frac{r+s}{2}} \tau_{i+2}^{\frac{s}{2}} - \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}-r} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}-s} \tau_i^r \tau_{i+1}^s \right| \\
 &\leq \left| \sum_{i=1}^{n-2} \delta_{n,i}^{\frac{1}{4}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \delta_{n,i+2}^{\frac{1}{4}} \tilde{\tau}_i^{\frac{r}{2}} \tilde{\tau}_{i+1}^{\frac{s}{2}} \left(\tilde{\tau}_{i+1}^{\frac{r}{2}} \tilde{\tau}_{i+2}^{\frac{s}{2}} - \left(\frac{\delta_{n,i}}{\delta_{n,i+2}} \right)^{\frac{1}{4}} \tilde{\tau}_i^{\frac{r}{2}} \tilde{\tau}_{i+1}^{\frac{s}{2}} \right) \right| \\
 &\leq \left| \left(\sqrt{\max_i \delta_{n,i}} \sum_{i=1}^{n-2} \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \tilde{\tau}_i^r \tilde{\tau}_{i+1}^s \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n-2} \left(\tilde{\tau}_{i+1}^{\frac{r}{2}} \tilde{\tau}_{i+2}^{\frac{s}{2}} - \left(\frac{\delta_{n,i}}{\delta_{n,i+2}} \right)^{\frac{1}{4}} \tilde{\tau}_i^{\frac{r}{2}} \tilde{\tau}_{i+1}^{\frac{s}{2}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right|
 \end{aligned}$$

Der erste Faktor strebt mit Lemma 3.1.3 und $\max \delta_{n,i} \rightarrow 0$ gegen Null für $n \rightarrow \infty$. Für den zweiten Faktor ergibt sich folgendes:

$$\begin{aligned}
 &\left(\sum_{i=1}^{n-2} \left(\tilde{\tau}_{i+1}^{\frac{r}{2}} \tilde{\tau}_{i+2}^{\frac{s}{2}} - \left(\frac{\delta_{n,i}}{\delta_{n,i+2}} \right)^{\frac{1}{4}} \tilde{\tau}_i^{\frac{r}{2}} \tilde{\tau}_{i+1}^{\frac{s}{2}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n-2} \left(\tilde{\tau}_{i+1}^{\frac{r}{2}} \tilde{\tau}_{i+2}^{\frac{s}{2}} - \tilde{\tau}_i^{\frac{r}{2}} \tilde{\tau}_{i+1}^{\frac{s}{2}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{(a)} + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n-2} \left(\tilde{\tau}_i^{\frac{r}{2}} \tilde{\tau}_{i+1}^{\frac{s}{2}} - \left(\frac{\delta_{n,i}}{\delta_{n,i+2}} \right)^{\frac{1}{4}} \tilde{\tau}_i^{\frac{r}{2}} \tilde{\tau}_{i+1}^{\frac{s}{2}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{(b)}.
 \end{aligned}$$

Betrachten wir beide Summanden getrennt. Für (a) können wir folgendes zeigen:

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{i=1}^{n-2} \left(\tilde{\tau}_{i+1}^{\frac{r}{2}} \tilde{\tau}_{i+2}^{\frac{s}{2}} - \tilde{\tau}_i^{\frac{r}{2}} \tilde{\tau}_{i+1}^{\frac{s}{2}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n-2} (\tilde{\tau}_{i+1}^r - \tilde{\tau}_i^r) (\tilde{\tau}_{i+2}^s - \tilde{\tau}_{i+1}^s) + \left(\tilde{\tau}_i^{\frac{r}{2}} \tilde{\tau}_{i+2}^{\frac{s}{2}} - \tilde{\tau}_{i+1}^{\frac{r}{2}} \tilde{\tau}_{i+1}^{\frac{s}{2}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n-2} (\tilde{\tau}_{i+1}^r - \tilde{\tau}_i^r)^2 \right)^{\frac{1}{4}}}_{(*)} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n-2} (\tilde{\tau}_{i+2}^s - \tilde{\tau}_{i+1}^s)^2 \right)^{\frac{1}{4}}}_{(**)} \\
&+ \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n-2} \left(\tilde{\tau}_i^{\frac{r}{2}} \tilde{\tau}_{i+2}^{\frac{s}{2}} - \tilde{\tau}_{i+1}^{\frac{r}{2}} \tilde{\tau}_{i+2}^{\frac{s}{2}} + \tilde{\tau}_{i+1}^{\frac{r}{2}} \tilde{\tau}_{i+2}^{\frac{s}{2}} - \tilde{\tau}_{i+1}^{\frac{r}{2}} \tilde{\tau}_{i+1}^{\frac{s}{2}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{(***)}.
\end{aligned}$$

Hier sind (*) und (**) quadratische Variationen eines Semimartingales und somit endlich. Für (***) wenden wir zunächst die Minkowski Ungleichung an und argumentieren wieder mit der Endlichkeit der quadratischen Variation.

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{i=1}^{n-2} \left(\tilde{\tau}_i^{\frac{r}{2}} \tilde{\tau}_{i+2}^{\frac{s}{2}} - \tilde{\tau}_{i+1}^{\frac{r}{2}} \tilde{\tau}_{i+2}^{\frac{s}{2}} + \tilde{\tau}_{i+1}^{\frac{r}{2}} \tilde{\tau}_{i+2}^{\frac{s}{2}} - \tilde{\tau}_{i+1}^{\frac{r}{2}} \tilde{\tau}_{i+1}^{\frac{s}{2}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\sup_i \tilde{\tau}_i^s \sum_{i=1}^{n-2} \left(\tilde{\tau}_i^{\frac{r}{2}} - \tilde{\tau}_{i+1}^{\frac{r}{2}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sup_i \tilde{\tau}_i^r \sum_{i=1}^{n-2} \left(\tilde{\tau}_{i+2}^{\frac{s}{2}} - \tilde{\tau}_{i+1}^{\frac{s}{2}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Für (b) ergibt sich:

$$\left(\sum_{i=1}^{n-2} \left(\tilde{\tau}_i^{\frac{r}{2}} \tilde{\tau}_{i+1}^{\frac{s}{2}} - \left(\frac{\delta_{n,i}}{\delta_{n,i+2}} \right)^{\frac{1}{4}} \tilde{\tau}_i^{\frac{r}{2}} \tilde{\tau}_{i+1}^{\frac{s}{2}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sup_i \tilde{\tau}_i^{r+s} \sum_{i=1}^{n-2} \left(1 - \left(\frac{\delta_{n,i}}{\delta_{n,i+2}} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Es bleibt zu zeigen, dass $\left(\sum_{i=1}^{n-2} \left(1 - \left(\frac{\delta_{n,i}}{\delta_{n,i+2}} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ konvergiert.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-2} \left(1 - \left(\frac{\delta_{n,i}}{\delta_{n,i+2}} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 &= \sum_{i=1}^{n-2} \left(1 - \left(\frac{\delta_{n,i}}{\delta_{n,i+1}} \right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{\delta_{n,i+1}}{\delta_{n,i+2}} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n-2} (c_{n,i} + c_{n,i+1} + c_{n,i} c_{n,i+1})^2
\end{aligned}$$

Diese Summe konvergiert mit der Bedingung (2.2). Damit haben wir einen Faktor der gegen Null konvergiert, während alle anderen gegen eine Konstante streben und das Lemma ist bewiesen. \square

Beweis Lemma 3.1.5:

Mit der Unabhängigkeit der u_i von \mathcal{F}_t und der Messbarkeit der γ_i bzgl. \mathcal{F}_t ergibt sich:

$$E \left(h_r \left(u_i; \gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \right) \middle| \mathcal{F}_t \right) = E_{\mathcal{F}_t} \left(h_r \left(u_i; \gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \right) \right).$$

Zunächst zeigen wir folgendes, wobei φ die Dichtefunktion der Standardnormalverteilung ist:

$$\begin{aligned} E_{\mathcal{F}_t} \left(\left| \gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} + u_i \right|^r \right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} + x \right|^r \varphi(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^r \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x - \gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}})^2}{2}} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^r \varphi(x) e^{\gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} x} dx e^{-\frac{\gamma_i^2 \delta_{n,i}}{2}}. \end{aligned}$$

Entwickeln wir $e^{-\frac{\gamma_i^2 \delta_{n,i}}{2}}$ nach Taylor ergibt sich dafür:

$$e^{-\frac{\gamma_i^2 \delta_{n,i}}{2}} = 1 - O_P(\gamma_i^2 \delta_{n,i}).$$

Somit erhalten wir:

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^r \varphi(x) e^{\gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} x} dx e^{-\frac{\gamma_i^2 \delta_{n,i}}{2}} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^r \varphi(x) e^{\gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} x} dx - O_P(\gamma_i^2 \delta_{n,i}) \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^r \varphi(x) e^{\gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} x} dx. \end{aligned}$$

Es ist bekannt, dass $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^r \varphi(x) e^{\gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} x} dx < \infty$ ist, da $E_{\mathcal{F}_t}(|\gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} + u_i|^r) < \infty$ gilt.

Also ist $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^r \varphi(x) e^{\gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} x} dx = O_P(1)$ und wir können schreiben:

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^r \varphi(x) e^{\gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} x} dx - O_P(\gamma_i^2 \delta_{n,i}) \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^r \varphi(x) e^{\gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} x} dx \\ &= E|u_i|^r + \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^r \varphi(x) \left(e^{\gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} x} - 1 \right) dx + O_P(\gamma_i^2 \delta_{n,i}). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} E_{\mathcal{F}_t} \left(h_r \left(u_i; \gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \right) \right) &= \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} x|x|^r \varphi(x) \frac{e^{\gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} x} - 1}{\delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} x} dx + O_P(\gamma_i^2 \delta_{n,i}) \\ &= \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} x|x|^r \varphi(x) \frac{e^{\gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} x} - 1 - \gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} x}{\delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} x} dx + \gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} x|x|^r \varphi(x) dx + O_P(\gamma_i^2 \delta_{n,i}). \end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen gilt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x|x|^r \varphi(x) dx = 0.$$

Weiterhin wenden wir wieder die Taylorformel an und es ergibt sich:

$$\begin{aligned} &\delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} x|x|^r \varphi(x) \frac{e^{\gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} x} - 1 - \gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} x}{\delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} x} dx + O_P(\gamma_i^2 \delta_{n,i}) \\ &= \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} x|x|^r \varphi(x) \frac{1 + \gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} x + O_P(\delta_{n,i} \gamma_i^2 x^2) - 1 - \gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} x}{\delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} x} dx + O_P(\gamma_i^2 \delta_{n,i}) \\ &= O_P(\gamma_i^2 \delta_{n,i}) \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^r \varphi(x) x^2 dx + O_P(\gamma_i^2 \delta_{n,i}). \end{aligned}$$

Wir wissen, dass $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^r \varphi(x) x^2 dx = O_P(1)$ gilt. Damit hätten wir die erste Behauptung unseres Lemmas gezeigt:

$$E_{\mathcal{F}_t} \left(h_r \left(u_i; \gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \right) \right) = O_P(\gamma_i^2 \delta_{n,i}). \quad (3.21)$$

Zeigen wir nun die zweite Aussage. Wir können folgende Umformung durchführen. Dabei nutzen wir wieder die Eigenschaften Unabhängigkeit und Messbarkeit.

$$\begin{aligned} E \left(\left(h_r \left(u_i; \gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \right) \right)^2 \middle| \mathcal{F}_t \right) &= E_{\mathcal{F}_t} \left(\left(h_r \left(u_i; \gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \right) \right)^2 \right) \\ &= E_{\mathcal{F}_t} \left(h_{2r} \left(u_i; \gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \right) \right) + 2E_{\mathcal{F}_t} \left(|u_i|^r \left(|u_i|^r - \left| \gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} + u_i \right|^r \right) \right) \\ &= O_P(\gamma_i^2 \delta_{n,i}) + 2E_{\mathcal{F}_t} \left(|u_i|^r \left(|u_i|^r - \left| \gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} + u_i \right|^r \right) \right) \end{aligned}$$

Betrachten wir nun den zweiten Summanden.

$$\begin{aligned} E_{\mathcal{F}_t} \left(|u_i|^r \left| \gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} + u_i \right|^r \right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^r \left| \gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} + x \right|^r \varphi(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left| x^2 - \gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} x \right|^r \varphi(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left| x^2 - \frac{1}{4} \gamma_i^2 \delta_{n,i} \right|^r \varphi(x) e^{\frac{1}{2} \gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} x} dx e^{-\frac{1}{8} \gamma_i^2 \delta_{n,i}} \end{aligned}$$

Wir wenden wiederum die Taylorformel an ($e^{-\frac{1}{8}\gamma_i^2\delta_{n,i}} = 1 + O_P(-\frac{1}{8}\gamma_i^2\delta_{n,i})$) und wissen von der Endlichkeit des Integrals ($\int_{-\infty}^{+\infty} |x^2 - \frac{1}{4}\gamma_i^2\delta_{n,i}|^r \varphi(x) e^{\frac{1}{2}\gamma_i\delta_{n,i}^{\frac{1}{2}}x} dx = O_P(1)$, weil $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^r \varphi(x) e^{\gamma_i\delta_{n,i}^{\frac{1}{2}}x} dx < \infty$). Damit ergeben sich folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| x^2 - \frac{1}{4}\gamma_i^2\delta_{n,i} \right|^r \varphi(x) e^{\frac{1}{2}\gamma_i\delta_{n,i}^{\frac{1}{2}}x} dx e^{-\frac{1}{8}\gamma_i^2\delta_{n,i}} &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^{2r} \varphi(x) e^{\frac{1}{2}\gamma_i\delta_{n,i}^{\frac{1}{2}}x} dx \\ &+ O_P(\gamma_i\delta_{n,i}) + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\left| x^2 - \frac{1}{4}\gamma_i^2\delta_{n,i} \right|^r - |x^2|^r \right) \varphi(x) e^{\frac{1}{2}\gamma_i\delta_{n,i}^{\frac{1}{2}}x} dx. \end{aligned}$$

Für den letzten Summanden können wir folgende Umformungen machen:

$$\begin{aligned} &\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\left| x^2 - \frac{1}{4}\gamma_i^2\delta_{n,i} \right|^r - |x^2|^r \right) \varphi(x) e^{\frac{1}{2}\gamma_i\delta_{n,i}^{\frac{1}{2}}x} dx \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \left| x^2 - \frac{1}{4}\gamma_i^2\delta_{n,i} \right|^r - |x^2|^r \right| \varphi(x) e^{\frac{1}{2}\gamma_i\delta_{n,i}^{\frac{1}{2}}x} dx. \end{aligned}$$

Nun wenden wir die folgende Ungleichung an. Für die nicht negativen Zahlen a und b gilt:

$$|b^r - |b - a|^r| \leq a^r, \quad \forall a \leq b, r > 0 \quad (3.22)$$

weiterhin gilt:

$$|b^r - |b - a|^r| \leq \begin{cases} ra(b-a)^{r-1} & , \quad \forall b > a, 0 < r < 1 \\ rab^{r-1} & , \quad \forall b > a, r \geq 1. \end{cases} \quad (3.23)$$

Mit der Hilfe dieser Ungleichungen können wir schreiben:

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \left| x^2 - \frac{1}{4}\gamma_i^2\delta_{n,i} \right|^r - |x^2|^r \right| \varphi(x) e^{\frac{1}{2}\gamma_i\delta_{n,i}^{\frac{1}{2}}x} dx \\ &\leq I + \left(\frac{1}{4}\gamma_i^2\delta_{n,i} \right)^r \int_{|x| \leq \frac{\gamma_i\delta_{n,i}^{\frac{1}{2}}}{2}} \varphi(x) e^{\frac{\gamma_i\delta_{n,i}^{\frac{1}{2}}x}{2}} dx \\ &= I + O_P(\gamma_i^{2r}\delta_{n,i}^r) O_P\left(\gamma_i\delta_{n,i}^{\frac{1}{2}}\right) = I + O_P\left(\gamma_i^{2r+1}\delta_{n,i}^{\frac{1}{2}}\right). \end{aligned}$$

Dabei ist:

$$I = \int_{|x| > \frac{\gamma_i\delta_{n,i}^{\frac{1}{2}}}{2}} \left| \left| x^2 - \frac{1}{4}\gamma_i\delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \right|^r - |x^2|^r \right| \varphi(x) e^{\frac{\gamma_i\delta_{n,i}^{\frac{1}{2}}x}{2}} dx.$$

Für die Exponenten $r \geq 1$ gilt:

$$I \leq \frac{r}{4}\gamma_i^2\delta_{n,i} \int_{|x| > \frac{\gamma_i\delta_{n,i}^{\frac{1}{2}}}{2}} |x^2|^{r-1} \varphi(x) e^{\frac{\gamma_i\delta_{n,i}^{\frac{1}{2}}x}{2}} dx = O_P(\gamma_i^2\delta_{n,i}).$$

Für den Fall, dass $0 < r < 1$ vorliegt, können wir schreiben:

$$\begin{aligned}
 I &\leq \frac{r}{4} \gamma_i^2 \delta_{n,i} \int_{|x| > \frac{\gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}}}{2}} \left(x^2 - \frac{1}{4} \gamma_i^2 \delta_{n,i} \right)^{r-1} \varphi(x) e^{\frac{\gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} x}{2}} dx \\
 &\leq \frac{r}{4} \gamma_i^2 \delta_{n,i} \left(\gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \right)^{-(1-r)} \int_{|x| > \frac{\gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}}}{2}} \left(x - \frac{1}{2} \gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \right)^{-(1-r)} \varphi(x) e^{\frac{\gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} x}{2}} dx \\
 &= O_P \left(\gamma_i^{1+r} \delta_{n,i}^{\frac{1+r}{2}} \right).
 \end{aligned}$$

Zusammenfassen stellen wir fest, dass folgendes gilt:

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\left| x^2 - \frac{1}{4} \gamma_i^2 \delta_{n,i} \right|^r - |x^2|^r \right) \varphi(x) e^{\frac{1}{2} \gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} x} dx \right| = O_P \left(\gamma_i^{1+1\wedge r} \delta_{n,i}^{\frac{1+1\wedge r}{2}} \right).$$

Also gilt:

$$\begin{aligned}
 &E_{\mathcal{F}_t} \left(\left(h_r \left(u_i; \gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \right) \right)^2 \right) \\
 &= E_{\mathcal{F}_t} \left(h_{2r} \left(u_i, \gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \right) \right) + 2 \left\{ E|u_i|^{2r} - E_{\mathcal{F}_t} \left(|u_i|^r \left| \gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} + u_i \right|^r \right) \right\} \\
 &= 2 \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^{2r} \varphi(x) dx - \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^{2r} \varphi(x) e^{\frac{\gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} x}{2}} dx + O_P(\gamma_i^2 \delta_{n,i}) + O_P \left(\gamma_i^{1+1\wedge r} \delta_{n,i}^{\frac{1+1\wedge r}{2}} \right) \right\} \\
 &+ O_P(\gamma_i^2 \delta_{n,i}) \\
 &= -2 \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^{2r} \varphi(x) \left(e^{\frac{\gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} x}{2}} - 1 \right) dx \right\} + O_P \left(\gamma_i^{1+1\wedge r} \delta_{n,i}^{\frac{1+1\wedge r}{2}} \right) + O_P(\gamma_i^2 \delta_{n,i}) \\
 &= -2 \left\{ \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} x |x|^{2r} \varphi(x) \frac{e^{\frac{\gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} x}{2}} - 1}{\delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} x} dx \right\} + O_P \left(\gamma_i^{1+1\wedge r} \delta_{n,i}^{\frac{1+1\wedge r}{2}} \right) + O_P(\gamma_i^2 \delta_{n,i}) \\
 &= -2 \left\{ \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} x |x|^{2r} \varphi(x) \frac{e^{\frac{\gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} x}{2}} - 1 - \gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} x}{\delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} x} dx \right\} + O_P \left(\gamma_i^{1+1\wedge r} \delta_{n,i}^{\frac{1+1\wedge r}{2}} \right) + O_P(\gamma_i^2 \delta_{n,i}) \\
 &= O_P(\gamma_i^2 \delta_{n,i}) + O_P \left(\gamma_i^{1+1\wedge r} \delta_{n,i}^{\frac{1+1\wedge r}{2}} \right) + O_P(\gamma_i^2 \delta_{n,i}) = O_P \left(\gamma_i^{1+1\wedge r} \delta_{n,i}^{\frac{1+1\wedge r}{2}} \right).
 \end{aligned}$$

Also gilt:

$$E|u_k|^{2r} - E_{\mathcal{F}_t} \left(|u_k|^r \left| \gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} + u_i \right|^r \right) = O_P \left(\gamma_i^{1+1\wedge r} \delta_{n,i}^{\frac{1+1\wedge r}{2}} \right). \quad (3.24)$$

Wir können für die Varianz folgern:

$$\begin{aligned} \text{Var} \left(h_r \left(u_i; \gamma_{n,i} \delta_i^{\frac{1}{2}} \right) \middle| \mathcal{F}_t \right) &= E_{\mathcal{F}_t} \left(\left(h_r \left(u_i; \gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \right) \right)^2 \right) - \left(E_{\mathcal{F}_t} \left(h_r \left(u_i; \gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \right) \right) \right)^2 \\ &= O_P \left(\gamma_i^{1+1 \wedge r} \delta_{n,i}^{\frac{1+1 \wedge r}{2}} \right). \end{aligned}$$

□

Um nun die Beziehung (3.11) abschließend zu zeigen, geben wir den Erwartungswert und die Varianz an:

$$\begin{aligned} E \left(\sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i} \tilde{\tau}_i^r \left[h_{2r} \left(u_i; \gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \right) \right] \middle| \mathcal{F}_t \right) &= \sum_{i=1}^{n-1} E \left(\delta_{n,i} \tilde{\tau}_i^r \left[h_{2r} \left(u_i; \gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \right) \right] \middle| \mathcal{F}_t \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i} \tilde{\tau}_i^r E_{\mathcal{F}_t} \left(h_{2r} \left(u_i; \gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \right) \right) = \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i} \tilde{\tau}_i^r O_P(\gamma_i^2 \delta_{n,i}) \\ &= O_P(\max_i(\gamma_i^2 \delta_{n,i})) \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i} \tilde{\tau}_i^r \xrightarrow{P} 0. \end{aligned}$$

Für die Varianz gilt:

$$\text{Var} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i} \tilde{\tau}_i^r \left[h_{2r} \left(u_i; \gamma_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \right) \right] \middle| \mathcal{F}_t \right) = O_P \left(\max_i(\gamma_i^2 \delta_{n,i})^{\frac{1+1 \wedge 2r}{2}} \right) \xrightarrow{P} 0.$$

In diesem Abschnitt behandelten wir stetige Prozesse, die einen Mittelwertprozess besitzen, der nicht notwendigerweise ein Semimartingal sein muß.

In der Praxis sind am Wertpapiermarkt und in den Verläufen der Finanzinstrumente jedoch auch eindeutig Sprünge zu erkennen. Daher beschäftigt sich ein Teilgebiet der Literatur mit Sprungprozessen. Im folgenden Abschnitt werden wir den stetigen Prozess durch die Addition eines Sprungprozesses erweitern. Dabei sei der Sprungprozess ein Semimartingal. Er kann aber unter gewissen Bedingungen unendlich viele Sprünge aufweisen.

3.1.3 Prozesse mit Mittelwertprozess und Sprüngen

Im folgenden Abschnitt verallgemeinern wir die rein stetigen Prozesse, in dem wir unabhängige Sprungprozesse addieren. Diese erfüllen die Voraussetzungen, die wir im Kapitel 2.2 gelegt haben. Insbesondere sind die Arbeiten von Hudson et al. (1976) und in der jüngeren Literatur die Arbeiten von Woerner (2003), (2003a), (2003b) und (2006) dabei richtungsweisend.

Zu Beginn stellen wir einige technische Lemmata bereit, die wir benötigen, um die Hauptaussage dieses Kapitels zu zeigen. Deren Beweise findet man am Ende des Kapitels.

Lemma 3.1.7 *Es seien die Bedingungen an den Prozess $(V_t)_{t \geq 0}$ aus dem Kapitel 2.2 erfüllt. Dann gilt mit den notwendigen Bedingungen an die Zeitstruktur:*

1. $p = 2$:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{p}{2}} \left(\delta_{n,i}^{-\frac{1}{2}} |\Delta V_i| \right)^{rp} \xrightarrow{P} \mu_{rp} \int_0^t \tau^{\frac{rp}{2}}(u) du$$

2. $p > 2$:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{p}{2}} \left(\delta_{n,i}^{-\frac{1}{2}} |\Delta V_i| \right)^{rp} \xrightarrow{P} 0$$

Die weiteren Lemmata beschäftigen sich unter anderem mit Sprungprozessen. Mit $(Z_t^c)_{t \geq 0}$ bezeichnen wir den stetigen Anteil des Prozesses $(Z_t)_{t \geq 0}$.

Lemma 3.1.8 *Sei $(Z_t)_{t \geq 0}$ ein Semimartingal mit Blumenthal-Gettoor Index β und genügt folgenden Bedingungen:*

1.

$$V_2(Z_t^c) = 0, \quad \text{für } 1 \leq \beta < 2$$

2.

$$V_2(Z_t^c) = 0, \quad B(h) + (x - h) * \nu = 0, \quad \text{für } \beta < 1.$$

Darüberhinaus seien die Bedingungen aus Kapitel 2.2 für $(Z_t)_{t \geq 0}$ erfüllt. Dann gilt für $\frac{q(1+s)}{2} > \beta$ mit $q = \frac{p}{p-1}$ und $p > 2$:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} p - \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i+1}^{\frac{q}{2}} \left(\delta_{n,i+1}^{-\frac{1}{2}} |\Delta Z_{i+1}| \mathbb{1}_{i+1}(\varepsilon) \right)^{qs} \right)^{\frac{1}{q}}}_{A_n} = 0. \quad (3.25)$$

Lemma 3.1.9 *Es seien die Bedingungen an die Prozesse $(V_t)_{t \geq 0}$ und $(Z_t)_{t \geq 0}$ aus Kapitel 2.2 erfüllt. Dann gilt für $s < 1$ und den notwendigen Bedingungen an die Zeitstruktur:*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} p - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \left(\delta_{n,i}^{-\frac{1}{2}} |\Delta V_i| \right)^r \left(\delta_{n,i+1}^{-\frac{1}{2}} |\Delta Z_{i+1}| \right)^s (1 - \mathbb{1}_{i+1}(\varepsilon)) = 0.$$

Lemma 3.1.10 *Es seien die Bedingungen an $(Z_t)_{t \geq 0}$ aus Kapitel 2.2 erfüllt. Dann gilt mit $\max(r, s) < 1$:*

$$p - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \left(\delta_{n,i}^{-\frac{1}{2}} |\Delta Z_i| \right)^r \left(\delta_{n,i+1}^{-\frac{1}{2}} |\Delta Z_{i+1}| \right)^s = 0.$$

Satz 3.1.11 *Es seien die Voraussetzungen an den Prozess*

$$X_t = V_t + Z_t$$

für $t \geq 0$ aus dem Kapitel 2.2 erfüllt. Dann gilt für $\max_i \delta_{n,i} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ mit (2.2), $\frac{1}{2}$ -balanciertem Δ_n und $\max(r, s) < 1$:

$$\mu_r^{-1} \mu_s^{-1} \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1-r}{2}} |\Delta V_i + \Delta Z_i|^r \delta_{n,i+1}^{\frac{1-s}{2}} |\Delta V_{i+1} + \Delta Z_{i+1}|^s \xrightarrow{P} \int_0^t \tau^{\frac{r+s}{2}}(u) du. \quad (3.26)$$

Beweis:

Zunächst geben wir alle notwendigen Ungleichungen an.

Es gilt folgende Beziehung für $0 < r, s \leq 1$ unter Verwendung der Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \left(\delta_{n,i}^{-\frac{1}{2}} |\Delta V_i + \Delta Z_i| \right)^r \left(\delta_{n,i+1}^{-\frac{1}{2}} |\Delta V_{i+1} + \Delta Z_{i+1}| \right)^s \\ & - \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \left(\delta_{n,i}^{-\frac{1}{2}} |\Delta V_i| \right)^r \left(\delta_{n,i+1}^{-\frac{1}{2}} |\Delta V_{i+1}| \right)^s \\ & \leq \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \left(\delta_{n,i}^{-\frac{1}{2}} |\Delta V_i| \right)^r \left(\delta_{n,i+1}^{-\frac{1}{2}} |\Delta Z_{i+1}| \right)^s \\ & + \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \left(\delta_{n,i}^{-\frac{1}{2}} |\Delta Z_i| \right)^r \left(\delta_{n,i+1}^{-\frac{1}{2}} |\Delta V_{i+1}| \right)^s \\ & + \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \left(\delta_{n,i}^{-\frac{1}{2}} |\Delta Z_i| \right)^r \left(\delta_{n,i+1}^{-\frac{1}{2}} |\Delta Z_{i+1}| \right)^s. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Weiterhin gilt unter Anwendung von $|a|^r|b|^r = |a + b - b|^r|b|^r \leq (|a + b|^r + |b|^r)|b|^r$:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \left(\delta_{n,i}^{-\frac{1}{2}} |\Delta V_i| \right)^r \left(\delta_{n,i+1}^{-\frac{1}{2}} |\Delta V_{i+1}| \right)^s \\
& - \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \left(\delta_{n,i}^{-\frac{1}{2}} |\Delta V_i + \Delta Z_i| \right)^r \left(\delta_{n,i+1}^{-\frac{1}{2}} |\Delta V_{i+1} + \Delta Z_{i+1}| \right)^s \\
& \leq \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \left(\delta_{n,i}^{-\frac{1}{2}} |\Delta V_i| \right)^r \left(\delta_{n,i+1}^{-\frac{1}{2}} |\Delta V_{i+1} + \Delta Z_{i+1}| \right)^s \\
& + \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \left(\delta_{n,i}^{-\frac{1}{2}} |\Delta V_i| \right)^r \left(\delta_{n,i+1}^{-\frac{1}{2}} |\Delta Z_{i+1}| \right)^s \\
& - \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \left(\delta_{n,i}^{-\frac{1}{2}} |\Delta V_i + \Delta Z_i| \right)^r \left(\delta_{n,i+1}^{-\frac{1}{2}} |\Delta V_{i+1} + \Delta Z_{i+1}| \right)^s \\
& \leq \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \left(\delta_{n,i}^{-\frac{1}{2}} |\Delta V_i| \right)^r \left(\delta_{n,i+1}^{-\frac{1}{2}} |\Delta Z_{i+1}| \right)^s \\
& + \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \left(\delta_{n,i}^{-\frac{1}{2}} |\Delta Z_i| \right)^r \left(\delta_{n,i+1}^{-\frac{1}{2}} |\Delta V_{i+1}| \right)^s \\
& + \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \left(\delta_{n,i}^{-\frac{1}{2}} |\Delta Z_i| \right)^r \left(\delta_{n,i+1}^{-\frac{1}{2}} |\Delta Z_{i+1}| \right)^s.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Mit (3.27) und (3.28) gilt:

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \left(\delta_{n,i}^{-\frac{1}{2}} |\Delta V_i + \Delta Z_i| \right)^r \left(\delta_{n,i+1}^{-\frac{1}{2}} |\Delta V_{i+1} + \Delta Z_{i+1}| \right)^s \right. \\
& \left. - \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \left(\delta_{n,i}^{-\frac{1}{2}} |\Delta V_i| \right)^r \left(\delta_{n,i+1}^{-\frac{1}{2}} |\Delta V_{i+1}| \right)^s \right| \\
& \leq \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \left(\delta_{n,i}^{-\frac{1}{2}} |\Delta V_i| \right)^r \left(\delta_{n,i+1}^{-\frac{1}{2}} |\Delta Z_{i+1}| \right)^s \\
& + \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \left(\delta_{n,i}^{-\frac{1}{2}} |\Delta Z_i| \right)^r \left(\delta_{n,i+1}^{-\frac{1}{2}} |\Delta V_{i+1}| \right)^s \\
& + \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \left(\delta_{n,i}^{-\frac{1}{2}} |\Delta Z_i| \right)^r \left(\delta_{n,i+1}^{-\frac{1}{2}} |\Delta Z_{i+1}| \right)^s.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Somit erhalten wir folgende Beziehung:

$$\begin{aligned}
& P \left(\left| \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \left(\delta_{n,i}^{-\frac{1}{2}} |\Delta V_i + \Delta Z_i| \right)^r \left(\delta_{n,i+1}^{-\frac{1}{2}} |\Delta V_{i+1} + \Delta Z_{i+1}| \right)^s - \mu_r \mu_s \int_0^t \tau^{\frac{r+s}{2}}(u) du \right| > \lambda \right) \\
& \leq P \left(\left| \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \left(\delta_{n,i}^{-\frac{1}{2}} |\Delta V_i + \Delta Z_i| \right)^r \left(\delta_{n,i+1}^{-\frac{1}{2}} |\Delta V_{i+1} + \Delta Z_{i+1}| \right)^s \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \left(\delta_{n,i}^{-\frac{1}{2}} |\Delta V_i| \right)^r \left(\delta_{n,i+1}^{-\frac{1}{2}} |\Delta V_{i+1}| \right)^s \right| > \frac{\lambda}{2} \right) \\
& + P \left(\left| \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \left(\delta_{n,i}^{-\frac{1}{2}} |\Delta V_i| \right)^r \left(\delta_{n,i+1}^{-\frac{1}{2}} |\Delta V_{i+1}| \right)^s - \mu_r \mu_s \int_0^t \tau^{\frac{r+s}{2}}(u) du \right| > \frac{\lambda}{2} \right). \tag{3.30}
\end{aligned}$$

Diese Ungleichung lässt sich weiter in folgende Elemente aufsplitten:

$$(3.30) \leq P \left(\left| \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \left(\delta_{n,i}^{-\frac{1}{2}} |\Delta V_i| \right)^r \left(\delta_{n,i+1}^{-\frac{1}{2}} |\Delta Z_{i+1}| \right)^s \right| > \frac{\lambda}{6} \right) \tag{3.31a}$$

$$+ P \left(\left| \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \left(\delta_{n,i}^{-\frac{1}{2}} |\Delta Z_i| \right)^r \left(\delta_{n,i+1}^{-\frac{1}{2}} |\Delta V_{i+1}| \right)^s \right| > \frac{\lambda}{6} \right) \tag{3.31b}$$

$$+ P \left(\left| \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \left(\delta_{n,i}^{-\frac{1}{2}} |\Delta Z_i| \right)^r \left(\delta_{n,i+1}^{-\frac{1}{2}} |\Delta Z_{i+1}| \right)^s \right| > \frac{\lambda}{6} \right) \tag{3.31c}$$

$$+ P \left(\left| \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \left(\delta_{n,i}^{-\frac{1}{2}} |\Delta V_i| \right)^r \left(\delta_{n,i+1}^{-\frac{1}{2}} |\Delta V_{i+1}| \right)^s - \mu_r \mu_s \int_0^t \tau^{\frac{r+s}{2}}(u) du \right| > \frac{\lambda}{2} \right). \tag{3.31d}$$

Die Wahrscheinlichkeit (3.31d) konvergiert nach Satz 3.1.6. Wir müssen weiter die Beziehungen (3.31a) und (3.31b) zeigen. Dabei weisen wir folgendes nach:

$$p - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \left(\delta_{n,i}^{-\frac{1}{2}} |\Delta V_i| \right)^r \left(\delta_{n,i+1}^{-\frac{1}{2}} |\Delta Z_{i+1}| \right)^s = 0 \tag{3.32}$$

und

$$p - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \left(\delta_{n,i}^{-\frac{1}{2}} |\Delta Z_i| \right)^r \left(\delta_{n,i+1}^{-\frac{1}{2}} |\Delta Z_{i+1}| \right)^s = 0. \tag{3.33}$$

Zunächst formen wir die Beziehung (3.32) um. Dabei nutzen wir die Hölder Ungleichung mit den Parametern $p \geq 2$ und $q \geq 1$, für die gilt: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

$$\begin{aligned}
& p - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \left(\delta_{n,i}^{-\frac{1}{2}} |\Delta V_i| \right)^r \left(\delta_{n,i+1}^{-\frac{1}{2}} |\Delta Z_{i+1}| \right)^s \\
& \leq \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} p - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{p}{2}} \left(\delta_{n,i}^{-\frac{1}{2}} |\Delta V_i| \right)^{rp} \right)^{\frac{1}{p}} \right) \times \\
& \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} p - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i+1}^{\frac{q}{2}} \left(\delta_{n,i+1}^{-\frac{1}{2}} |\Delta Z_{i+1}| I_{i+1}(\varepsilon) \right)^{sq} \right)^{\frac{1}{q}} \right) \\
& + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} p - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \left(\delta_{n,i}^{-\frac{1}{2}} |\Delta V_i| \right)^r \left(\delta_{n,i+1}^{-\frac{1}{2}} |\Delta Z_{i+1}| \right)^s (1 - I_{i+1}(\varepsilon))
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Der erste Summand besteht aus zwei Faktoren. Dabei konvergiert der erste mit Lemma 3.1.7 und der zweite mit Lemma 3.1.8. Die Konvergenz des zweiten Summanden ist in Lemma 3.1.9 gezeigt. Somit ist die Beziehung (3.32) gezeigt und wir weisen mit einer analogen Argumentationskette folgendes nach:

$$p - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \left(\delta_{n,i}^{-\frac{1}{2}} |\Delta Z_i| \right)^r \left(\delta_{n,i+1}^{-\frac{1}{2}} |\Delta V_{i+1}| \right)^s = 0. \tag{3.35}$$

Die Beziehung (3.33) ist mit Lemma 3.1.10 gezeigt. Mit der Beziehung (3.32) konvergiert (3.31a). Die Beziehung (3.35) liefert die Konvergenz von (3.31b) und mit (3.33) strebt (3.31c) gegen Null. Die Wahrscheinlichkeit (3.31d) haben wir früher schon gezeigt. Somit können wir folgern, dass (3.30) gegen Null konvergiert. \square

Nach dem wir den zentralen Satz dieses Kapitels bewiesen haben, folgen nun die Beweise der technischen Lemmata vom Anfang des Kapitels.

Beweis Lemma 3.1.7:

Für den Fall, dass $rp \leq 1$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{p}{2}} \left(\delta_{n,i}^{-\frac{1}{2}} |\Delta V_i| \right)^{rp} \leq \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{p}{2}} \left(\delta_{n,i}^{-\frac{1}{2}} |\Delta Y_i^{(1)} + \Delta H_i| \right)^{rp} + \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{p}{2}} \left(\delta_{n,i}^{-\frac{1}{2}} |\Delta Y_i^{(2)}| \right)^{rp}.$$

Gilt $rp > 1$, wenden wir die Minkowski Ungleichung an:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{p}{2}} \left(\delta_{n,i}^{-\frac{1}{2}} |V_i| \right)^{rp} \right)^{\frac{1}{rp}} & \leq \left(\sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{p}{2}} \left(\delta_{n,i}^{-\frac{1}{2}} |\Delta Y_i^{(1)} + \Delta H_i| \right)^{rp} \right)^{\frac{1}{rp}} \\
& + \left(\sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{p}{2}} \left(\delta_{n,i}^{-\frac{1}{2}} |\Delta Y_i^{(2)}| \right)^{rp} \right)^{\frac{1}{rp}}.
\end{aligned}$$

Betrachten wir zuerst jeweils den zweiten Summanden. Mit den Modellvoraussetzungen gilt für $p = 2$: $\sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{p}{2}} \left(\delta_{n,i}^{-\frac{1}{2}} \left| \Delta Y_i^{(2)} \right| \right)^{rp} \xrightarrow{P} 0$.

Für $p > 2$ gilt:

$$p - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{p}{2}} \left(\delta_{n,i}^{-\frac{1}{2}} \left| \Delta Y_i^{(2)} \right| \right)^{rp} \leq p - \lim_{n \rightarrow \infty} \max_i \delta_{n,i}^{\frac{p}{2}-1} \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i} \left(\delta_{n,i}^{-\frac{1}{2}} \left| \Delta Y_i^{(2)} \right| \right)^{rp} \xrightarrow{P} 0.$$

Betrachten wir nun jeweils die erste Summe. Dabei gilt im Falle $p = 2$ die Beziehung (3.11). Im Falle $p > 2$ formen wir folgendermaßen um und verwenden die Beziehung (3.11):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{p}{2}} \left(\delta_{n,i}^{-\frac{1}{2}} \left| \Delta Y_i^{(1)} + \Delta H_i \right| \right)^{rp} &= \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i} \delta_{n,i}^{\frac{p}{2}-1} \left(\delta_{n,i}^{-\frac{1}{2}} \left| \Delta Y_i^{(1)} + \Delta H_i \right| \right)^{rp} \\ &\leq \max_i \delta_{n,i}^{\frac{p}{2}-1} \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i} \left(\delta_{n,i}^{-\frac{1}{2}} \left| \Delta Y_i^{(1)} + \Delta H_i \right| \right)^{rp} \xrightarrow{P} 0. \end{aligned}$$

Somit ist dieses Lemma bewiesen. □

Beweis Lemma 3.1.8:

Wir gehen genauso vor wie in [33]. Für einen hinreichend kleinen maximalen Zeitabstand $\max_i \delta_{n,i}$ gilt: $\sup_{0 < u \leq t} |Z_u^\varepsilon| \leq 2\varepsilon$ und $\max_i \delta_{n,i} \leq 2\varepsilon$ (Heine-Borel-Argument). Fixieren wir $\frac{q(1+s)}{2} > \beta$ mit $\zeta \in (\beta, \frac{q(1+s)}{2})$, können wir folgendes mit $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$ schreiben:

$$\begin{aligned} p - \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i+1}^{\frac{q}{2}} \left(\delta_{n,i+1}^{-\frac{1}{2}} \left| \Delta Z_{i+1} \right| \mathbb{1}_{i+1}(\varepsilon) \right)^{qs} \\ \leq p - \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\max_i \delta_{n,i}^{\frac{q}{2} - \frac{qs}{2}} \right) \sum_{i=1}^{n-1} \left(\left| \Delta Z_{i+1} \right| \mathbb{1}_{i+1}(\varepsilon) \right)^{qs} \\ \leq p - \limsup_{n \rightarrow \infty} (2\varepsilon)^{\frac{q}{2} - \frac{qs}{2} + qs - \zeta} \sum_{i=1}^{n-1} \left| \Delta Z_{i+1}^\varepsilon \right|^\zeta. \end{aligned}$$

Es reicht aus folgenden Ausdruck mit $\frac{\eta}{4} > \varepsilon$ zu betrachten:

$$\begin{aligned} p - \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \left| \Delta Z_{i+1}^\varepsilon \right|^\zeta \\ = p - \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \left| \Delta Z_{i+1}^\eta \right| - \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ |J(Z_u)| : \varepsilon < |J(Z_u)| \leq \eta, t_i < u < t_{i+1} \right\}^\zeta \end{aligned}$$

Für den Fall $0 < \zeta \leq 1$ wenden wir die Dreiecksungleichung an.

$$\begin{aligned}
 & p - \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \left| \Delta Z_{i+1}^\eta - \sum \{ |J(Z_u)| : \varepsilon < |J(Z_u)| \leq \eta, t_i < u < t_{i+1} \} \right|^\zeta \\
 & \leq p - \limsup_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} |\Delta Z_{i+1}^\eta|^\zeta + \sum_{i=1}^{n-1} \left| \sum \{ |J(Z_u)| : \varepsilon < |J(Z_u)| \leq \eta, t_i < u < t_{i+1} \} \right|^\zeta \right] \\
 & = p - \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} |\Delta Z_{i+1}^\eta|^\zeta + \sum \{ |J(Z_u)|^\zeta : |J(Z_u)| \leq \eta, 0 < u < t \}
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

Im Fall $\zeta > 1$ wenden wir die Minkowski Ungleichung an.

$$\begin{aligned}
 & p - \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^{n-1} |\Delta Z_{i+1}^\eta - \sum \{ |J(Z_u)| : \varepsilon < |J(Z_u)| \leq \eta, t_i < u < t_{i+1} \} \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
 & \leq p - \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^{n-1} |\Delta Z_{i+1}^\eta|^\zeta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
 & \quad + p - \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \left| \sum \{ |J(Z_u)| : \varepsilon < |J(Z_u)| \leq \eta, t_i < u < t_{i+1} \} \right|^\zeta \right)^{\frac{1}{\zeta}}
 \end{aligned}$$

Wir lassen n gegen unendlich gehen, d.h. es existiert ein n_0 , so dass für alle $n > n_0$ in jedem Zeitintervall $[t_i, t_{i+1}]$ maximal ein Sprung existiert. Somit können wir für alle $n > n_0$ schreiben: $\sum \{ |J(Z_u)| : \varepsilon < |J(Z_u)| \leq \eta, t_i < u < t_{i+1} \} = \{ |J(Z_u)| : \varepsilon < |J(Z_u)| \leq \eta, t_i < u < t_{i+1} \}$. Weiterhin werden alle Sprünge über alle Zeitintervalle addiert:

$$p - \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^{n-1} |\Delta Z_{i+1}^\eta|^\zeta \right)^{\frac{1}{\zeta}} + \left(\left| \sum \{ |J(Z_u)|^\zeta : \varepsilon < |J(Z_u)| \leq \eta, 0 < u < t \} \right| \right)^{\frac{1}{\zeta}}. \tag{3.37}$$

Die Summen (3.36) und (3.37) sind endlich unter der Anwendung des Theorems 3.1 aus [33]. Fassen wir die Ergebnisse zusammen, erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 & p - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{q}{2}} \left(\delta_{n,i+1}^{-\frac{1}{2}} |\Delta Z_{i+1}| \mathbf{1}_{i+1}(\varepsilon) \right)^{qs} \\
 & \leq (2\varepsilon)^{\frac{q(1+s)}{2} - \zeta} p - \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} |\Delta Z_{i+1}^\varepsilon|^\zeta \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0
 \end{aligned}$$

□

Beweis Lemma 3.1.9:

Wir nutzen die Hölder Ungleichung mit den Parametern a, b wobei $a > 2$ ist.

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} p - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \left(\delta_{n,i}^{-\frac{1}{2}} |\Delta V_i| \right)^r \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \left(\delta_{n,i+1}^{-\frac{1}{2}} |\Delta Z_{i+1}| \right)^s (1 - \mathbf{1}_{i+1}(\varepsilon)) \\ & \leq \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} p - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{a}{2}} \left(\delta_{n,i}^{-\frac{1}{2}} |\Delta V_i| \right)^{ar} \right)^{\frac{1}{a}} \times \\ & \quad \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} p - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i+1}^{\frac{b}{2}} \left(\delta_{n,i+1}^{-\frac{1}{2}} |\Delta Z_{i+1}| (1 - \mathbf{1}_{i+1}(\varepsilon)) \right)^{bs} \right)^{\frac{1}{b}} \end{aligned}$$

Der erste Faktor konvergiert gegen Null, wie wir im Lemma 3.1.7 gezeigt haben.

Wir formen den verbleibenden zweiten Term mit den gleichen Argumenten wie in [33] folgendermaßen um:

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} p - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i+1}^{\frac{b}{2}} \left(\delta_{n,i+1}^{-\frac{1}{2}} |\Delta Z_{i+1}| (1 - \mathbf{1}_{i+1}(\varepsilon)) \right)^{bs} \\ & \leq p - \liminf_{n \rightarrow \infty} \max_i \delta_{n,i}^{\frac{b(1-s)}{2}} \sum_{i=1}^{n-1} |\Delta Z_{i+1}|^{bs}. \end{aligned}$$

Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned} p - \limsup_{n \rightarrow \infty} \max_i \delta_{n,i}^{\frac{b(1-s)}{2}} \sum_{i=1}^{n-1} |\Delta Z_{i+1}|^{bs} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} p - \limsup_{n \rightarrow \infty} \max_i \delta_{n,i}^{\frac{b(1-s)}{2}} \sum_{i=1}^{n-1} |\Delta Z_{i+1}|^{bs} \mathbf{1}_{i+1}(\varepsilon) \\ & \quad + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} p - \limsup_{n \rightarrow \infty} \max_i \delta_{n,i}^{\frac{b(1-s)}{2}} \sum_{i=1}^{n-1} |\Delta Z_{i+1}|^{bs} (1 - \mathbf{1}_{i+1}(\varepsilon)). \end{aligned}$$

Mit dem Lemma 3.1.8 fällt der erste Term weg. Schätzen wir den zweiten Term so wie in [33] ab, erhalten wir:

$$p - \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} |\Delta Z_{i+1}|^{bs} \leq p - \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} |\Delta Z_{i+1}|^{bs}.$$

Da \limsup und \liminf zusammen fallen, existiert dieser Limes und mit $\max_i \delta_{n,i}^{\frac{b(1-s)}{2}} \rightarrow 0$ sowie der Anwendung von Lemma 3.1.7 haben wir die Aussage gezeigt.

□

Beweis Lemma 3.1.10:

Für diesen Beweis gehen wir analog wie in [35] vor.

$$p - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \left(\delta_{n,i}^{-\frac{1}{2}} |\Delta Z_i| \right)^r \left(\delta_{n,i+1}^{-\frac{1}{2}} |\Delta Z_{i+1}| \right)^s \quad (3.38)$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} p - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \left(\delta_{n,i}^{-\frac{1}{2}} |\Delta Z_i| \right)^r \mathbf{1}_i(\varepsilon) \left(\delta_{n,i+1}^{-\frac{1}{2}} |\Delta Z_{i+1}| \right)^s \mathbf{1}_{i+1}(\varepsilon) \quad (3.39)$$

$$+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} p - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \left(\delta_{n,i}^{-\frac{1}{2}} |\Delta Z_i| \right)^r (1 - \mathbf{1}_i(\varepsilon)) \left(\delta_{n,i+1}^{-\frac{1}{2}} |\Delta Z_{i+1}| \right)^s (1 - \mathbf{1}_{i+1}(\varepsilon)) \quad (3.40)$$

$$+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} p - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \left(\delta_{n,i}^{-\frac{1}{2}} |\Delta Z_i| \right)^r \mathbf{1}_i(\varepsilon) \left(\delta_{n,i+1}^{-\frac{1}{2}} |\Delta Z_{i+1}| \right)^s (1 - \mathbf{1}_{i+1}(\varepsilon)) \quad (3.41)$$

$$+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} p - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \left(\delta_{n,i}^{-\frac{1}{2}} |\Delta Z_i| \right)^r (1 - \mathbf{1}_i(\varepsilon)) \left(\delta_{n,i+1}^{-\frac{1}{2}} |\Delta Z_{i+1}| \right)^s \mathbf{1}_{i+1}(\varepsilon) \quad (3.42)$$

Wir wenden auf (3.39), (3.41) und (3.42) die Hölder Ungleichung an, wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ für $p, q > 1$ gilt. Dies führen wir nur für (3.39) durch. Die Umformung für (3.41) und (3.42) geschehen analog.

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} p - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \left(\delta_{n,i}^{-\frac{1}{2}} |\Delta Z_i| \right)^r \mathbf{1}_i(\varepsilon) \left(\delta_{n,i+1}^{-\frac{1}{2}} |\Delta Z_{i+1}| \right)^s \mathbf{1}_{i+1}(\varepsilon) \\ & \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} p - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \left[\delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \left(\delta_{n,i}^{-\frac{1}{2}} |\Delta Z_i| \right)^r \mathbf{1}_i(\varepsilon) \right]^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \left[\delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \left(\delta_{n,i+1}^{-\frac{1}{2}} |\Delta Z_{i+1}| \right)^s \mathbf{1}_{i+1}(\varepsilon) \right]^q \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

Unter der Anwendung vom Lemma 3.1.8 und der Abschätzungen in Lemma 3.1.9 gehen (3.39), (3.41) und (3.42) gegen Null. Es bleibt nun (3.40) zu zeigen.

Die Höhe der Sprünge ist begrenzt. Bezeichnen wir also den maximalen Sprung der größer als ε ist mit $Z^{\max(\varepsilon)}$.

$$(3.40) \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} p - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(Z^{\max(\varepsilon)} \right)^{r+s} \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1-r}{2}} (1 - \mathbf{1}_i(\varepsilon)) \delta_{n,i+1}^{\frac{1-s}{2}} (1 - \mathbf{1}_{i+1}(\varepsilon))$$

Wir wissen, dass nur endlich viele Sprünge die größer als ε existieren. Geht nun $n \rightarrow \infty$ wird in zwei benachbarten Zeitintervallen maximal ein Sprung größer als ε vorkommen. So ist also entweder $1 - \mathbf{1}_i(\varepsilon)$ oder $1 - \mathbf{1}_{i+1}(\varepsilon)$ Null. Dabei kann auch der Fall eintreten, dass beide Ausdrücke gleichzeitig Null werden. Somit existiert für $n \rightarrow \infty$ ein n_0 , so dass alle Summanden der Summe Null sind. Somit ist die Summe auch gleich Null.

□

Mit diesem Kapitel haben wir die Konsistenzbetrachtung von Prozessen mit Mittelwertprozess und Sprunganteil abgeschlossen. Damit haben wir einen Schätzer für die integrierte Volatilität, der die gewünschte theoretische Eigenschaft, die Konsistenz, hat. Jedoch können wir noch keine Aussage darüber treffen, welcher Verteilung der Schätzer folgt. Hierbei interessieren wir uns insbesondere für asymptotische Aussagen. Das nächste Kapitel beschäftigt sich mit der Verteilungstheorie.

3.2 Verteilungstheorie

Bisher haben wir die Konsistenz des genormten Bipower-variationsschätzers gezeigt. Diese erlaubt uns, Punktschätzungen für die integrierte Volatilität vorzunehmen. In der Praxis jedoch sind für die Einschätzung der Finanzkontrakte ebenso Bereichsschätzer, wie zum Beispiel das Konfidenzintervall, interessant. Zur Berechnung von Konfidenzintervalle benötigen wir die Verteilung des Schätzers. Wir beschränken uns im Folgenden darauf, die asymptotische Verteilung für den genormten Bipower-variationsschätzer herzuleiten.

Zunächst geben wir ein Ergebnis von Orey (1958) an. Dieser zeigte, dass die Verteilung von Summen von abhängigen Zufallsvariablen unter bestimmten Voraussetzungen gegen eine Normalverteilung strebt. Bei der genormten Bipower-variation sind die benachbarten Summanden abhängig. Somit sprechen wir von einer 1-Abhängigkeit.

Satz 3.2.1 *Es sei $(X_i)_{i \in \{1 \dots n\}}$ eine Sequenz von m -abhängigen Zufallsvariablen, die folgende Bedingungen erfüllen:*

1.

$$\sum_{i=1}^n EX_i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha < \infty$$

2.

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n Cov(X_i, X_j) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sigma^2 < \infty$$

3.

$$\sum_{i=1}^n Var(X_i) = O(1)$$

4.

$$\sum_{i=1}^n P[|X_i| > \epsilon] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall \epsilon > 0$$

Dann konvergiert $\sum_{i=1}^n X_i$ in Verteilung gegen eine Normalverteilung mit Erwartungswert α und Varianz σ^2 .

Beweis: Orey (1958)

Um die Hauptaussage dieses Kapitels zu zeigen, benötigen wir folgendes Lemma, dessen Beweis am Ende des Kapitels aufgeführt ist.

Lemma 3.2.2 *Es seien die Voraussetzungen an die Prozesse und die Zeitstruktur des Kapitels 2.2 erfüllt. Dann gilt für R , wie in Satz 3.2.3 definiert, für $n \rightarrow \infty$:*

$$E(R|\mathcal{F}_t) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(R|\mathcal{F}_t) &= \mu_r^{-2} \mu_s^{-2} \left([\mu_{2r} \mu_{2s} - \mu_r^2 \mu_s^2] V_{r,s} \left(\tau(t), \Delta_n^{\frac{1}{2}-r, \frac{1}{2}-s} \right) \right. \\ &\quad \left. + 2 [\mu_r \mu_{r+s} \mu_s - \mu_r^2 \mu_s^2] V_{\frac{r}{2}, \frac{r+s}{2}, \frac{s}{2}} \left(\tau(t), \Delta^{\frac{1}{4}-\frac{r}{2}, \frac{1}{4}-\frac{(r+s)}{2}, \frac{1}{4}-\frac{s}{2}} \right) \right). \end{aligned}$$

Damit haben wir die technischen Voraussetzungen bereitgestellt, um für stetige Prozesse ohne Mittelwertprozess und ohne Sprünge folgendes Ergebnis zu formulieren.

Satz 3.2.3 *Es seien die Voraussetzungen an die Prozesse des Kapitels 2.2 erfüllt. Dann ist mit (2.2) und mit*

$$R = \mu_r^{-1} \mu_s^{-1} \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1}{4}-\frac{r}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{4}-\frac{s}{2}} |\Delta H_i|^r |\Delta H_{i+1}|^s - \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1}{4}-\frac{r}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{4}-\frac{s}{2}} \tau_i^{\frac{r}{2}} \tau_{i+1}^{\frac{s}{2}}, \quad (3.43)$$

dass R asymptotisch normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz $\mu_r^{-2} \mu_s^{-2} (\mu_{2r} \mu_{2s} - 3\mu_r^2 \mu_s^2 + 2\mu_r \mu_{r+s} \mu_s) \int_0^t \tau^{r+s}(u) du$ ist.

Beweis:

Wir wissen, dass

$$R \stackrel{d}{=} \mu_r^{-1} \mu_s^{-1} \sum_{k=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1}{4}-\frac{r}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{4}-\frac{s}{2}} \tau_i^{\frac{r}{2}} \tau_{i+1}^{\frac{s}{2}} (|u_i|^r |u_{i+1}|^s - \mu_r \mu_s).$$

gilt. Nun weisen wir die Bedingungen 1-4 des Satzes von Orey nach. Die erste Bedingung ist mit Lemma 3.2.2 gezeigt. Die zweite und dritte zeigen wir ebenfalls mit Lemma 3.2.2. Wenden wir die Lemmata 3.1.3 und 3.1.4 an, so ergibt sich:

$$\text{Var}(R|\mathcal{F}_t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu_r^{-2} \mu_s^{-2} (\mu_{2r} \mu_{2s} - 3\mu_r^2 \mu_s^2 + 2\mu_r \mu_{r+s} \mu_s) \int_0^t \tau^{r+s}(u) du.$$

Weiterhin gilt:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \text{Var} \left(\delta_{n,i}^{\frac{1}{4}-\frac{r}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{4}-\frac{s}{2}} \tau_i^{\frac{r}{2}} \tau_{i+1}^{\frac{s}{2}} (|u_i|^r |u_{i+1}|^s - \mu_r \mu_s) \right) = O(1).$$

Dies erhalten wir direkt aus dem Beweis von Lemma 3.2.2 und der Anwendung von Lemma 3.1.3. Es bleibt, abschließend die 4. Bedingung zu zeigen. Dazu verwenden wir eine Verallgemeinerung der Tschebyscheff Ungleichung mit $\gamma > 0$.

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n-1} P \left[\left| \delta_{n,i}^{\frac{1}{4}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{4}} \tilde{\tau}_i^{\frac{r}{2}} \tilde{\tau}_{i+1}^{\frac{s}{2}} (|u_i|^r |u_{i+1}|^s - \mu_r \mu_s) \right| > \epsilon \right] \\ & < \sum_{i=1}^{n-1} \frac{E \left[E_{\mathcal{F}_t} \left(\left| \delta_{n,i}^{\frac{1}{4}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{4}} \tilde{\tau}_i^{\frac{r}{2}} \tilde{\tau}_{i+1}^{\frac{s}{2}} (|u_i|^r |u_{i+1}|^s - \mu_r \mu_s) \right|^{2+\gamma} \right) \right]}{\epsilon^{2+\gamma}} \end{aligned}$$

Wir nutzen bekannte Eigenschaften und erhalten:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n-1} \frac{E \left[E_{\mathcal{F}_t} \left(\left| \delta_{n,i}^{\frac{1}{4}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{4}} \tilde{\tau}_i^{\frac{r}{2}} \tilde{\tau}_{i+1}^{\frac{s}{2}} (|u_i|^r |u_{i+1}|^s - \mu_r \mu_s) \right|^{2+\gamma} \right) \right]}{\epsilon^{2+\gamma}} \\ & \leq \max_i \delta_i^{\frac{\gamma}{2}} E \left| |u_i|^r |u_{i+1}|^s - \mu_r \mu_s \right|^{2+\gamma} E \left[\sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \tilde{\tau}_i^{\frac{r(2+\gamma)}{2}} \tilde{\tau}_{i+1}^{\frac{s(2+\gamma)}{2}} \right]. \quad (3.44) \end{aligned}$$

Folgendes können wir zeigen:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \tilde{\tau}_i^{\frac{r(2+\gamma)}{2}} \tilde{\tau}_{i+1}^{\frac{s(2+\gamma)}{2}} \leq t \sup_{0 \leq u \leq t} \tau^{\frac{r(2+\gamma)}{2}}(u) \sup_{0 \leq u \leq t} \tau^{\frac{s(2+\gamma)}{2}}(u) < \infty.$$

Damit und mit Lemma 3.1.3 haben wir

$$E \left[\sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \tilde{\tau}_i^{\frac{r(2+\gamma)}{2}} \tilde{\tau}_{i+1}^{\frac{s(2+\gamma)}{2}} \right] \rightarrow E \left[\int_0^t \tau^{\frac{(2+\gamma)(r+s)}{2}}(u) du \right] < \infty \text{ und bekommen so}$$

mit $\max_i \delta_i^{\frac{\gamma}{2}} \rightarrow 0$ die 4. Bedingung. □

Folgerung 3.2.4 *Es seien die Bedingungen aus Satz 3.2.3 erfüllt, dann ist*

$$\tilde{R} = \frac{1}{\sqrt{\max_i \delta_i}} \left(\mu_r^{-1} \mu_s^{-1} \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}-\frac{r}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}-\frac{s}{2}} |\Delta H_i|^r |\Delta H_{i+1}|^s - \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}-\frac{r}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}-\frac{s}{2}} \tau_i^{\frac{r}{2}} \tau_{i+1}^{\frac{s}{2}} \right), \quad (3.45)$$

asymptotisch normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz $\mu_r^{-2} \mu_s^{-2} (\mu_{2r} \mu_{2s} - 3\mu_r^2 \mu_s^2 + 2\mu_r \mu_{r+s} \mu_s) \int_0^t \tau^{r+s}(u) du$.

Zum Beweis dieser Folgerung müssen wir wiederum die Bedingungen des Satzes von Orey (1958) zeigen. Dabei sind mit den gleichen Argumentationen wie im Satz 3.2.3 $E\tilde{R} = 0$ und $Var(\tilde{R}|\mathcal{F}_t) < \infty$ erfüllt. Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned} & \left| Var(\tilde{R}|\mathcal{F}_t) - \mu_r^{-2} \mu_s^{-2} (\mu_{2r} \mu_{2s} - 3\mu_r^2 \mu_s^2 + 2\mu_r \mu_{r+s} \mu_s) \int_0^t \tau^{r+s}(u) du \right| \\ & \leq \left| \frac{\max_i \delta_{n,i}}{\max_i \delta_{n,i}} Var(R|\mathcal{F}_t) - \mu_r^{-2} \mu_s^{-2} (\mu_{2r} \mu_{2s} - 3\mu_r^2 \mu_s^2 + 2\mu_r \mu_{r+s} \mu_s) \int_0^t \tau^{r+s}(u) du \right|. \end{aligned}$$

Dabei wissen wir aus dem Beweis von Satz 3.2.3, dass der Betrag gegen Null geht. Bleibt nun noch die vierte Bedingung zu zeigen.

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n-1} P \left[\left| \frac{\delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\max_i \delta_{n,i}}} \tilde{\tau}_i^{\frac{r}{2}} \tilde{\tau}_{i+1}^{\frac{s}{2}} (|u_i|^r |u_{i+1}|^s - \mu_r \mu_s) \right| > \epsilon \right] \\ & < \sum_{i=1}^{n-1} \frac{E \left[E_{\mathcal{F}_t} \left(\left| \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}} \tilde{\tau}_i^{\frac{r}{2}} \tilde{\tau}_{i+1}^{\frac{s}{2}} (|u_i|^r |u_{i+1}|^s - \mu_r \mu_s) \right|^{2+\gamma} \right) \right]}{(\sqrt{\max_i \delta_{n,i}} \epsilon)^{2+\gamma}} \end{aligned}$$

Mit der gleichen Argumentation wie im Beweis von Satz 3.2.3 haben wir die Folgerung gezeigt. □

Wir sind nun in der Lage, ein Ergebnis für die asymptotische Verteilung von Prozessen mit Mittelwertprozess anzugeben.

Satz 3.2.5 *Es seien die Bedingungen aus Kapitel 2.2 und den Sätzen 3.1.6 und 3.2.3 erfüllt. Weiterhin gelte für $\max_i \delta_{n,i} \rightarrow 0$*

$$\frac{\sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^{1-2r} \left| \Delta Y_i^{(2)} \right|^{2r}}{\max_i \delta_{n,i}} \xrightarrow{P} 0$$

und

$$O_P \left(\frac{\max_i \left(\gamma_i^{1+1 \wedge r \wedge s} \delta_{n,i}^{\frac{1+1 \wedge r \wedge s}{2}} \right)}{\max_i \delta_{n,i}} \right) \rightarrow 0.$$

Dann ist

$$\frac{\mu_r^{-1} \mu_s^{-1} V_{r,s} \left(V_t, \Delta_n^{\frac{1-r}{2}, \frac{1-s}{2}} \right) - V_{\frac{r}{2}, \frac{s}{2}} \left(\tau(t), \Delta_n^{\frac{1-r}{2}, \frac{1-s}{2}} \right)}{\sqrt{\max_i \delta_{n,i}}} \tag{3.46}$$

asymptotisch normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz $\mu_r^{-2} \mu_s^{-2} (\mu_{2r} \mu_{2s} - 3\mu_r^2 \mu_s^2 + 2\mu_r \mu_{r+s} \mu_s) \int_0^t \tau^{r+s}(u) du$.

Beweis:

Der Beweis läuft in den wesentlichen Umformungen genau so ab, wie der des Satzes

3.1.6.

$$\begin{aligned}
 & \frac{\mu_r^{-1} \mu_s^{-1} V_{r,s} \left(V_t, \Delta_n^{\frac{1-r}{2}, \frac{1-s}{2}} \right) - V_{\frac{r}{2}, \frac{s}{2}} \left(\tau(t), \Delta_n^{\frac{1-r}{2}, \frac{1-s}{2}} \right)}{\sqrt{\max_i \delta_{n,i}}} \\
 &= \frac{\mu_r^{-1} \mu_s^{-1} V_{r,s} \left(V_t, \Delta_n^{\frac{1-r}{2}, \frac{1-s}{2}} \right) - \mu_r^{-1} \mu_s^{-1} V_{r,s} \left(H_t, \Delta_n^{\frac{1-r}{2}, \frac{1-s}{2}} \right)}{\sqrt{\max_i \delta_{n,i}}} \\
 &+ \frac{\mu_r^{-1} \mu_s^{-1} V_{r,s} \left(H_t, \Delta_n^{\frac{1-r}{2}, \frac{1-s}{2}} \right) - V_{\frac{r}{2}, \frac{s}{2}} \left(\tau(t), \Delta_n^{\frac{1-r}{2}, \frac{1-s}{2}} \right)}{\sqrt{\max_i \delta_{n,i}}}
 \end{aligned}$$

Der zweite Term hat mit der Folgerung 3.2.4 die gewünschte asymptotische Verteilung. Bleibt zu zeigen, dass der erste Term in Wahrscheinlichkeit gegen Null geht. Dabei sei zu bemerken, dass

$$\frac{O_P(\max_i(\gamma_i^2 \delta_{n,i}))}{\sqrt{\max_i \delta_{n,i}}} \leq O_P\left(\max_i(\gamma_i^2) \sqrt{\max_i(\delta_{n,i})}\right) \rightarrow 0$$

und

$$O_P\left(\frac{\max_i\left(\gamma_i^{1+1 \wedge r \wedge s} \delta_{n,i}^{\frac{1+1 \wedge r \wedge s}{2}}\right)}{\max_i \delta_{n,i}}\right) \rightarrow 0$$

gilt und somit die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit gegen Null mit den Voraussetzungen des Satzes gefolgert werden kann. Mit der Anwendung des Lemmas von Slutsky haben wir diesen Satz bewiesen. Die $\gamma_i = \frac{\Delta Y_i^{(1)}}{\tau_i^{\frac{1}{2}} \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}}}$ sind Quotienten aus Zuwächsen. Diese gehen für $n \rightarrow 0$, wenn der Zähler schneller als der Nenner gegen Null konvergiert. Diese Bedingung können wir an den Prozess $(Y_t^{(1)})_{t \geq 0}$ setzen.

□

Damit haben wir eine Verteilungstheorie für Prozesse mit Mittelwertprozess.

Im Folgenden geben wir ein Ergebnis für die asymptotische Verteilung von Prozessen, die sowohl einen Mittelwertprozess als auch Sprünge haben, an.

Satz 3.2.6 *Es seien die Bedingungen der Sätze 3.1.11 und 3.2.5 erfüllt. Dann gilt mit $\max(r, s) < \frac{1}{2}$, dass*

$$\frac{\mu_r^{-1} \mu_s^{-1} V_{r,s} \left(X_t, \Delta_n^{\frac{1-r}{2}, \frac{1-s}{2}} \right) - V_{\frac{r}{2}, \frac{s}{2}} \left(\tau(t), \Delta_n^{\frac{1-r}{2}, \frac{1-s}{2}} \right)}{\sqrt{\max_i \delta_{n,i}}} \tag{3.47}$$

asymptotisch normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz $\mu_r^{-2} \mu_s^{-2} (\mu_{2r} \mu_{2s} - 3\mu_r^2 \mu_s^2 + 2\mu_r \mu_{r+s} \mu_s) \int_0^t \tau^{r+s}(u) du$ ist.

Beweis:

Der Beweis verläuft im wesentlichen wie der des Satzes 3.2.5.

$$\begin{aligned}
 & \frac{\mu_r^{-1} \mu_s^{-1} V_{r,s} \left(X_t, \Delta_n^{\frac{1-r}{2}, \frac{1-s}{2}} \right) - V_{\frac{r}{2}, \frac{s}{2}} \left(\tau(t), \Delta_n^{\frac{1-r}{2}, \frac{1-s}{2}} \right)}{\sqrt{\max_i \delta_{n,i}}} \\
 &= \frac{\mu_r^{-1} \mu_s^{-1} V_{r,s} \left(X_t, \Delta_n^{\frac{1-r}{2}, \frac{1-s}{2}} \right) - \mu_r^{-1} \mu_s^{-1} V_{r,s} \left(V_t, \Delta_n^{\frac{1-r}{2}, \frac{1-s}{2}} \right)}{\sqrt{\max_i \delta_{n,i}}} \\
 &+ \frac{\mu_r^{-1} \mu_s^{-1} V_{r,s} \left(V_t, \Delta_n^{\frac{1-r}{2}, \frac{1-s}{2}} \right) - V_{\frac{r}{2}, \frac{s}{2}} \left(\tau(t), \Delta_n^{\frac{1-r}{2}, \frac{1-s}{2}} \right)}{\sqrt{\max_i \delta_{n,i}}}
 \end{aligned}$$

Dabei geht die Verteilung des zweiten Summanden gegen die gewünschte Verteilung. Der Beweis, dass der erste Summand in Wahrscheinlichkeit gegen Null konvergiert verläuft in den wesentlichen Schritten wie der Beweis des Satzes 3.1.11. Dabei ersetzen wir $\delta_{n,i}^{\frac{1}{2}}$ durch $\frac{\delta_{n,i}^{\frac{1}{2}}}{\max_i \delta_{n,i}^{\frac{1}{4}}}$. Ebenso passen wir die Bedingungen der Lemmata 3.1.7 bis 3.1.10 an. Für die Anwendung der Hölder Ungleichung wie bei (3.34) fordern wir zusätzlich $p > 4$. Damit ergibt sich, dass wir Lemma 3.1.7 nur für $p > 4$ betrachten. Weiterhin ergibt sich, dass q so gewählt wird, dass die Bedingung der Hölder Ungleichung erfüllt ist. Damit passen sich entsprechend die Bedingungen der anderen Lemmata an. Für das Lemma 3.1.8 fordern wir weiter, dass $\frac{q(1+2s)}{4} > \beta$ und $\zeta \in (\beta, \frac{q(1+2s)}{4})$. Für die Lemmata 3.1.9 und 3.1.10 benötigen wir $s < \frac{1}{2}$ bzw. $\max(r, s) < \frac{1}{2}$. Unter diesen modifizierten Voraussetzungen lassen sich die Lemmata zeigen und wir erhalten mit dem gleichen Vorgehen wie im Beweis von Satz 3.1.11, dass der erste Ausdruck in Wahrscheinlichkeit gegen Null geht. Wenden wir nun das Lemma von Slutsky an, haben wir die Aussage gezeigt. □

Beweis Lemma 3.2.2:

Wir nutzen die Messbarkeit der τ_i bzgl. \mathcal{F}_t , die Unabhängigkeit der τ_i von den u_i und die Unabhängigkeit der Folge $(u_i)_{i=1, \dots, n}$. Mit $z_i = \mu_r^{-1} \mu_s^{-1} \delta_{n,i}^{\frac{1}{4} - \frac{r}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{4} - \frac{s}{2}} \tau_i^{\frac{r}{2}} \tau_{i+1}^{\frac{s}{2}} (|u_i|^r |u_{i+1}|^s - \mu_r \mu_s)$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 E(R|\mathcal{F}_t) &= E(z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + \dots + z_{n-2} + z_{n-1} | \mathcal{F}_t) \\
 &= E(z_1 | \mathcal{F}_t) + E(z_2 | \mathcal{F}_t) + \dots + E(z_{n-2} | \mathcal{F}_t) + E(z_{n-1} | \mathcal{F}_t).
 \end{aligned}$$

Betrachten wir nur den ersten Summanden, für alle weiter funktionieren die Umformungen analog.

$$\begin{aligned}
 E(z_1 | \mathcal{F}_t) &= E \left(\mu_r^{-1} \mu_s^{-1} \delta_{n,1}^{\frac{1}{4} - \frac{r}{2}} \delta_{n,2}^{\frac{1}{4} - \frac{s}{2}} \tau_1^{\frac{r}{2}} \tau_2^{\frac{s}{2}} (|u_1|^r |u_2|^s - \mu_r \mu_s) \middle| \mathcal{F}_t \right) \\
 &= \mu_r^{-1} \mu_s^{-1} \delta_{n,1}^{\frac{1}{4} - \frac{r}{2}} \delta_{n,2}^{\frac{1}{4} - \frac{s}{2}} \tau_1^{\frac{r}{2}} \tau_2^{\frac{s}{2}} E(|u_1|^r |u_2|^s - \mu_r \mu_s) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Somit folgt direkt:

$$E(R|\mathcal{F}_t) = 0.$$

Für die Varianz gehen wir ähnlich vor:

$$\begin{aligned} \text{Var}(R|\mathcal{F}_t) &= \text{Var}(z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + \cdots + z_{n-2} + z_{n-1}|\mathcal{F}_t) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \text{Var}(z_i|\mathcal{F}_t) + 2 \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{l>i} \text{Cov}(z_i, z_l|\mathcal{F}_t). \end{aligned}$$

Nun nutzen wir die Eigenschaft, dass die Folge $(u_i)_{i=1, \dots, n}$ unabhängig ist, womit sich ergibt, dass z_i und z_l für $l > i + 1$ unabhängig sind.

$$\text{Var}(R|\mathcal{F}_t) = \sum_{i=1}^{n-1} \text{Var}(z_i|\mathcal{F}_t) + 2 \sum_{i=1}^{n-2} \text{Cov}(z_i, z_{i+1}|\mathcal{F}_t)$$

Verwenden wir wieder die Messbarkeitseigenschaft und die Unabhängigkeit der $(u_i)_{i=1, \dots, n}$ von \mathcal{F}_t ergibt sich für die Varianz von z_i :

$$\begin{aligned} \text{Var}(z_i|\mathcal{F}_t) &= \text{Var} \left(\mu_r^{-1} \mu_s^{-1} \delta_{n,i}^{\frac{1}{4}-\frac{r}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{4}-\frac{s}{2}} \tau_i^{\frac{r}{2}} \tau_{i+1}^{\frac{s}{2}} (|u_i|^r |u_{i+1}|^s - \mu_r \mu_s) \middle| \mathcal{F}_t \right) \\ &= \mu_r^{-2} \mu_s^{-2} \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}-r} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}-s} \tau_i^r \tau_{i+1}^s \text{Var}(|u_i|^r |u_{i+1}|^s) \\ &= \mu_r^{-2} \mu_s^{-2} \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}-r} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}-s} \tau_i^r \tau_{i+1}^s [\mu_{2r} \mu_{2s} - \mu_r^2 \mu_s^2]. \end{aligned}$$

Bilden wir nun die Summe über alle Varianzen von z_i erhalten wir:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} \text{Var}(z_i|\mathcal{F}_t) &= \sum_{i=1}^{n-1} \mu_r^{-2} \mu_s^{-2} \delta_{n,i}^{\frac{1}{2}-r} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}-s} \tau_i^r \tau_{i+1}^s [\mu_{2r} \mu_{2s} - \mu_r^2 \mu_s^2] \\ &= \mu_r^{-2} \mu_s^{-2} [\mu_{2r} \mu_{2s} - \mu_r^2 \mu_s^2] V_{r,s} \left(\tau(t), \Delta_n^{\frac{1}{2}-r, \frac{1}{2}-s} \right). \end{aligned}$$

Betrachten wir nun die Kovarianzen. Dazu behandeln wir wieder zuerst nur die Kovarianz $\text{Cov}(z_i, z_{i+1}|\mathcal{F}_t)$.

$$\begin{aligned} \text{Cov}(z_i, z_{i+1}|\mathcal{F}_t) &= \mu_r^{-2} \mu_s^{-2} \delta_{n,i}^{\frac{1}{4}-\frac{r}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}-\frac{r+s}{2}} \delta_{n,i+2}^{\frac{1}{4}-\frac{s}{2}} \tau_i^{\frac{r}{2}} \tau_{i+1}^{\frac{r+s}{2}} \tau_{i+2}^{\frac{s}{2}} \text{Cov}(|u_i|^r |u_{i+1}|^s, |u_{i+1}|^r |u_{i+2}|^s) \\ &= \mu_r^{-2} \mu_s^{-2} \delta_{n,i}^{\frac{1}{4}-\frac{r}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}-\frac{r+s}{2}} \delta_{n,i+2}^{\frac{1}{4}-\frac{s}{2}} \tau_i^{\frac{r}{2}} \tau_{i+1}^{\frac{r+s}{2}} \tau_{i+2}^{\frac{s}{2}} [\mu_r \mu_{r+s} \mu_s - \mu_r^2 \mu_s^2] \end{aligned}$$

Bilden wir die Summe ergibt sich:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-2} \text{Cov}(z_i, z_{i+1}|\mathcal{F}_t) &= \sum_{i=1}^{n-2} \mu_r^{-2} \mu_s^{-2} \delta_{n,i}^{\frac{1}{4}-\frac{r}{2}} \delta_{n,i+1}^{\frac{1}{2}-\frac{r+s}{2}} \delta_{n,i+2}^{\frac{1}{4}-\frac{s}{2}} \tau_i^{\frac{r}{2}} \tau_{i+1}^{\frac{r+s}{2}} \tau_{i+2}^{\frac{s}{2}} [\mu_r \mu_{r+s} \mu_s - \mu_r^2 \mu_s^2] \\ &= \mu_r^{-2} \mu_s^{-2} [\mu_r \mu_{r+s} \mu_s - \mu_r^2 \mu_s^2] V_{\frac{r}{2}, \frac{r+s}{2}, \frac{s}{2}} \left(\tau(t), \Delta^{\frac{1}{4}-\frac{r}{2}, \frac{1}{2}-\frac{r+s}{2}, \frac{1}{4}-\frac{s}{2}} \right). \end{aligned}$$

□

3.3 Simulation

Die theoretischen Eigenschaften, Konsistenz und asymptotische Verteilungstheorie, des genormten Bipower- variationschätzers haben wir gezeigt. In der Realität jedoch können wir nur zu endlich vielen Zeitpunkten beobachten. Weiterhin kennen wir in der Praxis nicht den wahren Prozess nachdem sich ein Wertpapier entwickelt.

Mit unserer Simulationsstudie wollen wir einen Eindruck gewinnen, wie gut oder wie schlecht unser Schätzer ist. Im Folgenden geben wir die Simulationsbedingungen an. Die Simulation der Prozesse wurde mit der Programmiersprache Python durchgeführt. Die Auswertungen mit dem Programm R.

3.3.1 Simulationsbedingungen

Wir simulieren alle Prozesse für die Beobachtungszeiträume $[0, 0.5]$, $[0, 1]$ und $[0, 5]$ und $p \in \{0.2, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Dabei ist der genormte Bipower-variationsschätzer für r und s symmetrisch und es gilt $p = r + s$. Im Falle der stochastischen Volatilität wird auf $p = 3$ und $p = 5$ verzichtet. Weiterhin schauen wir uns die Schätzer jeweils für die Beobachtungsumfänge $n = 1000$ und $n = 5000$ an. Jeder Prozess wird 100 mal simuliert, der genormte Bipower-variationsschätzer errechnet und die Ergebnisse ausgewertet.

Für die theoretischen Ergebnisse ist die Bedingung (2.2) notwendig. Dabei muss die Folge der $(c_{n,i}^2)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ für $n \rightarrow \infty$ eine Nullfolge bilden. Somit geht der Quotient benachbarter Zeitabstände gegen 1. Die Wichtigkeit zeigen wir, indem wir 4 verschiedene Zeitstrukturen (Zeitkategorien) simulieren. Dabei ist der Quotient

$$\text{ReguJa} = \max_i \frac{\delta_{n,i}}{\delta_{n,i+1}}$$

sehr nahe bei 1 für die erste Zeitkategorie. Er ist einstellig für die zweite, zweistellig für die dritte und dreistellig für die vierte Kategorie. Die Zeitstrukturen werden zufällig simuliert wodurch der Quotient variiert. Das theoretische Optimum für ReguJa liegt bei 1, was für gleiche Zeitabstände gilt.

Wir simulieren reine stetige Prozesse sowie stetige Prozesse mit endlich vielen Sprüngen. Dabei wird deterministische wie auch stochastische Volatilität simuliert und der Sprungprozess ist vom stetigen Teil unabhängig. Er ist ein compound Poissonprozess mit normalverteilten Sprüngen und λ nimmt die Werte 0.1, 1, 10 und 100 an. Wir betrachten also nur Prozesse mit endlich vielen Sprüngen. Im Falle der stochastischen Volatilität verzichten wir auf $\lambda = 0.1$.

3.3.2 Prozesse und Algorithmen

Brownsche Bewegung

Für die Simulation der Brownschen Bewegung nutzen wir die Eulersche Diskretisierung [19]. Das theoretische Modell sieht folgendermaßen aus:

$$dX_t = \sigma dB_t + dN_t.$$

Wir betrachten hier einen Prozess ohne Drift, da in der Literatur und in eigenen Simulationen die Drift keinen Einfluss auf den genormten Bipower-variationsschätzer hat. Der Simulationsalgorithmus ist:

$$X_{t_{i+1}} = X_{t_i} + \sigma\sqrt{\delta_{n,i}}Z_{i+1} + M \quad \text{mit} \quad Z_{i+1} \sim N(0, 1).$$

Die Volatilität σ nimmt die Werte 0.2, 1 und 5 an. M ist im Falle rein stetiger Prozesse immer Null, d.h. $dN_t = 0$. Haben wir jedoch Prozesse mit Sprüngen, gilt:

$$N \sim \text{Poisson}(\lambda\delta_{n,i}),$$

$$M = \sum_{k=1}^N \xi_k \quad \xi_k \sim N(0, 1).$$

Dabei ist N die Anzahl der Sprünge im Intervall $[t_{i-1}, t_i]$ und M die Summe dieser.

Ornstein-Uhlenbeck-Prozess

Der Ornstein-Uhlenbeck-Prozess wird nach dem Algorithmus von Gillespie (1996) simuliert. Dabei nehmen wir folgenden Prozess an:

$$dX_t = -\frac{1}{\tau}X_t dt + \sqrt{c}dB_t.$$

Der verwendete Algorithmus lautet:

$$X_{t_{i+1}} = X_{t_i} + \left[-\frac{1}{\tau}X_{t_i}\delta_{n,i} + \sqrt{c\delta_{n,i}}Z_{i+1} \right] \left(1 - \frac{\delta_{n,i}}{2\tau} \right) \quad \text{mit} \quad Z_{i+1} \sim N(0, 1).$$

Dabei nimmt c die gleichen Werte wie σ beim vorherigen Prozess an und τ ist 0.2, 1 oder 5. Für den Ornstein-Uhlenbeck-Prozess erhielten wir im Wesentlichen die gleichen Ergebnisse für den stetigen Fall wie bei der Brownschen Bewegung. Daher wurde hier auf die Simulation der Sprünge verzichtet.

Stochastische Volatilität

Als einen Vertreter dieser Prozessklasse haben wir das Heston Modell gewählt.

$$dX_t = X_t\sqrt{V_t}dB_t$$

$$dV_t = \kappa(\theta - V_t)dt + \varepsilon\sqrt{V_t}dW_t$$

Wir verzichten wiederum auf die Drift beim Prozess $(X_t)_{t \geq 0}$ welcher eine stochastische Volatilität hat. Der Volatilitätsprozess ist ein so genannter *mean-reverting square-root* Diffusionsprozess [15]. Dabei ist wichtig, dass der Prozess $(V_t)_{t \geq 0}$ immer positiv ist, wenn $2\kappa\theta \geq \varepsilon^2$ gilt. Wir simulieren auch nur die Prozesse, die dies erfüllen. Somit kann κ die Werte 0.1, 1 und 10, θ die Werte 1 und 10 und ε die Werte 0.2, 1 und 5 annehmen.

Die standard Brownschen Bewegungen $(B_t)_{t \geq 0}$ und $(W_t)_{t \geq 0}$ sind unabhängig. Wir simulieren die logarithmische Transformation von $(X_t)_{t \geq 0}$ [2]:

$$d \log X_t = \frac{1}{2} V_t dt + \sqrt{V_t} dB_t + dN_t$$

$$dV_t = \kappa(\theta - V_t) dt + \varepsilon \sqrt{V_t} dW_t.$$

Der dazugehörige Algorithmus lautet:

$$\log X_{t_{i+1}} = \log X_{t_i} - \frac{1}{2} \max(V_{t_i}, 0) \delta_{n,i} + \sqrt{\max(V_{t_i}, 0) \delta_{n,i}} Z_{i+1} + M \quad \text{mit} \quad Z_{i+1} \sim N(0, 1)$$

$$V_{t_{i+1}} = V_{t_i} + \kappa(\theta - \max(V_{t_i}, 0)) \delta_{n,i} + \varepsilon \sqrt{\max(V_{t_i}, 0) \delta_{n,i}} \tilde{Z}_{i+1} \quad \text{mit} \quad \tilde{Z}_{i+1} \sim N(0, 1).$$

Die Sprünge sind wie bei der Brownschen Bewegung simuliert. Für weitere Informationen verweise wir auf den Beitrag von Andersen (2007).

3.3.3 Simulationsergebnisse

Wir werden hier nur die Ergebnisse skizzieren. Die genauen Werte sind den Tabellen im Anhang bzw. der beiliegenden Daten-CD zu entnehmen. Für die Abbildungen gilt, dass die blauen Sterne für $n = 1000$ und die schwarzen Kreise $n = 5000$ die Mittelwerte des genormten Bipower-variationsschätzers darstellen. Die dazu gehörigen Antennen beschreiben die jeweilige geschätzte Standardabweichung der genormten Bipower-variation. Für BM (Brownsche Bewegung) und OU (Ornstein-Uhlenbeck-Prozess) sind die Differenzen des Schätzers zum wahren Wert und im Falle der SV (stochastischen Volatilität) der Schätzer selbst dargestellt. Damit erhalten wir einen Eindruck bzgl. der Konsistenz des Schätzers für die integrierte Volatilität.

Einen Hinweis inwieweit die Verteilungstheorie bestätigt werden kann, geben die Abbildungen des p-Wertes, welcher das Resultat des Shapiro-Wilk-Testes auf Normalverteilung ist. Dabei ist die Nullhypothese des Testes, dass Normalverteilung vorliegt. Wiederum stehen die blauen Sterne für den Fall $n = 1000$ und die schwarzen Kreise für $n = 5000$.

In den drei folgenden Tabellen sind die Strukturen der Zeitkategorien für die drei stetigen Prozesse und die zwei unterschiedlichen Beobachtungsumfänge dargestellt. Für die Prozesse mit Sprüngen ergeben sich keine wesentlichen Änderungen.

Kat.	Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.	n
1	1	1	1	1	1	1	1000
2	9	9	9	9	9	9	1000
3	65	68	69	69	70	72	1000
4	1313	2217	3054	6624	4284	165600	1000
1	1	1	1	1	1	1	5000
2	9	9	10	10	10	10	5000
3	83	84	84	84	85	86	5000
4	6050	10530	13470	18430	16800	162100	5000

Tabelle 3.1: BM - Verteilung ReguJa innerhalb der Zeitkategorien

3.3. SIMULATION

Kat.	Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.	n
1	1	1	1	1	1	1	1000
2	9	9	9	9	9	9	1000
3	66	68	69	69	70	73	1000
4	1361	2202	2858	9241	4628	713300	1000
1	1	1	1	1	1	1	5000
2	9	9	10	10	10	10	5000
3	82	84	84	84	85	86	5000
4	6067	10920	15280	35390	24860	1361000	5000

Tabelle 3.2: OU - Verteilung ReguJa innerhalb der Zeitkategorien

Kat.	Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.	n
1	1	1	1	1	1	1	1000
2	9	9	9	9	9	9	1000
3	66	68	69	69	70	72	1000
4	1257	2168	2649	4183	4166	58860	1000
1	1	1	1	1	1	1	5000
2	9	9	10	10	10	10	5000
3	83	84	84	84	85	86	5000
4	6837	10580	14360	31550	21720	1681000	5000

Tabelle 3.3: SV - Verteilung ReguJa innerhalb der Zeitkategorien

In den Tabellen sind das Minimum (Min.), das 25% Quantil (1st Qu.), der Median, der Mittelwert (Mean), das 75% Quantil (3rd Qu.) und das Maximum (Max.) für die verschiedenen Kategorien (1-4) und die beiden betrachteten Beobachtungsumfänge (n) 1000 und 5000 dargestellt. Zwischen den beiden verschiedenen Beobachtungsumfängen sind keine wesentlichen Unterschiede in den jeweiligen Kategorien erkennbar. Die Kategorie 1 beinhaltet im wesentlichen Zeitstrukturen, deren maximaler Quotient benachbarter Zeitabstände sehr nahe oder gleich 1 ist. Dies bedeutet, dass wir hier fast gleiche Zeitabstände beobachten. Um die Sensibilität des Schätzers gegenüber Veränderung der Bedingung an die Beobachtungsabstände zu untersuchen, werden Zeitstrukturen simuliert, die die Eigenschaften der Kategorien 2 bis 4 haben. Dabei sind in den Kategorien 2 und 3 die Schwankungen von ReguJa im Vergleich zur vierten Kategorie gering. Mit der 4. Kategorie werden völlig beliebige Zeitstrukturen angenommen und somit das entsprechende Verhalten des Schätzers untersucht.

In den Abbildungen A.1(a) für die BM, A.2(a) für OU und A.3(a) für die SV ist beispielhaft der Verlauf der Schätzer in Abhängigkeit von der Zeitstruktur zu sehen. Wie zu erwarten, hängt der genormte Bipower-variationsschätzer stark von der Zeitstruktur ab. Es stellt sich heraus, dass je weiter ReguJa vom Optimum abweicht, desto schlechter der Schätzer wird. Insbesondere unterschätzt die genormte

Bipower-variation um so mehr, je weiter ReguJa vom Optimum entfernt liegt. Die fallende Struktur in Abhängigkeit der Zeitkategorie ist für jede Kombination der eingesetzten Parameter ähnlich.

Die Konsistenz Aussage können wir für die verschiedenen Parameterkonstellation bestätigen. So ist der Schätzer für jede Zeitkategorie im Mittel bei $n = 5000$ näher am wahren Wert als bei $n = 1000$. Dies deutet darauf hin, dass für sehr sehr große Stichprobenumfänge unsere Schätzmethode gute Ergebnisse liefert. Ebenso können wir sagen, dass eine schlechte Zeitstruktur, also eine bei der ReguJa weit von 1 abweicht, durch einen hohen Stichprobenumfang ausgeglichen werden kann. Weiterhin nimmt die Varianz der genormten Bipower-variation mit größerem n ab. Die Zeitkategorie beeinflusst offenbar nicht die Standardabweichung des Schätzers, sondern nur dessen Mittelwert. Damit kann ReguJa als Qualitätsmaßstab dienen. Ist er nahe bei 1, können wir von genaueren Schätzergebnissen ausgehen, als bei Werten für ReguJa, die weit von 1 entfernt sind. Die Abweichungen, die bei schlechten ReguJa vorkommen, scheinen jedoch systematischer Art zu sein, da eine klare Struktur mit schlechter werdenden ReguJa erkennbar ist und die Standardabweichung des Schätzers offenbar nicht von ReguJa abhängt.

Das Verhalten der Schätzer und dessen Varianz, welche nach der Theorie vorliegen müsste, wurde bestätigt. Der Erwartungswert sowie die Varianz des Schätzers streben für $n \rightarrow \infty$ gegen ein Integral in den Grenzen $[0, t]$ über eine positive Funktion $\sigma(u)$ deren Exponent p ist. So ergeben sich mit steigendem Parameter Abhängigkeiten für dieses Integral, die wir in der folgenden Tabelle zusammengefasst haben (\uparrow steigt; \downarrow fällt; \rightarrow nicht abhängig):

Parameter	BM	OU	SV
t	\uparrow	\uparrow	\uparrow
p	$\sigma < 1 \downarrow$ und $\sigma \geq 1 \uparrow$	$c < 1 \downarrow$ und $c \geq 1 \uparrow$	$\varepsilon < 1 \downarrow$ und $\varepsilon \geq 1 \uparrow$
σ bzw. c	\uparrow	\uparrow	—
τ	—	\rightarrow	—
κ	—	—	\downarrow
$theta$	—	—	\rightarrow
ε	—	—	\uparrow

Betrachten wir die Abhängigkeit von t stellen wir fest, dass die Abweichungen vom wahren Wert wie auch die Varianz des Schätzers mit wachsendem t größer werden (Abb. A.1(b), A.2(b), A.3(b)).

Der Einfluss der Potenz p hängt von der Funktion $\sigma(u)$ ab. Ist diese kleiner als 1, wird das betrachtete Integral für feste t mit größer werdenden p kleiner werden (Abb. A.1(d), A.2(e), A.3(f)). Ist die Funktion größer als 1, so wird das Integral entsprechend größer werden (Abb. A.1(c), A.2(d), A.3(e)). Dies bedeutet insbesondere, dass der Fehler und die Varianz des Schätzers von der Höhe des p abhängen. Somit ergibt sich eine Möglichkeit zu beurteilen, ob die unbekannte zu Grunde liegende Funktion $\sigma(u)$

größergleich oder kleiner als 1 ist.

Lassen wir die Funktion über die wir integrieren selbst wachsen, so muss das Integral auch wachsen. Dabei beeinflussen σ und c sowie τ die Funktion über die wir integrieren bzw. sind gleich dieser (Abb. A.1(a), A.2(a), A.3(a)).

Die Parameter τ und $theta$ stellen eine Mittelwertkomponente dar, die, wie wir schon früher bemerkt haben, keinen Einfluss auf unseren Schätzer bei hohen Stichprobenumfängen hat (Abb. A.2(c), A.3(d)). Im Falle des SV Modells wirkt κ verringern auf die Volatilitätsfunktion (Abb. A.3(c)).

In den Abbildungen A.4 für die BM, A.5 für den OU und A.6 für die SV sind die p-Werte des Shapiro-Wilk-Testes gezeigt. Die Ablehnung bedeutet, dass man mit einer Fehlerwahrscheinlichkeit von 0.05 die Hypothese, dass Normalverteilung vorliegt, ablehnt. Offenbar beeinflusst die Zeitkategorie nicht das Verteilungsverhalten. Weiterhin gibt es keinen offensichtlichen Grund anzunehmen, dass andere Parameter die Testentscheidung beeinflussen. Nutzt man weitere Grafiken, wie zum Beispiel Boxplot, qq-Plot und Histogramm, geben diese zusammen mit den Testergebnissen den Hinweis, dass wir von einer asymptotischen Normalverteilung der Schätzer ausgehen können.

Betrachten wir die Prozesse mit Sprüngen, ist im wesentlichen kein Unterschied im Verlauf und dem Einfluss der Zeitstruktur und der einzelnen Parameter zu erkennen. Dabei zeigen die Abbildungen A.7(a) und A.8(a) den Einfluss der Parameter σ und ε , die Abbildungen A.7(b) und A.8(b) die Auswirkungen bei der Änderung von t und die Abbildungen A.8(c) und A.8(d) die Beeinflussung durch die Parameter κ und $theta$.

Bei der Untersuchung der Abhängigkeit von p sehen wir jedoch, dass für größere p bei unseren Simulationen die übliche Struktur nicht eingehalten wird. Während der theoretischen Betrachtungen waren, im Falle, dass Sprünge existieren, Einschränkungen an die Exponenten der Zuwächse nötig, was die Abweichungen von der üblichen Struktur in den entsprechenden Abbildungen erklären könnte (Abb. A.7(d), A.7(e), A.8(f), A.8(e)).

Für die Beschreibung der Abhängigkeit von λ betrachten wir die Abbildungen A.7(c) und A.9. Wir erkennen, dass λ sowohl auf die Variabilität als auch auf die Höhe des Schätzers einen Einfluss hat. Dabei ist ebenfalls zu erkennen, dass für große n der Einfluss von λ abnimmt. Dies bedeutet, dass endlich viele Sprünge bei Hochfrequenzdaten keinen Einfluss haben, so wie wir es in der Theorie betrachteten. Schauen wir uns die Abbildungen A.10 und A.11 an, so erkennen wir eine abfallende Tendenz der p-Werte mit zunehmendem Exponenten p . In der Theorie zur asymptotischen Verteilung unseres Schätzers haben wir Einschränkungen an die Höhe des Exponenten gemacht. Damit lassen sich die ablehnenden Entscheidungen des Test u.a. erklären.

Abschließend können wir zusammenfassen, dass die theoretischen Ergebnisse durch die Simulationen bestätigt wurden. Das bedeutet, Konsistenz und die Unabhängigkeit von Sprüngen sowie der Hinweis auf asymptotische Normalverteilung konnten wir für

3.3. SIMULATION

große n zeigen. Ebenso notwendige Limitierungen an r und s in der Theorie konnten wir anhand der Abbildungen darstellen.

4 Selbstähnliche Prozesse

Zeitliche Verläufe von Aktienkursen und anderen Wertpapieren am Finanzmarkt haben oft die Skalierungseigenschaft von selbstähnlichen Prozessen. Als ein berühmtes Beispiel kann man hier die Brownsche Bewegung angeben, welche im Black-Scholes Modell [11] verwendet wird. Sie ist aus der Sicht der stabilen Prozesse 2–stabil, was gleich bedeutend mit $\frac{1}{2}$ –selbstähnlich (0.5–ss) ist. In verschiedenen Arbeiten von Mandelbrot et al. (1963), Barndorff-Nielsen et al. (2001) und Carr et al. (2002) und (2007) werden selbstähnliche Prozesse im Kontext der Finanzbewertung und Aktienkursmodellierung sowie im speziellen Bereich der Bewertung von Derivaten verwendet. Zu den selbstähnlichen Prozessen gehören unter anderem eine Klasse von Lévy Prozessen, bestimmte nicht stationäre Prozesse sowie stochastische Prozesse, die keine Semimartingale sind. Beispiele sind die Brownsche Bewegung, die Fraktionale Brownsche Bewegung und der Bessel Prozess. Eine kurze Zusammenfassung zu selbstähnlichen additiven Prozessen und deren Anwendung bei der finanzmathematischen Modellierung gibt Nolder (2003).

Zunächst beschreiben wir selbstähnliche Prozesse und zeigen einen Zusammenhang zu Lévy Prozessen. Danach betrachten wir drei verschiedene Konzepte zum schätzen der integrierten Volatilität.

4.1 Mathematische Grundlagen

In diesem Abschnitt werden wichtige Definitionen und theoretische Ergebnisse wiederholt. Weiterhin beweisen wir eine theoretische Eigenschaft, die selbstähnliche Prozesse und Lévy Prozesse verbindet. Zuerst definieren wir einen selbstähnlichen Prozess $(X_r)_{r \geq 0}$.

Definition 4.1.1 Ein stochastischer Prozess $(X_r)_{r \geq 0}$ heißt selbstähnlich, wenn für jedes $a > 0$ ein $b > 0$ existiert, so dass

$$\{X_{at}\} \stackrel{d}{=} \{bX_t\} \quad \forall t \geq 0 \quad (4.1)$$

gilt.

Satz 4.1.2 Es sei $(X_r)_{r \geq 0}$ ein nicht trivialer selbstähnlicher additiver Prozess. Dann existiert ein $H > 0$, so dass $b = a^H$ für das b aus (4.1). Der Prozess heißt dann H -selbstähnlich.

Beweis: Sato (1999)

Im Weiteren verwenden wir für H-selbstähnlich die Abkürzung H-ss. Als ein Beispiel für selbstähnliche Prozesse betrachten wir die Fraktionelle Brownsche Bewegung $(B_H(t))_{t \geq 0}$, $0 < H < 1$. Diese ist ein reellwertiger Gaussprozess mit

$$E(B_H(t)) = 0$$

$$E(B_H(t)B_H(s)) = \frac{1}{2} \{t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}\} E[(B_H(1))^2].$$

Für jedes $a > 0$ gilt nun:

$$\begin{aligned} E(B_H(at)B_H(as)) &= \frac{1}{2} \{(at)^{2H} + (as)^{2H} - (a|t - s|)^{2H}\} E[(B_H(1))^2] \\ &= a^{2H} E(B_H(t)B_H(s)) \\ &= E((a^H B_H(t))(a^H B_H(s))). \end{aligned}$$

Damit gilt $\{B_H(at)\} \stackrel{d}{=} \{a^H B_H(t)\}$ was bedeutet, dass $(B_H(t))_{t \geq 0}$ H-ss ist.

Definition 4.1.3 Sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathbb{R} . Es heißt selbstzerlegbar oder von der Klasse L, wenn für jedes $b > 1$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ρ auf \mathbb{R} existiert, so dass

$$\hat{\mu}(u) = \hat{\mu}(b^{-1}u)\hat{\rho}_b(u),$$

wobei $\hat{\mu}$ und $\hat{\rho}$ die charakteristischen Funktionen der Wahrscheinlichkeitsmaße bezeichnet.

Die charakteristische Funktion eines selbstzerlegbaren Maßes lautet:

$$E(e^{iuX_t}) = \exp\left(t\left(iub(h) - \frac{1}{2}u^2c + \int (e^{iux} - 1 - iuh(x)) \frac{k(x)}{|x|} dx\right)\right)$$

mit $k(x) \geq 0$, $\int_{-1}^1 |x|k(x) < \infty$ und $k(x)$ ist steigend auf $(-\infty, 0)$ und fallend auf $(0, \infty)$. Ein Zusammenhang zwischen selbstähnlichen Prozessen und der Selbstzerlegbarkeit ist der folgende:

Satz 4.1.4 Sei $(X_t)_{t \geq 0}$ ein selbstähnlicher stochastischer Prozess, dann ist für jedes $t \geq 0$ die Verteilung von X_t selbstzerlegbar.

Beweis: Sato (1999)

Dieses sowie andere Ergebnisse bzgl. der Selbstzerlegbarkeit und selbstähnlicher Prozesse findet man im Buch von Sato (1999).

Wenn $(X_r)_{r \geq 0}$ ein Lévy Prozess ist und

$$Y = \int f dX_r,$$

so heißt X_r „background driven Lévy process“ (BDLP) von Y . Eine Beziehung zwischen Lévy und selbstähnlichen Prozessen untersuchten Jeanblanc et al. (2002) und kamen zu folgendem Ergebnis.

Satz 4.1.5 *Es sei $(X_r)_{r \geq 0}$ ein additiver H -ss Prozess, dann sind zwei unabhängige und identisch verteilte Lévy Prozesse $(Y_t^{(-)})_{t \geq 0}$ und $(Y_t^{(+)})_{t \geq 0}$ folgendermaßen definiert*

$$Y_t^{(-)} := \int_{e^{-t}}^1 \frac{dX_r}{r^H}$$

und

$$Y_t^{(+)} := \int_1^{e^t} \frac{dX_r}{r^H},$$
(4.2)

so dass für $(X_r)_{r \geq 0}$ gilt:

$$X_r = \begin{cases} \int_{\log(\frac{1}{r})}^{\infty} e^{-tH} dY_t^{(-)} & 0 \leq r < 1 \\ X_1 + \int_0^{\log r} e^{tH} dY_t^{(+)} & r \geq 1. \end{cases}$$
(4.3)

Der BDLP von X_1 ist $(Y_{\frac{s}{H}}^{(-)})_{s \geq 0}$.

Beweis: Jeanblanc et al. (2002)

Unter Anwendung dieses Satzes zeigen wir folgendes neues Resultat:

Satz 4.1.6 *Für jeden additiven, stationären H -ss Prozess $(X_r)_{r \geq 0}$ sind die Prozesse $(Y_t^{(-)})_{t \geq 0}$ und $(Y_t^{(+)})_{t \geq 0}$, die folgendermaßen definiert sind*

$$Y_t^{(-)} := \int_{e^{-t}}^1 \frac{dX_r}{r^H}$$

und

$$Y_t^{(+)} := \int_1^{e^t} \frac{dX_r}{r^H},$$
(4.4)

wieder additive, stationäre H -ss Prozesse.

Beweis:

Aus dem Satz 4.1.5 ist bekannt, dass $(Y_t^{(-)})_{t \geq 0}$ und $(Y_t^{(+)})_{t \geq 0}$ Lévy Prozesse sind. Somit müssen wir nur noch die H -ss Eigenschaft zeigen. Betrachten wir zuerst $(Y_{at}^{(-)})_{t \geq 0}$ und verwenden dabei folgende Beziehung aus Becker-Kern (2004) für eine stetige nicht fallende oder nicht steigende Funktion $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}_+$, mit $0 < \alpha < \beta$

$$\int_{\alpha}^{\beta} A(\gamma(t)) d(Y(\gamma(t)) - Y(\gamma(t))) = \int_{\gamma(\alpha)}^{\gamma(\beta)} A(t) dY(t).$$
(4.5)

Wir setzen $\gamma(x) = x^a$ und erhalten:

$$Y_{at}^{(-)} = \int_{e^{-at}}^1 \frac{dX_r}{r^H} = \int_{e^{-t}}^1 \frac{d(X_{r^a} - X_0)}{r^{aH}}.$$

Nutzen wir nun die Stationarität aus, stellen wir folgende Beziehung fest:

$$\int_{e^{-t}}^1 \frac{d(X_{r^a} - X_0)}{r^{aH}} \stackrel{d}{=} \int_{e^{-t}}^1 \frac{dX_{r^a}}{r^{aH}}.$$

Verwenden wir die Summendarstellung des stochastischen Integrals für die Zerlegung $r_0 = e^{-t} < r_1 < \dots < r_n = 1$ und $r_{i+1} = r_i + \Delta$, wobei in diesem Abschnitt $\Delta = \frac{1-e^{-t}}{n} = \frac{\bar{\Delta}}{n}$ gilt, können wir schreiben:

$$\int_{e^{-t}}^1 \frac{dX_{r^a}}{r^{aH}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{r_i^{aH}} \left(X_{r_{i+1}^a} - X_{r_i^a} \right).$$

Die r_i hängen von der Wahl des n ab. Zur Vereinfachung schreiben wir jedoch nur r_i statt $r_{n,i}$. Nun wählen wir eine Sequenz von Zufallsvariablen X' , die genau wie X verteilt und von dieser unabhängig ist:

$$\frac{X_{r_{i+1}^a} - X_{r_i^a}}{r_i^{aH}} \stackrel{d}{=} \frac{a^H}{r_i^{aH}} X'_{\frac{r_{i+1}^a - r_i^a}{ar_i^{a-1}}}.$$

Weiterhin definieren wir eine neue Indexreihe u_i mit $u_0 := r_0$ und

$$\frac{r_{i+1}^a - r_i^a}{ar_i^a} =: \frac{u_{i+1} - u_i}{u_i} = \frac{u_{i+1}}{u_i} - 1.$$

Dabei gilt zur Vereinfachung wieder $u_{n,i} = u_i$. Im Folgenden entwickeln wir mittels Taylorentwicklung um Null die Funktion $g(\Delta) = r_{i+1}^a = (r_i + \Delta)^a$, wobei $r_i < \bar{r}_i = r_i + \bar{\Delta} < r_{i+1}$ ist und bekommen

$$\begin{aligned} \frac{r_{i+1}^a - r_i^a}{ar_i^a} &= \frac{ar_i^{a-1}\Delta + a(a-1)\bar{r}_i^{a-2}\Delta^2}{ar_i^a} \\ &= \frac{\Delta + (a-1)\bar{r}_i^{a-2}r_i^{-a+1}\Delta^2}{r_i}. \end{aligned}$$

Mit diesem Ergebnis gelangen wir zu folgendem Zusammenhang für die $(u_i)_{i=0,\dots,n}$

$$u_{i+1} = u_i \left(1 + \frac{\Delta + (a-1)\bar{r}_i^{a-2}r_i^{-a+1}\Delta^2}{r_i} \right)$$

und erhalten eine explizite Form:

$$u_n = u_0 \prod_{i=0}^{n-1} \left(1 + \frac{\Delta + (a-1)\bar{r}_i^{a-2}r_i^{-a+1}\Delta^2}{r_i} \right).$$

Wenn wir nun zeigen können, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n$ ist, erhalten wir die gleichen Integrationsgrenzen für das stochastische Integral. Dabei sei bemerkt, dass r_n der Endpunkt des betrachteten Zeitintervalles ist, auf dem der Prozess lebt.

$$\frac{r_n}{r_0} = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{r_{i+1}}{r_i} = \prod_{i=0}^{n-1} \left(1 + \frac{\Delta}{r_i} \right)$$

Wir zeigen, dass folgende Grenzwerte gleich sind:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^{n-1} \left(1 + \frac{\Delta}{r_i}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^{n-1} \left(1 + \frac{\Delta + (a-1)r_i^{a-2}r_i^{-a+1}\Delta^2}{r_i}\right). \quad (4.6)$$

Die rechte Seite wird nach oben unter Einbeziehung folgender Eigenschaften abgeschätzt:

$$\begin{aligned} 0 \leq L = 1 - e^{-t} < \infty \quad \forall t \quad 0 \leq t \leq \infty \\ -\infty < r_0 = e^{-t} \leq r_i \leq 1 = r_n \quad \text{für feste } t \text{ und } \quad \forall i = 0, \dots, n. \end{aligned}$$

Wir erhalten mit $0 < a < \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^{n-1} \left(1 + \frac{\Delta + (a-1)r_i^{a-2}r_i^{-a+1}\Delta^2}{r_i}\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^{n-1} \left(1 + \frac{\Delta}{r_i} + \frac{K}{n^2}\right)$$

wobei K endlich ist. Nutzen wir die logarithmische Transformation, bekommen wir folgende Ungleichung:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \log \left(1 + \frac{\Delta}{r_i}\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \log \left(1 + \frac{\Delta}{r_i} + \frac{K}{n^2}\right).$$

In der mathematischen Literatur ist es wohl bekannt, dass $(1 + \frac{K}{n^2})^n$ gegen 1 strebt, für $n \rightarrow \infty$ und das $0 \leq \log \left(1 + \frac{\Delta}{r_i}\right)$ gilt für alle $i \in \{0, \dots, n\}$. Somit schlussfolgern wir Folgendes :

$$\begin{aligned} 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \log \left(\frac{1 + \frac{\Delta}{r_i} + \frac{K}{n^2}}{1 + \frac{\Delta}{r_i}}\right) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \log \left(1 + \frac{K}{n^2 + \frac{n^2\Delta}{r_i}}\right) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \log \left(1 + \frac{K}{n^2}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \log \left(1 + \frac{K}{n^2}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \log \left(1 + \frac{K}{n^2}\right)^n = 0. \end{aligned}$$

Zusammenfassend können wir sagen, dass (4.6) gilt und mit der Bedingung $r_0 = u_0$ wissen wir, dass u_n und r_n gegen den gleichen Grenzwert konvergieren für $n \rightarrow \infty$. Somit gilt:

$$\begin{aligned} Y_{at}^{(-)} &= \int_{e^{-at}}^1 \frac{dX_r}{r^H} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{r_i^{aH}} (X_{r_{i+1}^a} - X_{r_i^a}) \stackrel{d}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} a^H X'_{\frac{r_{i+1}^a - r_i^a}{ar_i^{aH}}} \\ &\stackrel{d}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} a^H X'_{\frac{u_{i+1} - u_i}{u_i}} \stackrel{d}{=} a^H \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{u_i^H} X'_{u_{i+1} - u_i} \stackrel{d}{=} a^H \int_{e^{-t}}^1 \frac{dX'_u}{u^H} = a^H Y_t^{(-)}. \end{aligned}$$

Damit ist die H-ss Eigenschaft von $(Y_t^{(-)})_{t \geq 0}$ bewiesen. Der Nachweis dieser Eigenschaft für $(Y_t^{(+)})_{t \geq 0}$ verläuft im Wesentlichen genauso und ist hier nicht gezeigt. □

Nachdem wir einen Zusammenhang von selbstähnlichen und Lévy Prozessen gezeigt haben, nutzen wir für die weitere Arbeit die Lévy-Itô-Zerlegung. Wir zerlegen $(Y_t^{(-)})_{t \geq 0}$ und $(Y_t^{(+)})_{t \geq 0}$ wie folgt:

$$\begin{aligned} Y_t^{(-)} &= \tilde{B}_t^{(-)} + L_t^{(-)} = \mu t + \sigma B_t^{(-)} + L_t^{(-)} \\ Y_t^{(+)} &= \tilde{B}_t^{(+)} + L_t^{(+)} = \mu t + \sigma B_t^{(+)} + L_t^{(+)} \end{aligned}$$

Dabei sind $(B_t^{(-)})_{t \geq 0}$ und $(B_t^{(+)})_{t \geq 0}$ unabhängige standard Brownsche Bewegungen sowie $(L_t^{(-)})_{t \geq 0}$ und $(L_t^{(+)})_{t \geq 0}$ reine unabhängige Sprungprozesse. Der H-ss additive Prozess $(X_r)_{r \geq 0}$ lässt sich also folgendermaßen schreiben:

$$X_r = \begin{cases} \int_{\log(\frac{1}{r})}^{\infty} e^{-tH} \mu dt + \int_{\log(\frac{1}{r})}^{\infty} e^{-tH} \sigma dB_t^{(-)} + \int_{\log(\frac{1}{r})}^{\infty} e^{-tH} dL_t^{(-)} & 0 \leq r < 1 \\ X_1 + \int_0^{\log r} e^{tH} \mu dt + \int_0^{\log r} e^{tH} \sigma dB_t^{(+)} + \int_0^{\log r} e^{tH} dL_t^{(+)} & r \geq 1. \end{cases} \quad (4.7)$$

Die logarithmische Transformation der Zeitskala wird mit $s_i = \log r_i$ bezeichnet. Dabei nehmen wir an, dass der Prozess $(X_r)_{r \geq 0}$ auf dem Zeitintervall $[e^0, e^s]$ lebt. Die Zuwächse $\delta_{n,i} = s_i - s_{i-1}$ mit $s_0 = 0, \dots, s_n = s$ haben entsprechend gute Eigenschaften, so dass bekannte Ergebnisse aus der Power-variationstheorie angewendet werden können.

Nachdem wir selbstähnliche Prozesse theoretisch betrachtet haben, schauen wir in dem nächsten Abschnitt auf Konzepte zur Schätzung der integrierten Volatilität.

4.2 Integrierte Volatilitätsschätzer

4.2.1 Power-variation

Das Konzept der Power-variation nutzen wir, um zum Beispiel die integrierte Volatilität eines additiven H-ss Prozesses zu schätzen. Sie kann mit (4.7) wie folgt geschrieben werden.

$$V_p(X_r) = \sum_{i=1}^n \left| \int_{s_{i-1}}^{s_i} e^{tH} \mu dt + \int_{s_{i-1}}^{s_i} e^{tH} \sigma dB_t^{(+)} + \int_{s_{i-1}}^{s_i} e^{tH} dL_t^{(+)} \right|^p \quad (4.8)$$

Setzen wir in diesem Abschnitt weiterhin voraus, dass $\delta_{n,i} = s_i - s_{i-1}$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ gleich sind, können wir folgendes Ergebnis formulieren.

Satz 4.2.1 *Es sei $(X_r)_{r \geq 0}$ ein additiver H-ss Prozess, dann gilt*

1. *für einen rein stetigen Prozess:*

a) $p > 2$

$$V_p(X_r) \xrightarrow{P} 0$$

b) $p = 2$

$$V_p(X_r) \xrightarrow{P} \frac{\sigma^2}{2H} (e^{2Hs} - 1)$$

c) $p < 2$

$$V_p(X_r) \xrightarrow{P} \infty,$$

2. für einen reinen Sprungprozess:

a) $p > \beta$

$$V_p(X_r) \xrightarrow{P} \sum \left(\int_{u-}^u e^{tH} dL_t^{(+)} : 0 < u < s \right)$$

b) $p < \beta$

$$V_p(X_r) \xrightarrow{P} \infty,$$

3. für einen Prozess mit stetiger Komponente und Sprunganteil:

a) $\beta < p < 2$

$$V_p(X_r) \xrightarrow{P} \infty$$

b) $\beta < p = 2$

$$V_p(X_r) \xrightarrow{P} \frac{\sigma^2}{2H} (e^{2Hs} - 1) + \sum \left(\int_{u-}^u e^{tH} dL_t^{(+)} : 0 < u < s \right)$$

c) $\beta < 2 < p$

$$V_p(X_r) \xrightarrow{P} \sum \left(\int_{u-}^u e^{tH} dL_t^{(+)} : 0 < u < s \right).$$

Beweis:

Zur Vereinfachung des Beweises nehmen wir an, dass $\mu = 0$ gilt.

Für den Beweis des ersten Punktes folgern wir aus den Resultaten von Woerner (2003) sofort die Ergebnisse für $p > 2$ und $p < 2$. Der Fall $p = 2$ ergibt sich folgendermaßen:

$$\int_0^s \sigma^2 e^{2tH} dt = \frac{\sigma^2}{2H} e^{2tH} \Big|_0^s = \frac{\sigma^2}{2H} (e^{2Hs} - 1).$$

Damit haben wir die erste Aussage des Satzes bewiesen.

Die Ergebnisse im Falle des reinen Sprungprozesses sind eine direkte Anwendung der in [32] dargestellten Ergebnisse.

Es bleibt nun noch die dritte Aussage zu beweisen. Wir wissen, dass der Prozess $(X_r)_{r \geq 0}$ in einen stetigen und einen Sprunganteil, die unabhängig sind, zerlegt werden kann.

$$X_r = X_r^c + X_r^j$$

Weiterhin nutzen wir folgende Ungleichungen, die sich mit der Hilfe der Dreiecks- und der Minkowski Ungleichung zeigen lassen. Für $p \leq 1$ haben wir

$$\sum_{i=1}^n |a_i|^p - |b_i|^p \leq \sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p$$

und für $p > 1$ gilt.

$$\left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} - \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Wenden wir diese an, erhalten wir für $p \leq 1$:

$$V_p(X_r^c) - V_p(X_r^j) \leq V_p(X_r)$$

und für $p > 1$:

$$(V_p(X_r^c))^{\frac{1}{p}} - (V_p(X_r^j))^{\frac{1}{p}} \leq (V_p(X_r))^{\frac{1}{p}}.$$

Im Fall $\beta < p < 2$ strebt die linke Seite der beiden Ungleichungen in Wahrscheinlichkeit gegen unendlich und wir können dies auch für die rechte Seite folgern.

Nun betrachten wir für den Fall 3.b) folgenden Term:

$$\begin{aligned} & \left| V_p(X_r) - \frac{\sigma^2}{2H} (e^{2Hs} - 1) - \sum \left(\int_{u-}^u e^{tH} dL_t^{(+)} : 0 < u < s \right) \right| \\ & \leq |V_p(X_r) - V_p(X_r^c) - V_p(X_r^j)| \\ & \quad + |V_p(X_r^c) + V_p(X_r^j) \\ & \quad - \frac{\sigma^2}{2H} (e^{2Hs} - 1) - \sum \left(\int_{u-}^u e^{tH} dL_t^{(+)} : 0 < u < s \right)|. \end{aligned}$$

Dabei kennen wir die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit für den zweiten Betrag aus den ersten beiden Teilen unseres Satzes. Weiterhin können wir für $p \leq 1$ die Dreiecksungleichung auf $V_p(X_r)$ anwenden und erhalten:

$$0 \leq |V_p(X_r) - V_p(X_r^c) - V_p(X_r^j)| \leq 0.$$

Für den Fall $p > 1$ betrachten wir die folgende Beziehung:

$$\begin{aligned} & \left| (V_p(X_r))^{\frac{1}{p}} - \left(\frac{\sigma^2}{2H} (e^{2Hs} - 1) + \sum \left(\int_{u-}^u e^{tH} dL_t^{(+)} : 0 < u < s \right) \right)^{\frac{1}{p}} \right| \\ & \leq |(V_p(X_r))^{\frac{1}{p}} - (V_p(X_r^c))^{\frac{1}{p}} - (V_p(X_r^j))^{\frac{1}{p}}| \\ & \quad + |(V_p(X_r^c))^{\frac{1}{p}} + (V_p(X_r^j))^{\frac{1}{p}} \\ & \quad - \left(\frac{\sigma^2}{2H} (e^{2Hs} - 1) + \sum \left(\int_{u-}^u e^{tH} dL_t^{(+)} : 0 < u < s \right) \right)^{\frac{1}{p}}|. \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Dreiecksungleichung haben wir die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit gegen Null für den zweiten Betrag. Wenden wir auf $(V_p(X_r))^{\frac{1}{p}}$ die Minkowski Ungleichung an, so ist der erste Betrag Null. Damit hätten wir diese Aussage gezeigt. Um den letzten Teil der 3. Aussage zu zeigen, machen wir ähnliche Umformungen und erhalten das Ergebnis. □

Das Konzept der Power-variation wurde durch einen Normierungsfaktor erweitert. Im folgendem Abschnitt betrachten wir dieses und wenden es auf selbstähnliche Prozesse an.

4.2.2 Normierte Power-variation

Die Power-variation führt nur in einigen Fällen für p und β zu einem nicht trivialen Grenzwert. Dabei lässt sich zum Beispiel im rein stetigen Fall die integrierte Varianz schätzen, jedoch ist es nicht möglich, ein Ergebnis für die integrierte Volatilität zu erhalten.

Barndorff-Nielsen und Shephard führten eine Normierungssequenz ein, um nicht triviale Grenzwerte zu erhalten und gelangten so zur normierten Power-variation. Für die Zeitabstände $\delta_{n,i} = s_i - s_{i-1}$ benötigen wir in diesem Abschnitt den Begriff der ϵ -Balance. Die normierte Power-variation eines additiven H-ss Prozesses können wir mit (4.7) schreiben:

$$V_p(X_r, \Delta_n^\gamma) = \sum_{n=1}^n \delta_{n,i}^\gamma \left| \int_{s_{i-1}}^{s_i} e^{-tH} \mu dt + \int_{s_{i-1}}^{s_i} e^{-tH} \sigma dB_t^{(+)} + \int_{s_{i-1}}^{s_i} e^{-tH} dL_t^{(+)} \right|^p. \quad (4.9)$$

Damit formulieren wir folgendes Ergebnis:

Satz 4.2.2 Sei $(X_r)_{r \geq 0}$ ein additiver H-ss Prozess, der folgende Eigenschaften hat:

- für $\beta < 1$ wählen wir $h=0$
- für $\beta = 1$ und $\int_{|x|>1} k(x)dx < \infty$ wählen wir $h(x) = x$
- für $\beta = 1$ und $\frac{k(x)}{|x|}$ ist symmetrisch und gerade wählen wir ein ungerades und symmetrisches h
- für $\beta > 1$ können wir jedes h wählen.

Weiter soll folgende Taylordarstellung für $x \rightarrow 0$ möglich sein:

$$\frac{k(x)}{|x|} = \sum_{k=0}^n \frac{c_k x^k + \kappa_k |x|^k}{|x|^{1+\beta}} + o\left(\frac{|x|^n}{|x|^{1+\beta}}\right)$$

mit $\beta - n \leq 0$ und $\kappa_0 = 0$. Dann erhalten wir für $0 < p < \beta$ im Falle, dass der BDLP ein stabiler Prozess oder $p \neq \beta - 1$ ist, die folgenden Ergebnisse, wobei $\mu_p = E(|u|^p)$ mit $u \sim N(0, 1)$ und $\mu_{\beta,p} = E(|S^\beta|^p)$ mit S^β ist eine symmetrische β - stabile Zufallsvariable mit dem Lévy Triplet $(0, 0, \beta|x|^{-1-\beta})$:

1. Für einen rein stetigen Prozess und einer $\frac{1}{2}$ -balancierten Zeiterlegung gilt:

$$V_p \left(X_r, \Delta_n^{1-\frac{p}{2}} \right) \xrightarrow{P} \frac{\mu_p \sigma^p}{pH} (e^{pHs} - 1).$$

2. Für einen reinen Sprungprozess und einer ϵ -balancierten Zeiterlegung gilt:

$$V_p \left(X_r, \Delta_n^{1-\frac{p}{\beta}} \right) \xrightarrow{P} \frac{c_0^{\frac{p}{\beta}} \mu_{p,\beta} \sigma^p}{pH \beta^{\frac{p}{\beta}}} (e^{pHs} - 1).$$

3. Für einen Prozess mit einem stetigen und einem Sprunganteil sowie einer $\frac{1}{2}$ -balancierten Zeiterlegung gilt:

$$V_p \left(X_r, \Delta_n^{1-\frac{p}{2}} \right) \xrightarrow{P} \frac{\mu_p \sigma^p}{pH} (e^{pHs} - 1).$$

Beweis:

Für den Beweis des ersten Teiles verwenden wir das Theorem 4.1 von Barndorff-Nielsen und Shephard (2006) und es muss lediglich gelten $0 < p < \infty$. Wir zeigen

$$\frac{\sum_{i=1}^n \delta_{n,i} |e^{\gamma \zeta_i H} - e^{\gamma \xi_i H}|}{\sqrt{\min_i \delta_{n,i}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

mit $\gamma > 0$ und $s_0 \leq \xi_1 \leq \zeta_1 \leq s_1 \leq \xi_2 \leq \zeta_2 \leq \dots \leq \xi_n \leq \zeta_n \leq s_n$. Dies ist wie folgt möglich:

$$0 \leq \frac{\sum_{i=1}^n \delta_{n,i} |e^{\gamma \zeta_i H} - e^{\gamma \xi_i H}|}{\sqrt{\min_i \delta_{n,i}}} \leq \frac{\max_i \delta_{n,i}}{\sqrt{\min_i \delta_{n,i}}} \sum_{i=1}^n e^{\gamma s_i H} - e^{\gamma s_{i-1} H}$$

wobei die Summe eine Teleskopsumme ist und somit endlich und der Faktor nach Voraussetzung gegen Null geht. Alle anderen Annahmen sind auf Grund der Modellwahl erfüllt. Somit können wir der gleichen Argumentation folgen, die zum Beweis des Satzes 4.2.1 für rein stetige Prozesse im Fall $p = 2$ geführt hat.

Der Beweis der zweiten Aussage verläuft ähnlich. Die Voraussetzungen des Theorems 1 aus dem Artikel von Woerner (2006) sind erfüllt. Ebenso sind, wie im stetigen Fall, dann die Integrale zu berechnen, und wir erhalten das zweite Ergebnis.

Für den Beweis der dritten Aussage verwenden wir $X_r = X_r^c + X_r^j$ und es sei darauf hingewiesen, dass wir nur den Fall $p < \beta$ haben und immer $\beta < 2$ gilt, weil sonst kein Sprunganteil vorhanden wäre. Die Dreiecksungleichung nutzen wir für $p \leq 1$

$$V_p \left(X_r, \Delta_n^{1-\frac{p}{2}} \right) \leq V_p \left(X_r^c, \Delta_n^{1-\frac{p}{2}} \right) + V_p \left(X_r^j, \Delta_n^{1-\frac{p}{2}} \right)$$

und die Minkowski Ungleichung für $p > 1$

$$\left(V_p \left(X_r, \Delta_n^{1-\frac{p}{2}} \right) \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(V_p \left(X_r^c, \Delta_n^{1-\frac{p}{2}} \right) \right)^{\frac{1}{p}} + \left(V_p \left(X_r^j, \Delta_n^{1-\frac{p}{2}} \right) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Für den stetigen Teil kennen wir die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit aus dem ersten Teil unseres Satzes. Weiterhin nutzen wir auch das zweite Ergebnis für den reinen Sprungprozess und erhalten:

$$V_p \left(X_r^j, \Delta_n^{1-\frac{p}{2}} \right) \leq \max_i \delta_i^{\frac{p}{\beta}-\frac{p}{2}} V_p \left(X_r^j, \Delta_n^{1-\frac{p}{\beta}} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Damit wären die Behauptungen gezeigt. □

Bemerkung: Wir haben einen nicht trivialen Grenzwert für reine Sprungprozesse für den Fall $p > \beta$ mit der Power-variation und nutzen daher die genormte Power-variation nur für $p < \beta$.

Aufbauend auf die genormte Power-variation untersuchen wir im nächsten Abschnitt die genormte Bipower-Variation im Falle selbstähnlicher Prozesse.

4.2.3 Normierte Bipower-variation

Neben der Power- und der genormten Power-variation wird in der Literatur die genormte Bipower-variation betrachtet. Dies wollen wir auch für rein stetige additive H-ss Prozesse tun. In diesem Abschnitt benötigen wir die $\frac{1}{2}$ -Balance sowie die Eigenschaft (2.2) für die Zeitabstände. Wenn wir nun wiederum die Beziehung (4.7) nutzen, stellt sich die genormte Bipower-variation für stetige additive H-ss Prozesse wie folgt dar:

$$V_{a,b}(X_r, \Delta_n^{\gamma,\eta}) = \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{n,i}^\gamma \delta_{n,i+1}^\eta |\Delta X_i^{(+)}|^a |\Delta X_{i+1}^{(+)}|^b. \quad (4.10)$$

Wir können nun folgenden Satz formulieren:

Satz 4.2.3 *Es sei $(X_r)_{r \geq 0}$ ein stetiger additiver H-ss Prozess, dann gilt für $n \rightarrow \infty$ und $p = a + b$:*

$$V_{a,b} \left(X_r, \Delta_n^{\frac{1-a}{2}, \frac{1-b}{2}} \right) \xrightarrow{P} \frac{\mu_a \mu_b \sigma^p}{pH} (e^{pHs} - 1). \quad (4.11)$$

Beweis:

Der Beweis der Konvergenz für die Summen geht im wesentlichen genau wie im Beweis für den rein stetigen Fall von Satz 4.2.1 mit dem Integranden $(\sigma e^{tH})^{r+s}$ vorstatten. Dazu verwenden wir den Satz 3.1.2 aus Kapitel 3.1.1. □

Mit diesem Ergebnis schließen wir die theoretischen Betrachtungen für selbstähnliche Prozesse ab.

5 Zusammenfassung und Ausblicke

Unsere Arbeit schließen wir mit einer kurzen Zusammenfassung für den Teil der genormten Bipower-variation wie auch den Betrachtungen für selbstähnliche Prozesse ab. Während der Anfertigung dieser Arbeit sind viele Ideen entstanden, in deren Richtung weiter geforscht werden kann, um die Theorie aber auch die Praxis für den genormten Bipower-variationsschätzer weiter zu entwickeln und dessen Relevanz zu beschreiben. Diese stellen wir im Ausblicksabschnitt dar.

Zusammenfassung

Normierte Bipower-variation

Die genormte Bipower-variation als Schätzer für Potenzen der integrierten Volatilität für gleiche Zeitabstände wurde durch die Betrachtung unregelmäßiger Zeitabstände erweitert. Dabei nehmen wir eine Regularitätsbedingung (2.2) für die Zeitstruktur an, die darauf abzielt, dass für sehr sehr große Beobachtungsumfänge der Quotient benachbarter Zeitabstände gegen 1 geht. Dies bedeutet, dass im Vergleich keine sehr großen oder sehr kleine Beobachtungsabstände nebeneinander existieren, was in der Realität bei der Betrachtung von Hochfrequenzdaten auch Sinn macht.

Wir zeigten zuerst für einfache stetige Semimartingale die Konsistenz und verwendeten dann dieses Ergebnis, um es mit einem recht allgemeinen stetigen Mittelwertprozess additiv und unabhängig zu erweitern. Dabei stellte sich heraus, dass dieser keine wesentliche Rolle im hochfrequenten Bereich spielt. Dieses Ergebnis wiederum nutzten wir, um aufbauend unabhängigen Sprünge zu summieren, wobei der Sprungprozess ein Semimartingal ist. Dabei sind auch unendlich viele Sprünge zugelassen, die aber einer Integrabilitätsbedingung (Blumenthal-Gettoor-Index) genügen müssen. Wiederum haben die theoretischen Betrachtungen gezeigt, dass Sprünge im Falle vieler Beobachtungszeitpunkte keine wesentliche Rolle für das Schätzen der integrierten Volatilität spielen. Insgesamt haben wir einen Schätzer für die integrierte Volatilität und Potenzen dieser hergeleitet. Im Falle der Sprünge ist die Potenz kleiner als 2, kann aber sehr nahe an diese heran kommen. Praktisch gesehen haben wir nun eine Methode, um Volatilitätsswaps zu bewerten. Können wir davon ausgehen, dass der zu Grunde liegende primäre Prozess keine Sprünge hat, können wir sogar Varianzswaps und höhere Potenzen der integrierten Volatilität bewerten.

Die Verteilungstheorie für den genormten Bipower-variationsschätzer unterscheidet sich insofern von bisherigen Untersuchungen, dass wir paarweise Abhängigkeiten bei unregelmäßigen Zeitabständen vorliegen haben. Mit einem Ergebnis aus der Theorie für m -abhängige Zufallsvariablen konnten wir zeigen, dass die genormte Bipower-variation

asymptotisch normalverteilt ist. Dabei ergab sich, dass der Erwartungswert gegen die integrierte Volatilität strebt. Die Varianz des Schätzers hängt unter anderem von höheren Potenzen der integrierten Volatilität ab. Damit können wir neben dem Punktschätzer für die integrierte Volatilität auch einen Bereichsschätzer angeben.

Abschließend zu den theoretischen Betrachtungen wurde mittels Simulationsstudie bestätigt, dass die Konsistenz und die Verteilungstheorie haltbar sind. Insbesondere konnten wir den Einfluss der Regularitätsbedingung darstellen. Dabei wird, je mehr die Regularität verletzt ist, der Schätzer weiter unterschätzt. Es kann das Maximum des Quotienten von benachbarten Zeitabständen als Qualitätsmaßstab dienen. Unabhängig von der Regularitätsbedingung konnten wir auch feststellen, dass mit zunehmenden Beobachtungsumfang der Schätzer besser wird, was bedeutet, dass die Qualität des Schätzers durch einen hohen Stichprobenumfang auch bei schlechter Zeitstruktur verbessert werden kann. Die Beeinflussung des Schätzers durch die Parameter der betrachteten Prozesse wurden simulationstechnisch bestätigt. Insbesondere durch die Erhöhung der Potenz p kann man entscheiden, ob der zu Grunde liegende Volatilitätsprozess kleiner oder größer als 1 ist.

Abschließend können wir sagen, dass eine Theorie für die genormte Bipower-variation als Schätzer für die integrierte Volatilität bei unregelmäßigen Zeitabständen für Prozesse mit Mittelwertprozessen und Sprüngen gezeigt wurde.

Selbstähnliche Prozesse

Motiviert durch den wissenschaftlichen Beitrag von Carr et al. (2007) betrachteten wir selbstähnliche Prozesse. Wir beantworteten zuerst die Frage, ob ein additiver H-selbstähnlicher Prozess, der stationäre Zuwächse hat, mit der Transformation von Jeanblanc et al. (2002) wieder ein H-selbstähnlicher Lévy Prozess ist. Diese theoretische Betrachtung wurde in dieser Arbeit bewiesen. Professor Corcuera von der Universität Barcelona zeigte die Umkehrung dieser Behauptung, welche noch nicht veröffentlicht ist.

Anschließend untersuchten wir die Power-, genormte Power- und genormte Bipower-variation. Dabei stellten wir fest, dass die zu Grunde liegende Zeitstruktur der Prozesse wieder eine besondere Rolle spielt. So muss die logarithmierte Zeitstruktur die notwendigen Bedingungen erfüllen, die wir im ersten Teil dieser Arbeit beschrieben haben. Mit der Anwendung der Ergebnisse, von Barndorff-Nielsen und Shephard, Woerner und dem Resultat dieser Arbeit, zeigten wir die Konsistenz der Schätzer für H-selbstähnliche Prozesse. Somit haben wir einen Punktschätzer für die integrierte Volatilität bei vorliegendem H-selbstähnlichem Prozess.

Ausblick

In diesem Abschnitt beschreiben wir Ideen und Ansätze, die in der Zukunft weiter bearbeitet werden können.

Normierte Bipower-variation

Die Konsistenz der genormten Bipower-variation für beliebige Zeitabstände ist durch die Regularitätsbedingung an die Zeitstruktur eingeschränkt. Diese Limitierung an die Zeitstruktur aufzuweichen, ist ein interessanter Aspekt. Dabei könnte dies geschehen, in dem man den Normierungsfaktor verändert. Eine weitere Möglichkeit wäre, andere Beweisverfahren zu entwickeln.

Im ersten Teil der Arbeit wurden Prozesse betrachtet die durch eine Brownsche Bewegung vorangetrieben werden. Diese durch einen allgemeineren Prozess, zum Beispiel einen Lévy Prozess zu ersetzen, ist ebenso eine Weiterentwicklung. Dazu wäre die Einschränkung der Annahme, dass der Volatilitätsprozess vom zu Grunde liegendem Lévy Prozess bzw. in unserer Arbeit von der Brownschen Bewegung unabhängig ist, eine kompensierbare Annahme.

Die Bedingungen an den unabhängigen Mittelwertprozess zu entschärfen und Sprungprozesse über die Klasse der Semimartingale hinaus zu betrachten, ist ebenfalls wichtig. Insbesondere die Bedingungen an die Exponenten im Sprungbereich bei der Konsistenz sowie bei der Verteilungstheorie stellen eine wesentliche Einschränkung bei der Anwendbarkeit in der Realität dar.

Die grundsätzlichen Annahmen, dass unabhängige Zuwächse vorliegen, und diese aus der logarithmischen Transformation eines Aktienkurses kommen, könnte man versuchen zu verwerfen und die Theorie somit weiter entwickeln. Dabei ist insbesondere empirisch zu untersuchen, inwiefern die logarithmische Transformation aktuell immer noch Sinn macht. Zur Begründung ist dabei zu sagen, dass durch zunehmende Globalisierungsprozesse, d.h. zum Beispiel die Verstärkung von Informations- und Finanzströmen weltweit, die im 20. Jahrhundert beobachteten Kursentwicklungen neuen Regeln folgen.

Unsere eindimensionale Theorie auf den mehrdimensionalen Fall zu erweitern und hier Untersuchungen bzgl. verschiedener Abhängigkeiten durchzuführen ist, ein nächster Schritt. Dabei die Verknüpfung der Theorie bzgl. „Microstructure noise“ und der genormten Multipower-variationstheorie zu betrachten, ist ein weiterer Entwicklungspunkt. Hierbei kann die Arbeit von Voev (2006) hilfreich sein. Die Simulationen sind mit der Hilfe der Eulerschen Diskretisierung programmiert worden. Dabei könnte man in künftigen Untersuchungen den gemachten Fehler bzgl. dessen Auswirkungen auf den Schätzer untersuchen. Ebenso sind exakte Simulationsverfahren, die wesentlich komplexer und rechenaufwendiger sind, als Grundlage neuer Simulationsstudien anzuwenden. Dabei sollte man von rein stetigen Prozessen, über Prozesse mit unendlich vielen Sprüngen bis hin zu reinen Sprungprozessen mit einer endlichen Anzahl von Sprüngen betrachten. Die Verteilung der Sprunghöhen sollte man ebenso variieren wie den zu Grunde liegenden Variationsprozess. Dieser kann von einer Konstanten bis zu einer komplexen stochastischen Differentialgleichung mit Sprüngen beschrieben werden.

Ein Vergleich mit anderen Schätzmethoden für die integrierte Volatilität und damit die Bewertung, welche Methode in welchem Falle die Beste ist, ist ebenso eine weiterführende Aufgabe. Als Erweiterung dieser kann man die Schätzung verschiedener Volatilitäten im Vergleich betrachten.

Für die anwendungsbezogene Weiterführung der Arbeit ist insbesondere die praktische Anwendung der verschiedenen Schätzer auf reale Daten interessant. Dabei sind Indizes wie zum Beispiel der DAX aber auch die Betrachtung einzelner Aktien wichtig. Insbesondere die Bewertung von Volatilitätsderivaten mit der Hilfe verschiedener Schätzer, im Vergleich zu deren Marktpreis ist eine weitere Aufgabe. Die Simulation und Anwendung von Bereichsschätzern sind für die Realität wichtig.

Die simulationstechnische und praktische Untersuchung des Schätzers bzgl. der Problematik „Microstructure Noise“ ist ein wichtiger Punkt und kann damit zur Anwendung oder Weiterentwicklung der Theorie motivieren.

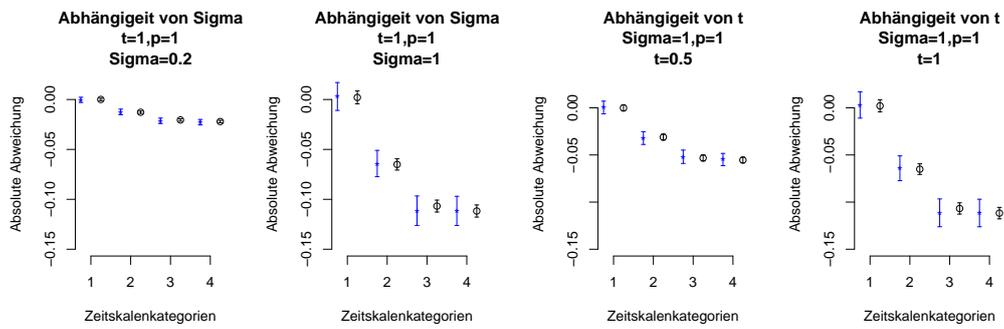
Selbstähnliche Prozesse

Bei den selbstähnlichen Prozessen sind ähnliche Weiterentwicklungen der Theorie möglich. So ist zum einen das Problem der Zeitstruktur zu betrachten. Zum anderen die Weiterentwicklung des genormten Bipower-variationsschätzers auf Prozesse mit Sprüngen. Bisher wurde nicht die Verteilungstheorie für die integrierte Volatilität für selbstähnliche Prozesse betrachtet. Daran anschließend könnte man eine umfassende Simulationsstudie zu qualitativen und quantitativen Beurteilung des Schätzers anschließen. Eine ebenso interessante Frage ist, inwieweit man selbstähnliche Prozesse in der Realität wiederfindet und ob diese Modelle einen Vorteil bei der Bewertung von Volatilitätsderivaten bringen.

Die Weiterentwicklung der Theorie, insbesondere die Verbindung von selbstähnlichen Prozessen und Lévy Prozessen sowie die Eigenschaften dieses Zusammenhangs können betrachtet werden.

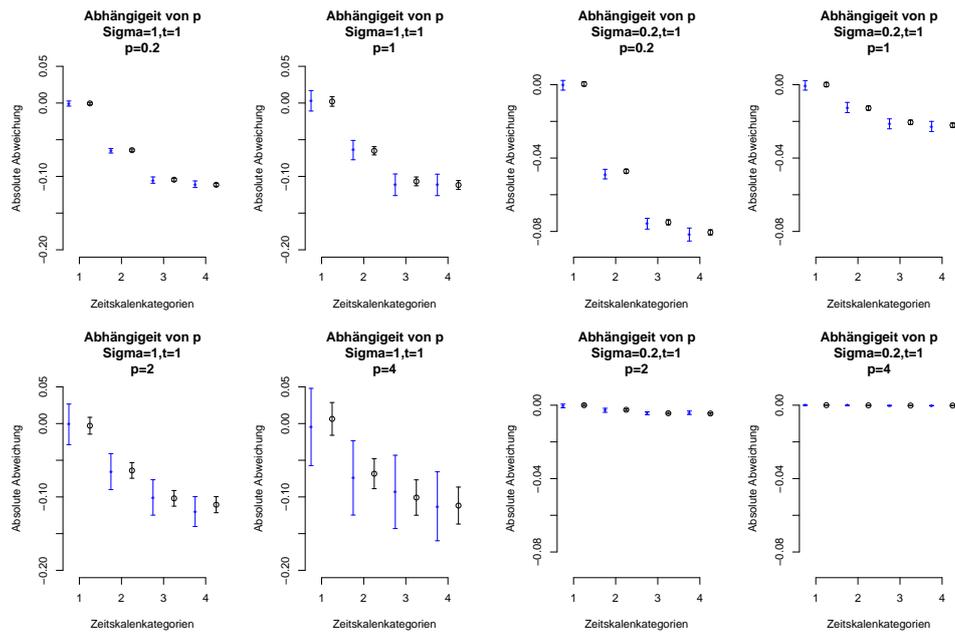
Abschließend können wir sagen, dass insbesondere die praktische Bewertung und die Anwendung verschiedener Schätzmethode in der Realität offen sind. Die allübergreifende Frage dabei könnte sein: Sind die Volatilitätsschätzer bzgl. ihrer quantitativen und qualitativen Eigenschaften geeignet, in der Risikomanagementtheorie und -praxis eingesetzt und insbesondere durch die Regulierungsbehörden auch anerkannt zu werden?

A Abbildungen



(a) Abhängigkeit von σ

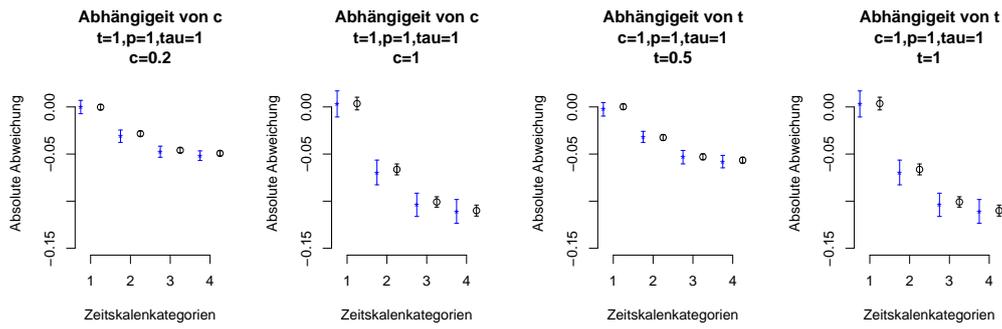
(b) Abhängigkeit von t



(c) Abhängigkeit von p bei $\sigma \geq 1$

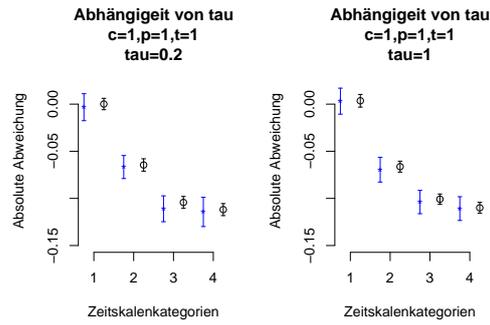
(d) Abhängigkeit von p bei $\sigma < 1$

Abbildung A.1: BM Differenzen - Schätzer minus wahrer Wert

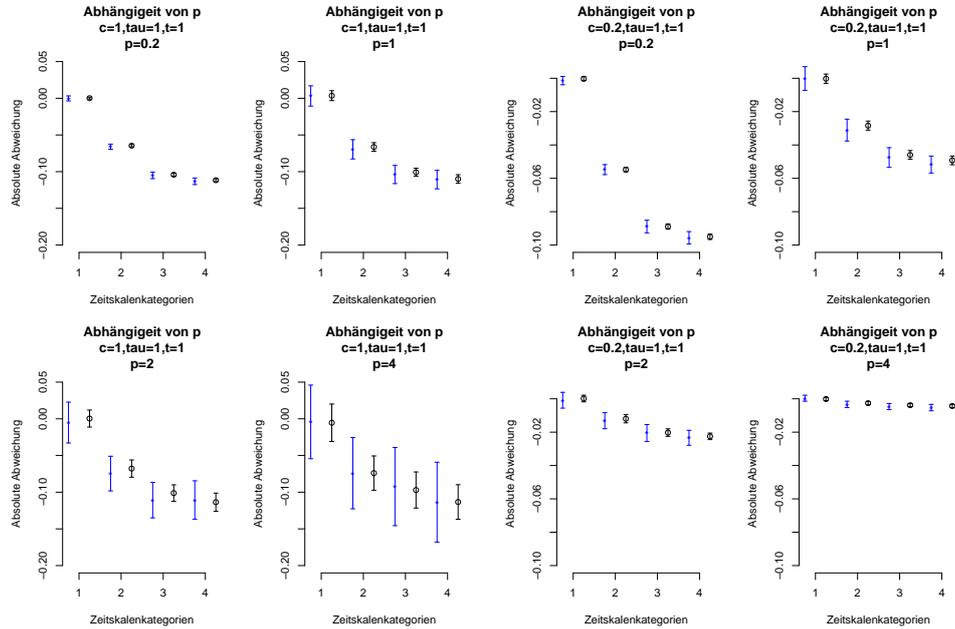


(a) Abhängigkeit von σ

(b) Abhängigkeit von t



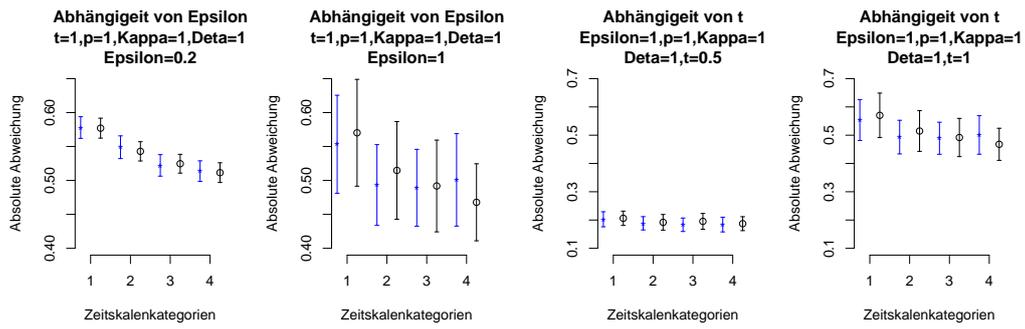
(c) Abhängigkeit von τ



(d) Abhängigkeit von p bei $c \geq 1$

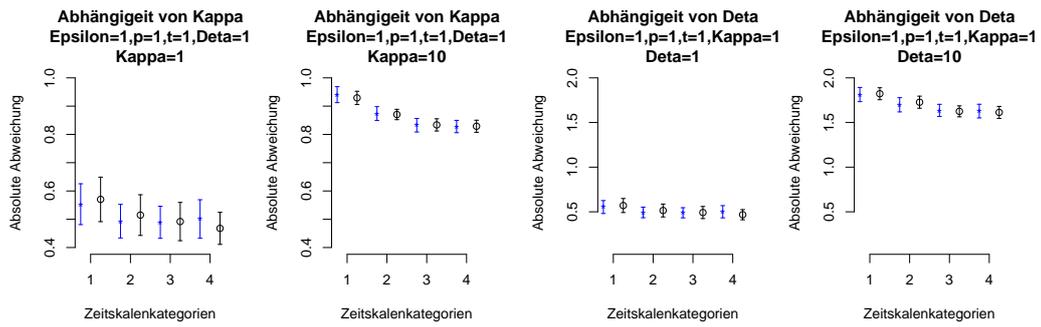
(e) Abhängigkeit von p bei $c < 1$

Abbildung A.2: OU Differenzen - Schätzer minus wahrer Wert



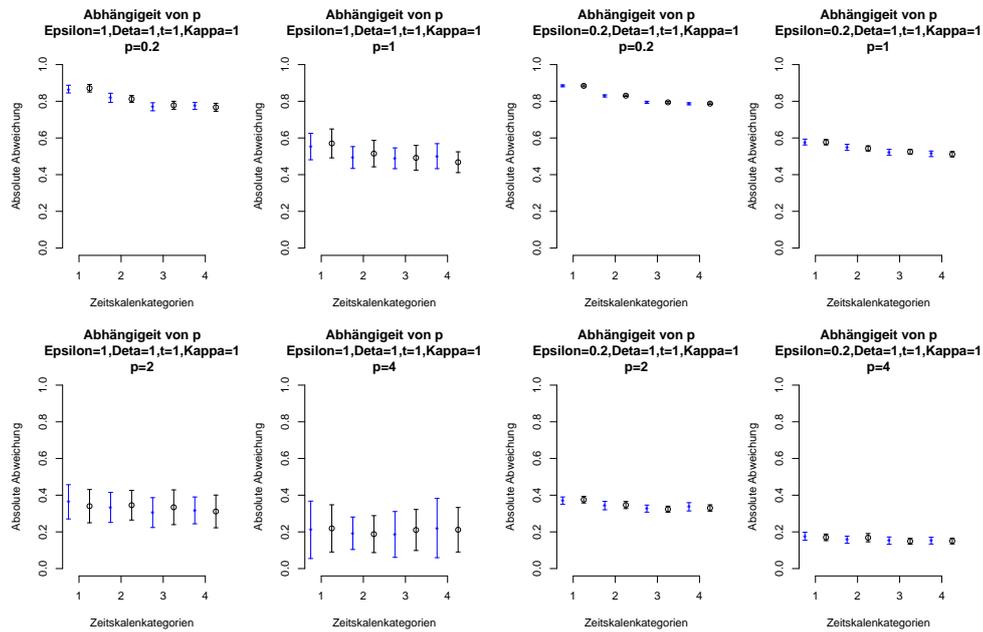
(a) Abhängigkeit von Epsilon

(b) Abhängigkeit von t



(c) Abhängigkeit von κ

(d) Abhängigkeit von θ



(e) Abhängigkeit von p bei $c \geq 1$

(f) Abhängigkeit von p bei $c < 1$

Abbildung A.3: SV Schätzer

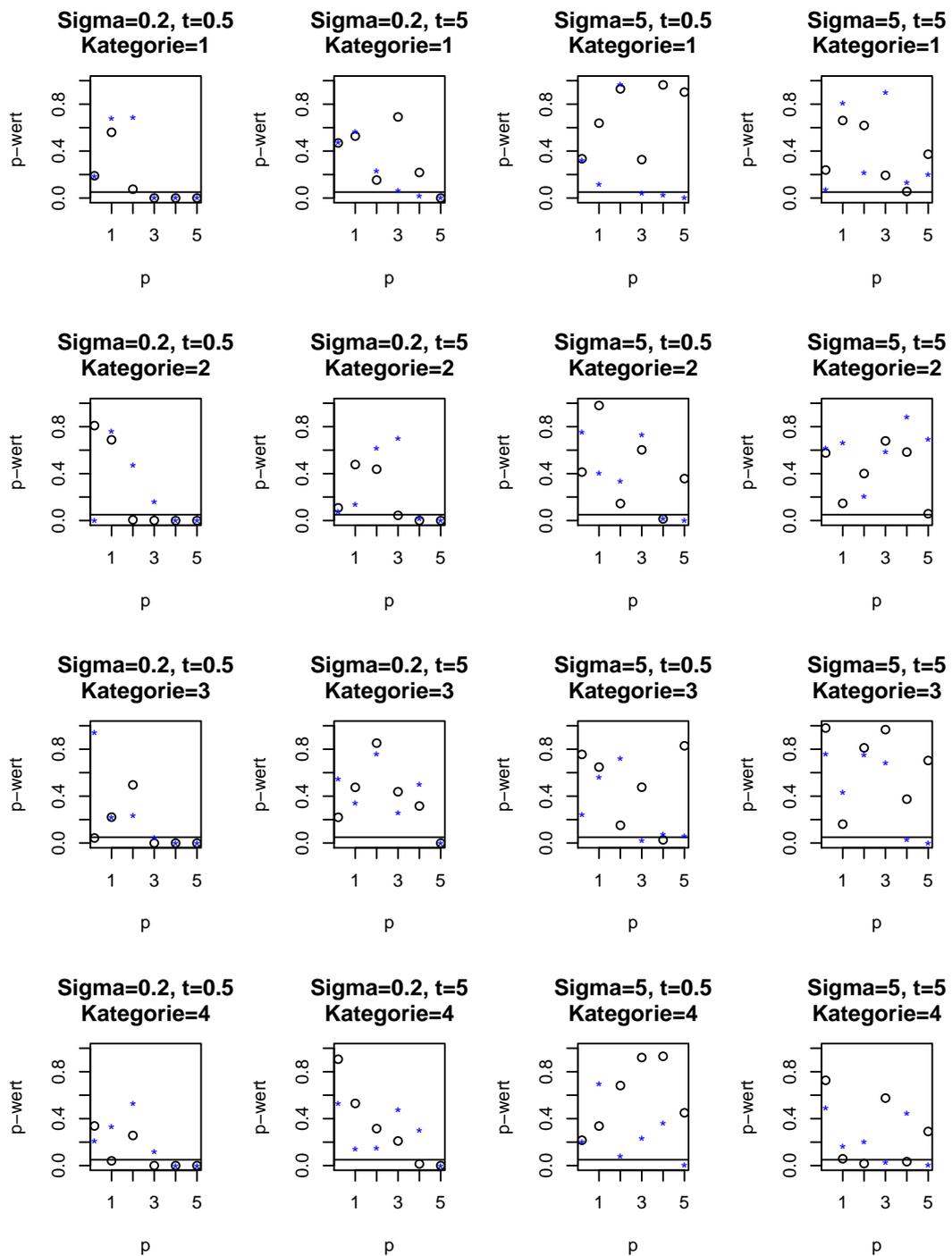


Abbildung A.4: BM p-Werte von Shapiro-Wilk-Test auf Normalverteilung

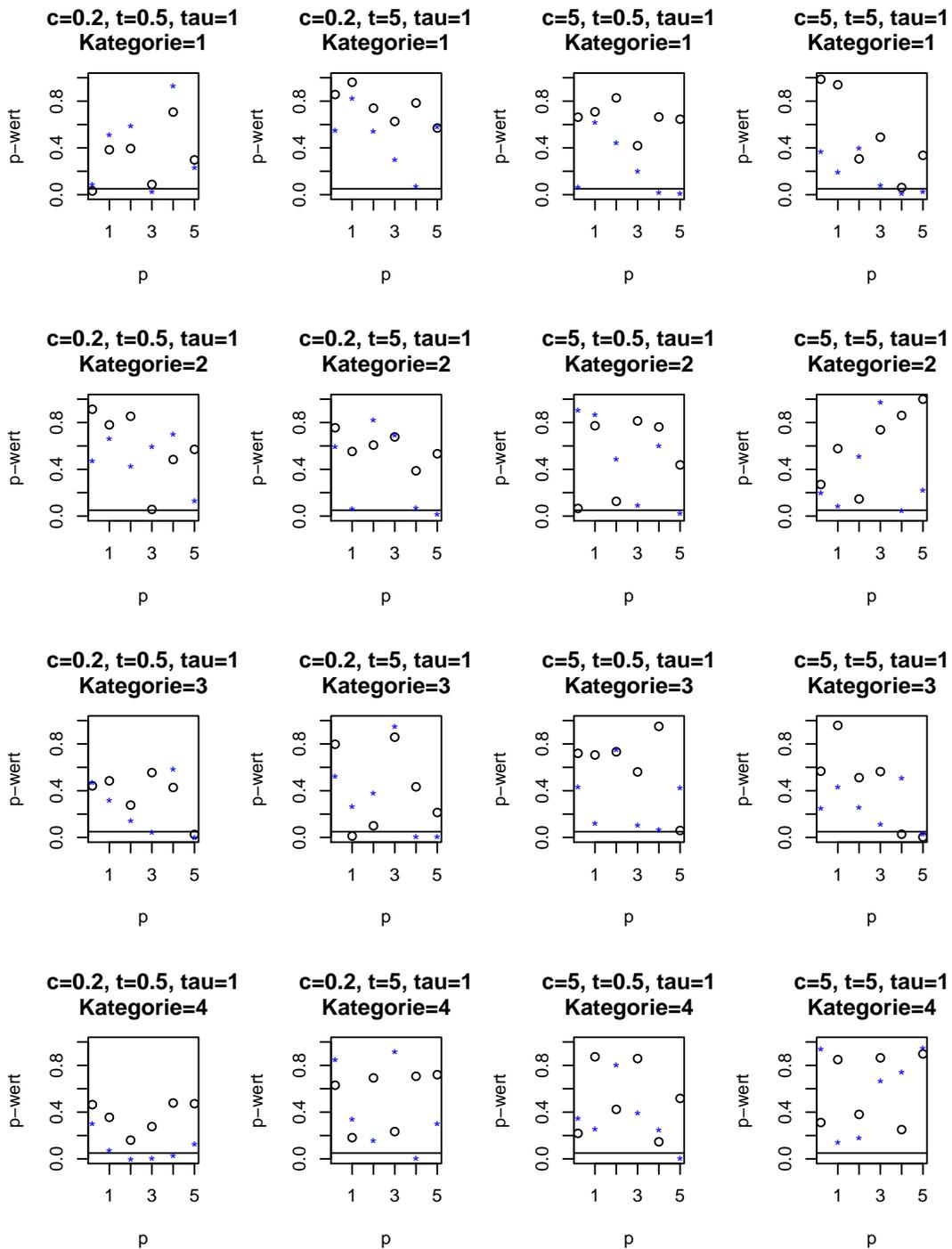


Abbildung A.5: OU p-Werte von Shapiro-Wilk-Test auf Normalverteilung

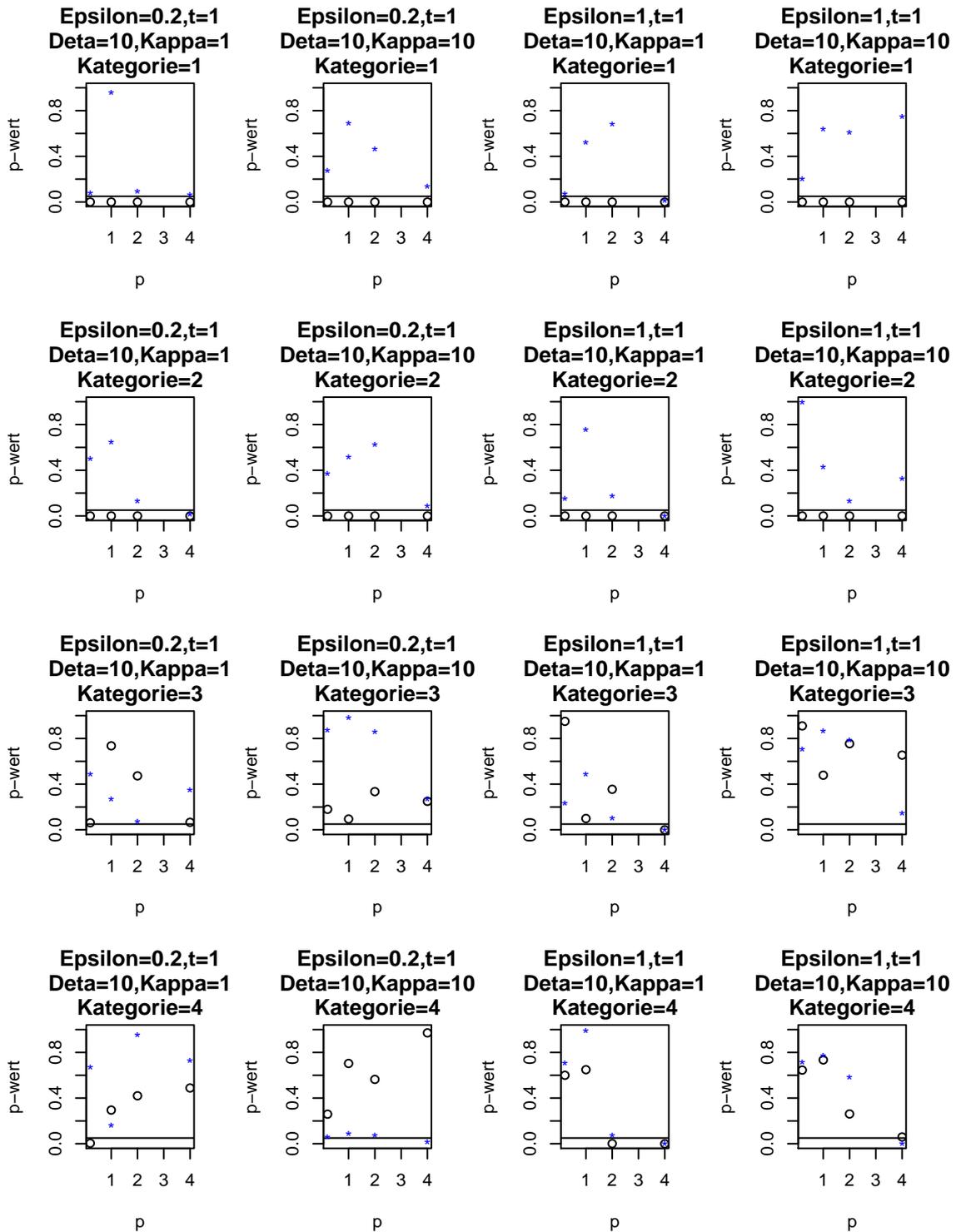
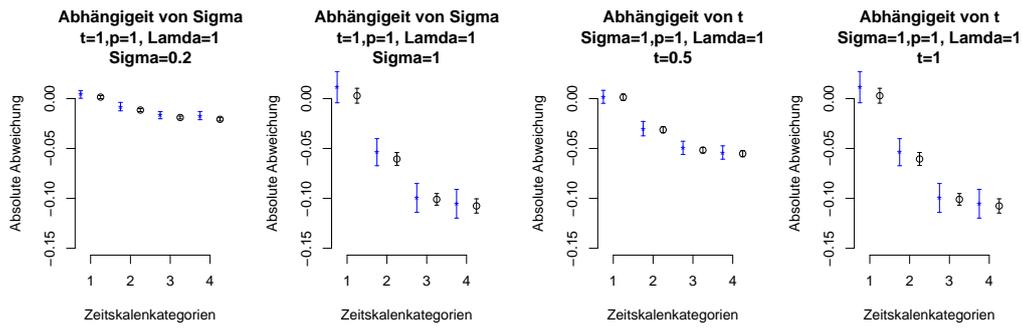
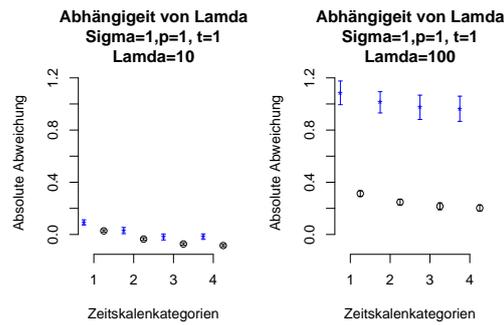


Abbildung A.6: SV p-Werte von Shapiro-Wilk-Test auf Normalverteilung

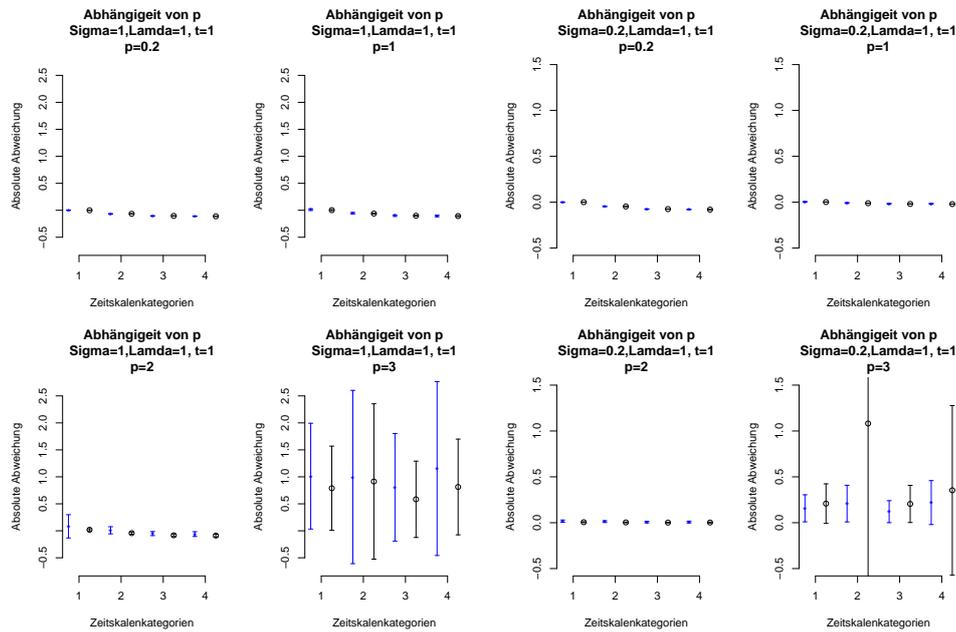


(a) Abhängigkeit von σ

(b) Abhängigkeit von t



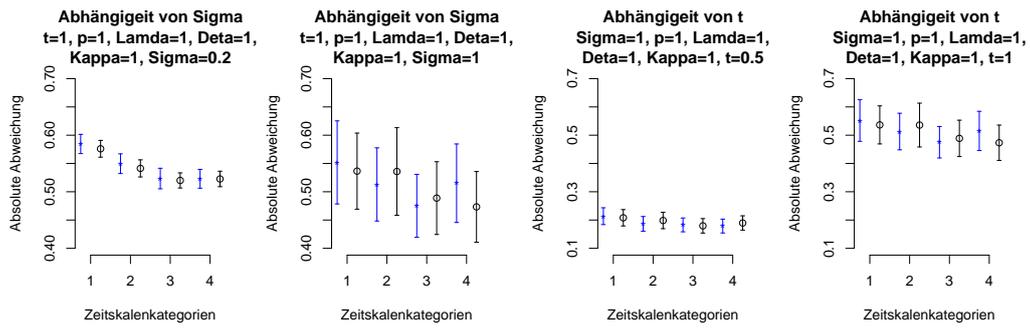
(c) Abhängigkeit λ



(d) Abhängigkeit von p bei $\sigma \geq 1$

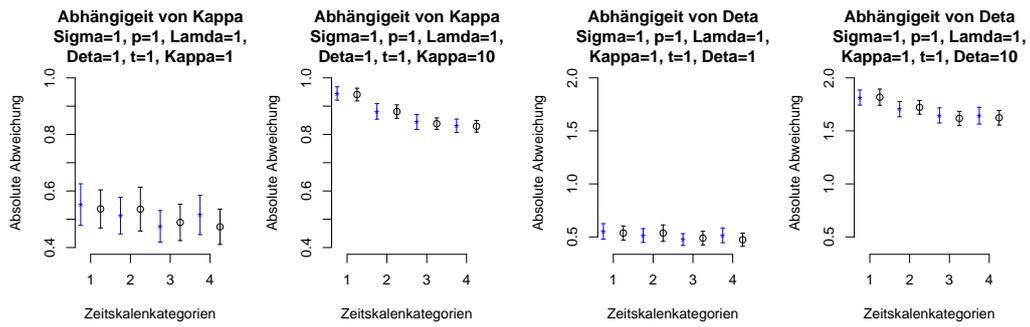
(e) Abhängigkeit von p bei $\sigma < 1$

Abbildung A.7: BM + Sprünge Differenzen Schätzer minus wahrer Wert



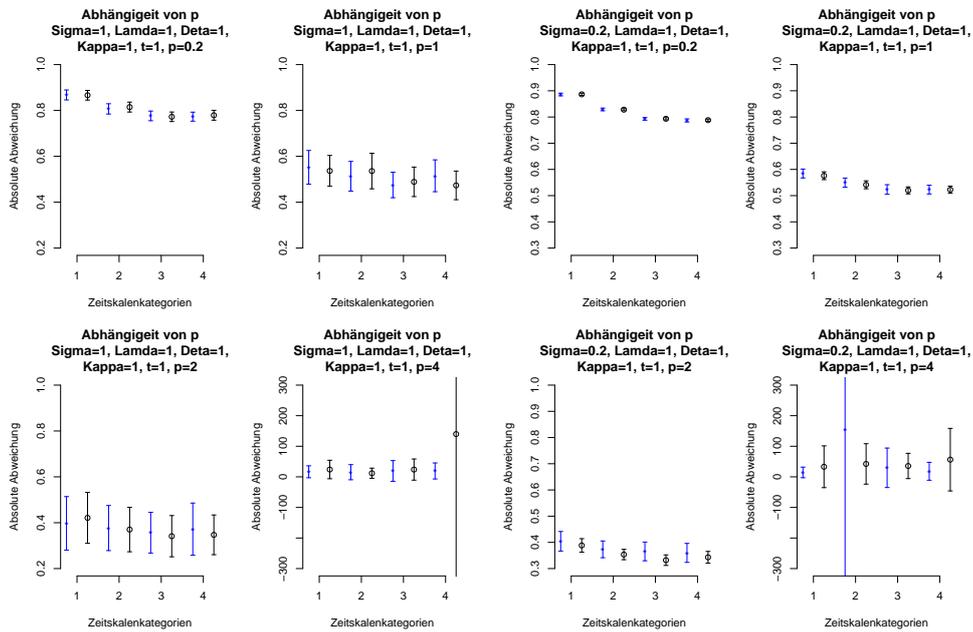
(a) Abhängigkeit von ε ; Sigma=Epsilon

(b) Abhängigkeit von t ; Sigma=Epsilon



(c) Abhängigkeit von κ ; Sigma=Epsilon

(d) Abhängigkeit von θ ; Sigma=Epsilon



(e) Abhängigkeit von p bei $\sigma \geq 1$; Sigma=Epsilon

(f) Abhängigkeit von p bei $\sigma < 1$; Sigma=Epsilon

Abbildung A.8: SV + Sprünge Schätzer

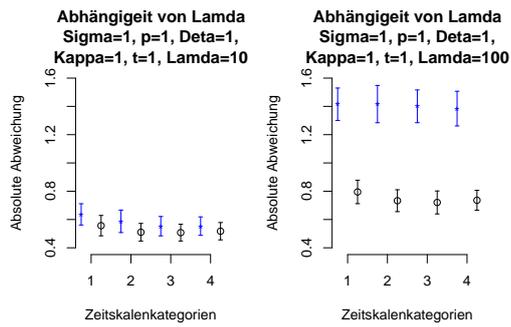


Abbildung A.9: SV + Sprünge Schätzer - Abhängigkeit von λ ; Sigma=Epsilon

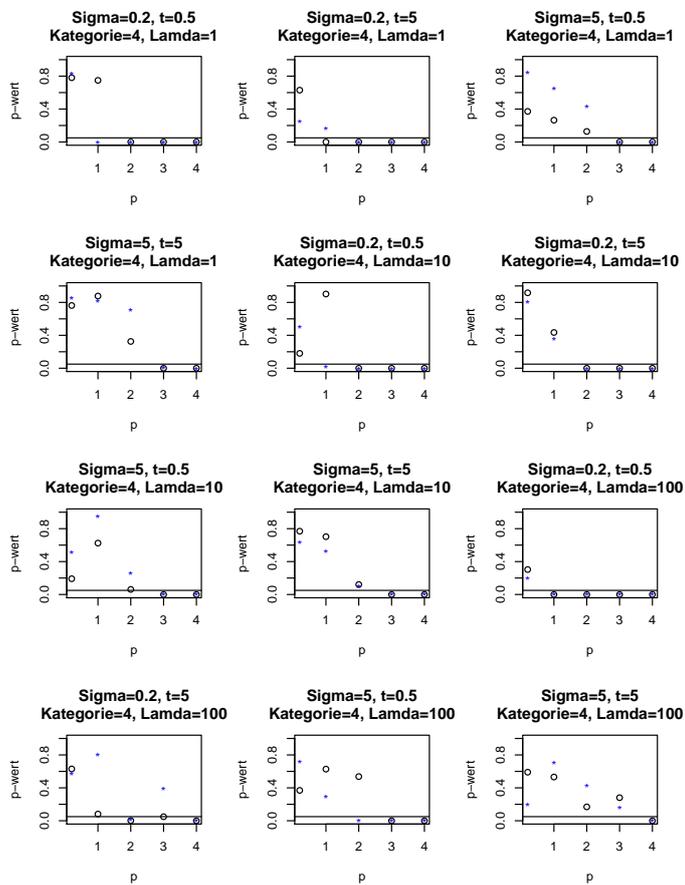


Abbildung A.10: BM + Sprünge p-Werte von Shapiro-Wilk-Test auf Normalverteilung

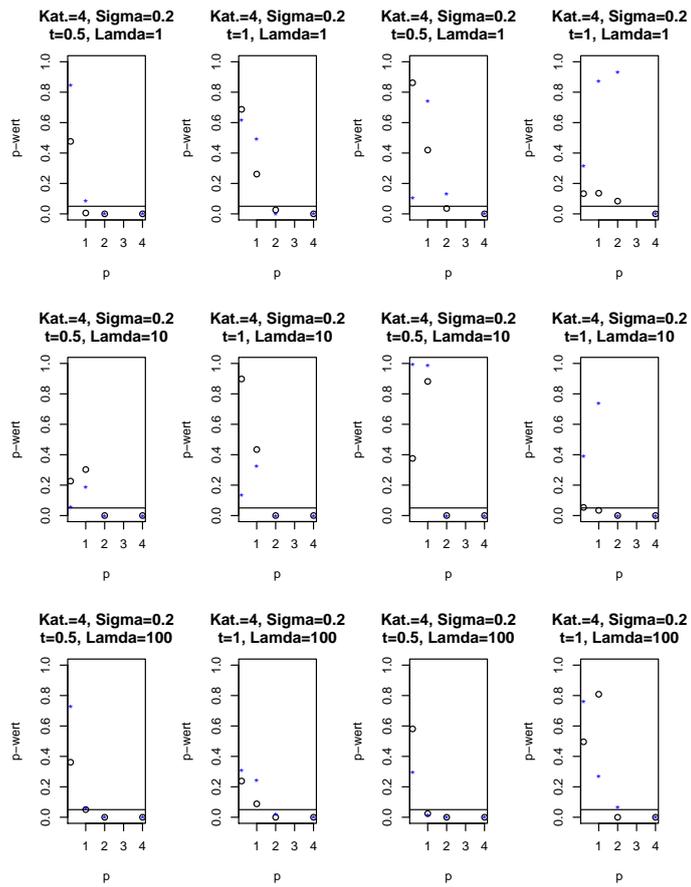


Abbildung A.11: SV + Sprünge p-Werte von Shapiro-Wilk-Test auf Normalverteilung

Literaturverzeichnis

- [1] Aït-Sahalia Y. / Mykland P.A. / Zhang L., 2005, *Ultra high frequency volatility estimaton with dependent microstructure noise*, Discussion Paper, Serie 1: Economic Studies, No 30, Deutsche Bundesbank
- [2] Andersen L., 2007, *Efficient simulation of the Heston Stochastic Volatility Model*, http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=946405#PaperDownload
- [3] Bachelier L., 1900, *THEORIE DE LA SPECULATION*, Thèse Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure 3e série, tome 17 Paris, Gauthier-Villars
- [4] Barndorff-Nielsen O.E./ Prause K., 2001, *Apparent scaling*, Finance and Stochastic, 5, No.1, 103-113
- [5] Barndorff-Nielsen O.E./ Shephard N., 2003, *Realized power variation and stochastic volatility model*, Bernoulli 9, No. 6, 1109-1111
- [6] Barndorff-Nielsen O.E. / Shephard N., 2003, *Corrections to Realized power variation and stochastic volatility model* Bernoulli 9, (6),1109-1111
- [7] Barndorff-Nielsen O.E/ Shephard N., 2004, *Power and bipower variation with stochastic volatility and jumps*, Journal of Financial Econometrics, Vol. 2, No. 1, 1-37
- [8] Barndorff-Nielsen O.E./ Shephard N., 2006, *Power variation and Time Change* Economics Group, Nuffield College, University of Oxford in its series Economics Papers with number 2002-W24
- [9] Barndorff-Nielsen O.E./ Shephard N., 2006a, *Power variation and Time Change*, Theory of Probability and its Applications, Vol. 50, No.1, 1-15
- [10] Becker-Kern P., 2004, *Random integral representation of operator-semi-self-similar processes with independent increments*, Stochaastic Processes and their applications 109, No.2, 327-344
- [11] Black F. / Scholes M., 1973, *The pricing of options and corporate liabilities*, Journal of Political Economy, 81, No.3, 637-659
- [12] Blumenthal R.M. / Gettoor R.K. , 1961, *Sample Functions of Stochastic Processes with Stationary Independent Increments*, Journal of Mathematics and Mechanics, Vol. 10, No. 3

- [13] Carr P.P./ Geman H./ Madan D.B./ Yor M., 2002, *The fine structure of asset returns: An empirical investigation*, Journal of Business, 75, No.2, 305-332
- [14] Carr P.P./ Geman H./ Madan D.B./ Yor M., 2007, *Self-Decomposability and Option Pricing*, Mathematical Finance, Vol. 17, No. 1, 31-57
- [15] Cox J., Ingersoll J.E., Ross S.A., 1985, *A theory of the term structure of interest rates*, Econometrica, 53 129-151
- [16] Flakenberg T. N., 2002, *High Frequency Data Filtering*, www.tickdata.com/FilteringWhitePaper.pdf
- [17] Fan Z., 2006, *Self-Similarity of free Stochastic Processes*, Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics, Vol. 9, No.3, 451-469
- [18] Gillespie D.T., 1996, *Exact numerical simulation of the Ornstein-Uhlenbeck process and its integral*, Physical Review E, Vol 54, No. 2
- [19] Glasserman P., 2004, *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*, Springer
- [20] Hudson W. N. / Mason J.D., 1976, *Variational sums for additive processes* Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 55, No 2. , 395-399
- [21] Jacod J./ Shiryaev A.N., 1987, *Limit Theorems for Stochastic Processes*, Springer
- [22] Jeanblanc M./ Pitman J./ Yor M., 2002, *Self-similar processes with independent increments associated with Lévy and Bessel processes*, Stochastic processes and their application, 100, 223-231
- [23] Karatzas, I. / Shreve, S.E., 2000, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer
- [24] Mandelbrot B.B., 1963, *The variation of certain speculative prices*, Journal of Business, 36, 394-419
- [25] Orey S., 1958, *A Central Limit Theorem for m-dependent Random Variables*, Duke Mathematical Journal, Vol. 25, No.4
- [26] Nolder C., 2003, *Selfsimilar additive processes and financial modelling*, Proceedings of the 2003 Financial Engineering and Applications Conference, Banff, Canada
- [27] Samuelson P.A., 1965, *Rational theory of warrant pricing*, Industrial Management Review 6, 13-31
- [28] Sato K.-I., 1999, *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*, Cambridge University Press
- [29] Shiryaev A. N., 1999, *Essentials of stochastic Finance*, World Scientific, Singapore

- [30] Swishchuk A., 2004, *Modeling of Variance and Volatility Swaps for Financial Markets with Stochastic Volatilities*, <http://math.ucalgary.ca/~aswish/StochVolatSwap.pdf>
- [31] Voev V. / Lunde A., 2006, *Integrated Covariance Estimation Using High-Frequency Data in the Presence of Noise*, *Journal of Financial Econometrics* 5(1):68-104
- [32] Woerner J.H.C., 2006, *Analyzing the fine structure of continuous time stochastic processes*, Preprint, Universität Göttingen
- [33] Woerner J.H.C., 2003a, *Variational sums and power variation: a unifying approach to model selection and estimation in semimartingale models*, *Statistics & Decisions*, 21:47-68
- [34] Woerner J.H.C., 2003b, *Purely discontinuous Lévy Processes and Power Variation: inference for stochastic volatility and the scale parameter*, 2003-MF-08, Working Paper Series in Mathematical Finance, Universität Oxford
- [35] Woerner J.H.C., 2006, *Power and Multipower Variation: inference for high frequency data*, *Stochastic Finance*, eds. A.N. Shiryaev, M. do Rosario Grossihno, P. Oliveira, M. Esquivel, Springer, 343-364
- [36] Zumbach G. / Corsi F./ Trapletti A., 2002, *Efficient Estimation of Volatility using High Frequency Data*, <http://www.olsen.ch/research/workingpapers/efficientVolEstimator.pdf>
- [37] http://www.eurexchange.com/download/documents/publications/d_xpand_200468.pdf