

Struktur und Ursprung starker Magnetfelder am Boden der solaren Konvektionszone

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultäten
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von
Matthias Dieter Rempel
aus Osterode am Harz



— **DUEHRKOHPP & RADICKE** —

Wissenschaftliche Publikationen auf Datenträger

Göttingen 2001

Die Deutsche Bibliothek - CIP-Einheitsaufnahme

Ein Titelsatz für diese Publikation ist bei
Der Deutschen Bibliothek erhältlich.

D7

Referent:	Prof. M. Schüssler
Koreferent:	Prof. W. Deinzer
Tag der mündlichen Prüfung:	25.06.2001

Das Werk ist in allen seinen Teilen urheberrechtlich geschützt.
Jede Verwertung ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig.
Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen
und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronische Systeme.

Copyright DUEHRKOHP & RADICKE 2001
Satz & Coverdesign: Matthias Dieter Rempel
Graphik & Layout: Karsten Riedl
Druck: klartext, Göttingen
Printed in Germany
ISBN 3-89744-169-1

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung	1
1 Einleitung	3
2 Heizung magnetischer Flussröhren	9
2.1 Einleitung	9
2.2 Strahlungsdiffusion	10
2.3 Bestimmung von N,P und Q	12
2.4 Aufstiegszeiten in der Overshoot-Region	13
2.5 Numerische Simulationen	14
2.5.1 Grundgleichungen	14
2.5.2 Ergebnisse	16
2.5.3 Einfluss einer meridionalen Zirkulation	19
2.5.4 Gleichgewichtszustände	20
2.6 Schlussfolgerung	24
3 Heizung magnetischer Schichten	27
3.1 Einleitung	27
3.2 Grundgleichungen	27
3.3 Magnetische Schicht	30
3.4 Vergleich mit analytischer Lösung	33
3.5 Diskussion	36
4 Speicherung toroidaler Magnetfelder	37
4.1 Einleitung	37
4.2 Modellannahmen	38
4.3 Stationäre Gleichgewichte	39
4.3.1 Grundgleichungen	39
4.3.2 Lösen der Gleichungen	41
4.3.3 Ergebnisse	41
4.4 MHD-Simulationen	44
4.4.1 Numerische Verfahren	45
4.4.2 Anfangsbedingungen	47
4.5 Ergebnisse	47
4.5.1 Bedeutung der Kugelgeometrie	48

4.5.2	Einstellung des Gleichgewichtes in latitudinaler Richtung . . .	48
4.5.3	Einstellung des Gleichgewichtes in radialer Richtung	55
4.5.4	Simulationen mit TEQ als Anfangsbedingung	57
4.6	Einfluss der Strahlungsdiffusion	59
4.7	Einfluss differentieller Rotation	63
4.8	Diskussion	64
5	Explosion magnetischer Flussröhren	67
5.1	Einleitung	67
5.1.1	Magnetfeldverstärkung durch Umwandlung kinetischer Energie	67
5.1.2	Explosion magnetischer Flussröhren	69
5.2	2D MHD-Simulationen	73
5.2.1	Modellannahmen und Numerisches Verfahren	73
5.2.2	Ergebnisse	77
5.3	Diskussion	87
5.4	3D MHD-Simulationen	90
6	Schlussfolgerungen	93
A	Polytrope Schichtung	95
B	Thermische Schatten	97
C	MHD-Gleichungen	99
D	Finite-Volumen-Verfahren	101
	Danksagung	107
	Lebenslauf	109

Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden Fragen behandelt, die für das Verständnis des solaren Dynamos wesentlich sind. Insbesondere kommt der Speicherung und Erzeugung starker Magnetfelder in einer Schicht überschießender Konvektion (Overshoot-Region) am Boden der solaren Konvektionszone eine entscheidende Bedeutung zu. Eine ganze Reihe von Arbeiten deutet darauf hin, dass die Stärke des Magnetfeldes dort von der Größenordnung 10 T (10^5 G) ist. Die wesentlichen Ergebnisse der vorliegenden Arbeit sind:

- Mechanische Gleichgewichte magnetischer Flussröhren in der Overshoot-Region werden durch radiative Heizung signifikant gestört. Die notwendige Speicherung magnetischer Flussröhren über einen Zeitraum von mehreren Jahren ist nur möglich wenn für die Superadiabatizität (Abweichung von der isentropen Temperaturschichtung) der Overshoot-Region $\delta = \nabla - \nabla_{\text{ad}} \lesssim -10^{-4}$ gilt.
- Für das Gleichgewicht einer magnetischen Flussröhre in der Overshoot-Region spielt der Einfluss einer meridionalen Zirkulation nur eine Rolle, wenn der in ihr enthaltene magnetische Fluss mehr als zwei Größenordnungen unter dem einer typischen bipolaren Sonnenfleckengruppe liegt.
- Die Unterdrückung der Konvektion innerhalb einer in der solaren Overshoot-Region gespeicherten magnetischen Schicht führt zu Änderungen des Temperaturverlaufs, welche die Superadiabatizität erniedrigen. Der Effekt der radiativen Heizung kann dadurch kompensiert werden.
- Das mechanische Gleichgewicht einer magnetischen Schicht in der Overshoot-Region hat die gleichen Eigenschaften wie Flussröhrengleichgewichte (Balance zwischen magnetischer Krümmungskraft und Corioliskraft). Das mechanische Gleichgewicht einer magnetischen Schicht im radiativen Kern unterscheidet sich hiervon wesentlich (Balance zwischen magnetischer Krümmungskraft und Druckgradient).
- Die Umwandlung potentieller Energie in magnetische Energie durch die „Explosion“ magnetischer Flussröhren liefert einen Prozess, der Magnetfelder auf mehr als die Äquipartitionsfeldstärke (magnetische Energiedichte = kinetische Energiedichte der Strömungen) verstärken kann. Die Skalierung der Ergebnisse numerischer Simulationen auf solare Parameter führt zu einer Feldverstärkung auf bis zu 10 T innerhalb einer Zeitspanne von weniger als 6 Monaten.

Kapitel 1

Einleitung

Die Sonne zeigt einen Zyklus ihrer magnetischen Aktivität mit einer mittleren Periode von ca. 11 Jahren, der sich in der Beobachtung am deutlichsten in der Variation der Zahl von Sonnenflecken (Ausbrüche von magnetischem Fluss an der sichtbaren Oberfläche) manifestiert. Dem scheinbar irregulären Muster der Verteilung von Magnetfeldern auf der Sonne unterliegt ein hoher Grad an Ordnung, der sich in erster Linie in den sogenannten Polaritätsregeln und der Wanderung der Erscheinungsgebiete neu entstehender Sonnenflecken in heliographischer Breite zeigt. Die Breitenwanderung wurde von G. Spörer im 19. Jh. genauer erforscht und wird daher auch als „Spörers Gesetz“ bezeichnet. Die ersten Flecken eines neuen solaren Zyklus erscheinen in ca. $30^\circ - 35^\circ$ Breite, während die letzten Flecken eines Zyklus nahe am Äquator erscheinen. Die Auftragung der Erscheinungsorte der Flecken über der Zeitachse ergibt das berühmte Schmetterlingsdiagramm (Maunder, 1922). Die Polaritätsregeln wurden von Hale et al. (1919) formuliert, der auch als erster Magnetfelder in Sonnenflecken gemessen hatte. Diese Regeln machen drei wesentliche Aussagen:

1. Bei bipolaren Sonnenfleckengruppen haben der (in Bezug auf die Sonnenrotation) vorausgehende und nachfolgende Fleck unterschiedliche magnetische Polarität. Diese Polaritätsreihenfolge bleibt für alle Fleckengruppen über einen 11-Jahreszyklus erhalten.
2. Bipolare Gruppen auf der Nord- und Südhalbkugel der Sonne haben unterschiedliche magnetische Orientierung.
3. Die magnetische Orientierung bipolarer Gruppen kehrt sich von Zyklus zu Zyklus um.

Nur wenige Ausnahmen von dieser Regel werden beobachtet.. Eine weitere Eigenschaft bipolarer Gruppen, die ebenfalls einen hohen Grad an Ordnung nahelegt, ist die systematische Variation des Neigungswinkels bipolarer Gruppen (Winkel zwischen der Verbindungslinie der beiden Flecken und einem Breitenkreis). Der vorausgehende Fleck liegt stets dichter am Äquator als der nachfolgende Fleck. Dieser Winkel variiert mit zunehmender heliographischer Breite der Sonnenfleckengruppe zwischen $3^\circ - 10^\circ$.

Der hohe Grad an Ordnung des großskaligen solaren Magnetismus sowie die regelmäßigen Umpolungen des Magnetfeldes können nicht durch ein fossiles Magnetfeld erklärt werden, welches im Inneren der Sonne infolge der hohen elektrischen Leitfähigkeit seit der Entstehung der Sonne existieren könnte (im stabil geschichteten radiativen Kern der Sonne beträgt die Abklingzeit ca. 10 Milliarden Jahre). Die theoretische Beschreibung des Sonnenzyklus basiert im Wesentlichen auf dem Konzept eines selbsterregten Dynamos (siehe z.B. [Moffatt, 1978](#)). Es handelt sich hierbei um den vermuteten Grundprozess für die Erzeugung von Magnetfeldern in Planeten, Sternen, Akkretionsscheiben und Galaxien.

Die Vorstellung vom solaren Dynamo hat sich im Laufe der letzten 30 Jahre wesentlich verändert. Bis in die 80er Jahre wurde der „turbulente Dynamo“ in der Konvektionszone betrachtet, bei dem die Dynamowirkung auf dem Zusammenwirken von differentieller Rotation, vor allem der Variation der Winkelgeschwindigkeit mit der Tiefe, und den Induktionseffekten turbulenter Strömungen mit einem bevorzugten Schraubensinn, dem sog. „ α -Effekt“, in der Konvektionszone der Sonne beruht ($\alpha\Omega$ -Dynamo). Diese Modelle (siehe z.B. [Steenbeck & Krause, 1969](#); [Deinzer & Stix, 1971](#); [Köhler, 1973](#)) waren bei geeigneter Wahl der freien Parameter in der Lage, wesentliche Eigenschaften des großskaligen solaren Magnetfeldes (dominanter periodischer Dipolmode, Breitenwanderung der aktiven Gebiete, Phase zwischen radialem und toroidalem Feld) zu erklären, jedoch wurden sie durch nachfolgende Entwicklungen immer mehr in Frage gestellt:

- Mit Hilfe der Helioseismologie ist es möglich, die differentielle Rotation $\Omega(r, \theta)$ im Inneren der Sonne zu messen. Es ergibt sich eine sehr geringe radiale differentielle Rotation *innerhalb* der Konvektionszone, aber eine Scherschicht mit großer differentieller Rotation an ihrem Boden und in den äußeren Schichten des radiativen Kerns ([Duvall et al., 1986](#); [Kosovichev, 1996](#); [Schou et al., 1998](#)).
- Stabilitätsanalysen von Magnetfeldern in Form von Flussröhren zeigen, dass die Speicherung des magnetischen Flusses über eine mit der Zyklusdauer vergleichbare Zeit nur in einer subadiabatischen Temperaturschichtung möglich ist, wie sie in einer Schicht überschießender Konvektion („Overshoot-Region“) am Boden der Konvektionszone vorliegt ([Spruit & van Ballegooijen, 1982](#); [Ferriz-Mas & Schüssler, 1993, 1995](#)).
- Numerische Simulationen der Instabilität und des Aufstiegs magnetischer Flussröhren auf Basis der Näherung dünner Flussröhren können wesentliche Eigenschaften von Sonnenfleckengruppen erklären. Dies setzt allerdings voraus, dass die Flussröhre am Boden der Konvektionszone eine anfängliche Feldstärke von ca. 10 T (10^5 G) besitzt ([Choudhuri, 1989](#); [Moreno-Insertis, 1992](#); [Fan et al., 1993](#); [Schüssler et al., 1994](#); [Caligari et al., 1995, 1998](#)).

Die Entstehung magnetischer Flussröhren am Boden der Konvektionszone kann durch Fragmentation einer magnetischen Schicht ([Matthews et al., 1995](#); [Fan, 2001](#)) oder durch Konzentration von magnetischem Fluss durch konvektive Strömungen ([Proctor & Weiss, 1982](#)) verstanden werden. 2D- und 3D-Simulationen aufsteigender magnetischer Flussröhren erweitern die Rechnungen für dünne Flussröhren und

zeigen insbesondere die Bedeutung einer Verdrehung des Magnetfeldes für den Zusammenhalt der Flussröhre während ihres Aufstiegs durch die Konvektionszone (Schüssler, 1979; Emonet & Moreno-Insertis, 1998; Dorch & Nordlund, 1998).

Die durch die Flussröhrenrechnungen nahegelegte Feldstärke von 10 T entspricht etwa der 10-fachen Äquipartitionsfeldstärke am Boden der Konvektionszone, d.h. die magnetische Energiedichte übersteigt die kinetische Energiedichte der turbulenten Konvektionsbewegung um einen Faktor 100. Solch starke Felder unterdrücken die Konvektionsbewegungen und entziehen so dem α -Effekt die Basis. Darüber hinaus ist es sehr fraglich, ob differentielle Rotation im gemessenen Ausmaß so hohe Feldstärken erzeugen kann, da das Feld über die Lorentzkraft auf die Scherströmung zurückwirkt. Vergleiche zwischen der in der Scherung enthaltenen kinetischen Energie und der während eines Zyklus generierten magnetischen Energie liefern wieder etwa die Äquipartitionsfeldstärke von ca. 1 T (siehe Abschnitt 5.1.1).

Die Probleme für den turbulenten Dynamo in der Konvektionszone legen ein Modell nahe, bei dem die Speicherung und Feldverstärkung in der Overshoot-Region der Sonne stattfinden, weil dort eine stabile Speicherung starker Magnetfelder möglich und differentielle Rotation vorhanden ist. Es gibt gegenwärtig zwei Ansätze für einen solchen Dynamo:

- Der Dynamo operiert vollständig in der Overshoot-Region. Der für die Dynamowirkung erforderliche α -Effekt wird durch Auftriebsinstabilitäten erzeugt und bleibt auch für sehr starke Felder wirksam (Ferriz-Mas et al., 1994; Brandenburg & Schmitt, 1998; Thelen, 2000a,b).
- Der turbulente α -Effekt ist in der Konvektionszone lokalisiert und wirkt auf schwache Felder. Für den α -Effekt werden dabei zwei verschiedene Mechanismen vorgeschlagen: 1. „zyklonische“, d.h. durch Rotation beeinflusste, Konvektion in der unteren Hälfte der Konvektionszone (Parker, 1993; MacGregor & Charbonneau, 1997), oder 2. der Einfluss der Corioliskraft auf aufsteigende magnetische Flussröhren (Leighton, 1969; Wang & Sheeley, 1991). Die Verstärkung der Magnetfelder zu großen Feldstärken findet in der Overshoot-Region statt. Der Feldtransport zwischen beiden Gebieten erfolgt durch turbulenten Transport schwacher Felder in die Overshoot-Region (Tobias et al., 1998), turbulente Diffusion und meridionale Zirkulation (Choudhuri et al., 1995; Durney, 1995).

Diese Erkenntnisse über die Arbeitsbedingungen eines Dynamos in der Sonne werfen eine Reihe neuer Fragen auf:

- Die differentielle Rotation zeigt die stärkste radiale Variation in Polnähe, wodurch sich in Dynamomodellen die stärksten toroidalen Felder ebenfalls dort ergeben. Weiterhin führt das Vorzeichen von $\partial\Omega/\partial r$ zu der falschen Wanderungsrichtung der Dynamowellen in Äquaturnähe. Es gibt zwar Gründe, einen α -Effekt mit umgekehrtem Vorzeichen in der tiefen Konvektionszone zu vermuten, wodurch die Ausbreitungsrichtung wieder richtig wäre, aber dadurch käme die Phasenlage des poloidalen und toroidalen Feldes in Widerspruch zur Beobachtung (Schlichenmaier & Stix, 1995). Einen alternativen Ansatz stellt

der äquatorwärts gerichtete Transport des toroidalen Feldes durch eine meridionale Zirkulation dar. Die Schmetterlingsdiagramme sind dann eine Folge der Zirkulation und nicht der wandernden Dynamowelle (Choudhuri et al., 1995; Dikpati & Charbonneau, 1999).

- Die Probleme mit dem Vorhandensein starker toroidaler Magnetfelder lassen sich zwar durch die oben genannten Ansätze etwas entschärfen (der α -Effekt operiert nur mit schwachem Feld in der Konvektionszone, bzw. wird durch die gerade bei starken Feldern wirksamen Parker-Instabilitäten erzeugt), aber die starke Rückwirkung der toroidalen Magnetfelder auf die differentielle Rotation besteht weiterhin. Nur wenn ein starker Energieeintrag in die Scherschicht stattfindet, kann damit die Feldverstärkung bis 10 T verstanden werden.
- Neuere Erkenntnisse über die radiative Heizung in der Overshoot-Region und unteren Konvektionszone (Fan & Fisher, 1996), sowie die Ergebnisse der Helioseismologie für die Dicke der Overshoot-Region (Christensen-Dalsgaard et al., 1995), verlangen nach einer erneuten Diskussion des Problems der Speicherung magnetischer Felder in der unteren Konvektionszone.

Die theoretischen Modelle, die den oben erwähnten Arbeiten zugrunde liegen, lassen sich grob in zwei Klassen einteilen:

1. Globale Dynamomodelle im Rahmen der Magnetohydrodynamik mittlerer Felder
2. Lokale numerische Simulationen und analytische Modelle zur Beschreibung einzelner Prozesse

Die Stärke der ersten Beschreibungsebene liegt in ihrem globalen Charakter. Es ist möglich, mit Hilfe dieser Dynamomodelle Aussagen über die großräumige Struktur der Magnetfelder, über die Ausbreitungsrichtung von Dynamowellen und die zeitliche Entwicklung über zahlreiche Dynamoperioden hinweg zu gewinnen. Der Nachteil dieser Modelle ist, dass viele wichtige Prozesse wie z.B. α -Effekt, turbulente Diffusion oder Magnetfelderuptionen infolge von Auftriebsinstabilitäten parametrisiert werden müssen. Die Rückwirkung des Magnetfeldes auf turbulente Strömungen und die Rotation wird in der Regel ebenfalls parametrisiert und die Behandlung der hydrodynamischen Bewegungsgleichung vermieden.

In der zweiten Beschreibungsebene geht es um einzelne Prozesse, die in der ersten Beschreibungsebene parametrisiert werden müssen. Es handelt sich hierbei z.B. um MHD-Simulationen zyklonischer Konvektion unter idealisierten Bedingungen, um den α -Effekt explizit zu berechnen, oder um Simulationen, welche die Stabilität von magnetischen Schichten und die Bildung magnetischer Flussröhren betrachten. Eine weitere Klasse von Modellen, die in diese Beschreibungsebene fallen, sind die bereits erwähnten Simulationen aufsteigender Flussröhren oder auch analytische Rechnungen, welche die Stabilität von Gleichgewichten in der Overshoot-Region behandeln. Solche Modelle können dazu beitragen, die Parametrisierungen für die globalen Dynamomodelle zu verbessern.

Es ist bis heute nicht möglich, eine globale Dynamosimulation für die Sonne auf Basis der vollen MHD-Gleichungen durchzuführen. Dies liegt an den unterschiedlichen zeitlichen und räumlichen Skalen, die in das solare Dynamoproblem eingehen. Während die zeitliche Entwicklung des großskaligen Magnetfeldes auf der globalen Diffusionszeitskala oder der Zirkulationszeitskala einer meridionalen Zirkulation erfolgt (ca. 10 Jahre), spielt bei Auftriebsinstabilitäten, die für den Aufstieg magnetischer Flussröhren verantwortlich sind, die lokale Alfvénzeitskala (ca. 1 Monat) die wesentliche Rolle. Die Einstellung der Hydrostatik erfolgt dagegen in weniger als einer Stunde. Während das globale solare Magnetfeld eine Längenskala hat, die vergleichbar mit dem Sonnenradius von $7 \cdot 10^8$ m ist, haben Flussröhren, die an der Sonnenoberfläche zu der Bildung von Sonnenflecken führen, am Boden der Konvektionszone einen Radius von ca. 1 000 km. Berücksichtigt man noch die großen (hydrodynamischen und magnetischen) Reynoldszahlen in der Größenordnung 10^{10} , so liegen die Längenskalen der Turbulenz in der solaren Konvektionszone weit jenseits der heute möglichen numerischen Auflösungen. Weil die für das Dynamoproblem relevanten Zeit- und Längenskalen folglich mehrere Größenordnungen umfassen, können sie nicht in einem numerischen Modell gleichzeitig behandelt werden (in einer 3D-Simulation steigt der numerische Aufwand mit der 4. Potenz der erforderlichen Ortsauflösung).

Als Folge existieren für die verschiedenen Längen- und Zeitskalen unterschiedliche Modelle, welche Teilaspekte des solaren Dynamos erfolgreich beschreiben, aber nur schwer zu einem einheitlichen Bild zusammengefügt werden können. Auf der einen Seite stehen die Simulationen aufsteigender magnetischer Flussröhren, welche die Bildung der Sonnenflecken ausgehend vom toroidalen Fluss am Boden der Konvektionszone beschreiben, aber den Ursprung und die Struktur des Magnetfeldes am Boden der Konvektionszone offen lassen. Diese Simulationen starten mit toroidalem Magnetfeld in Form einzelner Flussringe und führen auf Feldstärken von 10 T. Auf der anderen Seite stehen Dynamosimulationen, die unter Zuhilfenahme des Feldtransports durch eine meridionale Strömung das zeitliche Verhalten des großskaligen solaren Magnetfeldes gut beschreiben, aber nicht erklären können, wie sich aus dem berechneten mittleren Magnetfeld einzelne Sonnenfleckengruppen bilden. Die Stärke der mittleren Magnetfelder liegt deutlich unter dem von den Flussröhrenrechnungen geforderten Wert von ca. 10 T. Es ist unklar, ob das Magnetfeld in Form einzelner Flussröhren gespeichert und verstärkt wird, oder ob der Dynamo Magnetfeld in Form einer mehr oder weniger homogenen Schicht erzeugt, deren Instabilität erst die Flussröhren liefert, die zur Oberfläche der Sonne aufsteigen. Für das Verständnis des solaren Dynamos ist daher die Beantwortung von zwei Kernfragen erforderlich:

- Welcher Natur ist das Gleichgewicht des gespeicherten Magnetfeldes am Boden der Konvektionszone?
- Welcher Mechanismus erzeugt die starken Felder?

Diese beiden Fragen werden in dieser Arbeit mit Hilfe von lokalen Modellen untersucht. Die folgenden zwei Kapitel beschäftigen sich dabei mit dem Einfluss thermischer Störungen auf mechanische Gleichgewichte magnetischer Felder. In Kapitel

2 wird der Einfluss der von [Fan & Fisher \(1996\)](#) gefundenen radiativen Heizung auf Gleichgewichte magnetischer Flussröhren in der Overshoot-Region betrachtet. Diese Untersuchungen basieren auf dem von [Moreno-Insertis et al. \(1992\)](#) verwendeten Modell axialsymmetrischer Flussröhren, welches erweitert wird, um den Einfluss der radiativen Heizung und einer meridionalen Strömung auf die Gleichgewichte zu berücksichtigen.

In Kapitel 3 wird der Einfluss der radiativen Heizung auf magnetische Schichten in der Overshoot-Region betrachtet. Dabei muss die Rückwirkung des Magnetfeldes auf die Konvektion in der Overshoot-Region berücksichtigt werden, wodurch die Schichtung in der gesamten Overshoot-Region in dem Sinne modifiziert wird, dass die Speicherung des Feldes erleichtert wird.

Kapitel 4 behandelt die mechanischen Eigenschaften von Gleichgewichten magnetischer Schichten in Kugelgeometrie. Mit Hilfe analytischer Lösungen und numerischer Simulationen werden Gleichgewichte bestimmt und die Bedingungen untersucht, unter denen sich diese Gleichgewichte einstellen können.

In Kapitel 5 wird das Problem der Verstärkung eines magnetischen Feldes auf Werte oberhalb der Äquipartitionsfeldstärke aufgegriffen. Hierzu wird die von [Moreno-Insertis et al. \(1995\)](#) gefundene „Explosion“ magnetischer Flussröhren betrachtet, die eine Möglichkeit liefert, potentielle Energie der superadiabatischen Schichtung der Konvektionszone direkt in magnetische Energie umzuwandeln. Mit Hilfe numerischer Simulationen wird dieser Prozess im Detail untersucht.

Kapitel 2

Heizung magnetischer Flussröhren

2.1 Einleitung

In der Overshoot-Region und der unteren Konvektionszone der Sonne findet der Übergang vom radiativen Energietransport zum konvektiv dominierten Energietransport statt. Weil sich in diesem Bereich der Sonne keine Energiequellen befinden, ist der Gesamtenergiefluss der Sonne divergenzfrei, während der radiative und konvektive Fluss jeweils für sich genommen diese Bedingung nicht erfüllen. Nach den gängigen Sonnenmodellen mit Overshoot ist der Übergang vom radiativen Kern in die Overshoot-Region ($r \approx 0.7R_{\odot}$) auf eine Schicht von einigen hundert Kilometern beschränkt. Der radiative Energiefluss übersteigt in der Overshoot-Region den Gesamtfluss, weil die Konvektion hier Energie nach innen transportiert, fällt aber monoton nach außen stärker als $1/r^2$ ab. Ab $r \approx 0.9R_{\odot}$ wird die Energie fast ausschließlich durch Konvektion transportiert. Das Verhältnis vom radiativen Energiefluss zu Gesamtenergiefluss ist für ein nichtlokales Mischungswegmodell der solaren Konvektionszone in Abb. 2.1 gezeigt (M. Kiefer und M. Stix, private Mitteilung).

Der starke Abfall nach außen bedingt eine negative Divergenz des Strahlungsstroms, die gemäß

$$H_{\text{rad}} = -\text{div } \vec{F}_{\text{rad}} \quad (2.1)$$

einer Heizung entspricht. In der Overshoot-Region und der unteren Konvektionszone beträgt die Heizrate ca. 3 W m^{-3} . Weil jedoch der konvektive Energiestrom eine positive Divergenz mit gleichem Betrag besitzt, führt dies zu keiner Erwärmung des Plasmas. Die Situation ändert sich grundlegend, wenn in diesem Bereich der Sonne Magnetfelder in Form von Flussröhren vorhanden sind. Bei einer hinreichend großen Feldstärke ist im Bereich der Flussröhre die Konvektion unterdrückt, wodurch das Gleichgewicht zwischen radiativer Heizung und konvektiver Kühlung gestört wird. Die Anwesenheit der Flussröhre führt im externen Medium durch die Behinderung der Konvektion zu der Ausbildung thermischer Schatten, während der innere Teil der Flussröhre nur das externe Temperaturfeld wahrnimmt. Infolge der sehr großen konvektiven Wärmeleitfähigkeit sind die Änderungen im externen Temperaturfeld allerdings relativ gering. Eine Berechnung der Temperaturstörungen im externen Medium befindet sich in Anhang B.

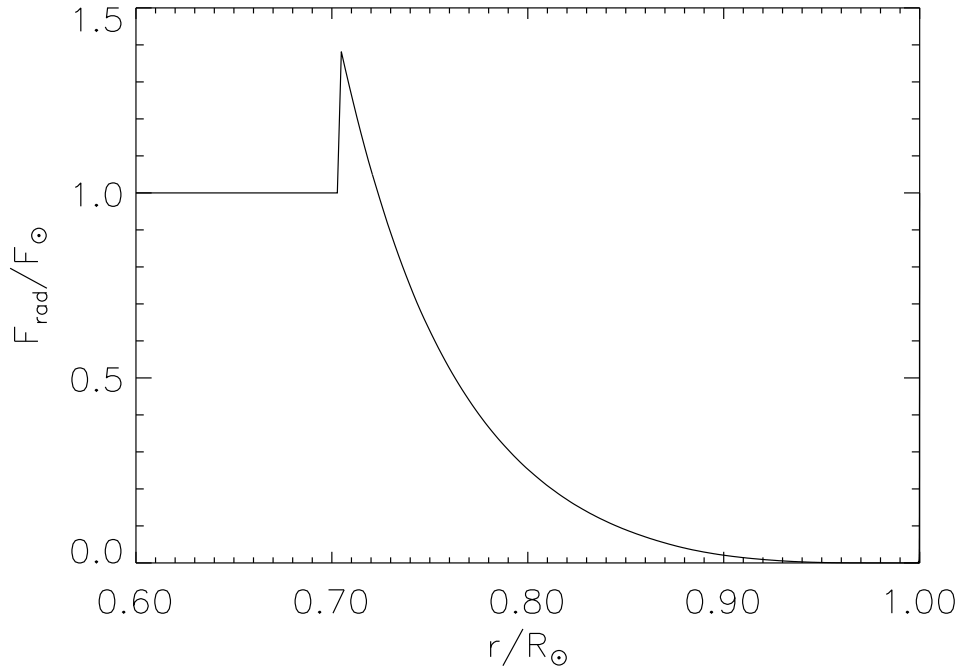


Abbildung 2.1: Verhältnis von radiativem Energiefluss zu Gesamtenergiefluss in einem nichtlokalen Mischungswegmodell der solaren Konvektionszone. Dort wo der radiative Energiestrom den Gesamtenergiestrom übersteigt, transportiert die überschüssige Konvektion Energie nach innen.

In bisherigen Betrachtungen von Flussröhren in der Overshootregion und Konvektionszone der Sonne wurde der Wärmeaustausch mit der Umgebung nur über einen thermischen Relaxationsterm berücksichtigt. Bei den magnetischen Flussröhren, die nach ihrem Aufstieg zu der Sonnenoberfläche Sonnenflecken bilden, spielt dieser Austauschterm keine wesentliche Rolle (Moreno-Insertis, 1983).

Die hier betrachtete zusätzliche radiative Heizung führt zu erheblichen Problemen bei der Speicherung von magnetischen Flussröhren in der solaren Overshoot-Region, wie es zuerst von Fan & Fisher (1996) erkannt wurde. Durch die Heizung wird die für die Speicherung erforderliche Auftriebsneutralität verletzt und es kommt zu einer Aufwärtsbewegung der Flussröhre, die in relativ kurzer Zeit zu einem Verlassen der Overshoot-Region führt. In diesem Kapitel soll zunächst der genaue Einfluss auf die Speicherung magnetischer Flussröhren untersucht werden. In Kapitel 3 wird ein möglicher Ausweg aus dem Problem diskutiert.

2.2 Strahlungsdiffusion

In der Näherung dünner magnetischer Flussröhren ist es ausreichend, das Temperaturprofil bis zur 2. Ordnung im Flussröhrenradius zu berechnen. Damit lässt sich

eine Heizrate 0. Ordnung bestimmen. Die externe Temperatur in der Umgebung der Flussröhre sei gegeben durch (z beschreibt die Variation mit der Höhe)

$$T_e(z) = T_{e0} + Q z + P z^2 \quad (2.2)$$

und die radiative Temperaturleitfähigkeit sei gegeben durch

$$\kappa = \kappa_0 (1 + N z) , \quad (2.3)$$

wobei $z = 0$ die Lage des Flussröhrenmittelpunktes ist und P , Q und N Konstanten sind. Diese Approximationen sind zulässig, weil der Flussröhrenradius klein im Vergleich mit der Druckskalenhöhe ist. Bei einem magnetischen Fluss von $\Phi \approx 10^{14}$ Wb (typischer Wert für Sonnenflecken) ergibt sich bei einer Feldstärke von 10 T ein Radius von ca. 2 000 km. Die Druckskalenhöhe am Boden der Konvektionszone beträgt dagegen ca. 60 000 km. Die Divergenz des externen Strahlungsstroms bei $z = 0$ ist gegeben durch

$$\operatorname{div} \vec{F}_e = \frac{d}{dz} \left(-\kappa \frac{dT_e}{dz} \right) = -\kappa_0 (N Q + 2 P) \quad (2.4)$$

Für die weitere Rechnung ist es vorteilhaft, Zylinderkoordinaten einzuführen. Dabei wird der Querschnitt der Flussröhre als kreisförmig angenommen. Der Radius r bezeichnet den Abstand vom Flussröhrenmittelpunkt und ϕ den Winkel zur Vertikalen. Mit $z = r \cos \phi$ folgt

$$T_e(r, \phi) = T_{e0} + \frac{P}{2} r^2 + Q r \cos \phi + \frac{P}{2} r^2 \cos(2 \phi) . \quad (2.5)$$

Entwickelt man die interne Temperatur auch bis zur 2. Ordnung in r , so erhält man

$$T(r, \phi) = T_0 + \left(\frac{T_{e0} - T_0}{R^2} + \frac{P}{2} \right) r^2 + Q r \cos \phi + \frac{P}{2} r^2 \cos(2 \phi) , \quad (2.6)$$

wobei neben der Stetigkeit der Temperatur am Flussröhrenrand ($r = R$) noch die Symmetrie des Problems ausgenutzt und eine nicht-singuläre Divergenz des Strahlungsstroms gefordert wurde. Für die Heizrate im Flussröhreninneren ergibt sich in 0. Ordnung

$$H_{\text{rad}} = \operatorname{div}(-\kappa \operatorname{grad} T) = 4 \kappa_0 \frac{T_{e0} - T_0}{R^2} + \kappa_0 (2 P + N Q) . \quad (2.7)$$

Die für den Auftrieb einer dünnen Flussröhre relevante Größe ist der Mittelwert der Temperatur über den Flussröhrenquerschnitt. Mittelung der Gleichungen (2.5) und (2.6) liefert

$$\langle T_e \rangle = T_{e0} + \frac{P R^2}{4} \quad (2.8)$$

$$\langle T \rangle = \frac{T_{e0} + T_0}{2} + \frac{P R^2}{4} \quad (2.9)$$

und damit

$$T_{e0} - T_0 = 2 (\langle T_e \rangle - \langle T \rangle) . \quad (2.10)$$

Damit erhält die Heizung die Form

$$H_{\text{rad}} = 8 \kappa_0 \frac{\langle T_e \rangle - \langle T \rangle}{R^2} + \kappa_0 (2P + NQ). \quad (2.11)$$

Der zweite Term auf der rechten Seite ist gerade die Divergenz des externen Strahlungsstroms. Im Strahlungsgleichgewicht herrscht in der Flussröhre die mittlere Temperatur

$$\langle T_{\text{eq}} \rangle = \langle T_e \rangle + \frac{2P + NQ}{8} R^2. \quad (2.12)$$

Die Heizrate besteht aus einem Temperaturrelaxationsterm, der bestrebt ist, Temperaturunterschiede zwischen Flussröhre und dem externen Plasma auszugleichen, und einem durch das externe Strahlungsfeld bestimmten Heizungsterm. Der Vorfaktor 8 des ersten Terms ergibt sich infolge der Approximation der Temperatur bis zur zweiten Ordnung. Ein genauerer Ansatz über Besselfunktionen liefert hier den Faktor 5.8. Der zweite Term, der hier vor allem wichtig ist, ist dagegen von den Annahmen über das Temperaturprofil in der Flussröhre unabhängig. Ein alternativer Ansatz zur Berechnung dieser Heizrate wird in Kapitel 3 gegeben.

2.3 Bestimmung von N, P und Q

Nach den im Anhang A aufgelisteten Gleichungen ergibt sich aus den Ableitungen der Temperaturschichtung für $r = r_0$ (r ist hier der Abstand vom Sonnenmittelpunkt)

$$Q = -\frac{T_0 \nabla}{H_{p0}} \quad (2.13)$$

$$P = -\frac{1}{2} \frac{\sigma T_0 \nabla}{H_{p0} r_0}. \quad (2.14)$$

Dabei sind T_0 und H_{p0} die Temperatur bzw. Druckskalenhöhe am Boden der Konvektionszone und σ parametrisiert die Ortsabhängigkeit der Gravitation $g \sim r^\sigma$. Weil die Superadiabatizität $\delta = \nabla - \nabla_{\text{ad}}$ in der Overshoot-Region sehr klein ist, ($\mathcal{O}(10^{-6})$) kann hier $\nabla = \nabla_{\text{ad}} = 0.4$ verwendet werden. Die Größe N lässt sich aus einem Ansatz für κ in der Form

$$\kappa \sim \varrho^{-2} T^{6.5} \quad (2.15)$$

(Kramers-Opazität, siehe z.B. [Kippenhahn & Weigert \(1994\)](#)) abschätzen:

$$\begin{aligned} N = \frac{d \ln \kappa}{d z} &= \left(-2 \frac{d \ln \varrho}{d \ln p} + 6.5 \frac{d \ln T}{d \ln p} \right) \frac{d \ln p}{d r} \\ &= - \left(6.5 \nabla_{\text{ad}} - \frac{2}{\gamma} \right) \frac{1}{H_p}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Die numerische Auswertung auf Basis eines numerischen Modells für den inneren Aufbau der Sonne (typische Werte sind in Anhang A angegeben) liefert

$$\begin{aligned} Q &\approx -1.5 \cdot 10^{-2} \text{ K m}^{-1} \\ P &\approx 2.8 \cdot 10^{-11} \text{ K m}^{-2} \\ N &\approx -2.3 \cdot 10^{-8} \text{ m}^{-1} \end{aligned} \quad (2.17)$$

und

$$2P + NQ \approx 4 \cdot 10^{-10} \text{ K m}^{-2}. \quad (2.18)$$

Mit $\kappa \approx 8 \cdot 10^9 \text{ W K}^{-1} \text{ m}^{-1}$ erhält man

$$H_{\text{rad}} \approx 3.2 \text{ W m}^{-3}. \quad (2.19)$$

Nach Gleichung (2.12) ergibt sich damit

$$\langle T_{eq} \rangle \approx \langle T_e \rangle + 50 \text{ K} \left(\frac{R}{1000 \text{ km}} \right)^2. \quad (2.20)$$

Um die Bedeutung des neuen Heizungsterms zu verdeutlichen, sollen hier die beiden Terme in Gl. (2.11) abgeschätzt werden. Bei einer Flussröhre mit $\beta = 2\mu_0 p/B^2 = 1.5 \cdot 10^5$ (entspricht 10 T Feldstärke) ergibt sich bei Auftriebsneutralität $\langle T_e \rangle - \langle T \rangle = T_0/\beta \approx 15 \text{ K}$. Dies liefert für den thermischen Austauschterm bei einem Flussröhrenradius von 2000 km einen Wert von ca. 0.2 W m^{-3} , womit der neue Heizungsterm mehr als ein Faktor 10 größer ist. Die Temperaturdifferenz im Strahlungsgleichgewicht beträgt $\langle T_{eq} \rangle - \langle T_e \rangle \approx 200 \text{ K}$. Diese Temperaturdifferenz ist nur ein kleiner Bruchteil der Temperaturvariation in der Hintergrundichtung über den Flussröhrenquerschnitt $2|Q|R \approx 60000 \text{ K}$. Jedoch genügen bereits kleine Temperaturstörungen, um die Auftriebsneutralität zu verletzen.

2.4 Aufstiegszeiten in der Overshoot-Region

Die Heizung der Flussröhre führt zu einer Änderung der Dichte im Inneren und damit zu einem Auftrieb. Unter der Voraussetzung kleiner Dichtedifferenzen zwischen der Massendichte in der Flussröhre ϱ und der Massendichte im externen Plasma ϱ_e ($\Delta\varrho = \varrho - \varrho_e$, $\Delta\varrho/\varrho_e \ll 1$) lässt sich die Aufstiegs geschwindigkeit im axialsymmetrischen Fall abschätzen durch (Fan & Fisher, 1996)

$$v_r = \frac{\nabla_{\text{ad}} H_{p0}}{p} H_{\text{rad}} \left[-\delta + \left(\frac{2}{\gamma^2} - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{1}{\beta} \right]^{-1}, \quad (2.21)$$

mit der Superadiabatizität $\delta = \nabla - \nabla_{\text{ad}}$ und $\beta = 2\mu_0 p/B^2$. Diese Formel gibt die Aufstiegs geschwindigkeit an, bei der ein Gleichgewicht zwischen radiativer Aufheizung und der Abkühlung relativ zur Umgebung infolge der Aufwärtsbewegung in einer subadiabatischen Schichtung herrscht. Für $\beta|\delta| \gg 0.1$ ist der zweite Term in

der eckigen Klammer vernachlässigbar und es ergibt sich für v_r mit Zahlenwerten entsprechend Anhang A

$$v_r \simeq 10 \frac{10^{-6}}{|\delta|} \text{m s}^{-1}. \quad (2.22)$$

Die Aufstiegszeit für 10 000 km radiale Distanz (dies entspricht ungefähr der Dicke der solaren Overshoot-Region) beträgt damit

$$\tau \simeq 11 \frac{|\delta|}{10^{-6}} \text{Tage}. \quad (2.23)$$

Für den Betrag der Superadiabatizität $|\delta|$ wurde als Referenz 10^{-6} verwendet, weil die Superadiabatizitäten solarer Overshootmodelle typischer Weise zwischen -10^{-6} und -10^{-5} liegen. Diese grobe Abschätzung zeigt bereits, dass eine stark subadiabatische Schichtung $\delta \simeq -10^{-4}$ erforderlich ist, um die Speicherung des magnetischen Flusses für einige Jahre zu ermöglichen. Wie numerische Rechnungen zeigen, liefert diese Abschätzung relativ gute Werte, auch wenn der Aufstieg in Wirklichkeit stark von Oszillationen mit der magnetischen Brunt-Väisälä-Frequenz geprägt ist. Für den Fall $\beta |\delta| \ll 0.1$ sind weitaus größere Aufstiegszeiten möglich, jedoch führen bei den dafür erforderlichen Magnetfeldstärken nicht-axialsymmetrische instabile Moden für einen raschen Ausbruch des Magnetfeldes aus der Overshoot-Region ([Ferriz-Mas & Schüssler, 1993, 1995](#)).

2.5 Numerische Simulationen

2.5.1 Grundgleichungen

Der oben beschriebene Heizungsterm wurde in ein numerisches Programm eingebaut, das die Bewegung axialsymmetrischer Flussröhren in der Overshoot-Region und Konvektionszone der Sonne simuliert ([Moreno-Insertis et al., 1992](#)). Es arbeitet auf der Basis der Näherung dünner magnetischer Flussröhren, die hier kurz erläutert werden soll ([Spruit, 1981](#)).

Für ein Bündel magnetischer Feldlinien können die MHD-Gleichungen auf eine quasi eindimensionale Beschreibung reduziert werden, sofern alle Längenskalen entlang der Feldlinien (Druckskalenhöhe, Krümmungsradius usw.) deutlich größer als der Durchmesser der Flussröhre sind. In diesem Fall kann die Dynamik durch ein Gleichungssystem dargestellt werden, das die Bewegung eines eindimensionalen Flussfadens im dreidimensionalen Raum beschreibt. Die Bewegungsgleichung für das Plasma innerhalb des Flussfadens ist (in einem mit Ω starr rotierenden Bezugssystem) gegeben durch

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\vec{v}}{dt} &= -\text{grad} \left(p_i + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \frac{(\vec{B} \cdot \text{grad})\vec{B}}{\mu_0} - 2\rho \vec{\Omega} \times \vec{v} \\ &+ \rho \left(\vec{g} - \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \right). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Die Kopplung zwischen dieser Gleichung und dem externen Plasma ergibt sich über das laterale Druckgleichgewicht

$$p_e = p_i + \frac{B^2}{2\mu_0}. \quad (2.25)$$

Eine Rückwirkung der Flussröhre auf das externe Plasma wird vernachlässigt, so dass sich für den externen Druck ein stationäres hydrostatisches Gleichgewicht ergibt:

$$\text{grad } p_e = \varrho_e \left(\vec{g} - \vec{\Omega}_e \times (\vec{\Omega}_e \times \vec{r}) \right). \quad (2.26)$$

Hierbei ist Ω_e die Rotation der Sonne. Wie [Moreno-Insertis et al. \(1992\)](#) bereits gezeigt haben, ist der Einfluss der differentiellen Rotation auf die Rechnungen sehr klein, so dass hier im Folgenden mit einer starren Rotation gerechnet wird. Eine weitere mögliche Kopplung zwischen Flussröhre und Umgebung erfolgt über den Strömungswiderstand. Die Kraft pro Volumen für eine zylindrische Flussröhre mit Radius R ist gegeben durch

$$\vec{f}_D = -\frac{c_w}{\pi R^2} 2R \frac{1}{2} \varrho_e |\vec{v}_\perp| \vec{v}_\perp, \quad (2.27)$$

wobei \vec{v}_\perp die Relativgeschwindigkeit zwischen Flussröhre und externen Plasma senkrecht zu der Flussröhrenachse und c_w der Widerstandsbeiwert ist. Im Folgenden wird stets $c_w = 1$ verwendet.

Für eine vollständige Beschreibung muss dieses Gleichungssystem noch ergänzt werden durch eine Energie-, Zustands-, Induktions- und Kontinuitätsgleichung (in der Regel kombiniert in Form der Waléngleichung) und eine Gleichung, welche die Änderung der Geometrie der Flussröhre (begleitendes Dreibein) infolge der Bewegung beschreibt. Weil in den folgenden Rechnungen nur die axialsymmetrischen Flussröhrengleichungen in Kugelgeometrie benötigt werden, bei denen sich die Bewegungsgleichungen auf ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen reduzieren, wird hier nicht auf diese allgemeine Beschreibung weiter im Detail eingegangen. Für die Beschreibung der Flussröhre in der solaren Overshoot-Region werden Kugelkoordinaten mit der radialen Distanz r bezogen auf den Sonnenmittelpunkt, der Poldistanz θ und der Länge ϕ verwendet. Aus Gl. (2.24, 2.25 und 2.26) ergibt sich in Kugelkoordinaten:

$$\ddot{r} = r \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right) + \frac{f_r}{\varrho} \quad (2.28)$$

$$r \ddot{\theta} = -2 \dot{r} \dot{\theta} + r \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 + \frac{f_\theta}{\varrho} \quad (2.29)$$

$$r \sin \theta \ddot{\phi} = -2 \dot{\phi} \left(\dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta \right) + \frac{f_\phi}{\varrho} \quad (2.30)$$

mit den Kräften:

$$f_r = -\frac{B^2}{\mu_0 r} - \Delta \varrho \left(g - \Omega_e^2 r \sin^2 \theta \right) + 2 \Omega_e \varrho r \sin^2 \theta \dot{\phi} \quad (2.31)$$

$$f_\theta = -\frac{B^2}{\mu_0 r} \cot \theta + \Delta \varrho \Omega_e^2 r \sin \theta \cos \theta + 2 \Omega \varrho r \sin \theta \cos \theta \dot{\phi} - \varrho (\Omega_e^2 - \Omega^2) r \sin^2 \theta - \frac{c_w}{\pi R} \varrho_e |\vec{v}_\perp| v_{\perp r} \quad (2.32)$$

$$f_\phi = -2 \Omega \varrho r (\dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta) - \varrho (\Omega_e^2 - \Omega^2) r \sin \theta \cos \theta - \frac{c_w}{\pi R} \varrho_e |\vec{v}_\perp| v_{\perp \theta} \quad (2.33)$$

Die Geschwindigkeit \vec{v}_\perp setzt sich zusammen aus der Eigenbewegung der Flussröhre und einer meridionalen Zirkulation \vec{v}^m :

$$\vec{v}_\perp = \begin{pmatrix} \dot{r} - v_r^m \\ r \dot{\theta} - v_\theta^m \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.34)$$

Die Dichtedifferenz $\Delta \varrho = \varrho - \varrho_e$ ist gegeben durch

$$\frac{\Delta \varrho}{\varrho} = 1 - \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)^{1/\gamma} \exp\left(\frac{\Delta s}{c_p}\right), \quad (2.35)$$

mit der Entropiedifferenz $\Delta s = s - s_e$. Während die externe Entropie s_e vorgegeben ist, ändert sich die Entropie in der Flussröhre gemäß

$$\varrho T \frac{ds}{dt} = H_{\text{rad}}. \quad (2.36)$$

Als Anfangsbedingungen werden Flussröhren im mechanischen Gleichgewicht betrachtet. Im Fall $\vec{v}^m = 0$ ist das Gleichgewicht definiert durch die Bedingungen $\dot{r} = \dot{\theta} = \dot{\phi} = 0$ und $f_r = f_\theta = f_\phi = 0$. Dies ist erfüllt, falls:

$$\Delta \varrho = 0 \quad (2.37)$$

$$\Omega = \Omega_e \sqrt{1 + \frac{B^2}{\mu_0 \varrho r^2 \sin^2 \theta \Omega_e^2}}. \quad (2.38)$$

Gl. (2.38) definiert dabei das rotierende Bezugssystem, in dem die Flussröhren-gleichungen gelöst werden (alternativ könnte man auch $\Omega = \Omega_e$ setzen und dafür $\dot{\phi}$ entsprechend wählen, wodurch die für das Gleichgewicht wichtige toroidale Strömung deutlicher hervortritt). Dieses Gleichgewicht ist charakterisiert durch Auftriebsneutralität und die gegenseitige Kompensation von magnetischer Krümmungskraft und Corioliskraft. Im Fall $\vec{v}^m \neq 0$ wird mit dem gleichen Anfangszustand gestartet, jedoch findet dann ein meridionaler Transport statt, siehe Abschnitt 2.5.3.

2.5.2 Ergebnisse

Im Folgenden soll die Abhängigkeit der Aufstiegszeiten für eine Strecke von 10 000 km in der Overshoot-Region als Funktion des Flussröhrenradius R , der Feldstärke B , der Superadiabatizität δ und der Poldistanz θ diskutiert werden. Die Strecke von 10 000 km entspricht grob der Dicke der solaren Overshoot-Region, wie sie von nichtlokalen Mischungswegtheorien geliefert wird.

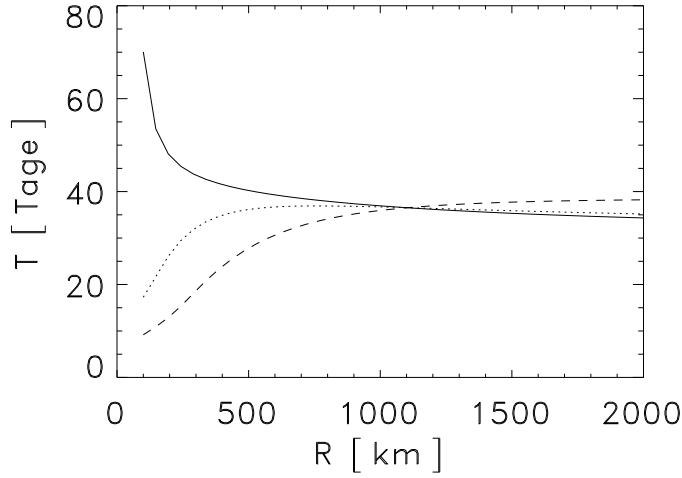


Abbildung 2.2: Aufstiegszeiten als Funktion des Flussröhrenradius R für die Magnetfeldstärken $B = 1$ T (durchgezogen), $B = 5$ T (punktiert) und $B = 10$ T (gestrichelt). Die Superadiabatizität ist $\delta = -3 \cdot 10^{-6}$, entsprechend typischer Werte für die solare Overshoot-Region.

Der Flussröhrenradius beeinflusst die Aufstiegszeit über den Strömungswiderstand (Gl. (2.27)) und über den ersten Heizungsterm in Gl. (2.11). Der Strömungswiderstand hat dabei die Tendenz, die Aufstiegszeiten vor allem bei kleinen Radien zu verlängern, während der schnellere Strahlungsaustausch bei kleineren Radien die Aufstiegszeiten verkürzt. Welcher Beitrag überwiegt, hängt hauptsächlich von der Feldstärke ab, wie es in Abb. 2.2 für $\theta = 70^\circ$, $\delta = -3 \cdot 10^{-6}$ und $c_w = 1$ dargestellt ist. Der verwendete Wert der Superadiabatizität entspricht einem mittleren Wert in der solaren Overshoot-Region. Der magnetische Fluss einer Flussröhre mit 10 T und einem Radius von 1 000 km – 2 000 km entspricht ungefähr dem Fluss eines typischen Sonnenflecks. Für Radien größer als 1 000 km (der genaue Wert hängt von den Vorfaktor in Gl. (2.11) und c_w ab) sind die Aufstiegszeiten nur geringfügig von der Feldstärke abhängig, während für kleinere Radien Flussröhren mit niedrigen Feldstärken deutlich langsamer aufsteigen. Die Form dieses Diagrammes ist weitgehend unabhängig von δ , wenn man von der Veränderung der Aufstiegszeiten absieht. Die Lage des Kreuzungspunktes ist dagegen stark abhängig von der Poldistanz. Dieser Effekt ist in Abb. 2.3 zu sehen, wo die Variation der Aufstiegszeit als Funktion der Poldistanz θ gezeigt ist. Als Superadiabatizität wurde wieder $\delta = -3 \cdot 10^{-6}$ gewählt, der Flussröhrenradius beträgt 1 000 km. Im Bereich $\theta = 30^\circ - 70^\circ$ liegt der Kreuzungspunkt unterhalb von 1 000 km, außerhalb dieses Bereichs bei größeren Radien. Deutlich ist die Zunahme der Aufstiegszeit in Äquaturnähe. Sie wird verursacht durch das Zusammenwirken der Corioliskraft und der magnetischen Krümmungskraft. Im Anfangsgleichgewicht kompensieren sich beide Kräfte gegenseitig, jedoch führt der durch die Auftriebskraft getriebene radiale Aufstieg der Flussröhre über die Drehimpulserhaltung zu einer Verringerung der toroidalen Strömung innerhalb der Flussröhre und damit auch zu einer Verringerung der Corioliskraft. Die nicht mehr vollständig kompensierte magnetische Krümmungskraft wirkt dann dem radialen Aufstieg entgegen. Dieser Effekt zeigt eine deutliche Breitenabhängigkeit, weil die radial wirkende Auftriebskraft in Äquaturnähe stärkere Abweichungen vom Aufstieg auf Zylindern $r \sin \theta = \text{const.}$ verlangt als in Polnähe.

In der folgenden Rechnung wird das Zusammenspiel der magnetischen

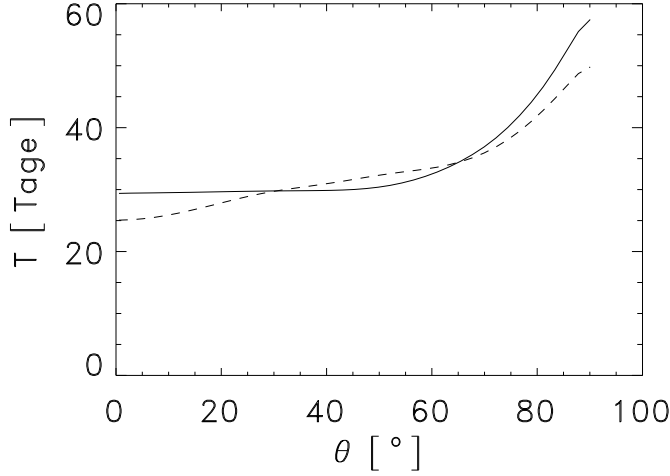


Abbildung 2.3: Aufstiegszeiten als Funktion der Poldistanz θ für die Magnetfeldstärken $B = 1 \text{ T}$ (durchgezogen) und $B = 10 \text{ T}$ (gestrichelt). Die Superadiabaticität ist wieder $\delta = -3 \cdot 10^{-6}$.

Krümmungskraft und der Corioliskraft im Detail betrachtet. In der Startsituation ist das Gleichgewicht in radialer Richtung gegeben durch

$$0 = -\frac{B_0^2}{\mu_0 r_0} - \varrho_0 (\Omega_e^2 - \Omega^2) r_0 \sin^2 \theta_0. \quad (2.39)$$

Sei im Folgenden

$$x := r \sin \theta / (r_0 \sin \theta_0). \quad (2.40)$$

Im Limes $\beta \gg 1$ ist die Verstärkung des Magnetfeldes einer Flussröhre proportional zu der Streckung der Flussröhre. Nach einer Bewegung in die Position (r, θ) folgt aus dieser Beziehung und der Drehimpulserhaltung

$$B = B_0 \frac{r \sin \theta}{r_0 \sin \theta_0} = B_0 x \quad (2.41)$$

$$\dot{\phi} = \Omega \left[\left(\frac{r_0 \sin \theta_0}{r \sin \theta} \right)^2 - 1 \right] = \Omega \left(\frac{1}{x^2} - 1 \right). \quad (2.42)$$

Die Bewegungsgleichung für die radiale Richtung (2.28), (2.31) lautet zusammen mit Gl. (2.39), (2.41) und (2.42)

$$\begin{aligned} \ddot{r} = & \frac{B_0^2}{\mu_0 r} \left(\frac{1}{\varrho_0} - \frac{1}{\varrho} \right) x^2 - \frac{\Delta \varrho}{\varrho} (g - \Omega_e^2 r \sin^2 \theta) \\ & + \Omega^2 r \sin^2 \theta \left(\frac{1}{x^4} - 1 \right) + \frac{c_w}{\pi R} \frac{\varrho_e}{\varrho} |\vec{v}_\perp| v_{\perp r} + r \dot{\theta}^2. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Weil die Flussröhren für nicht zu starke Feldstärken die Tendenz haben, auf Zylindern mit $r \sin \theta = \text{const.}$ aufzusteigen, liegt der Wert von x nahe bei 1. Aus diesem Grund ist der erste Term in Gl. (2.43) kaum von θ abhängig. Im dritten Term erhält man dagegen eine starke θ -Abhängigkeit, weil neben $\sin^2 \theta$ auch $1/x^4 - 1$ von θ abhängt. Während dieser Term an den Polen verschwindet, erreicht er am Äquator sein Maximum mit $x \approx 1.02$ (ergibt sich aus dem Aufstieg um 10 000 km).

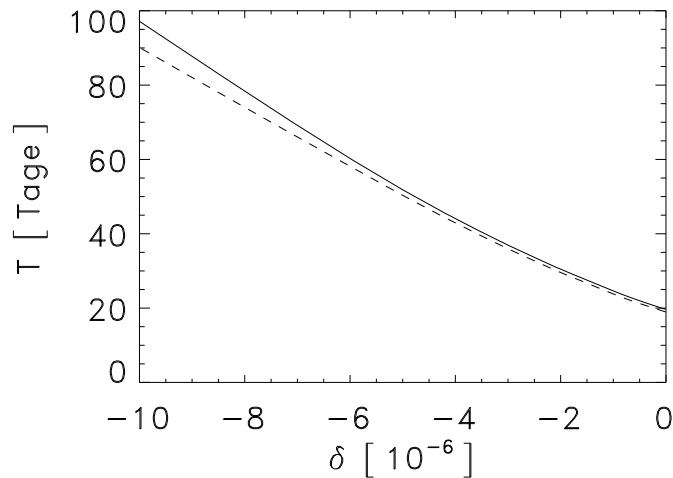


Abbildung 2.4: Aufstiegszeiten als Funktion von δ für die Magnetfeldstärken $B = 1 \text{ T}$ (durchgezogen) und $B = 10 \text{ T}$ (gestrichelt).

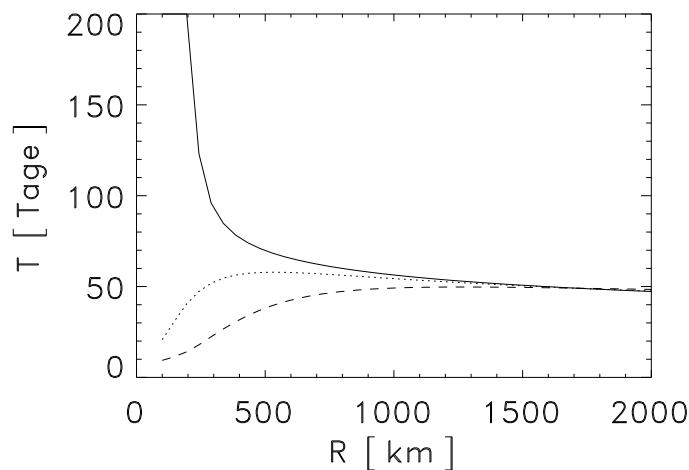


Abbildung 2.5: Aufstiegszeiten als Funktion von R für die Magnetfeldstärken $B = 1 \text{ T}$ (durchgezogen), $B = 5 \text{ T}$ (punktiert) und $B = 10 \text{ T}$ (gestrichelt) unter Berücksichtigung einer meridionalen Zirkulation.

In Abb. 2.4 ist die Aufstiegszeit für eine Strecke von 10 000 km in der Overshoot-Region als Funktion der Superadiabatizität δ dargestellt. Die Poldistanz ist $\theta = 70^\circ$, der Flussröhrenradius $R = 1000 \text{ km}$. Der Einfluss der Magnetfeldstärke auf die Aufstiegszeiten ist in diesem Fall sehr gering, weil der Radius nahe dem Kreuzungspunkt in Abb. 2.2 gewählt wurde. Es ist zu erkennen, dass der lineare Zusammenhang von Gl. (2.23) gut bestätigt wird.

2.5.3 Einfluss einer meridionalen Zirkulation

Beobachtungen der Sonne zeigen an der Sonnenoberfläche eine vom Äquator zum Pol gerichtete Strömung, die sich in der Konvektionszone durch eine entsprechende Umkehrströmung zu einer Zirkulationsströmung schließen muss. Theoretische Modelle der solaren Rotation zeigen, dass sich eine solche meridionale Zirkulation als Begleiterscheinung der differentiellen Rotation ergibt (Rüdiger et al., 1998). Die Strömungsgeschwindigkeit dieser Zirkulation beträgt ca. $10 \text{ m s}^{-1} - 20 \text{ m s}^{-1}$.

Der wesentliche Einfluss einer meridionalen Zirkulation lässt sich anhand von Gl. (2.43) erklären. Bei einer Zirkulation, die im Bereich der unteren Konvektionszone

vom Pol zum Äquator verläuft, führt der Transport der Flussröhren in Richtung Äquator zu einer Vergrößerung von x . Nach Gl. (2.43) ergibt sich hierdurch eine zusätzliche Kraft, welche die Auftriebskraft teilweise kompensieren kann. Um den Einfluss der Zirkulation auf die Aufstiegszeiten zu untersuchen, wurde für die meridionale Geschwindigkeit der Ansatz

$$v_{\theta}^m(r, \theta) = v_0 \sin(2\theta) \quad (2.44)$$

verwendet. Eine mögliche r -Abhängigkeit wird später diskutiert.

Die hier vorliegende Situation ist vergleichbar mit der in Abb. 2.2 beschriebenen. Der wesentliche Unterschied ist das zusätzliche externe Geschwindigkeitsfeld. In Abb. 2.5 ist die Aufstiegszeit als Funktion des Radius für die Parameter $\delta = -3 \cdot 10^{-6}$, $\theta = 70^\circ$ und $v_0 = 20 \text{ m s}^{-1}$ dargestellt. Bei großen Flussröhrenradien führt die meridionale Zirkulation zu einer Vergrößerung der Aufstiegszeiten um ca. 25%, die weitgehend unabhängig von der Feldstärke ist. Bei kleineren Radien sind die Ergebnisse stark abhängig von der Feldstärke. Für niedrige Feldstärken ist es möglich, dass sich ein Gleichgewicht einstellt, bei dem sich die Flussröhre im Strahlungsgleichgewicht befindet und die resultierende Auftriebskraft durch Corioliskraft und Strömungswiderstand kompensiert wird (siehe nächster Abschnitt). Bei großen Feldstärken führt dagegen der radiative Strahlungsaustausch bedingt durch den ersten Term in Gl. (2.11) zu einem schnelleren Aufstieg.

2.5.4 Gleichgewichtszustände

Für nicht zu große Feldstärken und Flussröhrenradien sind neue Gleichgewichtszustände möglich, die sich von selbst aus dem meridionalen Transport und der Drehimpulserhaltung ergeben. Der meridionale Transport des Magnetfeldes in Richtung Äquator vergrößert den Abstand zu der Rotationsachse der Sonne, so dass die toroidale Strömung (relativ zu der Hintergrundrotation) in der Flussröhre schwächer wird oder sogar ihr Vorzeichen umdreht. Dadurch wird das anfängliche Gleichgewicht zwischen magnetischer Krümmungskraft und Corioliskraft gestört. Als Folge ergibt die Summe von Krümmungskraft und Corioliskraft eine Nettokraft, deren r -Komponente die Auftriebskraft und deren θ -Komponente die Strömungswiderstandskraft kompensieren kann. Die Rahmenbedingungen unter denen diese Gleichgewichte existieren, lassen sich aus Gl. (2.43) abschätzen.

Weil die meridionale Zirkulation in dem hier verwendeten Modell am Boden der Konvektionszone nur eine θ -Komponente besitzt und im Gleichgewichtszustand $\dot{r} = 0$ gilt, verschwindet $v_{\perp r}$ und damit die Strömungswiderstandskraft in Gl. (2.43). Das Gleiche gilt auch für den Trägheitsterm $r\dot{\theta}^2$, weil im Gleichgewicht auch $\dot{\theta} = 0$ gelten muss. Damit ergibt sich für den maximal stabilisierbaren Dichtekontrast

$$\frac{\Delta \varrho}{\varrho} = \frac{\Omega^2 r \sin^2 \theta}{g} \left(\frac{1}{x^4} - 1 \right) + \frac{B^2}{\mu_0 g r} \left(\frac{1}{\varrho_0} - \frac{1}{\varrho} \right) . \quad (2.45)$$

Bei solaren Verhältnissen ist abgesehen von der Polregion der zweite Term auf der rechten Seite sehr viel kleiner als der erste Term. Für $\theta = 70^\circ$ und $B = 5 \text{ T}$, sowie

$\varrho/\varrho_0 \approx 0.8$, was einer radialen Distanz $\Delta r \simeq 20\,000$ km entspricht, folgt

$$\Omega^2 r \sin^2 \theta \simeq 3 \cdot 10^{-3} \quad (2.46)$$

$$\frac{B^2}{\mu_0 r} \left(\frac{1}{\varrho_0} - \frac{1}{\varrho} \right) \simeq 3 \cdot 10^{-5}, \quad (2.47)$$

d.h. für $x \simeq 1.03$ ist der erste Term in Gl. (2.45) bereits um einen Faktor 10 größer als der zweite Term. In der Regel ist Δr kleiner als oben angenommen und x größer. Weil der Einfluss der solaren Rotation auf die effektive Gravitationsbeschleunigung sehr klein ist, kann auch g_{eff} durch g angenähert werden. Zusammen mit

$$\frac{\Delta \varrho}{\varrho} \approx -\frac{1}{\beta} - \frac{\Delta T}{T} \quad (2.48)$$

erhält man für die Feldstärke

$$B = \sqrt{2 \mu_0 p \left(\frac{\Omega^2 r \sin^2 \theta}{g} \left(1 - \frac{1}{x^4} \right) - \frac{\Delta T}{T} \right)}. \quad (2.49)$$

Im Strahlungsgleichgewicht gilt nach Gl. (2.12)

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{2P + NQ}{8T} R^2. \quad (2.50)$$

Bisher wurde nur die r -Komponente der Bewegungsgleichung betrachtet, während die meridionale Zirkulation in der θ -Komponente die wesentliche Rolle spielt. Gleichgewichte können sich nur einstellen, wenn v_0 hinreichend groß oder R hinreichend klein ist, damit der Strömungswiderstand ausreichend wirksam ist. Die Gleichgewichtsbedingung in θ -Richtung ergibt sich, wenn man Gl. (2.39), (2.41) und (2.42) in Gl. (2.29), (2.32) einsetzt:

$$0 = \frac{B^2}{\mu_0 r} \left(\frac{1}{\varrho_0} - \frac{1}{\varrho} \right) \cot \theta - \frac{\Delta \varrho}{\varrho} \Omega_e^2 r \sin \theta \cos \theta \quad (2.51)$$

$$+ \Omega^2 r \sin \theta \cos \theta \left(\frac{1}{x^4} - 1 \right) + \frac{c_w}{\pi R} \frac{\varrho_e}{\varrho} (v_\theta^m)^2.$$

Der erste Term und zweite Term auf der rechten Seite können gegenüber dem dritten Term vernachlässigt werden (dies ergibt sich aus Gl. (2.46), (2.47) und $\Delta \varrho/\varrho \ll |1/x^4 - 1|$). Zusammen mit Gl. (2.44) ergibt sich dann:

$$1 - \frac{1}{x^4} = \frac{2}{\pi} \frac{c_w v_0^2}{\Omega^2 r R} \sin(2\theta). \quad (2.52)$$

Weil in den hier betrachteten Fällen stets $x > 1$ gilt, sind Gleichgewichte nur möglich für

$$R > R_{\min} = \frac{2}{\pi} \frac{c_w v_0^2}{\Omega^2 r} \sin(2\theta). \quad (2.53)$$

Flussröhren mit kleineren Radien werden von der Strömung praktisch ungehindert Richtung Äquator transportiert. Es ist hier zu beachten, dass R_{\min} über Gl. (2.38) vom Magnetfeld abhängig ist. Einsetzen von Gl. (2.52) in Gl. (2.49) liefert schließlich

$$B = \sqrt{2 \mu_0 p \left(\frac{2 c_w v_0^2 \sin^2 \theta \sin(2\theta)}{\pi g R} - \frac{2 P + N Q}{8 T} R^2 \right)}. \quad (2.54)$$

Folglich sind Gleichgewichte nur möglich, falls

$$R < R_{\max} = \left(\frac{16 T c_w v_0^2 \sin^2 \theta \sin(2\theta)}{\pi g (2 P + N Q)} \right)^{1/3}. \quad (2.55)$$

Flussröhren mit größeren Radien können von der Strömung nicht mehr im Gleichgewicht gehalten werden. In der Abb. 2.6 ist der Verlauf von Magnetfeld und magnetischen Fluss im Intervall $R_{\min} < R < R_{\max}$ für $v_0 = 10 \text{ m s}^{-1}$ bzw. $v_0 = 20 \text{ m s}^{-1}$ und $\theta = 70^\circ$ dargestellt. Die Variable x lässt sich berechnen aus

$$x = \left(1 - \frac{R_{\min}}{R} \right)^{-1/4}. \quad (2.56)$$

Dabei liegen die Gleichgewichte mit einem großen Wert für x links in den Abbildungen. Die Startwerte für die Flussröhre folgen aus

$$B_0 = B/x \quad (2.57)$$

$$R_0 = R \sqrt{x} \quad (2.58)$$

$$\theta_0 = \arcsin(\sin(70^\circ)/x), \quad (2.59)$$

wobei die letzte Beziehung i. Allg. nur näherungsweise erfüllt ist, da in x neben der Änderung von θ auch noch die Änderung von r eingeht. Letztere ist jedoch sehr klein (maximal Dicke der Overshoot-Region).

Mit Hilfe von Abb. 2.6 lässt nun sich die Zunahme der Aufstiegszeiten in Abb. 2.5 für $B = 1 \text{ T}$ leicht erklären, da sich für diese Feldstärke und $v_0 = 20 \text{ m s}^{-1}$ ein Gleichgewicht für Radien unterhalb von 250 km einstellen kann. Die magnetischen Flüsse, die in diesen Gleichgewichten gespeichert werden können, sind jedoch ca. zwei Größenordnungen kleiner als die Flüsse eines typischen Sonnenflecks (10^{14} Wb). Insofern spielen diese Gleichgewichte keine große Rolle für die Speicherung magnetischer Flussröhren, die nach ihrem Aufstieg durch die solare Konvektionszone an der Oberfläche zu der Bildung einer bipolaren Fleckengruppe führen.

Die hier beschriebenen Gleichgewichte können sich für ein gegebenes v_0 und θ nur einstellen, wenn die Feldstärke B und der Radius R zusammenpassen. Wenn dies nicht erfüllt ist, so wird sich das Gleichgewicht eventuell bei einem anderen Wert für θ oder gar nicht einstellen. Weiter ist noch zu beachten, dass v_0 in der Sonne selbst mit r variiert. Um dies zu berücksichtigen, wurde in den numerischen Rechnungen ein leicht modifiziertes Geschwindigkeitsfeld verwendet, welches die folgende Gestalt hat:

$$v_\theta^m(r, \theta) = v_0 \sin(2\theta) \left[1 - \exp(-\alpha (r - r_0)^2) \right], \quad (2.60)$$

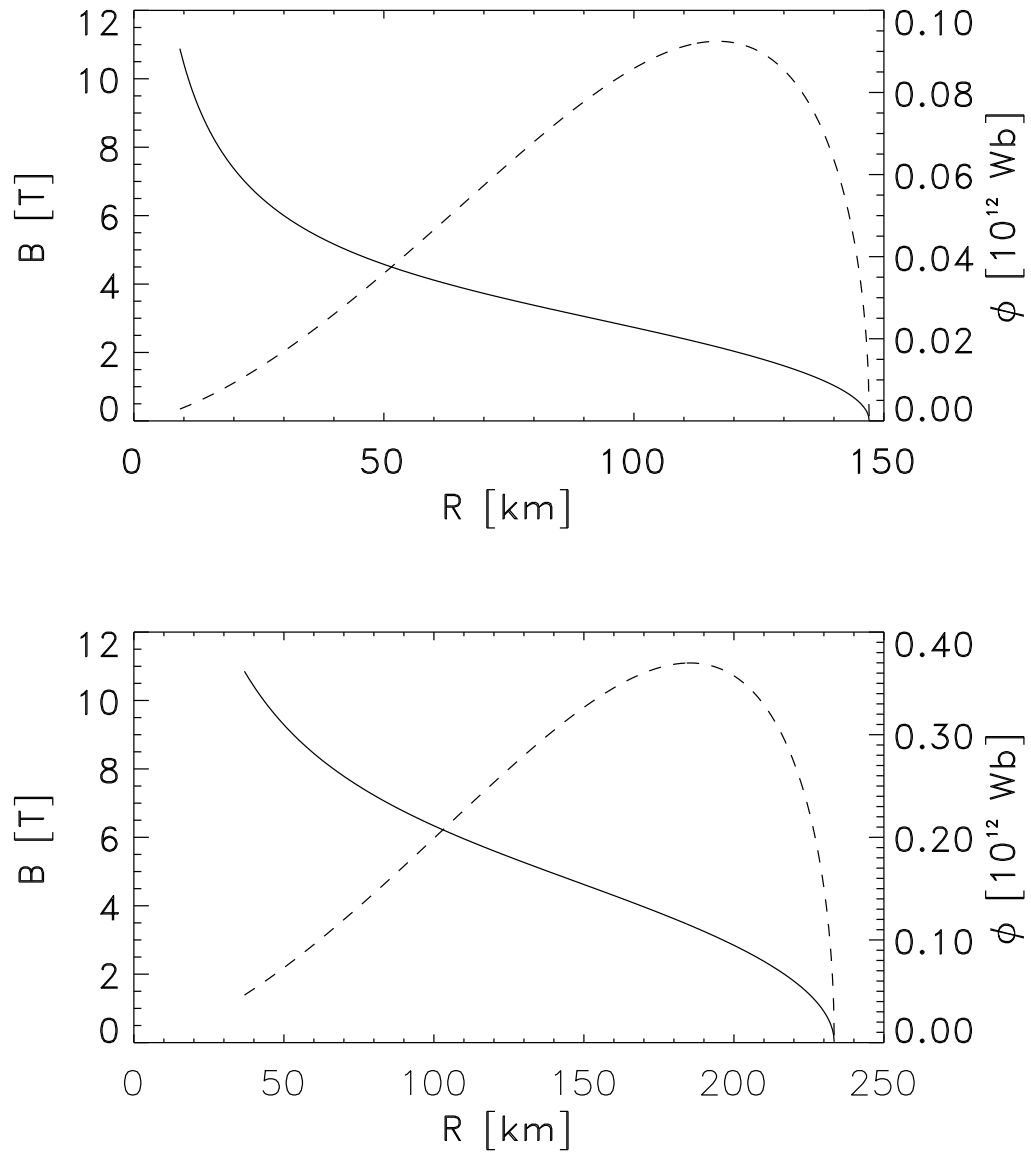


Abbildung 2.6: Gleichgewichte einer magnetischen Flussröhre unter Berücksichtigung einer äquatorwärts gerichteten meridionalen Strömung mit einer Strömungsgeschwindigkeit von $v_0 = 10 \text{ m s}^{-1}$ (oben) bzw. $v_0 = 20 \text{ m s}^{-1}$ (unten). Gezeigt ist die Magnetfeldstärke (durchgezogen, linke Skala) und der magnetische Fluss (gestrichelt, rechte Skala) für ein Gleichgewicht bei einer Poldistanz von $\theta = 70^\circ$ (20° heliographische Breite).

mit $\alpha > 0$ und für $r > r_0$. Bei diesem Geschwindigkeitsfeld verschwindet die meridionale Zirkulation für $r = r_0$ (z.B. am Boden der Overshoot-Region), wobei α die Stärke des Abfalls festlegt. Bei diesem Geschwindigkeitsfeld können 2 Fälle auftreten:

- 1) Die Anfangsfeldstärke und der Anfangsradius sind so gewählt, dass kein Gleichgewicht für $v \leq v_0$ möglich ist. In diesem Fall steigt die Flussröhre auf bis zur Oberfläche.
- 2) Die Anfangsfeldstärke und der Anfangsradius sind so gewählt, dass ein Gleichgewicht für $v \leq v_0$ bei einem geeigneten Winkel θ möglich ist. In diesem Fall sinkt die Flussröhre solange ab, bis sie in eine Tiefe gelangt, bei der das passende v vorliegt.

Die in Abb. 2.6 gezeigten Funktionen $B(R)$ sind Grenzkurven, die die Trennlinie zwischen diesen beiden Fällen markieren. Liegen die Anfangsfeldstärke und der Anfangsradius oberhalb der Grenzkurven, so tritt Fall 1 ein, ansonsten Fall 2.

Die Einstellung eines solchen Gleichgewichtes ist in Abb. 2.7 dargestellt. Die verwendete meridionale Zirkulation besitzt eine Maximalgeschwindigkeit von 15 m s^{-1} und nimmt mit der Tiefe ab. In der Gleichgewichtsposition beträgt die Geschwindigkeit $v_0 = 10 \text{ m s}^{-1}$. Die Flussröhre steigt zunächst infolge des durch die Heizung erzeugten Auftriebs auf. Dabei wird sie äquatorwärts transportiert, wodurch eine toroidale Strömung in der Flussröhre entsteht, die durch die Corioliskraft den Auftrieb kompensieren kann und schließlich den Aufstieg beendet. Da in der entsprechenden Höhe die meridionale Strömungsgeschwindigkeit größer ist als die Geschwindigkeit, die für die Einstellung des Gleichgewichtes erforderlich ist, sinkt die Flussröhre ab bis sie in eine Höhe mit der passenden Geschwindigkeit kommt.

Es ist noch zu bemerken, dass die hier beschriebenen Gleichgewichte unabhängig vom Wert der Superadiabatizität δ existieren und daher grundsätzlich auch in der Konvektionszone möglich sind. Die Superadiabatizität spielt lediglich eine Rolle bei der Einstellung der Gleichgewichte, da sie die Auf- und Abstiegs geschwindigkeiten und damit auch die für die Einstellung des Gleichgewichts benötigte Zeit beeinflussen kann. Allerdings können in der superadiabatischen Konvektionszone nicht-axialsymmetrische Instabilitäten auftreten, die hier nicht betrachtet wurden.

2.6 Schlussfolgerung

In diesem Kapitel wurde der Einfluss der radiativen Heizung auf Gleichgewichtskonfigurationen von dünnen Flussröhren in der solaren Overshoot-Region untersucht. Die Heizung verursacht eine Aufwärtsbewegung der Flussröhre, die zu einem Verlassen der Overshoot-Region in weniger als 100 Tagen führt. Diese Zeitspanne ist zu kurz für eine Verstärkung des Magnetfeldes auf die benötigten Werte von 10 T. Lediglich für Superadiabatizitäten von $\delta < -10^{-4}$ erhält man Verweildauern, die einige Jahre betragen und damit ausreichend lang sind für die Erzeugung starker Magnetfelder. Diese Werte für δ werden jedoch von keinem gängigen Overshoot-Modell der Sonne geliefert. Im nächsten Kapitel wird gezeigt, dass derartige Werte

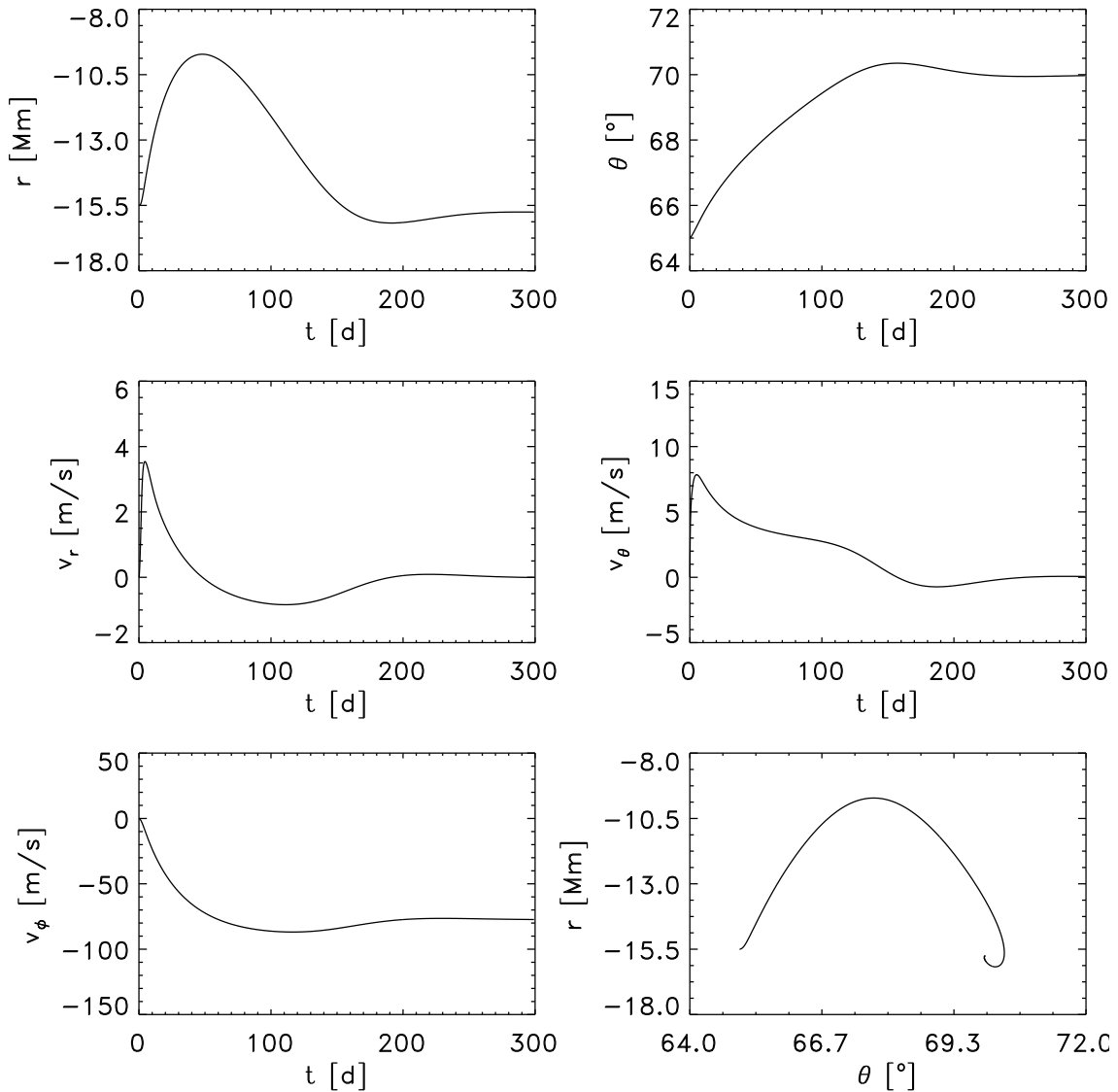


Abbildung 2.7: Einstellung eines Gleichgewichtes für den Fall $B_0 = 3 T$ und $R_0 = 100 \text{ km}$. Gezeigt sind als Funktion der Zeit radialer Abstand und Poldistanz (oben), meridionale Geschwindigkeit (Mitte) und toroidale Geschwindigkeit (unten links), sowie die Bahnkurve der Flussröhre (unten rechts). Die meridionale Strömungsgeschwindigkeit beträgt in der Endposition ca. 10 m s^{-1} .

für δ möglich sind, wenn das Magnetfeld in der Overshoot-Region die Konvektion hinreichend stark unterdrückt.

Berücksichtigt man eine meridionale Zirkulation, die im unteren Bereich der Konvektionszone äquatorwärts gerichtet ist, so sind Gleichgewichte trotz der Heizung möglich. Die speicherbaren Flüsse sind jedoch wenigstens zwei Größenordnungen kleiner als die Flüsse, die man für eine typische Sonnenfleckengruppe oder bipolare aktive Region benötigt. Die Gründe hierfür sind, dass zum einen nur Flussröhren

mit kleinen Radien von einer externen Strömung hinreichend stark beeinflusst werden können und zum anderen der Temperaturüberschuss im Strahlungsgleichgewicht gemäß Gl. (2.20) quadratisch mit dem Radius ansteigt.

Kapitel 3

Radiative Heizung planparalleler magnetischer Schichten

3.1 Einleitung

In Kapitel 2 wurde der Einfluss der radiativen Heizung auf Magnetfelder in Form einzelner Flussröhren behandelt. Dabei wurde die Rückwirkung der Flussröhre auf das die Flussröhre umgebende Plasma vernachlässigt. Im Fall einiger weniger isolierter Flussröhren ist diese Approximation gerechtfertigt, aber bei einer hinreichend großen Flussröhrendichte ist eine Behinderung des konvektiven Energietransports in der Overshoot-Region zu erwarten. Zusätzlich zu den Heizungseffekten, die im vorherigen Kapitel behandelt wurden, müssen dann globale Änderungen der Schichtung berücksichtigt werden. In diesem Kapitel sollen die Größe der zu erwartenden Störungen und die Zeitskala der Einstellung eines neuen Gleichgewichtes durch einen einfachen Ansatz für den radiativen und konvektiven Energietransport abgeschätzt werden.

3.2 Grundgleichungen

Für die Beschreibung eines Overshoot-Prozesses im Rahmen der Mischungswegtheorie für den konvektiven Energietransport muss ein nichtlokaler Ansatz verwendet werden, bei dem sich die für den Energiefluss relevanten Temperaturstörungen und konvektiven Geschwindigkeiten durch Integration entlang des Weges eines Fluidelements ergeben (Shaviv & Salpeter, 1973; Skaley & Stix, 1991). Durch diesen Ansatz ist ein Überschießen der Konvektion in stabil geschichtete Bereiche möglich. Für die Störungsrechnung, die hier benötigt wird, ist es allerdings ausreichend, einen lokalen Ansatz zu wählen, bei dem die Konvektion in erster Näherung als ein turbulenter diffusiver Energietransport behandelt wird (Spruit, 1977). Der konvektive Fluss ist in dieser „Diffusionsapproximation“ proportional zur Differenz des wahren und adiabatischen Temperaturgradienten.

Der radiative und konvektive Energiefluss wird durch folgenden Ansatz beschrie-

ben:

$$\vec{F} = -\kappa_r \text{grad } T - \kappa_c (\text{grad } T - \text{grad } T|_{\text{ad}}) . \quad (3.1)$$

Im Fall der Mischungswegtheorie ergibt sich beim letzten Term ein Exponent von $3/2$, weil die konvektive Geschwindigkeit selbst proportional zur Quadratwurzel der Differenz der Temperaturgradienten ist. Im Fall einer Overshoot-Region werden dagegen die Geschwindigkeiten von der überschießenden Konvektion aus der darüber liegenden Konvektionszone angetrieben und in der subadiabatischen Schichtung der Overshoot-Region abgebremst, so dass dieser Zusammenhang für die Konvektionsgeschwindigkeit nicht zutrifft. In der hier verwendeten Approximation werden die turbulenten Geschwindigkeiten als gegeben betrachtet und ihr Einfluss auf Temperaturstörungen in der Overshoot-Region berechnet. Dabei werden Störungen der Konvektion, die ihre Ursache in dem in der Overshoot-Region gespeicherten Magnetfeld haben, zugelassen. Eine vollkommen konsistente Behandlung der Wechselwirkung zwischen Konvektion und Magnetfeld sowie der Rückwirkung der Superadiabazität auf die Konvektionsgeschwindigkeit würde den Rahmen dieses einfachen Modells sprengen.

Die Temperatur T und die Transportkoeffizienten κ_r und κ_c werden zerlegt in die ungestörten Größen T_0 , κ_r^0 , κ_c^0 und die gestörten Größen T_1 , κ_r^1 , κ_c^1 . Dies führt zu der Darstellung

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \vec{F}_\odot - (\kappa_r + \kappa_c) \text{grad } T_1 - \kappa_r^1 \text{grad } T_0 \\ &\quad - \kappa_c^1 (\text{grad } T_0 - \text{grad } T|_{\text{ad}}) \end{aligned} \quad (3.2)$$

mit $\vec{F}_\odot = -\kappa_r^0 \text{grad } T_0 - \kappa_c^0 (\text{grad } T_0 - \text{grad } T|_{\text{ad}})$. Unter Benutzung des relativen Anteils des Strahlungstransports am solaren Gesamtfluss

$$\alpha = F_r/F_\odot \quad (3.3)$$

($F_\odot = |\vec{F}_\odot|$) lässt sich dies vereinfachen zu

$$\vec{F} = \vec{F}_\odot - \kappa \text{grad } T_1 + \vec{F}_\odot \left[\alpha \frac{\kappa_r^1}{\kappa_r^0} + (1 - \alpha) \frac{\kappa_c^1}{\kappa_c^0} \right] , \quad (3.4)$$

wobei $\kappa = \kappa_r + \kappa_c$. Bei Verwendung des Kramers-Ansatzes für die radiative Diffusivität in der Form $\kappa_r \sim \varrho^{-2} T^{6.5}$ folgt:

$$\frac{\kappa_r^1}{\kappa_r^0} = 6.5 \frac{T_1}{T_0} - 2 \frac{\varrho_1}{\varrho_0} . \quad (3.5)$$

Weil die Abweichungen von der Hintergrundschichtung (wie sich weiter hinten herausstellt) klein sind ($< \mathcal{O}(10^{-4})$), kann die relative Störung von κ_r gegenüber der relativen Störung von κ_c in Gl. (3.4) vernachlässigt werden. Für die Heizungsrate $H = -\text{div} \vec{F}$ folgt damit

$$H = \text{div} (\kappa \text{grad } T_1) - F_\odot \text{grad} \left[(1 - \alpha) \frac{\kappa_c^1}{\kappa_c^0} \right] , \quad (3.6)$$

wobei die Divergenzfreiheit des ungestörten solaren Energieflusses verwendet wurde ($\text{div} \vec{F}_\odot = 0$). Die Zeitentwicklung ergibt sich aus

$$\varrho c_p \frac{\partial T_1}{\partial t} = H . \quad (3.7)$$

In diese Gleichung geht das Magnetfeld indirekt über κ_c^1 ein. Weil jedoch der genaue Zusammenhang zwischen Magnetfeld und der Unterdrückung der Konvektion nicht bekannt ist, ist es sinnvoll, die Lösungen dieser Gleichung in Abhängigkeit von κ_c^1 zu diskutieren.

Die Heizrate besteht aus einem diffusiven Anteil aufgrund der Temperaturstörung T_1

$$H_{\text{diff}} = \text{div} (\kappa \text{ grad } T_1) \quad (3.8)$$

und einem Anteil, der sich aus der Unterdrückung der Konvektion ergibt:

$$H_{\text{rad}} = -\vec{F}_\odot \cdot \text{grad} \left[(1 - \alpha) \frac{\kappa_c^1}{\kappa_c^0} \right] . \quad (3.9)$$

Im Grenzfall der vollständigen Unterdrückung der Konvektion ($\kappa_c^1 = -\kappa_c^0$) liefert Gl. (3.9) eine durch die nicht verschwindende Divergenz des radiativen Energieflusses bedingte Heizung

$$H_{\text{rad}} = -F_\odot \frac{d\alpha}{dr} . \quad (3.10)$$

Hierbei handelt es sich genau um den Heizungsterm, der bereits im vorherigen Kapitel im Fall dünner Flussröhren diskutiert wurde. In Bereichen mit stark variierendem κ_c (Ränder der magnetischen Schicht) ergibt sich ein Beitrag

$$H_{\text{rad}} = -F_\odot (1 - \alpha) \frac{d}{dr} \left(\frac{\kappa_c^1}{\kappa_c^0} \right) , \quad (3.11)$$

der die Ausbildung von thermischen Schatten beschreibt.

Um die Änderung der Superadiabatizität zu bestimmen, ist es erforderlich, die Auswirkungen der Temperaturstörung auf die Druckschichtung zu berechnen. Weil die Zeitskala für die Einstellung des hydrostatischen Gleichgewichtes viel kürzer als die Zeitskala der zu erwartenden Temperaturänderungen ist, kann man von einer instantanen Hydrostatik ausgehen. In der Hydrostatik wird der Einfluss des magnetischen Drucks $p_m = B^2/2\mu_0$ mit berücksichtigt. Die Hydrostatik liefert für den Gesamtdruck $p_{\text{tot}} = p_1 + p_m$

$$\frac{dp_{\text{tot}}}{dr} = -\varrho_1 g . \quad (3.12)$$

Dies ergibt zusammen mit

$$\varrho_1 = \varrho_0 \left(\frac{p_1}{p_0} - \frac{T_1}{T_0} \right) \quad (3.13)$$

für die Druckstörung die Gleichung

$$\frac{dp_{\text{tot}}}{dr} = -\frac{p_{\text{tot}}}{H_{p0}} + \varrho_0 g \left(\frac{T_1}{T_0} + \frac{p_m}{p_0} \right) \quad (3.14)$$

mit der Druckskalenhöhe $H_{p0} = p_0/(\varrho_0 g)$. Als Randbedingung wird $p_1 = 0$ im radiativen Kern unterhalb der magnetischen Schicht verwendet. Die Störung der Superadiabatizität ergibt sich aus Druck- und Dichtestörung zu

$$\delta_1 = H_{p0} \left(\frac{1}{\varrho_0} \frac{d\varrho_1}{dr} - \frac{1}{\gamma p_0} \frac{dp_1}{dr} - \frac{\varrho_1}{\varrho_0^2} \frac{d\varrho_0}{dr} + \frac{p_1}{\gamma p_0^2} \frac{dp_0}{dr} \right). \quad (3.15)$$

Sofern der Einfluss des magnetischen Drucks auf die Hydrostatik hinreichend klein ist, kann die Änderung von δ auch direkt aus der Temperaturstörung berechnet werden:

$$\delta_1 = -\frac{H_p}{T_0} \frac{dT_1}{dr}. \quad (3.16)$$

Für einen typischen Verlauf von α , wie er in Abb. 3.1 gezeigt ist, ergibt sich am Boden der Overshoot-Region eine Kühlung und in der Overshoot-Region sowie der unteren Konvektionszone eine Heizung von ca. 3 W m^{-3} . An den Rändern der magnetischen Schicht spielt auch der Gradient von κ_c^1 selbst eine wichtige Rolle und kann hier je nach Vorzeichen zu einer Kühlung oder Heizung führen. Weil hier das Vorzeichen von $1 - \alpha$ eingeht, hängt es von der genauen Lage des Magnetfeldes ab, an welchem Rand die Kühlung und an welchem die Heizung auftritt (für $\alpha > 1$ wird der untere Rand gekühlt und der obere geheizt, für $\alpha < 1$ umgekehrt). Weil sich diese Heizrate als Divergenz eines Flusses ergibt und κ_c^1 außerhalb der Schicht verschwindet, muss die Heizrate integriert über das Schichtvolumen stets verschwinden. Dass es dennoch effektiv zu einer Aufheizung im Inneren der Schicht kommen kann, hängt mit der sehr geringen thermischen Diffusivität innerhalb der Schicht zusammen, die einen schnellen Energieaustausch und damit einen Ausgleich der Kühlungs- und Heizungsbereiche verhindert.

3.3 Magnetische Schicht

Für eine magnetische Schicht, deren horizontale Ausdehnung weitaus größer ist als die vertikale, spielt die horizontale Ablenkung des konvektiven Energiestromes kaum eine Rolle. In diesem Fall ist eine eindimensionale Beschreibung, die nur den radialen Energiestrom berücksichtigt, ausreichend. Für den Verlauf von α und κ_c^0 werden analytische Ausdrücke verwendet, die den Verlauf der Größen in der Overshoot-Region der Sonne gut approximieren.

$$\alpha = \begin{cases} r < r_0 & : \alpha = 1 \\ r > r_0 & : \alpha = 1 + \frac{(r-r_0)/d_1}{1+(r-r_0)/d_1} \left[(1 + \alpha_0) \exp\left(\frac{r-r_0}{d_2}\right) - 1 \right] \end{cases} \quad (3.17)$$

$$\kappa_c^0 = \begin{cases} r < r_0 & : \kappa_c^0 = 0 \\ r > r_0 & : \kappa_c^0 = c \sqrt{(r/r_0)^2 - 1} \end{cases} \quad (3.18)$$

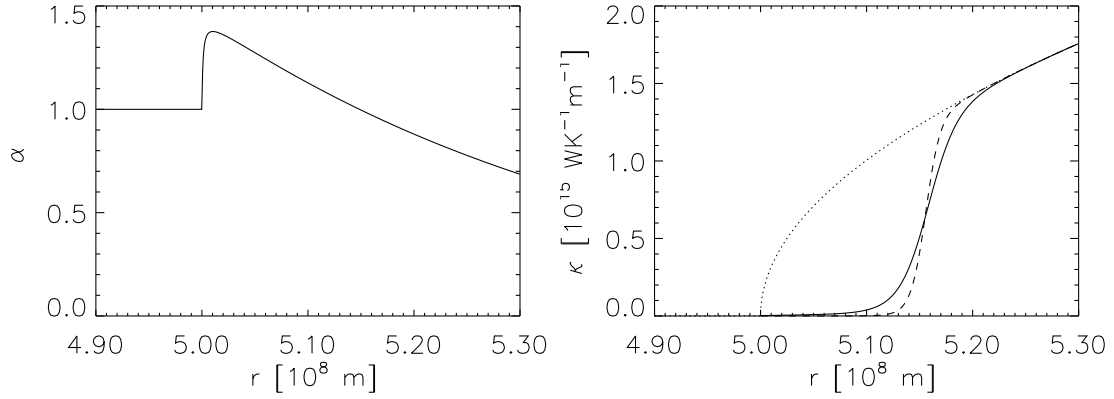


Abbildung 3.1: Links: Verlauf von $\alpha = F_r/F_\odot$. Der starke Anstieg von α markiert den unteren Rand der Overshoot-Region. In dem Bereich mit $\alpha > 1$ transportiert die Konvektion infolge der subadiabatischen Schichtung Energie nach unten (Overshoot-Region). Rechts: Verlauf von κ_c^0 (punktiert) sowie den Verlauf κ_c für um den Faktor 100 (durchgezogen) und 10 000 (gestrichelt) unterdrückte Konvektion im Bereich der Overshoot-Region.

wobei α_0 die Stärke des Overshoots, d_1 die Breite der Übergangsregion am Boden der Overshoot-Region und d_2 den Abfall von α in der Overshoot-Region und Konvektionszone parametrisieren. c bestimmt die Größe des konvektiven Transportkoeffizienten. Typische Verläufe für α und κ_c^0 sind in Abb. 3.1 gezeigt. Für den Verlauf der Magnetfeldstärke innerhalb der Schicht wird der folgende Ausdruck verwendet:

$$B(r) = B_0 \frac{1}{4} \left[1 + \tanh \left(\frac{r - r_{B1}}{d_{B1}} \right) \right] \left[1 - \tanh \left(\frac{r - r_{B2}}{d_{B2}} \right) \right], \quad (3.19)$$

wobei B_0 die Maximalfeldstärke und die Parameter r_{B1} , d_{B1} , r_{B2} und d_{B2} die Form der magnetischen Schicht festlegen (siehe Abb. 3.2). Die gestörte konvektive Diffusivität wird durch

$$\kappa_c = \kappa_{c0} / \left[1 + \left(\frac{B}{B_{\text{eq}}} \right)^\epsilon \right] \quad (3.20)$$

parametrisiert. In den folgenden Rechnungen wird die Reaktion der Temperatur auf eine Unterdrückung der Konvektion um einen Faktor 100 ($B_0 = 10$ T, $B_{\text{eq}} = 1$ T, $\epsilon = 2$) bzw. 10 000 ($B_0 = 10$ T, $B_{\text{eq}} = 1$ T, $\epsilon = 4$) diskutiert. Mit $\kappa_c^0 \simeq 10^{15} \text{ W K}^{-1} \text{ m}^{-1}$ bedeutet dies für die verbleibende konvektive Diffusivität $\kappa_c \simeq 10^3 \kappa_r$ bzw. $\kappa_c \simeq 10 \kappa_r$. Die damit verbundene Diffusionszeitskala

$$\tau_{\text{diff}} = \frac{d^2 \rho c_p}{\kappa} \quad (3.21)$$

beträgt 2, bzw. 200 Jahre ($d = 10^4$ km). Die aus der Unterdrückung der Konvektion resultierende radiative Heizung H_{rad} zeigt neben der Heizung innerhalb der Overshoot-Region und unteren Konvektionszone eine starke Kühlung in der Übergangsregion zum radiativen Kern (Abb. 3.2).

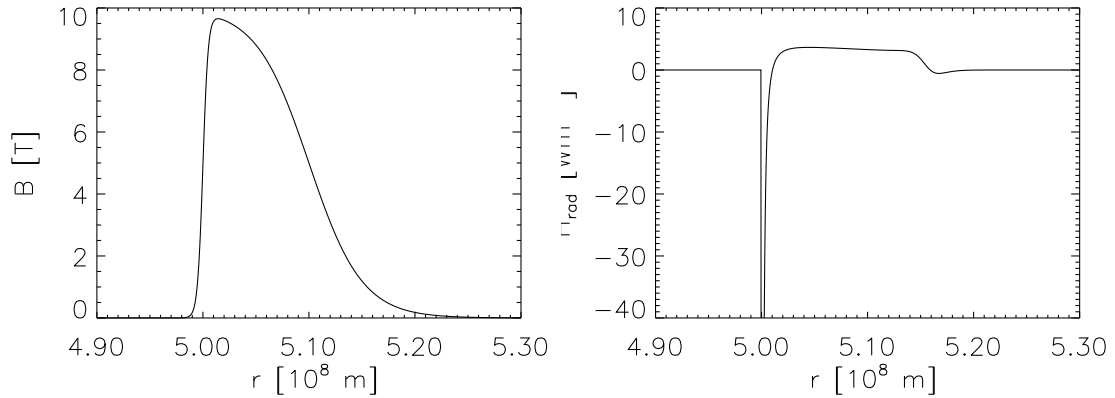


Abbildung 3.2: Links: Verlauf der Magnetfeldstärke, die in den folgenden Rechnungen zugrunde gelegt wird. Rechts: Radiative Heizung, die sich aus einer um den Faktor 100 unterdrückten Konvektion ergibt. Zu erkennen sind am Boden der Overshoot-Region die aus dem α -Gradienten folgende Kühlung (die maximale Kühlrate beträgt hier -250 W m^{-3}) und in der Overshoot-Region eine Heizung von ca. 3 W m^{-3} .

Die Stärke dieser Kühlung hängt empfindlich von der Breite der Übergangsregion am Boden der Overshoot-Region ab, was jedoch nicht für die sich einstellende Temperaturstörung zutrifft. Dies liegt an der Tatsache, dass die volumenintegrierte Kühlrate nur von der Größe des Sprunges von α abhängt. Der Gradient bestimmt lediglich, auf welches Gebiet die Kühlung verteilt ist. Dagegen sind die Ergebnisse empfindlich von der Stärke der Unterdrückung der Konvektion abhängig. Diese Abhängigkeit geht in erster Linie über den Diffusionsterm Gl. (3.8) ein und weniger über den Heizungsterm (3.9), der nur die relative Störung κ_c^1/κ_c^0 enthält. Bei einer Unterdrückung der Konvektion um einen Faktor 100 verhindert die immer noch sehr große thermische Diffusion die Ausbildung starker Temperaturstörungen. Sie sorgt außerdem für einen Ausgleich zwischen den Gebieten mit Kühlung und Heizung, was zu einer effektiven Temperaturniedrigung zwischen $r = 5 \cdot 10^8$ m und $r = 5.1 \cdot 10^8$ m führt (siehe Abb. 3.3). Die Heizung im Inneren der Schicht wird hier weitgehend kompensiert und die Schichtung in der Overshoot-Region wird deutlich subadiabatisch $\delta \approx -10^{-4}$. Ist die Konvektion dagegen stark unterdrückt (Faktor 10 000), so kann dieser Ausgleich nur noch auf einer Zeitskala von einigen 100 Jahren stattfinden. Das Temperaturprofil nach 5 Jahren simulierter Zeit zeigt in diesem Fall einen Verlauf, der in etwa dem von H_{rad} entspricht.

Während am Boden der Overshoot-Region eine deutliche Abkühlung stattfindet, wird der obere Teil infolge der dort vorherrschenden Heizung deutlich erwärmt. Bei Berücksichtigung der Bewegungsgleichungen würde das Magnetfeld im oberen Bereich in die Konvektionszone aufsteigen. Die asymptotische Lösung zeigt hier einen ähnlichen Verlauf wie im Fall der nur teilweise unterdrückten Konvektion (Abb. 3.3), jedoch ist die für die Einstellung des neuen Gleichgewichtes erforderliche Zeit von der Größenordnung einiger 100 Jahre. Für die Speicherung von Magnetfeld auf Zeitskalen des solaren Zyklus ist dieser Fall somit nicht von Bedeutung.

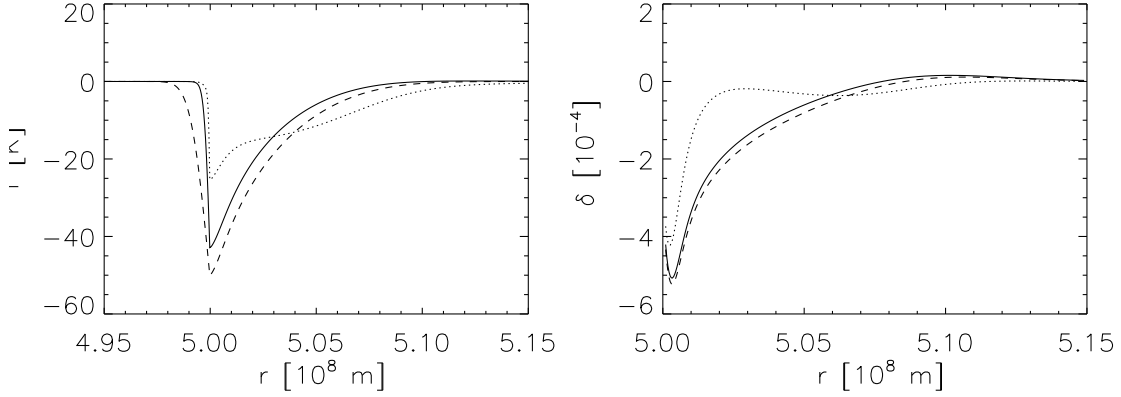


Abbildung 3.3: Zeitliche Entwicklung der Temperaturstörung (links) und Superadiabazität (rechts) für den Fall einer Reduktion des konvektiven Energietransports um einen Faktor 100. Gezeigt sind die Zeitschritte $t = 1$ Monat (gepunktet), $t = 6$ Monate (durchgezogen) und $t = 5$ Jahre (gestrichelt). Im Bereich $r > 5 \cdot 10^8$ m hat sich nach 5 Jahren ein weitgehend stationärer Zustand eingestellt, während sich die Kühlungsfront für $r < 5 \cdot 10^8$ m weiter in den Kern bewegt.

3.4 Vergleich mit analytischer Lösung

Für den Spezialfall stückweise konstanter Diffusionskoeffizienten, der Approximation von H_{rad} durch eine konstante Heizung h_0 innerhalb des Bereiches unterdrückter Konvektion (vergleiche Abb. 3.2 im Bereich $5 \cdot 10^8 \text{ m} < r < 5.15 \cdot 10^8 \text{ m}$) und der Vernachlässigung der geometrischen Faktoren $\sim r^2$ in dem Laplace-Operator (die Schichtdicke ist klein gegenüber dem Sonnenradius) lässt sich leicht eine analytische Lösung angeben.

Für den Verlauf von κ nehmen wir an:

$$\kappa = \begin{cases} r < r_0 & : \kappa = \kappa_r \\ r_0 < r < r_1 & : \kappa = \tilde{\kappa} \\ r > r_1 & : \kappa = \kappa_c^0 \end{cases} \quad (3.22)$$

mit $\kappa_r \ll \tilde{\kappa} \ll \kappa_c^0$. Für $r < r_0$ stellt sich auf den hier relevanten Zeitskalen kein stationäres Gleichgewicht ein, weil die radiative Diffusionszeitskala sehr groß ist. Die Lösung der Diffusionsgleichung hat in diesem Bereich die Form einer fortschreitenden Kühlungsfront

$$T_1(r, t) = T_1^0 [1 - 2\Phi(x)] \quad (3.23)$$

mit

$$x = (r_0 - r) / \sqrt{2 \frac{\kappa_r}{\rho c_p} t} \quad (3.24)$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy .$$

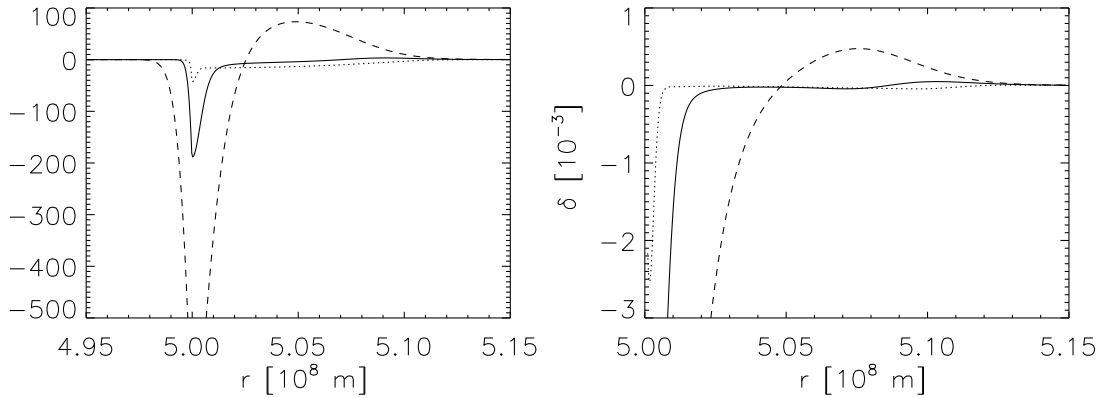


Abbildung 3.4: Zeitliche Entwicklung der Temperaturstörung (links) und Superadiabizität (rechts) für den Fall einer Reduktion des konvektiven Energietransports um einen Faktor 10 000. Gezeigt sind die Zeitschritte $t = 1$ Monat (gepunktet), $t = 6$ Monate (durchgezogen) und $t = 5$ Jahre (gestrichelt). Im Vergleich zu der Situation in Abb. 3.3 sind die Störungen hier deutlich größer. Infolge der geringeren thermischen Diffusivität kommt es hier jedoch im oberen Bereich der Overshoot-Region zu einer deutlichen Aufheizung.

Zwischen r_0 und r_1 stellt sich im Fall $\tilde{\kappa} \gg \kappa_r$ sehr schnell eine stationäre Lösung für T_1 ein. Aufgrund der als konstant angenommenen Heizung im Bereich $r_0 < r < r_1$ handelt es sich hierbei um ein parabolisches Temperaturprofil:

$$T_1 = T_1^0 + a(r - r_0) - \frac{1}{2} \frac{h_0}{\tilde{\kappa}} (r - r_0)^2. \quad (3.25)$$

Die freien Koeffizienten a und b ergeben sich aus den Stetigkeitsbedingungen für Temperatur und Wärmefluss bei r_0 und r_1 . Die Stetigkeit des Wärmeflusses bei $r = r_0$ verlangt

$$\tilde{\kappa} \left[\frac{dT_1}{dr} \right]_{r_{0+}} - \kappa_r \left[\frac{dT_1}{dr} \right]_{r_{0-}} = F_{\odot} \alpha_0, \quad (3.26)$$

wobei α_0 der Sprung von α am Boden der Overshoot-Region ist. Mit der Lösung Gl. (3.23) folgt für den radiativen Fluss aus dem Bereich $r < r_0$:

$$\kappa_r \left[\frac{dT_1}{dr} \right]_{r_{0-}} = T_1^0 \sqrt{\frac{\rho c_p \kappa_r}{\pi t}}. \quad (3.27)$$

Für hinreichend große Zeiten im Bereich

$$t \gg \frac{\rho c_p \kappa_r}{F_{\odot}^2 \alpha_0^2} (T_0^1)^2 \approx 20 (T_0^1 [\text{K}])^2 \text{ s} \quad (3.28)$$

kann dieser Beitrag des radiativen Flusses aus dem Kern vernachlässigt werden. Obwohl die Lösung im Kern weiterhin zeitabhängig ist, wird die Rückwirkung auf den Bereich $r > r_0$ so gering, dass dort eine statische Lösung eine gute Näherung ist. Für den Temperaturgradienten a ergibt sich dann:

$$a = \frac{F_{\odot} \alpha_0}{\tilde{\kappa}}. \quad (3.29)$$

Für $r > r_1$ verhindert die ungestörte Konvektion große Temperaturstörungen, so dass als obere Randbedingung

$$T_1(r = r_1) = 0 \quad (3.30)$$

folgt. Damit ergibt sich die Temperaturstörung am Boden der Konvektionszone zu

$$T_1^0 = -\frac{F_\odot \alpha_0}{\tilde{\kappa}} (r_1 - r_0) + \frac{1}{2} \frac{h_0}{\tilde{\kappa}} (r_1 - r_0)^2 . \quad (3.31)$$

Die Stetigkeit des Wärmeflusses liefert den Temperaturgradienten für $r > r_1$

$$\kappa_c^0 \left[\frac{dT_1}{dr} \right]_{r_{1+}} - \tilde{\kappa} \left[\frac{dT_1}{dr} \right]_{r_{1-}} = F_\odot (1 - \alpha(r_1)) . \quad (3.32)$$

Der Temperaturgradient für $r > r_1$ ist von der Größenordnung $F_\odot / \kappa_c^0 \approx 10^{-7} \text{Km}^{-1}$.

Der Gradient der Temperaturstörung in der Overshoot-Region ist positiv, solange (siehe Gl. (3.25))

$$r \leq r_0 + \frac{F_\odot \alpha_0}{h_0} . \quad (3.33)$$

Lösungen mit größeren Werten von r sind physikalisch nicht sinnvoll, weil der dann negative Gradient destabilisierend auf die Schichtung wirkt. Daher ist der Wertebereich für r_1 auf

$$r_0 \leq r_1 \leq r_0 + \frac{F_\odot \alpha_0}{h_0} \quad (3.34)$$

einzu beschränken.

Für $r_1 = r_0 + F_\odot \alpha_0 / h_0$ ergeben sich am Boden der Overshoot-Region die maximalen Störungen der Temperatur und Superadiabatizität:

$$T_1(r_0) = -\frac{1}{2} \frac{F_\odot^2 \alpha_0^2}{\tilde{\kappa} h_0} \quad (3.35)$$

$$\delta_1 = -\frac{H_p}{T_0} \frac{dT_1}{dr} = -\frac{H_p}{T_0} \frac{F_\odot \alpha_0}{\tilde{\kappa}} . \quad (3.36)$$

Mit typischen Werten für die Overshoot-Region von $F_\odot = 1.2 \cdot 10^8 \text{Wm}^{-2}$, $\alpha_0 = 0.4$ und $h_0 = 3 \text{Wm}^{-3}$ sowie $\tilde{\kappa} = 10^{13} \text{WK}^{-1}\text{m}^{-1}$ (dies entspricht ungefähr der in Abb. 3.3 dargestellten Situation) folgt:

$$\begin{aligned} r_1 - r_0 &= 16 \text{ Mm} \\ T_1(r_0) &= -40 \text{ K} \\ \delta_1(r_0) &= -1.4 \cdot 10^{-4} . \end{aligned} \quad (3.37)$$

Der Einfluss der Störung des Wärmestroms aus dem Sonneninneren Gl. (3.27) kann in diesem Fall für $t \gg 3 \cdot 10^4 \text{s}$ vernachlässigt werden.

3.5 Diskussion

Die Rechnungen in diesem Kapitel haben gezeigt, dass es einen deutlichen Unterschied zwischen der Speicherung einiger weniger Flussröhren und der Speicherung einer magnetischen Schicht mit starker Behinderung der Konvektion in der Overshoot-Region gibt. Der Grund hierfür ist der Verlauf der Divergenz des radiativen Energieflusses. Mit Ausnahme des Bodens der Overshoot-Region, wo eine starke radiative Kühlung vorherrscht, ergibt sich in der Overshoot-Region eine Heizung von ca. 3 W m^{-3} . Während einzelne Flussröhren, welche die Konvektion in ihrer Umgebung nicht wesentlich behindern, nur diese Heizung spüren (siehe Kapitel 2), erzwingt die Behinderung der Konvektion durch eine magnetische Schicht eine Änderung des Temperaturverlaufs in der Overshoot-Region, wodurch auch die Bedingungen für die Speicherung des Magnetfeldes beeinflusst werden. Diese Änderung führt zu einer Senkung der Temperatur in der Overshoot-Region, vor allem hervorgerufen von der starken radiativen Kühlung am Boden. Während diese Temperaturstörung den radiativen Energiefluss, der sich am Temperaturgradienten orientiert, kaum beeinflusst, wird durch die Zunahme der Subadiabatizität der ursprüngliche konvektive Energiefluss ($F_c \sim \kappa_c \delta$) wiederhergestellt. Diese Einstellung eines neuen Gleichgewichtes erfolgt in der Overshoot-Region mit der konvektiven Zeitskala, die bei $\kappa_c \approx 10^3 \kappa_r$ (Abschwächung der Konvektion um einen Faktor 100) ca. 2 Jahre beträgt. Es handelt sich hierbei um kein globales Gleichgewicht, weil sich eine radiative Kühlungsfront weiter vom Boden der Overshoot-Region in das Sonneninnere ausbreitet. Die Rückwirkung auf die Overshoot-Region ist jedoch vernachlässigbar klein. Ein globales Gleichgewicht kann sich nur auf der Kelvin-Helmholtz-Zeitskala für die gesamte Sonne ($\sim 10^6$ Jahre) einstellen.

Welche Konsequenzen ergeben sich nun hieraus für die Speicherung von magnetischen Feld in der Overshoot-Region? Da für die hier angestellten Überlegungen wichtig ist, dass die Konvektion nur teilweise unterdrückt ist (bei vollständiger Unterdrückung beträgt die Zeit für die Einstellung des Gleichgewichts einige 1000 Jahre), sollte das Magnetfeld nur in stark fragmentierter Form vorliegen (hohe Flussröhrendichte), so dass die Konvektion in den unmagnetischen Gebieten zwischen den Flussröhren in abgeschwächter Form weiter vorhanden ist. Jedes Flusselement wird in diesem Fall durch die radiative Heizung aufgeheizt, wie es in Kapitel 2 beschrieben wurde (die Temperaturänderungen beeinflussen die radiative Heizung kaum). Jedoch führt die Unterdrückung der Konvektion zu einer Zunahme der Subadiabatizität, wodurch die Aufstiegszeiten (siehe Gl. (2.23)) erheblich verlängert werden. Eine Unterdrückung der Konvektion um einen Faktor 100 führt bereits zu Superadiabatizitäten von $\delta \approx -10^{-4}$, was die Aufstiegszeiten bereits auf einige Jahre verlängert. Über die Rückwirkung des Magnetfeldes auf die Konvektion ist es möglich, dass sich mit steigender Feldstärke und steigender Flussröhrendichte die Bedingungen für die Speicherung des Magnetfeldes verbessern. Wird das Magnetfeld allerdings zu stark, so verlängert sich die thermische Diffusionszeitskala und es ergeben sich Lösungen wie sie in Abb. 3.4 gezeigt sind. Der instabile Temperaturgradient im oberen Bereich der Schicht kann zu Ausbrüchen magnetischen Flusses in die Konvektionszone führen.

Kapitel 4

Speicherung toroidaler Magnetfelder am Boden der Konvektionszone

4.1 Einleitung

Simulationen ausbrechender Flussröhren in der Näherung dünner magnetischer Flussröhren liefern Ergebnisse in Übereinstimmung mit Beobachtungen von Sonnenfleckengruppen (Tiltwinkel, Breite des Ausbruchs) nur, wenn die Feldstärke der Flussröhre vor dem Ausbruch am Boden der Konvektionszone ungefähr 10 T beträgt (Choudhuri & Gilman, 1987; Moreno-Insertis, 1992; D'Silva & Choudhuri, 1993; Fan et al., 1993; Schüssler et al., 1994; Caligari et al., 1995, 1998). Magnetfeld dieser Stärke kann nur in einer subadiabatischen Schichtung (unterhalb der eigentlichen Konvektionszone) gespeichert werden, wo Auftriebsinstabilitäten von der stabilen Schichtung unterdrückt werden können. Für die Speicherung gibt es einerseits die Möglichkeit, dass das Feld bereits fragmentiert in Form von Flussröhren vorliegt, oder dass es andererseits eine Schicht toroidalen Magnetfeldes unterhalb der Konvektionszone bildet. Unabhängig von der Form des Feldes erfordert ein Gleichgewicht in Kugelgeometrie neben der Auftriebsneutralität die Kompensation der polwärts gerichteten Komponente der magnetischen Krümmungskraft. Gleichgewichte von Flussröhren in Kugelgeometrie sowie die Einstellung dieser Gleichgewichte ausgehend von einem Nichtgleichgewichtszustand wurden ausführlich von Moreno-Insertis et al. (1992) behandelt. Eine äquivalente Behandlung für magnetische Schichten wurde bisher nicht durchgeführt. Bisher wurde dieses Problem unter vereinfachenden Bedingungen in kartesischer Geometrie (Hughes, 1985; Hughes & Cattaneo, 1987) oder unter Berücksichtigung der Krümmungskräfte in Zylindergeometrie (Acheson, 1979) betrachtet, was nur die Äquatorebene der Sonne richtig widerspiegelt. Gilman & Fox (1997) berücksichtigen zwar sphärische Geometrie in Breite, aber lassen die radiale Abhängigkeit unberücksichtigt. Die meisten dieser Betrachtungen haben die Untersuchung von magnetischen Instabilitäten zum Ziel, während hier das Augenmerk auf dem Gleichgewicht einer magnetischen Schicht in sphärischer Geometrie liegt.

Im Folgenden werden zunächst Gleichgewichte für Schichten anhand eines semi-analytischen Ansatzes diskutiert, bei dem sich die partiellen Differentialgleichungen der Magnetohydrostatik auf leicht lösbare gewöhnliche Differentialgleichungen reduzieren. Diese Gleichgewichte sind jedoch nur dann physikalisch relevant, wenn sie sich ähnlich wie bei den Flussröhrengleichgewichten aus einem Nichtgleichgewicht von selbst einstellen können. Mit Hilfe von MHD-Simulationen wird die Einstellung dieser Gleichgewichte verfolgt und das Resultat mit den analytischen Ergebnissen verglichen.

4.2 Modellannahmen

In den folgenden Kapiteln werden die grundlegenden Eigenschaften von Gleichgewichtskonfigurationen für starke (10 T) Magnetfelder am Boden der Konvektionszone sowie die Prozesse, die zur Gleichgewichtseinstellung führen, diskutiert. Dabei soll nicht behandelt werden, wie eine magnetische Schicht durch die dynamischen Effekte der differentiellen Rotation und konvektiven Strömungen entsteht. Den hier verwendeten Modellen liegen daher einige vereinfachende Annahmen zugrunde.

Es werden axialsymmetrische Gleichgewichtskonfigurationen von toroidalem Feld betrachtet, weil die magnetische Krümmungskraft die Tendenz hat, Variationen in azimuthaler Richtung zu unterdrücken. Nicht-axialsymmetrische Störungen sind von großer Bedeutung für Instabilitäten, die zu einem Ausbruch des Feldes in die Konvektionszone führen, aber in diesem Kapitel sollen nur die Gleichgewichtseigenschaften behandelt werden.

Im radiativen Inneren der Sonne unterhalb der Konvektionszone sind der elektrische Widerstand und die Viskosität hinreichend klein, um die Verwendung idealer MHD zu rechtfertigen. Infolge der stark subadiabatischen Schichtung spielen hier auch turbulente Transportkoeffizienten keine Rolle. In der Konvektionszone und der Overshoot-Region müssen dagegen grundsätzlich turbulente Transportkoeffizienten berücksichtigt werden, jedoch sind die hier betrachteten Feldstärken weitaus größer als die Äquipartitionsfeldstärke (d.h. derjenigen Feldstärke bei der die magnetische Energiedichte gleich der kinetischen Energiedichte ist), so dass konvektive Strömungen innerhalb der magnetischen Schicht stark unterdrückt sind. Es ist grundsätzlich denkbar, dass eine magnetische Schicht in der Overshoot-Region durch starke Abwärtsströmungen aus der Konvektionszone fragmentiert wird. Diese Strömungen führen jedoch zu keiner effektiven Mischung von magnetisiertem und unmagnetisiertem Plasma. Sie sind vermutlich in der Lage, die Schicht zu durchstoßen (die dazu erforderliche Seitwärtsverschiebung des Magnetfeldes erfordert nicht viel Energie), aber eine turbulente Mischung wird von der hohen Feldstärke unterbunden. Sie können daher nicht Temperaturstörungen oder toroidale Strömungen, die sich innerhalb des magnetisierten Plasmas befinden beeinflussen. Daher können auch hier turbulente Diffusion des Magnetfeldes, turbulente Viskosität und Wärmeleitfähigkeit vernachlässigt werden. Dies trifft nicht auf die Konvektionszone außerhalb der magnetischen Schicht zu, jedoch zeigen die numerischen Rechnungen, dass die Gleichgewichtsmodelle keine wesentlichen Temperaturfluktuationen außerhalb der magneti-

schen Schicht aufweisen, die von der turbulenten Diffusion verwischt werden könnten. Aus diesem Grund kann der turbulente Energietransport auch außerhalb der magnetischen Schicht vernachlässigt werden. Der radiative Energietransport spielt hier nur eine untergeordnete Rolle, weil die radiative Diffusionszeitskala $\tau_{\text{rad}} = d^2 \varrho c_p / \kappa_{\text{rad}}$ für eine Schichtdicke $d = 10^4$ km ca. 1 000 Jahre beträgt und damit weitaus größer ist als die relevanten Zeitskalen des hier betrachteten Problems (\sim Monate für die Einstellung eines mechanischen Gleichgewichts, ≤ 11 Jahre für die Speicherung des magnetischen Flusses).

In den hier diskutierten Modellen wird in der Regel keine differentielle Hintergrundrotation berücksichtigt. Der Einfluss ist relativ gering und wird in Abschnitt 4.7 diskutiert.

Die in Kapitel 2 und 3 behandelte radiative Heizung wird in dieser Betrachtung ausgespart. Für Magnetfelder im radiativen Kern der Sonne verschwindet dieser Heizungseffekt, weil dort der radiative Energiestrom gleich dem Gesamtenergiestrom ist und daher divergenzfrei sein muss. Für Gleichgewichte in der Overshoot-Region muss dieser Heizungseffekt grundsätzlich betrachtet werden. Weil jedoch die Rückwirkung des Magnetfeldes auf die Konvektion und auch die Struktur der Overshoot-Region nicht genau bekannt sind, ist eine detaillierte numerische Simulation, die alle diese Effekte berücksichtigt, zum gegenwärtigen Zeitpunkt noch nicht sinnvoll. Es werden hier daher nur die mechanischen Gleichgewichte ohne Berücksichtigung der radiativen Heizung betrachtet. Bei der Diskussion der Bedeutung dieser Gleichgewichte für die Sonne sollten aber stets die Aussagen von Kapitel 3 berücksichtigt werden.

4.3 Stationäre Gleichgewichte für magnetische Schichten in sphärischer Geometrie

4.3.1 Grundgleichungen

Für die im Folgenden durchgeführten Rechnungen wird die Annahme der Axialsymmetrie gemacht. Das Magnet- und Geschwindigkeitsfeld haben nur eine ϕ -Komponente und das Gravitationsfeld ist radialsymmetrisch:

$$\vec{B} = B(r, \theta) \vec{e}_\phi \quad (4.1)$$

$$\vec{v} = v(r, \theta) \vec{e}_\phi \quad (4.2)$$

$$p = p(r, \theta) \quad (4.3)$$

$$\varrho = \varrho(r, \theta) \quad (4.4)$$

$$\vec{g} = -g(r) \vec{e}_r \quad (4.5)$$

Die Bedingung für das stationäre Gleichgewicht lautet:

$$\varrho (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = -\text{grad } p + \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \vec{B} \times \vec{B} + \varrho \vec{g}. \quad (4.6)$$

Mit

$$(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = -\frac{v^2}{r} \vec{e}_r - \frac{v^2}{r} \cot \theta \vec{e}_\theta \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{B} \times \vec{B} &= (\vec{B} \cdot \operatorname{grad}) \vec{B} - \operatorname{grad} \left(\frac{B^2}{2} \right) \\ &= -\frac{B^2}{r} \vec{e}_r - \frac{B^2}{r} \cot \theta \vec{e}_\theta - \operatorname{grad} \left(\frac{B^2}{2} \right) \end{aligned} \quad (4.8)$$

erhält man schließlich das Gleichungssystem

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = \varrho \frac{v^2 - v_A^2}{r} - \varrho g \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = \varrho (v^2 - v_A^2) \cot \theta, \quad (4.10)$$

mit $v_A^2 = B^2/(\mu_0 \varrho)$. Bei einem gegebenen Magnet- und Geschwindigkeitsfeld werden durch das Gleichungssystem Gl. (4.9,4.10) Druck und Dichte und damit auch die Temperaturschichtung eindeutig festgelegt. Mit Hilfe der Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial r} (4.10) = \frac{\partial}{\partial \theta} (4.9) \quad (4.11)$$

erhält man eine Differentialgleichung für die Dichte:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial \theta} = \frac{1}{g r} \frac{\partial}{\partial \theta} [\varrho (v^2 - v_A^2)] - \frac{\cot \theta}{g} \frac{\partial}{\partial r} [\varrho (v^2 - v_A^2)]. \quad (4.12)$$

Aus darstellungstechnischen Gründen ist es sinnvoll, den Einfluss einer starren Rotation von den Ergebnissen abzuziehen, da diese nur zu einer Verformung der Äquipotentialflächen zu Ellipsoiden führt, die jedoch bei der Sonne sehr klein ist. Dies erreicht man, indem man in den Gl. (4.10), (4.12) die Substitution $v^2 \longrightarrow v^2 - v_0^2$ mit $v_0 = \Omega_0 r \sin \theta$ durchführt. Weil die Korrekturen p_1, ϱ_1 zur Hintergrundschichtung

$$\frac{\partial p_0}{\partial r} = -\varrho_0 g \quad (4.13)$$

sehr klein sind, kann man auf den rechten Seiten der Differentialgleichungen die ungestörte radialsymmetrische Schichtung Gl. (4.13) verwenden. Ausgehend von $\theta = 0$ lassen sich dann die Korrekturen in Druck und Dichte durch die Lösung von zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen berechnen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_1}{\partial \theta} &= \left[\varrho_0 (v^2 - v_0^2) - \frac{B^2}{\mu_0} \right] \cot \theta - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) \\ \frac{\partial \varrho_1}{\partial \theta} &= \frac{1}{g r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\varrho_0 (v^2 - v_0^2) - \frac{B^2}{\mu_0} \right] \\ &\quad - \frac{\cot \theta}{g} \frac{\partial}{\partial r} \left[\varrho_0 (v^2 - v_0^2) - \frac{B^2}{\mu_0} \right]. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Für die Hintergrundschichtung (p_0, ϱ_0) wird eine polytrope Schichtung gemäß Anhang A verwendet. Das Magnetfeld, für das eine Gleichgewichtskonfiguration berechnet werden soll, wird durch eine geeignete Funktion explizit vorgeschrieben.

4.3.2 Lösen der Gleichungen

Bei einem gegebenen Magnetfeld ergeben sich für die Lösung des Gleichungssystems noch die folgenden Freiheitsgrade:

- Vorgabe einer toroidalen Strömung $v(r, \theta)$
- Vorgabe der Druckstörung $p_1(r, \theta_0)$ als Funktion von r für eine beliebige Pol-distanz θ_0 .

Die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen Gl. (4.14) erfordern bei einem Startwinkel θ_0 Anfangswerte für jedes r . Diese Anfangswerte müssen dabei die linearisierte Gleichung (4.9) erfüllen:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(p_1 + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = \varrho_0 \frac{v^2 - v_0^2 - v_A^2}{r} - \varrho_1 g. \quad (4.15)$$

Als Anfangswert kann daher eine Funktion $p_1(r, \theta_0)$ vorgegeben werden, weil sich dann ϱ_1 nach Gl. (4.15) bei gegebenen v und B automatisch ergibt. Die Funktion $p_1(r, \theta_0)$ ist zunächst frei wählbar, weil die Symmetriebedingungen an Pol und Äquator ($\partial p / \partial \theta = 0$) für am Pol hinreichend schnell abfallende Magnetfelder nach Gl. (4.10) automatisch erfüllt sind. Diese Freiheit resultiert aus der Tatsache, dass bisher keine Einschränkung an die Zustandsgleichung gemacht wurde und die Massenerhaltung (das Integral über die Dichtestörung muss verschwinden) ebenfalls nicht berücksichtigt wurde. Rechnet man mit einer polytropen Zustandsgleichung (z.B. in der Konvektionszone), die für die linearisierten Gleichungen einfach durch $p_1 \sim \varrho_1$ gegeben ist, so sieht man leicht, dass i. Allg. keine Lösungen für beliebige v und B möglich sind. Ist man zunächst grundsätzlich interessiert an Lösungen der Magnetohydrostatik, so ist es sinnvoll, diese Einschränkung wegfällen zu lassen, wodurch sich infolge der Freiheitsgrade in der Wahl der Anfangsbedingungen mehrere mögliche Gleichgewichtskonfigurationen ergeben. Welche der möglichen Gleichgewichtslösungen physikalisch relevant sind, lässt sich nur entscheiden, wenn man die Prozesse betrachtet, die zu einem Gleichgewicht führen. Dies geschieht später mit Hilfe numerischer Simulationen, welche die Energiegleichung berücksichtigen und die Massenerhaltung garantieren.

4.3.3 Ergebnisse

Für die hier diskutierten Lösungen wird zunächst eine starre Rotation verwendet. Die zusätzlichen Effekte einer differentiellen Rotation werden in Abschnitt 4.7 diskutiert.

Die möglichen Lösungen der Gleichungen (4.14) lassen sich in zwei Typen einteilen:

- Lösungen, die vorwiegend durch die toroidale Strömung bestimmt sind
- Lösungen, die vorwiegend durch einen Druckgradienten θ -Richtung bestimmt sind.

Die einfachste Lösung des ersten Typs lässt sich analytisch angeben durch die Bedingungen

$$\varrho_1 = 0, \quad (4.16)$$

$$p_1 = -\frac{B^2}{2\mu_0}, \quad (4.17)$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + v_A^2}. \quad (4.18)$$

Es handelt sich hierbei um eine Lösung, die vollkommen analog zu den Flussröhrengleichgewichten ist, wie sie von [Moreno-Insertis et al. \(1992\)](#) diskutiert wurden. Die magnetische Krümmungskraft wird in diesem Fall durch die von der toroidalen Strömung hervorgerufene Corioliskraft kompensiert. Wie im Fall von Flussröhren bedingt die Auftriebsneutralität ($\varrho_1 = 0$) hier zusammen mit dem Druckgleichgewicht eine niedrigere Temperatur innerhalb der magnetischen Schicht. Die Temperaturstörung ist von der Größenordnung $1/\beta$ und beträgt für ein Magnetfeld von 10 T Stärke ca. 10 K.

Die Störung der Rotationsgeschwindigkeit infolge der für das Gleichgewicht erforderlichen toroidalen Strömung lässt sich abschätzen durch

$$v - v_0 \approx \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0 \varrho \Omega_0 r \sin \theta} \simeq 2 \left(\frac{B}{1 \text{ T}} \right)^2 \text{ m s}^{-1} \quad (4.19)$$

($\Omega_0 = 2.6 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$, $r = 5 \cdot 10^8 \text{ m}$, $\varrho = 200 \text{ kg/m}^3$ und $\theta = 45^\circ$). Für ein Magnetfeld von 10 T Stärke sind die erforderlichen Geschwindigkeitsstörungen vergleichbar mit den radialen Geschwindigkeitsdifferenzen der differentiellen Rotation, die im Bereich von $100 - 200 \text{ m s}^{-1}$ liegen (siehe z.B. [Schou et al., 1998](#); [Charbonneau et al., 1999](#)).

Der zweite Lösungstyp ergibt sich aus den Gleichungen unter Verwendung von $v = v_0$. Als Beispiel berechnen wir die Gleichgewichtskonfiguration für ein Magnetfeld mit einer Maximalfeldstärke von 10 T bei $\theta = 65^\circ$ (25° Breite). Als Anfangsbedingung wird $p_1 = -B^2/(2\mu_0)$ für $\theta = 60^\circ$ verwendet, was sich als in guter Übereinstimmung mit den später gezeigten numerischen Simulationen erweist. In [Abbildung 4.1](#) sind die Störungen von Druck und Dichte der Gleichgewichtskonfiguration gezeigt.

Die magnetischen Krümmungskräfte führen zur Ausbildung eines mit θ variierenden Druckverlaufs, wobei sich der maximale Druck am Pol einstellt. Die Hydrostatik in radialer Richtung erfordert eine Störung der Dichte, die proportional zum radialen Gradienten der Druckstörung ist. Entsprechend ergeben sich eine Abnahme der Dichte unterhalb und eine Zunahme der Dichte oberhalb eines Gebietes mit erhöhtem Druck (am Äquator, wo der Druck niedriger wird, ist der Dichteverlauf entsprechend umgekehrt). Während die Druckstörung proportional zu $1/\beta$ ist (für sehr stark am Pol konzentrierte Felder kann der Term $\sim \cot \theta$ in [Gl. \(4.14\)](#) auch deutlich stärkere Störungen erzwingen), geht in die Dichtestörung noch der radiale Gradient des Magnetfeldes ein. Aus [Gl. \(4.14\)](#) erhält man unter Vernachlässigung der Terme $\sim \cot \theta$, was für nicht zu stark am Pol konzentrierte Magnetfelder gerechtfertigt ist, die Abschätzungen:

$$\frac{p_1}{p_0} \simeq \frac{1}{\beta} \quad (4.20)$$

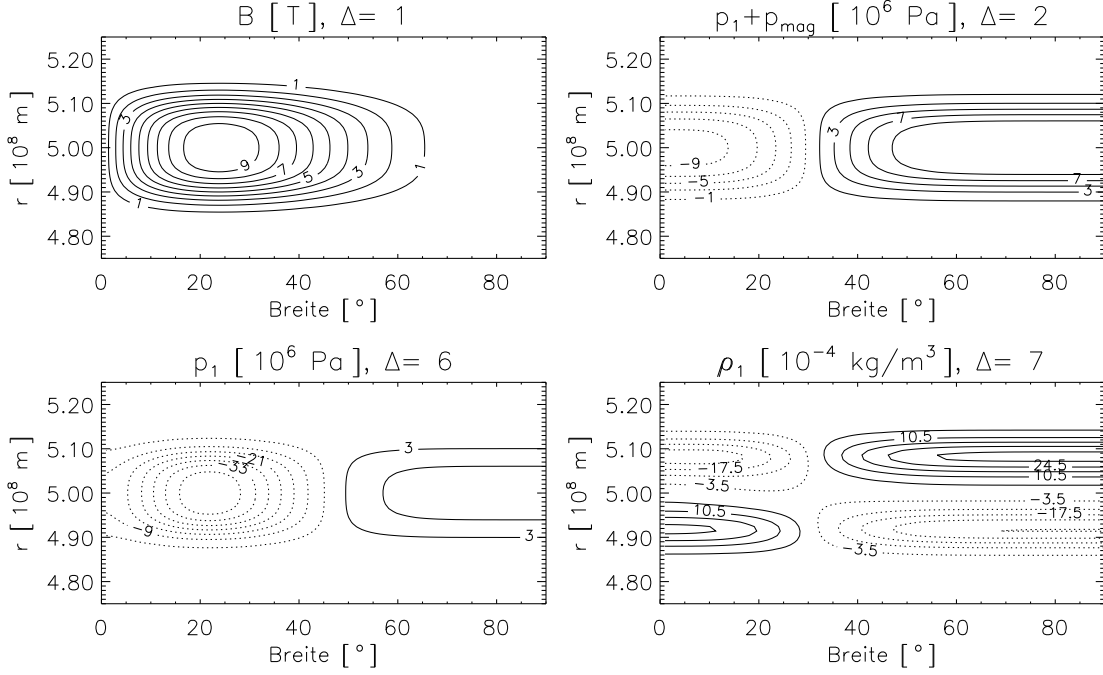


Abbildung 4.1: Links: Isolinien der magnetischen Feldstärke (B) und der Störung des Drucks (p_1) für ein Gleichgewicht ohne toroidale Strömung. Gezeigt ist ein Ausschnitt der r - θ -Ebene. Die Ausdehnung der Schicht in Breite entspricht etwa dem 50 fachen ihrer Dicke. Δ bezeichnet den Abstand der Konturlinien in den jeweiligen Einheiten, die in den eckigen Klammern gegeben sind. Rechts: Isolinien der Störung des Gesamtdrucks ($p_1 + p_{\text{mag}}$) und der Dichtestörung (ϱ_1). Die θ -Komponente der magnetischen Krümmungskraft wird durch den Gradienten der Gesamtdruckstörung in θ -Richtung kompensiert. Das hydrostatische Gleichgewicht in radialer Richtung verlangt eine Dichtestörung proportional zum radialen Gradienten des Gesamtdrucks.

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_0} \approx \frac{H_p}{\Delta r} \frac{1}{\beta}, \quad (4.21)$$

wobei Δr ein Maß für die Dicke des Abfalls des Magnetfeldes ist ($\partial B/\partial r \simeq B/\Delta r$). Die Druckstörung setzt sich dabei zusammen aus der vom magnetischen Druck verursachten Störung und dem Druckprofil, welches zur Kompensation der Krümmungskraft erforderlich ist. Beide Beiträge sind von der Größenordnung $1/\beta$. Weil für die Speicherschicht am Boden der Konvektionszone stets $H_p \gg \Delta r$ gilt, ist die relative Dichtestörung erheblich größer als die relative Druckstörung, so dass die relative Temperaturstörung

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{p_1}{p_0} - \frac{\varrho_1}{\varrho_0} \approx -\frac{\varrho_1}{\varrho_0} \quad (4.22)$$

im Wesentlichen der negativen relativen Dichtestörung entspricht. Die grundlegenden Eigenschaften der Gleichgewichte sind nicht abhängig von der detaillierten Feldverteilung. Auch die Hintergrundströmung hat nur einen geringen Einfluss auf die Gleichgewichte. Die Variation von Druck und Dichte auf der Skala H_p ist gering innerhalb der magnetischen Schicht ($H_p \gg \Delta r$). Ein weitaus wichtigerer Einfluss

geht von der Superadiabatizität $\delta = \nabla - \nabla_{\text{ad}}$ aus, die jedoch nur über die Energiegleichung in das Problem eingeht. Sie ist deshalb nur bei dynamischen Prozessen wie der Einstellung eines Gleichgewichtes von Bedeutung. Wie die Rechnungen der folgenden Abschnitte zeigen, bestimmt in der Tat δ , welche der möglichen Gleichgewichtskonfigurationen ausgebildet werden.

4.4 MHD-Simulationen zur Einstellung der Gleichgewichte

Die Diskussion im vorangehenden Abschnitt hat gezeigt, dass für ein gegebenes Magnetfeld keine eindeutig bestimmte Gleichgewichtskonfiguration existiert, wenn man nur die Magneto hydrostatik betrachtet. Eindeutig wird die Situation erst dann, wenn man die vollen MHD-Gleichungen löst und die Einstellung eines Gleichgewichtes betrachtet. Auf der Sonne werden Magnetfelder auf Zeitskalen von einigen Jahren verstärkt, und während dieser Verstärkung befindet sich das Magnetfeld quasistatisch in einer Gleichgewichtskonfiguration (wie die im Folgenden diskutierten Rechnungen zeigen, ist die Zeitskala für die Einstellung der Gleichgewichte erheblich kürzer als die Zeitskala der Feldverstärkung). Im Rahmen einer MHD-Simulation ist es jedoch nicht möglich, den gesamten Prozess der Feldverstärkung zu berücksichtigen, weil hier infolge des hohen Rechenaufwands höchstens eine Zeitspanne von ca. 1 Monat simuliert werden kann. Es ist auch nicht möglich, die Rechnung durch stärkere Magnetfelder zu beschleunigen, weil in diesem Fall die Superadiabatizität der Schichtung gemäß $\beta\delta = \text{const.}$ angepasst werden müsste, um eine äquivalente Situation zu erhalten. Diese Anpassung ist möglich in der Overshoot-Region mit $\delta \approx -10^{-6}$, aber nicht im radiativen Kern mit $\delta \approx -0.2$, wo eine deutliche Erniedrigung von δ eine nach innen abfallende Temperatur verlangen würde. Aus diesem Grund wird die Einstellung möglicher Gleichgewichte getrennt von den Prozessen betrachtet, die das Magnetfeld generieren. Zu diesem Zweck wird mit einem bereits starken Anfangsfeld (10 T) gestartet, welches sich nicht in einem Gleichgewicht befindet. Um eine asymptotische Annäherung an ein Gleichgewicht zu bekommen, wird dem System durch Viskosität oder eine geeignete Dämpfung in der Impulsgleichung kinetische Energie entzogen. Die wesentlichen Fragen, die mit den Simulationen beantwortet werden sollen, sind:

- Unter welchen Bedingungen (Superadiabatizität der Hintergrundschichtung, Rotation) können sich Gleichgewichte einstellen ?
- Welche physikalischen Prozesse sind daran beteiligt ?
- Welcher Typ eines Gleichgewichtes (toroidale Strömung \leftrightarrow Druckgradient) stellt sich ein ?
- Auf welcher Zeitskala stellen sich Gleichgewichte ein ?

Die im letzten Punkt erwähnte Zeitskala ist von Interesse, weil sie bestimmt, wie groß erwartete Abweichungen von einem Gleichgewicht sein können. Ist diese Zeitskala

kurz (verglichen mit der Zeitskala der Prozesse, die das Magnetfeld erzeugen), so bleibt das System stets sehr nahe am Gleichgewicht.

4.4.1 Numerische Verfahren

Gelöst werden die axialsymmetrischen MHD-Gleichungen in Kugelgeometrie, wobei nur eine toroidale (ϕ -) Komponente des Magnetfeldes betrachtet wird. Hierzu wird der Versatile Advection Code (Tóth, 1996) verwendet, der jedoch für dieses spezielle Problem erheblich modifiziert werden muss.

Weil der Code keine sphärischen Polarkoordinaten verwendet, werden Zylinderkoordinaten benutzt und zusätzliche geometrische Quellterme addiert. Diese Erweiterung der Zylinderkoordinaten soll exemplarisch am Beispiel der Kontinuitätsgleichung diskutiert werden. In Kugelgeometrie (r, θ, φ) lautet die Kontinuitätsgleichung unter Annahme von Axialsymmetrie:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \varrho v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \varrho v_\theta) = 0. \quad (4.23)$$

Durch eine Einbeziehung des geometrischen Faktors $r \sin \theta$ in die Dichte ($\tilde{\varrho} = \varrho r \sin \theta$) erhält man die Gleichung:

$$\frac{\partial \tilde{\varrho}}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tilde{\varrho} v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tilde{\varrho} v_\theta) = 0. \quad (4.24)$$

Diese Gleichung hat die Gestalt einer Erhaltungsgleichung in Zylinderkoordinaten (R, ϕ, z), wenn man die Identifikation $r \leftrightarrow R$, $\theta \leftrightarrow \phi$ und $\varphi \leftrightarrow z$ vornimmt. Eine alternative, jedoch nicht konservative Behandlung ergibt die Umformung

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \varrho v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\varrho v_\theta) = -\frac{1}{r} (\varrho v_r + \cot \theta \varrho v_\theta). \quad (4.25)$$

Diese Gleichung kann in Zylindergeometrie als Erhaltungsgleichung mit Quellterm behandelt werden.

Infolge der sehr großen Werte für β am Boden der Konvektionszone ergeben sich in der Simulation Strömungen mit sehr kleinen Machzahlen (typischer Weise $10^{-4} - 10^{-3}$). Es ist daher erforderlich ein numerisches Verfahren zu verwenden, welches eine sehr geringe numerische Viskosität besitzt. Für dieses Problem, welches keine großen Gradienten aufweist, hat sich das MacCormack-Verfahren als geeignet erwiesen (siehe Anhang D). Dieses Verfahren ist von zweiter Ordnung in Orts- und Zeitkoordinaten. Um numerische Störeinflüsse zu vermeiden, wird in den Gleichungen die hydrostatische Hintergrundschichtung unter Berücksichtigung einer starren Rotation abgezogen:

$$\frac{\partial p_0}{\partial r} = \frac{\varrho_0 v_{\varphi 0}^2}{r} + \varrho_0 g_r \quad (4.26)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial p_0}{\partial \theta} = \frac{\varrho_0 v_{\varphi 0}^2}{r} \cot \theta, \quad (4.27)$$

mit $v_{\varphi 0} = \Omega_0 r \sin \theta$.

Ein besonderes Problem stellt die numerisch korrekte Beschreibung kleiner Superadiabatizitäten dar. In ihrer konservativen Standardform wird in den MHD-Gleichungen die Gesamtenergiedichte (innere + kinetische + magnetische Energiedichte) verwendet, so dass die Superadiabatizität der Schichtung nur indirekt über die Gradienten von Druck und Dichte in die Gleichungen eingeht. Damit ist die Superadiabatizität nur im Rahmen der numerischen Genauigkeit von Ableitungen beschrieben. Tests haben gezeigt, dass Werte von $|\delta| < 10^{-3}$ auf diese Weise nicht mehr korrekt dargestellt werden können. Dieses Problem lässt sich lösen durch Verwendung einer geeignet formulierten Entropiegleichung. Die spezifische Entropie

$$s = c_v \ln \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) \quad (4.28)$$

(c_v : Wärmekapazität bei konstantem Volumen) erfüllt die Gleichung

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad } s = 0, \quad (4.29)$$

wobei \vec{v} infolge der Axialsymmetrie nur die meridionalen Komponenten (r, θ) der Geschwindigkeit bezeichnet. Durch Zerlegung der Entropie in einen zeitunabhängigen Wert der Hintergrundschichtung (s_0) und in eine zeitabhängige Entropiestörung (s_1) erhält man

$$\frac{\partial s_1}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad } s_1 = -\vec{v} \cdot \text{grad } s_0. \quad (4.30)$$

Bei der solaren Rotationsrate ist die Hintergrundschichtung in guter Näherung kugelsymmetrisch, so dass der Gradient von s_0 nur eine radiale Komponente besitzt, die direkt mit Hilfe der Superadiabatizität δ in der Form

$$\frac{ds_0}{dr} = -\frac{c_p \delta}{H_p} \quad (4.31)$$

ausgedrückt werden kann, wobei c_p die Wärmekapazität bei konstantem Druck ist. Nach einer Transformation in die Erhaltungsform folgt schließlich für die Entropiegleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho s_1) + \text{div} (\vec{v} \rho s_1) = \rho v_r \frac{c_p \delta}{H_p}. \quad (4.32)$$

In dieser Gleichung sind die Effekte einer nicht-adiabatischen Schichtung separiert im Quellterm auf der rechten Seite, wobei die Superadiabatizität δ *explizit* eingeht. Dadurch ist eine korrekte Beschreibung auch kleiner Werte für δ gewährleistet. Das komplette hier gelöste Gleichungssystem befindet sich in Anhang C.

Das Rechengebiet ist ein Meridionalschnitt durch eine Kugelschale mit einer Breitenausdehnung vom Pol zum Äquator. Die verwendeten Gittergrößen liegen im Bereich von 80 bis 160 Gitterzellen in radialer Richtung und 40 bis 80 Gitterzellen in Breite. Um eine hinreichende Auflösung der magnetischen Schicht zu gewährleisten, wird ein in radialer Richtung ungleichmäßiges Gitter mit kleineren Gitterzellen innerhalb der magnetischen Schicht verwendet. Die Auflösung richtet sich dabei

nach der Schichtdicke sowie den Gradienten von Magnetfeld und Superadiabazität (scharfer Übergang zwischen radiativen Kern und Overshoot-Region). Es werden geschlossene Ränder verwendet (Geschwindigkeiten senkrecht zu den Rändern verschwinden, ebenso die Normalableitung der Geschwindigkeiten parallel zu den Rändern). Auch die Normalableitungen der Störung von Dichte und Entropie, das Magnetfeld am Pol und Äquator sowie die Normalableitung des Magnetfeldes am unteren und oberen Rand verschwinden. Während die Randbedingungen am Pol und Äquator der Axialsymmetrie bzw. der Symmetrie des Problems in Bezug auf die Äquatorebene entsprechen, sind die Randbedingungen am unteren und oberen etwas willkürlich. Ihr Einfluss ist jedoch gering, weil der untere Rand im radiativen Kern liegt, wo die stark subadiabatische Schichtung radiale Bewegungen unterdrückt, und der obere Rand hinreichend weit entfernt von der magnetischen Schicht gelegt werden kann.

4.4.2 Anfangsbedingungen

Für die Simulationen werden alternativ drei verschiedene Anfangsbedingungen verwendet:

- *Temperaturgleichgewicht* (TEQ): Die Temperatur in der magnetischen Schicht ist gleich der Temperatur in der ungestörten Hintergrundschichtung.
- *Radiales Kräftegleichgewicht* (REQ): Die Temperatur in der magnetischen Schicht ist so gewählt, dass die Auftriebskraft die radiale Komponente der magnetischen Krümmungskraft kompensiert.
- *Latitudinales Kräftegleichgewicht* (LEQ): Die Temperatur wird gewählt wie in TEQ. Die magnetische Krümmungskraft wird durch die Corioliskraft einer toroidalen Strömung innerhalb der Schicht kompensiert.

Die Anfangsbedingungen REQ und LEQ ermöglichen eine Trennung der Prozesse, die zur Gleichgewichtseinstellung in radialer und latitudinaler Richtung führen, was für das grundlegende Verständnis der Abläufe von Vorteil ist. Im Fall von TEQ wirken alle an der Gleichgewichtseinstellung beteiligten Prozesse simultan. Alle Anfangszustände zeichnen sich zudem durch Druckgleichgewicht zwischen magnetischen Druck und Gasdruck aus (die Summe der Störung des Gasdrucks und des magnetischen Drucks verschwindet), weil sich dieses Gleichgewicht am schnellsten einstellt (auf der Zeitskala einer magneto-akustischen Welle).

4.5 Ergebnisse

Die Rechnungen werden mit einer starren Hintergrundrotation durchgeführt. Die Abweichungen, die infolge einer solaren differentiellen Rotation zu erwarten sind, werden in Abschnitt 4.7 separat diskutiert. Die Prozesse, die zu einer Einstellung des latitudinalen und radialen Gleichgewichts führen, werden zunächst mit Hilfe der Anfangsbedingungen LEQ und REQ getrennt betrachtet. Die anfängliche Magnetfeldkonfiguration ist die gleiche wie in Abb. 4.1.

4.5.1 Bedeutung der Kugelgeometrie

Zunächst soll anhand eines Beispiels gezeigt werden, dass die Berücksichtigung der Kugelgeometrie für Magnetfelder mit 10 T Feldstärke am Boden der Konvektionszone von entscheidender Bedeutung ist. [Moreno-Insertis et al. \(1992\)](#) haben bereits für den Fall dünner Flussröhren gezeigt, dass eine nicht kompensierte magnetische Krümmungskraft zu einer signifikanten Polwärtsdrift des magnetischen Flusses innerhalb eines Monats führt. In [Abb. 4.2](#) ist das Ergebnis einer Simulation gezeigt, bei der die Anfangsbedingung REQ verwendet wurde. Die Rechnung berücksichtigt eine dynamische Viskosität von $\nu = 7 \cdot 10^8 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ entsprechend einer turbulenten Viskosität, wie sie durch Mischungswegmodelle der solaren Konvektionszone geliefert wird. Die magnetische Schicht befindet sich zu Beginn am Boden einer adiabatisch geschichteten Konvektionszone, wodurch die Einstellung eines Gleichgewichts mit Druckgradienten ausgeschlossen ist, weil sich die hierfür erforderlichen Temperaturstörungen nicht ausbilden können. Weil außerdem noch die Rotation der Hintergrundströmung ausgeschaltet ist, gibt es keinen Prozess, der ein Gleichgewicht in latitudinaler Richtung erzeugen kann. Als Folge treibt die nicht kompensierte polwärts gerichtete Komponente der magnetischen Krümmungskraft eine Zirkulationsströmung, die innerhalb der Schicht polwärts und im oberen Bereich der Konvektionszone äquatorwärts gerichtet ist. Im Bereich zwischen 40° und 60° ergibt sich entsprechend eine radiale Aufwärtsströmung, die magnetischen Fluss in die Konvektionszone hinein transportiert. Nach einem Monat simulierter Zeit ist etwa die Hälfte des magnetischen Flusses oberhalb von $r = 5.2 \cdot 10^8 \text{ m}$ angelangt. Im Gegensatz zum Fall einer einzelnen Flussröhre kommt es hier auch zu einem deutlichen radialen Transport des Magnetfeldes. Dieses Ergebnis zeigt, dass die Bedingung der Auftriebsneutralität für Gleichgewichte toroidalen Magnetfeldes in Kugelgeometrie bei weitem nicht ausreichend ist. Der Kompensation magnetischer Krümmungskräfte kommt eine entscheidende Rolle zu.

4.5.2 Einstellung des Gleichgewichtes in latitudinaler Richtung

In [Abb. 4.3](#) ist das meridionale Geschwindigkeitsfeld gezeigt, wie es sich in einer Simulation mit REQ als Anfangsbedingung ergibt. Im Gegensatz zum vorherigen Beispiel wird nunmehr die Rotation berücksichtigt. Die magnetische Krümmungskraft erzeugt ein Strömungsmuster, das aus zwei Strömungszellen mit einer polwärts gerichteten Strömung innerhalb der magnetischen Schicht besteht. Für den in [Abb. 4.3](#) gezeigten Fall ist eine stark subadiabatische Hintergrundströmung verwendet worden ($\delta = -0.1$), welche radiale Bewegungen stark behindert. Daher sind die äquatorwärts gerichteten Rückströmungen in zwei Bändern nahe der magnetischen Schicht konzentriert. Die entsprechenden radialen Geschwindigkeiten zeigen starke Aufwärts- und Abwärtsströmungen nahe dem Äquator und bei ca. 50° Breite. Für die Einstellung eines Gleichgewichtes sind hier zwei Prozesse von Bedeutung:

- Der Transport von Drehimpuls durch die meridionale Strömung führt zu einer toroidalen Strömung (relativ zur Hintergrundrotation), die über die Co-

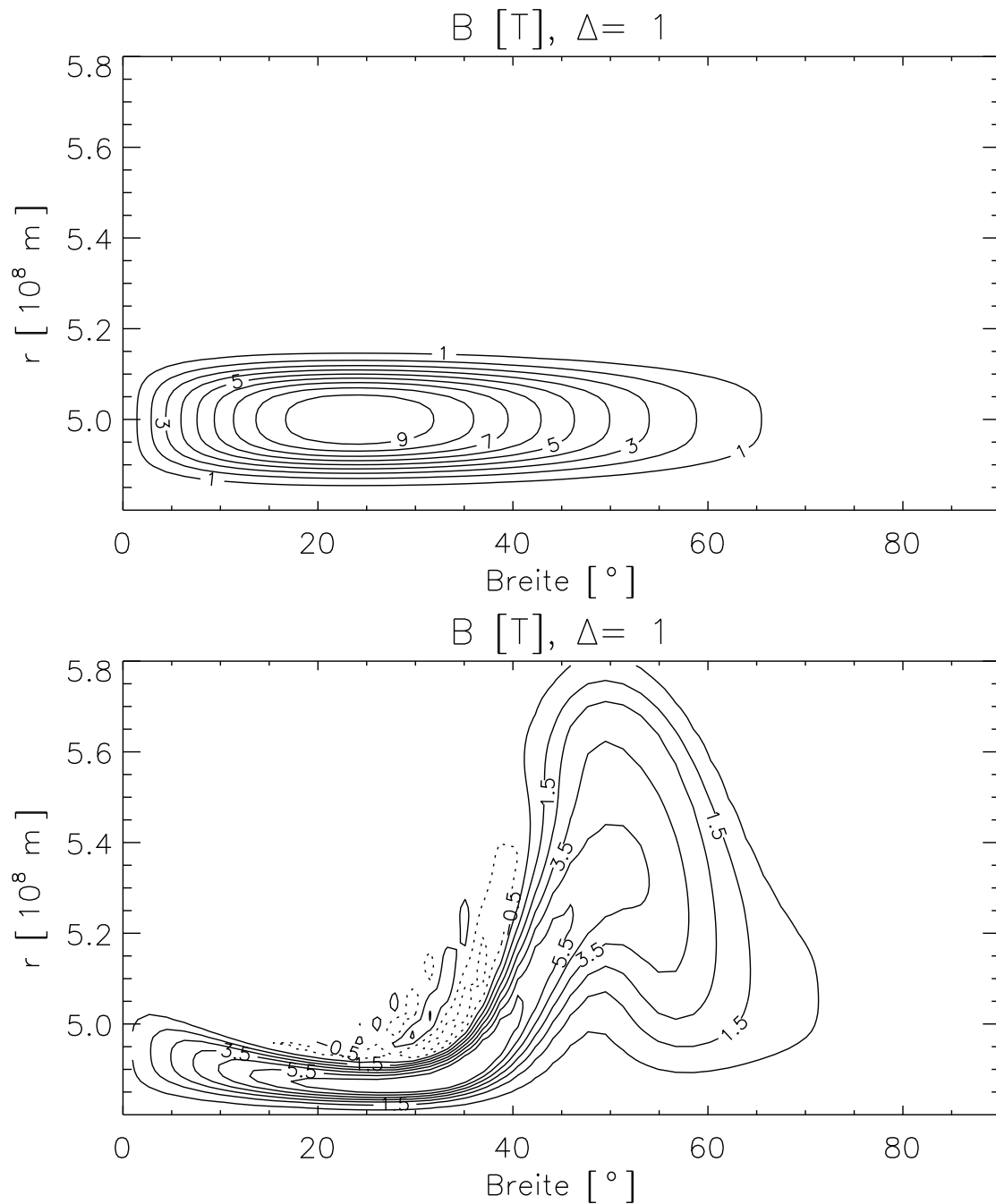


Abbildung 4.2: Drift einer magnetischen Schicht, verursacht durch die polwärts gerichtete Komponente der magnetischen Krümmungskraft ohne Berücksichtigung von Rotation. Die Simulation erfolgte mit einer adiabatischen Hintergrundsichtung und REQ als Anfangsbedingung. Gezeigt sind die Isolinien der Feldstärke zu Beginn (oben) und nach einem Monat simulierter Zeit (unten). Fast die Hälfte des magnetischen Flusses wurde in den Bereich $r > 5.2 \cdot 10^8$ m transportiert.

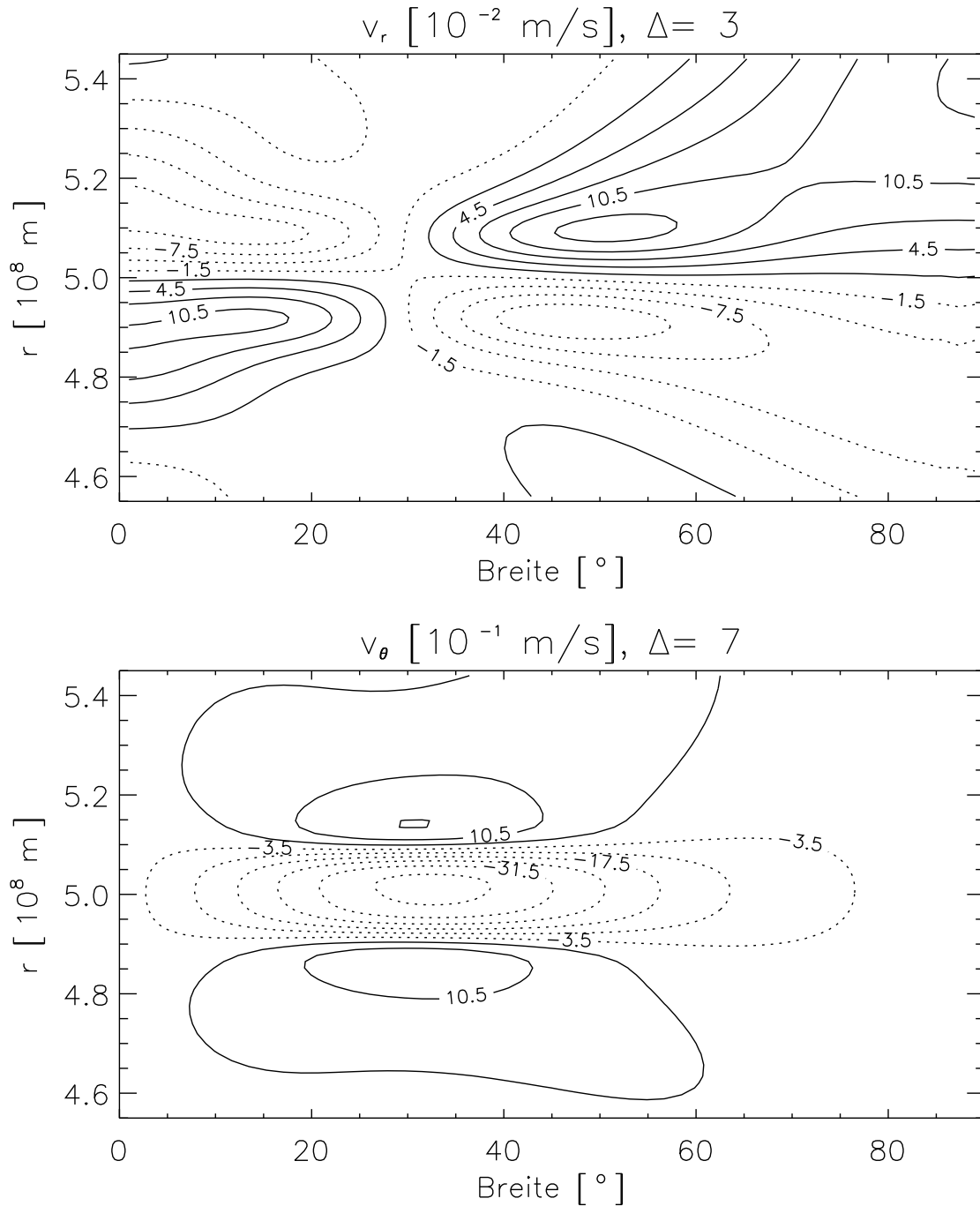


Abbildung 4.3: Isolinien der meridionalen Geschwindigkeitskomponenten nach $2 \cdot 10^4$ s simulierter Zeit. Die Rechnung erfolgt für das Magnetfeld aus Abb. 4.1 mit einem radialen Kräftegleichgewicht (REQ) als Anfangsbedingung und einer stark subadiabatischen Schichtung ($\delta = -0.1$). Die magnetische Krümmungskraft treibt ein Strömungsmuster mit zwei Strömungszellen. Die radialen Strömungsgeschwindigkeiten sind oben gezeigt (durchgezogenen Linien entsprechen Aufwärtsströmungen), die θ -Komponente ist unten gezeigt (durchgezogenen Linien entsprechen äquatorwärts gerichteten Strömungen).

rioliskraft der magnetischen Krümmungskraft entgegenwirkt. Die zugehörige Zeitskala entspricht ungefähr der Rotationsperiode.

- Radiale Strömungen in einer subadiabatischen Schichtung führen zu Temperaturfluktuationen (das Gas ist kühler in einer Aufwärtsströmung und wärmer in einer Abwärtsströmung), die zu Druckunterschieden zwischen Pol und Äquator führen. Die Zeitskala dieses Prozesses ist proportional zu $|\delta|^{-1/2}$ und somit stark abhängig von der Superadiabatizität der Hintergrundsichtung (siehe Gl. 4.37).

Die starke Abhängigkeit des zweiten Prozesses von δ ergibt sich aus der Tatsache, dass die von vertikalen Bewegungen hervorgerufenen Temperaturstörungen direkt proportional zu der Superadiabatizität sind. In einer stark subadiabatischen Schichtung können daher die für ein Gleichgewicht erforderlichen Temperaturstörungen schneller erzeugt werden. In den ersten Prozess geht dagegen δ nicht ein. Diese beiden Prozesse führen auf die in Abschnitt 4.3.3 diskutierten Gleichgewichte. Im ersten Fall wird die magnetische Krümmungskraft von der Corioliskraft kompensiert, und lediglich kleine Störungen der Schichtung sind erforderlich, um die vom magnetischen Druck erzeugten Störungen auszugleichen. Der zweite Prozess bewirkt dagegen größere Störungen der Schichtung und führt schließlich auf ein Gleichgewicht der Art, wie es in Abb. 4.1 gezeigt ist. Welches der beiden möglichen Gleichgewichte sich einstellt, wird hauptsächlich durch die Superadiabatizität der Hintergrundsichtung bestimmt:

- $\delta \approx -0.1$ (radiativer Kern): Die magnetische Krümmungskraft wird durch einen Druckgradienten kompensiert, toroidale Strömungen sind vernachlässigbar. Das Gleichgewicht stellt sich in ca. 10^5 s ein.
- $\delta \approx -10^{-3}$: Der Einfluss der toroidalen Strömung und des Druckgradienten sind vergleichbar. Das Gleichgewicht stellt sich in ca. 10^6 s ein.
- $\delta > -10^{-3}$ (Overshoot-Region, Konvektionszone): Das Gleichgewicht ist bestimmt durch die toroidale Strömung.

Die Zeitskala τ für die Einstellung des Gleichgewichts sowie ihre Abhängigkeit von der Superadiabatizität lassen sich aus den MHD-Gleichungen abschätzen, indem man Ableitungen durch die Quotienten der charakteristischen Größen ersetzt.

Stark subadiabatische Schichtung (radiativer Kern)

Das mechanische Gleichgewicht ist hier bestimmt durch die Balance zwischen der θ -Komponente von Druckgradient und magnetischer Krümmungskraft. Nach Gl. (4.21) und Gl. (4.22) verlangt dieses Gleichgewicht Temperaturstörungen der Größe

$$\frac{T_1}{T_0} \simeq \frac{H_p}{d} \frac{B^2}{2\mu_0 p}. \quad (4.33)$$

Diese Temperaturstörungen werden durch radiale Verschiebungen in der subadiabatischen Schichtung hervorgerufen. Aus Gl. (4.32) ergibt sich mit $s_1 \approx c_p T_1/T_0$:

$$\frac{T_1}{T_0} \simeq |\delta| \frac{v_r \tau}{H_p}. \quad (4.34)$$

Für die mittlere Strömungsgeschwindigkeit in Richtung Pol folgt aus der θ -Komponente der Impulsgleichung:

$$v_\theta \simeq \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0 \varrho r} \tau. \quad (4.35)$$

Mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung ergibt sich hieraus eine Abschätzung für die radiale Geschwindigkeitskomponente:

$$v_r \simeq v_\theta \frac{d}{\pi/2r}. \quad (4.36)$$

Unter Vernachlässigung numerischer Faktoren von $\mathcal{O}(1)$ ergibt sich schließlich die Zeitskala τ_p für die Einstellung eines Gleichgewichts mit Druckgradienten:

$$\tau_p \simeq \sqrt{\frac{H_p^2 r^2 \varrho}{p d^2 |\delta|}}. \quad (4.37)$$

Einsetzen typischer Werte für eine magnetische Schicht am Boden der Konvektionszone ($H_p = 6 \cdot 10^7$ m, $r = 5 \cdot 10^8$ m, $\varrho = 200$ kg m⁻³, $p = 6 \cdot 10^{12}$ Pa, $\delta = -0.1$ und $d \simeq 10^7$ m) liefert $\tau_p \simeq 5 \cdot 10^4$ s, was in guter Übereinstimmung mit dem Resultat der numerischen Simulation ist.

Schwach subadiabatische Schichtung (Overshoot-Region)

Das Gleichgewicht ist hier bestimmt durch eine Balance zwischen magnetischer Krümmungskraft und Corioliskraft. Die dafür erforderliche toroidale Strömung ergibt sich aus der Polwärtsdrift der magnetischen Schicht

$$r \Delta\theta \simeq v_\theta \tau \simeq \frac{B^2}{2\mu_0 \varrho r} \tau^2, \quad (4.38)$$

die wiederum infolge der Drehimpulserhaltung

$$v_{\phi 0} r_0 \sin \theta_0 = (v_{\phi 0} + v_{\phi 1}) r_0 \sin(\theta_0 + \Delta\theta) \quad (4.39)$$

eine Störung der toroidalen Geschwindigkeit bewirkt ($\cot \theta_0 \simeq 1$):

$$v_{\phi 1} \simeq v_{\phi 0} \Delta\theta \simeq v_{\phi 0} \frac{B^2}{2\mu_0 \varrho r^2} \tau^2. \quad (4.40)$$

Das Gleichgewicht zwischen Coriolis- und Krümmungskraft verlangt

$$B^2 \simeq 2\mu_0 \varrho v_{\phi 0} v_{\phi 1} \simeq v_{\phi 0}^2 \frac{B^2}{r^2} \tau^2. \quad (4.41)$$

Bis auf Faktoren von $\mathcal{O}(1)$ ergibt sich hierheraus die Zeitskala τ_v für Gleichgewichte mit einer toroidalen Strömung

$$\tau_v \simeq \frac{v_{\phi 0}}{r} \simeq \frac{1}{\Omega} . \quad (4.42)$$

Die Zeitskalen τ_p und τ_v sind unabhängig von der Magnetfeldstärke, weil sowohl die erforderlichen Störungen der Schichtung bzw. der toroidalen Strömung als auch die Geschwindigkeiten bei der Gleichgewichtseinstellung mit B^2 skalieren.

Gleichsetzen von Gl. (4.42) und Gl. (4.37) liefert einen Wert für $|\delta|$, bei dem beide Zeitskalen vergleichbar sind:

$$|\delta| \simeq \frac{H_p^2 r^2 \varrho}{p d^2} \Omega^2 . \quad (4.43)$$

Einsetzen der oben angegebenen Werte für den Boden der Konvektionszone sowie der solaren Rotationsrate von $\Omega = 2.7 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$ ergibt $|\delta| \simeq 10^{-3}$, wie es auch aus den numerischen Rechnungen folgt. Dieses Ergebnis ist unabhängig vom Einfluss viskoser Spannungen, weil diese beide Zeitskalen gleichermaßen verlängern.

Alternativ kann man auch betrachten, wie groß die Polwärtswanderung $\Delta\theta$ einer magnetischen Schicht sein muss, bis ein Gleichgewicht erreicht ist. Für die Einstellung eines Gleichgewichtes mit Druckgradienten ergibt sich

$$\Delta\theta_p \simeq \frac{H_p^2}{d^2} \frac{1}{\beta|\delta|} \quad (4.44)$$

und für die Einstellung eines Gleichgewichtes mit toroidaler Strömung

$$\Delta\theta_v \simeq \frac{v_A^2}{v_{\phi 0}^2} . \quad (4.45)$$

Es stellt sich stets das Gleichgewicht ein, welches die kleinere Polwärtswanderung erfordert und somit zuerst erreicht wird. Gleichsetzen beider Bedingungen führt wieder auf das obige Ergebnis für $|\delta|$. Im Gegensatz zu der oben abgeschätzten Zeitskala ist die Größe der Polwärtswanderung der Schicht abhängig von der Feldstärke. Für ein 10 T Magnetfeld ergibt sich bei $\delta = -0.1$ ein Wert von $\Delta\theta \simeq 0.1^\circ$. Für $\delta \gtrsim -10^{-3}$ folgt $\Delta\theta \simeq 10^\circ$ für die Gleichgewichte mit toroidaler Strömung.

Nahe dem Äquator bedingt die in den obigen Abschätzungen vernachlässigte $\cot\theta$ -Abhängigkeit etwas größere Zeiten für die Gleichgewichtseinstellung.

Die hier diskutierte Einstellung der Gleichgewichte ist nur geringfügig abhängig von der Lage der magnetischen Schicht zwischen Pol und Äquator. Auch magnetische Schichten mit einer geringen Ausdehnung in Breite können die hier beschriebenen Gleichgewichte erreichen. Im Fall der Gleichgewichtseinstellung im radiativen Kern kommt es zunächst nur zu Temperaturstörungen in unmittelbarer Nähe der Schicht. Da diese Störungen jedoch so gerichtet sind, dass sie die radialen Strömungen, von denen sie erzeugt werden, unterdrücken, kommt es zu einer Abdrängung der radialen Strömungen. Als Folge weitet sich auch die von den Strömungen hervorgerufene Temperaturstörung aus, bis ein Gleichgewicht erreicht ist (siehe Abb. 4.4). Auch für die Gleichgewichte mit toroidalen Strömungen spielen die Ausdehnung und Form der Schicht keine Rolle. Dort wirkt der Prozess ja sogar für stark lokalisiertes Feld, wie z.B. isolierte Flussröhren.

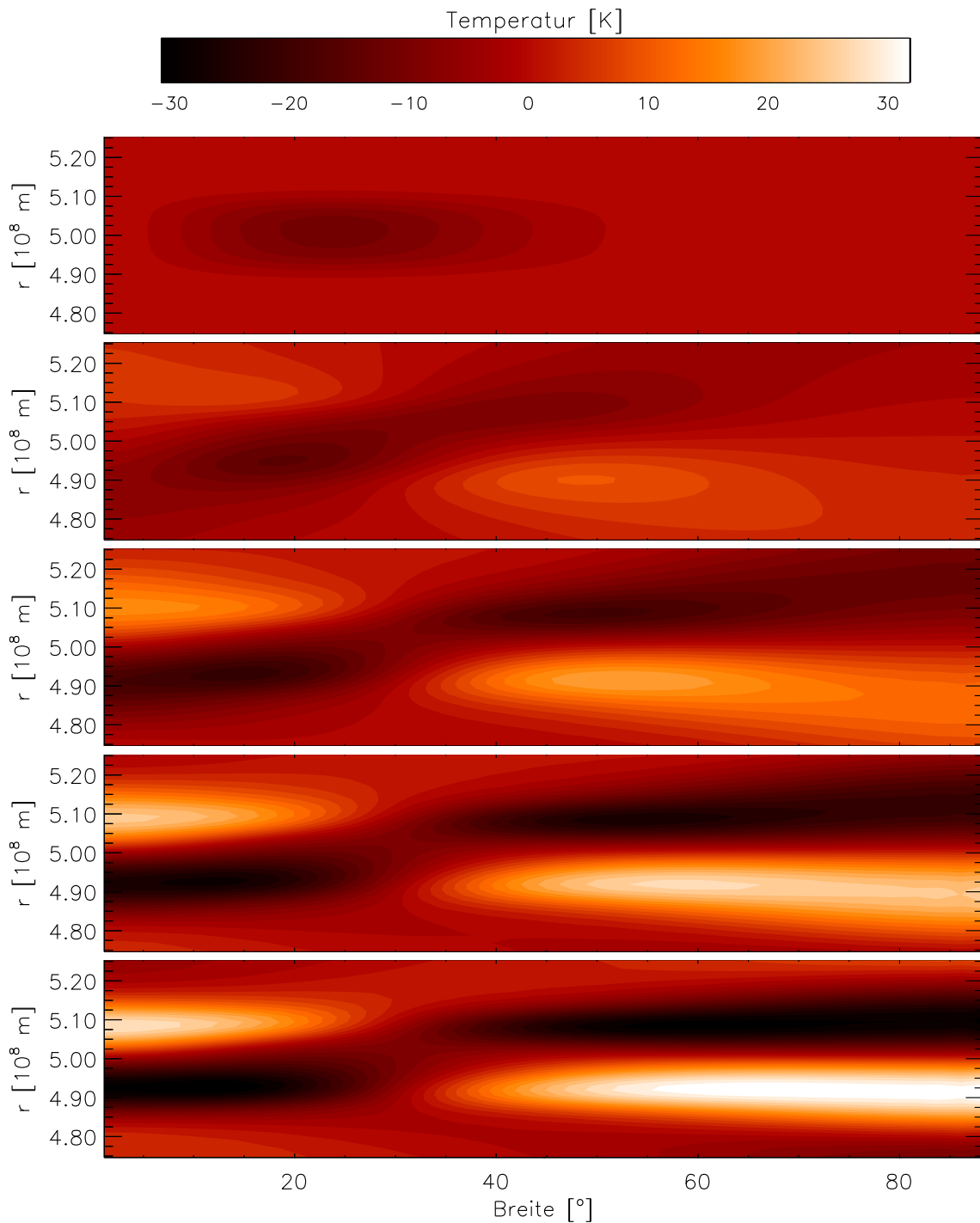


Abbildung 4.4: Zeitliche Entwicklung der Temperaturstörung bei der Einstellung eines Gleichgewichts im radiativen Kern. Gezeigt sind von oben nach unten die Zeitschritte $t = 0$ s, $t = 2.5 \cdot 10^4$ s, $t = 5 \cdot 10^4$ s, $t = 7.5 \cdot 10^4$ s und $t = 10^5$ s. Die Temperaturstörungen bilden sich zunächst in Äquatornähe und bei ca. 50° Breite aus, wo die radialen Strömungen in Abb. 4.3 lokalisiert sind. Weil die Temperaturfluktuationen die radialen Strömungen unterdrücken, aber die Schicht weiter in Richtung Pol wandert, müssen die radialen Strömungen polwärts ausweichen, wodurch es auch dort zu Temperaturfluktuationen kommt.

4.5.3 Einstellung des Gleichgewichtes in radialer Richtung

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse von Simulationen gezeigt, die mit der Anfangsbedingung LEQ starten. Sie haben die Einstellung eines Gleichgewichts in radialer Richtung zum Ziel. Im Fall einer einzelnen magnetischen Flussröhre ergibt sich die Kompensation der Auftriebskraft wie folgt (Moreno-Insertis et al., 1992): Der Aufstieg in einer subadiabatischen Schichtung führt zu einer Abkühlung der Flussröhre relativ zu ihrer Umgebung und damit zum Verlust ihres anfänglichen Auftriebs. Es stellt sich dabei eine Schwingung um den Gleichgewichtszustand ein, der durch die Gleichheit der Dichte in der Flussröhre und im umgebenden Plasma bestimmt ist. Die Zeitskala dieses Prozesses ist gegeben durch die Brunt-Väisälä-Periode:

$$\tau_{BV} = \sqrt{\frac{H_p}{|\delta|g}}. \quad (4.46)$$

Im Fall einer magnetischen Schicht ist die Situation wegen der relativ großen Ausdehnung in Breite komplizierter. Während bei einer Flussröhre die Rückwirkung auf das umgebende Plasma vernachlässigbar ist, führt der Aufstieg der magnetischen Schicht auch zu Störungen der Schichtung im nicht-magnetisierten Plasma. Das von der Auftriebskraft getriebene Strömungsfeld ist in Abb. 4.5 gezeigt. Neben der Aufwärtsströmung bei ca. 25° Breite entwickelt sich eine Abwärtsströmung nahe Äquator und 45° Breite. Die Abkühlung des Plasmas in der Aufwärtsströmung und die Erwärmung des Plasmas in der Abwärtsströmung (jeweils relativ zur ungestörten Schichtung) führen dabei auf ein Temperaturprofil, wie es in Abb. 4.6 gezeigt ist. Dieses Gleichgewicht zeichnet sich dadurch aus, dass der magnetische Auftrieb im zentralen Bereich der Schicht und der thermische Auftrieb in den Regionen mit schwachen Feld gleich groß sind. Die zugehörige Dichtestörung zeigt keine Variation mit Breite, so dass sie durch einen radialen Druckgradienten im Gleichgewicht gehalten werden kann. Die Zeit für die Einstellung dieses Gleichgewichtes ist ungefähr $100 \tau_{BV}$. Allerdings ist die von der anfänglichen Auftriebskraft getriebene Aufwärtsströmung bereits nach $5 - 10 \tau_{BV}$ deutlich reduziert. Mit $H_p = 6 \cdot 10^7$ m und $g = 500 \text{ m s}^{-2}$ liefert Gl. (4.46) Werte von $\tau_{BV} \simeq 10^3$ s für $\delta = -0.1$ (radiativer Kern) und $\tau_{BV} \simeq 10^5$ s für $\delta = -10^{-5}$ (Overshoot-Region). Im radiativen Kern ist die Zeitskala für die Kompensation der Auftriebskraft erheblich kleiner als die Zeitskala für die Kompensation der polwärts gerichteten Kräfte, während in der Overshoot-Region beide Zeiten von vergleichbarer Größenordnung sind.

Die Einstellung des Gleichgewichts erfordert eine radiale Drift der Schicht von der Größe (Gl. (4.34) zusammen mit $T_1/T_0 \approx 1/\beta$)

$$\Delta r \simeq \frac{H_p}{\beta|\delta|}. \quad (4.47)$$

Die Drift Δr beträgt nur einige Kilometer im radiativen Kern, kann aber für eine schwach subadiabatische Schichtung erheblich größer werden. Weil für Magnetfelder in der Overshoot-Region Δr kleiner sein muss als die Dicke der Overshoot-Region

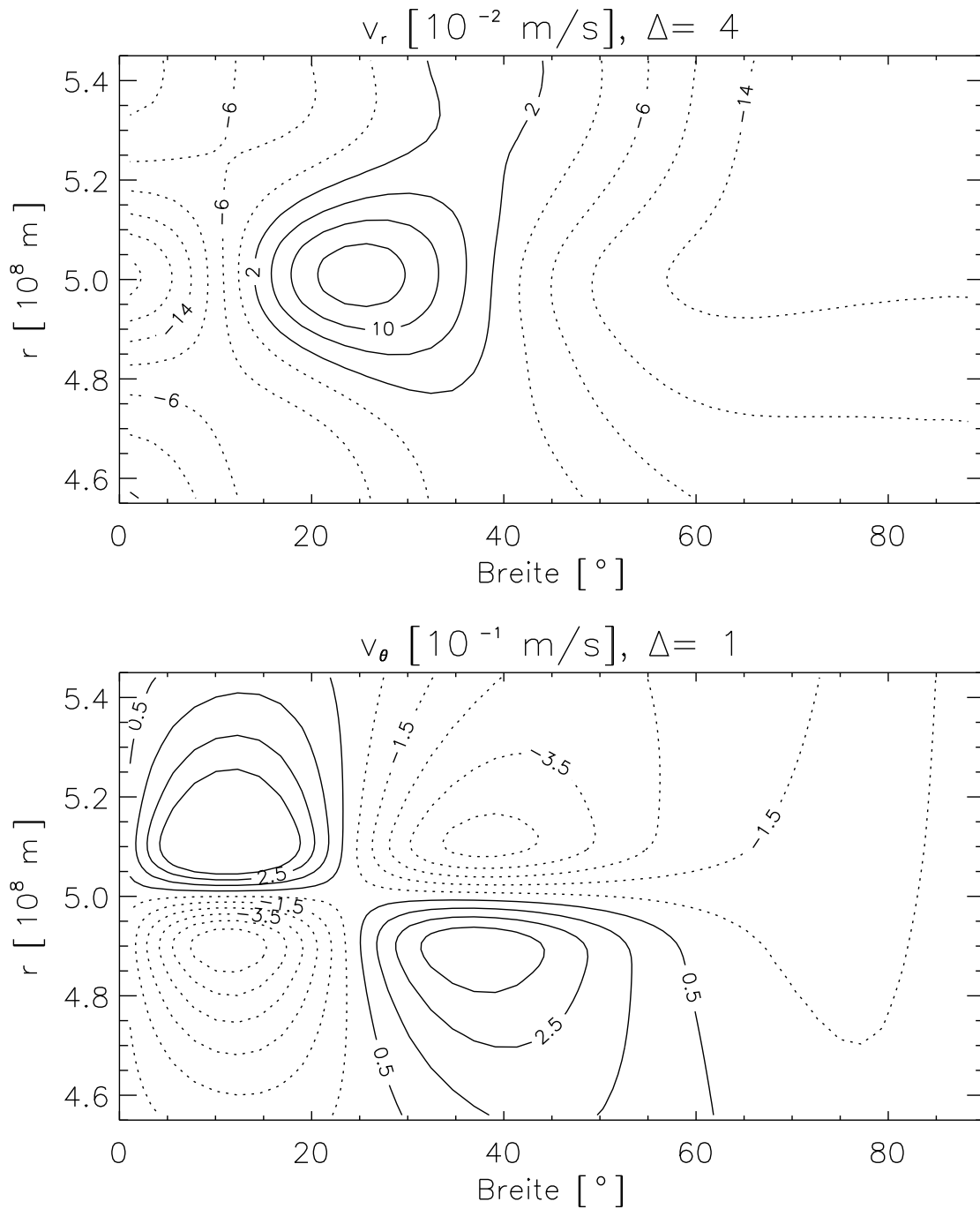


Abbildung 4.5: Isolinien der meridionalen Geschwindigkeit nach $5 \cdot 10^3 \text{ s}$ für das gleiche Magnetfeld wie in Abb. 4.3, jedoch mit einem Kräftegleichgewicht in θ -Richtung als Anfangsbedingung (LEQ). Die nicht balancierte Auftriebskraft führt zu einer Aufwärtsströmung im Bereich der größten Feldstärke bei ca. 25° Breite, während sich Abwärtsströmungen nahe Pol und Äquator ergeben.

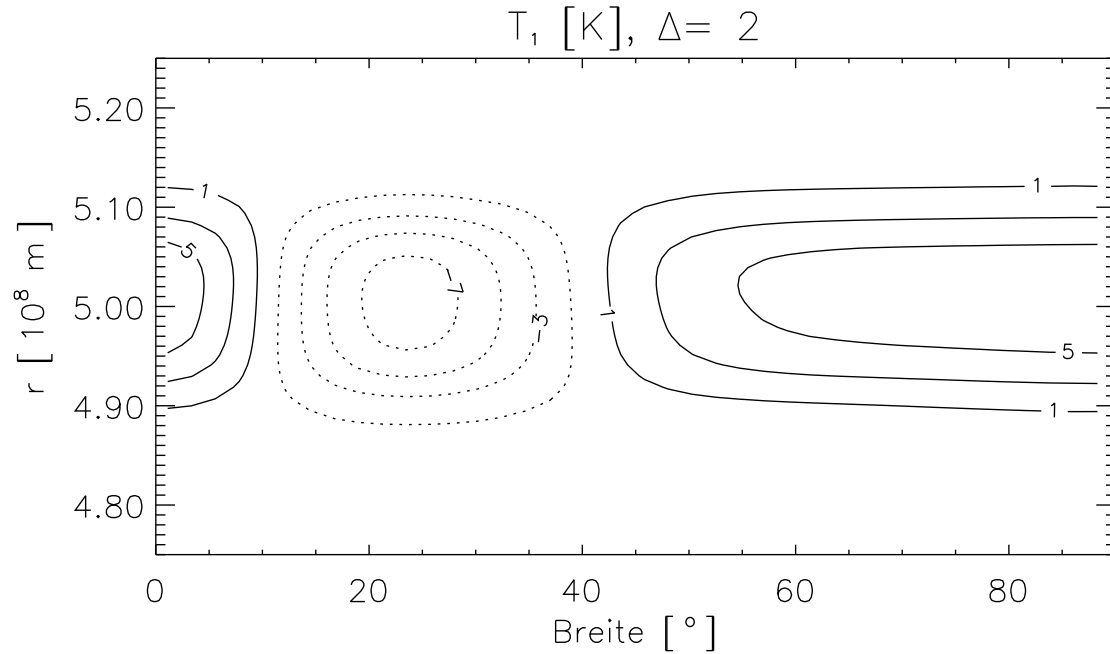


Abbildung 4.6: Asymptotisch erreichte Temperaturstörung für eine Simulation mit einem Kräftegleichgewicht in θ -Richtung als Anfangsbedingung (LEQ). Das in Abb. 4.5 gezeigte Strömungsfeld führt zu einer Abkühlung im Bereich mit starkem Magnetfeld (Aufwärtströmung) und zu einer Erwärmung in den Bereichen mit schwachem Feld (Abwärtsströmungen). In der gezeigten Endkonfiguration ist die Summe aus magnetischem und thermischem Auftrieb unabhängig von der Breite.

selbst ($\simeq 10^7$ m), ergibt sich $\delta \lesssim -4 \cdot 10^{-5}$ im Fall eines Feldes von 10 T. Ähnliche Abschätzungen wurden von [Moreno-Insertis et al. \(1992\)](#) für die Speicherung einzelner magnetischer Flussröhren gegeben.

4.5.4 Simulationen mit TEQ als Anfangsbedingung

Bisher wurden die Prozesse für die Einstellung eines Gleichgewichtes in radialer und latitudinaler Richtung voneinander getrennt betrachtet. Hierfür wurden die Anfangsbedingungen REQ und LEQ verwendet. In Abb. 4.7 ist die zeitliche Entwicklung von Magnetfeldstärke, toroidaler Geschwindigkeit sowie Temperatur- und Druckstörung für eine Simulation gezeigt, die mit TEQ startet, d.h. sowohl die magnetische Krümmungskraft als auch die Auftriebskraft sind zu Beginn der Rechnung nicht balanciert. Zusätzlich wird eine den solaren Bedingungen angenäherte Hintergrundschichtung verwendet, die den Übergang zwischen dem radiativen Kern ($\delta \approx -0.2$) und einer schwach subadiabatischen Overshoot-Region ($\delta \approx -5 \cdot 10^{-5}$) bei $r = 5 \cdot 10^8$ m enthält. Das anfängliche Magnetfeld überdeckt diese Übergangsregion, so dass gleichzeitig die Entwicklung beider Gleichgewichtstypen verfolgt werden kann. Die Prozesse, die in Abschnitt 4.5.2 und 4.5.3 voneinander getrennt betrachtet wurden, treten hier nebeneinander in der Reihenfolge ihrer charakteristischen Zeitskalen auf.

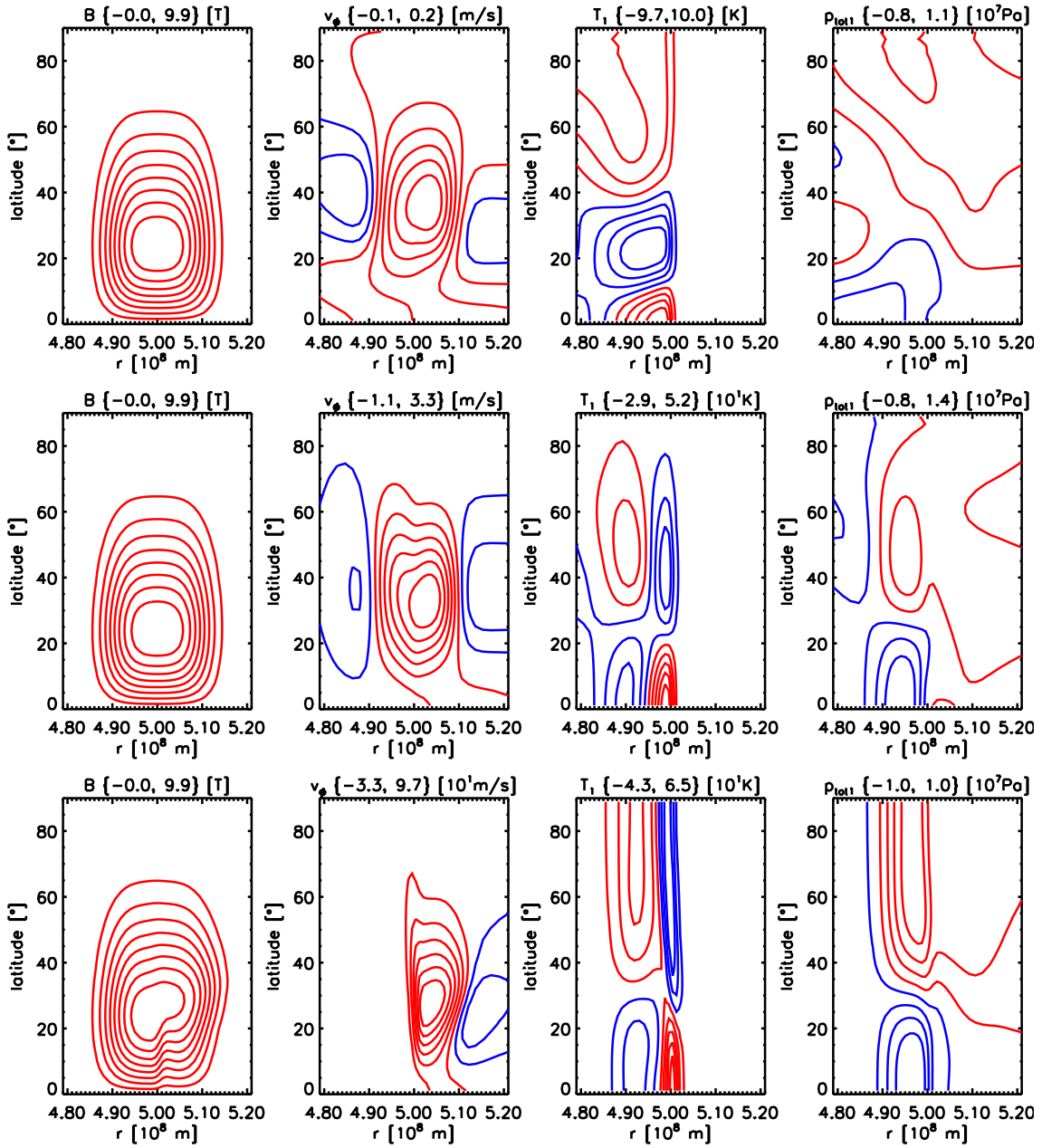


Abbildung 4.7: Einstellung eines Gleichgewichts für eine magnetische Schicht, die sich in der Übergangsregion zwischen radiativen Kern und Overshoot-Region bei $r = 5 \cdot 10^8$ m befindet. Gezeigt ist eine Sequenz der Zeitschritte $t = 2 \cdot 10^4$ s (obere Reihe), $t = 10^5$ s (Mitte) und $t = 3 \cdot 10^6$ s untere Reihe. Dargestellt sind die Isolinien (rot: positive Werte) von Magnetfeldstärke, toroidaler Geschwindigkeit, Temperatur und Störung des Gesamtdrucks. Die Anfangsbedingung ist TEQ. Im Gegensatz zu den bisherigen Abbildungen, sind die Achsen aus Darstellungsgründen vertauscht worden.

Die kürzeste Zeitskala gehört zur Unterdrückung der Auftriebskraft im radiativen Kern. Die aus diesem Prozess resultierende Temperaturstörung ist in der oberen Reihe von Abb. 4.7 gezeigt, welche die Situation nach $2 \cdot 10^4$ s, d.h. ca. $20 \tau_{BV}$ (bezogen auf den radiativen Kern), wiedergibt. Das Temperaturprofil ist vergleichbar mit dem in Abb. 4.6 gezeigten. Die mittlere Reihe von Abb. 4.7 zeigt in erster Linie die Einstellung des Gleichgewichts zwischen der magnetischen Krümmungskraft und dem Druckgradienten in Breite. Dargestellt ist die Situation nach 10^5 s, was der in Gl. (4.37) abgeschätzten Zeit entspricht. Die bis zu diesem Zeitpunkt herausgebildete toroidale Strömung von einigen ms^{-1} spielt für das Gleichgewicht keine Rolle. In der unteren Reihe von Abb. 4.7 ist die Situation nach $3 \cdot 10^6$ s gezeigt. Inzwischen hat sich in der Overshoot-Region die für das Gleichgewicht erforderliche toroidale Strömung gebildet. Deutlich zu erkennen ist auch die dafür erforderliche Polwärtswanderung der magnetischen Schicht um 5° bis 10° .

Der in der unteren Reihe gezeigte Zustand liegt nahe am endgültigen Gleichgewichtszustand. Die meridionalen Geschwindigkeiten betragen ca. 1 m s^{-1} verglichen mit bis zu 60 m s^{-1} während der Gleichgewichtseinstellung.

Diese Sequenz zeigt deutlich den Unterschied der Gleichgewichte im radiativen Kern und in der Overshoot-Region. Im radiativen Kern bilden sich Temperaturstörungen bis ca. 60 K aus, während in der Overshoot-Region die Störungen um mehr als eine Größenordnung geringer sind.

Weil die Temperaturfluktuationen in der Overshoot-Region keine wichtige Rolle für das Gleichgewicht spielen, würde die Berücksichtigung turbulenter thermischer Diffusion außerhalb des magnetischen Feldes keinen Einfluss auf das Gleichgewicht haben. Ein Temperaturprofil, wie es in Abb. 4.6 gezeigt ist, kann in der Overshoot-Region nahe Pol und Äquator (wo die Feldstärke sehr gering ist) von thermischer Diffusion beeinflusst werden. Die daraus resultierende Störung des Gleichgewichts führt zu einer weiteren Aufwärtsdrift, bis in der magnetischen Schicht weitgehend die Auftriebsneutralität erreicht ist. In diesem Fall sind die Temperaturstörungen nur noch auf das magnetisierte Plasma beschränkt, in dem turbulente Diffusion weitgehend unterdrückt ist. Die in der Overshoot-Region für das Gleichgewicht erforderliche toroidale Strömung befindet sich ebenfalls innerhalb der magnetisierten Region, so dass auch hier der Einfluss der turbulenten Viskosität unterdrückt ist (dies gilt auch im Fall einer durch konvektive Abwärtsströmungen fragmentierten Schicht). Die Störungen der toroidalen Geschwindigkeit außerhalb der magnetischen Schicht, die sich in der Simulation ergeben haben, sind nicht relevant für das Gleichgewicht, so dass hier der Einfluss turbulenter Viskosität keine signifikanten Änderungen bewirkt. Dies rechtfertigt a posteriori das Vernachlässigen der thermischen Diffusion und turbulenten Viskosität, abgesehen von der unvermeidbaren numerischen Diffusion.

4.6 Einfluss der Strahlungsdiffusion

In Abschnitt. 4.2 wurde bereits grob abgeschätzt, dass der Strahlungstransport auf Zeitskalen des solaren Zyklus keinen wesentlichen Einfluss auf die mit den Gleich-

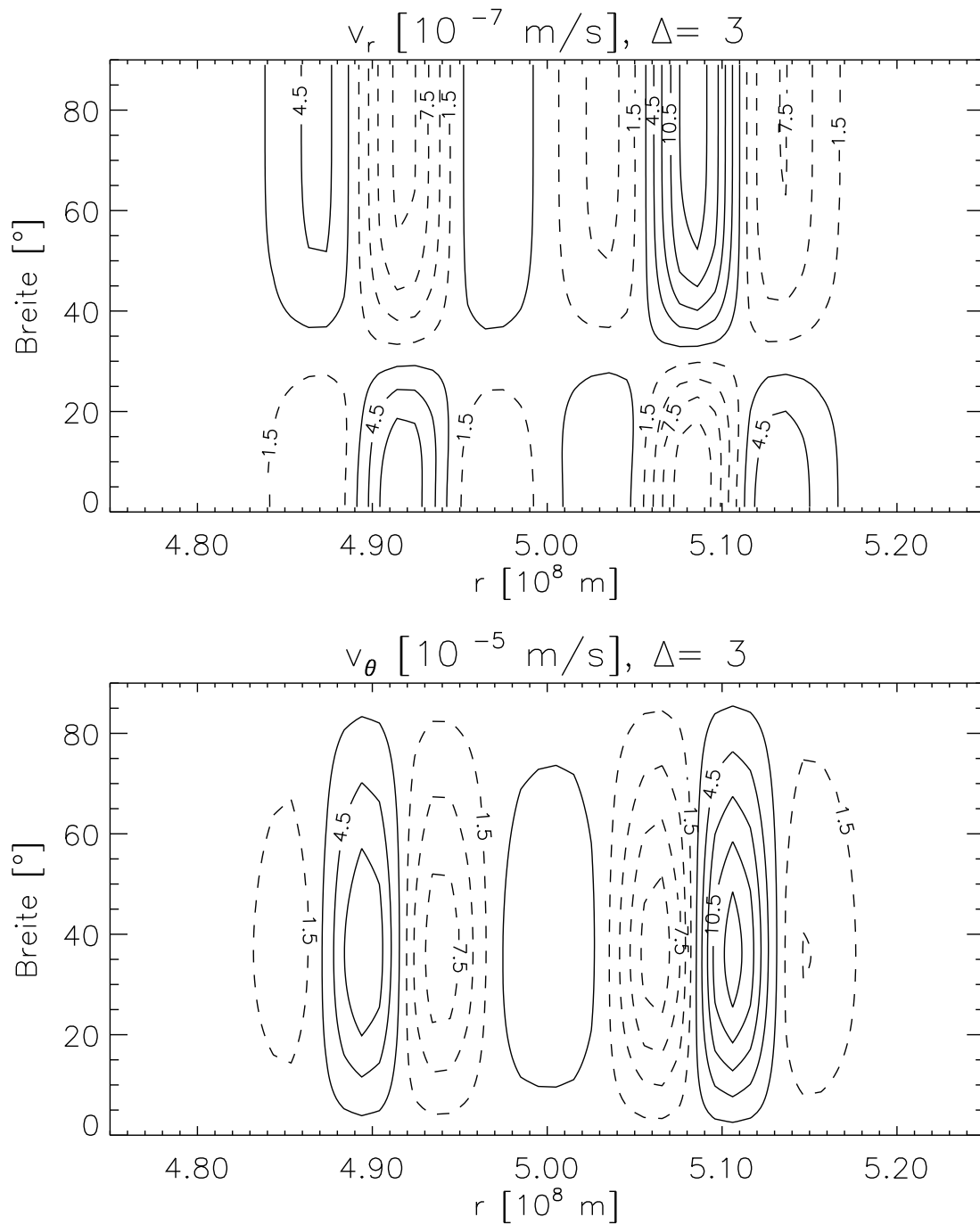


Abbildung 4.8: Meridionales Strömungsfeld einer quasistationären thermischen Zirkulation. Berechnet wurde die Zirkulation für das Magnetfeld aus Abb. 4.1 unter Berücksichtigung einer thermischen Diffusivität $\kappa_{\text{rad}} \sim T^{6.5} \rho^{-2}$. Die radiale Geschwindigkeit ist im Wesentlichen proportional zu der 2. Ableitung nach r der mit dem Gleichgewicht verbundenen Temperaturstörung.

gewichteten verbundenen Temperaturstörungen hat. Dies soll hier genauer für die Gleichgewichte im radiativen Kern untersucht werden, bei denen gerade die Temperaturstörungen eine wichtige Rolle spielen. Die Betrachtungen in den vorhergehenden Abschnitten haben gezeigt, dass eine subadiabatische Schichtung grundsätzlich die Einstellung eines Gleichgewichtes begünstigt, so dass nicht zu erwarten ist, dass die radiative Diffusion das Gleichgewicht gänzlich zerstört. Es werden vielmehr Zirkulationsströmungen innerhalb der magnetischen Schicht getrieben, die den Einfluss der radiativen Diffusion kompensieren. Dort, wo die Strahlungsdiffusion eine Kühlung bewirkt, stellt sich infolge der Erhöhung der Dichte eine Abwärtsströmung ein, die in der subadiabatischen Schichtung eine Erwärmung des Plasmas relativ zur Hintergrundschichtung hervorruft und damit den Kühlungseffekt ausgleichen kann. Dort wo die Strahlungsdiffusion heizt, stellt sich entsprechend eine Aufwärtsströmung ein. Um diese Effekte zu berücksichtigen, muss Gl. (4.32) noch um einen entsprechenden Heizungsterm

$$H_{\text{rad}} = \text{div} (\kappa_{\text{rad}} \text{grad} T) \quad (4.48)$$

ergänzt werden, wobei für κ_{rad} der Ansatz

$$\kappa_{\text{rad}} = \kappa_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{6.5} \left(\frac{\varrho}{\varrho_0} \right)^{-2} \quad (4.49)$$

mit $T = T_0 + T_1$ und $\varrho = \varrho_0 + \varrho_1$ verwendet wird. Für die ungestörte Hintergrundschichtung gilt $H_{\text{rad}} = 0$. Anstelle von Gl. (4.32) tritt somit die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varrho s_1) + \text{div} (\vec{v} \varrho s_1) = \varrho v_r \frac{c_p \delta}{H_p} + \frac{H_{\text{rad}}}{T}. \quad (4.50)$$

Weil im stark subadiabatischen radiativen Kern der Gradient der Entropiestörung s_1 sehr klein verglichen mit dem Gradienten der Hintergrundentropie s_0 ist, kann der Transportterm auf der linken Seite von Gl. (4.50) vernachlässigt werden. Ein stationäres Gleichgewicht liefert dann für die radialen Geschwindigkeiten die Bedingung:

$$v_r = -\frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{H_{\text{rad}}}{\varrho |g| \delta}. \quad (4.51)$$

Die Geschwindigkeit in θ -Richtung ergibt sich aus der stationären Kontinuitätsgleichung

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \varrho_0 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \varrho_0 v_\theta) = 0, \quad (4.52)$$

wobei hier die Dichtestörung ϱ_1 gegenüber dem Wert ϱ_0 der Hintergrundschichtung weggelassen wurde. Die Kontinuitätsgleichung ist automatisch durch die Einführung einer Stromfunktion A erfüllt:

$$v_r = \frac{1}{\varrho_0 r^2 \sin \theta} \frac{\partial A}{\partial \theta} \quad (4.53)$$

$$v_\theta = -\frac{1}{\varrho_0 r \sin \theta} \frac{\partial A}{\partial r}. \quad (4.54)$$

Aus der Induktionsgleichung lässt sich für dieses Problem keine stationäre Lösung ermitteln. Jedoch sind die Geschwindigkeiten so gering (siehe unten), dass der Transport des magnetischen Feldes kaum eine Rolle spielt. Insofern sollte man hier eher von einer quasistationären Lösung sprechen.

Mit Hilfe dieser Gleichungen soll hier für ein durch Gl. (4.14) definiertes Gleichgewicht eine quasistationäre thermische Zirkulationsströmung berechnet werden. Aus der Temperaturstörung lässt sich mit dem Gl. (4.51) die radiale Geschwindigkeit v_r berechnen, aus der sich wiederum die Stromfunktion durch Integration der gewöhnlichen Differentialgleichung (4.53) ergibt. Hierfür wird an Pol und Äquator $A = 0$ gefordert und die Stromfunktion zu einem Fixpunkt θ_f aufintegriert. Dort ergibt sich i. Allg. eine Unstetigkeit, da das Problem überbestimmt ist, d.h. für eine gegebene Feldkonfiguration lässt sich i. Allg. nur eine Lösung mit geschlossenen Stromlinien finden, wenn die Anfangsbedingung $p_1(r, \theta_0)$ geeignet gewählt wird. Mit Hilfe einer Newton-Iteration wird daher die Anfangsbedingung solange variiert, bis sich eine stetige Stromfunktion ergibt. Es zeigt sich, dass die dafür erforderliche Anfangsbedingung $p_1(r, \theta_0)$ und damit auch die zugehörige Gleichgewichtskonfiguration sehr nahe an der Bedingung liegen, die auch von den numerischen Simulationen geliefert wird. Aus diesem Grund ist zu erwarten, dass die entsprechenden thermischen Zirkulationen sehr nahe an diesem quasistationären Zustand liegen. In Abb. 4.8 ist die thermische Zirkulation für $\kappa_0 = 8 \cdot 10^9 \text{ W K}^{-1} \text{ m}^{-1}$ und die in Abb. 4.1 gegebene Magnetfeldverteilung dargestellt. Die Ausbildung von 6 Strömungszellen lässt sich relativ einfach wie folgt verstehen: Die radiale Geschwindigkeit ist proportional zu der radiativen Heizung, die wiederum im Wesentlichen proportional zur 2. Ableitung nach r der Temperaturstörung ist. Die Temperaturprofile haben 5 Wendepunkte (2 jeweils an den Flanken der Temperatur Maxima und Minima und einen dazwischen). Da der Verlauf asymptotisch flach ist, ergeben sich jeweils 3 Maxima und 3 Minima in der 2. Ableitung und damit auch jeweils 3 radiale Auf- bzw. Abströmungen.

Die Größe der erwarteten Strömungsgeschwindigkeit lässt sich mit Hilfe von der Gleichgewichtstemperaturstörung T_1 (siehe Gl. 4.22) und $H_{\text{rad}} \simeq \kappa_{\text{rad}} T_1 / \Delta r^2$ abschätzen durch:

$$v_r \simeq \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\kappa_{\text{rad}} H_p T}{\varrho |g| \delta \beta \Delta r^3} . \quad (4.55)$$

Mit $\kappa_0 \approx 8 \cdot 10^9 \text{ W K}^{-1} \text{ m}^{-1}$, $\delta = -0.1$ und $\beta = 10^5$ ergibt sich mit den Werten der solaren Hintergrundsichtung für $r = 5 \cdot 10^8 \text{ m}$:

$$v_r \simeq 4 \cdot 10^{-7} \left(\frac{\Delta r}{10^7 \text{ m}} \right)^{-3} \text{ m/s} . \quad (4.56)$$

Strömungen dieser Größenordnung spielen nur eine Rolle auf einer Zeitskala von einigen Millionen Jahren. Sie sind damit nicht von Bedeutung für Prozesse, die mit dem solaren Zyklus in Verbindung stehen. Diese geringe Strömungsgeschwindigkeit rechtfertigt auch im Nachhinein die Vernachlässigung der Induktionsgleichung für diese Betrachtung.

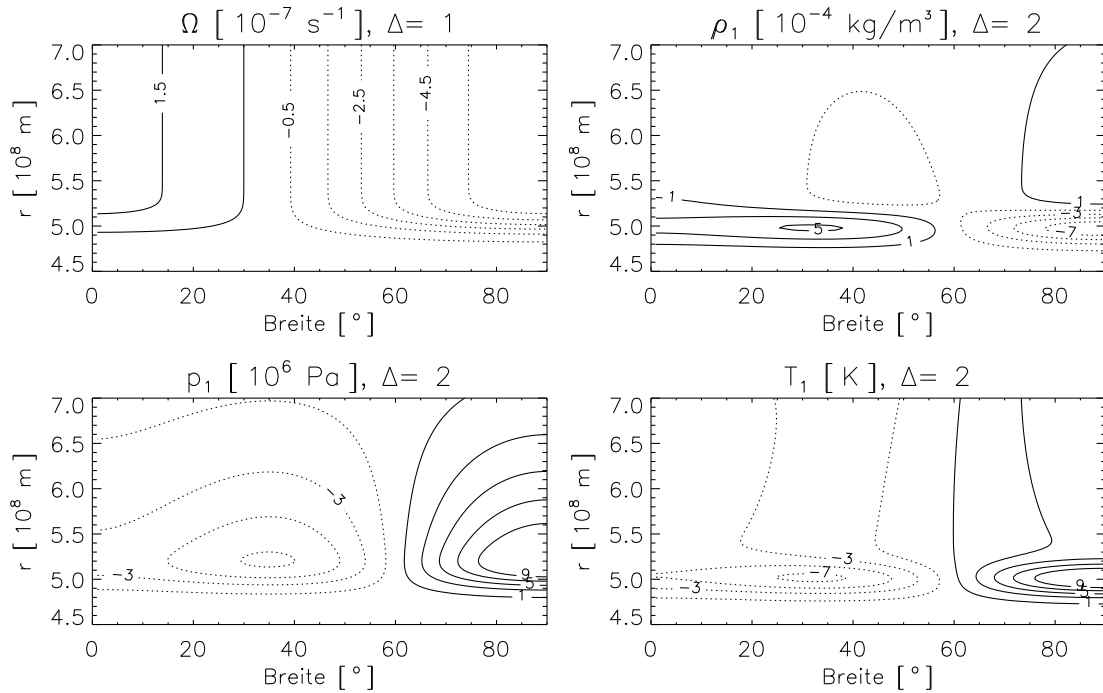


Abbildung 4.9: Profil der verwendeten differentiellen Rotation und die für ein hydrostatisches Gleichgewicht erforderlichen Störungen von Druck, Dichte und Temperatur. Als Anfangsbedingung wurde $p_1 = 0$ für $\theta_0 = 30^\circ$ gewählt. Das Integral über die Dichtestörung verschwindet. Es ist zu beachten, dass dieses hydrostatische Gleichgewicht in der Sonne nur im radiativen Kern erreicht werden kann ($r < 5 \cdot 10^8$ m). In der Konvektionszone bildet sich stattdessen eine meridionale Zirkulation aus.

4.7 Einfluss differentieller Rotation

In den bisherigen Betrachtungen wurde stets eine starre Rotation verwendet. Für die Gleichgewichte und ihre Einstellung würde sich die differentielle Rotation hauptsächlich über zwei Effekte auswirken:

1. Differentielle Rotation beeinflusst die Drehimpulsverteilung.
2. Differentielle Rotation modifiziert die Trägheitskräfte, d.h. in einem mit der Winkelgeschwindigkeit des Kerns rotierenden Bezugssystem muss eine zusätzliche Kraft berücksichtigt werden.

Der erste Punkt hat einen Einfluss auf den Drehimpulstransport, der für die Einstellung von Gleichgewichten mit toroidaler Strömung wichtig ist. Weil die Variation von Ω bei der solaren differentiellen Rotation im Bereich von maximal 30% liegt, ergibt dies lediglich einen leichten Einfluss auf die Zeitskala $\tau \simeq 1/\Omega$, beeinflusst aber nicht das Gleichgewicht. Der zweite Punkt hat einen unterschiedlichen Einfluss im radiativen Kern und der Konvektionszone. Im subadiabatischen radiativen Kern können die von der differentiellen Rotation hervorgerufenen Kräfte durch geringfügige Modifikationen des Temperaturverlaufs (ca. 10 K) kompensiert werden (siehe Abb. 4.9), während in der nahezu adiabatisch geschichteten Konvektionszone

ein solches Gleichgewicht nicht existieren kann (Taylor-Proudman-Theorem) und als Folge eine meridionale Zirkulation angetrieben wird (siehe z.B. Rüdiger et al., 1998).

Der Einfluss der differentiellen Rotation auf die durch den Druckgradienten bestimmten Gleichgewichte im radiativen Kern ist daher sehr gering, weil die Hintergrundsichtung die Gleichgewichtseinstellung über die Superadiabatizität bestimmt. Die Temperaturmodifikation infolge der differentiellen Rotation ändert jedoch die Superadiabatizität kaum.

Die von der Corioliskraft balancierten Gleichgewichte in der Overshoot-Region können dagegen von der am Boden der Konvektionszone äquatorwärts gerichteten meridionalen Zirkulation beeinflusst werden. Allerdings ist dieser Einfluss im Fall eines starken Magnetfeldes sehr gering, weil die Drehimpulserhaltung innerhalb der magnetischen Schicht zu der Ausbildung toroidaler Strömungen führt, die dem Transport entgegenwirken.

4.8 Diskussion

Die Untersuchung mechanischer Gleichgewichte einer magnetischen Schicht in sphärischer Geometrie liefert zwei Typen von Gleichgewichten, die sich hauptsächlich darin unterscheiden, auf welche Weise die polwärts gerichtete Komponente der magnetischen Krümmungskraft kompensiert wird. Dies kann einerseits geschehen durch ein Gleichgewicht mit der Corioliskraft infolge einer toroidalen Strömung in der magnetischen Schicht oder durch ein Gleichgewicht mit einem Druckgradienten in Breite. Durch numerische Simulationen wurde gezeigt, dass die Superadiabatizität der Hintergrundsichtung entscheidet, welches dieser möglichen Gleichgewichte sich einstellt. Weil die Kompensation der Auftriebskraft auf jeden Fall eine subadiabatische Schichtung verlangt, kommen hierfür nur Regionen der Sonne mit $\delta < 0$ in Frage (radiativer Kern, Overshoot-Region):

- Ein Gleichgewicht zwischen magnetischer Krümmungskraft und einem Druckgradienten in Breite bildet sich in stark subadiabatischen Regionen ($\delta < -10^{-3}$) wie dem radiativen Kern der Sonne, wo radiale Strömungen schnell zu den für das Gleichgewicht erforderlichen Temperaturstörung führen können.
- In schwach subadiabatischen Regionen ($\delta > -10^{-3}$) stellt sich ein Gleichgewicht zwischen Corioliskraft und magnetischer Krümmungskraft ein, weil sich infolge der geringen Subadiabatizität Temperaturstörungen kaum ausbilden können. Im Fall $\delta \approx -10^{-3}$ liegt eine Mischung aus beiden Gleichgewichten vor.

In beiden Fällen ist die Zeit für die Einstellung des Gleichgewichtes sehr kurz ($10^5 - 10^6$ s) verglichen mit dem solaren Zyklus von 11 Jahren, so dass Abweichungen von der Gleichgewichtsbedingung nur sehr klein sein können.

Ein wichtiges Ergebnis dieser Untersuchung ist, dass sich der Charakter des Gleichgewichts einer magnetischen Schicht in der Overshoot-Region kaum vom Gleichgewicht isolierter Flussröhren (Moreno-Insertis et al., 1992) unterscheidet. Eine Fragmentation der magnetischen Schicht durch Auftriebsinstabilitäten würde

Flussröhren produzieren, die sich bereits nahe am jeweiligen Gleichgewicht befinden. Ein weiterer Aufstieg einer solchen Flussröhre durch die Konvektionszone der Sonne, würde deshalb sehr ähnlich zu den Ergebnissen der bisher durchgeführten Simulationen (Choudhuri & Gilman, 1987; D’Silva & Choudhuri, 1993; Fan et al., 1993; Schüssler et al., 1994; Caligari et al., 1995, 1998) verlaufen. Anders sieht die Situation bei den durch Druck balancierten Gleichgewichten im radiativen Kern aus. Ein Ausbruch von magnetischen Feld aus diesem Bereich liefert Flussröhren ohne toroidale Strömung, so dass hier ein anderes Verhalten während des Aufstiegs durch die Konvektionszone erwartet werden kann. Allerdings liegt die kritische Feldstärke für Instabilitäten infolge der starken Subadiabatizität deutlich über 10 T. Es ist zum einen nicht klar, wie so große Feldstärken erzeugt werden können, zum anderen würde der Ausbruch von Flussröhren mit deutlich mehr als 10 T Feldstärke zu Resultaten führen, die nicht im Einklang mit den beobachteten Eigenschaften von Sonnenflecken sind. Es ist daher sehr zweifelhaft, ob Magnetfelder aus dem radiativen Kern für die Aktivität der Sonne einen wichtigen Beitrag liefern.

Die Gleichgewichte mit toroidalen Strömungen führen im Bereich der magnetischen Schicht zu signifikanten Änderungen des solaren Rotationsprofils. Da sich das Magnetfeld im Laufe des solaren Zyklus ändert, sind daher auch zeitliche Variationen der differentiellen Rotation zu erwarten. Bei der gegenwärtigen Auflösung, welche die Helioseismologie liefert (Schou et al., 1998), liegen jedoch die typischen radialen Ausdehnungen der Strömungsmuster von 10^7 m unter der Auflösungsgrenze. Kürzlich wurden jedoch Schwankungen der differentiellen Rotation von Howe et al. (2000) gefunden mit einer Periode von 1.3 Jahren, jedoch ist die Ursache dieser Schwankungen unklar.

In Kapitel 3 wurde gezeigt, dass der Einfluss der radiativen Heizung auf magnetische Schichten, welche die Konvektion hinreichend behindern, nicht so dramatisch ist wie im Fall einzelner magnetischer Flussröhren. Insofern stellt das Modell einer magnetischen Schicht in der Overshoot-Region eine Alternative zur Speicherung einzelner Flussröhren dar, welche die Probleme mit der radiativen Heizung erheblich vermindert, aber kaum einen Einfluss auf die Simulationen ausbrechender magnetischer Flussröhren hat.

Die in diesem Kapitel durchgeführten Simulationen erfolgten unter der Annahme der Axialsymmetrie. Die Tatsache dass sich die magnetische Schicht bei diesen Simulationen in ein Gleichgewicht bewegt, zeigt auch, dass diese Gleichgewichte bezüglich axialsymmetrischer Störungen stabil sein müssen. Bei nicht axialsymmetrischen Störungen sind oberhalb einer kritischen von der Superadiabatizität abhängigen Magnetfeldstärke Parker-Instabilitäten zu erwarten, die zu einer Fragmentation der Schicht und Bildung aufsteigender Fluss-Schleifen führen. Fan (2001) hat mit Hilfe von 3D-Simulationen die Parker-Instabilität einer horizontalen magnetischen Schicht in kartesischer Geometrie behandelt. Ein wesentliches Ergebnis dieser Arbeit ist, dass das Stabilitätskriterium für die magnetische Schicht identisch ist mit dem für eine einzelne Flussröhre, sofern bei der magnetischen Schicht ebenfalls Auftriebsneutralität als Anfangszustand verwendet wird. Eine Verallgemeinerung dieser Simulationen auf Kugelgeometrie wurde bisher nicht durchgeführt, aber es lässt sich vermuten, dass hier ebenfalls ein Verhalten analog zu dem Fall einzelner Flussröhren

auftritt, der im Detail von [Ferriz-Mas & Schüssler \(1993, 1995\)](#) behandelt wurde. Der von uns gefundene Gleichgewichtszustand (siehe [Abb. 4.6](#)) liegt zwischen dem Zustand der Auftriebsneutralität und dem des Temperaturgleichgewichts, so dass hier Modifikationen des Stabilitätskriteriums zu erwarten sind (neben der Feldstärke geht dann auch noch der radiale Feldgradient in die Stabilitätsbedingung ein).

Kapitel 5

Feldverstärkung durch Explosion magnetischer Flussröhren

5.1 Einleitung

5.1.1 Magnetfeldverstärkung durch Umwandlung kinetischer Energie

In herkömmlichen Dynamomodellen spielt die Umwandlung der kinetischen Energie zyklonischer Konvektion (α -Effekt) innerhalb der Konvektionszone und der kinetischen Energie der differentiellen Rotation (Ω -Effekt) am Boden der Konvektionszone die wesentliche Rolle bei der Feldverstärkung. Beide Effekte haben jedoch gemeinsam, dass sie durch die Rückwirkung der Lorentzkraft auf die zugrundeliegende Strömung dynamisch begrenzt sind. Eine grobe Abschätzung für die Feldstärke, bei der die Rückwirkung des Magnetfeldes auf konvektive Strömungen von Bedeutung ist, liefert der Vergleich der kinetischen mit der magnetischen Energiedichte. Bei der sog. Äquipartitionsfeldstärke $B_{eq} = \sqrt{\mu_0 \varrho v^2}$ sind beide Energiedichten gleich groß. Am Boden der Konvektionszone erhält man aus Mischungswegmodellen für die Konvektion einen Wert $B_{eq} = 0.3 \text{ T}$, der sehr viel kleiner ist als die 10 T , die sich aus den Flussröhrenmodellen ergeben.

In Bezug auf die Erzeugung starker Magnetfelder sieht es ähnlich ungünstig aus beim Vergleich zwischen der innerhalb eines Zyklus generierten magnetischen Energie und der Energie, die in der Scherschicht der differentiellen Rotation zur Verfügung steht. Für eine grobe Abschätzung wird hier eine gleichmäßige Verteilung der Energiedichte über die Breite angenommen. Für die magnetische Energie in einer Schicht am Boden der Konvektionszone ($R = 5 \cdot 10^8 \text{ m}$) der Dicke d und dem Füllfaktor f (Flussröhrendichte) ergibt sich:

$$E_{\text{mag}} \approx 4\pi R^2 f d \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{2R}{\mu_0} \Phi B, \quad (5.1)$$

wobei $\Phi = \pi R d f B$ der magnetische Fluss am Boden der Konvektionszone ist. Mit $\Phi \approx 10^{16} \text{ Wb}$ (Galloway & Weiss, 1981) für den innerhalb eines Zyklus produzierten

toroidalen Fluss ergibt sich für $B = 10 \text{ T}$

$$E_{\text{mag}} \approx 10^{32} \text{ J} . \quad (5.2)$$

Dieses Ergebnis ist unabhängig von d , weil der Füllfaktor f entsprechend gewählt werden kann. Es gibt jedoch eine untere Schranke d_{min} für d , weil stets $f \leq 1$ gilt. Für $B = 10 \text{ T}$ liegt diese Schranke bei $d_{\text{min}} \simeq 10^6 \text{ m}$. Die verfügbare kinetische Energie ergibt sich aus einer Abbremsung der differentiellen Rotation unter Erhaltung des Gesamtdrehimpulses in der Scherschicht, weil die magnetischen Spannungen nur eine Umverteilung des Drehimpulses vornehmen können. Weil die Dicke der Scherschicht (ca. $3 \cdot 10^7 \text{ m}$) klein ist verglichen mit dem mittleren Abstand von der Rotationsachse, kann für die Abschätzung der verfügbaren kinetischen Energie statt der Drehimpulserhaltung Impulserhaltung in der Scherschicht angenommen werden. Verwendet wird ein linearer Verlauf für die Geschwindigkeit in der Scherschicht

$$v = \frac{v_0}{d} x \quad \text{für} \quad -\frac{d}{2} < x < \frac{d}{2} \quad (5.3)$$

und eine konstante Dichte (die Dichteschalenhöhe beträgt $\simeq 10^8 \text{ m}$ am Boden der Konvektionszone). Dabei ist das Bezugssystem bereits so gewählt, dass der Gesamtimpuls in der Scherschicht verschwindet. Für die verfügbare kinetische Energie ergibt sich:

$$E_{\text{rot}} \approx 4\pi R^2 \frac{\rho_0}{2} \int_{-d/2}^{d/2} v^2 dx = \frac{\pi}{6} R^2 d \rho_0 v_0^2 . \quad (5.4)$$

Mit $v_0 = 100 \text{ m/s}$ und $d = 3 \cdot 10^7 \text{ m}$ (siehe z.B. [Schou et al., 1998](#); [Charbonneau et al., 1999](#)) folgt:

$$E_{\text{rot}} \approx 10^{31} \text{ J} . \quad (5.5)$$

In dieser Abschätzung wurde die Energie der gesamten Scherschicht berücksichtigt. Wenn man annimmt, dass die Magnetfelder nicht in den Teil der Scherschicht eindringen können, der in der radiativen Zone liegt (ca. die Hälfte der Scherschicht), reduziert sich diese Energie um fast eine Größenordnung.

Damit liegt die magnetische Energie mindestens eine Größenordnung über der kinetischen Energie der differentiellen Rotation. Eine Verstärkung des toroidalen Magnetfeldes der Sonne mit Hilfe der radialen Scherung der differentiellen Rotation würde somit einen großen kinetischen Energiefluss in die Scherschicht verlangen, um die differentielle Rotation aufrecht zu erhalten. Zusätzlich ist auf jeden Fall eine signifikante Variation der Winkelgeschwindigkeit mit dem solaren Zyklus zu erwarten. In der Tat werden Variationen der differentiellen Rotation mit Hilfe der Helioseismologie gemessen, jedoch handelt es sich hierbei um Variationen mit einer Periode von ca. 1.3 Jahren und einer Amplitude von nur 1–3% der solaren Rotation ([Howe et al., 2000](#)).

Eine Alternative zu dieser Art der Feldverstärkung liefert die direkte Umwandlung von potentieller Energie in magnetische Energie, mit Hilfe derer grundsätzlich viel höhere Feldstärken erreichbar sind, weil die Energiedichte der potentiellen Energie viel größer als die der kinetischen Energie ist. Die Eigenschaften und Beschränkungen dieses Prozesses werden in diesem Kapitel mit Hilfe numerischer Simulationen diskutiert.

5.1.2 Explosion magnetischer Flussröhren

Von der Explosion einer magnetischen Flussröhre spricht man, wenn in einer bestimmten Höhe das laterale Druckgleichgewicht $p_i + p_m = p_e$ (p_i : Druck innerhalb der Flussröhre, p_e : externer Gasdruck, p_m : magnetischer Druck) nicht mehr erfüllt werden kann, so dass es zu einer explosionsartigen Aufweitung des Flussröhrenquerschnitts kommt. Dieser Prozess wurde von [Moreno-Insertis et al. \(1995\)](#) in Simulationen aufsteigender Flussröhren in der Konvektionszone gefunden und tritt vorzugsweise bei Flussröhren auf, die mit einem schwachen Magnetfeld (\simeq Äquipartitionsfeldstärke) am Boden der Konvektionszone starten. Da der Aufstieg dieser Flussröhren relativ langsam erfolgt, besteht während des Aufstiegs in guter Näherung ein hydrostatisches Gleichgewicht entlang der Feldlinien. Die Flussröhre verhält sich während des Aufstiegs durch die Konvektionszone weitgehend adiabatisch, während in dem sie umgebenden Plasma die Entropie infolge der superadiabatischen Schichtung der Konvektionszone nach außen abfällt. Die Entropiedifferenz $\Delta s = s_i - s_e$ zwischen der Flussröhre und der Umgebung führt zu einem langsameren Druckabfall im Inneren der Flussröhre, so dass sich in der Explosionshöhe Innen- und Außendruck annähern und schließlich bei der sog. Explosionshöhe gleich werden. Die in Kapitel 2 und 3 besprochene radiative Heizung wirkt sich auf diesen Prozess unterstützend aus, weil sie die Entropiedifferenz weiter vergrößert. In den Rechnungen in diesem Kapitel wird aber stets von Isentropie ausgegangen. In Abb. 5.1 sind die Verläufe von Entropie und Druck für diese Situation skizziert. Der Entropieverlauf in der Sonne zeigt nach außen einen starken Anstieg im radiativen Kern (stark subadiabatisch), einen mäßigen Anstieg in der schwach subadiabatischen Overshoot-Region und einen mäßigen Abfall in der superadiabatischen Konvektionszone der Sonne. Eine in der Overshoot-Region auftriebsneutral gespeicherte Flussröhre besitzt eine Entropie, die um den Betrag c_v/β ($\beta = p_{\text{gas}}/p_{\text{mag}}$) niedriger ist als die der Umgebung. Wird diese Flussröhre in die Konvektionszone ausgelenkt, so ergibt sich zunächst eine negative Entropiedifferenz und die Hydrostatik entlang der Feldlinien führt zu einer Zunahme der Feldstärke mit der Höhe. Wird eine bestimmte Höhe überschritten, so kehrt die Entropiedifferenz ihr Vorzeichen um, und es kommt zu der oben beschriebenen Explosion. Die Explosionshöhe ist bei gegebener Hintergrundschichtung eine Funktion der Feldstärke am Boden der Konvektionszone. Der Verlauf des magnetischen Drucks ergibt sich aus der Hydrostatik (p_1 und ϱ_1 bezeichnen die Störungen relativ zu der Hintergrundschichtung)

$$\frac{dp_1}{dz} = -\varrho_1 g \quad (5.6)$$

zusammen mit der linearisierten und entdimensionierten Entropiedifferenz

$$\Delta \tilde{s} = \frac{p_1}{p} - \gamma \frac{\varrho_1}{\varrho} \quad \text{und} \quad p_1 = -p_{\text{mag}} \quad (5.7)$$

als Lösung der Gleichung

$$\frac{dp_{\text{mag}}}{dz} = -\frac{p_{\text{mag}}}{\gamma H_p} - \frac{\varrho g}{\gamma} \Delta \tilde{s}. \quad (5.8)$$

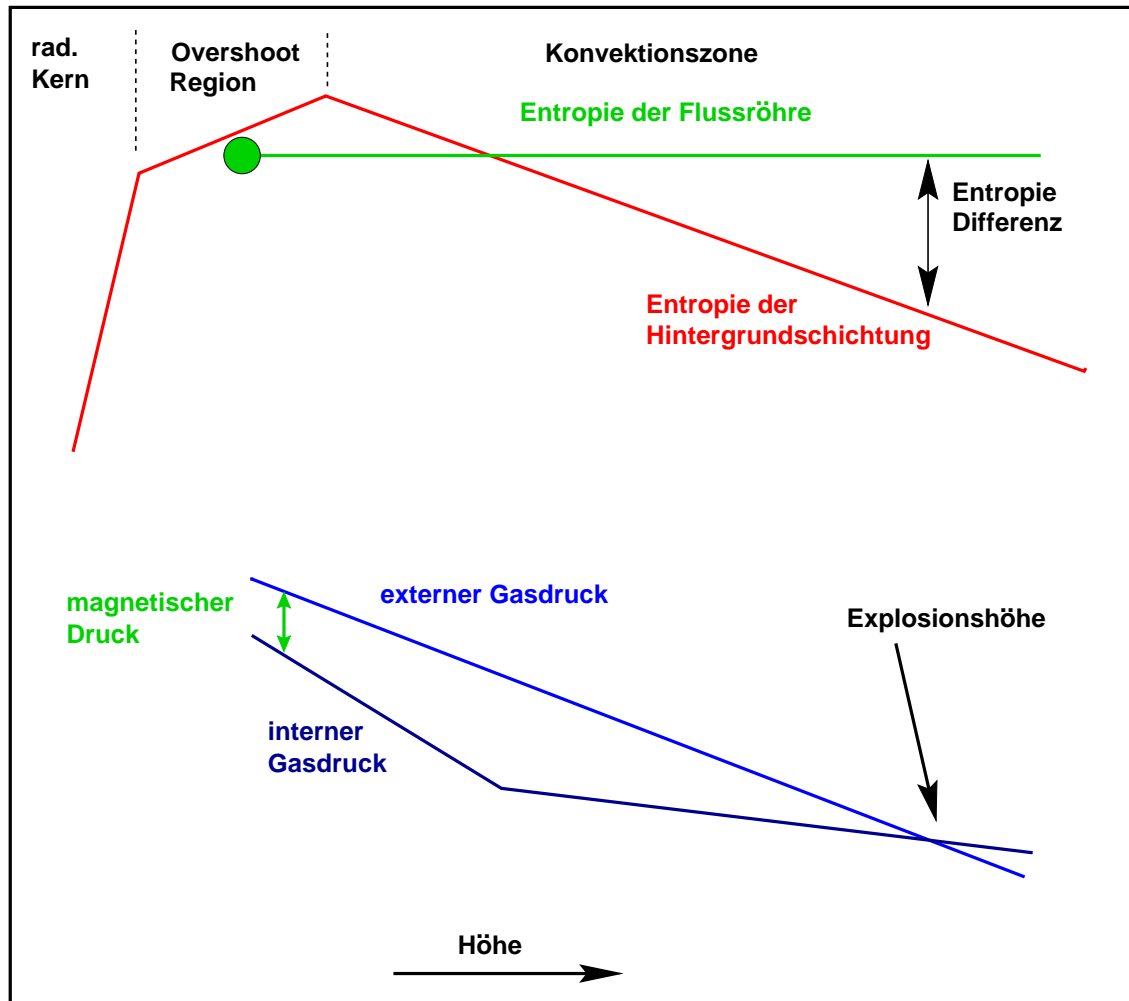


Abbildung 5.1: Schematische Skizze des Entropie- und Druckverlaufs in der solaren Hintergrundsichtung und einer isentropen Flussröhre. Die Bereiche mit nach außen steigender Entropie entsprechen dem radiativen Kern und der Overshoot-Region, der Bereich mit der nach außen fallenden Entropie der Konvektionszone der Sonne.

Partielle Ionisation, die nur in den obersten Schichten der Sonne (ca. 20 000 km) unter der Sonnenoberfläche wichtig ist, ist in dieser Abschätzung nicht berücksichtigt. Die Explosionshöhe z_{ex} ist definiert als die Höhe in der $p_{\text{mag}} = 0$ gilt. Gl. (5.8) lässt sich noch erheblich vereinfachen, wenn man den magnetischen Druck durch die Dichte der Hintergrundsichtung dividiert. Mit dem Ansatz $p_{\text{mag}} = \hat{p}_m \varrho$ folgt für \hat{p}_m zunächst die Differentialgleichung

$$\frac{d\hat{p}_m}{dz} = \left(\frac{1}{H_\varrho} - \frac{1}{\gamma H_p} \right) \hat{p}_m - \frac{g}{\gamma} \Delta\tilde{s}. \quad (5.9)$$

Der erste Term auf der rechten Seite ist für die nahezu adiabatisch geschichtete Konvektionszone vernachlässigbar klein (diese Annahme ist gerechtfertigt bis ca. 2 000 km unter der Sonnenoberfläche). Damit ergibt sich die Explosionshöhe z_{ex} aus

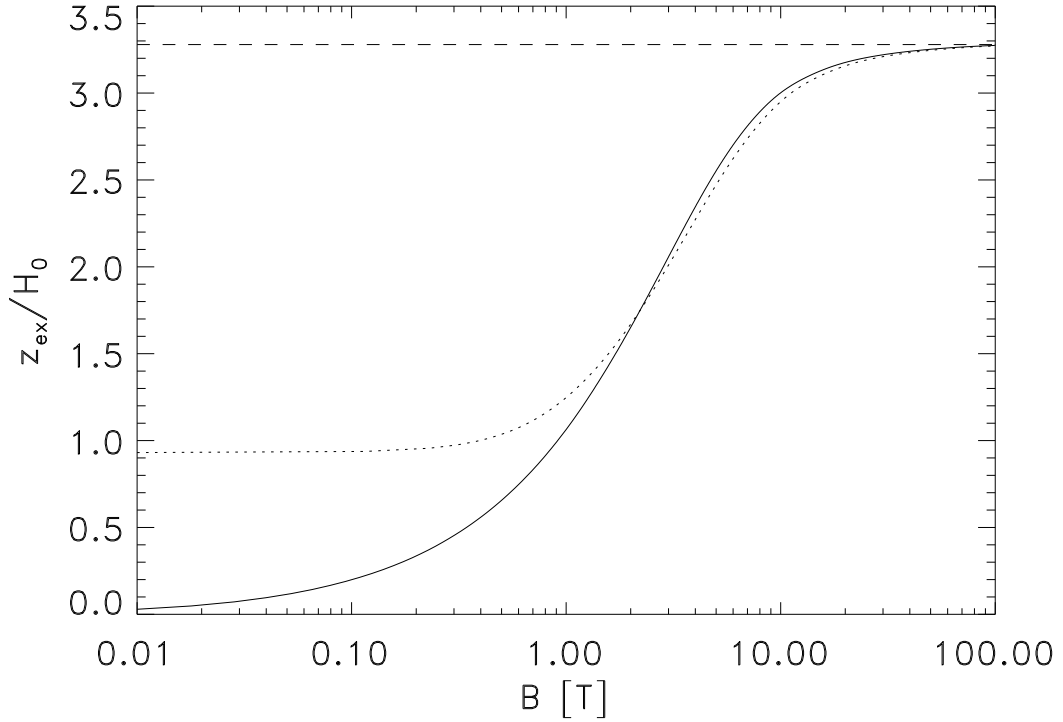


Abbildung 5.2: Explosionshöhe z_{ex} als Funktion der Feldstärke am Boden der Konvektionszone der Sonne. Die dieser Rechnung zugrunde liegende Superadiabatizität ist in Abb. 5.3 dargestellt. Die durchgezogene Linie entspricht einer Flussröhre, die am Übergang zwischen Overshoot-Region und Konvektionszone startet, die gepunktete Linie einer Flussröhre aus der Mitte der Overshoot-Region. Wegen der dort niedrigeren Entropie kommt es im zweiten Fall erst ab einer Mindesthöhe in der Konvektionszone zu der Explosion (vergleiche Abb. 5.1). Die gestrichelte Linie markiert den Sonnenradius. H_0 ist die Druckskalenhöhe am Boden der Konvektionszone.

der Bedingung:

$$\hat{p}_m(z_0) = \frac{p_{\text{mag}}(z_0)}{\varrho(z_0)} = \frac{1}{\gamma} \int_{z_0}^{z_0+z_{\text{ex}}} g \Delta \tilde{s} dz . \quad (5.10)$$

Dabei ist z_0 die Referenzhöhe, in welcher der nicht explodierte Teil der Flussröhre gespeichert ist (Overshoot-Region). Wegen $d\Delta\tilde{s}/dz = \gamma\delta/H_p$ ergibt sich für den Fall $\delta = \text{const.}$ unter Vernachlässigung der Höhenabhängigkeit von H_p und g die Näherungslösung:

$$z_{\text{ex}} \approx H_p \left(\frac{2}{\beta\delta} \right)^{1/2} . \quad (5.11)$$

Im Fall der in Abb. 5.1 skizzierten Situation ist diese Höhe ab dem Ort zu messen, an dem die Entropie von Flussröhre und externer Schichtung gleich groß sind. β bezieht sich auf die Magnetfeldstärke an dieser Stelle. Abb. 5.2 zeigt den Verlauf der

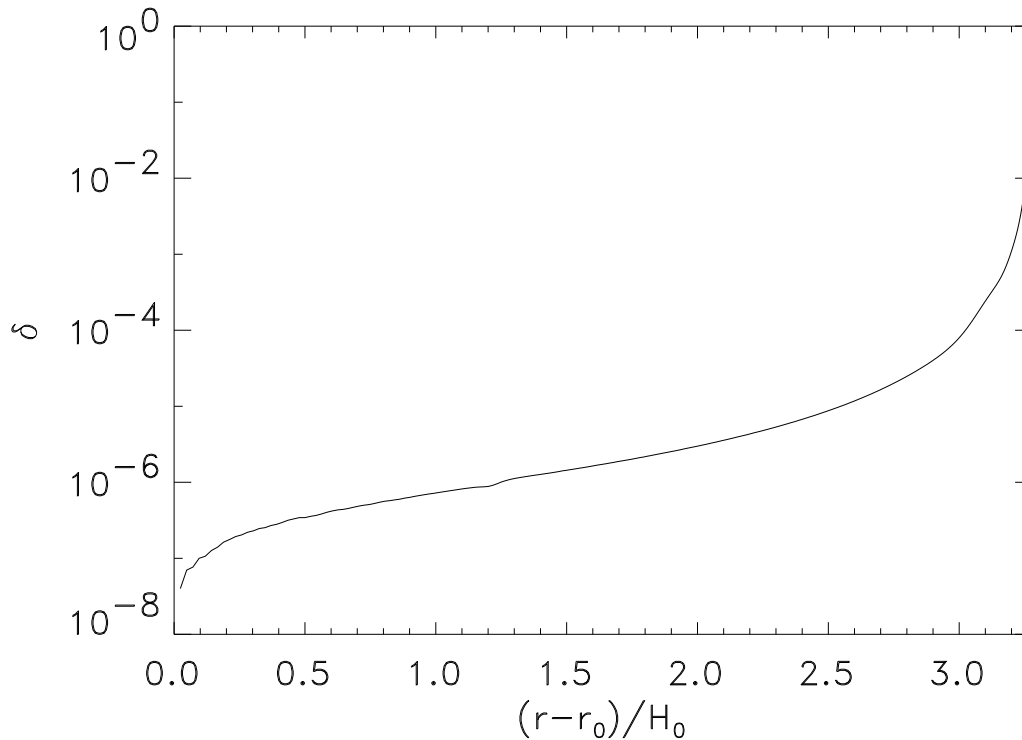


Abbildung 5.3: Verlauf der Superadiabatizität in der Konvektionszone der Sonne

Explosionshöhe als Funktion der Feldstärke für eine solare Schichtung. Die Explosionshöhe hängt neben der Feldstärke auch von der Startposition der aufsteigenden Flussröhre ab, weil diese die Entropie innerhalb der Flussröhre festlegt. Das hier verwendete Sonnenmodell wurde von M. Kiefer und M. Stix, Kiepenheuer-Institut für Sonnenphysik, Freiburg berechnet.

Der Explosionsprozess ist für die Dynamotheorie in zweifacher Hinsicht von Interesse:

1. Die Explosion magnetischer Flussröhren liefert eine Quelle für schwaches Magnetfeld in der mittleren Konvektionszone, welches in Verbindung mit der dortigen zyklonischen Konvektion oder auch durch die Wirkung der Corioliskraft auf die mit der Explosion verbundenen Strömungen zu einem α -Effekt führen kann.
2. Infolge der sehr geringen Feldstärke in der Explosionshöhe spielt das Magnetfeld dort dynamisch keine Rolle. Aus diesem Grund ist ein Ausströmen von Materie aus den „Stümpfen“ der explodierten Flussröhre denkbar. Die damit verbundene Erniedrigung des Gasdrucks im nicht explodierten Teil der Flussröhre führt zu einer Verstärkung des Magnetfeldes. Die Energie für die Feldverstärkung stammt hier aus der potentiellen Energie des Systems.

In diesem Kapitel soll der zweite Prozess näher untersucht werden. Während Simulationen in der Näherung dünner magnetischer Flussröhren die Entwicklung vor

einer Explosion gut beschreiben können, versagen sie kurz bevor die Explosionshöhe erreicht wird, weil die Voraussetzungen der zugrunde liegenden Näherung dort verletzt werden. Aus diesem Grund ist es erforderlich, mit Hilfe von MHD-Simulationen die Flussröhre komplett aufzulösen.

5.2 2D MHD-Simulationen explodierender magnetischer Schichten

5.2.1 Modellannahmen und Numerisches Verfahren

Als ein Zwischenschritt zu einer vollen dreidimensionalen MHD-Simulation wird zunächst ein zweidimensionales Modell einer explodierenden magnetischen Schicht in kartesischer Geometrie betrachtet. Ziel dieser Untersuchung ist nicht eine genaue Simulation unter solaren Bedingungen, sondern ein einfaches numerisches Modell, welches die wesentlichen Züge des Explosionsprozesses enthält. Das Magnetfeld besitzt keine Komponente senkrecht zur Ebene des Rechengebietes. Die horizontale Dimension entspricht der azimuthalen Richtung auf der Sonne.

Bei einem expliziten numerischen Verfahren ist der Zeitschritt begrenzt durch die maximale Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c_{\max} des betrachteten Systems, so dass

$$\Delta t < \frac{\Delta x}{c_{\max}}, \quad (5.12)$$

wobei Δx die Gitterweite ist. c_{\max} entspricht unter den Bedingungen der unteren Konvektionszone ($\beta \gtrsim 10^5$) etwa der Schallgeschwindigkeit $c_s = (\gamma p / \varrho)^{1/2}$. Die dynamische Entwicklung der mit Magnetfeldern verbundenen Strukturen erfolgt dagegen typischerweise mit der Alfvéngeschwindigkeit

$$v_A = \frac{B}{\sqrt{\mu_0 \varrho}} = \left(\frac{2}{\gamma \beta} \right)^{1/2} c_s, \quad (5.13)$$

die um einen Faktor von mehr als 300 niedriger ist als die Schallgeschwindigkeit. Um sehr lange Rechenzeiten zu vermeiden, ist es daher erforderlich, mit deutlich kleineren Werten für β (hier Werte im Bereich 100 – 1000) zu rechnen. Da für diese Werte von β der magnetische Druck immer noch eine kleine Störung des Gesamtdrucks darstellt, befindet man sich weiterhin im gleichen Regime physikalischer Prozesse.

Bei der Lösung der MHD-Gleichungen für das hier vorliegende Problem ist zu beachten, dass man es mit sehr feinen magnetischen Strukturen und starken Gradienten der Feldstärke an der Grenze zwischen magnetisiertem und unmagnetisiertem Plasma zu tun hat. Aus diesem Grund wurde das auf einem Riemann-Löser basierende TVD-Schema das Versatile Advection Codes (Tóth, 1996) verwendet. Dieses Verfahren kann steile Gradienten ohne Problem behandeln und besitzt eine niedrige numerische Diffusivität. Um den störenden Einfluss der verbleibenden numerischen Diffusion klein zu halten, sind dennoch große Auflösungen von 384×384 bis zu 512×512 Gitterpunkten erforderlich. Die Rechnungen wurden durchgeführt auf

dem Parallelrechner IBM RS6000/SP der Gesellschaft für wissenschaftliche Datenverarbeitung mbH Göttingen.

Um die Divergenzfreiheit des Magnetfeldes im Rahmen der numerischen Genauigkeit zu erhalten, wird ein Projektionsverfahren verwendet, welches in jedem Zeitschritt die folgende Korrektur ausführt

$$\Delta \Phi = \operatorname{div} \vec{B} \quad (5.14)$$

$$\vec{B}_c = \vec{B} - \operatorname{grad} \Phi . \quad (5.15)$$

Dabei ist \vec{B}_c der korrigierte Wert des Magnetfeldes. Die Korrektur wird so eingestellt, dass $\operatorname{div} \vec{B}$ jeweils etwas unter dem mittleren Zuwachs von $\operatorname{div} \vec{B}$ pro Zeitschritt verbleibt. Dies verhindert ein Anwachsen der Divergenzfehler und reduziert den numerischen Aufwand. Weil sich die Divergenz als Summe zweier Terme ($\partial B_x / \partial x$ und $\partial B_z / \partial z$) ergibt, die sich exakt aufheben müssen, ist es sinnvoll den relativen Divergenzfehler bezogen auf den Betrag eines dieser Terme zu betrachten. In den hier durchgeführten Simulationen gilt für den verbleibenden (relativen) Divergenzfehler

$$\max \left| \operatorname{div} \vec{B} \right| / \max \left| \frac{\partial B_x}{\partial x} \right| < 10^{-3} . \quad (5.16)$$

In numerischen Rechnungen in einem gravitativ geschichteten Medium kann es durch Diskretisierungsfehler zu Störungen der Hydrostatik kommen, die vor allem nahe der Ränder des Rechengebietes zu unphysikalischen Effekten führen. Dieses Problem lässt sich am einfachsten dadurch beheben, indem man die hydrostatische Hintergrundschichtung in den MHD-Gleichungen subtrahiert. Dieses Vorgehen lässt sich jedoch bei einem Riemann-Löser nicht ganz einfach durchführen, so dass hier einer numerischen Korrektur dieser Effekte der Vorzug gegeben wird. Das Zeitintegrationsverfahren für den Lösungsvektor w vom Zeitschritt n nach $n + 1$ lässt sich schematisch schreiben als

$$w^{n+1} = w^n + \Delta t \mathcal{F}(w^n, \Delta t) . \quad (5.17)$$

Dabei steht \mathcal{F} abkürzend für die pro Zeitschritt addierten numerischen Flüsse und Quellterme. Die explizite Zeitschrittabhängigkeit von \mathcal{F} kommt durch den numerischen Diffusionsfluss zustande. Sei nun w_0 die hydrostatische Hintergrundschichtung, so lautet das korrigierte Verfahren

$$w^{n+1} = w^n + \Delta t [\mathcal{F}(w^n, \Delta t) - \mathcal{F}(w_0, \Delta t)] . \quad (5.18)$$

Dieses Verfahren erfüllt für die Hintergrundschichtung die Stationarität, d.h. $w_0^{n+1} = w_0^n$. Weil die Korrekturen $\mathcal{F}(w_0, \Delta t)$ explizit zeitschrittabhängig sind, müssen sie bei jeder aus Stabilitätsgründen erforderlichen Zeitschrittänderung neu berechnet werden.

Ein weiteres Problem stellt die superadiabatische Schichtung (d.h. instabile Schichtung) der Konvektionszone dar. Im Prinzip lässt sich eine im Mittel superadiabatische Schichtung erzeugen, indem man den radiativen und konvektiven Energietransport mit simuliert und einen bestimmten Energiefluss durch das Rechengebiet vorschreibt. Eine sinnvolle Beschreibung der Konvektion ist jedoch im Rahmen

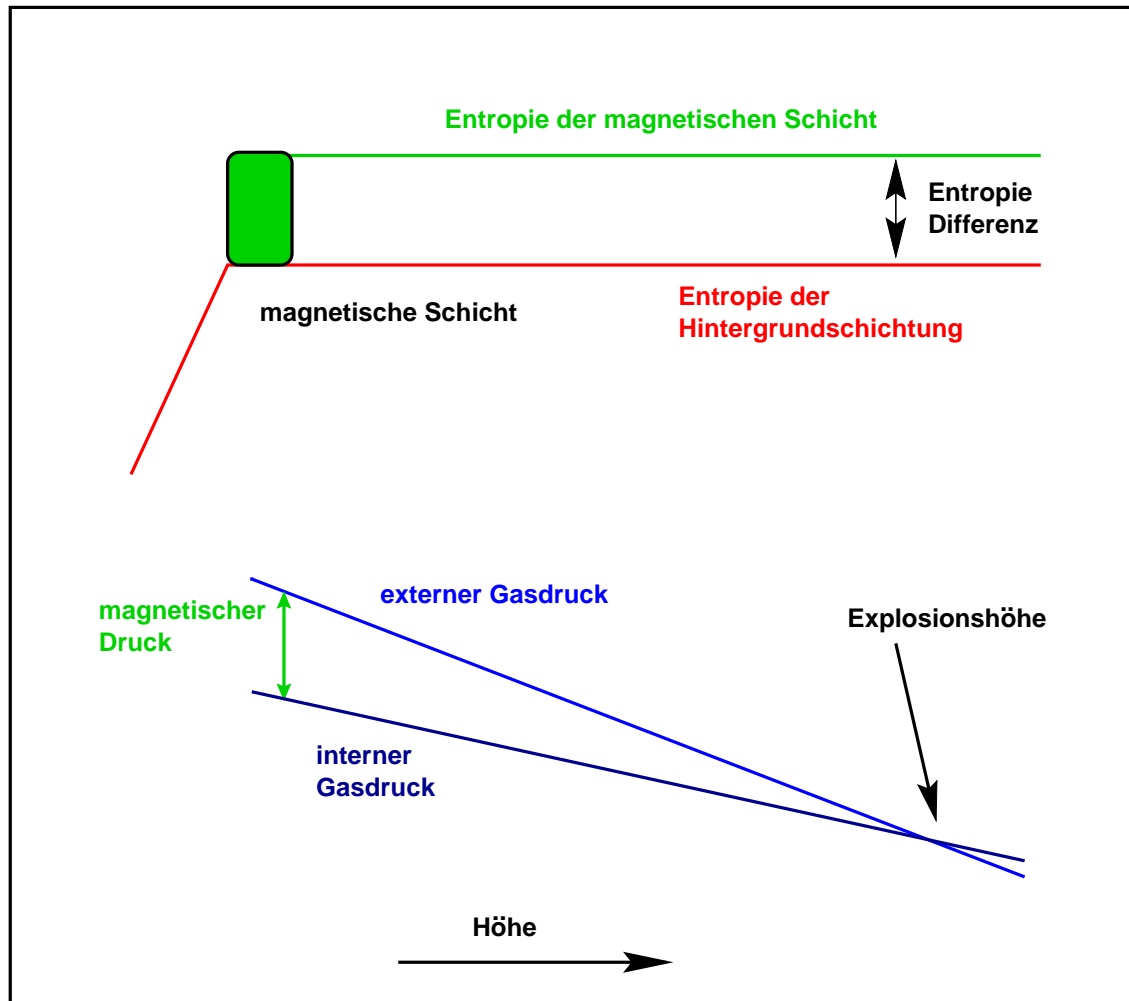


Abbildung 5.4: Schematische Skizze des Entropie- und Druckverlaufs im numerischen Modell.

einer 2D-Simulation nicht möglich. Weil der Explosionsprozess hier isoliert betrachtet werden soll, um seine grundsätzlichen Eigenschaften zu verstehen, wird dieser sehr aufwendige Ansatz nicht weiter verfolgt. Der in den Simulationen verwendete Anfangszustand sieht daher wie folgt aus: Das Anfangsmagnetfeld ist eine dünne magnetische Flusschicht im unteren Bereich des Rechengebietes. Die Hintergrundschiechtung besteht unterhalb der magnetischen Schicht aus einer stark subadiabatischen Schichtung ($\delta \approx -0.2$) und oberhalb aus einer adiabatischen Schichtung. Die Schichtung umfasst insgesamt 5 Druckskalenhöhen. Die Voraussetzung für die Explosion wird durch einen anfänglichen Entropiekontrast geschaffen. Diese Situation ist in Abb. 5.4 dargestellt. Für den Fall einer konstanten Entropiedifferenz folgt aus Gl. (5.10) zusammen mit $g = g_0 (z_0/z)^2$ für die Explosionshöhe

$$z_{\text{ex}} = z_0 \left[\left(1 - \frac{\gamma H_0}{z_0} \frac{1}{\beta \Delta \tilde{s}} \right)^{-1} - 1 \right], \quad (5.19)$$

mit H_0 als Druckskalenhöhe bei $z = z_0$. Für die im Folgenden verwendeten Hin-

tergrundsichtungen gilt $\gamma H_0/z_0 = 0.175$ und $3 \leq \beta \Delta \tilde{s} \leq 12$, so dass in guter Näherung die Abschätzung

$$z_{\text{ex}} \approx \frac{\gamma H_0}{\beta \Delta \tilde{s}} \quad (5.20)$$

gilt. Die Druckschichtung im Hintergrund wird so angepasst, dass sich die magnetische Schicht in einem magneto-hydrostatischen Gleichgewicht befindet. Eine infolge der erhöhten Entropie innerhalb der Schicht mögliche Auftriebsinstabilität ist durch diesen Ansatz unterbunden, da diese eine wellenförmige Deformation der Magnetfeldlinien und der unterhalb der magnetischen Schicht befindlichen subadiabatischen Schichtung erfordern würde. Eine solche Deformation wird jedoch von der magnetischen Krümmungskraft und dem stabilisierenden Einfluss der subadiabatischen Schichtung stark behindert. Es sei hier noch betont, dass diese Stabilität eine Folge der zweidimensionalen Geometrie ist. Im 3D-Analogon werden wellenförmige Deformationen senkrecht zu der Magnetfeldrichtung nicht von der Krümmungskraft unterdrückt. Dies führt an der Oberkante der Schicht zu der Ablösung einzelner Flussröhren, die infolge ihres Auftriebs nach oben steigen und so die Schicht fragmentieren (magnetische Rayleigh-Taylor-Instabilität). Ist das Anfangsmagnetfeld in dem hier betrachteten 2D Fall zu schwach, so kann diese Rayleigh-Taylor-Instabilität auch in der Richtung parallel zum Magnetfeld auftreten (Parker-Instabilität).

Infolge der Stabilität dieser Anfangssituation ist es erforderlich, die magnetische Schicht anfänglich zu deformieren, damit es während der Simulation zu einem Aufstieg von Teilen der Schicht kommt. Bei dieser Deformation wird ein hydrostatisches Gleichgewicht entlang der Feldlinien vorausgesetzt, so dass bei der Annäherung an die Explosionshöhe eine deutlichen Abschwächung des Magnetfeldes erfolgt. Dadurch fällt der stabilisierende Einfluss der magnetischen Krümmungskraft weg und die Auftriebskraft führt in der Simulation zu einem weiteren Aufsteigen des Magnetfeldes. Dieser Anfangszustand wird wie folgt berechnet: Sei $z_c(x)$ die vertikale Auslenkung der zentralen Feldlinie in der magnetischen Schicht als Funktion der horizontalen Koordinate x , so folgt aus Gl. (5.8) für den magnetischen Druck entlang dieser Feldlinie

$$\frac{dp_{\text{mag}}}{dx} = \left(-\frac{p_{\text{mag}}}{\gamma H_p} - \frac{\varrho g}{c_p} \Delta \tilde{s} \right) z'_c(x). \quad (5.21)$$

Die horizontale Komponente des Magnetfeldes in der Schicht wird angesetzt als

$$B_x(x, z) = \sqrt{2 \mu_0 p_{\text{mag}}(x)} \exp \left(- \left| \frac{z - z_c(x)}{d(x)} \right|^\sigma \right) \cos \alpha(x) = \frac{\partial A}{\partial z}, \quad (5.22)$$

wobei $d(x) = d_0 (p_{\text{mag}}(0)/p_{\text{mag}}(x))^{1/2}$ die halbe Dicke der Schicht und $\alpha(x) = \arctan z'_c(x)$ der Anstellwinkel gegen die Horizontale ist. Das vertikale Magnetfeld folgt schließlich aus

$$B_z(x, z) = -\frac{\partial A}{\partial x}. \quad (5.23)$$

Die Entropiedifferenz ist gegeben durch

$$\Delta\tilde{s}(x, z) = \Delta\tilde{s}_0 \exp\left(-\left|\frac{z - z_c(x)}{d(x)}\right|^\sigma\right). \quad (5.24)$$

Der Parameter σ legt den Gradienten von B und $\Delta\tilde{s}$ senkrecht zur Schicht fest. Da sich die magnetische Schicht infolge der Flusserrhaltung in Gebieten mit schwächeren Feld ausdehnt und somit die Feldlinien nicht parallel verlaufen, ist die Hydrostatik entlang der Feldlinien außerhalb des Zentrums nur näherungsweise erfüllt. Diese Abweichungen sind jedoch so gering, dass die dadurch erzeugten Strömungen am Anfang der Simulation vernachlässigbar sind.

Um Rechenzeit zu sparen, wird nur die Hälfte der Magnetfeldschleife betrachtet und eine entsprechende Symmetriebedingung am Gipfel angenommen. Bezüglich der hydrodynamischen Variablen ist das Rechengebiet geschlossen (Massenflüsse senkrecht zu den Grenzen verschwinden, ebenso die Normalableitung der parallelen Flüsse, der Energie und der Dichte). Das Magnetfeld ist am linken und rechten Rand horizontal, verschwindet am unteren Rand und ist vertikal am oberen Rand.

Trotz zahlreicher Idealisierungen besitzt dieses Modell die wesentlichen Eigenschaften, die es gestatten, den Explosionsprozess und eine nachfolgende Feldverstärkung zu untersuchen. Diese sind:

- Es existiert eine Entropiedifferenz zwischen dem magnetisierten Plasma und der Umgebung, so dass es zu einer Explosion kommen kann.
- Neben dem infolge des Auftriebs aufsteigenden Teil des Magnetfeldes existieren noch Teile, die stabil gespeichert sind (im Fall der Sonne entspricht dies dem in der Overshoot-Region gespeicherten Teil der Flussröhre). Die Explosion kann in diesen Teilen zu einer Feldverstärkung führen.

Daher ist dieses Modell geeignet, Einblick in die grundsätzlichen Eigenschaften des Explosionsprozesses und in die resultierende Feldverstärkung zu erhalten.

5.2.2 Ergebnisse

Die wesentlichen Parameter für das hier betrachtete Problem sind die dimensionslosen Größen β_0 (Plasmabeta zu Beginn der Rechnung in dem horizontalen Teil der magnetischen Schicht) und $\Delta\tilde{s}$. Wie die Betrachtung von Gl. (5.19) zeigt, bestimmt die Kombination $\beta_0 \Delta\tilde{s}$ die Explosionshöhe, so dass zu erwarten ist, dass Rechnungen mit gleichen $\beta_0 \Delta\tilde{s}$ ähnlich verlaufen. Die Werte von $\beta_0 \Delta\tilde{s}$ sind für die hier gezeigten numerischen Simulationen im Bereich 3 – 12 gewählt. Kleinere Werte führen zu zu großen Explosionshöhen, die nahe an der oberen Grenze des Rechengebietes liegen, so dass in diesem Fall die Explosion stark durch den oberen Rand beeinflusst wird. Größere Werte führen zu Explosionshöhen, die kleiner als die Dicke der verwendeten magnetischen Schicht selbst sind. In Tabelle 5.1 sind die Modelle zusammengestellt, die im Folgenden diskutiert werden.

Um eine bessere Vergleichbarkeit der Ergebnisse zu ermöglichen, werden für $\beta_0 \Delta\tilde{s}$ stets die Werte 3, 6 und 12 verwendet, während β_0 und $\Delta\tilde{s}$ um einen Faktor 16 variieren. Die anfängliche Dicke der Schicht richtet sich nach der gewählten

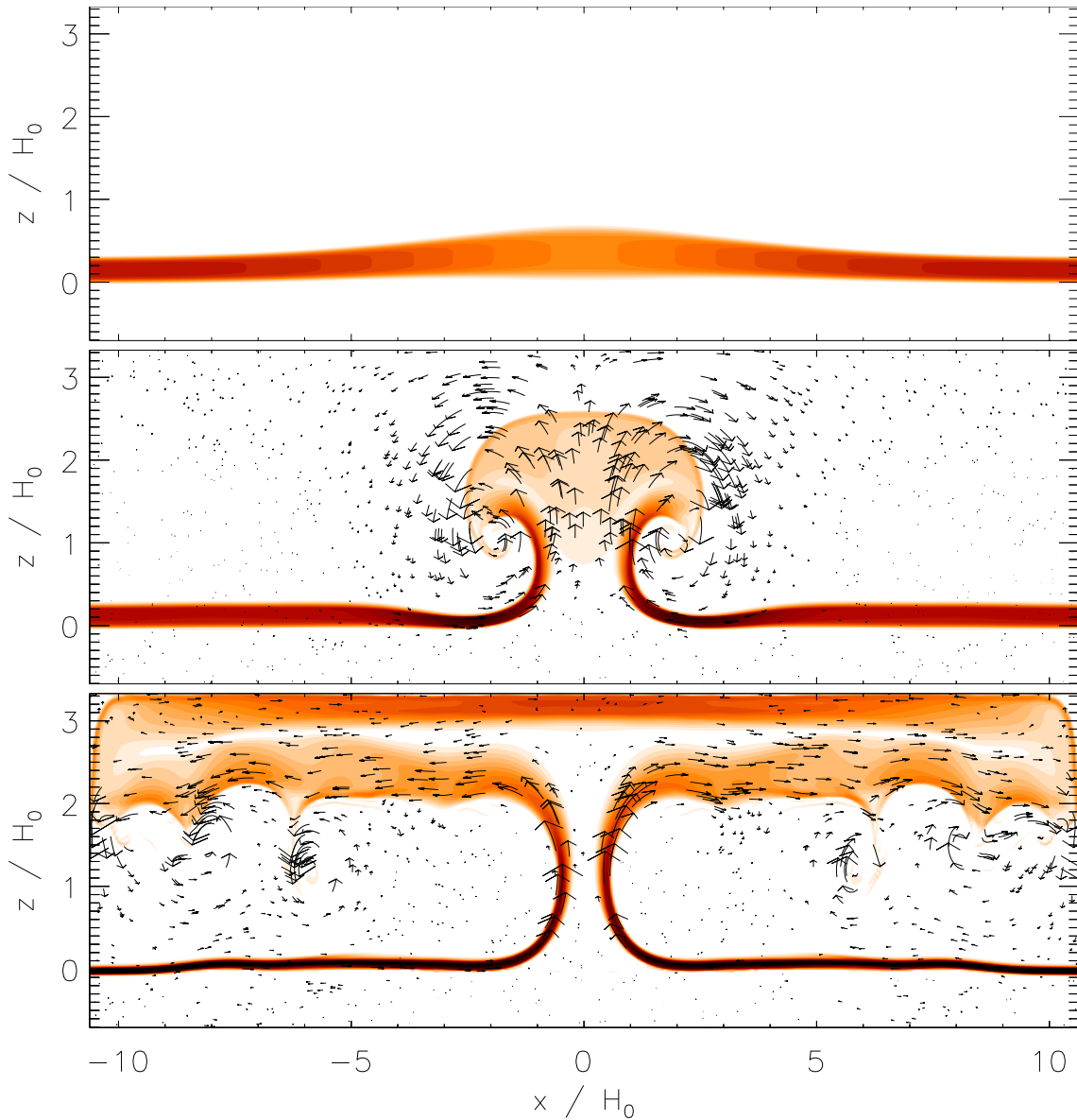


Abbildung 5.5: Zeitliche Entwicklung der magnetischen Feldstärke (farbcodiert, dunkel: hohe Feldstärke) und der Geschwindigkeit (Vektorpfeile) während der Explosion für das Modell mit $\beta_0 = 300$ und $\Delta\tilde{s} = 0.02$. Das Magnetfeld liegt innerhalb der dargestellten xz Ebene. Längen sind mit H_0 , der Druckskalenhöhe bei $z = 0$ entdimensioniert. Die Sequenz zeigt den Anfangszustand (oberes Bild), die Bildung der magnetischen Stümpfe (mittleres Bild) nach $0.8\tau_A$ und den vom Auftrieb angetriebenen Ausfluss aus den Stümpfen (unteres Bild) nach $1.6\tau_A$, wobei τ_A die Laufzeit einer Alfvénwelle mit $\beta_0 = 300$ entlang der halben Fluss-Schicht ist (siehe Gl. 5.25).

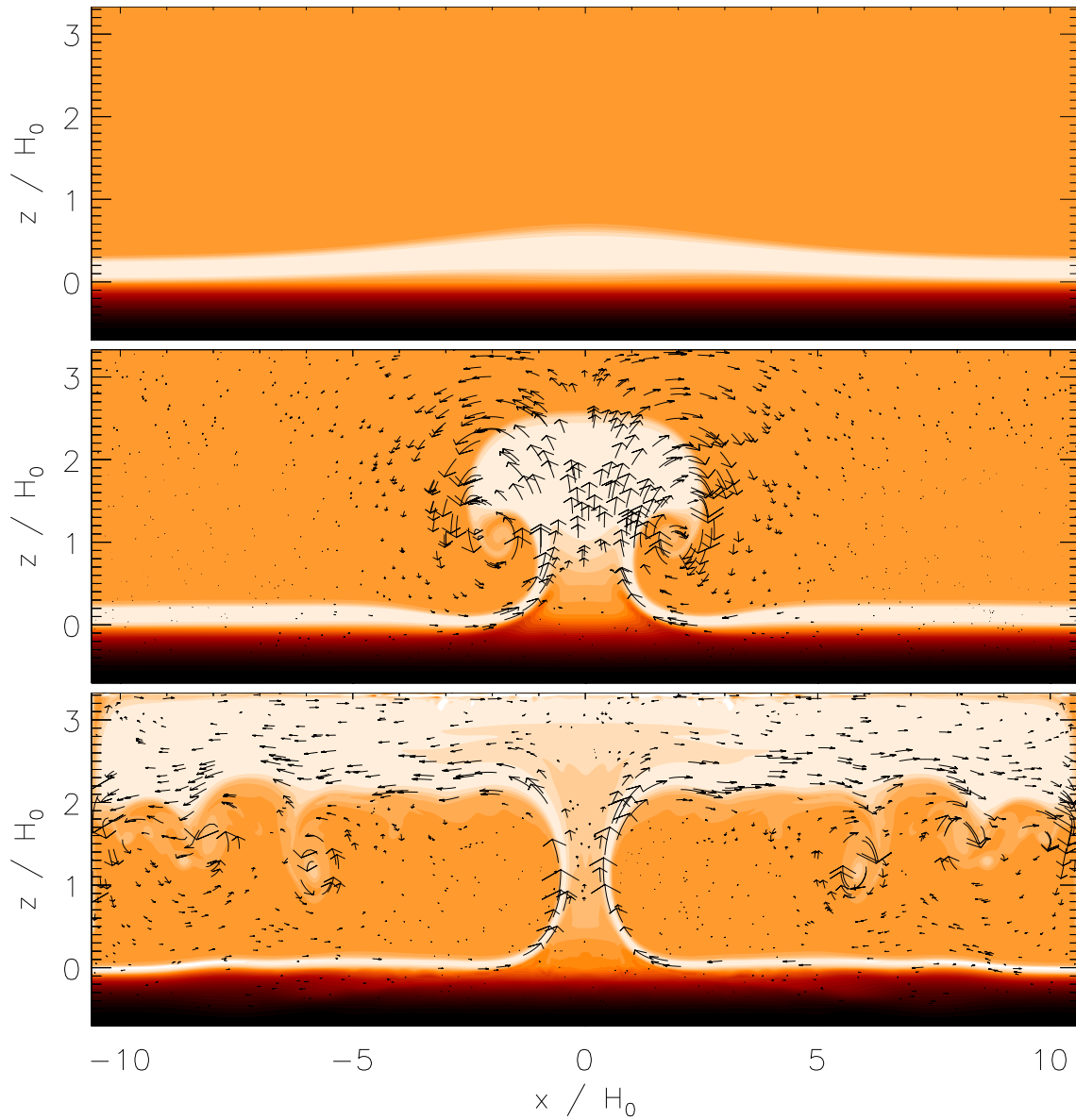


Abbildung 5.6: Zeitliche Entwicklung der Entropieverteilung (farbcodiert, dunkel: niedrige Entropie) für die in Abb. 5.5 dargestellte Feldstärkeentwicklung. Wie in Abb. 5.5 sind die Zeitschritte $0\tau_A$, $0.8\tau_A$ und $1.6\tau_A$ gezeigt, wobei τ_A die Laufzeit einer Alfvénwelle mit $\beta_0 = 300$ entlang der halben Fluss-Schicht ist (siehe Gl. 5.25).

	0.0025	0.005	0.01	0.02	0.04
150				3	6
300			3	6	12
600			6	12	
1200		6			
2400	6				

Tabelle 5.1: Übersicht über die durchgeführten Simulationsrechnungen. In der oberen Zeile sind die Entropiedifferenzen $\Delta\tilde{s}$, in der ersten Spalte die Werte von β_0 eingetragen. In der Tabelle stehen die Werte für $\beta_0 \Delta\tilde{s}$ der gerechneten Modelle.

numerischen Auflösung, wobei zu beachten ist, dass während der Simulation die Schichtdicke bei einer Feldverstärkung entsprechend abnimmt. Für die hier dargestellten Rechnungen wird für $\beta_0 \Delta\tilde{s} = 3$ eine Anfangsdicke von $0.2 H_0$, für $\beta_0 \Delta\tilde{s} = 6$ eine Anfangsdicke von $0.28 H_0$ und für $\beta_0 \Delta\tilde{s} = 12$ eine Anfangsdicke von $0.4 H_0$ verwendet.

In Abb. 5.5 und 5.6 ist die Entwicklung einer magnetischen Schicht mit $\beta_0 = 300$ und $\Delta\tilde{s} = 0.02$ ($\beta_0 \Delta\tilde{s} = 6$) gezeigt. Abb. 5.5 zeigt die Entwicklung der Magnetfeldstärke, Abb. 5.6 die Entwicklung der Entropie. In beiden Abbildungen ist das Geschwindigkeitsfeld durch Vektorpfeile dargestellt. Gerechnet wurde unter Ausnutzung der Symmetrie des Problems nur die halbe magnetische Schicht ($x < 0$), die jedoch zur besseren Darstellung an der Achse $x = 0$ gespiegelt ist. Die jeweils oberen Bilder zeigen den Anfangszustand der Schicht mit der zentralen Auslenkung. Infolge des deutlich schwächeren Magnetfeldes im zentralen Teil führt dort die Auftriebskraft zu einer Aufwärtsbewegung, durch die Teile des Magnetfeldes über die Explosionshöhe transportiert werden. Als Folge bilden sich zwei vertikale „Stümpfe“, die durch eine Wolke aus schwachem Magnetfeld verbunden sind (jeweils mittlere Abbildung). Nach der Ausbildung der Stümpfe setzt sich der von der Auftriebskraft getriebene Ausfluss von Plasma höherer Entropie fort und führt zu einer Erniedrigung des Gasdrucks im nicht explodierten Teil der magnetischen Schicht. Als Konsequenz des Druckgleichgewichts mit der Umgebung erhöht sich dort die magnetische Feldstärke. Das ausgeflossene Gas mit der höheren Entropie steigt in die obere Hälfte des Rechengebietes auf und bleibt dort infolge seines Auftriebs. An der Grenze zwischen magnetisiertem und unmagnetisiertem Plasma bei $z \approx 2 H_0$ führt eine Kelvin-Helmholtz Instabilität zur Bildung von Wirbeln. Während sich die Magnetfeldstärke und damit auch die zugehörige Explosionshöhe in der Schicht erhöht, wachsen die Stümpfe weiter nach oben, bis sie in das Gebiet mit der erhöhten Entropie gelangen (untere Abbildung). Weil dort die Entropiedifferenz zwischen den Stümpfen und dem sie umgebenden Plasma verschwindet, gibt es dort für den Ausfluss keine weitere Antriebskraft, so dass die Ausströmung zum Erliegen kommt. Der Verlauf der magnetischen und kinetischen Energie im Rechengebiet ist in Abb. 5.7 für die Modelle mit $\Delta\tilde{s} = 0.02$ dargestellt. Die Zeitachse ist mit der Alfvénlaufzeit

$$\tau_A = \frac{l}{v_A} = \frac{l}{c_s} \left(\frac{\gamma \beta_0}{2} \right)^{1/2}, \quad (5.25)$$

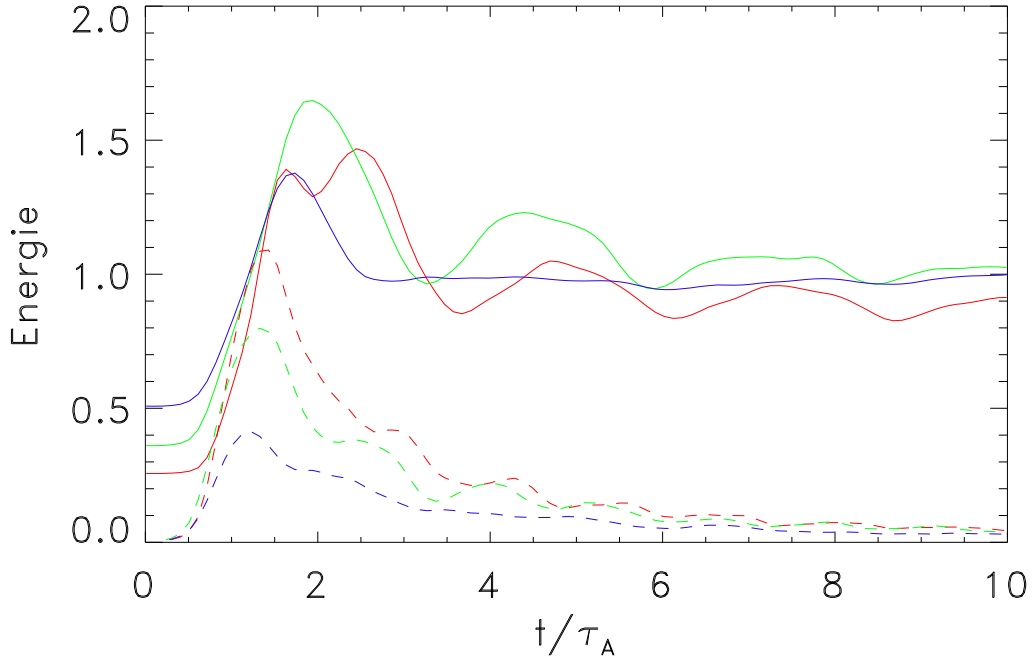


Abbildung 5.7: Verlauf der magnetischen Energie (durchgezogen) und der kinetischen Energie (gestrichelt) für die Fälle $\beta_0 = 150$ (blau), $\beta_0 = 300$ (grün) und $\beta_0 = 600$ (rot). In allen drei Fällen ist $\Delta\tilde{s} = 0.02$ und der magnetische Fluss gleich. Die Energie ist normiert auf die asymptotische magnetische Energie, die weitgehend unabhängig von der Anfangsfeldstärke ist.

entlang einer magnetischen Schicht mit $\beta_0 = 300$ entdimensioniert.

Die anfängliche Entwicklung ($t \lesssim \tau_A$) entspricht der Entwicklung der magnetischen Stümpfe. Nachdem der Ausfluss von Plasma aus den Stümpfen begonnen hat, kommt es zu einem weitgehend linearen Anwachsen der magnetischen Energie ($\tau_A \lesssim t \lesssim 2\tau_A$), bis sich nach einer Einschwingphase ein asymptotischer Wert einstellt. Weil alle drei Simulationen mit dem gleichen magnetischen Fluss beginnen, skaliert die Energie zu Beginn im Wesentlichen mit der Anfangsfeldstärke, während sich in allen drei Fällen nahezu der gleiche asymptotische Wert einstellt. Die kinetische Energie erreicht ihr Maximum während der linearen Anwachsphase der magnetischen Energie und klingt anschließend ab.

In Abb. 5.8 ist die zeitliche Entwicklung der mittleren magnetischen Feldstärke im horizontalen Teil der magnetischen Schicht gezeigt. Die hier dargestellte Feldstärke errechnet sich aus

$$\langle B(t) \rangle = \frac{1}{N_x} \sum_x \max_z B(x, z, t), \quad (5.26)$$

d.h. es handelt sich um ein Mittel der jeweils größten Feldstärken entlang des horizontalen Teils der magnetischen Schicht. Diese Größe eignet sich am besten für den

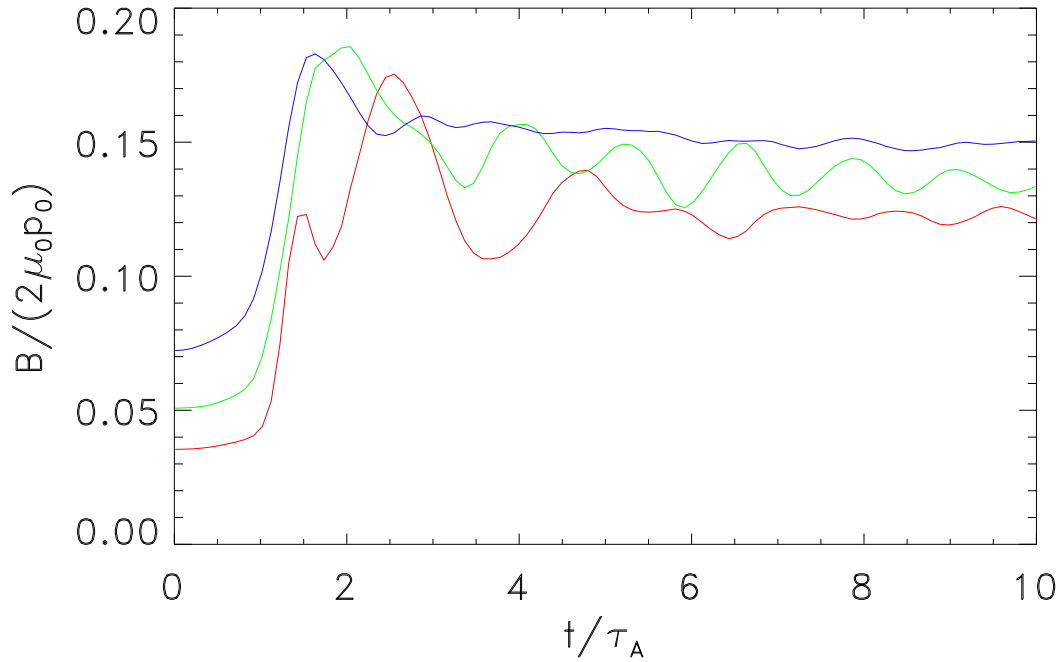


Abbildung 5.8: Feldstärke als Funktion der Zeit im horizontalen Teil der magnetischen Schicht in Einheiten der Äquipartitionsfeldstärke mit dem Gasdruck bei $z = z_0$. Gezeigt sind die Rechnungen mit $\Delta\tilde{s} = 0.02$ und $\beta_0 = 150$ (blau), $\beta_0 = 300$ (grün) und $\beta_0 = 600$ (rot).

Vergleich der Simulation mit den theoretischen Erwartungen, weil die Mitte der magnetischen Schicht während der Simulation am wenigsten durch numerische Diffusion beeinflusst wird. In den Randbereichen der magnetischen Schicht kommt es sowohl zu einer Erniedrigung der Feldstärke als auch zu einer Erniedrigung des anfänglichen Entropiekontrastes durch numerische Dissipation. Der Verlauf der Feldstärke ist ähnlich dem Verlauf der magnetischen Energie in Abb. 5.7, weil für Magnetfelder, die weitgehend in Form einer Fluss-Schicht vorliegen, die magnetische Gesamtenergie wie die mittlere Feldstärke skaliert:

$$E_{\text{mag}} = \int_V \frac{B^2}{2\mu_0} dV \approx \int_L A \frac{B^2}{2\mu_0} dl = \frac{\phi}{2\mu_0} \int_L B dl = \frac{\phi}{2\mu_0} L \langle B \rangle. \quad (5.27)$$

Dabei wurde das Volumenintegral in ein Integral entlang der Fluss-Schicht umgewandelt und der konstante magnetische Fluss $\phi = A B$ aus der Integration herausgezogen. Es ist jedoch zu beachten, dass in Abb. 5.7 auch das schwache Magnetfeld im oberen Bereich des Rechengebietes berücksichtigt wird, während in Abb. 5.8 nur das starke Feld im horizontalen Teil der magnetischen Schicht eingeht. Im Gegensatz zu der magnetischen Gesamtenergie zeigt die Magnetfeldstärke eine stärkere systematische Variation mit der Anfangsfeldstärke, die sich aus der unterschiedlichen Lage

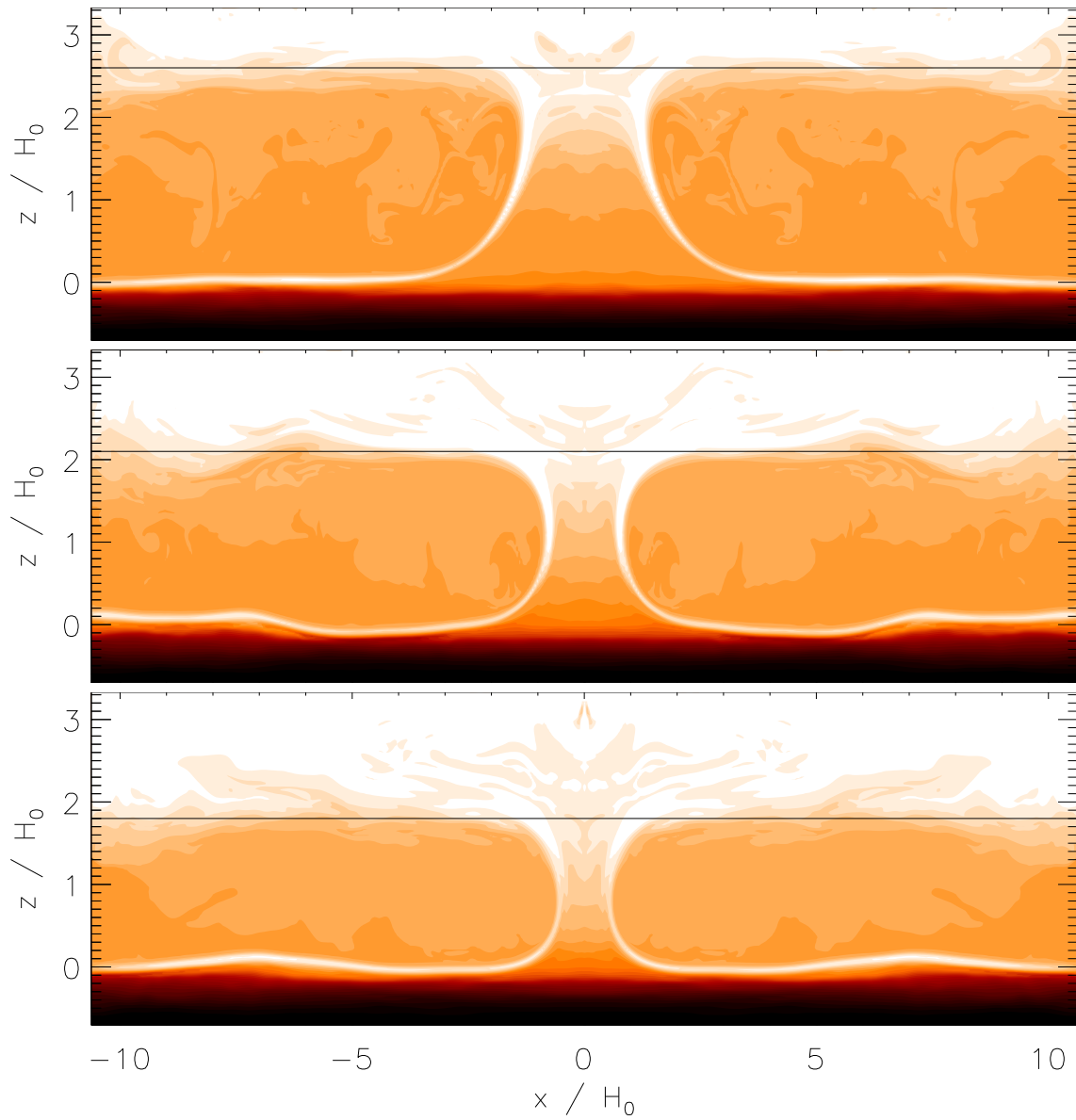


Abbildung 5.9: Entropieverteilung nach erfolgter Explosion für das Modell mit $\beta_0 \Delta \tilde{s} = 3$ (oben), $\beta_0 \Delta \tilde{s} = 6$ (Mitte) und $\beta_0 \Delta \tilde{s} = 12$ (unten). Die Entropieinversionslinie beschränkt die effektive Explosionshöhe.

der Höhe ergibt, bei der in den drei Modellrechnungen die Entropieinversion auftritt (Abb. 5.9). Aus Gründen der numerischen Auflösung (siehe oben) muss die Anfangsdicke der magnetischen Schicht bei einer kleineren Anfangsfeldstärke größer gewählt werden, damit die Schichtdicke nach der Feldverstärkung numerisch noch hinreichend gut aufgelöst wird. Dies hat zur Folge, dass bei den Modellen mit geringerer Anfangsfeldstärke mehr Gas mit höherer Entropie ausströmt, welches sich im oberen Bereich des Rechengebietes ansammelt. Wie aus Abb. 5.9 ersichtlich, liegt die Entropieinversionslinie, welche die effektive Explosionshöhe beschränkt, bei ca. $2.6 H_0$ für das Modell mit $\beta_0 \Delta \tilde{s} = 3$, bei $2.1 H_0$ für das Modell mit $\beta_0 \Delta \tilde{s} = 6$ und bei $1.8 H_0$ für das Modell mit $\beta_0 \Delta \tilde{s} = 12$. Die nach Gl. (5.19) hierzu korrespondierenden Feldstärken (in Einheiten von $\sqrt{2\mu_0 p_0}$) sind $B = 0.15$, $B = 0.14$ und $B = 0.13$, in weitgehender Übereinstimmung mit Abb. 5.8. Damit ist nach der Explosion die Feldstärke im horizontalen Teil der magnetischen Schicht hinreichend groß, um ein hydrostatisches Gleichgewicht entlang der Stümpfe ohne Verletzung des lateralen Druckgleichgewichts zu ermöglichen. Die Feldstärke, die sich nach der Explosion einstellt, wird im Wesentlichen durch die Hydrostatik entlang der Feldlinien bestimmt und ist somit in erster Linie durch den Entropiekontrast gegeben. In den hier gezeigten Fällen wird das Magnetfeld im horizontalen Teil der Schicht um einen Faktor 2 – 3.5 verstärkt, d.h. die Energiedichte des Feldes um einen Faktor 4 – 12. Die Kurve für $\beta_0 = 600$ zeigt zu Beginn der Feldverstärkung einen steileren Anstieg, weil sich hier infolge lokaler Instabilitäten zusätzlich zur zentralen aufsteigenden Fluss-Schleife weitere Fluss-Schleifen bilden, die ebenfalls explodieren. Dadurch kommt es zu einem schnelleren Ausfluss des Gases mit höherer Entropie aus der magnetischen Schicht. Nach $t \approx 1.5\tau_A$ schließt sich die Schicht wieder an der entsprechenden Stelle durch Rekonnektion. Die weitere Entwicklung verläuft dann ähnlich wie in den anderen Fällen.

Es sei betont, dass es sich bei der oben berechneten asymptotischen Feldstärke um eine Mindestfeldstärke handelt, größere Werte sind durchaus möglich, weil sie ebenfalls mit der Hydrostatik verträglich sind. Der Grund dafür, dass in den numerischen Rechnungen eine Annäherung an die Mindestfeldstärke stattfindet, ist in der numerischen magnetischen Diffusivität zu suchen. Sie führt zu einer Reduktion der Feldstärke, bis die Mindestfeldstärke erreicht ist. Fällt die Feldstärke unter diese Schwelle, so kommt es zu einem erneuten Ausfluss, der die für die Hydrostatik nötige Feldstärke wiederherstellt. Allerdings führt die numerische Diffusion auch zu einer Abschwächung des Entropiekontrastes, so dass es im Verlauf zu einem Abfall dieser Mindestfeldstärke kommt. In den hier dargestellten Rechnungen mit einer Auflösung von 448×448 Gitterzellen spielt dieser Einfluss kaum eine Rolle. Bei einer zu niedrigen numerischen Auflösung ergibt sich durch diesen Effekt allerdings anstelle einer asymptotischen Feldstärke eine Zerfallskurve.

Die Abhängigkeit der asymptotischen Feldstärke vom Entropiekontrast ist in Abb. 5.10 gezeigt. Bei gleicher Anfangsfeldstärke stellt sich für verschiedene Entropiekontraste eine unterschiedliche Endfeldstärke ein. Weil es sich hier um Rechnungen mit dem gleichen $\beta_0 \Delta \tilde{s}$ wie in Abb. 5.9 handelt, sind die effektiven Explosionshöhen die gleichen. Mit Gl. (5.19) folgt für die erwartete Mindestfeldstärke (in Einheiten von $\sqrt{2\mu_0 p_0}$) für den Fall $\Delta \tilde{s} = 0.005$ ($z_{ex} = 2.6 H_0$) $B \approx 0.1$, $\Delta \tilde{s} = 0.01$

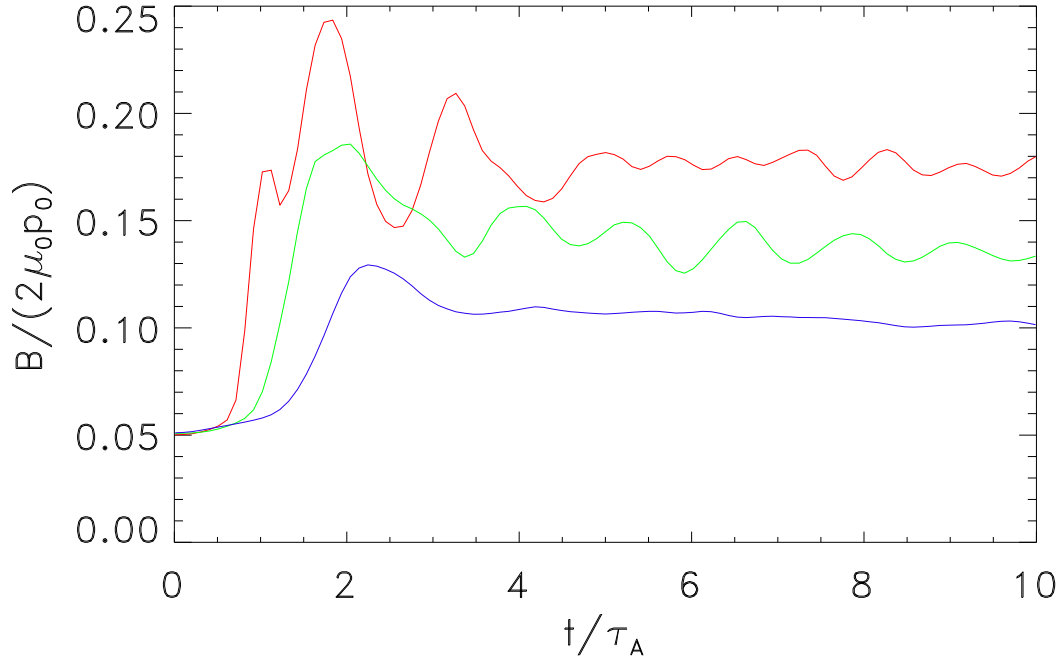


Abbildung 5.10: Entwicklung der Magnetfeldstärke für 3 Modelle mit gleicher Anfangsfeldstärke ($\beta_0 = 300$), aber unterschiedlichem Entropiekontrast: $\Delta\tilde{s} = 0.01$ (blau), $\Delta\tilde{s} = 0.02$ (grün) und $\Delta\tilde{s} = 0.04$ (rot). Mit zunehmender Entropiedifferenz steigt die asymptotische Feldstärke.

($z_{ex} = 2.1 H_0$) $B \approx 0.14$, und $\Delta\tilde{s} = 0.02$ ($z_{ex} = 1.8 H_0$) $B \approx 0.18$. Diese Werte sind in guter Übereinstimmung mit den asymptotischen Werten aus der numerischen Simulation.

Der Explosions- und Feldverstärkungsprozess lässt sich grob in zwei Phasen einteilen:

1. Aufstieg der Schicht, Explosion und die Entwicklung der magnetischen Stümpfe
2. Ausfluss von Material aus den Stümpfen und Feldverstärkung.

Die erste Phase entspricht in Abb. 5.8 und 5.10 dem flachen Verlauf zu Beginn, während die zweite Phase mit einem weitgehend linearen Anstieg der Feldstärke einhergeht. Dabei führt der Ausfluss des Plasmas aus dem explodierten Teil der magnetischen Schicht zu einer Störung, die sich mit Alfvéngeschwindigkeit entlang der Schicht ausbreitet und dabei das im horizontalen Teil ruhende Plasma in Richtung des Ausflusses beschleunigt. Die dabei erreichten Ausflussgeschwindigkeiten sind ebenfalls von der Größenordnung der Alfvéngeschwindigkeit, so dass die Zeitdauer für die Feldverstärkung grob gegeben ist durch die in Gl. (5.25) definierte Alfvénlaufzeit. Die Alfvénlaufzeit für $\beta_0 = 300$ ist in Abb. 5.7, 5.8, 5.10 und 5.11

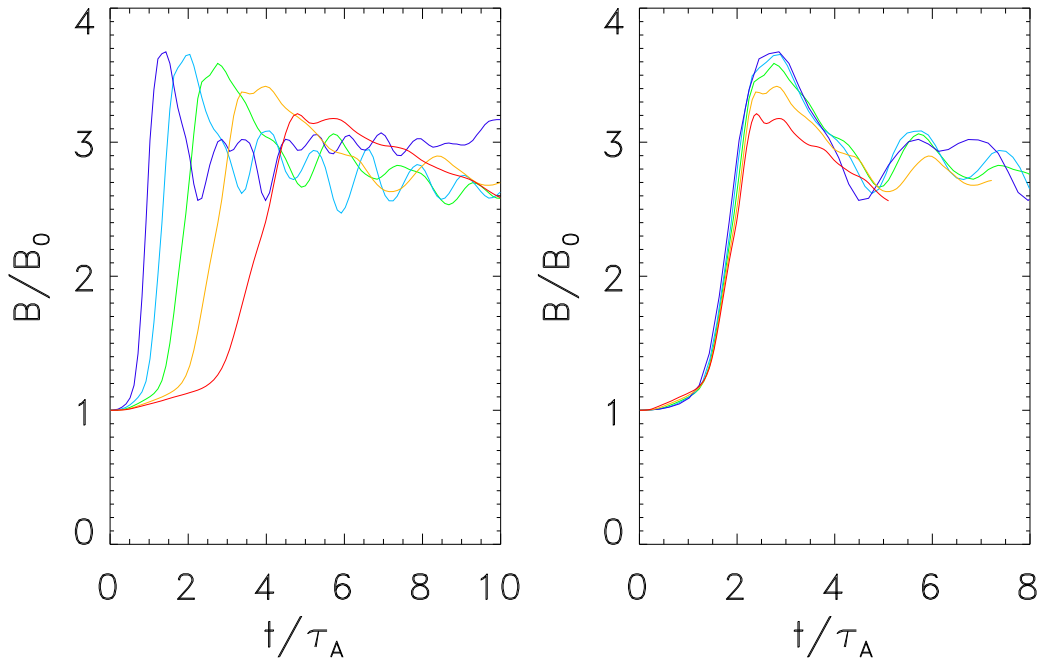


Abbildung 5.11: Entwicklung der Magnetfeldstärke für Modelle mit $\beta_0 = 150, 300, 600, 1200$ und 2400 und $\beta_0 \Delta \tilde{s} = 6$. Links ist die Magnetfeldstärke über der simulierten Zeit aufgetragen, rechts wurde die Zeitachse mit $\beta_0^{1/2}$ skaliert. Die Magnetfeldstärke ist normiert auf die jeweilige Anfangsfeldstärke. Der Verlauf der einzelnen Kurven zeigt keine charakteristischen Unterschiede, abgesehen von der Tatsache, dass die Feldstärke für die Rechnungen mit größeren β_0 etwas geringer ausfällt. Infolge der langsameren Entwicklung spielt hier die numerische Diffusion eine größere Rolle.

zur Entdimensionierung der Zeitachse verwendet worden. Die numerischen Simulationen zeigen, dass die Zeitdauer der ersten Phase ungefähr gleich der Zeitdauer der zweiten Phase ist. Die Skalierung mit $\beta_0^{1/2}$ ist in Abb. 5.11 dargestellt. Bei konstant gehaltenem $\beta_0 \Delta \tilde{s}$, d.h. einer vergleichbaren Situation für die Anfangskonfiguration, wurde hier β_0 zwischen 150 und 2400 variiert (Faktor 16), während sich die Zeitskala um einen Faktor 4 ändert.

Die wesentlichen Ergebnisse dieses numerischen Experiments lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- Die Explosion der magnetischen Schicht führt zur Bildung zweier magnetischer Stümpfe, die von einer Wolke aus schwachem Magnetfeld verbunden sind.
- Nach erfolgter Explosion kommt es zu einem von der Auftriebskraft getriebenen Ausfluss von Material aus den Stümpfen, der zu einer Erniedrigung des Gasdrucks im horizontalen Teil der magnetischen Schicht und damit zu einer Feldverstärkung führt.

- Dieser Prozess stoppt erst dann, wenn sich innerhalb des Rechengebietes ein hydrostatisches Gleichgewicht entlang der Feldlinien ausbilden kann, ohne dass es zu einer Verletzung des Druckgleichgewichtes entlang der Stümpfe der magnetischen Schicht kommt. Dies ist der Fall, wenn die zu der entsprechenden Feldstärke gehörende Explosionshöhe oberhalb der Entropieinversionslinie liegt.
- Die asymptotische Feldstärke ist bestimmt durch die Hydrostatik entlang der Feldlinien und damit hauptsächlich abhängig vom Entropiekontrast. Der Prozess ist nicht dynamisch begrenzt durch die Rückwirkung der Lorentzkraft auf die zu der Feldverstärkung führenden Strömungen, da diese parallel zum Magnetfeld verlaufen.
- Während des Feldverstärkungsprozesses wird Material mit erhöhter Entropie nach oben transportiert. Dabei wird potentielle Energie verfügbar, die vorher in der Hintergrundschichtung gespeichert war.
- Die Zeitskala des Verstärkungsprozesses skaliert bei $\beta_0 \Delta \tilde{s} = \text{const.}$ mit $\beta_0^{1/2}$. Die Eigenschaften des Prozesses sind unabhängig von β_0 , solange $\beta_0 \gg 1$ gilt.

5.3 Diskussion

Das in diesem Kapitel diskutierte numerische Modell unterscheidet sich von der Situation auf der Sonne durch die zweidimensionale Geometrie, die geringeren Werte von β und die adiabatische Hintergrundschichtung ohne Berücksichtigung konvektiver Bewegungen. Es können dennoch wichtige Schlussfolgerungen für die Feldverstärkung am Boden der Konvektionszone gezogen werden.

In Abschnitt 5.1.2 ist die Bedeutung der Entropiedifferenz zwischen der aufsteigenden Flussröhre und dem sie umgebenden Plasma dargelegt worden. In den hier dargestellten Rechnungen mit einer adiabatischen Schichtung ergibt sich eine höhenunabhängige Entropiedifferenz, während diese bei der Sonne mit der Höhe stark zunimmt. Die Variation der Entropiedifferenz entlang der Flussröhre bestimmt den Zusammenhang zwischen Explosionshöhe und Feldstärke, hat aber keinen grundsätzlichen Einfluss auf die Dynamik des Prozesses. Im Fall einer solaren Schichtung mit nach außen zunehmender Superadiabatizität (vergl. Abb. 5.3) ist zu erwarten, dass der Ausfluss von Materie aus den Stümpfen um so stärker wird, je höher die Stümpfe während des Feldverstärkungsprozesses wachsen.

Moreno-Insertis et al. (1995) haben gezeigt, dass vertikale konvektive Bewegungen von ca. 10 m s^{-1} in der Lage sind, magnetische Flussröhren mit Äquipartitionsfeldstärke aus der Overshoot-Region in die Konvektionszone zu heben. Damit kann die Konvektion in der anfänglichen Entwicklung eine wichtige Rolle spielen und ebenso wie die Parker-Instabilität einen Explosionsprozess auslösen. Hat die Explosion stattgefunden, so führt der Ausfluss von Material schnell zu einer Feldverstärkung im Bereich der Stümpfe, so dass nach Überschreiten der Äquipartitionsfeldstärke der

weitere Einfluss konvektiver Bewegungen schnell abnimmt. Die konvektiven Bewegungen im Bereich der magnetischen Stümpfe sind zudem in der Lage, das ausfließende Material wegzutransportieren und turbulent mit dem Hintergrundplasma zu mischen. Dadurch wird eine Entropieinversion, wie sie in den hier vorgestellten Rechnungen auftritt (siehe Abb. 5.9), weitgehend unterbunden und ein vorzeitiges Ende des Ausflusses verhindert. Die erreichbare asymptotische Feldstärke vergrößert sich dadurch.

Einen deutlichen Einfluss auf die Dynamik hat dagegen die 2D-Geometrie. Die Fluss-Schicht teilt das Rechengebiet, so dass ein Austausch von Plasma zwischen den Bereichen ober und unterhalb der Fluss-Schicht nicht möglich ist. In der 2D-Geometrie sind horizontale Strömungen größer als in der 3D-Geometrie, was vor allem einen Einfluss auf die Nachlaufströmung des zentralen aufsteigenden Teils der Flussröhre hat. Dies betrifft vor allem die Bereiche, in denen Strömungsgeschwindigkeiten senkrecht zum Magnetfeld auftreten. Die für die Feldverstärkung wichtige Strömung entlang der Fluss-Schicht und die Ausströmung aus den Stümpfen wird dagegen kaum beeinflusst. Das wesentliche Ergebnis, dass die Feldverstärkung erst dann aufhört, wenn ein neues hydrostatisches Gleichgewicht möglich ist, ist unabhängig von der Dimensionalität. Die Hydrostatik entlang der Feldlinien ist in 2D und 3D identisch. Weil die 3D-Geometrie mehr Raum für das ausfließende Plasma bietet, ist eine Abnahme bzw. ein Verschwinden der Entropieinversion, die im 2D Fall die Feldverstärkung beendet, zu erwarten.

Wie bereits oben diskutiert wurde, hat der Wert von β keinen signifikanten Einfluss auf den Explosionsprozess, abgesehen von der Skalierung der Zeit mit $\beta^{1/2}$. Dies liegt im Wesentlichen daran, dass die hier verwendeten Werte von β zwar deutlich kleiner als die solaren Werte sind, aber dennoch $\beta \gg 1$ gilt. Der magnetische Druck ist nur eine kleine Störung des Gasdrucks, so dass die Simulationen im gleichen physikalischen Regime wie die tiefe Konvektionszone der Sonne liegen. Aus diesem Grund kann Gl. (5.25) zur Extrapolation der Zeitskala auf solare Bedingungen herangezogen werden. Einsetzen typischer Werte ($l = 10^9$ m, $c_s = 2 \cdot 10^5$ m s⁻¹) in Gl. (5.25) liefert als Zeitskala für der Feldverstärkung

$$\tau \approx \sqrt{\frac{\beta}{5 \cdot 10^7}} \text{ Jahre} \quad (5.28)$$

so dass sich $\tau \lesssim 0.5$ Jahre für $\beta \lesssim 10^7$ (entspricht $B \gtrsim B_{\text{eq}}$) ergibt. Diese Zeitspanne ist hinreichend kurz, verglichen mit dem solaren Zyklus, um eine signifikante Feldverstärkung zu erreichen.

Die numerischen Simulationen haben gezeigt, dass der Prozess der Feldverstärkung erst dann aufhört, wenn ein neues hydrostatisches Gleichgewicht gefunden ist. Dies bedingt, dass die Feldstärke im horizontalen Teil der magnetischen Schicht so groß sein muss, dass die dazugehörige Explosionshöhe nahe am oberen Rand des Rechengebietes liegt. Überträgt man dieses Ergebnis auf die Sonne, so zeigt Abb. 5.2, dass eine Feldverstärkung auf Werte von ca. 10 T denkbar ist. Dies ist der Bereich, den auch die Simulationen aufsteigender magnetischer Flussröhren ergeben.

Ein interessanter Nebeneffekt dieses Feldverstärkungsprozesses ist eine Erhöhung der Sonnenleuchtkraft, bedingt durch den zusätzlichen Entropietransport in die obere Hälfte der Konvektionszone. Dieser Einfluss soll hier grob abgeschätzt werden. Es wird davon ausgegangen, dass durch die Explosion magnetischer Flussröhren ein Magnetfeld mit $\Phi = 10^{16}$ Wb Fluss (entspricht dem in einem Zyklus generierten Fluss) von 1 T auf 10 T verstärkt wird. Das 1 T Anfangsmagnetfeld füllt zu Beginn am Boden der Konvektionszone eine Schicht der Dicke ($r_0 = 5 \cdot 10^8$ m)

$$d_0 \simeq \frac{\Phi}{\pi r_0} \simeq 6 \cdot 10^7 \text{ m} \quad (5.29)$$

aus, die sich während der Feldverstärkung auf $1/10 d_0$ reduziert (bzw. der Füllfaktor des Feldes ändert sich entsprechend). Die Stümpfe der explodierten Flussröhren bilden in der Konvektionszone Aufströmkanäle, in denen Plasma mit einer mittleren Geschwindigkeit v und einer Entropiedifferenz

$$\Delta s \simeq \frac{c_p \delta}{H_p} \Delta r \quad (5.30)$$

aufströmt, wobei Δr die mittlere Ausströmhöhe ist. Die durch den Entropiefluss bedingte Änderung der Sonnenleuchtkraft beträgt

$$\delta L_{\text{expl}} \simeq 4\pi r^2 f v \rho T \Delta s, \quad (5.31)$$

wobei f hier der Füllfaktor der Stümpfe in der Konvektionszone ist, d.h. $4\pi r^2 f$ ist die Querschnittsfläche der Aufströmkanäle und $4\pi r^2 f v \rho$ der Massenfluss. Weil während der Feldverstärkung innerhalb einer Zeit von $\tau_{\text{zykl}} = 11$ Jahre der Masseninhalt einer Schicht der Dicke d_0 am Boden der Konvektionszone ausströmen muss, gilt:

$$4\pi r^2 f v \rho = \frac{4\pi r_0^2 d_0 \rho_0}{\tau_{\text{zykl}}}. \quad (5.32)$$

Zusammen mit $c_p T/H_p = g/\nabla_{\text{ad}}$ und Gl. (5.29) folgt für die Leuchtkraftänderung

$$\delta L_{\text{expl}} \simeq \frac{4 r_0 \Phi \rho_0}{\tau_{\text{zykl}}} \frac{g}{\nabla_{\text{ad}}} \delta \Delta r \quad (5.33)$$

Einsetzen typischer Werte für die Konvektionszone $\rho_0 = 200 \text{ kg m}^{-3}$, $g = 400 \text{ m s}^{-2}$, sowie $\Phi = 10^{16}$ Wb liefert

$$\delta L_{\text{expl}} \simeq 0.003 L_{\odot} \left[\frac{\delta}{10^{-6}} \right] \left[\frac{\Delta r}{10^8 \text{ m}} \right] \quad (5.34)$$

mit $L_{\odot} = 4 \cdot 10^{26}$ W. Dieser Wert liegt in der gleichen Größenordnung wie die beobachteten Schwankungen der Sonnenleuchtkraft während des magnetischen Zyklus (Fröhlich, 2000).

5.4 Ausblick: 3D MHD-Simulationen explodierender magnetischer Flussröhren

Die vorgestellten Ergebnisse der 2D-Simulationen magnetischer Schichten zeigen deutlich, dass es sich lohnt, die Explosion magnetischer Flussröhren als Feldverstärkungsprozess mehr im Detail zu betrachten. Als erster Schritt auf ein realistischeres Modell muss hier der Schritt der 2D-Simulation zu einer 3D-Simulation erfolgen. Es ergeben sich dabei jedoch eine Reihe von Problemen:

- Die in den 2D-Simulationen verwendete hohe numerische Auflösung lässt sich nicht auf eine 3D-Simulation übertragen. Es ist daher davon auszugehen, dass solche Rechnungen stärker von der numerischen Diffusion beeinflusst werden.
- Der in den 2D-Simulationen verwendete Anfangszustand ist im 3D-Fall instabil. Hier muss ein äquivalenter Anfangszustand gefunden werden, bei dem sich der horizontale Teil der magnetischen Flussröhre in einem stabilen Gleichgewicht befindet.

Der erhöhte Einfluss der numerischen Diffusion lässt sich in den Rechnungen durch kleinere Werte von β reduzieren, da sich dann die dynamische Entwicklung beschleunigt. Im Hinblick auf die solaren Werte von $\beta \gtrsim 10^5$ sollte hier jedoch von allzu kleinen Werten für β Abstand genommen werden. Die optimale Lösung für dieses Problem stellt die Verwendung der anelastischen Näherung dar, bei der die Schallausbreitung aus den Gleichungen eliminiert wird (Lantz & Fan, 1999). Dadurch ist die maximale charakteristische Geschwindigkeit des Problems die Alfvéngeschwindigkeit, die ja auch die dynamische Zeitskala des hier betrachteten Problems bestimmt.

Eine stabile Speicherung der Flussröhre lässt sich erreichen, wenn man die Abb. 5.1 dargestellte Hintergrundschichtung verwendet. Dann ergibt sich allerdings wieder das Problem einer konvektiven Instabilität im superadiabatischen Teil der Schichtung. Der in den 2D-Simulationen verfolgte Ansatz lässt sich nicht übertragen, weil der durch die Entropiedifferenz bedingte Auftrieb die gesamte Flussröhre aufsteigen lassen würde.

Zur Lösung dieses Problems werden zwei Ansätze verfolgt. Der erste Ansatz verwendet eine sonnenähnliche Hintergrundschichtung analog zu der in Abb. 5.1 dargestellten. Allerdings ist es nun erforderlich, die konvektive Instabilität im superadiabatischen Teil der Schichtung künstlich zu unterdrücken. In diesem Fall ergibt sich die zur Explosion führende Entropiedifferenz von selbst und der nicht ausgelenkte Teil der Flussröhre kann im subadiabatischen Teil der Schichtung auftriebsneutral und stabil gespeichert werden. Die Unterdrückung der Konvektion kann durch Einführung eines zusätzlichen Quellterms in der Energiegleichung erreicht werden, der die Effekte der superadiabatischen Schichtung aufhebt. Aus Gl. (4.32) ergibt sich für diesen Quellterm die Gestalt

$$S_\delta = \varrho \vec{v} \cdot \vec{g} \frac{\delta}{\nabla_{\text{ad}}} , \quad (5.35)$$

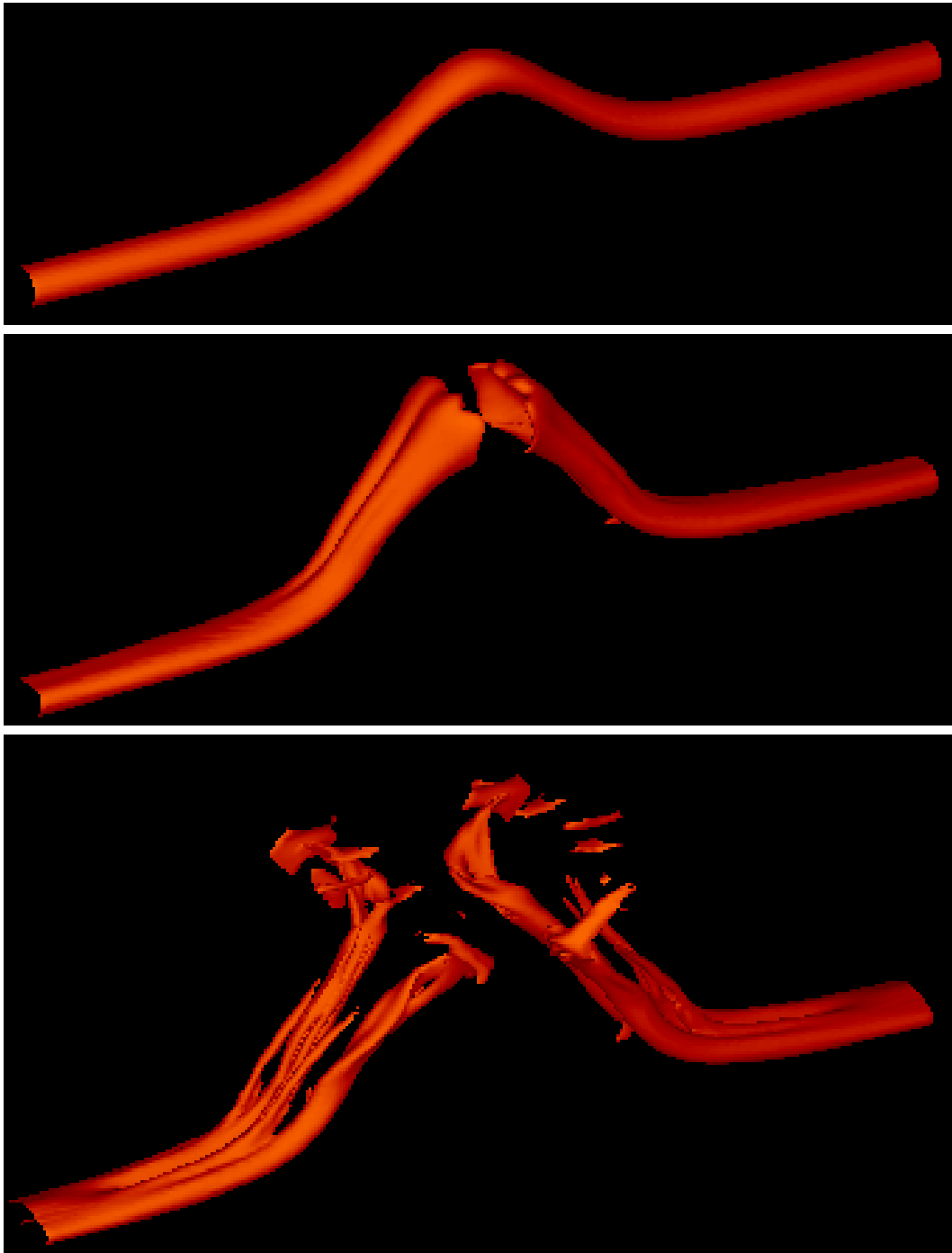


Abbildung 5.12: Zeitliche Entwicklung einer Flussröhre in einer 3D-Simulation. Gezeigt sind Flächen konstanter Magnetfeldstärke. Der zentrale Teil steigt infolge der Entropiedifferenz auf, explodiert und fragmentiert dabei.

was formal einer Modifikation des Gravitationsquellterms entspricht. Mit diesem Quellterm verhält sich die Schichtung trotz ihres Entropiegradienten wie eine adiabatischen Schichtung. Um die Isentropie innerhalb der Flussröhre sicherzustellen, ist es erforderlich, diesen Quellterm dort auszuschalten.

Der zweite Ansatz basiert auf einer adiabatischen Schichtung und einem anfänglichen Entropiekontrast wie in den 2D-Simulationen. Eine stabile Speicherung der Flussröhre im unteren Bereich des Rechengebietes wird erreicht durch eine künstliche Reduktion der Gravitation in diesem Bereich. Dieser Eingriff ist nicht so schwerwiegend wie es auf den ersten Blick erscheint, weil in dem Bereich des Rechengebietes wo sich die für die Explosion wesentliche Dynamik abspielt, keine Eingriffe vorgenommen werden.

Beide Ansätze wurden zu Testzwecken zunächst in den 2D-Simulationen verwendet, wobei sich keine grundsätzlichen Unterschiede im Vergleich zu den in Abschnitt 5.2.2 beschriebenen Resultaten ergeben.

Das Ergebnis einer ersten 3D-Testrechnung ist in Abb. 5.4 gezeigt. Hierbei wurde der zweite Ansatz verwendet, um den horizontalen Teil der Flussröhre zu stabilisieren. Bei der hier verwendeten Auflösung von $80 \times 224 \times 288$ Gitterzellen (gerechnet wurde durch Ausnutzung von Symmetrieeigenschaften nur 1/4 der Flussröhre) ist infolge des Einflusses der numerischen Diffusion noch keine signifikante Feldverstärkung zu erwarten. In einigen Bereichen der Flussröhre steigt Feldstärke um ca. 20% – 30%, jedoch setzt kein kohärenter Ausfluss von Material aus der Flussröhre ein. Dies hängt hauptsächlich mit der starken Fragmentation der Flussröhre im zentralen, aufsteigenden Teil zusammen. Eine nicht verdrillte Flussröhre ist grundsätzlich instabil in Bezug auf Austauschinstabilitäten, die den Querschnitt der Flussröhre verändern. Daher können bereits die Druckschwankungen, die sich aus dem Strömungsfeld im Umfeld der aufsteigenden Flussröhre ergeben, eine Fragmentation bewirken (Schüssler, 1979; Emonet & Moreno-Insertis, 1998). Die Tendenz der Fragmentation der Flussröhre in einer 3D-Simulation verschärft das Problem der unzureichenden numerischen Auflösung, weil sich kleinskalige Magnetfeldstrukturen ergeben und die Flussröhre nicht als Ganzes aufsteigt. Dieses Problem tritt nicht auf, wenn magnetische Flussröhren mit einem verdrillten Magnetfeld verwendet werden (Emonet & Moreno-Insertis, 1998; Dorch & Nordlund, 1998). Allerdings funktioniert dies nur gut für Flussröhren, deren Radius klein gegenüber der Druckskalenhöhe ist, was wiederum eine hohe numerische Auflösung verlangt. Bei sehr dicken Flussröhren ist die erforderliche Verdrillung so groß, dass auch die Dynamik der aufsteigenden Flussröhre beeinflusst wird.

Die Probleme mit der unzureichenden numerischen Auflösung legen die Verwendung der anelastischen Approximation nahe, die gegenüber den jetzigen, voll kompressiblen Rechnungen einen Geschwindigkeitsgewinn um mindestens einen Faktor 10 erlaubt. Ohne Verlust an Rechengeschwindigkeit wäre dann auch der Übergang zu größeren Werten von β möglich.

Kapitel 6

Schlussfolgerungen

In dieser Arbeit wurden zwei im Rahmen der solaren Dynamotheorie wichtige Fragestellungen behandelt, welche einerseits die Struktur und andererseits die Verstärkung des Magnetfeldes in der solaren Overshoot-Region betreffen.

Dabei stellte sich heraus, dass die radiative Heizung am Boden der Konvektionszone einen stark unterschiedlichen Einfluss hat, je nachdem ob der magnetische Fluss in Form einzelner magnetischer Flussröhren oder in Form einer magnetischen Schicht vorliegt. Während Flussröhren durch die Heizung aus der Overshoot-Region herausgetrieben werden, führt die Rückwirkung des Magnetfeldes auf die Konvektion im Fall einer magnetischen Schicht zu einer weitgehenden Kompensation des Einflusses der radiativen Heizung. Insofern ist eher von der Speicherung magnetischen Flusses in Form einer magnetischen Schicht als von der Speicherung in Form einzelner magnetischer Flussröhren auszugehen, es sei denn, die Superadiabatizität der Overshoot-Region erfüllt $\delta \lesssim -10^{-4}$. Weil das mechanische Gleichgewicht einer magnetischen Schicht in der Overshoot-Region die gleichen Eigenschaften besitzt wie das Gleichgewicht einzelner Flussröhren, führt die Speicherung in Form einer magnetischen Schicht zu keinen signifikanten Modifikationen der Rechnungen aufsteigender magnetischer Flussröhren. Flussröhren, die sich aus einer Fragmentation der Schicht ergeben und anschließend in der Konvektionszone aufsteigen, haben die gleichen Eigenschaften wie Flussröhren, die von Anfang an in Form einzelner Flussröhren gespeichert waren.

Die Verstärkung von magnetischen Feld am Boden der Konvektionszone auf 10 T kann mit Hilfe der Explosion magnetischer Flussröhren innerhalb von 6 Monaten erfolgen. Die dafür erforderliche Energie stammt aus der potentiellen Energie der superadiabatischen Schichtung der solaren Konvektionszone. Damit lassen sich die Probleme mit der unzureichenden kinetischen Energie (Konvektion, differentielle Rotation) für die Feldverstärkung umgehen.

Anhang A

Polytrope Schichtung

Für die verschiedenen analytischen als auch numerischen Rechnungen in dieser Arbeit werden hydrostatische Schichtungen benötigt. Weil die Masse, die sich in den äußeren Schichten der Sonne befindet, nur einen kleinen Bruchteil der solaren Gesamtmasse ausmacht (die Konvektionszone beinhaltet ca. 2.5% der Sonnenmasse), genügt es, das folgende Gleichungssystem zu lösen:

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dr} &= -\varrho(r)g(r) \\ \frac{d \ln p}{d \ln \varrho} &= \Gamma(r) \\ g(r) &= g_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^\sigma\end{aligned}\tag{A.1}$$

zusammen mit den Anfangsbedingungen $p(r_0) = p_0$ und $\varrho(r_0) = \varrho_0$. Für den Boden der Konvektionszone ist $\sigma \approx -1.9$ eine gute Approximation. Über die vorzuschreibende Funktion $\Gamma(r)$ kann ein beliebiger Verlauf der Superadiabatizität δ berücksichtigt werden.

Im Spezialfall $\Gamma = \text{const.}$ kann das Gleichungssystem Gl. (A.1) analytisch gelöst werden:

$$\begin{aligned}T(r) &= T_0 \left[1 - \frac{\nabla r_0}{H_{p0}(1+\sigma)} \left(\left(\frac{r}{r_0}\right)^{1+\sigma} - 1 \right) \right] \\ p(r) &= p_0 \left[1 - \frac{\nabla r_0}{H_{p0}(1+\sigma)} \left(\left(\frac{r}{r_0}\right)^{1+\sigma} - 1 \right) \right]^{\Gamma/(\Gamma-1)} \\ \varrho(r) &= \varrho_0 \left[1 - \frac{\nabla r_0}{H_{p0}(1+\sigma)} \left(\left(\frac{r}{r_0}\right)^{1+\sigma} - 1 \right) \right]^{1/(\Gamma-1)},\end{aligned}\tag{A.2}$$

mit $\nabla = (\Gamma - 1)/\Gamma$ und $H_{p0} = p_0/(\varrho_0 g_0)$. Typische Werte für die solare Konvektionszone sind:

$$r_0 = 5 \cdot 10^8 \text{ m}\tag{A.3}$$

$$\begin{aligned}g_0 &= 500 \text{ m s}^{-2} \\p_0 &= 6 \cdot 10^{12} \text{ Pa} \\ \varrho_0 &= 200 \text{ Kg m}^{-3}\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}T_0 &= 2.2 \cdot 10^6 \text{ K} \\H_{p0} &= 6 \cdot 10^7 \text{ m}\end{aligned}\tag{A.4}$$

Aus Eq. (A.2) ergibt sich der Temperaturgradient zu:

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{\nabla T_0}{H_{p0}} \left(\frac{r}{r_0}\right)^\sigma\tag{A.5}$$

Anhang B

Thermische Schatten

Befindet sich eine magnetische Flussröhre in einem konvektiv durchmischtem Medium, so bilden sich in der Umgebung der Flussröhre thermischen Schatten aus, die den konvektiven Energiefluss um die Flussröhre herumleiten. Unter der Annahme konstanter thermischer Diffusivitäten und eines konstanten adiabatischen Temperaturgradienten (nach Gl. (A.5) entspricht dies einem konstanten g) lässt sich dieses Problem für eine zylindrische Flussröhre analytisch lösen (Verwendung von Zylinderkoordinaten r, ϕ). Der Gesamtenergiestrom ist gegeben durch (vgl. Gl. (3.1))

$$\vec{F} = -\kappa_r \text{grad } T - \kappa_c (\text{grad } T - \text{grad } T|_{\text{ad}}) . \quad (\text{B.1})$$

mit $\kappa_c = 0$ für $r < R$, wobei R der Flussröhrenradius ist. Für die stationäre Lösung gilt $\text{div} \vec{F} = 0$, womit für das Temperaturfeld sowohl für $r < R$ als auch $r > R$ die Laplace-Gleichung $\Delta T = 0$ gilt. Bei $r = R$ müssen die Temperatur und die normale Komponente des Energieflusses stetig sein:

$$T_i(R) = T_e(R) \quad (\text{B.2})$$

$$\vec{F}_i(R) \cdot \vec{e}_r = \vec{F}_e(R) \cdot \vec{e}_r . \quad (\text{B.3})$$

Die Lösungen haben in Zylinderkoordinaten die Form:

$$T_i(r) = T_{i0} + a_i r \cos \phi \quad (\text{B.4})$$

$$T_e(r) = T_{e0} + \left(a_e r + \frac{b_e}{r} \right) \cos \phi , \quad (\text{B.5})$$

Die Anschlussbedingungen bei $r = R$ liefern für die Koeffizienten das Gleichungssystem:

$$T_{i0} = T_{e0} \quad (\text{B.6})$$

$$a_e + \frac{b_e}{R^2} = a_i \quad (\text{B.7})$$

$$a_e - \frac{b_e}{R^2} = \frac{\kappa_r}{\kappa_r + \kappa_c} a_i + \frac{\kappa_c}{\kappa_r + \kappa_c} \left(\frac{dT}{dz} \right)_{\text{ad}} . \quad (\text{B.8})$$

Dabei wurde verwendet, dass der adiabatische Temperaturgradient nur eine z -Komponente besitzt. a_e ist der Gradient der ungestörten externen Temperatur T_e ,

der sich asymptotisch für $r \gg R$ ergibt. Dieser lässt sich mit Hilfe des adiabatischen Temperaturgradienten und der Superadiabatizität ausdrücken. Gleichung (A.5) liefert

$$a_e = -\frac{T_0}{H_p} \nabla = -\frac{T_0}{H_p} (\nabla_{\text{ad}} + \delta) = \left(\frac{dT}{dz} \right)_{\text{ad}} - \frac{T_0}{H_p} \delta. \quad (\text{B.9})$$

Für die Koeffizienten a_i , a_e und b_e folgt damit

$$a_i = a_e - \frac{\kappa_c}{2\kappa_r + \kappa_c} \frac{T_0}{H_p} \delta \quad (\text{B.10})$$

$$b_e = -\frac{\kappa_c}{2\kappa_r + \kappa_c} \frac{T_0}{H_p} \delta R^2. \quad (\text{B.11})$$

Im Grenzfall $\kappa_c \gg \kappa_r$ ergibt sich die Lösung:

$$T_i(r) = T_0 + \left[a_e - \frac{T_0}{H_p} \delta \right] r \cos \phi \quad (\text{B.12})$$

$$T_e(r) = T_0 + a_e r \cos \phi - \underbrace{\frac{T_0}{H_p} \delta \frac{R^2}{r} \cos \phi}_{\text{thermischer Schatten}}. \quad (\text{B.13})$$

Einsetzen typischer Werte liefert für den thermischen Schatten einer Flussröhre in der Overshoot-Region:

$$\delta T_e = -0.04 \left[\frac{\delta}{10^{-6}} \right] \left[\frac{R}{10^6 \text{ m}} \right] \text{ K}. \quad (\text{B.14})$$

Das Vorzeichen der thermischen Schatten ist abhängig vom Vorzeichen von δ , weil sich die Richtung des konvektiven Energieflusses ebenfalls an δ orientiert. Im Fall einer subadiabatischen Schichtung ergibt sich unter der Flussröhre eine Abkühlung und oberhalb der Flussröhre eine Erwärmung.

Anhang C

MHD-Gleichungen

Für die in Kapitel 4 und Kapitel 5 durchgeführten numerischen Simulationen werden die MHD-Gleichungen verwendet. Die konservative Standardform der idealen MHD-Gleichungen lautet (die Einheiten von B sind so gewählt, dass $\mu_0 = 1$ gilt):

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \vec{v}) = 0 \quad (\text{C.1})$$

$$\frac{\partial \varrho \vec{v}}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \vec{v} \otimes \vec{v} + \mathbf{I} p_{\text{tot}} - \vec{B} \otimes \vec{B}) = \varrho \vec{g} \quad (\text{C.2})$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div}((E + p_{\text{tot}})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{B})\vec{B}) = \varrho \vec{v} \cdot \vec{g} \quad (\text{C.3})$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{B} \otimes \vec{v} - \vec{v} \otimes \vec{B}) = 0, \quad (\text{C.4})$$

dabei ist \mathbf{I} die Einheitsmatrix und $p_{\text{tot}} = p + \frac{1}{2}B^2$ der totale Druck. Die Divergenz der Tensoren ist in kartesischer Geometrie zu verstehen als:

$$\left[\operatorname{div}(\vec{a} \otimes \vec{b}) \right]_i = \frac{\partial}{\partial x_k} (a_i b_k). \quad (\text{C.5})$$

Das Gleichungssystem wird geschlossen durch die Beziehung zwischen Gesamtenergie E und Gasdruck p :

$$E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\varrho v^2 + \frac{1}{2}B^2. \quad (\text{C.6})$$

In Kapitel 4 werden die axialsymmetrischen MHD-Gleichungen in Kugelgeometrie für ein rein toroidales Magnetfeld verwendet. Zusätzlich werden die dort erklärten Modifikationen (Abzug der hydrostatischen Hintergrundströmung und Verwendung der Entropiegleichung) berücksichtigt. Im Folgenden bezeichnen p_0 und ϱ_0 die Werte der hydrostatischen Hintergrundströmung und $m_{\varphi 0} = \varrho_0 \Omega_0 r \sin \theta$ den zu der starren Hintergrundrotation gehörenden Massenfluss. Die MHD-Gleichungen werden geschrieben als Funktion der Dichtestörung ϱ_1 , der meridionalen Massenflüsse m_r , m_θ , der Störung des toroidalen Massenflusses $m_{\varphi 1}$, der Entropiestörung $\Sigma = \varrho s_1$ und des toroidalen Magnetfeldes B . Das zu lösende Gleichungssystem lautet mit $\varrho = \varrho_0 + \varrho_1$ und $m_\varphi = m_{\varphi 0} + m_{\varphi 1}$:

$$\frac{\partial \varrho_1}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 m_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta m_\theta) = 0 \quad (\text{C.7})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_r}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{m_r^2}{\varrho} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{m_\theta m_r}{\varrho} \right) = \\ - \frac{\partial p_{\text{tot}1}}{\partial r} + \frac{m_\theta^2}{\varrho r} - \frac{B^2}{r} + \left(\frac{m_\varphi^2}{\varrho r} - \frac{m_{\varphi 0}^2}{\varrho_0 r} \right) + \varrho_1 g_r \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_\theta}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{m_r m_\theta}{\varrho} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{m_\theta^2}{\varrho} \right) = \\ - \frac{1}{r} \frac{\partial p_{\text{tot}1}}{\partial \theta} - \frac{m_\theta m_r}{\varrho r} + \left(\frac{m_\varphi^2}{\varrho r} - \frac{m_{\varphi 0}^2}{\varrho_0 r} \right) \cot \theta - \frac{B^2}{r} \cot \theta \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_\varphi}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{m_r m_\varphi}{\varrho} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{m_\theta m_\varphi}{\varrho} \right) = \\ - \frac{m_\varphi m_r}{\varrho r} - \frac{m_\theta m_\varphi}{\varrho r} \cot \theta \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{m_r}{\varrho} \Sigma \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{m_\theta}{\varrho} \Sigma \right) = m_r \frac{c_p \delta}{H_p} \quad (\text{C.11})$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{m_r}{\varrho} B \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{m_\theta}{\varrho} B \right) = 0 \quad (\text{C.12})$$

mit dem totalen Druck:

$$p_{\text{tot}1} = p_1 + \frac{1}{2} B^2 = p_0 \left[\exp \left(\frac{\Sigma}{\varrho c_v} \right) \left(1 + \frac{\varrho_1}{\varrho_0} \right)^\gamma - 1 \right] + \frac{1}{2} B^2 . \quad (\text{C.13})$$

Anhang D

Finite-Volumen-Verfahren

Die MHD-Gleichungen werden mit Hilfe eines Finite-Volumen-Verfahrens gelöst, welches die konservative Form dieser Gleichungen ausnutzt. Für eine eindimensionale Erhaltungsgleichung der Form

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F(u(x, t)) = S(x, u, t) \quad (\text{D.1})$$

mit der konservativen Variablen u , dem Fluss $F(u)$ und dem Quellterm S lässt sich in einem diskretisierten Rechengebiet $\{x_i\}$ (hier mit äquidistantem Abstand Δx) eine diskrete Lösung $\{u_i^n\}$ definieren:

$$u_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x-\Delta x/2}^{x+\Delta x/2} u(x, t_n) dx . \quad (\text{D.2})$$

Die räumliche Diskretisierung der Erhaltungsgleichung erfolgt über den Gaußschen Integralsatz, die zeitliche über einen einfachen Eulerschritt:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [F(u(x + \Delta x/2, t_n)) - F(u(x - \Delta x/2, t_n))] + \Delta t S(x_i, u_i^n, t_n) \quad (\text{D.3})$$

Zur Berechnung des jeweils nächsten Zeitschritts werden die Flüsse auf den Zellgrenzen benötigt, wozu wiederum die konservative Variable auf den Zellgrenzen erforderlich ist. Diese muss durch eine geeignete Interpolation aus den Werten in den jeweiligen benachbarten Zellen bestimmt werden, wobei neben der Konsistenz mit der zugrundeliegenden Differentialgleichung auch die numerische Stabilität des Verfahrens beachtet werden muss. Dies führt auf den numerischen Fluss g an den Zellgrenzen:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [g(u_i^n, u_{i+1}^n) - g(u_{i-1}^n, u_i^n)] + \Delta t S(x_i, u_i^n, t_n) \quad (\text{D.4})$$

Der Zeitschritt des expliziten Verfahrens ist durch die CFL- Bedingung begrenzt, d.h.

$$\Delta t < \frac{\Delta x}{c_{\max}}, \quad (\text{D.5})$$

wobei c_{\max} die maximale charakteristische Geschwindigkeit des Problems ist. Ein numerisches Verfahren dieser Form wird allgemein als ein Finite-Volumen-Verfahren bezeichnet. Spezielle Verfahren ergeben sich aus der Art und Weise, wie der numerische Fluss g an den Zellgrenzen berechnet wird. Diese allgemeine Form des Verfahrens stellt sicher, dass die konservative Eigenschaft der Gl. (D.1) auch auf die diskrete Lösung übertragen wird. Obwohl in Gl. (D.4) nur ein Eulerschritt für die Zeitdiskretisierung verwendet wurde, lassen sich bei geeigneter Wahl von g auch Verfahren höherer Zeitordnung in dieser Form schreiben. Dies soll anhand des in Kapitel 4 verwendeten MacCormack-Verfahrens gezeigt werden, welches von 2. Ordnung in Orts- und Zeitkoordinate ist. Das MacCormack-Verfahren für die Gl. (D.1) ist definiert durch (hier wird nur der Fluss behandelt, der Quellterm folgt separat):

$$u_i^* = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [F(u_{i+1}^n) - F(u_i^n)] \quad (\text{D.6})$$

$$u_i^{**} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [F(u_i^*) - F(u_{i-1}^*)] \quad (\text{D.7})$$

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2} (u_i^* + u_i^{**}) \quad (\text{D.8})$$

Mit der Definition:

$$g(u_i^n, u_{i+1}^n) = \frac{1}{2} [F(u_i^*(u_i^n, u_{i+1}^n)) + F(u_{i+1}^n)] \quad (\text{D.9})$$

ergibt sich die Form wie in Gl. (D.4). Bei der Addition des Quellterms ist zu beachten, dass er ebenfalls 2. Ordnung diskretisiert werden muss, um insgesamt ein Verfahren 2. Ordnung zu erhalten. Beim MacCormack-Verfahren wird die Reihenfolge der rechtsseitigen und linksseitigen Differenz nach jedem Zeitschritt umgekehrt.

Bei mehrdimensionalen Simulationen werden die numerischen Flüsse der unterschiedlichen Raumdimensionen nacheinander addiert, wodurch das mehrdimensionale Problem wieder auf den eindimensionalen Fall reduziert wird.

Literaturverzeichnis

- Acheson D.J., 1979, Instability by magnetic buoyancy, *Sol. Phys.* 62, 23
- Brandenburg A., Schmitt D., 1998, Simulations of an alpha-effect due to magnetic buoyancy, *A&A* 338, L55
- Caligari P., Moreno-Insertis F., Schüssler M., 1995, Emerging flux tubes in the solar convection zone i.: Asymmetry, tilt and emergence latitude, *ApJ* 441, 886
- Caligari P., Moreno-Insertis F., Schüssler M., 1998, Emerging flux tubes in the solar convection zone ii. the influence of initial conditions, *ApJ* 502, 481
- Charbonneau P., Christensen-Dalsgaard J., Henning R., et al., 1999, Helioseismic constraints on the structure of the solar tachocline, *ApJ* 527, 445
- Choudhuri A.R., 1989, The evolution of loop structures in flux rings within the solar convection zone, *Sol. Phys.* 123, 217
- Choudhuri A.R., Gilman P.A., 1987, The influence of the coriolis force on flux tubes rising through the solar convection zone, *ApJ* 316, 788
- Choudhuri A.R., Schüssler M., Dikpati M., 1995, The solar dynamo with meridional circulation, *A&A* 303, L29
- Christensen-Dalsgaard J., Monteiro M.J.P.F.G., Thompson M.J., 1995, Helioseismic estimation of convective overshoot in the sun, *Mon. Not. Royal Astron. Soc.* 276, 283
- Deinzer W., Stix M., 1971, On the eigenvalues of krause-steenbeck's solar dynamo, *A&A* 12, 111
- Dikpati M., Charbonneau P., 1999, A babcock-leighton flux transport dynamo with solar-like differential rotation, *ApJ* 518, 508
- Dorch S.B.F., Nordlund A., 1998, Numerical 3d simulations of buoyant magnetic flux tubes, *A&A* 338, 329
- D'Silva S., Choudhuri A.R., 1993, A theoretical model for tilts of bipolar magnetic regions, *A&A* 272, 621

- Durney B.R., 1995, On a babcock-leighton dynamo model with a deep-seated generating layer for the toroidal magnetic field, *Sol. Phys.* 160, 213
- Duvall T.L.J., Harvey J.W., Pomerantz M.A., 1986, Latitude and depth variation of solar rotation, *Nature* 321, 500
- Emonet T., Moreno-Insertis F., 1998, The physics of twisted magnetic tubes rising in a stratified medium: Two-dimensional results, *ApJ* 492, 804
- Fan Y., 2001, Nonlinear growth of the three-dimensional undular instability of a horizontal magnetic layer and the formation of arching flux tubes, *ApJ* 546, 509
- Fan Y., Fisher G.H., 1996, Radiative heating and the buoyant rise of magnetic flux tubes in the solar interior, *Sol. Phys.* 166, 17
- Fan Y., Fisher G.H., DeLuca E.E., 1993, The origin of morphological asymmetries in bipolar active regions, *ApJ* 405, 390
- Ferriz-Mas A., Schmitt D., Schüssler M., 1994, A dynamo effect due to instability of magnetic flux tubes, *A&A* 289, 949
- Ferriz-Mas A., Schüssler M., 1993, Instabilities of magnetic flux tubes in a stellar convection zone i. equatorial flux rings in differentially rotating stars, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* 72, 209
- Ferriz-Mas A., Schüssler M., 1995, Instabilities of magnetic flux tubes in a stellar convection zone ii. flux rings outside the equatorial plane, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* 81, 233
- Fröhlich C., 2000, Observations of irradiance variations, *Space Science Reviews* 94, 15
- Galloway D.J., Weiss N.O., 1981, Convection and magnetic fields in stars, *ApJ* 243, 945
- Gilman P.A., Fox P.A., 1997, Joint instability of latitudinal differential rotation and toroidal magnetic fields below the solar convection zone, *ApJ* 484, 439
- Hale G.E., Ellerman F., Nicholson S.B., Joy A.H., 1919, The magnetic polarity of sun-spots, *ApJ* 49, 153
- Howe R., Christensen-Dalsgaard J., Hill F., et al., 2000, Dynamic variations at the base of the solar convection zone, *Science* 287, 2456
- Hughes D.W., 1985, Magnetic buoyancy instabilities for a static plane layer, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* 32, 273
- Hughes D.W., Cattaneo F., 1987, A new look at the instability of a stratified horizontal magnetic field, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* 39, 65

- Kippenhahn R., Weigert A., 1994, *Stellar Structure and Evolution*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
- Köhler H., 1973, The solar dynamo and estimate of the magnetic diffusivity and the α -effect, *A&A* 25, 467
- Kosovichev A.G., 1996, Helioseismic constraints on the gradient of angular velocity at the base of the solar convection zone, *ApJL* 469, L61
- Lantz S.R., Fan Y., 1999, Anelastic magnetohydrodynamic equations for modeling solar and stellar convection zones, *ApJS* 121, 247
- Leighton R.B., 1969, A magneto-kinematic model of the solar cycle, *ApJ* 156, 1
- MacGregor K.B., Charbonneau P., 1997, Solar interface dynamos. i. linear, kinematic models in cartesian geometry, *ApJ* 486, 484
- Matthews P.C., Hughes D.W., Proctor M.R.E., 1995, Magnetic buoyancy, vorticity, and three-dimensional flux-tube formation, *ApJ* 448, 938
- Maunder E.W., 1922, The sun and sun-spots, 1820-1920, *Mon. Not. Royal Astron. Soc.* 82, 534
- Moffatt H.K., 1978, *Magnetic field generation in electrically conducting fluids*, Cambridge University Press
- Moreno-Insertis F., 1983, Rise times of horizontal magnetic flux tubes in the convection zone of the sun, *A&A* 122, 241
- Moreno-Insertis F., 1992, The motion of magnetic flux tubes in the convection zone and the subsurface origin of active regions, in *NATO ASIC Proc. 375: Sunspots. Theory and Observations*, 385–410
- Moreno-Insertis F., Caligari P., Schüssler M., 1995, “explosion” and intensification of magnetic flux tubes, *ApJ* 452, 894
- Moreno-Insertis F., Schüssler M., Ferriz-Mas A., 1992, Storage of magnetic flux tubes in a convective overshoot region, *A&A* 264, 686
- Parker E.N., 1993, A solar dynamo surface wave at the interface between convection and nonuniform rotation, *ApJ* 408, 707
- Proctor M.R.E., Weiss N.O., 1982, Magnetoconvection, *Rep. Prog. Phys.* 45, 1317
- Rüdiger G., von Rekowski B., Donahue R.A., Baliunas S.L., 1998, Differential rotation and meridional flow for fast-rotating solar-type stars, *ApJ* 494, 691
- Schlichenmaier R., Stix M., 1995, The phase of the radial mean field in the solar dynamo., *A&A* 302, 264

- Schou J., Antia H.M., Basu S., et al., 1998, Helioseismic studies of differential rotation in the solar envelope by the solar oscillations investigation using the michelson doppler imager, *ApJ* 505, 390
- Schüssler M., 1979, Magnetic buoyancy revisited - analytical and numerical results for rising flux tubes, *A&A* 71, 79
- Schüssler M., Caligari P., Ferriz-Mas A., Moreno-Insertis F., 1994, Instability and eruption of magnetic flux tubes in the solar convection zone, *A&A* 281, L69
- Shaviv G., Salpeter E.E., 1973, Convective overshooting in stellar interior models, *ApJ* 184, 191
- Skaley D., Stix M., 1991, The overshoot layer at the base of the solar convection zone, *A&A* 241, 227
- Spruit H.C., 1977, Heat flow near obstacles in the solar convection zone, *Sol. Phys.* 55, 3
- Spruit H.C., 1981, Equations for thin flux tubes in ideal mhd, *A&A* 102, 129
- Spruit H.C., van Ballegoijen A.A., 1982, Stability of toroidal flux tubes in stars, *A&A* 106, 58
- Steenbeck M., Krause F., 1969, Zur Dynamotheorie stellarer und planetarer Magnetfelder I. Berechnung sonnenähnlicher Wechselfeldgeneratoren, *Astron. Nachr.* 291, 49
- Thelen J., 2000a, A mean electromotive force induced by magnetic buoyancy instabilities, *Mon. Not. Royal Astron. Soc.* 315, 155
- Thelen J., 2000b, Non-linear α - ω -dynamoes driven by magnetic buoyancy, *Mon. Not. Royal Astron. Soc.* 315, 165
- Tobias S.M., Brummell N.H., Clune T.L., Toomre J., 1998, Pumping of magnetic fields by turbulent penetrative convection, *ApJL* 502, L177
- Tóth G., 1996, General code for modeling mhd flows on parallel computers: Versatile advection code, *Astrophys. Lett. Commun.* 34, 245
- Wang Y.M., Sheeley N.R., 1991, Magnetic flux transport and the sun's dipole moment - new twists to the babcock-leighton model, *ApJ* 375, 761

Danksagung

Mein Dank gilt:

- Herrn Prof. M. Schüssler und Herrn Prof. W. Deinzer für die Betreuung der Arbeit und die zahlreichen Diskussionen über die Ergebnisse
- Den Direktoren und Mitarbeitern des Kiepenheuer-Institutes für Sonnenphysik in Freiburg und des Max-Planck-Institutes für Aeronomie in Katlenburg-Lindau für die Unterstützung bei der Anfertigung dieser Arbeit
- Herrn G. Tóth und Herrn R. Keppens für die Bereitstellung des Versatile Advection Codes
- Der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die finanzielle Unterstützung dieser Arbeit
- Der Gesellschaft für wissenschaftliche Datenverarbeitung mbH Göttingen für die Möglichkeit der Benutzung des Parallelrechners IBM RS6000/SP
- Der Studienstiftung des deutschen Volkes für die finanzielle und ideelle Förderung meines Physikstudiums
- Meinen Eltern für die Ermöglichung des Physikstudiums
- Den Mitarbeitern der Arbeitsgruppe „10 : 23 Uhr“ (Kaffeerunde) für die vielen erhellenden Diskussionen über physikalische und nicht-physikalische Themen.

Lebenslauf

- Geburt: Am 26.05.1973 in Osterode am Harz
- Eltern: Dieter Rempel, Dipl.-Ing. (Maschinenbau)
Ursula Rempel, geb. Denecke, Lehrerin
- Schulbildung: 8/79 bis 7/83 Grundschule Wieda
8/83 bis 6/92 Internatsgymnasium Pädagogium
Bad Sachsa
davon
8/90 bis 6/92 Gymnasiale Oberstufe mit den Leistungskursen
Physik und Mathematik
5/92 Abitur
- Bundeswehr: 7/92 bis 6/93 Grundwehrdienst
- Studium: 10/93 bis 2/98 Physikstudium an der Georg-August-Universität
Göttingen
6/95 Vordiplomprüfung
3/97 bis 12/97 Diplomarbeit:
„Stabilitätsanalyse von Flussröhrenmodellen für
ruhende Protuberanzen“
2/98 Diplomprüfung
3/98 bis 6/01 Doktorarbeit
Während dieser Zeit Tätigkeit als wissenschaft-
licher Mitarbeiter am Kiepenheuer-Institut für
Sonnenphysik in Freiburg und am Max-Planck-
Institut für Aeronomie in Katlenburg-Lindau