

Zeitlich modulierte Statistik der periodisch gestörten turbulenten Kanalströmung

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultäten
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von

Michael Hartmann
aus
Rüthen

Göttingen 2001

D7

Referent:

Prof. Dr. Dirk Ronneberger

Korreferent:

Prof. Dr. Helmut Eckelmann

Tag der mündlichen Prüfung: 09.08.2001

Kurzfassung

Die turbulente Kanalströmung wird, durch periodische Variation der Wandgeschwindigkeiten oder der treibenden Kraft, einer zeitlichen Veränderung der Randbedingungen ausgesetzt. Die zeitabhängigen Antworten verschiedener Strukturparameter – modulierte Statistik – werden mittels einer direkten numerischen Simulation hinsichtlich der Frage untersucht, ob die Turbulenz als Zusammenspiel wechselwirkender Strukturen verstanden werden kann. Statistische Größen die stabil auf die schwache äußere Störung reagieren, werden als Eigenschaften von solchen Strukturen angesehen, die, falls sie sich als selbstkonsistent erweisen, als Grundbausteine der Turbulenz verwendet werden könnten. Insbesondere könnten in zukünftigen Arbeiten die Invarianten der Strömung (stabile Eigenschaften bzw. Strukturen) als Grundlage eines Turbulenzmodells verwendet werden, das auch in zeitabhängigen Strömungen zuverlässige Voraussagen liefert, oder es könnten zunächst die Annahmen vorhandener Turbulenzmodelle – die bei instationären Strömungen in der Regel versagen – dahingehend überprüft werden, ob sie sich als konsistent mit den hier untersuchten Reaktionen der Strömung erweisen.

Untersucht wurden die zeitlichen Modulationen, mit der die räumliche Turbulenzstruktur auf die Variation der Randbedingungen antwortet. Einige Vergleiche wurden mit vorhandenen experimentellen Daten durchgeführt, jedenfalls dort, wo solche Vergleiche möglich waren. Die Homogenität der wandparallelen Ebenen legte es nahe, die räumliche Struktur des Strömungsfeldes durch räumliche Korrelationen bzw. Leistungsspektren zu erforschen, wobei, aufgrund fehlender Phaseninformationen, keine »echten« Strömungsstrukturen erfasst werden. Jedoch können damit phänomenologische Modellvorstellungen/-annahmen leicht verifiziert werden. Neben den Modulationen der Korrelationen und Spektren wurden auch Modulationen von Amplitudenverteilungen diverser Strömungsparameter ausgewertet, insbesondere die der drei Geschwindigkeitskomponenten.

Bei kleinen und moderaten Anregungsamplituden blieben alle langzeitgemittelten statistischen Eigenschaften der Turbulenz praktisch unbeeinflusst. Bei höheren Amplituden wurde in Abhängigkeit der Modulationsfrequenz eine Erhöhung oder auch eine Absenkung des Strömungswiderstandes beobachtet. Für die stationäre und die langzeitgemittelten instationären Strömungen zeigte sich, dass bestimmte Wellenzahlbereiche der gleichzeitig axial- und spannweitig aufgelösten turbulenten Schubspannung zu einer negativen Produktion von turbulenter kinetischer Energie führt, also zu einem Energiefluss von der Turbulenz zurück in die mittlere Strömung.

Vielfach hat sich gezeigt, dass die spektral nach Raumfrequenzen aufgelösten Modulationen von turbulenten Schwankungsbewegungen wesentlich höhere Modulationsfaktoren hervorbringen, als etwa die Modulation der Gesamtleistung. Bei hohen Frequenzen werden die Spektren überproportional stark moduliert. Die spannweitige Struktur der Strömung wird dabei meist einheitlich und weit weniger beeinflusst als die axiale. Räumliche Kohärenzen sind vergleichsweise stabil. Die modulierten Histogramme der Schwankungsamplituden weisen darauf hin, dass auch die Form der Amplitudenverteilungen zu den stabileren Eigenschaften der Strömung gezählt werden kann. Verglichen mit der Gesamtleistung (zweites Moment) ändern sich die höheren Momente der Verteilungen nur wenig.

Mit der Auswertung des Übertragungsfaktors zwischen der modulierten Scherrate und der modulierten turbulenten Schubspannung konnte ein direkter Nachweis dafür erbracht werden, dass das turbulente Strömungsfeld *viskoelastisch* auf schnelle zeitliche Änderungen reagiert.

Für die Dynamik der wandnahen Turbulenz zeigte sich in vielerlei Hinsicht eine besondere Bedeutung für den Wandabstandsbereich von etwa 25 bis 30 viskosen Einheiten. Unter anderem findet man hier oft minimale Antwortzeiten. Bei hohen Anregungsfrequenzen wurden vor allem im wandnahen Bereich und insbesondere für die turbulente Schubspannung Resonanzeffekte beobachtet.

Inhaltsübersicht

Kurzfassung	III
Inhaltsübersicht	V
Bezeichnungen	IX
1 Einleitung	1
1.1 Motivation	1
1.2 Stand der Forschung	2
1.2.1 Ausgewählte Aspekte turbulenter, wandbegrenzter Strömungen	2
1.2.2 Turbulente Wandströmungen mit zeitabhängigen Randbedingungen	4
1.3 Zielsetzung und Übersicht	7
1.3.1 Kanalströmung mit instationären Randbedingungen	8
1.3.2 Details der äußeren Störung	8
1.4 Aufbau der Arbeit	9
2 Das numerische Verfahren	11
2.1 Zeitlich variierende Randbedingungen	12
2.2 Zeitliche Diskretisierung und Projektionsmethode	13
2.2.1 Implizit nur in Wandnormalenrichtung	15
2.2.2 Pseudodruck	15
2.3 Anmerkungen zur semi-impliziten Zeitdiskretisierung und zur Projektionsmethode im Allgemeinen	15
2.4 Räumliche Diskretisierung	16
2.4.1 Das räumliche Gitter	17
2.4.2 Die Randzellen	18
2.4.3 Räumliches Differenzieren mit der »Upwind«-Methode	18
2.4.4 Diskrete Operatoren	20
2.5 Direkter spektraler Löser für die Poissongleichung	20
2.6 Randbedingungen	22
2.7 Parallelisierung und Schlussbemerkung	22
2.8 Anwachsrate kleiner Störungen	24
3 Daten und Parameter der numerischen Experimente	27
3.1 Numerische Experimente	27
3.2 Experimentelle Vergleichsdaten	29
3.3 Numerische Vergleichsdaten	31
4 Physikalische Grundlagen und Details der Auswertung	33
4.1 Turbulente Kanalströmung	33

4.2	Reynolds Gleichungen	35
4.3	Kinetische Energie und Energiehaushalt	36
4.4	Mikroskala	37
4.5	Blasius Gesetz	37
4.6	Strömung zwischen oszillierenden ebenen Wänden	38
4.7	Einschwingvorgang	39
4.8	Modulationsfaktoren	40
4.9	Modulationsfaktoren in der Simulation	42
4.10	Wandschubspannungsimpedanz	43
5	Langzeitstatistik der stationären und instationären Kanalströmung	47
5.1	Geschwindigkeitsprofil	48
5.1.1	Wandschubspannungsgeschwindigkeit	49
5.1.2	Amplitudenabhängigkeiten	49
5.2	Konvektionsgeschwindigkeit	51
5.3	Turbulente Schubspannung	54
5.4	Korrelationskoeffizienten	55
5.5	Effektivwerte	56
5.5.1	Turbulenzgrad	59
5.5.2	Kinetische Energie	59
5.6	Skewness- und Flatnessfaktoren	60
5.7	Amplitudenverteilungen	61
5.7.1	Einfache Wahrscheinlichkeitsdichten	62
5.7.2	Mittlere Wahrscheinlichkeitsdichten im instationären Fall	66
5.7.3	Verbundwahrscheinlichkeitsdichte	66
5.8	Spektren und Korrelationen	70
5.8.1	Karhunen-Loève Zerlegung in der inhomogenen Richtung	71
5.8.2	Korrelationen in den homogenen Richtungen	73
5.9	Momentanbilder	81
6	Instationäre Kanalströmung	87
6.1	Ausbreitung der induzierten Störung	87
6.1.1	Orts- und Frequenzabhängigkeit der Reaktion	89
6.1.2	Impulsantwort der turbulenten Strömung	93
6.2	Modulierte Geschwindigkeitsschwankungen	93
6.2.1	Turbulente Schubspannung	94
6.2.2	Turbulente Normalspannungen	102
6.2.3	Einfluss der Wandamplitude	110
6.3	Scheinviskosität als Funktion der Frequenz	110
6.3.1	Phasendifferenz von Schubspannung und Scherrate	113
6.3.2	Viskoelastizität	114
6.3.3	Wirbelstreckung	116
6.4	Wandschubspannung	119
6.4.1	Modulierte Wandschubspannung	119
6.4.2	Modulierte Wandschubspannungsfuktuationen	119
6.5	Modulation von Amplitudenverteilungen	122
6.5.1	Phasenabhängige Amplitudenverteilungen der Geschwindigkeit	123

6.5.2	Modulationsfaktoren der Schwankungsamplituden	125
7	Spektren und Korrelationen	131
7.1	Vorbemerkungen	131
7.1.1	Spektrale Eigenschaften im realen Experiment	131
7.1.2	Dimension der Spektren	133
7.2	Eindimensionale Korrelationen und Spektren	133
7.2.1	Überblick über die Modulation der Spektren	141
7.2.2	Momente der Ortskurven	144
7.2.3	Systematische Analyse der modulierten Spektren	144
7.3	Zweidimensionale Korrelationen und Spektren	156
7.3.1	Gleichwerte	159
7.3.2	Modulation der zweidimensionalen Spektren	164
8	Zusammenfassung, Ergebnisse und Ausblick	171
8.1	Lineare Reaktion	171
8.2	Nichtlineare Effekte	172
8.3	Auswertung	172
8.4	Vergleich mit dem Experiment	173
8.5	Reaktionen bei hohen Modulationsfrequenzen	173
8.6	Reaktionen im Übergangsbereich	174
8.6.1	Besondere und unerwartete Effekte	175
8.6.2	Größen die kaum moduliert werden	176
8.6.3	Größen die deutlich moduliert werden	178
8.7	Negative Produktion	178
8.8	Schlussbemerkungen und Ausblick	179
A	Diskrete Operatoren	181
A.1	Divergenz \mathbf{D}	181
A.2	Gradient \mathbf{G}	181
A.3	Laplace \mathbf{L}	181
A.4	Divergenz \times Gradient $\mathcal{L} = \mathbf{DG}$	182
B	Phasenmittelung	183
C	Freiheitsgrade	185
D	Tabellen der Strömungsparameter	187
	Literaturverzeichnis	191
	Danksagung	197

Bezeichnungen

Physikalische Größen

\vec{f}	treibende Kraft der Grundströmung; $\vec{f} = (f_1, 0, 0)^T$
h	halbe Kanalhöhe
μ	dynamische Zähigkeit
ν	kinematische Zähigkeit; $\nu = \mu/\rho$
$p^{(\text{dyn})}$	dynamischer Druck
p	kinematischer Druck; $p = p^{(\text{dyn})}/\rho$
Re_{cl}	Mitten-Reynoldszahl; $Re_{cl} = u_{cl}h/\nu$
Re_Q	Durchfluss-Reynoldszahl; $Re_Q = u_{cl}^{\text{lam}}h/\nu$
Re_τ	Wand-Reynoldszahl; $Re_\tau = u_\tau h/\nu$
ρ	Dichte
t	Zeit
τ_w	Wandschubspannung; $\tau_w = \mu \left. \frac{d\bar{u}}{dy} \right _w$
u_τ	Wandschubspannungsgeschwindigkeit; $u_\tau = \sqrt{\tau_w/\rho}$
u_b	Durchflussgeschwindigkeit; $u_b = (2/3)u_{cl}^{\text{lam}}$
u_{cl}	Mittengeschwindigkeit
u_{cl}^{lam}	Mittengeschwindigkeit einer Poiseuille Strömung mit gleichem Durchfluss
\vec{u}	Geschwindigkeit; $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)^T = (u, v, w)^T$
\vec{x}	Ort; $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^T = (x, y, z)^T$

Mittelungsoperatoren

$\mathcal{E}[q]$	Erwartungswert bzw. Ensemblemittel
\bar{q}	Mittlung in der Zeit und in den homogenen Richtungen
$\langle q \rangle$	Phasenstarre Mittlung (immer auch in x, z gemittelt)

Modulation

l_s	Stokeslänge; $l_s = \sqrt{2\nu/\omega_w}$
$\langle q \rangle$	Phasenmittel
\tilde{q}	Wechselanteil; $\tilde{q} = \langle q \rangle - \bar{q}$
q'	turbulenter Anteil; $q' = q - \langle q \rangle$
\hat{q}	komplexe Ampiltude; $\tilde{q} = \hat{q} e^{i\omega_w t} + \text{ev. höhere Harmonische}$

$\hat{q}^{(n)}$	n 'te Harmonische vom Phasenmittel; $\hat{q} = \mathcal{E}[\langle q \rangle(t)e^{-in\omega_w t}]$
a_q	relative Amplitude; $a_q = \hat{q}/\bar{q}$
m_q	Modulationsfaktor; $m_q = a_q/a_{\tau_w} = \frac{\hat{q}}{\bar{q}}/\frac{\hat{\tau}_w}{\bar{\tau}_w}$
T_w	Periodendauer der Anregung
ω_w	Kreisfrequenz der Anregung; $\omega_w = 2\pi/T_w$
z_τ	Wandschubspannungsimpedanz; $z_\tau = -\hat{\tau}_w/\hat{u}_w$

Statistik

k_x, k_z	axiale- und spannweite Wellenzahl (Raumfrequenz)
ω	Zeitfrequenz
E	räumliches Leistungsdichtespektrum
S	zeitliches Leistungsdichtespektrum
Φ	räumlich-zeitliches Leistungsdichtespektrum
γ	Kohärenzfunktion
r_x, r_z	axiale- und spannweite Verschiebung
r_t	zeitliche Verschiebung
R	Korrelationsfunktion (räumlich und/oder zeitlich)
χ	Korrelationskoeffizient
pdf	Wahrscheinlichkeitsdichte

Mathematische Symbole und Operatoren

$\vec{\nabla}$	Nabla-Operator
Δ	Laplace-Operator
$\text{Re}\{q\}$	Realteil der Größe q
$\text{Im}\{q\}$	Imaginärteil der Größe q
i	Imaginäre Einheit ($i = \sqrt{-1}$)

Indizes, Akzente und Konventionen

1, 2, 3	Index der Stromab-, Wandnormalen- und Spannweitenrichtung
cl	Index für Kanalmitte-Größen
b	Index für volumetrische gemittelte Größen
w	Wandindex
q^+	mit Wandeneinheiten (ν und u_τ) entdimensionalisiert Größe q
q^T	Transponierte der Größe q
q^*	komplex konjugierte Größe q
\vec{q}	vektorwertige Größe
$\underline{\underline{\text{def}}}$	definiert als

Physikalische Dimensionen

Fast alle Größen (Gleichungen) können sowohl als dimensionslos als auch als dimensionsbehaftet betrachtet werden. Der Durchfluss Q der Strömungen wird konstant gehalten. Im dimensionslosen Fall denke man sich die Größen mit der halben Kanalhöhe h , der Mittengeschwindigkeit einer Poiseuille Strömung mit gleichem Durchfluss u_{cl}^{lam} , der dynamischen Zähigkeit μ und der Dichte ρ entdimensionalisiert. Im dimensionslosen Fall gilt damit $h = 1$, $u_b = 2/3$, $\rho = 1$ und $\mu = \nu = 1/Re_Q$. Möchte man die Gleichungen als dimensionsbehaftet betrachten, dann beachte man, dass in dieser Arbeit p immer den kinematischen Druck bezeichnet.

1 Einleitung

1.1 Motivation

Bereits turbulente Strömungen mit zeitlich stationären Randbedingungen sind in ihrer Erscheinungsform und inneren Dynamik so kompliziert, dass es – trotz intensiver Forschung – bisher nicht gelungen ist, allgemeingültige Modelle der Turbulenz aufzustellen. Zeitlich variierende Randbedingungen erschweren das Problem in der Regel zusätzlich, sodass es hierzu auch nur vergleichsweise wenige Untersuchungen gibt. Stört man aber eine zunächst im stationären Gleichgewicht befindliche Strömung, durch gezielte zeitliche Veränderung der Randbedingungen, so kann man unter Umständen sehr viel mehr Informationen über die Strömungsstrukturen und vor allem deren Wechselwirkungen erfahren, als es im rein stationären Fall möglich ist. Eigenschaften der Strömung, die sich als stabil gegenüber solchen Störungen erweisen, sind wahrscheinlich sehr viel besser als sogenannte Bausteine der Turbulenz geeignet, als Eigenschaften die sich nur im stationären Fall zeigen.

Auf einer sehr abstrakten Ebene ist die Navier-Stokes Gleichung eine solche Eigenschaft. Sie stellt zusammen mit der Kontinuitätsgleichung ein geschlossenes Gleichungssystem dar, das jede Strömung eines Kontinuums konstanter Dichte – insbesondere auch die turbulenten – in eindeutiger Weise beschreibt¹. Eine analytische Lösung des Gleichungssystems ist aber nur für wenige Spezialfälle und auch nur für den laminaren Fall bekannt. Daher sucht man nach weiteren (einfacheren) Beschreibungsmöglichkeiten, die für eine möglichst große Klasse von Strömungen zuverlässige Voraussagen ermöglichen. Die Hoffnung, weitere derartige Eigenschaften zu finden, beruht auf der Erfahrung, dass selbst turbulente Strömungen nicht vollkommen stochastisch ablaufen, sondern teils ausgeprägte Strukturen aufweisen. Das heißt, es wird nur eine begrenzte Anzahl von möglichen Freiheitsgraden angeregt. Auch ist man häufig nur an Wirkungen von Strömungen interessiert, etwa am Auftrieb und am Widerstand eines Tragflügels. Man braucht die Strömung gar nicht im Detail zu kennen, sondern die Vorhersagen können sich auf wenige relevante Mittelwerte beschränken. Der naheliegende Ansatz, die Navier-Stokes Gleichung selbst bzw. daraus abgeleitete Gleichungen zu mitteln, um so ein neues Gleichungssystem allein für die Mittelwerte zu erhalten, führt allerdings – als Folge der Nichtlinearität der Gleichungen – zu dem bekannten Schließungsproblem, das heißt, man erhält mehr Unbekannte als Gleichungen.

Turbulenzmodelle dienen gerade dazu, die nötige zusätzliche Beziehung zwischen Schwankungsbewegungen und Mittelwerten festzulegen. Herkömmliche Turbulenzmodelle sind meist für zeitlich stationäre Strömungen entwickelt worden und Versuche, diese auf den instationären Fall zu erweitern, haben allenfalls zu Teilerfolgen geführt (Mankbadi & Liu 1992; Cotton et al. 1997). Selbst mittels einer Large Eddy Simulation, bei der nur die kleinskaligen Turbulenzphänomene modelliert

¹ Kompressible Strömungen und Strömungen bei denen Temperaturgradienten wichtig sind, werden hier nicht behandelt, denn dafür müssten auch der Energiesatz und Zustandsgleichungen berücksichtigt werden.

werden, waren die Ergebnisse enttäuschend (Dejoan et al. 1997). Offenbar reichen die Informationen, die man aus der Untersuchung stationärer Strömung extrahiert hat, nicht aus, um die Turbulenz ausreichend gut zu beschreiben. Es bleibt die Hoffnung die zusätzlichen unbekanntenen Eigenschaften der Turbulenz aus solchen Untersuchungen zu gewinnen, die sich nicht auf im stationären Gleichgewicht befindliche Strömungen beschränken – so wie in der vorliegenden Arbeit.

1.2 Stand der Forschung

Schätzungsweise werden zur Zeit jährlich etwa 2000 Artikel zur Turbulenz veröffentlicht (John L. Lumley in turbulence@mailbase.ac.uk). Einige Übersichtsartikel zu den hier relevanten Themen findet man zum Beispiel in Cantwell (1981) und Robinson (1991). Eine sehr umfangreiche Literaturdatenbank, mit mehr als 10 000 Artikelreferenzen zu allen Aspekten der Turbulenz, hat Peter Bradshaw (Mechanical Engineering Department, Stanford University) zusammengestellt. Während turbulente, wandbegrenzte Strömungen mit zeitlich *stationären* Randbedingungen bereits in vielen Details untersucht worden sind, liegen zum Einfluss zeitlich *variierender* Randbedingungen vergleichsweise wenige Erkenntnisse vor. Obwohl in der vorliegenden Arbeit hauptsächlich die instationäre Strömung untersucht wird, werden zunächst einige generelle Aspekte wandnaher Turbulenz erwähnt, die in der Literatur häufig zu finden sind.

1.2.1 Ausgewählte Aspekte turbulenter, wandbegrenzter Strömungen

Viele Arbeiten zur Turbulenz können einer gewissen Grundeinstellung der Forscher zugeordnet werden (Lesieur 1997). Ein Teil der Untersuchungen beschäftigt sich hauptsächlich mit der Statistik der Turbulenz. Es wird dabei unter anderem versucht den Transport von gemittelten Strömungsgrößen zu modellieren. Die Phänomenologie der Energiekaskaden ist ein typisches Arbeitsmittel dieser Gruppen. Hingegen wird jegliche Art kohärenter Struktur oder Ordnung im Zusammenhang mit der Turbulenz bestritten oder als nicht nützlich angesehen. Auf der anderen Seite findet man den rein deterministischen Ansatz. Stabilitätsuntersuchungen von Strömungen gehören zu den charakteristischen Arbeitsmethoden dieser Gruppe. Ebenso wie die experimentellen Untersuchungen, bei denen Strömungsphysiker immer wieder von kohärenten Strukturen berichteten (Kline et al. 1967). Keiner der beiden Gruppen ist es bis heute gelungen, ein befriedigendes Modell der Turbulenz anzugeben.

Struktur der stationären Strömung

Der Begriff der erwähnten kohärenten Struktur ist dabei sehr vage, er wird aber dennoch häufig verwendet. Eine von vielen Definitionen findet man zum Beispiel in Robinson (1991). Da auch in der vorliegenden Arbeit teilweise von Strukturen der Strömung die Rede ist, sei bereits hier angemerkt, dass auch der von uns verwendete Strukturbegriff keine präzise Definition gestattet. Man sollte hier unter Struktur eine Art stabile Eigenschaft der Strömung verstehen, so wie sie in Abschnitt 1.1 motiviert wurde.

Die numerischen Experimente, die seit einigen Jahren möglich sind, haben ganz neue Wege in der Turbulenzforschung ermöglicht. Die Ergebnisse der direkten numerischen Simulation (DNS) sind mittlerweile nicht unterscheidbar von denen physikalischer Experimente, aber sie bieten in der Regel weitaus größere Untersuchungsmöglichkeiten (Moin & Mahesh 1998). Allerdings ist die DNS auf kleine Reynoldszahlen beschränkt, woran sich auch in Zukunft, aller Voraussicht nach, nicht

viel ändern wird. Es kann aber beispielsweise auch »falsche« Physik simuliert werden, zum Beispiel Strömungen die in der Natur nicht vorkommen, aber dennoch Einblicke in generelle Mechanismen gestatten. So haben Jiménez & Pinelli (1999) den wandnahen Turbulenzbereich unabhängig von der Außenströmung simuliert. Sie haben damit gezeigt, dass der oft postulierte Zyklus zwischen Geschwindigkeitsstreifen und Längswirbeln existiert und unabhängig von der Außenströmung ist. Die langgestreckten Gebiete vergleichsweise langsamer lokaler Geschwindigkeit (Low-speed-streaks) und vergleichsweise schneller lokaler Geschwindigkeit (High-speed-streaks) werden dabei durch Konvektion des mittleren Profils (Impulstransport) von wandnahen Längswirbeln erzeugt, während eine Wendepunkt-Instabilität der Geschwindigkeitsstreifen zunächst zur Erzeugung von Wirbeligkeit in der wandnormalen Richtung führt, die dann aber durch die Scherung zu einer Verstärkung der Längswirbel führt. Die Beobachtung, dass die Geschwindigkeitsstreifen durch Längswirbel hervorgerufen werden, ist lange bekannt (Blackwelder & Eckelmann 1979) und nahezu unbestritten. Die Entstehung der Längswirbel hat aber viele kontroverse Diskussionen hervorgerufen (Swearing & Blackwelder 1987; Aubray et al. 1988; Brooke & Hanratty 1993), vor allem bezüglich der Bedeutung der Wand und der Außenströmung. Jiménez & Pinelli (1999) zogen aus ihrer Simulation den Schluss, dass die Alternativen (zum Beispiel sogenannte Sweeps von der Außenströmung oder die von den Längswirbeln erzeugten Sekundärwirbel) zu dem von ihnen bevorzugten Zyklus zwar meist vorhanden sind, aber dynamisch keine wichtige Rolle spielen und daher als untergeordnete Effekte bei der Erzeugung von Längswirbeln betrachtet werden können.

Einen weiteren interessanten Ansatz zur genauen Untersuchung der wandnahen Strömungsvorgänge findet man in der Arbeit von Hamilton et al. (1995). Sie simulieren eine minimale Couette-Strömung um »einzelne« Strukturen wandbegrenzter Scherströmungen isoliert betrachten zu können. Die Idee der sogenannten Minimalzelle geht dabei auf Jiménez & Moin (1991) zurück. Die Ausdehnung – und damit die Freiheitsgrade – des in spannweitischer und longitudinaler Richtung periodisch fortgesetzten Rechengebiets wird immer weiter herabgesetzt, sodass aber die Turbulenz gerade noch erhalten bleibt. Man kann so die spannweite Ausdehnung auf Werte um $L_z^+ \approx 100$ herabsetzen², wobei L_z^+ die mit der kinematischen Viskosität ν und der Wandschubspannungsgeschwindigkeit u_τ entdimensionalisierte Periodenlänge des Rechengebiets ist. Der Wert von 100 Pluseinheiten, von dem in sehr vielen Arbeiten berichtet wird (Kline et al. 1967; Smith & Metzler 1983; Kim, Moin & Moser 1987), korrespondiert mit dem typischen Abstand von zwei Low-speed-streaks, sodass man in der Regel auch nur *einen* Low-speed-streak im minimalen Rechengebiet findet. Die Statistik der Minimalzellenturbulenz stimmt im Wesentlichen mit der Statistik »echter« turbulenter Strömungen überein. Hamilton et al. (1995) haben in ihrer minimalen Couette-Strömung auch die Reynoldszahl auf ein Minimum reduziert, $Re \approx 400$ gebildet mit der Wandschubspannungsgeschwindigkeit. Die Scherung ist bei der Couette-Strömung – im Gegensatz zur Kanalströmung, bei der man an den beiden Wänden ein unterschiedliches Vorzeichen findet – überall gleichgerichtet. Wie Hamilton et al. (1995) berichten, enthält ihre Minimalzelle bei den minimalen Reynoldszahlen nur einen Satz von Strukturen. Die beiden Wände sind somit Abgrenzungen eines Strömungs(teil)gebietes – mit konstanter Schubspannung – das die wandnahe Turbulenz einer Scherströmung simuliert. Sie finden einen quasizyklischen Regenerierungsprozess der wandnahen Strukturen (Geschwindigkeitsstreifen und Längswirbel), ähnlich wie den, von dem später Jiménez & Pinelli (1999) berichten.

Für den allgemein akzeptierten Geschwindigkeitsstreifenabstand von ca. 100 Pluseinheiten findet

² Der Wert ist nahezu unabhängig von der Reynoldszahl, jedenfalls für die drei von Jiménez & Moin (1991) untersuchten moderaten Durchfluss-Reynoldszahlen von 2000, 3000 und 5000 (zur Definition der verschiedenen Reynoldszahlen siehe Abschnitt Bezeichnungen auf Seite IX). Die minimale longitudinale Ausdehnung L_x^+ ist dagegen abhängig von der Reynoldszahl ($L_x^+ \approx 200$ bis 500 in der zitierten Arbeit).

man in der Literatur einige Erklärungsversuche (Jang et al. 1986; Waleffe et al. 1993; Butler & Farrell 1993; Hamilton et al. 1995). So schlagen Hamilton et al. (1995) als Erklärung vor, dass die Zeitskalen der Streifenzeugung, des Zusammenbruchs und der Wirbelgenerierung, die sie in ihrem quasizyklischen Prozess beschreiben, nicht mehr zusammenpassen, wenn der Streifenabstand zu klein wird. Unterbricht man aber einen Teil vom Zyklus, so kann die Turbulenz nicht aufrecht erhalten werden und die Strömung wird bzw. bleibt laminar.

Viele Autoren heben die dynamische Bedeutung der Längswirbel hervor. So besteht nach Choi et al. (1998) eine starke Korrelation zwischen der lokalen Wandschubspannung und den wandnahen Längswirbeln. Als Ursache für die Widerstandsverminderung durch Riblets wird ebenfalls häufig die Längswirbelstruktur angegeben (Bechert et al. 1989; Luchini et al. 1991; Choi et al. 1993). Allerdings unterscheiden sich die Erklärungsversuche zur genauen Wirkung der Riblets. Der beste Abstand der Riblets wird mit etwa $dz^+ = 15$ angegeben, ansonsten kann es auch zu einer Widerstandserhöhung kommen. Eine quantitative Analyse der Korrelation zwischen den Längswirbel über der Wand und der Schubspannung an der Wand findet man in Kravchenko et al. (1993). Auch sie geben als mögliche Anwendung eine Beeinflussung der Längswirbel mit dem Ziel der Widerstandsverminderung an.

Detektionsverfahren

In der Vergangenheit haben sich viele Arbeiten mit der Auswertung von Größen beschäftigt, die – anders als in der vorliegenden Arbeit – kohärente Strukturen unmittelbar charakterisieren sollen. Dabei wird versucht, das Vorbeischwimmen besonders ausgeprägter Strukturen am Messort mittels geeigneter Kriterien in den gemessenen Turbulenzsignalen zu detektieren. Die Auswahl von geeigneten Kriterien bedarf dabei einer a priori Vorstellung über die vorhandenen Strukturen und kommt in der Regel nicht ohne einzustellende Parameter aus. Das bekannteste Beispiel ist wohl das VITA Verfahren, es hat zwei freie Parameter. Auch für die instationäre Strömung wurden solche Detektionsverfahren zur Untersuchung kohärenter Strukturen benutzt (Tardu et al. 1996). Die ohnehin freien Parameter müssen dabei durch weitere Annahmen an die zeitabhängige Turbulenzcharakteristik angepasst werden. Insgesamt sind Schlussfolgerungen aus solchen Untersuchungen mit erheblichen Unsicherheiten behaftet. Eine Studie mit Surrogatsignalen hat zu einer weiteren Verunsicherung bei der Struktursuche in den Zeitsignalen geführt. Die dazu erzeugten künstlichen Signale stimmen mit den gemessenen Turbulenzsignalen nur in einigen wenigen langzeitgemittelten statistischen Eigenschaften überein und hatten insbesondere keine intermittenten Ereignisse eingebaut. Trotzdem waren die Ergebnisse der Struktursuche in diesen Signalen praktisch nicht von denen der echten Turbulenzsignale zu unterscheiden (Hartmann 1995; Hartmann & Ronneberger 1996).

1.2.2 Turbulente Wandströmungen mit zeitabhängigen Randbedingungen

Die weiter oben zitierten Arbeiten, die sich mit der Widerstandsverminderung der turbulenten Strömung beschäftigen, haben alle die stationäre Strömung untersucht. Neben passiven Möglichkeiten zur Widerstandsverminderung, wie Riblets, bietet sich auch eine aktive Kontrolle an. Die Längswirbelstruktur sollte besonders stark beeinflusst werden, wenn man etwa spannweitig die Wandschubspannung variiert. Tatsächlich kann man beispielsweise mit spannweitig oszillierenden Wänden, unter gewissen Voraussetzungen, den Strömungswiderstand einer wandbegrenzten turbulenten Strömung deutlich absenken. Diesen Effekt haben zuerst Jung et al. (1992) in einer direkten numerischen Simulation entdeckt, er wurde dann später in experimentellen (Laadhari et al. 1994;

Choi et al. 1998) und weiteren numerischen Arbeiten (Baron & Quadrio 1996) bestätigt. Ein neuerer Erklärungsversuch des Effekts stammt von Dhank & Si (1999). Sie stützten sich auf ein Modell von Orlandi & Jiménez (1994), um die Wechselwirkung der induzierten Stokeswelle mit den wandnahen Längswirbeln zu untersuchen und sie können damit die Verminderung der Wandschubspannung erklären. Einen ähnlichen Erklärungsversuch geben Choi et al. (1998). Zum einen soll eine von der Wandbewegung erzeugte spannweitige Wirbeligkeit den Effekt bewirken, andererseits wird die spannweitige Auslenkung der Längswirbel und die damit verbundene Absenkung der axialen Wirbeligkeit als Ursache der Verminderung der Wandschubspannung angegeben. Ohne weiter auf die genauen Einzelheiten der vorgeschlagenen Erklärungen einzugehen sei noch angemerkt, dass der Effekt wohl nicht nur darauf beruht, dass die Strömungsstruktur instantan gestört wird, sondern vor allem dadurch, dass der Regenerierungszyklus zwischen den Strukturen signifikant beeinflusst wird.

Bei geeigneter Wahl der Parameter kann man den Strömungswiderstand durch spannweitige Oszillation der Wände um bis zu 40% vermindern. Das wird sowohl für Kanalströmungen, als auch für Rohrströmungen (Quadrio & Sibilla 2000) berichtet. Diese konzeptuell sehr einfache Methode schneidet jedoch in einer Gesamtenergie-Bilanz wesentlich schlechter ab. Große Effekte erzielt man nur mit vergleichsweise großen Amplituden. Die Kraft, die dann für die Bewegung der Wände zur Überwindung der Wandschubspannung aufgebracht werden muss, führt aber bei hohen Wandamplituden zu einer negativen Energiebilanz, das heißt, um etwa einen vorgegebenen Durchfluss zu realisieren, muss man insgesamt mehr Energie aufwenden als ohne Beeinflussung der Strömung. Vermindert man die Amplitude (Quadrio & Sibilla (2000) geben hier das siebenfach der Wandschubspannungsgeschwindigkeit als oberen Schwellwert an), kann jedoch ein netto Energiegewinn nachgewiesen werden. Dieser liegt dann aber nur bei ca. 5%. Weitere Verluste durch die technische Realisierung sind dabei nicht mit einbezogen.

Zusammenhang mit der vorliegenden Arbeit

Die Beeinflussung der Turbulenz ist in solchen und ähnlichen numerischen und realen Experimenten in der Regel sehr stark. So muss die Amplitude bei spannweitischer Oszillation der Wände vergleichsweise groß gewählt werden, um eine deutliche Widerstandsverminderung zu erreichen. Die hier vorgestellte Untersuchung einer instationären Kanalströmung hat dagegen primär ein anderes Ziel. So soll die Turbulenz nur so wenig beeinflusst werden, dass die Reaktionen der Turbulenz im Wesentlichen linear bleiben. Dann ist es auf relativ einfache Weise möglich, die Antwort der Turbulenz auf eine induzierte Störung quantitativ zu erfassen. Der Gleichgewichtszustand der Turbulenz soll nur ein wenig gestört werden. Alle dynamisch relevanten und damit stabilen Strukturen sollten dann erhalten bleiben, ihre wechselseitigen Beeinflussungen aber verändert werden. Wir untersuchen dazu die turbulente Kanalströmung, bei der die Wände *longitudinal* und mit kleiner Amplitude schwingen.

Die Idee auf diese Weise Strukturen oder Strukturparameter – solche die für die Dynamik entscheidend sind – aus der turbulenten Strömung zu extrahieren, wird in unserer Arbeitsgruppe schon seit längerem verfolgt. Allerdings ist dies die erste Untersuchung, die sich nicht auf Experimente, sondern auf eine direkte numerische Simulation stützt. Einige experimentelle Untersuchungen zu ähnlichen instationären Strömungen, wie wir sie betrachten, finden sich auch in anderen Arbeitsgruppen (Binder et al. 1985; Mao & Hanratty 1986; Tardu et al. 1987; Finnicum & Hanratty 1988; Tardu & Binder 1993; Brooke & Hanratty 1993; Tardu et al. 1994). Die Motivation beschränkt sich dabei nicht auf grundsätzliche Fragen zur Turbulenz (wie sie hier primär betrachtet werden

sollen), sondern instationäre Strömungen sind auch von großem technischen Interesse. Man denke beispielsweise an pulsierende Strömungen durch Rohre und Kanäle (zum Beispiel Kühlkreisläufe), an die Umströmung von Schaufeln in Turbinen und Kompressoren, an Sedimenttransport durch quasiperiodische Wellenbewegungen oder auch an die Wechselwirkungen von Schall mit turbulenten Strömungen, um nur eine beliebige Auswahl von vielen möglichen Anwendungen zu nennen. Neben Strömungsgrößen die besonders robust gegen äußere Störungen sind, sind – insbesondere für die Steuerbarkeit von Strömungen – solche Größen wichtig, die sehr labil reagieren.

Experimentelle Arbeiten und deren Ergebnisse

Experimente mit longitudinal schwingender Wand wurden vor allem in unserer Arbeitsgruppe durchgeführt, während in verschiedenen anderen Laboratorien – insbesondere in der Gruppe von G. Binder, Grenoble – die Kanalströmung mit variierendem Durchfluss untersucht wurde. Pulsierende Rohrströmungen wurden ebenfalls betrachtet, unter anderem in der Arbeitsgruppe von T. J. Hanratty, Urbana (USA). In den Experimenten konnten nur einzelne Größen gemessen werden, insbesondere die axiale Komponente der Strömungsgeschwindigkeit $u(t)$ oder die Wandschubspannung $\tau_w(t)$. Auch sind solche Experimente in der Regel auf lokale Messungen an einem Ort beschränkt. Vereinzelt wurden zwar simultan mehrere Komponenten gemessen (Schewe 1988), oder auch an mehreren Positionen (Beykirch 1996), aber wenn man daraus auf die räumliche Struktur der Turbulenz schließen möchte, kommt man nicht ohne gewisse Annahmen aus. So wird im Allgemeinen die Taylorhypothese benutzt, um aus den Zeitsignalen auf die räumliche Struktur zu schließen. In der Simulation ist dies nicht nötig, vielmehr lässt sich die Gültigkeit der Taylorhypothese damit überprüfen. Was insbesondere für die zeitlich instationäre Strömung interessant ist. Von Hesse (1995) wurde die Modulation zeitlicher Spektren betrachtet. Sie fand dabei unter anderem eine starke Modulation der Form der Spektren. Es stellte sich die Frage, ob oder in wie weit sich die Ergebnisse auch auf die in der Simulation ausgewerteten räumlichen Spektren übertragen lassen.

Für hohe Modulationsfrequenzen wurden unabhängig voneinander von Mao & Hanratty (1986) und Tardu & Binder (1993) eine unerwartete Modulation der Turbulenzintensität der Wandschubspannung gefunden. Mit steigender Modulationsfrequenz erwartet man in der Regel eine immer schwächere Beeinflussung der Turbulenz, und zwar nicht nur weil die induzierte Scherwelle dann sehr schnell – innerhalb der viskosen Unterschicht – abklingt, sondern auch, weil die Turbulenz keine Zeit hat, auf die geänderte Randbedingung zu reagieren. Da Messungen in Wandnähe, insbesondere auch Messungen der Wandschubspannung, häufig mit experimentellen Unzulänglichkeiten behaftet sind, war es interessant zu überprüfen, ob auch wir in der direkten numerischen Simulation den beobachteten Anstieg in der Modulation der Turbulenzintensität der Wandschubspannung finden.

Mit sinkender Wandfrequenz werden die Amplituden der Turbulenzantworten größer und die Phasendifferenzen, bezogen auf die als Ursache der Verformung des Strömungsfeldes anzusehende Oszillation der Wandschubspannung, kleiner. Die bisherigen Experimente deuten darauf hin, dass die Ergebnisse mit den Wandparametern (ν und u_τ) skalieren. Von besonderem Interesse ist der Frequenzbereich von $3 \cdot 10^{-4} < f_w^+ < 3 \cdot 10^{-3}$, denn dann wird die dynamisch wichtige Pufferschicht ($5 \lesssim y^+ \lesssim 50$) von der induzierten Scherwelle mit nennenswerten Amplituden erreicht, und sie reagiert mit ausgeprägten Phasenverzögerungen. Die Experimente haben gezeigt, dass die Turbulenzintensität und die Form der zeitlichen Spektren stark moduliert sind (Tardu et al. 1994; Flötke et al. 1989; Hesse 1995; Beykirch 1996). Dagegen bleibt die Form der untersuchten Amplitudenverteilungen relativ stabil (Flötke 1987). Auch räumliche Kohärenzen gehören zu den eher schwach modulierten Größen (Beykirch 1996; Finnicum & Hanratty 1988).

Eine stark oszillierende Kanalströmung, mit Amplituden bis zu 70% der Mittengeschwindigkeit, untersuchten Tardu et al. (1994). Selbst unter solch extremen Änderungen der Randbedingungen, konnten sie für die meisten Langzeitmittelwerte keine nennenswerten Unterschiede zu denen der stationären Strömung feststellen. Die meisten anderen Untersuchungen bestätigen diese Beobachtung (Jayaraman et al. 1982; Mao & Hanratty 1986; Tardu et al. 1987; Finnicum & Hanratty 1988). Bei bestimmten Frequenzen und recht großen Amplituden der modulierten Rohrströmung finden dagegen Tu & Ramaprian (1983) (siehe auch Teil 2: Ramaprian & Tu (1983)) eine (kleine) Beeinflussung der mittleren Strömungsstruktur. Menendez & Ramaprian (1983) beobachten einen Einfluss auf die Mittelwerte bei einer gestörten Grenzschicht vor allem in den wandfernen Bereichen. Auch zeigt sich in ihrem Experiment, wie später auch bei Mao & Hanratty (1991), eine leichte Absenkung der gemittelten Wandschubspannung mit steigender Anregungsfrequenz. Solche und ähnliche Abweichungen von den stationären Mittelwerten zeigen sich aber nur für eher große Amplituden der Störung.

Für die wandnormale Ausbreitungsgeschwindigkeit der modulierten Turbulenzintensität geben Tardu et al. (1994) einen in der logarithmischen Schicht konstanten Wert von $0,4 u_\tau$ an. Sie merken an, dass die Modulation der (axialen) turbulenten kinetischen Energie mit der gleichen Diffusivität von der Wand weg diffundiert, wie die der zeitgemittelte turbulente Energie in der stationären Strömung.

Numerische Arbeiten

Der turbulenten kinetischen Energie kommt, neben den turbulenten Schubspannungen, in vielen Turbulenzmodellen eine besondere Bedeutung zu, denn für sie werden häufig Modellannahmen gemacht. Um die Gültigkeit der Modelle im instationären Fall zu untersuchen, sind daher die Modulationen der kinetischen Energie und der turbulenten Schubspannung von besonderem Interesse. Verwendet man die gleichen Schließungsansätze, die sich bei einigen stationären Strömungen bewährt haben, auch im instationäre Fall, dann führt das im Allgemeinen nicht zum Erfolg. Solche Ansätze finden sich beispielsweise in Menendez & Ramaprian (1983) oder Mankbadi & Mobark (1991). Die Ergebnisse stimmen allenfalls für den quasi stationären Grenzfall mit experimentellen Beobachtungen überein. Die wichtige turbulente Stokesschicht der zeitlich periodischen Strömungen bleibt bei den Ansätzen völlig unberücksichtigt. Mankbadi & Liu (1992) versuchten hier wenigstens für hohe Frequenzen der Anregung einen brauchbaren Schließungsansatz zu entwickeln, bei dem unter anderem eine linearisierte aber zeitabhängige Transportgleichung für die turbulente kinetische Energie benutzt wurde. Während die Linearisierung bei kleinen Anregungsamplituden sicherlich gerechtfertigt ist, erwies sich der auf der »Rapid-distortion« Theorie (siehe etwa Hunt & Carruthers (1990)) beruhende Schließungsansatz, auch bei Beschränkung auf die hohen Frequenzen und damit zusammenhängenden kurzen Zeitkonstanten, als unzureichend, denn viele Ergebnisse wichen sehr deutlich vom Experiment ab. Auch die später von Dejoan et al. (1997) verwendete Large Eddy Simulation, bei der die großen Skalen ohne Modellannahmen direkt aus der Navier-Stokes Gleichung berechnet wurden und nur die kleinskaligen Turbulenzbewegungen modelliert worden sind, konnten in den Ergebnissen nicht überzeugen.

1.3 Zielsetzung und Übersicht

In dieser Arbeit wird die zeitabhängige turbulente Kanalströmung direkt, das heißt, ohne jegliche Modellannahmen, aus der Navier-Stokes Gleichung berechnet. Es werden keinerlei Annahmen zur

Turbulenz gemacht.

1.3.1 Kanalströmung mit instationären Randbedingungen

Die turbulente Strömung zwischen zwei ebenen (hier auch glatten), unendlich ausgedehnten, parallel angeordneten Platten – die turbulente Kanalströmung – dient als Untersuchungsobjekt für eine Vielzahl von Forschungen über grundsätzliche Turbulenzphänomene. Die geometrische Einfachheit bringt zum einen experimentelle sowie numerische Vereinfachungen, vor allem aber werden grundlegende Eigenschaften der Turbulenz nicht durch besondere Randbedingungen überdeckt. Auch in der vorliegenden Arbeit wird diese Strömung untersucht. Im Gegensatz zu den meisten anderen Arbeiten auf diesem Gebiet wird mit zeitlich variablen Randbedingungen gearbeitet, um damit der turbulenten Grundströmung definierte Störungen zu überlagern. Am übersichtlichsten ist die Reaktion der Turbulenz auf eine aufgeprägte Störung dann, wenn die Störung räumlich möglichst homogen ist. Es bietet sich z.B. an, den Durchfluss zeitlich zu variieren. Der Einfluss des in Strömungsrichtung homogen oszillierenden Druckgradienten auf die Turbulenz, der zur Erzeugung der Durchflussänderung notwendig ist, beschränkt sich zunächst auf Schubspannungsvariationen an der Wand. Dadurch wird eine Scherwelle angeregt, die sich von den Wänden in die Strömung ausbreitet. Eine physikalisch exakt gleiche Strömung erhält man, wenn die Scherwelle durch longitudinal schwingende Wände erzeugt wird.³ Eine einfache Koordinatentransformation der Navier-Stokes Gleichung zeigt, dass beide Fälle physikalisch vollkommen äquivalent sind. Ein homogen oszillierender Druckgradient an sich hat keinen direkten Einfluss auf die zeitliche Entwicklung der Turbulenz. Werden allerdings Messungen – etwa mit einer Heissfilmsonde – innerhalb der Strömung durchgeführt, so ist das Koordinatensystem in dem man misst sehr wohl von Bedeutung. Was beim Vergleich von Ergebnissen der beiden möglichen Anregungen beachtet werden muss.

1.3.2 Details der äußeren Störung

Um die Reaktion der Turbulenz auf die aufgeprägte Störung möglichst einfach beschreiben zu können, bietet sich neben der Homogenität der Störung an, sich auf kleine Amplituden zu beschränken. Dann kann man erwarten, dass die Strömung – im zeitlichen Mittel betrachtet – linear antwortet. Man kann sich nun, aufgrund des unter den Voraussetzungen geltenden Superpositionsprinzips, auf harmonische Anregungen bei den interessierenden Frequenzen beschränken. Gerade vom experimentellen Standpunkt aus betrachtet verkleinert sich der nötige Aufwand erheblich. Die Amplitude der Anregung sollte aber auch nicht zu klein gewählt werden, da mit sinkender Amplitude das Verhältnis zwischen der Antwortamplitude und den unkorrelierten turbulenten Fluktuationen zunehmend ungünstiger wird. Ideal ist eine Amplitude die zwar so klein ist, dass für alle untersuchten Eigenschaften nichtlineare Effekte vernachlässigt werden können, die aber auch nicht kleiner als diese Grenze ist. Allerdings kann man diesen Wert nur unzureichend abschätzen.

Besonderes Interesse bei den Untersuchungen gilt den Modulationsfrequenzen, bei denen verschiedene Turbulenzgrößen mit deutlich unterschiedlichen Phasenverzögerungen auf die Änderungen der Randbedingungen antworten. Diesen Frequenzbereich findet man zwischen einer quasistationären Antwort der Turbulenz bei sehr tiefen Frequenzen – die Turbulenz ist hierbei ständig im Gleichgewicht mit den momentanen Randwerten – und dem sogenannten quasilaminaren Bereich, den

³ Spannweitig schwingende Wände bzw. ein spannweitig oszillierender Druckgradient sind ebenfalls möglich. Der Einfluss auf die Turbulenzstruktur ist dabei aber sehr viel größer, so kommt es bei geeigneter Anregungsfrequenz und -amplitude zu einer deutlichen Widerstandsverminderung der Strömung.

man für sehr hohe Wandfrequenzen findet, so hoch, dass die induzierte Scherwelle im Wesentlichen innerhalb der viskosen Unterschicht abgeklungen ist und kaum mit der Turbulenz wechselwirkt. Die Dynamik der Turbulenz wird wesentlich von einem Bereich außerhalb der wandnahen viskosen Unterschicht, der sogenannten Pufferschicht, dominiert. Dort findet man unter anderem den Ort maximaler Turbulenzproduktion. Um die Turbulenz durch die aufgeprägte Störung aus dem Gleichgewichtszustand zu bringen, ist es daher sinnvoll die Frequenz der Anregung so tief zu wählen, dass die Scherwelle die Pufferschicht mit ausreichender Amplitude erreicht. Sie sollte aber nicht so tief sein, dass die Pufferschicht als ganzes (quasistationär) antwortet, weil dann die Dynamik nur vergleichsweise schwach gestört wird. Untersucht wurde dennoch ein Frequenzbereich der vom quasilaminaren bis zum quasistationären (jedenfalls in Wandnähe) reicht.

1.4 Aufbau der Arbeit

Im Anschluss an diese Einleitung wird im zweiten Kapitel das numerische Verfahren vorgestellt. Es werden einige Bemerkungen zur Auswahl des Verfahrens und dessen Anwendbarkeit gemacht. Die Beschreibung ist knapp, aber ausführlich genug, damit alle wesentlichen Details der Implementierung deutlich werden. So kann ein geneigter Leser alle Resultate im Prinzip nachrechnen. Im dritten Kapitel werden kurz die Quellen und die Parameter der experimentellen Daten beschrieben, die in unserer eigenen Arbeitsgruppe entstanden sind. Diese, zusammen mit weiteren experimentellen und numerischen Daten anderer Autoren, dienen hauptsächlich der Validierung der Implementierung. Das vierte Kapitel beschreibt einige physikalische Grundlagen, von denen in den folgenden Kapiteln häufig Gebrauch gemacht wird. Unter anderem wird die instationäre Reaktion einer *laminaren* Grundströmung diskutiert, wenn die Randbedingungen zeitlich variieren. Auch werden die später benötigten Modulationsfaktoren eingeführt, die Ausgangspunkt fast aller Auswertungen sind. Im fünften, sechsten und siebten Kapitel werden die wesentlichen Ergebnisse der numerischen Rechnungen präsentiert. Die stationären und langzeitgemittelten instationären Strömungen werden hauptsächlich im fünften Kapitel behandelt. Die hier berechneten Strömungsgrößen dienen vor allem der Validierung des Verfahrens. Sie geben aber auch einen guten Überblick über die Langzeitstatistik der Turbulenz, deren Modulationen später diskutiert werden und zeigen, dass es bei größeren Anregungsamplituden zu kleinen Veränderungen der Langzeitmittelwerte kommen kann. Im sechsten und siebten Kapitel werden die wesentlichen Ergebnisse der instationären Kanalströmung vorgestellt, von denen einige in dieser Arbeit erstmals gezeigt werden. Einige Vergleiche konnten mit vorhandenen experimentellen Daten gemacht werden. Jedoch sind solche Vergleiche häufig nicht durchführbar, denn viele berechenbare Größen können experimentell nur mit großem Aufwand oder überhaupt nicht ermittelt werden. Ein Schwerpunkt der Arbeit ist die Analyse der modulierten räumlichen Spektren, die ausführlich im siebten Kapitel behandelt werden.

2 Das numerische Verfahren

Die dreidimensionale, zeitabhängige, inkompressible Navier-Stokes Gleichung

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} + \vec{\nabla}p = \vec{f} + \nu \Delta \vec{u} \quad (2.1)$$

sowie die Kontinuitätsgleichung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (2.2)$$

werden mittels eines Finite-Differenzen-Verfahrens für die Strömung zwischen zwei parallel angeordneten Wänden numerisch gelöst. Dabei ist $\vec{u} = (u, v, w)^T$ die Geschwindigkeit (hier in kartesischen Koordinaten angegeben), p der kinematische Druck¹, $\vec{f} = (f_1, 0, 0)^T$ eine äußere Kraft und ν die kinematische Viskosität. Alle Größen sind mit einer charakteristischen Länge L (hier: halber Abstand der Kanalwände h) und einer charakteristischen Geschwindigkeit U (hier: $U = u_{cl}^{lam} = (3/2)u_b$ mit $u_b =$ Durchflussgeschwindigkeit) dimensionslos gemacht, wobei der Druck p auf ρU^2 bezogen wird, ρ ist die Dichte des Fluids. Die dimensionslose Viskosität ist damit einfach $1/Re_Q$.

Das Integrationsgebiet Ω umfasst den in Bild 2.1 dargestellten Integrationsbereich

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq L_x \\ -h &\leq y \leq +h \\ 0 &\leq z \leq L_z. \end{aligned} \quad (2.3)$$

In den horizontalen Richtungen x und z werden periodische Randbedingungen vorgeschrieben:

$$\vec{u}(x + L_x, y, z + L_z, t) = \vec{u}(x, y, z, t) \quad \forall x, y, z, t. \quad (2.4)$$

An den Kanalwänden gilt die Haftbedingung, die, unter Berücksichtigung von eventuell in x -Richtung bewegten Wänden, wie folgt lautet:

$$\vec{u}(x, y = \pm h, z, t) = (u_w(t), 0, 0)^T \quad \forall x, z, t. \quad (2.5)$$

Alternativ können die Wände auch gegenphasig bewegt werden:

$$\vec{u}(x, y = \pm h, z, t) = (\pm u_w(t), 0, 0)^T \quad \forall x, z, t. \quad (2.6)$$

Das hat den Vorteil, dass in dem Fall der Durchfluss nicht geändert wird. Die Wände können auch unabhängig voneinander bewegt werden, davon wurde in diese Arbeit aber kein Gebrauch gemacht.

Durch die Vorgabe von periodischen Randbedingungen kann es für den Druck keinen mittleren Gradienten geben, daher ist zum Antrieb der Strömung eine äußerer Kraft \vec{f} notwendig². Sie sei

¹ Soweit nichts anderes gesagt wird, steht p im Folgenden immer für den kinematischen Druck, also den dynamischen Druck bezogen auf die Dichte des Fluids.

² Diese Kraft kann nicht aus einem Potenzial abgeleitet werden, denn dieses müsste in x und z ebenfalls periodisch sein und könnte so keine mittlere Kraft hervorrufen.

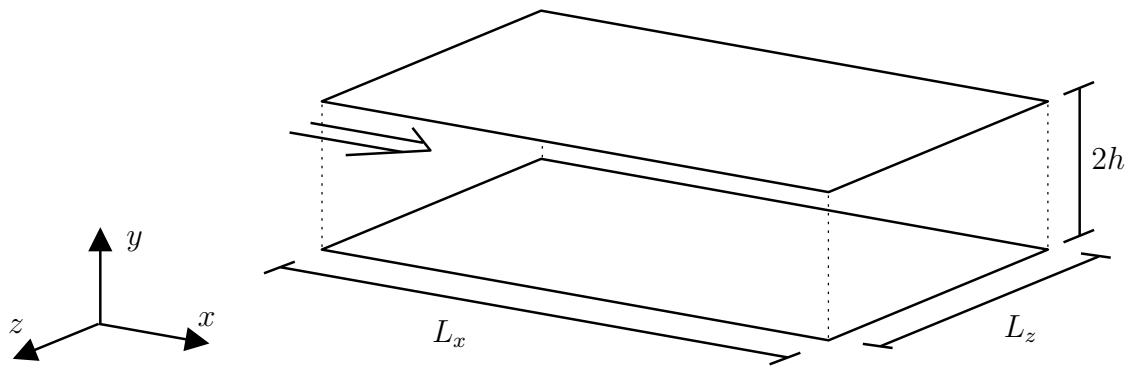


Abb. 2.1: Rechengebiet und Koordinatensystem

unabhängig vom Ort. Bei konstanter äußerer Kraft bewirken die turbulenten Schwankungsbewegungen eine zeitliche Variation im Durchfluss, die aber um so geringer ist, je größer die Periodenlängen gewählt werden. Eine geeignete zeitliche Variation der äußeren Kraft $\vec{f} = \vec{f}(t)$ ermöglicht es aber auch, der Strömung einen konstanten Durchfluss aufzuprägen. Auch dann, wenn die Wände nicht ruhen, sondern gegenphasig bewegt werden.

Der Basisalgorithmus zur effektiven numerischen Lösung des Problems basiert auf der sogenannten Projektionsmethode³, die in einer Reihe von Arbeiten vor etwa 30 Jahren von Chorin (1967, 1968, 1969) eingeführt wurde. Der Grundgedanke dieses Verfahrens besteht darin, die Berechnung der Geschwindigkeit von der Berechnung des Drucks zu entkoppeln, wodurch eine wesentlich einfachere (und schnellere) Lösung des betrachteten Systems – bestehend aus der Impulsgleichung und der Kontinuitätsgleichung – möglich wird. In einem ersten Teilschritt wird ein vorläufiges Geschwindigkeitsfeld aus der Impulsgleichung berechnet, in der aber der Druckterm vernachlässigt wird. Die Kontinuitätsgleichung wird in diesem Schritt noch nicht berücksichtigt. Das vorläufige Geschwindigkeitsfeld erfüllt sie daher in der Regel nicht. In einem zweiten Schritt wird nun dieses vorläufige Feld in den Raum der divergenzfreien Vektorfelder projiziert, wozu der zunächst vernachlässigte Druckterm verwendet wird.

Es werden keinerlei Modellannahmen zur Turbulenz gemacht. Alle relevanten Skalen der Strömung müssen daher vom räumlichen und zeitlichen Gitter aufgelöst werden. Es handelt sich damit um eine sogenannte direkte numerische Simulation.

2.1 Zeitlich variierende Randbedingungen

Untersucht wird hauptsächlich die Strömung mit zeitlich veränderlichen Randbedingungen $u_w(t)$, bei denen die Wände beschleunigte (vorzugsweise harmonische) Bewegungen durchführen. Man kann, wenn sich die Wände gleichsinnig bewegen (Gleichung (2.5)), zur Beschreibung der resultierenden Strömung ein Bezugssystem verwenden, das sich mit den Wänden mitbewegt, sodass in diesem Bezugssystem immer $u_w(t) = 0$ gilt. Die oben angegebene Form der Navier-Stokes Gleichung (2.1) gilt aber nur in einem Inertialsystem. Bei beschleunigten Bezugssystemen kommen noch Trägheitsterme

³ Auch bekannt unter »fractional step method«, »splitting scheme«, und weiteren Namen.

hinzu. Im Fall einer geradlinig beschleunigten Bezugssystembewegung (also ohne Drehbewegungen⁴) gilt für die Navier-Stokes Gleichung (Spurk 1996)

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} + \vec{\nabla}p = \vec{f} + \nu \Delta \vec{u} - \vec{a}, \quad (2.7)$$

wobei $\vec{a}(t)$ die Beschleunigung des bewegten Bezugssystems ist. Bewegt sich das Bezugssystem mit den Wänden, so gilt $a(t) = du_w(t)/dt$. Zu lösen sind dann die Gleichungen (2.7) und (2.2) zusammen mit der Randbedingung $u_w(t) = 0$.

Aus einem Inertialsystem betrachtet beschreiben Gleichung (2.7) und Gleichung (2.2) zusammen mit der Randbedingung $u_w(t) = 0$ eine Strömung, die neben der äußeren Kraft \vec{f} noch zusätzlich von der Volumenkraft $-\vec{a}(t)$ getrieben wird.⁵

Folglich erhält man *exakt* die gleichen Strömungen, wenn man entweder eine äußere Kraft der Größe $-du_w(t)/dt$ aufprägt oder alternativ beide Kanalwände (gleichphasig) mit $u_w(t)$ bewegt.

Zeitliche Variationen der Wandgeschwindigkeiten bieten aber mehr Möglichkeiten, als eine zeitlich variierte äußere Kraft. Die Kanalwände müssen nicht synchron bewegt werden, sondern können unabhängige Bewegungen ausführen. Sie werden in allen hier betrachteten Versuchen gegenphasig bewegt, sodass der Durchfluss zeitlich konstant bleibt. Die hohen Anregungsfrequenzen erzeugen stark gedämpfte Scherwellen an den Wänden, sodass die gestörte Turbulenz in Wandnähe unabhängig von der gegenüberliegenden Kanalwand untersucht werden kann. Bei tieferen Anregungsfrequenzen kann es aber durchaus zu Beeinflussungen kommen.

2.2 Zeitliche Diskretisierung und Projektionsmethode

Die zeitliche Diskretisierung wird für den Konvektionsterm ($\vec{A} \stackrel{\text{def}}{=} (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}$) mit einer Adams-Bashforth Methode ($\vec{A}^{n+1/2} = (3\vec{A}^n - \vec{A}^{n-1})/2$) durchgeführt, dabei ist n der Zeitindex. Der Druckterm und die äußere Kraft werden implizit und der Diffusionsterm semi-implizit nach Crank-Nicolson behandelt. Man erhält damit zunächst folgendes zeitdiskretes (im Raum aber kontinuierliches) Gleichungssystem:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\vec{u}^{n+1} - \vec{u}^n}{\Delta t} + (\vec{u}^{n+1/2} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}^{n+1/2} + \vec{\nabla}p^{n+1/2} &= \vec{f}^{n+1/2} + \nu \Delta \frac{\vec{u}^{n+1} + \vec{u}^n}{2} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{u}^{n+1} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

Bei konstanter Zeitschrittweite ist der zeitliche Diskretisierungsfehler von der Ordnung $\mathcal{O}((\Delta t)^2)$. Mit vorgegebenen Randbedingungen (nur solche für \vec{u} sind notwendig) kann dieses System im Prinzip direkt gelöst werden. Das ist aber, durch die Koppelung zwischen den Unbekannten \vec{u}^{n+1} und $p^{n+1/2}$,⁶ sehr ineffizient. Die Projektionsmethode entkoppelt nun die Berechnung des Drucks von der Berechnung der Geschwindigkeit. Dazu wird ein sogenanntes Zwischengeschwindigkeitsfeld \vec{u}^* eingeführt, indem in der Impulsgleichung der Druck zunächst vernachlässigt wird. Im konkreten Algorithmus wird allerdings das sogenannte Druckkorrekturverfahren benutzt, das heißt, der Druckterm wird nicht vollkommen vernachlässigt, sondern es wird der Druckterm des vorhergehenden

⁴ Sonst kommen noch Corioliskräfte: $-2\vec{\Omega} \times \vec{u}$ und Zentrifugalkräfte: $-\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{x})$ sowie bei veränderlicher Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega}(t)$ der Term $-d\vec{\Omega}/dt \times \vec{x}$ hinzu.

⁵ $a(t)$ ist dabei eine reine Trägheitskraft, die sich aus der Bewegung des Bezugssystems relativ zum Inertialsystem ergibt.

⁶ Druck und Geschwindigkeit werden zu Zeitpunkten berechnet, die um $\Delta t/2$ verschoben sind.

Zeitschritts eingesetzt (mit Ausnahme des ersten Zeitschritts). Zur Anpassung eines konstanten Durchflusses, ist es außerdem auch für die äußere Kraft notwendig, zunächst den vorhergehenden Wert zu benutzen. Man hat somit:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\vec{u}^* - \vec{u}^n}{\Delta t} + (\vec{u}^{n+1/2} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}^{n+1/2} + \vec{\nabla}p^{n-1/2} &= \vec{f}^{n-1/2} + \nu\Delta \frac{\vec{u}^* + \vec{u}^n}{2} \\ \frac{\vec{u}^{n+1} - \vec{u}^*}{\Delta t} + \vec{\nabla}\delta p^n &= \delta \vec{f}^n \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{u}^{n+1} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

Dabei ist $\delta p^n = (p^{n+1/2} - p^{n-1/2})/2$ die Druckkorrektur und $\delta \vec{f}^n = (\vec{f}^{n+1/2} - \vec{f}^{n-1/2})/2$ die Korrektur der äußeren Kraft. Gleichung 1 und 2 des Systems (2.9) ergeben zusammen gerade wieder Gleichung 1 von (2.8), allerdings mit einem Fehlerterm $\frac{\nu\Delta t}{2}\Delta\vec{\nabla}\delta p^n$ ⁷. In dem System (2.9) sind die Unbekannten $p^{n+1/2}$ (bzw. δp^n) und u^{n+1} nicht mehr gekoppelt, sodass sich zusammengefasst der folgende effektive Lösungsalgorithmus verwenden lässt.

Der Lösungsalgorithmus (Projektionsmethode)

1. Aus Gleichung 1 von (2.9) berechnet man das Zwischengeschwindigkeitsfeld \vec{u}^* (Prediktor-Schritt):

$$\left(\frac{1}{\Delta t} - \frac{\nu}{2}\Delta\right)(\vec{u}^* - \vec{u}^n) = -\vec{A}^{n+1/2} + \vec{f}^{n-1/2} - \vec{\nabla}p^{n-1/2} + \nu\Delta\vec{u}^n \quad (2.10)$$

$$\text{Mit } \vec{A}^{n+1/2} = \frac{3}{2}(\vec{u}^n \cdot \vec{\nabla})\vec{u}^n - \frac{1}{2}(\vec{u}^{n-1} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}^{n-1}.$$

2. Durch Kombination der Gleichungen 2 und 3 von (2.9) erhält man:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\delta p^n = \frac{1}{\Delta t}\vec{\nabla} \cdot \vec{u}^*, \quad (2.11)$$

woraus die Druckkorrektur δp^n berechnet wird und damit dann $p^{n+1/2}$.

3. Um einen konstanten Durchfluss Q zu gewährleisten, muss auch die treibende Kraft $\vec{f} = (f_1, 0, 0)^T$ angepasst werden. Da $Q = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \vec{u}^{n+1} dy$ ist, ergibt sich aus Gleichung 2 von (2.9) für δf_1^n (woraus dann $f_1^{n+1/2}$ folgt):

$$\delta f_1^n = \frac{Q - \frac{1}{2h} \int_{-h}^h u^* - \Delta t \frac{\partial}{\partial x} \delta p^n dy}{\Delta t}. \quad (2.12)$$

4. \vec{u}^{n+1} berechnet sich schließlich aus Gleichung 2 von (2.9) (Korrektor-Schritt):

$$\vec{u}^{n+1} = \vec{u}^* + \Delta t(\delta \vec{f}^n - \vec{\nabla}\delta p^n). \quad (2.13)$$

⁷ Siehe aber 2.2.2

2.2.1 Implizit nur in Wandnormalenrichtung

Der Vorteil von impliziten Verfahren gegenüber expliziten Verfahren ist die größere numerische Stabilität. Allerdings erkaufte man sich diesen mit einem in der Regel wesentlich höherem Rechenaufwand. Für die Kanalströmung ergeben sich bei expliziten Verfahren hauptsächlich für die Richtung senkrecht zu den Wänden Stabilitätsprobleme, daher wird im konkreten Algorithmus nur die Richtung senkrecht zu den Wänden implizit nach Crank-Nicolson behandelt. Die homogenen Richtungen (parallel zu den Wänden) werden wie der Konvektionsterm nach Adams-Bashforth berechnet. Aus Gleichung (2.10) wird damit:

$$\left(\frac{1}{\Delta t} - \frac{\nu}{2}\Delta\right)(\vec{u}^* - \vec{u}^n) = -\vec{A}^{n+1/2} + \vec{f}^{n-1/2} - \vec{\nabla}p^{n-1/2} + \nu\frac{\partial^2}{\partial y^2}\vec{u}^n \quad (2.14)$$

Mit $\vec{A}^n = (\vec{u}^n \cdot \vec{\nabla})\vec{u}^n - \nu\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\vec{u}^n$ und $\vec{A}^{n+1/2} = \frac{3}{2}\vec{A}^n - \frac{1}{2}\vec{A}^{n-1}$.

2.2.2 Pseudodruck

Durch das Operatorsplitting des Prediktor-Korrektor Verfahrens ergibt sich in der Impulsgleichung ein Fehlerterm $\frac{\nu\Delta t}{2}\Delta\vec{\nabla}\delta p^n$. Um den echten Druck zu erhalten, kann man p im Lösungsalgorithmus als eine Art Pseudodruck ϕ ansehen und aus diesem dann mit Hilfe des Zusatzterms den echten Druck berechnen (Kim & Moin 1985):

$$p = \phi - \frac{\nu\Delta t}{2}\Delta\delta\phi \quad (2.15)$$

im ursprünglichen Algorithmus, bzw.

$$p = \phi - \frac{\nu\Delta t}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\delta\phi \quad (2.16)$$

wenn nur die y -Richtung implizit behandelt wird.

2.3 Anmerkungen zur semi-impliziten Zeitdiskretisierung und zur Projektionsmethode im Allgemeinen

Obwohl die Projektionsmethode und vor allem deren Variationen noch nicht bis in alle Einzelheiten analysiert werden konnten, wird sie sehr häufig angewandt, vor allem bei viskosen inkompressiblen Strömungen mit moderaten Reynoldszahlen. E & Liu (1995) sagen, dass es Jahrzehnte lang nach der Einführung der Projektionsmethode durch Chorin (1967, 1968, 1969) noch ein Rätsel war, dass die Projektionsmethode scheinbar besser funktioniert als man erwarten konnte. Sie räumen des Weiteren ein, dass es immer noch kontroverse Diskussionen um die optimale Wahl der Randbedingungen des Projektionsschrittes gibt.

Die Analyse des oben beschriebenen Verfahrens in zeitlich semi-impliziter Form (nur die Zeit, nicht aber der Ort sind diskretisiert) ist weit verbreitet, birgt aber einige Probleme in sich. Zum Beispiel sind zur Berechnung der Poissongleichung (Schritt 2 im Lösungsalgorithmus) Randwerte für den Druck und für das Zwischengeschwindigkeitsfeld nötig. Im ursprünglichen System waren diese nicht nötig, vielmehr wäre damit das System sogar überbestimmt. Der Druck ist eine passive Variable,

er kann aus einem gegebenen Geschwindigkeitsfeld berechnet werden, sodass man ihn im Prinzip aus dem System eliminieren kann. Durch Verwendung eines versetzten räumlichen Gitters, tritt im konkreten Verfahren das Problem nicht auf. Es gibt aber auch andere Lösungsansätze, die von vornherein das vollständig diskretisierte Gleichungssystem betrachten (Perot 1993; Perot 1995). Alle Randbedingungen werden dabei direkt mit in die diskreten Operatoren aufgenommen, sodass keine weiteren Annahmen oder Pseudo-Randbedingungen nötig sind. Viele der kontroversen Diskussionen über die »richtigen« Randbedingungen für das Zwischengeschwindigkeitsfeld und den Druck werden dadurch gegenstandslos.

Bis heute gibt es noch keine exakte Analyse (zum Beispiel Konvergenzverhalten und Fehlerabschätzung) der Projektionsmethode so wie sie oben vorgestellt wurde. Vor allem die nicht periodischen Randbedingungen, wie man sie hier in y -Richtung hat, bereiten Schwierigkeiten. Neben der recht genauen, aber mathematisch sehr anspruchsvollen Untersuchungen von E & Liu (1995, 1996) haben kürzlich Strikwerda & Lee (1999) die Methode erneut analysiert. Letztere konnten zeigen, dass die Randbedingungen im Projektionsschritt nicht exakt erfüllt werden können, und dass die Genauigkeit der Methode dadurch begrenzt wird. Sie konnten auch die heuristischen Argumente von Perot (1993), dass der Fehler im Druck in jeder Projektionsmethode von erster Ordnung ist, beweisen und seine Annahme rechtfertigen.

In dieser Arbeit wird das Verfahren als Hilfsmittel eingesetzt, ohne das es selbst Gegenstand der Untersuchung ist. Spezielle Eigenschaften des Verfahrens werden daher hier nicht weiter betrachtet. Die Rechtfertigung, dass die berechneten Strömungen nicht durch numerische Fehler und Artefakte dominiert werden, wird durch Vergleiche mit experimentellen Daten gegeben. Jedenfalls dort, wo solche Vergleiche möglich sind.

Neben dem hier verwendeten Finite-Differenzen-Verfahren, gibt es eine Reihe weiterer Verfahren, um die Navier-Stokes Gleichung numerisch zu integrieren. Hier sind vor allem Finite-Elemente- und Spektralverfahren zu nennen. In der Zeitrichtung werden jedoch (fast) immer Finite-Differenzen verwendet. Die Vorteile von Finite-Differenzen-Verfahren sind: große Flexibilität, eine vergleichsweise einfache Implementierung und effiziente Programme. Der letzte Punkt ist bei den von uns durchgeführten Simulationen sehr wichtig, denn die Kanalströmung musste mit unterschiedlichen, zeitlich-variierenden Randbedingungen jedesmal neu simuliert werden. Aufgrund der geometrischen Einfachheit der Kanalströmung hätte sich auch ein Spektral-Verfahren angeboten – bei gegebener Gitterpunktzahl erreicht man damit in der Regel eine höhere Genauigkeit bei der Berechnung der räumlichen Ableitungen – jedoch ergeben sich dann große Schwierigkeiten bei der Implementierung von zeitlich veränderlichen Randbedingungen.

2.4 Räumliche Diskretisierung

Die Navier-Stokes Gleichung (2.1) bildet zusammen mit der Kontinuitätsgleichung (2.2) ein partielles Differentialgleichungssystem in x , y , z und t . Zur numerische Lösung dieses Systems müssen neben der Zeitrichtung auch alle drei Raumrichtungen diskretisiert werden. Im Folgenden wird zunächst das für die Diskretisierung notwendige räumliche Gitter beschrieben. Anschließend wird erläutert, wie die drei räumlichen Differentialoperatoren: Divergenz ($\vec{\nabla} \cdot$), Gradient ($\vec{\nabla}$) und Laplace (Δ), in das raumdiskrete System transformiert worden sind.

2.4.1 Das räumliche Gitter

Das Integrationsgebiet wird in $N_x \times N_y \times N_z$ Gitterzellen mit den räumlichen Abmessungen $\Delta x \times \Delta y_j \times \Delta z$ ($j = 1, \dots, N_y$) aufgeteilt. Für jede Zelle wird ein Wert für den Druck und je ein Wert für die drei Geschwindigkeitskomponenten gespeichert, allerdings für unterschiedliche Positionen innerhalb der Zelle. Der Druckwert p ist der vom Zellmittelpunkt, die Komponenten der Geschwindigkeit u , v und w sind die von den Zentren der Seitenflächen, so wie in Bild 2.2 dargestellt. Um die unterschiedlichen Positionen innerhalb einer Gitterzelle zu indizieren, wird folgende Notation verwendet: Wenn alle Indizes ganzzahlig sind, bezieht sich das Indextripel i, j, k auf den Zellmittelpunkt. Es werden aber auch halbzahlige Indizes zugelassen (Index $\pm 1/2$), dann bezieht sich das Indextripel auf den entsprechenden Randwert der Zelle. Für jede Gitterzelle werden also $p_{i,j,k}$, $u_{i+1/2,j,k}$, $v_{i,j+1/2,k}$ und $w_{i,j,k+1/2}$ gespeichert.

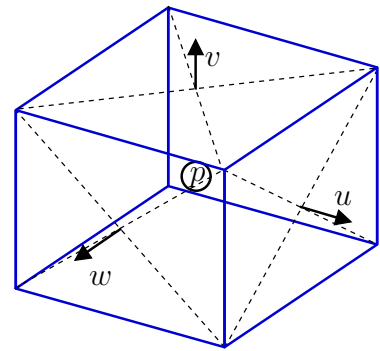


Abb. 2.2: Versetzte Anordnung

Der Vorteil dieser versetzten Anordnung der Gitterpunkte gegenüber einer Anordnung, bei der Druck und alle Komponenten der Geschwindigkeit vom gleichen Ort gespeichert werden, liegt vor allem darin, dass es hier keine unerwünschten Druckoszillationen gibt. Ein weiterer Vorteil ist, dass bei der zu lösenden Poissongleichung keine Randwerte für den Druck benötigt werden (siehe weiter unten).

In den homogenen Richtungen x und z der Strömung haben die Zellen eine konstante Abmessung von $\Delta x = L_x/N_x$ und $\Delta z = L_z/N_z$. In Wandnormalenrichtung haben die Zellen verschiedene Größen: $\Delta y_j = y_{j+1/2} - y_{j-1/2}$ und unterschiedlichen Abstände der Zellmittelpunkte: $\Delta y_{j-1/2} = y_j - y_{j-1}$.⁸ Bei fast allen Rechnungen wurde folgende Verteilung der Zellmittelpunkte vorgegeben:

$$y_j = \frac{\tanh(c \frac{2j}{N_y-1}) + \tanh(c \frac{2(j-1)}{N_y-1})}{2 \tanh(c)} \quad (2.17)$$

mit $c = 1,8417$. Durch diese Verteilung erhält man kleine Abstände in der Nähe der Wände und größere Abstände in der Kanalmitte. Andere Verteilungen sind ebenfalls möglich und auch getestet worden. Alle »vernünftigen« Verteilungen führen aber zu kaum unterschiedlichen Ergebnissen, sodass hier auf eine weitere Analyse verzichtet wird.

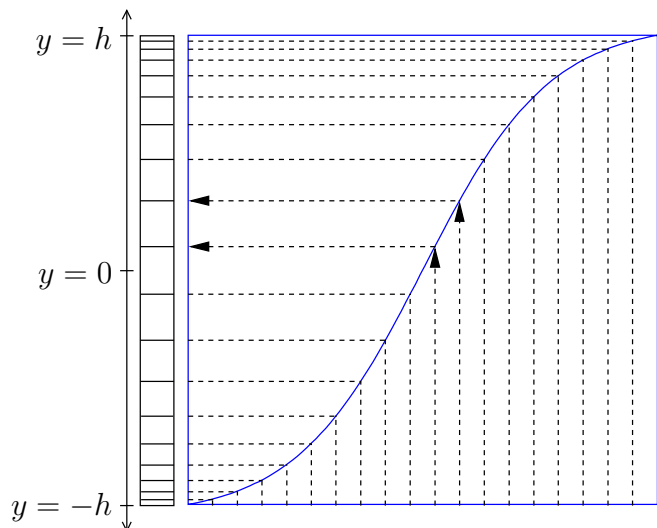


Abb. 2.3: Verteilung der Zellmittelpunkte

⁸ Es gilt: $y_j = (y_{j+1/2} + y_{j-1/2})/2$, aber es gilt *nicht*: $y_{j+1/2} = (y_{j+1} + y_j)/2$. Vergleiche Abbildung 2.5. Der Mittelwert zweier Zellmittelpunkte fiel nur bei einem äquidistantem Gitter mit dem Rand der Zelle zusammen.

2.4.2 Die Randzellen

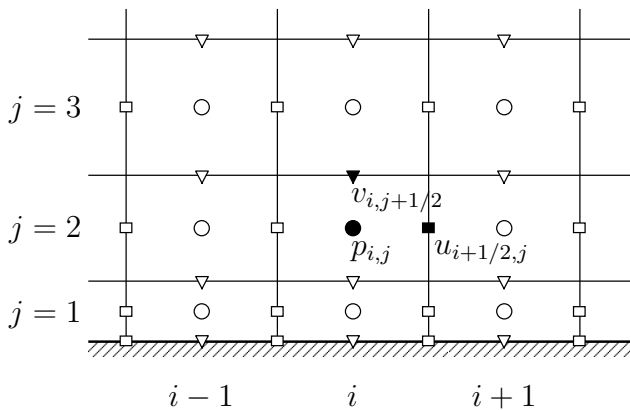


Abb. 2.4: Das MAC Gitter

Abbildung 2.4 zeigt ein zweidimensionales sogenanntes MAC⁹ Gitter in der Nähe einer Wand. Man kann hier gut die versetzte Anordnung der einzelnen Gitterpunkte von u , v und p erkennen. Ein »vollständiges« Gitter ist in Abbildung 2.5 in zwei Querschnitten zu sehen. Im Vergleich zum Gitter innerhalb des Rechengebietes, gibt es am Rand eine Besonderheit. Es werden abweichend von der oben beschriebenen Regel, u -Gitterpunkte (im dreidimensionalen Fall auch w -Gitterpunkte) direkt an der Wand (das heißt, bei $y = \pm 1$) gesetzt. Dies ist daher sinnvoll, da man die Geschwindigkeit direkt an der Wand vorgeben möchte. Diese Randpunkte entsprechen den häufig verwendeten

sogenannten »Ghost«-Punkten¹⁰, die in der Regel zur Implementierung der Randbedingungen eingeführt werden. Die Randwerte für den Druck kann man, wie weiter unten noch gezeigt wird, bei Verwendung eines MAC Gitters, aus den Gleichungen eliminieren. In der Implementierung ist es aber einfacher auch Randwerte für den Druck vorzusehen, diese werden in jedem Zeitschritt auf die in Abschnitt 2.6 angegebenen (Pseudo-)Werte gesetzt.

2.4.3 Räumliches Differenzieren mit der »Upwind«-Methode

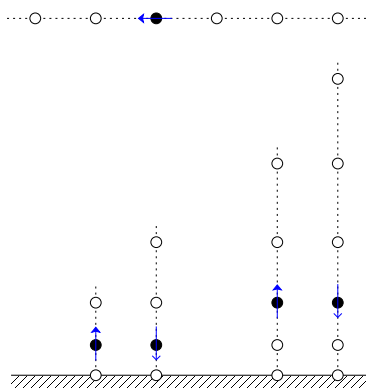


Abb. 2.6: Prinzip der verwendeten »Upwind«-Ableitungen

Die räumlichen Ableitungen werden mit einer sogenannten »Upwind«-Methode für die Konvektionsterme berechnet, während die Diffusionsterme mit zentralen Differenzen approximiert werden. Bei der Upwind-Methode werden zur Berechnung der Ableitungen mehr Gitterpunkte entgegen der Richtung der lokalen Konvektion benutzt als in dieser Richtung. Abbildung 2.6 zeigt das Prinzip: An den durch die ausgefüllten Kreise markierten Punkten soll die Ableitung (etwa dp/dy oder dp/dx) berechnet werden. Je nach lokaler Geschwindigkeit, im Bild durch Pfeile symbolisiert, wird entschieden, in welcher Richtung mehr Punkte verwendet werden. Bei gegebener Anzahl der Gitterpunkte erhöht sich dadurch die Stabilität gegenüber zentralen Differenzen, jedenfalls solange die Konvektion dominiert. Für die Kanalströmung ist die Richtung der treibenden Kraft eine Vorzugsrichtung und die Strömung ist stark konvektionsdominant. Hier führen zentrale Differenzen regelmäßig zu numerischen Instabilitäten.

⁹ Der Name stammt aus dem von Harlow & Welch (1965) entwickelten Marker-And-Cell Verfahren zur Lösung inkompressibler Strömungen mit freien Oberflächen. Sie haben dabei die in Abschnitt 2.4.1 beschriebene versetzte Gitterpunktanordnung benutzt, aber nur in einer zweidimensionalen Form.

¹⁰ Das sind Punkte außerhalb des Rechengebietes.

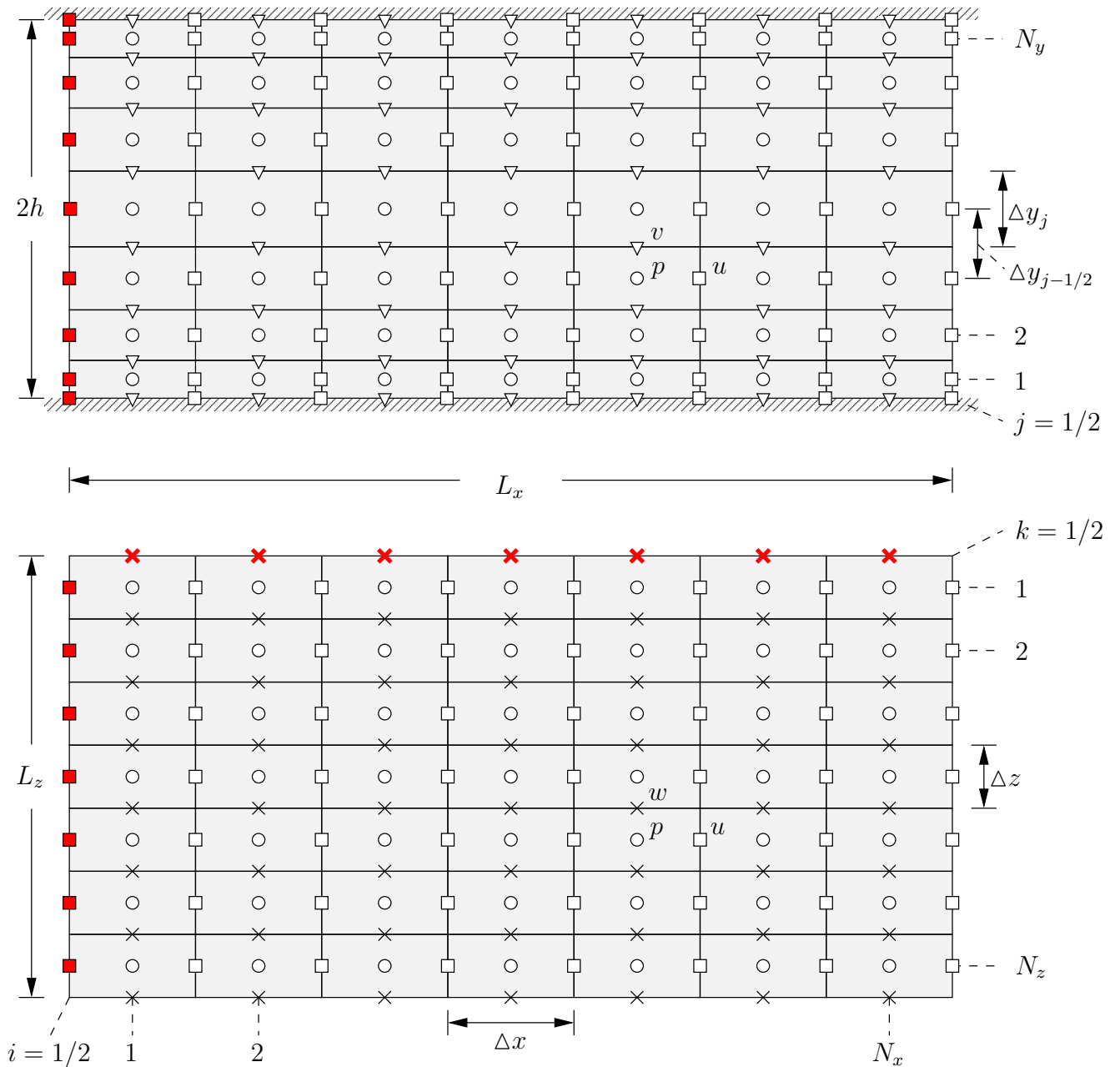


Abb. 2.5: Versetztes Gitter: oben $x-y$ -Ebene, unten $x-z$ -Ebene. $u = \square$, $v = \nabla$, $w = \times$, $p = \circ$. Die ausgefüllten Quadrate und die fett gezeichneten Kreuze kennzeichnen Werte, die aufgrund der Periodizitäten in x - und z -Richtung, redundant sind und nicht extra gespeichert werden müssen.

2.4.4 Diskrete Operatoren

Der Laplace Operator des Prediktorschrittes wird wie folgt diskretisiert ($\Delta \rightarrow \mathbf{L} = (L_1, L_2, L_3)^T$; L_3 entspricht L_1 , wenn man Δx durch Δz ersetzt)¹¹:

$$\begin{aligned}
 (L_1 q)_{i+1/2,j,k} &= \frac{-30q_{i+1/2} + 16(q_{i+3/2} + q_{i-1/2}) - (q_{i+5/2} + q_{i-3/2})}{12(\Delta x)^2} \\
 (L_1 q)_{i,j+1/2,k} &= \frac{-30q_i + 16(q_{i+1} + q_{i-1}) - (q_{i+2} + q_{i-2})}{12(\Delta x)^2} \\
 (L_2 q)_{i,j+1/2,k} &= L_{2,j+1/2}^{(-2)} q_{j-3/2} + L_{2,j+1/2}^{(-1)} q_{j-1/2} + L_{2,j+1/2}^{(0)} q_{j+1/2} + L_{2,j+1/2}^{(1)} q_{j+3/2} + L_{2,j+1/2}^{(2)} q_{j+5/2} \\
 (L_2 q)_{i+1/2,j,k} &= L_{2,j}^{(-2)} q_{j-2} + L_{2,j}^{(-1)} q_{j-1} + L_{2,j}^{(0)} q_j + L_{2,j}^{(1)} q_{j+1} + L_{2,j}^{(2)} q_{j+2}.
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

An den Wänden ($j = 1$ und $j = N_y$) ist:

$$\begin{aligned}
 (L_2 q)_{i,j+1/2,k} &= L_{2,j+1/2}^{(-1)} q_{j-1/2} + L_{2,j+1/2}^{(0)} q_{j+1/2} + L_{2,j+1/2}^{(1)} q_{j+3/2} \\
 (L_2 q)_{i+1/2,j,k} &= L_{2,j}^{(-1)} q_{j-1} + L_{2,j}^{(0)} q_j + L_{2,j}^{(1)} q_{j+1}.
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Die Zahlenwerte $L_{2,\cdot}^{(\cdot)}$ werden durch Differenzieren von lokalen Interpolationspolynomen bestimmt. Durch je fünf Punkte (am Rand drei Punkte) wird ein Lagrangepolynom vierten Grades gelegt (zweiten Grades am Rand). Das Polynom ist durch die fünf (bzw. drei) Punkte eindeutig bestimmt. Nach zweimaliger Differentiation des Polynoms erhält man aus den Faktoren vor den y -Potenzen die Gewichte $L_{2,\cdot}^{(\cdot)}$. Sie müssen nur einmal zu Beginn der Rechnung berechnet werden. Es werden aber zwei Sätze dieser Faktoren benötigt, einen für das v -Gitter (die $y_{j+1/2}$ -Positionen) und einen für das u -, das w - und das p -Gitter (die y_j -Positionen).

Der diskrete Gradientoperator $\mathbf{G} = (G_1, G_2, G_3)^T$ (wird in jedem Schritt gebraucht) und der diskrete Divergenzoperator $\mathbf{D} = (D_1, D_2, D_3)^T$ (Schritt 2) werden in äquivalenter Weise bestimmt, man findet sie im Anhang A.

2.5 Direkter spektraler Löser für die Poissongleichung

Zu lösen ist folgende diskrete Gleichung:

$$\mathbf{D}^T \cdot \mathbf{G} \delta p_{i,j,k}^n = \frac{1}{\Delta t} \mathbf{D}^T \cdot \vec{u}_{i,j,k}^* \tag{2.20}$$

Für eine kürzere Notation sei (nur in diesem und im nächsten Abschnitt) $\phi = \delta p^n$ und $r = \frac{1}{\Delta t} \mathbf{D}^T \cdot \vec{u}^*$. Damit schreibt sich nun die zu lösende diskrete Poissongleichung als:

$$(\mathbf{D}_1 \mathbf{G}_1 \phi)_{i,j,k} + (\mathbf{D}_2 \mathbf{G}_2 \phi)_{i,j,k} + (\mathbf{D}_3 \mathbf{G}_3 \phi)_{i,j,k} = r_{i,j,k}. \tag{2.21}$$

¹¹ Gleichbleibende Indizes sind auf den rechten Seiten jeweils ausgespart.

Man beachte, dass durch Verwendung eines MAC Gitters D_1G_1 nicht dem entsprechenden diskreten Laplaceoperator L_1 entspricht (ebenso entspricht D_3G_3 nicht L_3 und auch D_2G_2 entspricht nicht L_2). Der wäre:

$$(L_1q)_{i,j,k} = \frac{-7840q_i + 4320(q_{i+1} + q_{i-1}) - 432(q_{i+2} + q_{i-2}) + 32(q_{i+3} + q_{i-3})}{2880(\Delta x)^2} \quad (2.22)$$

im Vergleich zu

$$(D_1G_1q)_{i,j,k} = \frac{-7300q_i + 3915(q_{i+1} + q_{i-1}) - 270(q_{i+2} + q_{i-2}) + 5(q_{i+3} + q_{i-3})}{2880(\Delta x)^2}. \quad (2.23)$$

Daher sei $\mathcal{L} = (\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3)^T \stackrel{\text{def}}{=} (D_1G_1, D_2G_2, D_3G_3)^T$.

Durch die Vorgabe von periodischen Randbedingungen in den homogenen Richtungen x und z , kann man Gleichung (2.21) sehr effektiv im Spektralraum der Fouriertransformation lösen. Durch eine zweidimensionale diskrete Fouriertransformation (\mathcal{DFT})¹² erhält man:

$$(\hat{\mathcal{L}}_1P)_{l,j,m} + \mathcal{DFT}\{(\mathcal{L}_2p)_{i,j,k}\} + (\hat{\mathcal{L}}_3P)_{l,j,m} = R_{l,j,m}. \quad (2.25)$$

Die diskreten Operatoren $\hat{\mathcal{L}}_1$ und $\hat{\mathcal{L}}_3$ wirken dabei auf die Wellenzahlindizes l bzw. m . Es ist $(\hat{\mathcal{L}}_1P)_{l,j,m} = \hat{\mathcal{L}}_{1,l}P_{l,j,m}$ und $(\hat{\mathcal{L}}_3P)_{l,j,m} = \hat{\mathcal{L}}_{3,m}P_{l,j,m}$. Für die Zahlenwerte ergibt sich:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{L}}_{1,l} &= \mathcal{L}_1^{(0)} + 2(\mathcal{L}_1^{(1)} \cos(2\pi l/N_x) + \mathcal{L}_1^{(2)} \cos(4\pi l/N_x) + \mathcal{L}_1^{(3)} \cos(6\pi l/N_x)) \\ \hat{\mathcal{L}}_{3,m} &= \mathcal{L}_3^{(0)} + 2(\mathcal{L}_3^{(1)} \cos(2\pi m/N_z) + \mathcal{L}_3^{(2)} \cos(4\pi m/N_z) + \mathcal{L}_3^{(3)} \cos(6\pi m/N_z)). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Nach der Auflösung des zweiten Terms in Gleichung (2.25) folgt damit:

$$\hat{\mathcal{L}}_{1,l}P_{l,j,m} + (\mathcal{L}_2P)_{l,j,m} + \hat{\mathcal{L}}_{3,m}P_{l,j,m} = R_{l,j,m}. \quad (2.27)$$

Ausgeschrieben ist das:

$$\mathcal{L}_{2,j}^{(-2)}P_{l,j-2,m} + \mathcal{L}_{2,j}^{(-1)}P_{l,j-1,m} + (\hat{\mathcal{L}}_{1,l} + \mathcal{L}_{2,j}^{(0)} + \hat{\mathcal{L}}_{3,m})P_{l,j,m} + \mathcal{L}_{2,j}^{(1)}P_{l,j+1,m} + \mathcal{L}_{2,j}^{(2)}P_{l,j+2,m} = R_{l,j,m}. \quad (2.28)$$

Das ist ein lineares Gleichungssystem (pentadiagonale Matrix) welches für alle vorkommenden Wellenzahlindizes l und m mit noch festzulegenden Wandrandwerten gelöst werden muss. Für $l = m = 0$ ist auch $\hat{\mathcal{L}}_{1,l} = \hat{\mathcal{L}}_{3,m} = 0$ und das Gleichungssystem wird singular. Nur wenn die rechte Seite die Kompatibilitätsbedingung¹³ erfüllt, ist das System lösbar. Dann zwar nicht eindeutig, sondern mit einem zusätzlichen Freiheitsgrad. Der Freiheitsgrad entspricht gerade der additiven Konstante, die man dem Druck in der Navier-Stokes Gleichung hinzufügen kann.

¹² Der Vollständigkeit halber folgt die Definition:

$$q_{i,k} = \frac{1}{N_x N_z} \sum_{l=0}^{N_x-1} \sum_{m=0}^{N_z-1} Q_{l,m} e^{i2\pi \frac{li}{N_x}} e^{i2\pi \frac{mk}{N_z}} \quad \text{mit} \quad Q_{l,m} = \sum_{i=0}^{N_x-1} \sum_{k=0}^{N_z-1} q_{i,k} e^{-i2\pi \frac{li}{N_x}} e^{-i2\pi \frac{mk}{N_z}}. \quad (2.24)$$

¹³ Für die betrachtete Kanalströmung entspricht das gerade der Kontinuitätsgleichung. Da für x und z periodische Randbedingungen vorgegeben werden, heißt die Bedingung: »Ein netto Massenfluss an einer Wand muss durch einen negativen netto Massenfluss an der anderen Wand kompensiert werden«.

2.6 Randbedingungen

Um die Druck-Poissongleichung (2.20) lösen zu können, benötigt man im Allgemeinen Wandrandwerte für den Druck und für die rechte Seite. Diese ergeben sich durch Multiplikation der zeitdiskreten Impulsgleichung mit dem äußeren Normalenvektor \vec{n} . Im Gegensatz zu *Dirichlet*-Randbedingungen, bei denen die Funktion am Rand selbst gegeben ist, handelt es sich hier um *Neumann*-Randbedingungen. Allgemein gilt, dass die Poissongleichung mit Neumann-Randbedingungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \phi = r \quad \text{in } \Omega, \quad \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{n} = f \quad \text{auf } \partial\Omega \quad (2.29)$$

nur dann lösbar ist, wenn die Kompatibilitätsbedingung

$$\int_{\Omega} r \, dV = \int_{\partial\Omega} f \, d\sigma \quad (2.30)$$

erfüllt ist. Die Lösung ist dann bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt. Dass die Lösung der Navier-Stokes Gleichung nicht von einer additiven Druckkonstante abhängen kann, sieht man bereits an (2.1), denn der Druck taucht dort nur als Gradient auf.

Durch Verwendung eines versetzten Gitters kann man aber bereits in (2.20) die Abhängigkeit von den Randwerten eliminieren. Man betrachte dazu die Gleichungen für die untere Wand:

Die Poissongleichung ist

$$\begin{aligned} (D_1 G_1 \delta p^n)_{\Delta y/2} + \frac{(G_2 \delta p^n|_{\Delta y} - G_2 \delta p^n|_w)}{\Delta y} + (D_3 G_3 \delta p^n)_{\Delta y/2} = \\ \frac{(D_1 u^*)_{\Delta y/2} + \frac{v_{\Delta y}^* - v_w^*}{\Delta y} + (D_3 w^*)_{\Delta y/2}}{\Delta t} \end{aligned} \quad (2.31)$$

und aus dem Korrektor-Schritt hat man

$$-G_2 \delta p^n|_w = \frac{v_w^{n+1} - v_w^*}{\Delta t}. \quad (2.32)$$

Setzt man die zweite Gleichung in die erste ein, dann erkennt man, dass die Poissongleichung unabhängig von v_w^* wird. Man kann daher in der Implementierung $v_w^* = v_w^{n+1}$ setzen, woraus rein formal folgt, dass $G_2 \delta p^n|_w = 0$, also die Normalableitung des Druckes an der Wand verschwindet.

2.7 Parallelisierung und Schlussbemerkung

Das entwickelte Rechenprogramm ist vollständig parallelisiert. Alle Rechnungen wurden auf den Parallelrechnern »Cray T3E« der Gesellschaft für wissenschaftliche Datenverarbeitung Göttingen und »Cray T3E« des Konrad-Zuse-Zentrums für Informationstechnik Berlin durchgeführt. Es sind zwei Alternativversionen entwickelt worden: Eine Version, die unter Verwendung des sogenannten »Message-Passing Interface« (MPI) implementiert wurde, sowie eine Version, die direkt Cray T3E spezifische Routinen einsetzt. Während die erste Alternative nahezu auf allen (Parallel)rechnern eingesetzt werden kann, ist die zweite Version für die Cray T3E optimiert.

Für die Parallelisierung wird das Rechengebiet entlang der Hauptströmungsrichtung in *überlappende* Teilgebiete unterteilt. Die zeitliche Entwicklung der N Teilgebiete wird dann parallel von N Prozessoren berechnet. Nach jedem Zeitschritt werden die Randwerte in den Überlappungsbereichen

zwischen den Prozessoren ausgetauscht. Gegenüber einer Parallelisierung mit nicht überlappenden Teilgebieten, muss man die dazu nötige Zusatzzeit in Kauf nehmen. Der große Vorteil ist jedoch, dass die Ergebnisse dann nicht durch die künstlichen Ränder beeinflusst werden. Man erhält exakt die gleiche Strömung, unabhängig davon, in wieviele Gebiete man die Strömung unterteilt.

Die Periodizität des Rechengebietes in den wandparallelen Ebenen ermöglicht die sehr effiziente Lösung der Poissongleichung im Spektralraum. Die sonst üblichen Lösungsmethoden wie »Successive Over Relaxation« (SOR) oder auch Mehrgitterverfahren würden die Rechenzeit eines Zeitschrittes wesentlich erhöhen. Bei nicht periodischen Rechengebieten (zum Beispiel mit Seitenwänden in der z -Richtung) kann das Programm zwar weiterhin verwendet werden, aber für den Löser der Poissongleichung müsste dazu ein anderer Algorithmus implementiert werden.

Der verfügbare Massenspeicher reicht leider bei weitem nicht aus, um die vollständigen Daten einer Strömung – geschweige denn die Daten aller zu untersuchenden Strömungen – zu speichern. Diese müssen über so lange Zeitintervalle simuliert werden, dass die Amplituden der interessierenden Turbulenzgrößen mit hinreichender statistischer Sicherheit ausgewertet werden können. Das bedeutet, dass die Auswertung schon während der Simulation durchgeführt wird, dass also das Rechenprogramm und die für die jeweilige Auswertung notwendige Datenorganisation bei neuen Fragestellungen im Laufe des Vorhabens aktualisiert werden musste und jeweils eine neue Simulation der Strömung nötig war.

Die Auswertungen während der Rechnung erfordern natürlich zusätzliche Rechenzeit, und es stellt sich die Frage, wie man diese Zusatzzeit minimieren kann. Eine Möglichkeit ist die, dass man das Koordinatensystem (KS) mit der mittleren Konvektionsgeschwindigkeit der Strömung mitbewegt. Dann sind die auftretenden Zeitgradienten wesentlich kleiner als bei einem ruhendem KS, sodass die Zeitdifferenz zwischen zwei Strömungsfeldern die zur Mittelung verwendet werden, unter Umständen wesentlich erhöht werden kann. Die zeitlichen Korrelationsfunktionen fallen um so langsamer ab, je mehr man sich der Konvektionsgeschwindigkeit annähert. Jedoch findet man bei unterschiedlichen Wandabständen auch unterschiedliche Konvektionsgeschwindigkeiten. Außerdem unterscheidet sich in Wandnähe die Konvektionsgeschwindigkeit des Drucks von der der drei Geschwindigkeitskomponenten. Man muss also in jedem Fall einen gewissen Mittelwert für die Geschwindigkeit des mitbewegten KS wählen. Des Weiteren hat man nicht in jedem Fall Vorteile gegenüber einem ruhenden KS. So kann etwa bei dem Langzeit- oder auch beim Phasenmittel pro ausgewertetem Zeitschritt oft in der homogenen x - z -Ebene gemittelt werden. Im nächsten Zeitschritt wird das Strömungsmuster um einen gewissen Weg weiter konvektiert sein, aber durch die periodischen Randbedingungen hat man keinen Ein- und keinen Ausfluss, sodass eine erneute Mittelung in derselben Ebene erst dann sinnvoll ist, wenn die zeitliche Entwicklung der Strömung das Muster nennenswert geändert hat. Es ist in dem Fall unerheblich, ob man sich mit der Konvektionsgeschwindigkeit mitbewegt oder nicht.

Man könnte annehmen, dass bei mitbewegtem KS der Rechenzeitschritt größer gewählt werden kann als bei ruhendem KS, da die hohen Zeitfrequenzen hauptsächlich durch die Konvektion der hohen Raumfrequenzkomponenten entstehen. In der jetzigen Implementierung gilt das aus folgendem Grund jedoch nicht: Die Abbruchfehler der Differenzenquotienten sind nicht vollkommen unerwünscht, vielmehr verleihen sie dem Verfahren die Stabilität. Die kinetische Energie kann nur bis zur größten, gerade noch aufgelösten Frequenz transportiert werden, wo sie dissipiert werden muss. (Geschieht das nicht, »explodiert« das Verfahren, das heißt, es wird instabil). Einige Rechenverfahren führen dazu direkt eine künstliche Viskosität ein; hier wird das im Wesentlichen durch die erwähnten Fehlerterme der numerischen Differentiation geleistet.

Ein mitbewegtes KS bringt vor allem beim Auswerten von zeitlichen und räumlich-zeitlichen Spektren Vorteile. Aufgrund der geschilderten Stabilitätsprobleme, kann man damit aber nicht immer Rechenzeit sparen. Prinzipiell sollte man mit einem geeigneten numerischen Verfahren wesentlich größere Vorteile aus einem mitbewegten KS ziehen können, als das hier möglich ist. Von einer vertieften Analyse des Problems wurde aber abgesehen.

2.8 Anwachsrate kleiner Störungen

Ein Standardtest, um ein numerisches Verfahren und dessen Implementierung zu testen, ist die Berechnung des Anwachsens kleiner Störungen aus einer ansonsten laminaren Grundströmung (Canuto et al. 1987; Malik 1985). Konkret wird eine bekannte Lösung der Orr-Sommerfeldgleichung für das zeitliche Anwachsen kleiner (harmonischer) Störungen der zweidimensionalen Kanalströmung dem mittleren Geschwindigkeitsprofil überlagert und zeitlich integriert. Für kleine Störungen wird die Anwachsrate, die aus der numerischen Integration folgt, mit der Anwachsrate verglichen, die aus der Orr-Sommerfeldgleichung folgt. Die lineare Lösung hat folgende Form:

$$u(x, y, t) = (1 - y^2) + \varepsilon \operatorname{Re}\{\underline{\phi}^u(y)e^{i(\alpha x - \underline{\omega}t)}\} \quad (2.33)$$

$$v(x, y, t) = \varepsilon \operatorname{Re}\{\underline{\phi}^v(y)e^{i(\alpha x - \underline{\omega}t)}\} \quad (2.34)$$

Die Eigenfunktionen $\underline{\phi}^u(y)$ und $\underline{\phi}^v(y)$ sowie die Eigenfrequenz $\underline{\omega}$ werden zunächst durch Lösen der Orr-Sommerfeldgleichung für eine vorgegebene räumliche Wellenzahl α bestimmt. Gibt man beispielsweise $\alpha = 1$ und eine Reynoldszahl von $Re = 7500$ vor, so erhält man als die am stärksten angefachte Mode, eine mit der komplexen Frequenz $\underline{\omega} = 0,2498915 + i0,00223498$ ¹⁴. Die zeitliche Zunahme der kinetischen Energie ergibt sich dann aus

$$E(t) = E(0)e^{2\omega_i t}. \quad (2.35)$$

Als Rechengebiet wird der Bereich $-1 \leq y \leq 1$ und $0 \leq x \leq 2\pi$ definiert. In Strömungsrichtung werden periodische Randbedingungen vorgegeben. Die Störungen werden der Grundströmung mit einer kleinen Amplitude – um lineares Verhalten zu gewährleisten – von $\varepsilon = 0,0001$ überlagert. Abbildung 2.7 zeigt den Vergleich zwischen berechnetem Energiezuwachs und dem Energiezuwachs der aus der linearen Stabilitätstheorie folgt. Die Anwachsrate die sich aus der numerischen Simulation ergibt liegt nur geringfügig (ca. 1,5%) unter der Anwachsrate der linearen Stabilitätstheorie. Für die kleine Abweichung ist unter anderem die numerische Viskosität verantwortlich. Änderungen in der Berechnung der finiten Differenzen zeigen sich hier sehr deutlich, sodass verschiedene Implementierungen auf einfache Art beurteilt werden können. Das gezeigte Anwachsverhalten entspricht der Implementierung¹⁵, die für nahezu alle Rechnungen dieser Arbeit verwendet wurde. Bei genauem Hinsehen fällt auf, dass die Anwachsrate erst nach einer gewissen Zeit konstant wird. Die zuvor numerisch ermittelte Orr-Sommerfeldlösung ist wahrscheinlich nicht ganz exakt, sodass ein gewisses Einschwingen nicht vermieden werden konnte. Dieses Einschwingen hat aber sicherlich keinen nennenswerten Einfluss auf die sich einstellende konstante Anwachsrate.

¹⁴ Die zugehörige Geschwindigkeitsverteilung $\underline{\phi}^v(y)$ hat mir freundlicher Weise Theofilis Vassilios (DLR Göttingen) zur Verfügung gestellt. $\underline{\phi}^u(y)$ kann daraus leicht berechnet werden.

¹⁵ Die räumlichen Auflösungen unterscheiden sich jedoch in der Regel.

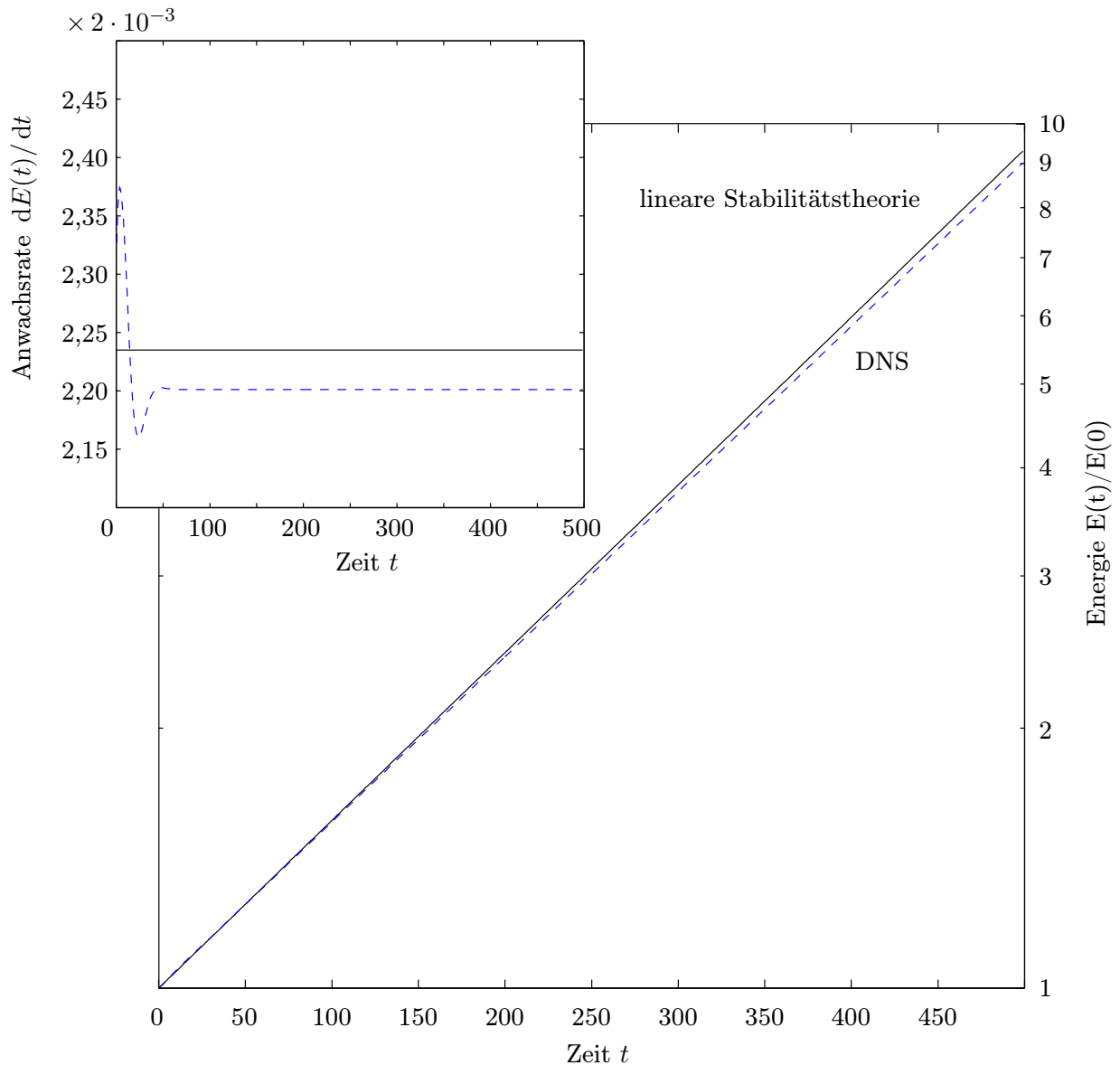


Abb. 2.7: Anstieg der kinetischen Energie kleiner Störungen. Der laminare Grundströmung wurden kleine Störungen in Form der am stärksten angefachten Orr-Sommerfeld Mode ($\alpha = 1$, $Re = 7500$, $\underline{\omega} = 0,2498915 + i0,00223498$) überlagert und das zeitliche Anwachsen der kinetischen Energie numerisch ermittelt. Verglichen wird das Ergebnis mit dem theoretischen Anwachsverhalten $E(t) = E(0)e^{2\omega_i t}$ (lineare Stabilitätstheorie).

3 Daten und Parameter der numerischen und realen Experimente

Zur Verifikation der Simulationsergebnisse wurden vorwiegend experimentelle Daten aus unserer eigenen Arbeitsgruppe und numerische Daten von Gilbert & Kleiser (1991) sowie Moser et al. (1999) verwendet. Die numerischen Vergleichsdaten wurden frei zugänglichen Datenbanken entnommen, lagen also direkt in digitaler Form bereit. Wichtige Parameter der Messungen und der Simulationen sind in diesem Kapitel zusammengestellt. Zunächst folgen die Parameter der eigenen Simulationsrechnungen.

3.1 Numerische Experimente

Als Startfeld der Simulationen wird das Poiseuille-Strömungsprofil vorgegeben. Dieser laminaren Grundströmung werden dann kleine zufällige Störungen überlagert und es wird von dem so modifizierten Feld weitergerechnet. Dabei wird die treibende Kraft so geregelt, dass der Durchfluss immer konstant bleibt. Zwar erfüllt das Strömungsfeld direkt nach der Überlagerung des Zufallsfeldes weder die Navier-Stokes Gleichung noch die Kontinuitätsgleichung, aber bereits der folgende Zeitschritt sorgt dafür, dass beide Gleichungen erfüllt werden. Bei ausreichend hohem Durchfluss dauert es dann etwa 100 bis $150 h/u_b$ bis sich das Laminarprofil deutlich umgeformt hat und die Strömung turbulent wird. Bis die Strömung voll ausgebildet ist, dauert es nochmal etwa $50 h/u_b$. Einen typischen numerischen Transitionsprozess zeigt Abbildung 3.1.

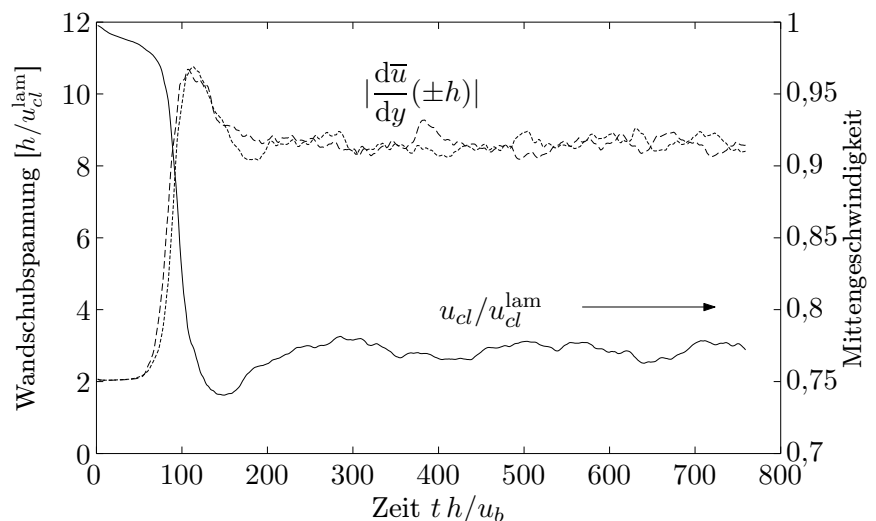


Abb. 3.1
Zeitliche Entwicklung der Wandschubspannung und der Mittengeschwindigkeit während der numerischen Transition. Alle Größen sind jeweils in der x - z -Ebene gemittelt.

Dieser numerische Transitionsprozess sollte nicht mit dem natürlichen Transitionsprozessen verglichen werden, da die Startbedingungen unphysikalisch gewählt wurden. Die vollturbulente Strömung ist aber unabhängig von bestimmten Startbedingungen, denn ihr »Gedächtnis«¹ ist nur von begrenzter Dauer, sodass zeitlich begrenzte Störungen, gleich welcher Art, im Laufe der Zeit vollkommen verschwinden. Für verschiedene Periodenlängen des Rechengebiets und verschiedene räumliche Auflösungen wurden so mehrere voll ausgebildete turbulente Strömungsfelder berechnet. Tabelle 3.1 stellt die wichtigsten Parameter dieser Felder zusammen.

<i>Id</i>	Re_τ	Re_{cl}	L_x/h	L_z/h	$N_x \times N_y \times N_z$	Δx^+	Δy_{min}^+	Δy_{cl}^+	Δz^+
<i>A</i>	207	3864	6,000	3,000	$96 \times 97 \times 96$	13,0	0,820	8,26	6,48
<i>B</i>	207	3847	3,750	1,875	$48 \times 97 \times 48$	16,2	0,820	8,26	8,09
<i>C</i>	206	3862	7,500	3,750	$96 \times 97 \times 96$	16,1	0,816	8,22	8,05
<i>D</i>	206	3839	6,000	3,000	$64 \times 67 \times 64$	19,3	1,260	12,5	9,66
<i>E</i>	206	3850	$3,57\pi$	$1,9\pi$	$128 \times 129 \times 128$	9,03	0,0611	5,02	4,80
<i>F</i>	207	3873	15,00	1,875	$192 \times 97 \times 48$	16,2	0,820	8,26	8,09
<i>G</i>	207	3884	3,750	1,875	$96 \times 97 \times 48$	8,09	0,820	8,26	8,09
<i>H</i>	199	4100	2,500	0,625	$32 \times 97 \times 16$	15,5	0,792	7,92	7,81

Tabelle 3.1: Stationäre Startfelder der Simulationen

Ausgehend von den turbulenten Startfeldern wurden dann die Kanalwände gegenphasig mit verschiedenen Amplituden und Frequenzen harmonisch in axialer Richtung bewegt. Nach einem Einschwingvorgang erhält man so – im statistischen Sinne – eine zeitlich periodische turbulente Strömung. Es wurden etwa 200 instationäre Strömungen berechnet. Eine Zusammenstellung der Parameter findet man im Anhang D. Die wichtigsten Daten der Hauptserien (*A*, *B*, *C* und *D*) sind in der folgenden Beschreibung zusammengestellt.

A-Serie ... 24 Strömungen mit Wandperioden zwischen $T_w = 4,5 h/u_b$ ($\omega_w^+ \approx 24,5 \cdot 10^{-2}$) und $T_w = 476,715 h/u_b$ ($\omega_w^+ \approx 0,211 \cdot 10^{-2}$). Die Wandamplitude betrug $u_w = 0,6 u_b$ ($\approx 0,52 u_{cl} \approx 9,7 u_\tau$). Bei 11 zusätzlichen Simulationen wurde mit halber Wandamplitude gerechnet, bei 5 weiteren mit der viertel Amplitude. Die Zusatzfelder sind im mit $u_c = 0,6 u_b$ mitbewegten Koordinatensystem berechnet worden.

B-Serie ... Mit einer Wandamplitude von $u_w = 0,15 u_b$ ($\approx 0,13 u_{cl} \approx 2,4 u_\tau$) sind 21 verschiedene Simulationen mit Wandperioden zwischen $T_w = 10,125 h/u_b$ ($\omega_w^+ \approx 10,9 \cdot 10^{-2}$) und $T_w = 1500 h/u_b$ ($\omega_w^+ \approx 0,0734 \cdot 10^{-2}$) berechnet worden. Bei 4 zusätzlichen Simulationen wurde mit einer 2,5 fach kleineren Amplitude gerechnet.

C-Serie ... Für 8 verschiedene Wandperioden zwischen $T_w = 51,255 h/u_b$ ($\omega_w^+ \approx 2,14 \cdot 10^{-2}$) und $T_w = 389,25 h/u_b$ ($\omega_w^+ \approx 0,280 \cdot 10^{-2}$) wurden Einzelsimulationen durchgeführt. Die Wandamplitude betrug $u_w = 0,15 u_b$ ($\approx 0,13 u_{cl} \approx 2,4 u_\tau$).

D-Serie ... 22 Strömungen mit Wandperioden zwischen $T_w = 4,5 h/u_b$ ($\omega_w^+ \approx 24,8 \cdot 10^{-2}$) und $T_w = 525 h/u_b$ ($\omega_w^+ \approx 0,193 \cdot 10^{-2}$) und Wandamplituden zwischen $u_w = 0,15 u_b$ und $u_w = 0,6 u_b$ (einmal $u_w = 1,2 u_b$ für $\omega_w^+ = 3,36 \cdot 10^{-2}$).

¹ Etwa das integrale Zeitmaß $\frac{1}{2} \int_0^\infty R(\Delta t) d\Delta t$ (mit einer geeignete Korrelationsfunktion R).

3.2 Experimentelle Vergleichsdaten

Alle vorliegenden Messdaten stammen von Martin Beykirch, Katrin Breuer, Kerstin Hesse und Camilla Völtz, die mir die Daten freundlicherweise zur Verfügung gestellt haben.

In der turbulenten Strömung eines Kanals mit rechteckigem Querschnitt (Abbildung 3.2) wurde die Geschwindigkeit in Hauptströmungsrichtung $u(y, t)$ an festen Orten y als Funktion der Zeit t gemessen, und zwar nacheinander für ca. 20 (je nach Messung) verschiedene Wandabstände. Der Kanal wurde von Ronneberger und Höhler erbaut und basiert auf dem von Reichardt und Eckelmann konstruierten Ölkanal des Max-Planck-Instituts für Strömungsforschung in Göttingen, mit dem Unterschied, dass jetzt die Mess- und Rücklaufstrecken übereinander und nicht mehr nebeneinander angeordnet sind. Die Messstrecke ist $H = 8$ cm hoch, $B = 36$ cm = $4,5 H$ breit und etwa $L \approx 4 m = 50 H$ lang.

Als Strömungsfluid wird Öl verwendet. Es hat bei der üblichen Messtemperatur von $23,2^\circ$ eine kinematische Viskosität von $\nu = 6,24 \frac{\text{mm}^2}{\text{s}}$. Durch die vergleichsweise hohe Viskosität in Kombination mit einer eher kleinen Strömungsgeschwindigkeit erreicht bereits die viskose Unterschicht Abmessungen, die der Messung zugänglich sind. Dennoch sind vor allem wandnahe Messungen problematisch. Damit man sicher sein kann, dass die Turbulenz am Ende der Messstrecke voll entwickelt ist, wurden am Anfang der Messstrecke auf der oberen und unteren Wandbegrenzung Stolperschwellen angebracht, die den Übergang von der laminaren zur turbulenten Strömung beschleunigen.

Die Geschwindigkeit wird am Ende der Messstrecke mit einer Heissfilmsonde nach der Konstant-Temperatur-Methode bestimmt. Die Spannung wird 800 mal in der Sekunde abgetastet und digital im Computer gespeichert. Damit ergibt sich eine Abtastperiode von $\Delta T = 1,25$ ms, was etwa 0,4 viskose Zeiteinheiten entspricht. Für jeden Messpunkt, d.h. für die unterschiedlichen wandnormalen Positionen der Sonde, werden typischerweise etwa 10^6 Spannungswerte gespeichert – das entspricht einer Messdauer von rund 20 Minuten. Die Spannungen werden mit einer vorher ermittelten Eich-tabelle (dazu wird die Sonde mit definierter Geschwindigkeit durch das ruhende Öl gezogen) in Geschwindigkeiten umgerechnet. Außerdem wird von dem so erhaltenen Signal noch ein Störsignal abgezogen, um die vom Netzbrummen und der Drehschieberpumpenfrequenz herrührenden Störungen herauszufiltern.

Weitere Einzelheiten zu den Messungen findet man in der Doktorarbeit von Beykirch (1996) sowie in den Diplomarbeiten von Breuer (1995) und Hesse (1995).

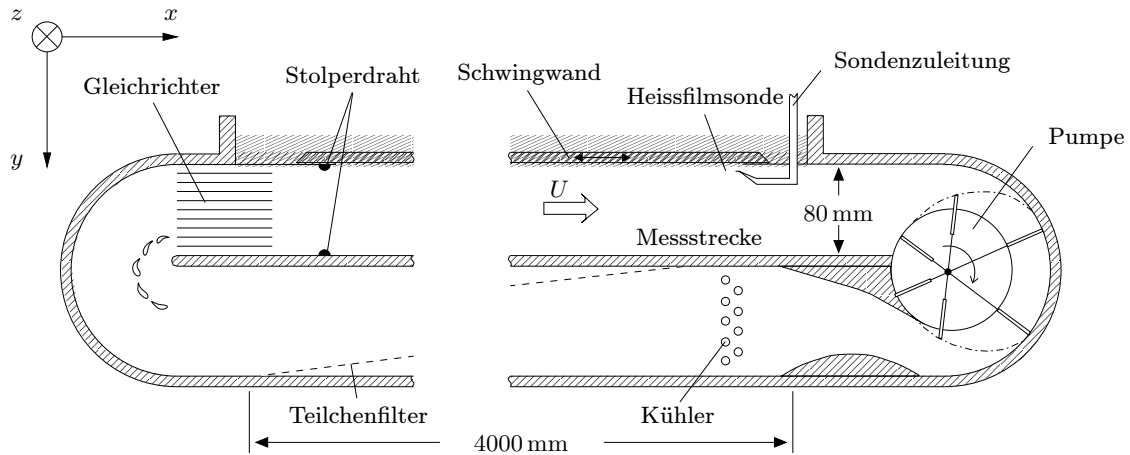


Abb. 3.2: Schematische Darstellung des Ölkanals in der Seitenansicht.

Höhe	$H = 80 \text{ mm} = 577 l_*$
Breite	$B = 360 \text{ mm} = 2596 l_* = 4,5 H$
Länge	$L = 4 \text{ m} = 28846 l_* = 50 H$
Mitten-Reynoldszahl	$Re_{cl} = U_{cl}(H/2)/\nu = 5513$
Wand-Reynoldszahl	$Re_\tau = u_\tau(H/2)/\nu = 288$
Mittengeschwindigkeit	$U_{cl} = 860 \text{ mm/s}$
Kinematische Viskosität	$\nu = 6,24 \text{ mm}^2/\text{s}$
Wandschubspannungsgeschwindigkeit	$u_\tau = 45 \text{ mm/s}$
Viskose Zeiteinheit	$t_* = 3,08 \text{ ms}$
Viskose Längeneinheit	$l_* = 0,139 \text{ mm}$
Abtastfrequenz	$1/\Delta t = 800 \text{ Hz} = 2,47/t_*$
Überhitzungsverhältnis	$(R_w - R_k)/R_k = 1,8\%$
Heissfilmsonde	TSI 1276-10AW

Tabelle 3.2: Parameter der Messungen

3.3 Numerische Vergleichsdaten

Neben Vergleichen mit den experimentellen Daten die in unserer Arbeitsgruppe gewonnen wurden, werden einige Ergebnisse mit numerischen Daten von Gilbert & Kleiser (1991) und Moser et al. (1999) verglichen.

Gilbert & Kleiser (1991)

Mit einem Spektralverfahren (160 \times 160 Moden in x - und z -Richtung, Chebyshev Polynome der Ordnung 128 in y -Richtung) haben Gilbert & Kleiser die turbulente Kanalströmung simuliert. In ihrer Implementierung wurde – wie bei uns – der Durchfluss konstant gehalten. Um Rechenzeit zu sparen, wurde die spannweite Symmetrie der Kanalströmung fest vorgegeben.

Re_τ	Re_{cl}	L_x/h	L_z/h	$N_x \times N_y \times N_z$	Δx^+	Δy_{cl}^+	Δz^+
211	3831	$3,57\pi$	$1,9\pi$	$160 \times 128 \times 160$	14,8	5,2	7,4

Moser et al. (1999)

Auch Moser et al. benutzen ein Spektralverfahren zur Simulation der turbulenten Kanalströmung. Die folgende Zusammenstellung zeigt die Parameter ihrer drei Simulationen.

Re_τ	Re_{cl}	L_x/h	L_z/h	$N_x \times N_y \times N_z$	Δx^+	Δy_{cl}^+	Δz^+
178,13	3260	4π	$\frac{4}{3}\pi$	$128 \times 129 \times 128$	17,7	5,9	4,4
392,24	7897	2π	π	$256 \times 193 \times 192$	10,0	6,5	6,5
587,19	12485	2π	π	$384 \times 257 \times 384$	9,7	4,8	7,2

4 Physikalische Grundlagen und Details der Auswertung

In diesem Kapitel werden einige grundlegende physikalische Gesetzmäßigkeiten der (turbulenten) Kanalströmung bzw. der wandbegrenzten (turbulenten) Scherströmung aufgeführt. Der kurze Überblick enthält die für die Untersuchungen relevanten Aspekte, unter anderem die der instationären Strömung. Meist wird ein konkreter Bezug zur vorliegenden Arbeit gegeben. Die Mehrzahl der in den folgenden Kapiteln gemachten Auswertungen beruht auf der Analyse von Modulationsfaktoren. Die Definition und das zugrundeliegende Konzept findet sich am Ende dieses Kapitels.

4.1 Turbulente Kanalströmung

Die Strömung zwischen zwei unendlich ausgedehnten parallel angeordneten Platten wird üblicherweise als Kanalströmung bezeichnet. Diese idealisierte Strömung lässt sich weder im Experiment noch in der Simulation exakt realisieren. Im Experiment hat man immer einen Ein- und Ausström-bereich sowie begrenzende Seitenwände. In der Simulation setzt man ein endliches Gebiet periodisch fort. Getrieben wird die Strömung von einer äußeren Kraft bzw. einem aufgeprägtem Druckgradienten. Ab einem gewissen Verhältnis der Trägheitskräfte zu den viskosen Kräften geht die rein laminare Poiseuille-Strömung über in einen turbulenten Zustand – ausgezeichnet durch ein hohes Maß an unregelmäßigen räumlichen und zeitlichen Fluktuationen von Geschwindigkeit, Druck und anderen Strömungsgrößen. Die zur turbulenten Durchmischung erforderliche Energie, wird der mittleren Strömung entnommen, sodass z.B. bei vorgegebenem konstantem Druckgradient der Durchfluss einer turbulenten Kanalströmung deutlich unter dem Durchfluss der rein laminaren Strömung liegt.

Die in der turbulenten Kanalströmung auftretende Schubspannung wird fast im gesamten Kanal durch die turbulente Schubspannung ($-\rho\overline{u'v'}$) dominiert. Lediglich in der Nähe der festen Wände – an denen das Fluid haftet – kann die viskose Schubspannung ($\mu d\bar{u}/dy$) nicht vernachlässigt werden. Die Größe dieses Bereiches wird durch die Reynoldszahl bestimmt. Mit steigender Reynoldszahl wird der Bereich immer kleiner. Das universelle Wandgesetz besagt aber, dass für hinreichend hohe Reynoldszahlen unter anderem der Verlauf des mittleren Geschwindigkeitsprofils, ausgedrückt in Wandeinheiten¹, in unmittelbarer Nähe der Wand unabhängig von der Reynoldszahl ist, es gilt dann $\bar{u}^+ = f(y^+)$. Hinreichend hohe Reynoldszahlen sind bei den bis heute durchführbaren direkten numerischen Simulationen jedoch schwerlich zu erreichen. Ebenso beschränken sich viele Experimente auf vergleichsweise kleine Reynoldszahlen.

¹ Solche Einheiten ergeben sich durch Entdimensionalisierung mit der Wandschubspannungsgeschwindigkeit $u_\tau = \sqrt{\bar{\tau}_w/\rho}$ und der kinematischen Viskosität ν . Die entsprechenden Größen werden üblicherweise mit einem hochgestellten Pluszeichen gekennzeichnet.

Für die Dynamik wandbegrenzter turbulenter Strömung ist der wandnahe Bereich besonderes wichtig. Ganz dicht an der Wand ($y^+ \lesssim 5$) findet man die viskose Unterschicht, in der die turbulenten Spannungen noch keine nennenswerte Rolle spielen. Sie gewinnen aber kurz außerhalb der viskosen Unterschicht, innerhalb der sogenannten Pufferschicht, sehr schnell an Bedeutung und sorgen zusammen mit der mittleren Scherrate für die maximale Produktion turbulenter kinetischer Energie bei $y^+ \approx 12$. Sie wird der mittleren Strömung entzogen. Auch die stark intermittent auftretenden turbulenten Schwankungsbewegungen nehmen innerhalb der Pufferschicht ihr Maximum an. Innerhalb der Pufferschicht wird mehr turbulente kinetische Energie produziert als dissipiert und es kommt unter anderem zu einem Transport dieser Energie in wandfernere Bereiche. Außerhalb der inneren Wandgrenzschicht, bei der Kanalströmung im Mittenbereich zwischen den Wänden, wird dagegen insgesamt mehr kinetische Energie dissipiert als produziert, sodass in diesem Bereich der Transport der Energie aus den wandnahen Bereichen zum Aufrechterhalten der Turbulenz notwendig ist. Umgekehrt ist die Außenströmung (Kanalmittenströmung) nicht zwingend für die Turbulenz erforderlich, wie Jiménez & Pinelli (1999) zeigen konnten.

Die bekannte logarithmische Schicht trennt bzw. verbindet die Außenströmung (Kanalmittenströmung) von bzw. mit der die Turbulenz produzierenden inneren Grenzschicht. Produktion und Dissipation halten sich nahezu die Waage und die Gesamtschubspannung ist grob genähert in etwa konstant². Jiménez & Pinelli (1999) vergleichen die logarithmische Schicht mit dem Inertialbereich der Energiekaskade isotroper Turbulenz, wobei der Begriff Bereich zwei ganz unterschiedliche Bedeutungen hat – Raumbereich bei der logarithmischen Schicht bzw. Raumfrequenzbereich bei der Energiekaskade. Das logarithmische Profil ist eine Folge der als konstant angenommenen Schubspannung und der mit $u_\tau^3/\kappa y$ proportional zu $1/y$ angesetzten Dissipation (Townsend 1976).³ Die Äquivalenz von Produktion und Dissipation in der logarithmischen Schicht impliziert dann

$$u_\tau^2 \frac{d\bar{u}}{dy} = \frac{u_\tau^3}{\kappa y} \quad \Rightarrow \quad \bar{u}^+ = \frac{1}{\kappa} \log y^+ + C. \quad (4.1)$$

mit

$\kappa \approx 0,4$ von Kármánsche Konstante; $C \approx 5,5$.

Die Reynoldszahlen der Simulationen sind vergleichsweise klein, sodass man eigentlich keine logarithmische Schicht erwarten kann. Dennoch zeigt sich in dem mittleren Geschwindigkeitsprofil schon für relativ kleine Reynoldszahlen ein mehr oder minder ausgebildeter logarithmischer Geschwindigkeitsbereich, trotz der nicht konstanten Schubspannung. Vergleiche dazu die Abbildung 5.1 auf Seite 48. Bei derart kleinen Reynoldszahlen, wie sie in Simulationen derzeit möglich sind und die auch von vielen Experimenten nicht wesentlich übertroffen werden, erstreckt sich der scheinbare logarithmische Anstieg über einen so kleinen Bereich, dass man darin keinesfalls eine Bestätigung der Universalität von Gleichung (4.1) sehen darf. Es lassen sich auch andere Abhängigkeiten herleiten, etwa ein Potenzgesetz (Barenblatt et al. 1993). Bei höheren Reynoldszahlen wurden etwa im »Superpipe«-Experiment (Zagarola & Smits 1997) beide Abhängigkeiten gefunden (wandnah ein Potenzgesetz, wandentfernter das logarithmische Gesetz).

² Das gilt aber nur für hinreichend hohe Reynoldszahlen, streng erst für $Re \rightarrow \infty$.

³ Häufig findet man (zum Beispiel in Rotta 1972) auch eine Herleitung über die Ähnlichkeitshypothese (universelles Wandgesetz).

4.2 Reynolds Gleichungen

Im Gegensatz zur normalen Grenzschichtströmung benötigt man zur Aufrechterhaltung der Kanalströmung einen mittleren Druckgradienten $\partial\bar{p}/\partial x$ bzw. eine mittlere treibende Kraft \bar{f}_1 in Strömungsrichtung. Die Gesamtschubspannung ist für die stationäre Kanalströmung eine lineare Funktion des Wandabstandes y . Des Weiteren verschwinden die mittleren Geschwindigkeiten \bar{v} und \bar{w} und die Reynoldsschen Gleichungen nehmen damit folgende Form an:

$$-\bar{f}_1 + \frac{\partial\bar{p}}{\partial x} = -\frac{d\overline{u'v'}}{dy} + \nu \frac{d^2\bar{u}}{dy^2} \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial\bar{p}}{\partial y} = -\frac{d\overline{v'^2}}{dy}. \quad (4.3)$$

Daraus folgen, nach einer Integration in y -Richtung und unter Beachtung des globalen Kräftegleichgewichtes $\rho\bar{f}_1 h = \bar{\tau}_w$, folgende Kräftebilanzen:

$$\mu \frac{d\bar{u}}{dy} - \overline{\rho u'v'} = \bar{\tau}_w \left(1 - \frac{y}{h}\right) \quad (4.4)$$

$$\overline{p^{(\text{dyn})}} + \overline{\rho v'^2} = \overline{p_w^{(\text{dyn})}}. \quad (4.5)$$

Wie im laminaren Fall ist die Gesamtschubspannung (Gleichung 4.4) für die voll ausgebildete turbulente Kanalströmung eine lineare Funktion des Wandabstandes.

Das nichtlineare Glied der Navier-Stokes Gleichung taucht zwar nicht mehr auf, sodass eine Integration der Gleichungen im Prinzip leicht möglich ist, aber der Zusammenhang zwischen den turbulenten Spannungen $-\overline{\rho u'v'}$ bzw. $-\overline{\rho v'^2}$ und den viskosen Spannungen $\mu d\bar{u}/dy$ bzw. \bar{p} kann nicht auf einfache Weise aus den Navier-Stokes Gleichung hergeleitet werden (Schließungsproblem). Es ist nicht einmal klar, ob zum Beispiel allgemein ein funktionaler Zusammenhang zwischen der Reynoldsschen Schubspannung und der Verformungsgeschwindigkeit besteht. Turbulenzmodelle versuchen durch mehr oder minder heuristische Annahmen einen derartigen Zusammenhang herzustellen, direkt oder auch indirekt. Sie versagen aber im Allgemeinen bei der Modellierung instationäre Strömungen, wenn sich beispielsweise $d\bar{u}/dy$ zeitlich ändert, so wie in der vorliegenden Untersuchung.

Ein Grund dafür, dass die für stationäre Strömungen entwickelten Turbulenzmodelle im instationären Fall nicht anwendbar sind, ist darin zu sehen, dass in der Regel keine Relaxationszeit⁴ berücksichtigt wird bzw. ein elastisches Verhalten der turbulenten Schubspannung nicht beachtet wird. Wie sich noch zeigen wird, kann das schon früh postulierte elastische Verhalten (Crow 1968; Davis 1972) durch unsere Untersuchungsmethode eindeutig belegt werden, sodass ein universell einsetzbares Turbulenzmodell diese Eigenschaft der turbulenten Strömungsstruktur enthalten sollte.

Im instationären Fall werden die Reynoldsgleichungen zeitabhängig:

$$\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t} - \tilde{f}_1 + \frac{\partial\tilde{p}}{\partial x} = -\frac{\partial\widetilde{u'v'}}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial y^2} \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial\tilde{p}}{\partial y} = -\frac{\partial\widetilde{v'^2}}{\partial y}. \quad (4.7)$$

Man beachte, dass dabei u' (v' entsprechend) als $u'(t) = u(t) - \tilde{u}(t) - \bar{u}$ definiert ist. Bei der Lösung der Gleichung hat man es mit einem erweiterten Schließungsproblem zu tun, denn nun muss

⁴ Zeit bis die turbulente Schubspannung auf eine Änderung in der Scherrate reagiert bzw. Zeit bis die Strömung nach einer Änderung wieder in einen Gleichgewichtszustand gelangt ist.

die zeitlich modulierte Wechselschubspannung $-\rho\widetilde{u'v'}$ geeignet modelliert werden. Im Grenzfall der quasilaminaren Modulation kann man $-\partial\widetilde{u'v'}/\partial y$ in Gleichung (4.6) vernachlässigen und die Gleichung analytisch lösen. Es ergibt sich die bekannte Stokeslösung. Im Grenzfall der quasistationären Modulation können Schließungsmodelle, die für den stationären Fall entwickelt wurden, eingesetzt werden. Im allgemeinen Fall, wenn also die Modulationsfrequenz mit Bereich typischer Turbulenzfrequenzen liegt, sind geeignete Schließungsannahmen sehr viel schwerer zu finden und bis jetzt gibt es dazu noch keinen befriedigenden Lösungsansatz.

4.3 Kinetische Energie und Energiehaushalt

Zum Verständnis von turbulenten Scherströmungen ist der Energiehaushalt, das heißt, die Bilanz der kinetischen Energie im Strömungsfeld, ein wichtiges Hilfsmittel. Bei der Entwicklung und Überprüfung von Turbulenzmodellen ist die Kenntnis der einzelnen Terme von besonderem Interesse. Experimentell kann man sie aber, vor allem im wandnahen Bereich, nur schwer ermitteln. Bei instationärer Strömung ist, neben der komplizierten Wechselwirkung der einzelnen Terme, besonders deren zeitliche Modulation interessant.

Für die turbulente kinetische Energie $k = (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})/2$ gilt folgende Gleichung:

$$\frac{\partial k}{\partial t} = \underbrace{-\overline{u'v'}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}}_{P : \text{Produktion}} - \underbrace{\nu\frac{\partial u'_j}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u'_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_k}{\partial x_j}\right)}_{\varepsilon : \text{Dissipation}} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}\left(\overline{(k+p)v'} - \nu\frac{\partial k}{\partial y} - \nu\frac{\partial v'^2}{\partial y}\right)}_{\text{Diffusion}}. \quad (4.8)$$

Dabei ist bei instationären Strömungen der Mittelungsoperator $\overline{(\cdot)}$ mit dem Erwartungswert $\mathcal{E}[\cdot]$ gleichzusetzen. Insbesondere kann bei der hier aufgeprägten periodischen Instationarität das Phasenmittel eingesetzt werden. Bei stationären turbulenten Strömungen verschwindet die Zeitableitung also der Term $\partial k/\partial t$.

Der Produktionsterm P der Gleichung (4.8) findet sich – mit umgekehrten Vorzeichen – auch in der Gleichung für die kinetische Energie $K = \bar{u}^2/2$ der Gleichströmung:

$$\frac{\partial K}{\partial t} = \overline{u'v'}\frac{d\bar{u}}{dy} - \nu\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\right)^2 + \nu\frac{\partial^2 K}{\partial y^2} + \bar{u}(f_1 - \frac{\partial\bar{p}}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial y}(\bar{u}\overline{u'v'}). \quad (4.9)$$

Der zweite Term der rechten Seite ist die, durch die Scherrate bedingte, direkte Dissipation. Der dritte Term ist die Arbeit, die durch die viskosen Spannungen geleistet wird, der vierte und fünfte Term sind die Arbeit des totalen Drucks und die Arbeit die durch turbulente Spannungen geleistet wird.

Bemerkung: Die viskose Dissipation nimmt für homogene Turbulenz die einfache Form $\varepsilon = \overline{\frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}}$ an. Für die turbulente Kanalströmung, die nur in y -Richtung nicht homogen ist, kommt noch der Ausdruck $\partial^2\overline{v'^2}/\partial y^2$ hinzu. Das Zusatzglied ist aber sehr klein. Im Kanal wird die Dissipation durch die drei Glieder (a): $(\partial u'/\partial y)^2$, (b): $(\partial w'/\partial y)^2$ und (c): $(\partial u'/\partial z)^2$ dominiert, die sechs anderen Beiträge können in guter Näherung vernachlässigt werden. In unmittelbarer Wandnähe ist auch (c) klein und der größte Beitrag stammt hier von (a). Ab etwa $y^+ > 10$ sind (a) und (c) von gleicher Größe und (b) ist eher klein.

4.4 Mikroskala

Die kleinste Skala der Bewegung λ ist diejenige Skala auf der die eingebrachte Energie dissipiert wird. Je kleiner die Viskosität, desto kleiner muss offenbar diese Skala sein. Neben der Viskosität ν hängt diese Mikroskala nur noch von der viskosen Dissipation ε ab. Die Turbulenz befindet sich für die großen Wellenzahlen (kleines λ) in einem statistischen Gleichgewicht, jedenfalls für große Reynoldszahlen. Die Beziehung $\lambda = \lambda(\varepsilon, \nu)$ lässt sich durch eine Dimensionsanalyse herleiten. Berücksichtigen man, dass ν die Dimension Länge²/Zeit hat, dann lautet die einzig mögliche Kombination mit der Einheit einer Länge

$$\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4}. \quad (4.10)$$

Ebenso ergibt

$$\varphi \stackrel{\text{def}}{=} (\nu\varepsilon)^{1/4} \quad (4.11)$$

eine typischen Mikrogeschwindigkeit. Die mit dieser Mikrolänge und Mikrogeschwindigkeit gebildete (Kolmogoroff-)Reynoldszahl ist damit immer 1. In wandbegrenzter Strömung liegt die Kolmogoroff-Länge in der Größenordnung der viskosen Länge ν/u_τ und die Kolmogoroff-Geschwindigkeit in der Größenordnung der Wandschubspannungsgeschwindigkeit u_τ . Das sieht man sofort, wenn die Dissipation mit dem Wandgradient (größter Dissipationsbeitrag) abgeschätzt wird. Dann ist $\varepsilon = \nu(d\bar{u}/dy)_w^2 = u_\tau^4/\nu$ und damit $\lambda = \nu/u_\tau$ sowie $\varphi = u_\tau$.

Mit der Mikroskala kann man eine Abschätzung für die Rechenzeit von direkten numerischen Simulationen angeben. Sei L die Abmessung der größten Wirbel im Kanal und λ die der kleinsten Wirbel, dann ist die Zahl N der Wirbel in L^3 proportional zu $(L/\lambda)^3$. Es gilt $N \approx L^3 \varepsilon^{3/4} / \nu^{9/4} = Re^{9/4}$, mit der Reynoldszahl $Re = UL/\nu$. Für direkte numerische Simulationen – alle Skalen müssen aufgelöst werden – wird deutlich, wie stark der Rechenaufwand mit der Reynoldszahl ansteigt. Eine Abhängigkeitsanalyse von der Reynoldszahl wäre zwar auch für unsere Untersuchungen wünschenswert und interessant, ist aber auf absehbare Zeit mangels ausreichender Rechenleistung nicht machbar. Insbesondere die Untersuchung der instationären Strömung erfordert lange Mittelungszeiten. Viele unterschiedliche Konfigurationen (vor allem Anregungsfrequenzen) müssen einzeln simuliert werden. Die Reynoldszahlabhängigkeit für einen sehr kleinen Bereich von $Re_\tau = 180$ bis $Re_\tau = 590$ haben kürzlich Moser et al. (1999) mittels einer direkten numerischen Simulation untersucht, aber nur für die stationäre Kanalströmung.

4.5 Blasius Gesetz

Dean (1978) hat eine empirische Formel für die Abhängigkeit der Wandschubspannungsgeschwindigkeit u_τ von der über die Kanalhöhe gemittelten Geschwindigkeit u_b angegeben. Die Abhängigkeit der Wand-Reynoldszahl von der Durchfluss-Reynoldszahl ergibt sich damit zu

$$Re_\tau \approx 0,12 Re_Q^{7/8}. \quad (4.12)$$

Dies ist zum einen ein brauchbarer Test für die Richtigkeit der durchgeführten DNS, zum anderen ist die Formel auch für die instationäre Strömung wichtig. Die Wandschubspannungsgeschwindigkeit ist die wichtigste Normierungsgröße für unsere Untersuchungen, sie wird aber bei jeder instationären Strömung selbst moduliert, zusätzlich zu der Größe, deren Modulation eigentlich untersucht werden soll. Vor allem im quasistationären Grenzfall unterscheidet sich der über alle Phasen gemittelte

u_τ -Wert von dem der stationären Strömung, er erhöht sich je nach Amplitude der Störung mehr oder weniger stark. Mit Hilfe der $Re_Q^{7/8}$ -Abhängigkeit wird später (Abschnitt 5.1.2 auf Seite 49) eine Abschätzung für die Erhöhung gegeben. Im quasistationären Grenzfall ist der Gesamtwiderstand der Kanalströmung immer größer, als der für die stationäre Strömung. Nur bei kleinen Amplituden ist der Effekt zu vernachlässigen.

4.6 Strömung zwischen oszillierenden ebenen Wänden

Lässt man eine unendlich ausgedehnte ebene Wand, über der sich ein zunächst ruhendes zähes Fluid befindet, geradlinig harmonisch in ihrer Ebene schwingen, so stellt sich nach einer Einschwingphase folgende Geschwindigkeitsverteilung über der Wand ein (Schlichting 1958):

$$\tilde{u}(y, t) = \tilde{u}(0, t) \cdot e^{-(i+1)y/l_s} \quad \text{mit} \quad l_s = \sqrt{2\nu/\omega_w}, \quad y \geq 0. \quad (4.13)$$

Dabei ist $\tilde{u}(y, t)$ ⁵ die Geschwindigkeit zur Zeit t im Abstand y von der Wand. Die zeitvariable Wandgeschwindigkeit ist durch die (komplexe) Amplitude \hat{u}_w und die Kreisfrequenz ω_w festgelegt: $\tilde{u}(0, t) = \hat{u}_w e^{i\omega_w t}$. Die Geschwindigkeitsverteilung $u(y, t)$ ist eine Schwingung mit nach außen stark abnehmender Amplitude. Nach der sogenannten Stokeslänge l_s ist die angeregte Scherwelle auf den $(1/e)$ 'ten Teil der Wandamplitude abgefallen. Je größer die Frequenz der Schwingung und je kleiner die kinematische Zähigkeit des Fluids ist, um so schneller fällt somit die Amplitude der Welle ab.

Befindet sich im Abstand $2h$ eine weitere Wand, die a) nicht, b) gleichphasig oder c) gegenphasig schwingt, so stellt sich folgende Verteilung ein ($-h \leq y \leq h$):

$$\tilde{u}(y, t) = \tilde{u}(-h, t) \begin{cases} \frac{\sinh((i+1)(h-y)/l_s)}{\sinh((i+1)(2h)/l_s)} & \text{a)} \\ \frac{\cosh((i+1)y/l_s)}{\cosh((i+1)h/l_s)} & \text{b)} \\ -\frac{\sinh((i+1)y/l_s)}{\sinh((i+1)h/l_s)} & \text{c)} \end{cases} \quad (4.14)$$

Anmerkung 1: Mit Hilfe der Gleichung (4.13) lässt sich auch leicht die Geschwindigkeitsverteilung für den Fall berechnen, dass die Wand beliebige periodische – nicht notwendigerweise monofrequente – Schwingungen ausführt. Da es sich um ein lineares Problem handelt (der nichtlineare Term der Navier-Stokes Gleichung taucht nicht auf) kann man einfach die periodische Schwingung nach Fourier in Einzelfrequenzen zerlegen und alle Stokeswellen superponieren.

Anmerkung 2: Strömt das Fluid über der Wand bzw. zwischen den Wänden zusätzlich turbulent – sowie es hier untersucht werden soll – dann sind die Verhältnisse weitaus komplizierter und die Stokeslösung findet man allenfalls für sehr hohe Frequenzen in unmittelbarer Wandnähe.

⁵ Physikalisch sinnvolle Werte ergeben sich, wenn man den Realteil der entsprechenden Größe betrachtet.

4.7 Einschwingvorgang

Alle Beziehungen des vorherigen Abschnittes gelten nur für den eingeschwungenen Zustand. Eine Änderung der Randbedingung wird im laminaren Fall nur über einen reinen Diffusionsprozess senkrecht zu der Wand weitergeleitet.

Man betrachte dazu wieder eine einzelne Wand, die zur Zeit $t = 0$ plötzlich von der Geschwindigkeit Null auf die Geschwindigkeit U_0 beschleunigt wird. Dann erhält man für $t > 0$ folgende Geschwindigkeitsverteilung über der Wand:

$$u(y, t) = U_0 \left(1 - \operatorname{erf} \left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}} \right) \right). \quad (4.15)$$

Wobei erf die sogenannte Fehlerfunktion

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi \quad (4.16)$$

ist. Man kann den Vorgang auch so beschreiben: Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird Wirbeligkeit ($\omega_z = -\partial u / \partial y$) der Stärke $-U_0/2$ erzeugt, die dann integral erhalten bleibt und sich von der Wand her ausbreitet. Der Schwerpunkt der induzierten Wirbeligkeit bewegt sich proportional zu $\sqrt{\nu t}$. Viel schneller breitet sich dagegen die Störung in einer turbulenten Strömung aus, denn dann gibt es neben der rein viskosen Diffusion auch weitere Transportprozesse⁶: turbulente Diffusion und Konvektion. Wichtiger sind aber in der Regel andere turbulente Prozesse, die sich nicht als Transport betrachten lassen: Produktion, Dissipation und weitere Prozesse an denen unter anderem der Druck beteiligt ist.

Die sogenannten Sprungantwort – im linearen Fall ist das Gleichung (4.15) – enthält die gesamte Information des (linearen) Systems, das heißt, man kann für eine beliebige Wandbewegung, die nicht periodisch sein muss – insbesondere z.B. Einschwingvorgänge – den zeitlichen Verlauf der Geschwindigkeit an einem beliebigen Ort y über der Wand berechnen. Die zeitliche Ableitung der Sprungantwort ist die Impulsantwort des Systems, diese vermittelt meist eine anschaulichere Vorstellung vom Systemverhalten als die Sprungantwort; sie ist für den laminaren Fall in Abbildung 4.1 zu sehen. Gezeigt ist die Geschwindigkeitsverteilung (Impulsantwort)

$$u(y, t) = \frac{A_0}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{y}{2t\sqrt{\nu t}} e^{-y^2/4\nu t} \quad (4.17)$$

in der Raum-Zeit-Ebene. Sie ergibt sich als Reaktion auf eine plötzliche Auslenkung der Wand am Ort $y = 0$ zur Zeit $t = 0$ mit der Amplitude A_0 ⁷. Die maximale Reaktion an einem festen Ort y_0 erhält man zur Zeit $y_0^2/6\nu$. Für eine gegebene Zeit t_0 befindet sich das Geschwindigkeitsmaximum am Ort $\sqrt{2\nu t_0}$. Beide Grenzfälle sind durch Linien in der Abbildung markiert. Auch sind zwei Querschnitte durch die $u(y, t)$ Verteilung gezeigt, einmal für einen festen Ort und einmal für eine feste Zeit. Man kann gut erkennen, dass sich die Störung vergleichsweise langsam ausbreitet und dabei schnell »auseinander läuft«. In der turbulenten Strömung breiten sich Störung viel schneller aus, denn neben der reinen Diffusion gibt es auch weitere Transportprozesse, an denen vor allem die turbulente Schubspannung beteiligt ist.

⁶ Viele verschiedene Größen können dabei betrachtet werden, etwa: Impuls, Wirbeligkeit, Schubspannung, kinetische Energie usw.

⁷ A_0 hat die Dimension einer Länge.

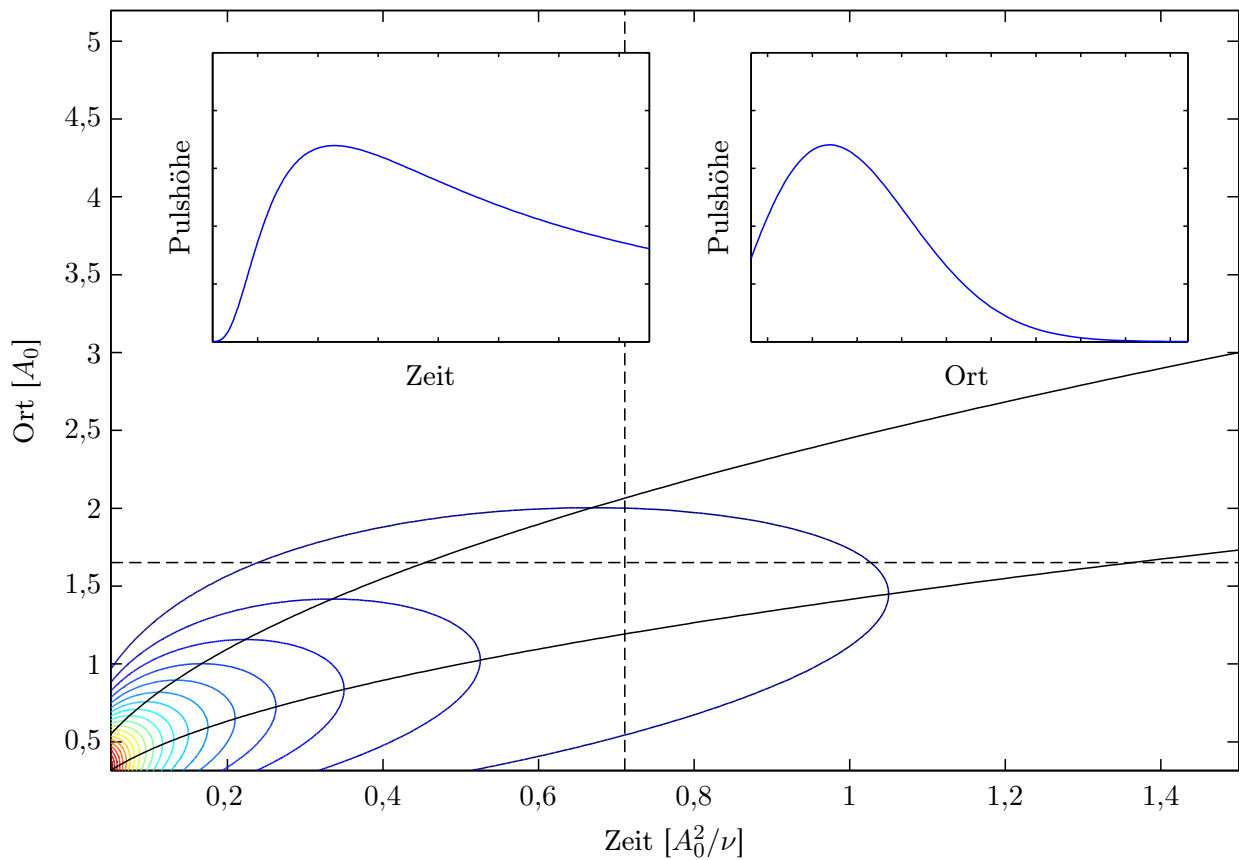


Abb. 4.1: Impulsantwort $u(y,t)$ in der Raum-Zeit-Ebene für ein anfangs ruhendes oder laminar strömendes Fluid. Die durchgezogenen schwarzen Kurven kennzeichnen die maximale Reaktion an einem festen Ort (obere Kurve) bzw. zu einer festen Zeit (untere Kurve). Die gestrichelten Kurven kennzeichnen die im oberen Teil gezeigten Schnitte durch die $u(y,t)$ Verteilung.

Anmerkung: Die Information des Einschwingvorganges (genauer die gesamte Sprungantwort) ist bereits in Gleichung (4.13) bzw. in Gleichung (4.14) enthalten. Kennt man nämlich die Antwort eines linearen Systems für alle Anregungsfrequenzen, so kann man durch eine Fourier-Rücktransformation die Impulsantwort und damit auch die Sprungantwort berechnen.

4.8 Modulationsfaktoren

Die Reaktion der Strömung auf eine periodische Anregung lässt sich am übersichtlichsten beschreiben, wenn man das Phasenmittel der interessierenden Größe $q(t)$ betrachtet. Bei einer Wandperiode von T_w und einer Mess- bzw. Rechenzeit von $M \cdot T_w$ ist dies

$$\langle q \rangle(t) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} q(t \bmod T_w + mT_w). \quad (4.18)$$

Man mittelt also nur über äquivalente Zeitpunkte – das sind hier solche mit gleicher Phase der Anregung. Der turbulente Anteil $q'(t)$ des Zeitsignals $q(t)$ ist dann definiert als Differenz des Signals

zum Phasenmittel $\langle q \rangle(t)$. Des Weiteren bezeichnet man als Wechselanteil $\tilde{q}(t)$ die Differenz zwischen Phasenmittel und Langzeitmittel \bar{q} , das nach Gleichung (4.18) auch der Mittelwert des Phasenmittels ist⁸. Somit ergibt sich folgende Dreierzerlegung:

$$q(t) = \underbrace{\bar{q} + \tilde{q}(t)}_{\langle q \rangle(t)} + q'(t). \quad (4.19)$$

Das in t periodische Phasenmittel, kann man nach Fourier noch weiter in harmonische Schwingungen bezüglich der Wandperiode T_w zerlegen:

$$\langle q \rangle(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_q^{(n)} e^{in\omega_w t} \quad \text{mit} \quad A_q^{(n)} = \frac{1}{T_w} \int_0^{T_w} \langle q \rangle(t) e^{-in\omega_w t} dt. \quad (4.20)$$

Es ist üblich und praktisch, bei periodischen Vorgängen mit analytischen Signalen zu rechnen. Im Spektrum entfallen die bei reellen Signalen vorhandenen aber redundanten negativen Frequenzen, die Amplituden der positiven Frequenzkomponenten werden verdoppelt. Das analytische Phasenmittel ist somit:

$$\langle q \rangle(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{q}^{(n)} e^{in\omega_w t} \quad \text{mit} \quad \hat{q}^{(n)} = \begin{cases} A_q^{(n)} & \text{für } n = 0 \\ 2A_q^{(n)} & \text{für } n > 0 \\ 0 & \text{für } n < 0 \end{cases} \quad (4.21)$$

Der Realteil des analytischen Signals ist der physikalisch relevante Teil. Wichtig ist, dass immer wenn nichtlineare Funktionen von modulierten Größen auftreten, überall die Realteile der analytischen Signale eingesetzt werden müssen.

Ist die Anregung rein harmonisch und die Anregungsamplitude klein genug, um eine lineare Reaktion der Strömung hervorzurufen, so sind in Gleichung (4.21) nur die nullte und die erste Harmonische von Bedeutung. Mit $\bar{q} = \hat{q}^{(0)}$ und $\hat{q} = \hat{q}^{(1)}$ gilt dann für das analytische Phasenmittel:

$$\langle q \rangle(t) = \bar{q} + \tilde{q}(t) = \bar{q} + \hat{q} e^{i\omega_w t}. \quad (4.22)$$

Die Amplitude $|\hat{q}|$ ist ein Maß für die Empfindlichkeit mit der q auf die Störung reagiert, während die Phase $\arg\{\hat{q}\}$ ein Maß für die Verzögerung darstellt. Als Verzögerungszeit gegenüber der Anregung wird häufig die Phasenlaufzeit $-\arg\{\hat{q}\}/\omega_w$ benutzt. Sie stimmt aber nur für dispersionsfreie Systeme – die Phase von \hat{q} ändert sich dann linear mit ω_w – mit der Gruppenlaufzeit $-d\hat{q}/d\omega_w$ überein. Für die Ausbreitung von physikalisch relevanten Größen, wie Energie oder turbulente Spannungen, ist die Gruppenlaufzeit maßgeblich, sie läßt sich aber nur bei genügend dicht liegenden Frequenzpunkten mit ausreichender Sicherheit auswerten.

Die Modulationen von verschiedenen Größen oder Ergebnisse verschiedener Experimente können nur dann verglichen werden, wenn die Amplituden geeignet normiert werden und eine physikalisch sinnvolle Phasenreferenz gewählt wird. Eine naheliegende Normierung ist die Normierung auf den Mittelwert: $a_q \stackrel{\text{def}}{=} \hat{q}/\bar{q}$.⁹ Damit hat man aber noch keinen Bezug zur Anregungsstärke und auch noch keine Phasenreferenz. Das Verhältnis der relativen Amplitude a_q zu einer geeigneten relativen Amplitude der Anregung ist daher ein allgemeineres Maß für die Reaktion der Größe q . Als physikalische Ursache für die sich ausbreitende Störung wird im Allgemeinen die induzierte Variation

⁸ Das Langzeitmittel des turbulenten Anteils ist per Definition Null ($\bar{q}' = 0$). Man beachte aber, dass das Langzeitmittel $\overline{q'q'}$ nicht verschwindet (nur falls $q' \equiv 0$).

⁹ Das ist aber nur sinnvoll, falls der Mittelwert nicht verschwindet. Manchmal ist es sinnvoller alternativ die Modulation mit dem quasistationären Verhalten zu vergleichen.

der Wandschubspannung τ_w angesehen, daher bezieht man in der Regel die relative Amplitude a_q auf die relative Amplitude a_{τ_w} und erhält den sogenannten Modulationsfaktor $m_q \stackrel{\text{def}}{=} a_q/a_{\tau_w}$. Die wichtigsten Beziehungen sind abschließend in folgender Tabelle zusammengestellt.

$\tilde{q}(t) = \hat{q} e^{i\omega_w t} + \dots$	zeitabhängiger Wechselanteil
$\hat{q} = \frac{1}{T_w} \int_0^{T_w} \tilde{q}(t) e^{-i\omega_w t} dt$	komplexe Amplitude
$a_q = \frac{\hat{q}}{\bar{q}}$	relative Modulation
$m_q = \frac{a_q}{a_{\tau_w}} = \frac{\hat{q}/\bar{q}}{\hat{\tau}_w/\bar{\tau}_w}$	Modulationsfaktor

4.9 Modulationsfaktoren in der Simulation

Vom Phasenmittel einer Größe $q(t)$ interessiert uns vor allem die erste Harmonische. Man muss daher nicht zwingend das komplette Phasenmittel $\langle q \rangle(t)$ bestimmen, sondern es reicht, einige wenige Frequenzkomponenten (typischerweise zwei) zu berechnen. Es wird dazu direkt die Fouriertransformation

$$\hat{q}^{(n)} = \frac{1}{T_w} \int_0^{T_w} \langle q \rangle(t) e^{-in\omega_w t} dt \quad (4.23)$$

$$= \frac{1}{T_{\text{mess}}} \int_0^{T_{\text{mess}}} q(t) e^{-in\omega_w t} dt \quad (4.24)$$

für $n = 0, 1$ und 2 ausgeführt. Die »Messzeit« T_{mess} ist als ein ganzzahliges Vielfaches der Wandperiode T_w vorausgesetzt bzw. man darf nur über ein Zeitintervall dieser Länge mitteln.

Die Vorgehensweise ist durchgängig – mit Ausnahme der Phasenmittel von Amplitudenverteilungen (siehe unten) – angewandt worden. Neben einem stark reduzierten Speicherplatzverbrauch gegenüber der Berechnung der kompletten Phasenmittel, liegt der Vorteil vor allem darin, dass zu jedem Zeitpunkt das Signal $q(t)$ mit der richtige Phase gewichtet wird. Denn bei der im Allgemeinen verwendeten Phasenmittelung wird eine Periode T_w der Anregung in eine Anzahl von Phasenkästchen eingeteilt, und für jeden Zeitpunkt muss dann entschieden werden, zu welchem Phasenkästchen die momentane Phase der Anregung gezählt werden soll. Typischerweise wird man eine gewichtete Aufteilung für benachbarte Phasenkästchen wählen (vergleiche auch Anhang B). Man macht dabei allerdings einen systematischen Fehler, der anschließend korrigiert werden muss. Eine Auswertung nach Gleichung (4.24) wichtet das Signal $q(t)$ zu jedem Zeitschritt mit der komplexen Amplitude $e^{-in\omega_w t}$ und es entsteht kein systematischer Fehler.

Problematisch ist aber die Berechnung der Modulation von Schwankungsbewegungen, etwa von $\widetilde{u'_i u'_j}(t)$. Im instationären Fall ist der turbulente Anteil einer Größe q die Differenz zum Phasenmittel: $q' = q - \langle q \rangle$, sodass das Phasenmittel bekannt sein muss, um den turbulenten Anteil zu berechnen. Während der Simulation kennt man das Phasenmittel natürlich noch nicht, daher kann direkt nur

– das obige Beispiel aufgreifend – die Modulation von $u_i u_j$ berechnet werden. Daraus bestimmt sich die komplexe Amplitude des Schwankungsproduktes wie folgt:

$$A_{u'_i u'_j}^{(n)} = A_{u_i u_j}^{(n)} - \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{u_i}^{(m)} A_{u_j}^{(n-m)}. \quad (4.25)$$

Theoretisch sind somit doch wieder komplette Phasenmittel notwendig – jetzt aber die der Einzelgrößen – um auch Modulationen von Schwankungen untersuchen zu können. Da aber bei uns die Amplituden für $n > 1$ sehr klein sind, benötigt man zur Bestimmung des Gleichanteils $\overline{u'_i u'_j}$ und der Wechselamplitude $\widehat{u'_i u'_j}$, bei den hier verwendeten Anregungsamplituden, maximal noch die zweiten Harmonischen. In guter Näherung darf also Folgendes angenommen werden (es sei $\widehat{q} = \widehat{q}^{(2)}$):

$$\overline{u'_i u'_j} = \overline{u_i u_j} - \overline{u_i} \overline{u_j} - \frac{1}{4}(\widehat{u_i} \widehat{u_j}^* + \widehat{u_i}^* \widehat{u_j} + \widehat{u_i}^* \widehat{u_j} + \widehat{u_i} \widehat{u_j}^*) \quad (4.26)$$

$$\widehat{u'_i u'_j} = \widehat{u_i u_j} - (\overline{u_i} \widehat{u_j} + \widehat{u_i} \overline{u_j}) - \frac{1}{2}(\widehat{u_i}^* \widehat{u_j} + \widehat{u_i} \widehat{u_j}^*). \quad (4.27)$$

4.10 Wandschubspannungsimpedanz

Alle Modulationsfaktoren werden mit der relativen Modulation der Wandschubspannung normiert, die daher zunächst aus der vorgegebenen Wandbewegung (Amplitude und Phase der Wandgeschwindigkeit) bestimmt werden muss. Zunächst wird dazu für jede Frequenz der Anregung die (komplexe) Wandschubspannungsimpedanz bestimmt. Sie gibt an, mit welcher Amplitude und mit welcher Phasenverschiebung die Wandschubspannung auf die aufgeprägte Wandgeschwindigkeit reagiert:

$$z_\tau = -\frac{\widehat{\tau_w}}{\widehat{u_w}}. \quad (4.28)$$

Für die reine Stokeswelle (4.13) ergibt sich aus dieser Definition sofort $z_\tau = \mu(1+i)/l_s$ ($|z_\tau| = \sqrt{\rho\mu\omega_w}$, $\arg\{z_\tau\} = \pi/4$). Überlagert man die Stokeswelle noch mit einer *laminare* Gleichströmung, sodass $u_\tau = \sqrt{\tau_w/\rho} \neq 0$ ist, dann ergibt sich die leicht zu merkende Beziehung ($z_\tau^+ = z_\tau/\rho u_\tau$):

$$|z_\tau^+| = \sqrt{\omega_w^+} \quad \text{und} \quad \arg\{z_\tau^+\} = 45^\circ. \quad (4.29)$$

Bei der Interpretation der Impedanzphase ist zu beachten, dass in Gleichung (4.28) ein Minuszeichen in der Definition verwendet wird. Im laminaren Fall bzw. im quasilaminaren Grenzfall ist die maximale Wandschubspannung gegenüber der maximalen Wandgeschwindigkeit um 135° verzögert (nicht 45°). Die Definition ist so gewählt, dass die Äquivalenz mit einer Druckerregung deutlich wird. In dem Fall ist die Wandschubspannung gegenüber der modulierte Mittengeschwindigkeit gerade um 45° verzögert.

Ronneberger & Ahrens (1977) haben die Wandschubspannungsimpedanz für turbulente Grenzschichten über einen großen Frequenzbereich ($0,003 \lesssim \omega^+ \lesssim 0,12$) mittels akustischer Messungen sehr sorgfältig bestimmt, wobei allerdings gewisse Annahmen zum Wärmeübergang gemacht werden mussten. Einen Vergleich der Ergebnisse mit denen der Rechnung findet man in Abbildung 4.2. Für hohe Frequenzen zeigt sich deutlich das erwartete quasilaminare Verhalten. Der Betrag steigt mit $\sqrt{\omega_w}$, die Phase nähert sich 45° . Insgesamt stimmen die gemessenen Impedanzen mit denen der Simulation über den gesamten betrachteten Frequenzbereich sehr gut überein. Im Übergangsbereich um $\omega_w^+ = 0,01$ ($l_s^+ = 14$) fällt auf, dass sich die Phase sehr schnell mit der Frequenz ändert,

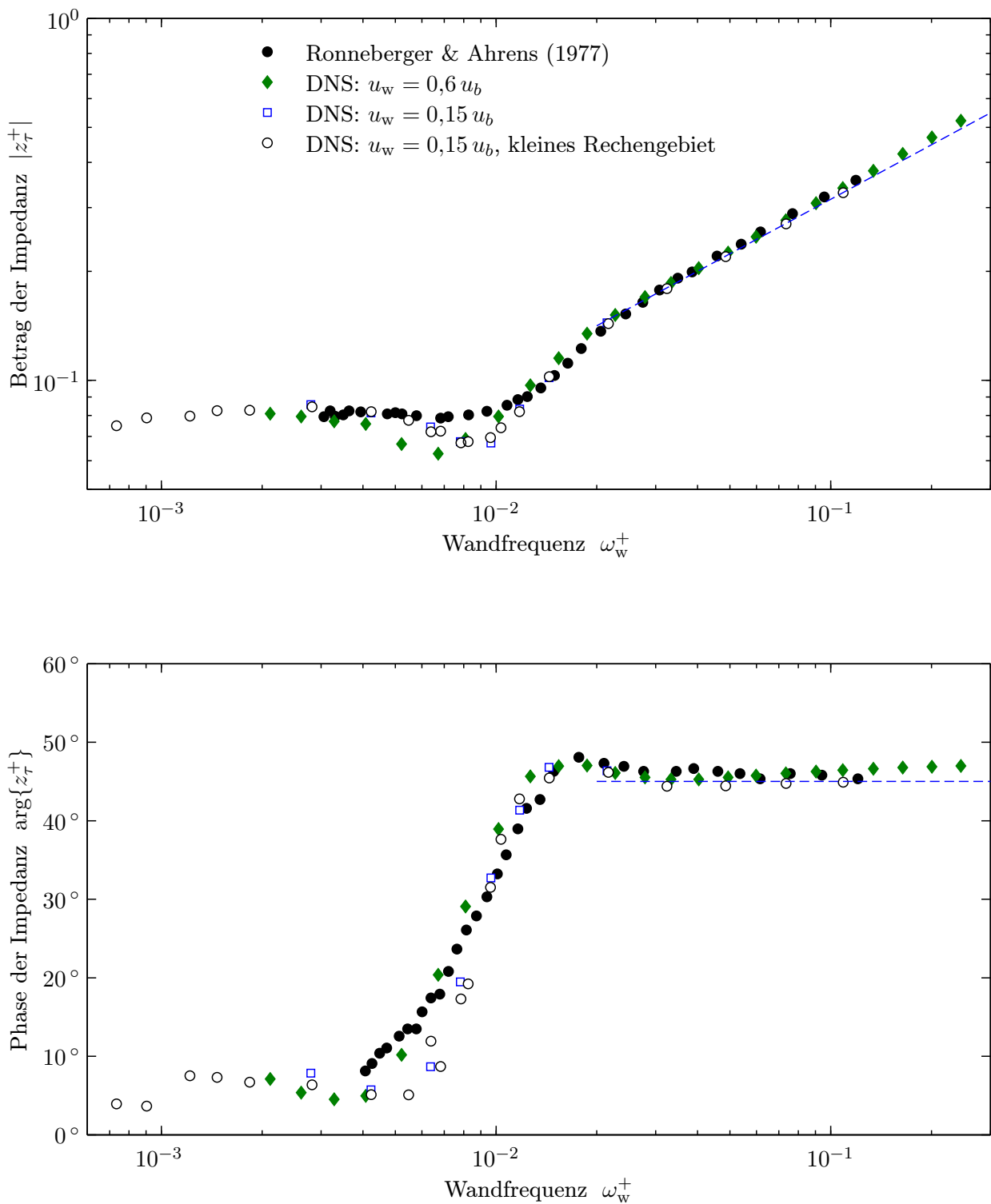


Abb. 4.2: Betrag (oben) und Phase (unten) der Wandschubspannungsimpedanz. Vergleich zwischen Messwerten von Ronneberger & Ahrens (1977) und drei unterschiedlichen Simulationen: (a) große Amplitude ($0,6 u_b$), (b) kleine Amplitude ($0,15 u_b$) und (c) kleine Amplitude und kleine Periodenlänge. Die gestrichelten Geraden kennzeichnen den Impedanzverlauf der Stokeslösung.

dabei vollzieht sich die Änderung in der Simulation noch etwas schneller als im Experiment. Abweichungen zwischen den gezeigten Impedanzen gibt es auch bei der Messreihe mit vergleichsweise großen Wandamplituden ($u_w = 0,6u_b$). Zum einen nähert sich die Phase auch bei hohen Frequenzen nicht exakt den erwarteten 45° , zum anderen verläuft die Impedanz auch insgesamt etwas anders. Während die erstgenannte Abweichung der numerisch nicht exakten Differentiation des wandnahen Geschwindigkeitsprofils zugeordnet werden konnte (die sich vor allem bei großen Amplituden zeigt, da dann der erste Gitterpunkt schon einen vergleichsweise großen Abstand zur Wand hat), scheint die generelle Abweichung tatsächlich auf einer kleinen Amplitudenabhängigkeit der Impedanz zu beruhen.

Auffällig ist bei allen drei Simulationsreihen ein kleines Minimum im Betrag der Impedanz um $\omega_w^+ \approx 0,08$ ($l_s^+ \approx 5$), das sich nur in der Simulation zeigt, nicht jedoch im Experiment. Die Wandschubspannungsimpedanz wurde auch von anderen Autoren experimentell bestimmt (Binder et al. 1985), jedoch schwanken dabei die Messwerte im interessanten Frequenzbereich unterhalb $\omega_w^+ = 0,015$ ($l_s^+ = 12$) oft sehr stark, sodass auf eine Darstellung hier verzichtet wurde. Beim Experiment von Finnicum & Hanratty (1988) findet sich ein mit den Simulationsergebnissen vergleichbares Minimum.

Vor allem in Wandnähe zeigen numerische Verfahren oft Schwächen, unter anderem, weil die Diskretisierungsordnung hier kleiner ist als im inneren der Strömung. Der Vergleich der Wandschubspannungsimpedanz mit dem Experiment zeigt aber, dass das eingesetzte numerische Verfahren auch in Wandnähe akzeptable Ergebnisse liefert.

5 Langzeitstatistik der stationären und instationären Kanalströmung

Im Folgenden werden einige Langzeitmittelwerte der vollturbulenten Strömung gezeigt und mit experimentellen Daten und/oder numerischen Daten anderer Autoren verglichen. Zum einen bekommt der Leser einen Überblick über die Langzeitstatistik der turbulenten Kanalströmung, deren Modulationen dann später diskutiert werden, zum anderen sind die Vergleiche auch als Verifizierung des numerischen Verfahrens zu sehen.

Die meisten Experimente zeigen, dass die Langzeitstatistik der instationären Strömung sich nicht oder nur unwesentlich von der Statistik der stationären Strömung unterscheidet. Allerdings nur dann, wenn die Amplitude der Anregung klein ist. Bei einigen Rechnungen wurden der Strömung aber auch Wandoszillationen mit recht großen Amplituden aufgeprägt. Die Antwort der Turbulenz bleibt dabei in der Regel immer noch im Wesentlichen linear, sodass nichtlineare Effekte häufig vernachlässigt werden können. Es kommt aber mitunter zu einer Beeinflussung der Langzeitmittelwerte, recht ausgeprägt zum Beispiel bei den Effektivwerten der Druckschwankungen. Bei vielen technisch relevanten Strömungen liegt der Modulationsanteil durchaus in der Größenordnung der Mittelwerte, sodass die ermittelten Langzeitmittelwerte der instationären Strömungen mit großen Anregungsamplituden für sich oft recht interessant sind. Bei einigen Abbildungen sind daher, neben den Werten der stationären Strömung, auch die Langzeitmittelwerte der instationären Strömung mit aufgeführt. Einige Effekte von großen Anregungsamplituden sind zum Beispiel von Tardu et al. (1994) und Ramaprian & Tu (1983) untersucht worden, solche Effekte sind hier aber nur als Randbemerkung zu verstehen.

Um Rechenzeit zu sparen, wurden einige Rechnungen – vor allem die der instationären Strömungen – mit relativ kleinen Periodenlängen (x - und z -Richtung) des Rechengebietes durchgeführt. Man erwartet, dass die Periodenlängen erst dann keinen Einfluss auf die Statistik der Turbulenz mehr haben, wenn sie größer als alle Korrelationslängen des Strömungsfeldes sind, sodass sich zum Beispiel Bewegungen an einem Ort nicht durch die künstliche Periodizität selbst beeinflussen. Numerische Experimente (Jiménez & Moin 1991) haben aber gezeigt, dass selbst bei extrem kleinen Perioden des Rechengebietes – so klein, dass die Turbulenz gerade noch erhalten bleibt – mindestens die Statistiken niedriger Ordnung, sich nicht nennenswert von der Statistik realer Strömungen unterscheidet. Die langzeitgemittelten Größen unserer Rechnungen bestätigen die Ergebnisse von Jiménez & Moin. Darüber hinaus ergeben sich selbst im instationären Fall, wenn also die Randbedingungen zeitlich variieren, nur sehr geringe Unterschiede zwischen Rechnungen mit relativ großen und relativ kleinen Periodenlängen (verglichen zum Beispiel mit aus den Korrelationsfunktionen berechneten integralen Längenmaßen).

5.1 Geschwindigkeitsprofil

Von den drei Komponenten der Geschwindigkeit hat – im zeitlichen Mittel betrachtet – nur die axiale Komponente einen von null verschiedenen Wert. Dieser ist in Abbildung 5.1 im Vergleich mit Messwerten und Werten von direkten numerischen Simulationen anderer Autoren zu sehen. Das gezeigte turbulente Geschwindigkeitsprofil – hier normiert mit den inneren Variablen ν und u_τ – ist aber nicht universell, sondern hängt noch von der Reynoldszahl (vergleiche Abschnitt 4.1) ab. Allerdings ist diese Abhängigkeit nur schwach, sodass die kleinen Unterschiede zwischen den Reynoldszahlen der drei Simulationen und des Experiments nicht von Bedeutung sind. Die Unterschiede zwischen den Simulationsergebnissen hängen vom konkreten Verfahren, der Implementierung, der räumlichen und zeitlichen Auflösung und weiteren Parametern der Rechnungen ab. Alle Profile stimmen jedoch insgesamt sehr gut überein.

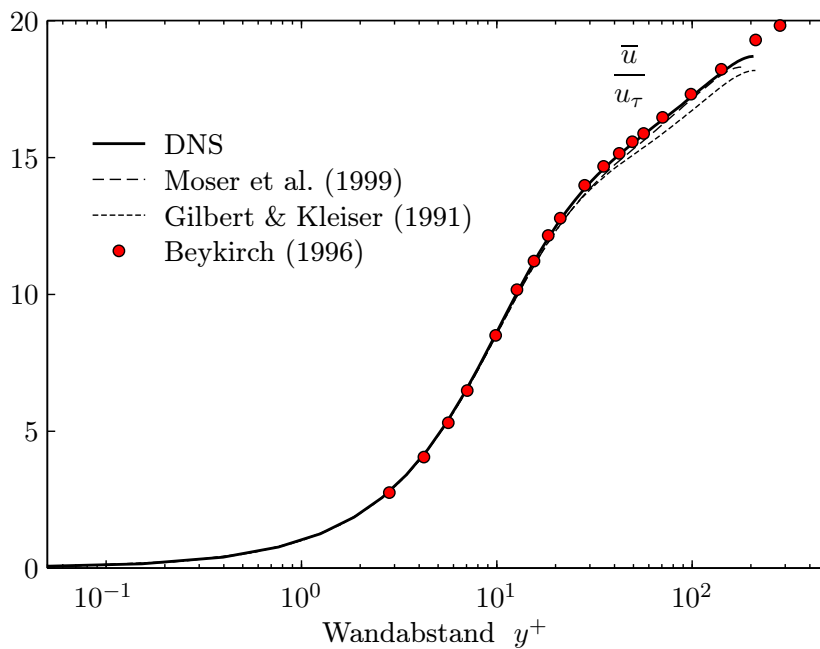


Abb. 5.1
Vergleich der mittleren Geschwindigkeiten: Auf Wandeinheiten bezogen und halblogarithmisch gegen den Wandabstand aufgetragen.

Das bekannte universelle Wandgesetz sagt, dass die Geschwindigkeit (und auch die turbulente Schubspannung) nahe der Wand unabhängig von der Reynoldszahl und allein eine Funktion von ν und u_τ ist. Es existiert eine universelle Funktion f , für die gilt: $\bar{u}^+ = f(y^+)$; auch gibt es eine universelle Funktion g , so dass $\overline{u'v'} = g(y^+)$ gilt. Es folgt unter anderem, dass sehr nah an der Wand (typischerweise innerhalb der viskosen Unterschicht) die mittlere Geschwindigkeit mit guter Näherung linear ansteigt: $\bar{u}^+ = y^+$.¹ Betrachtet man die Profile in doppelt logarithmischer Auftragung – hier nicht gezeigt – dann findet man in den Rechenergebnissen das Wandgesetz nahezu perfekt bestätigt.

¹ Genauer gilt, wie man aus der gemittelten Impulsgleichung für u folgert (1. Reynoldsgleichung): $\bar{u}^+ = y^+ - y^{+2}/(2h^+) + \int_0^{y^+} \overline{u'v'} dy^+$. Siehe dazu auch Cenedese et al. (1998). Der quadratische Term nimmt mit steigender Reynoldszahl ab, sodass \bar{u}^+ nicht mehr allein eine Funktion von y^+ ist. Das widerspricht einer Universalität des Wandgesetzes. Zieht man bei den Simulationsergebnissen den linearen Anteil vom u -Profil ab, so kann der dann dominierende quadratische Term in Wandnähe auch quantitativ gut bestätigt werden. Für die moderaten Reynoldszahlen dieser und anderer direkter numerischer Simulationen kann man die Variation der turbulenten Schubspannung auch in unmittelbarer Wandnähe nicht vernachlässigen. Dann würde der lineare Anstieg von \bar{u}^+ bis zur Ordnung $\mathcal{O}(y^{+4})$ gelten (Townsend 1976).

5.1.1 Wandschubspannungsgeschwindigkeit

Der wandnahe Anstieg der Geschwindigkeit $d\bar{u}/dy|_w$ ist dabei ein direktes Maß für die Wandschubspannung $\tau_w = \mu d\bar{u}/dy|_w$, und damit auch für die Wandschubspannungsgeschwindigkeit $u_\tau \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\tau_w/\rho}$. Umgekehrt wurde, für alle in dieser Arbeit vorgestellten Ergebnisse, aus der berechneten Steigung des Geschwindigkeitsprofils die Wandschubspannungsgeschwindigkeit definiert. Addiert man zur viskosen Schubspannung $\mu d\bar{u}/dy$ die turbulente Schubspannung $-\rho \overline{u'v'}$, so setzt sich die Wandsteigung über die gesamte Kanalhöhe fort.² Man kann daher u_τ auch aus dem linearen Verlauf der gemittelten Gesamtschubspannung definieren, sodass sich numerische Fehler, die sich bei vielen Verfahren häufig in der Nähe von Rändern zeigen, nicht so stark auswirken. Bei uns finden wir nahezu keinen Unterschied zwischen beiden Definitionen. Bereits die mittlere Geschwindigkeit der beiden wandnächsten Punkte legt die Gesamtschubspannung »richtig« fest.

Die Schubspannung an den Kanalwänden ist die Gegenkraft zu der äußeren Kraft, die die Strömung antreibt. Im konkreten Algorithmus wird die äußere Kraft so geregelt, dass sich ein konstanter Durchfluss einstellt. Die Antriebskraft ist daher eine Funktion der Zeit: $f_1 = f_1(t)$. Der Zeitmittelwert dieser Kraft legt ebenfalls die Wandschubspannung $\tau_w = \bar{f}_1 h$ und damit $u_\tau = \sqrt{\bar{f}_1 h/\rho}$ fest. Allerdings liegt das so berechnete u_τ etwas höher (knapp 2%) als die Wandschubspannungsgeschwindigkeit, die aus dem Geschwindigkeitsprofil berechnet wird. Der Unterschied ist wohl eine Folge der Abbruchfehler der Differenzenquotienten des Rechenverfahrens, sodass zum Beispiel eine gewisse numerische Viskosität nicht vermieden werden kann.

5.1.2 Amplitudenabhängigkeiten

Für alle durchgeführten numerischen Simulationen unterscheiden sich die u -Profile kaum, selbst dann nicht, wenn die Periodenlängen sehr klein gewählt sind (Minimalzelle) oder die räumliche Auflösung sehr grob ist. Auch die mittleren u -Profile der instationären Strömungen sind in der Regel nicht unterscheidbar von denen der stationären Strömungen. Wenn jedoch die Wandamplitude der Anregung sehr groß gewählt wird, dann ändert sich die Form durchaus. Abbildung 5.2 zeigt für verschiedene instationäre Strömungen die langzeitgemittelten u -Profile. Für große Amplituden unterscheiden sich die zu verschiedenen Anregungsfrequenzen gehörenden Profile deutlich voneinander. Zu beachten ist aber, dass bei großen Anregungsamplituden sowohl die Normierungsgröße u_τ , als auch das Profil selbst geändert werden. Normiert man die Profile mit dem zur jeweiligen Frequenz gehörenden u_τ -Wert, so stimmen sie in unmittelbarer Wandnähe überein (quasi per Definition). Da der Durchfluss für alle Strömungen gleich war, wirken sich in der Auftragung 5.2 die Unterschiede der mittleren Wandschubspannungen vor allem in der Kanalmitte aus. Die generelle Form, zum Beispiel der lineare Anstieg der Geschwindigkeit in der viskosen Unterschicht, ändert sich aber auch bei den größten Amplituden kaum.

Die empirische Formel (Gleichung 4.12 auf Seite 37) von Dean (1978), liefert für die stationäre Kanalströmung – bei gegebenem Durchfluss – eine Abschätzung für die mittlere Wandschubspannung. Bei der instationären Strömung kann man diese Abschätzung auch für den quasistationären Grenzfall anwenden. Jedoch ändert sich bei uns der Durchfluss im instationären Fall nicht, denn die Wände bewegen sich gegenphasig. Dennoch sei hier – mangels einer entsprechenden Formel für die Couette Strömung – zunächst eine instationäre Durchflussänderung $u_b = \bar{u}_b + |\hat{u}_b| \cos(\omega_w t)$

² Vergleiche Abschnitt 5.3.

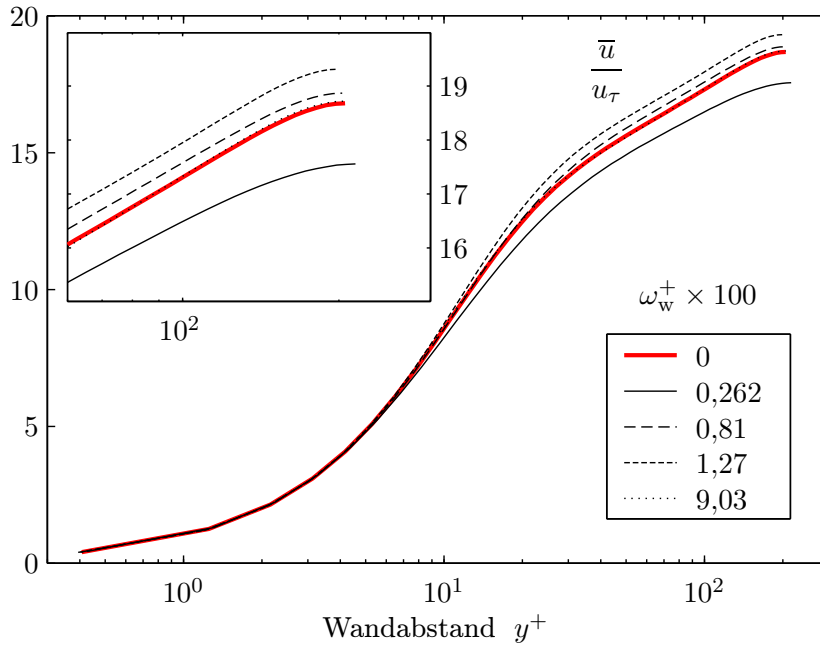


Abb. 5.2

Vergleich der langzeitgemittelten Geschwindigkeit der stationären Strömung und einiger instationärer Strömungen mit relativ großer Wandamplitude ($u_w = 0,6u_b$).

angenommen³. Sei $\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} |a_{u_b}| = |\hat{u}_b|/\bar{u}_b$, dann gilt in quasistationärer Näherung:

$$\begin{aligned} \langle \tau_w \rangle &\sim \langle \bar{u}_b^{7/4} (1 + \varepsilon \cos(\omega_w t))^{7/4} \rangle \\ &= \bar{u}_b^{7/4} \left(1 + \frac{7}{4} \varepsilon \cos(\omega_w t) + \frac{7}{4} \frac{(\frac{7}{4} - 1)}{2!} \varepsilon^2 \cos^2(\omega_w t) + \frac{7}{4} \frac{(\frac{7}{4} - 1)(\frac{7}{4} - 2)}{3!} \varepsilon^3 \cos^3(\omega_w t) + \dots \right). \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\bar{\tau}_{w,qs} = \bar{\tau}_{w,stat} \left(1 + \frac{21}{64} \varepsilon^2 \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^4) \quad (5.1)$$

und

$$\tilde{\tau}_{w,qs} = \bar{\tau}_{w,stat} \frac{7}{4} \varepsilon \left(\cos(\omega_w t) + \frac{3}{16} \varepsilon \cos(2\omega_w t) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \quad (5.2)$$

Für eine vergleichsweise große Amplitude von $0,60 u_b$ und für eine eher kleine Amplitude von $0,15 u_b$ findet man in Abbildung 5.3 die Wand-Reynoldszahl für diverse instationäre Rechnungen mit unterschiedlichen Wandfrequenzen. Erwartungsgemäß stimmen die Re_τ -Werte für hohe Frequenzen mit dem stationären Wert überein. Auch zeigt sich bei den Simulationen mit großer Wandamplitude der erwartete Anstieg bei sehr tiefen Frequenzen. Überraschend ist aber, dass es einen Frequenzbereich gibt, bei dem die langzeitgemittelte Wandschubspannung (und damit Re_τ) unterhalb des stationären Wertes liegt. Der Widerstand ist also gegenüber der unbeeinflussten Strömung (leicht) herabgesetzt. Diesen Effekt hat man zunächst bei spannweitiger Oszillation der Wände beobachtet; dort ist die Widerstandsverminderung auch wesentlich stärker, allerdings bei deutlich größeren Amplituden als sie hier verwendet worden sind. Bei axialer Oszillation haben die meisten Experimente (bei kleinen und moderaten Amplituden) meist keinen solchen Effekt gezeigt (Ronneberger & Ahrens 1977; Mao & Hanratty 1986; Finnicum & Hanratty 1988).

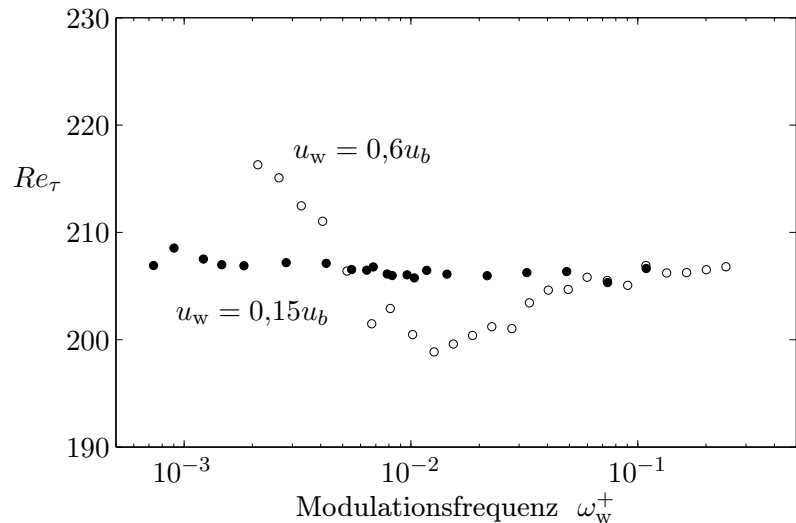
Es verwundert vielleicht zunächst, dass die Werte der Abbildung 5.3 eine gewisse Streuung aufweisen und auch einige »Ausreißer« vorhanden sind, obwohl für alle Rechnungen dasselbe Simulationsprogramm benutzt wurden und die Ergebnisse rein deterministischer Natur sind. Die einzelnen

³ Die Phase ist dabei unerheblich.

Rechnungen unterscheiden sich jedoch – unter anderem – in den Mittelungslängen, oder allgemeiner gesagt, in der Zahl Freiheitsgrade über die gemittelt wurde. Auch können sich die unvermeidbaren numerischen Fehler auf die Ergebnisse der einzelnen Rechnungen unterschiedlich auswirken. Statt von einer exakten Lösung der Navier-Stokes Gleichung zu sprechen, sollt man daher besser den Begriff »numerisches Experiment« verwenden.

Abb. 5.3

Wand-Reynoldszahlen der instationären Strömungen für zwei unterschiedliche Amplituden der Anregung (60% und 15% der Durchflussgeschwindigkeit). Der stationäre Werte liegt bei ca. $Re_\tau \approx 207$, die quasistationäre Erhöhung bei der großen Amplitude ergibt $Re_\tau \approx 231$, bei der kleinen $Re_\tau \approx 208$.



5.2 Konvektionsgeschwindigkeit

Das oben gezeigte Geschwindigkeitsprofil $\bar{u}(y)$ hat zunächst nichts mit der Geschwindigkeit zu tun, mit der sich »Strukturen« in der Strömung bewegen. Die Konvektionsgeschwindigkeit einzelner Strukturen kann sich – und tut dies vor allem in Wandnähe sehr deutlich – von der mittleren Strömungsgeschwindigkeit unterscheiden. Was dabei unter Struktur zu verstehen ist, soll hier nicht genauer definiert werden. Man bedenke aber, dass sich die Konvektionsgeschwindigkeit einer Struktur sicherlich mit dem Wandabstand ändert und eine Struktur immer auch in wandnormaler Richtung eine Ausdehnung hat, sodass, neben der Schwierigkeit eine Struktur zu definieren, noch die zusätzliche Schwierigkeit auftritt, ein gewisses Integralmaß für eine (Struktur-)Konvektionsgeschwindigkeit festzulegen. Die Konvektionsgeschwindigkeit wird daher hier mehr als mathematischer Begriff eingeführt: als Bewegung von zweidimensionalen Strömungsmustern.

Als naheliegende Definition für die Konvektionsgeschwindigkeit (Phasengeschwindigkeit) in einer zur Wand parallelen Ebene kann man das Verhältnis der axialen Verschiebung r_x zur zeitlichen Verschiebung r_t definieren, bei der die zweidimensionale Korrelationsfunktion

$$R(r_x, r_t) = \mathcal{E}[u'(x, t)u'(x + r_x, t + r_t)] \quad (5.3)$$

ein (partielles) Maximum annimmt. Implizit nimmt man dabei die Gültigkeit der Taylorhypothese an, dass sich also ein quasi eingefrorenes Strömungsmuster mit der Konvektionsgeschwindigkeit bewegt und sich dabei zeitlich nur vergleichsweise langsam ändert. Die angegebene Definition legt die Konvektionsgeschwindigkeit dann einfach als Weg/Zeit fest, wobei der Weg und die Zeit die räumliche und zeitliche Verschiebung zweier aufeinanderfolgender Strömungsmuster sind, für die die beiden Muster maximal gut übereinstimmen. Die Bestimmung des Maximums geschieht entweder

für ein festes r_t oder für ein festes r_x (Wills 1970):

$$u_c(r_t) = \frac{r_{xc}}{r_t} \quad \text{mit} \quad \left. \frac{\partial R}{\partial r_x} \right|_{r_x=r_{xc}} = 0 \quad (5.4)$$

$$u_c(r_x) = \frac{r_x}{r_{tc}} \quad \text{mit} \quad \left. \frac{\partial R}{\partial r_t} \right|_{r_t=r_{tc}} = 0. \quad (5.5)$$

Man kann damit die kleinskaligen Bewegungen (kleines r_x und r_t) und die großskaligen Bewegungen (großes r_x und r_t) getrennt untersuchen. Interessanter ist aber häufig die Transformation in den räumlich-zeitlichen Frequenzbereich. Die Korrelationsfunktion $R(r_x, r_t)$ wird dabei zum zweidimensionalen Leistungsspektrum $S(k_x, \omega)$, wobei k_x die räumliche Wellenzahl und ω die Zeitfrequenz ist, und als Konvektionsgeschwindigkeit in Abhängigkeit von ω und k_x ergibt sich:

$$u_c(\omega) = -\frac{\omega}{k_{xc}} \quad \text{mit} \quad \left. \frac{\partial S}{\partial k_x} \right|_{k_x=k_{xc}} = 0 \quad (5.6)$$

$$u_c(k_x) = -\frac{\omega_c}{k_x} \quad \text{mit} \quad \left. \frac{\partial S}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_c} = 0. \quad (5.7)$$

Sinnvoll sind obige Definitionen nur dann, wenn die spektrale Leistungsdichte $S(k_x, \omega)$ bei bestimmten Werten von ω und k_x sehr konzentriert ist, sodass jeder Welle von gegebener »Größe« $2\pi/k_x$ eine definierte Phasengeschwindigkeit ω/k_x zugeordnet werden kann. Jedoch ist die Leistung meist mehr oder weniger breit über einen räumlich-zeitlichen Frequenzbereich verteilt, was beispielhaft an den Spektren $S_{u'}(k_x, \omega)$, $S_{v'}(k_x, \omega)$, $S_{w'}(k_x, \omega)$ und $S_{p'}(k_x, \omega)$ in Abbildung 5.4 gezeigt ist.

Bleibt man in dem Fall bei obigen Definitionen für die Konvektionsgeschwindigkeit, kann es leicht zu widersprüchlichen Interpretationen kommen. Beispielsweise könnte die Konvektionsgeschwindigkeit von kleinskaligen Bewegungen nach Gleichung (5.6) bei großen Zeitfrequenzen bestimmt werden, oder nach Gleichung (5.7) bei großen Raumfrequenzen. Im ersten Fall erhält man jedoch immer höhere Werte als im zweiten Fall. Auch weitere Definitionen für die Konvektionsgeschwindigkeit sind denkbar. Es kann aber insgesamt festgestellt werden, dass immer dann, wenn die Leistung in der k_x - ω -Ebene mehr oder weniger breit verteilt ist, die Angabe einer wellenzahlabhängigen Konvektionsgeschwindigkeit fraglich wird.

Eindeutiger ist eine über alle Zeit- und Raumfrequenzen integrierte Konvektionsgeschwindigkeit. Aber auch die wählbare Gewichtsfunktion der Integration ist – durch die Breite der Spektren – einer gewissen Willkür unterworfen. So tragen bei der von Wills (1964) vorgeschlagenen Definition

$$\frac{\partial}{\partial U} \int S(k_x, -Uk_x) dk_x \Big|_{U=u_c} = 0 \quad (5.8)$$

vor allem die energiereichen Komponenten zum Mittelwert bei.

Abbildung 5.5 zeigt (integrale) Konvektionsgeschwindigkeiten von u' , v' , w' und p' als Funktion des Wandabstandes. Die Werte wurden dabei nach Gleichung (5.4) bestimmt, also für feste zeitliche Verschiebungen r_t . Die Ergebnisse für kleine Werte von r_t wurden anschließend gemittelt. Die Methode hat den Vorteil, dass im instationären Fall auch eine zeitabhängige Konvektionsgeschwindigkeit bestimmt werden kann. Es hat sich jedoch herausgestellt, dass die für die Modulation der Konvektionsgeschwindigkeit bestimmten Modulationsfaktoren sehr kritisch von den Details der Extremwertsuche und weiteren Einzelheiten abhängen, sodass letztlich auf eine systematische Analyse verzichtet wurde. Daher sei an dieser Stelle erwähnt, dass bei den Rechnungen, für die $\tilde{u}_c(u')$ mit

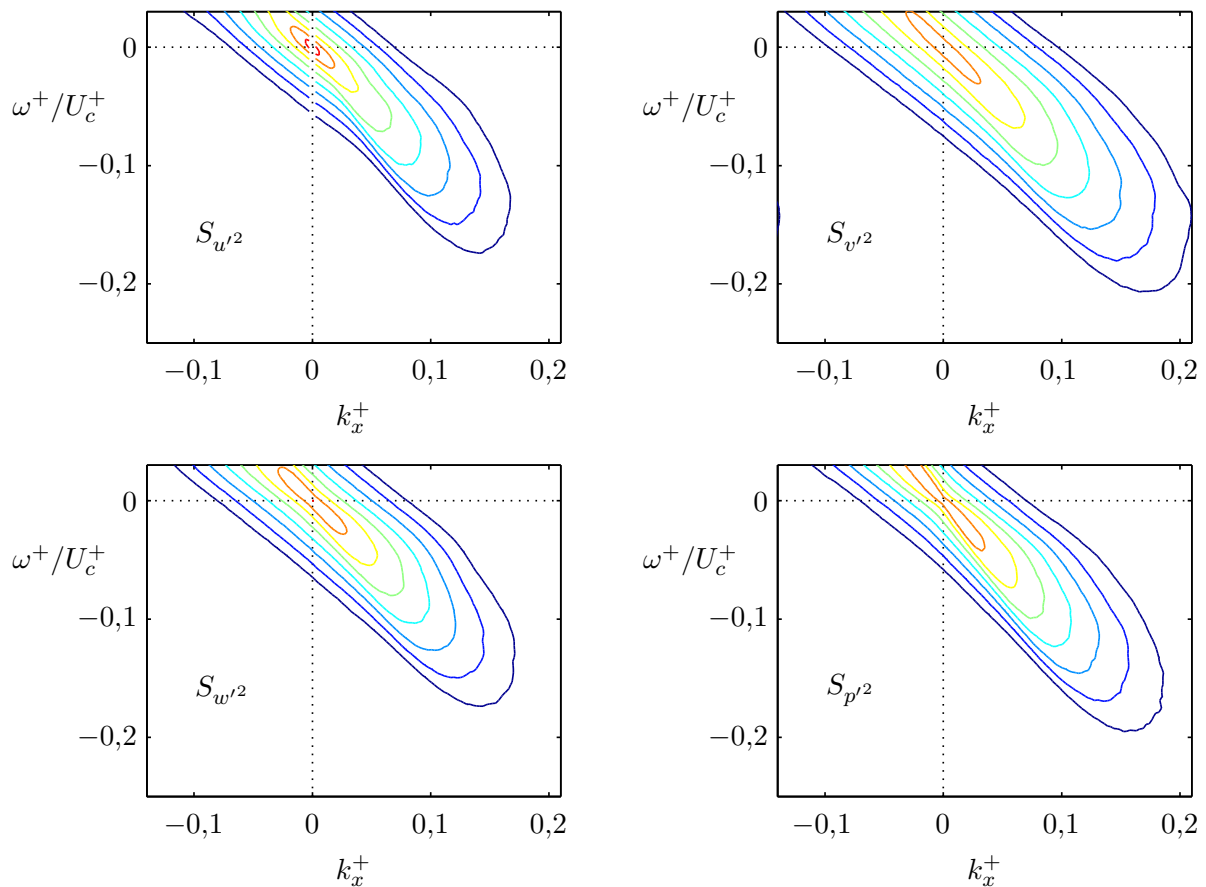


Abb. 5.4: Räumlich-zeitliche Autoleistungsdichtespektren unmittelbar über der Wand ($y^+ = 0,03$). Die Zeitfrequenz ist für alle Auftragungen auf eine gemittelte Konvektionsgeschwindigkeit von $U_c = 11,7u_\tau$ bezogen. Alle Spektren sind auf die Gesamtleistung normiert und als Höhenlinien mit logarithmisch verteiltem Abstand dargestellt (Höhenlinien für $10^{-3,5}$ bis $10^{4,5}$ in 1-er Schritten des Exponenten).

akzeptabler Sicherheit ausgewertet werden konnte, nur eine kleine Modulation festgestellt werden konnte. Das gilt insbesondere auch in der Nähe der Wand.

Die Konvektionsgeschwindigkeit für verschiedene Komponenten der Geschwindigkeit kann theoretisch durchaus unterschiedliche Werte annehmen. Tatsächlich können in Abbildung 5.5 kleine Unterschiede zwischen den einzelnen Konvektionsgeschwindigkeiten von u' , v' und w' festgestellt werden. Die Signifikanz der Unterschiede ist aber zweifelhaft. Die Konvektionsgeschwindigkeit des Drucks unterscheidet sich aber in Wandnähe recht deutlich von der, der drei Geschwindigkeitskomponenten, sie ist dort durchgängig größer. $R_{p'}(r_x, r_t)$ ist vergleichsweise »schmal«, sodass eine Unterscheidung zwischen großskaligen und kleinskaligen Bewegungen sinnvoll erscheint. Es zeigt sich (hier nicht dargestellt), dass die Konvektionsgeschwindigkeit des Drucks mit r_x bzw. r_t ansteigt. Als Erklärung geben Willmarth & Wooldridge (1962) folgendes an: Es wird angenommen, dass die Quellen der Wanddruckschwankungen sich stromabwärts bewegende Strukturen in der Strömung sind. Bei kleinen Abständen wird die Korrelation hauptsächlich durch die kleineren Strukturen bestimmt, die sich bei kleinen Wandabständen langsamer stromabwärts bewegen als die größeren bei größeren Wan-

dabständen. Bei größeren Abständen der Druckaufnehmer (das heißt, bei größerem r_x) sind auf dem Weg zwischen den Aufnehmern die kleinen Strukturen zerfallen und die schnelleren und größeren Strukturen ergeben die höhere Konvektionsgeschwindigkeit.

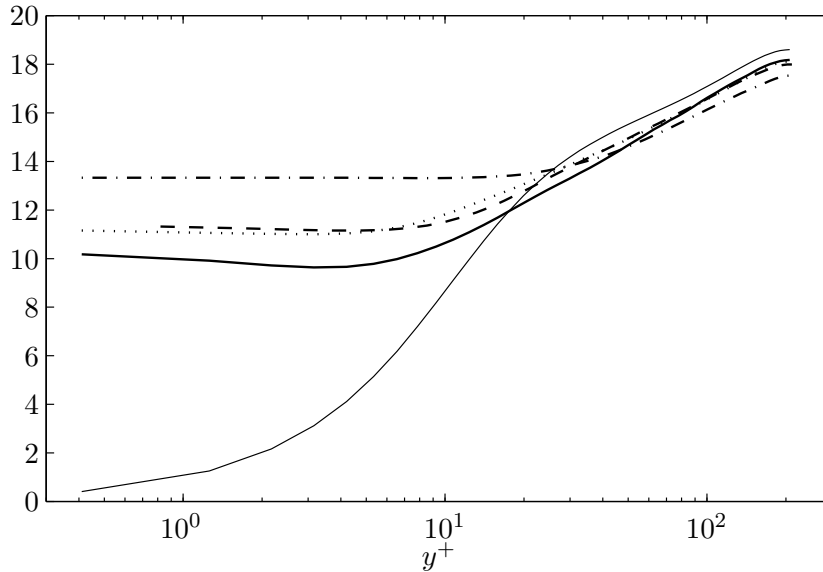


Abb. 5.5

Konvektionsgeschwindigkeiten der drei Geschwindigkeitskomponenten und des Drucks im Vergleich zum mittleren u -Profil.

5.3 Turbulente Schubspannung

Der symmetrische Spannungstensor $-\rho \overline{u'_i u'_j}$ enthält bei der Kanalturbulenz nur vier von Null verschiedene Einträge, und zwar die drei Normalspannungen $-\rho \overline{u'^2}$, $-\rho \overline{v'^2}$ und $-\rho \overline{w'^2}$ sowie den turbulenten Schubspannungsterm $-\rho \overline{u'v'}$. Korrelationen mit w' – außer mit sich selbst – verschwinden aus Symmetriegründen. Vor allem die turbulente Schubspannung ist für die Dynamik der Turbulenz von entscheidender Bedeutung. Sie ist die einzige Verbindungsgröße zwischen der mittleren Strömung – charakterisiert durch die Scherrate $\partial \bar{u} / \partial y$ – und den turbulenten Schwankungsbewegungen. Der Produktionsterm $-\overline{u'v'} \partial \bar{u} / \partial y$ in der Transportgleichung für u'^2 sorgt dafür, dass der mittleren Strömung Energie entzogen wird, die zunächst eine Erhöhung der u' -Schwankungen bewirkt. In inkompressiblen Strömungen wird dann, allein über den Druck, die erhöhte kinetische Energie auch auf die beiden anderen Komponenten der Geschwindigkeit umverteilt. Das ergibt sich aus den drei Druck-Geschwindigkeitsgradient-Korrelationen $\overline{p' \partial u'_i / \partial x_i}$ im Zusammenhang mit der Kontinuitätsgleichung. Es gilt

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial t} = -\overline{u'v'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \overline{p' \frac{\partial u'}{\partial x}} + \text{Diffusion und Dissipation} \quad (5.9)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial t} = \overline{p' \frac{\partial v'}{\partial y}} + \text{Diffusion und Dissipation} \quad (5.10)$$

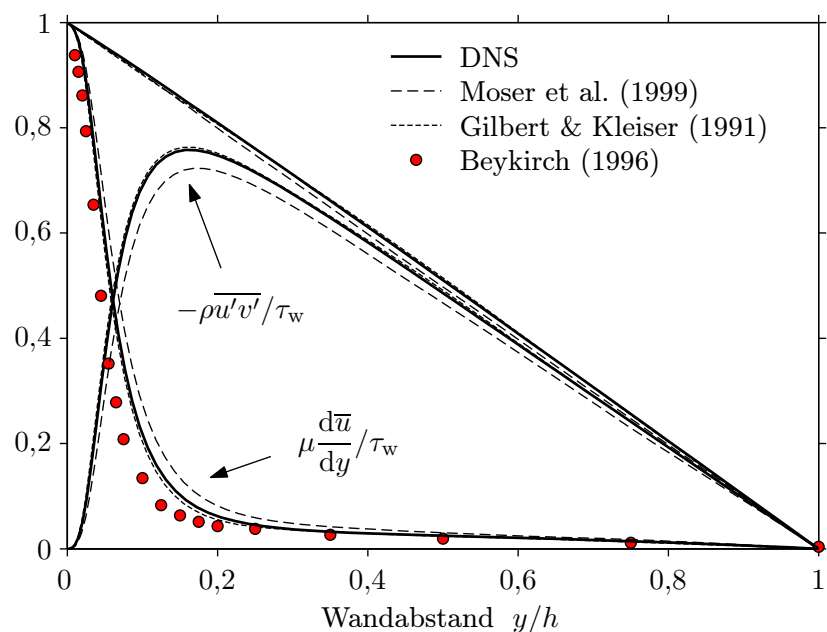
$$\frac{1}{2} \frac{\partial \overline{w'^2}}{\partial t} = \overline{p' \frac{\partial w'}{\partial z}} + \text{Diffusion und Dissipation.} \quad (5.11)$$

Die Pufferschicht verdankt ihre wichtige Bedeutung vor allem der Tatsache, dass man in diesem Bereich das Maximum der Turbulenzproduktion findet (etwa bei $y^+ \approx 12$). Etwas weiter entfernt von der Wand ($y^+ \approx 15$) zeigt sich auch das Maximum der axialen Geschwindigkeitsfluktuation. Es

verwundert daher nicht, dass eine Modulation, die vor allem in diesem Bereich wirkt, die Turbulenz im besonderem Maße beeinflusst.

Abbildung 5.6 zeigt einen Vergleich der viskosen und turbulenten Schubspannung. Der sichtbare lineare Verlauf der resultierenden Gesamtschubspannung ist ein gutes Maß dafür, dass die Strömung voll ausgebildet ist und einen Gleichgewichtszustand erreicht hat, sich das mittlere Profil also nicht mehr ändert. Der Vergleich mit den Simulationsergebnissen von Gilbert & Kleiser (1991) und Moser et al. (1999) zeigt sehr gute Übereinstimmungen, wobei zu beachten ist, dass die Simulation von Moser et al. (1999) eine etwas kleinere Wand-Reynoldszahl hatte. In unserem Kanal wurde nur die axiale Geschwindigkeitskomponente gemessen, sodass für Messergebnisse nur die viskose Schubspannung gezeigt werden kann. Auch die hier sichtbaren Abweichungen sind auf die unterschiedlichen Reynoldszahlen von Simulation und Experiment zurückzuführen.⁴

Abb. 5.6
Verlauf der turbulenten und der viskosen Schubspannung sowie der Gesamtschubspannung bis zur Kanalmitte. Alle Werte sind auf die Wandschubspannung bezogen.



5.4 Korrelationskoeffizienten

Die Normierung der turbulenten Schubspannung auf die zugehörigen Effektivwerte liefert den Korrelationskoeffizient zwischen u' und v' (Abbildung 5.7). Während die axiale und die normale Geschwindigkeitskomponente in Kanalmitte aus Symmetriegründen vollkommen unkorreliert sind⁵, findet man ansonsten fast überall Betragswerte des Korrelationskoeffizienten zwischen 0,45 und 0,5. Zur Wand hin ergibt sich ein etwas kleinerer Grenzwert von etwa 0,23 – direkt an der Wand verschwinden die Fluktuationen ($u' = v' = 0$), sodass dort der Korrelationskoeffizient nicht berechnet werden kann. Auffällig ist ein kleines lokales Maximum bei etwa $y^+ \approx 11$, das auch in anderen Simulationen auftritt (Kim, Moin & Moser 1987), sich aber in Messergebnissen, zum Beispiel Sabot & Comte-Bellot (1976), nicht wiederfindet.

Die im Vergleich mit den Simulationen von Moser et al. (1999) und Gilbert & Kleiser (1991) zu sehenden Unterschiede sind hauptsächlich auf die unterschiedlichen Wand-Reynoldszahlen zurück-

⁴ In Wandnähe wäre es sicherlich sinnvoller $d\bar{u}^+/dy^+$ zu vergleichen. Für $\bar{u}^+(y^+)$ ist das aber bereits in Abbildung 5.1 geschehen.

⁵ Die Fluktuationen selbst verschwinden hier natürlich nicht, sodass etwa u' und $|v'|$ durchaus korreliert sind

zuführen. Die von Gilbert & Kleiser (1991) ermittelten Korrelationskoeffizienten sind aber insgesamt etwas kleiner als bei uns.

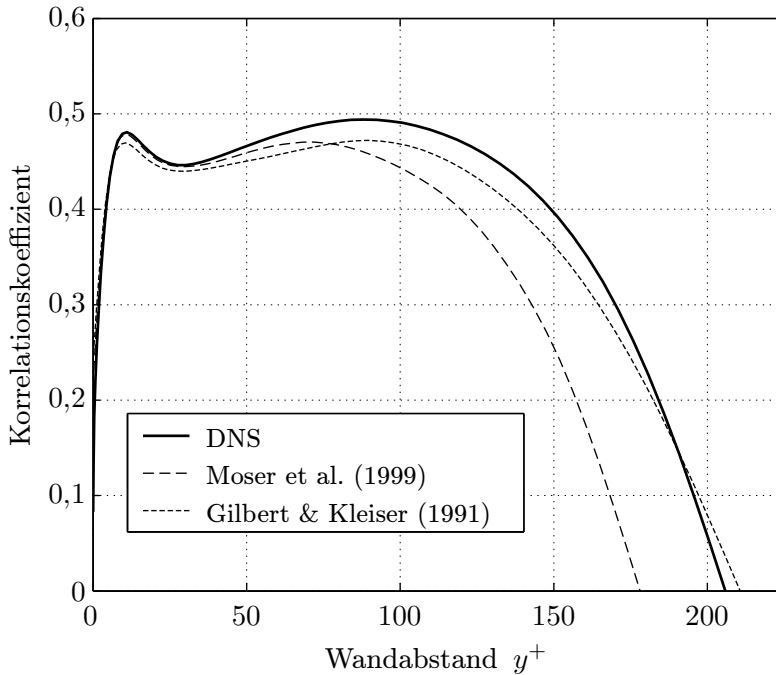


Abb. 5.7

Verteilung des
Korrelationskoeffizienten

$$\chi_{u'v'} = \frac{-\overline{u'v'}}{\sqrt{\overline{u'^2} \overline{v'^2}}} \quad (5.12)$$

im Vergleich zwischen
verschiedenen Simulationen. Die
Reynoldszahlen der Simulationen
unterscheiden sich leicht, sodass
die Kanalmitte jeweils bei
anderen y^+ -Werten liegt. Der
wandnahe Grenzwert von $\chi_{u'v'}$
ist etwa 0,23 bis 0,24.

5.5 Effektivwerte

Die Abbildungen 5.8 und 5.9 zeigen die Effektivwerte der turbulenten Schwankungsbewegungen der drei Geschwindigkeitskomponenten sowie die des Drucks. Im Wesentlichen stimmen die Werte der drei Simulationen und auch die der Messergebnisse überein. Einzig die Moser et al. (1999) Simulation zeigt etwas kleiner u_{eff} und p_{eff} Werte, die wahrscheinlich durch die leichte Reynoldszahlabhängigkeit bedingt sind. Von den drei Geschwindigkeitskomponenten schwankt bei allen Wandabständen die in Hauptströmungsrichtung gerichtete am stärkste (maximal bei $y^+ \approx 15$ mit einem Effektivwert von etwa $2,8u_\tau$). Die Effektivwerte der spannweitigen und vor allem die der wandnormalen Komponente sind überall und meist deutlich kleiner. Wir finden für w_{eff} einen Maximalwert von etwas mehr als $1,1u_\tau^2$ bei $y^+ \approx 35$. Das Maximum von v_{eff} liegt bei $y^+ \approx 60$ und erreicht nur eine Höhe von etwa einem Drittel des Maximalwertes von u_{eff} .

Dass die u -Schwankungen wesentlich größer sind, als die der beiden anderen Geschwindigkeitskomponenten, verwundert nicht, denn der turbulente Produktionsterm bewirkt – wie oben bereits erwähnt – zunächst eine Erhöhung der Komponente in Hauptströmungsrichtung. Auch die vergleichsweise kleinen Effektivwerte der wandnormalen Schwankungsbewegungen sind verständlich, wenn man bedenkt, dass für ein inkompressibles Fluid jeder Massenfluss in y -Richtung an anderer Stelle durch einen Massenfluss in umgekehrter Richtung kompensiert werden muss. Großflächige Bewegungen in y -Richtung sind daher selten – vor allem in Wandnähe – und solche mit kleinen räumlichen Wellenzahlen sind sehr energiearm, sodass insgesamt die Gesamtleistung (und damit

der Effektivwert) von v' klein bleibt.

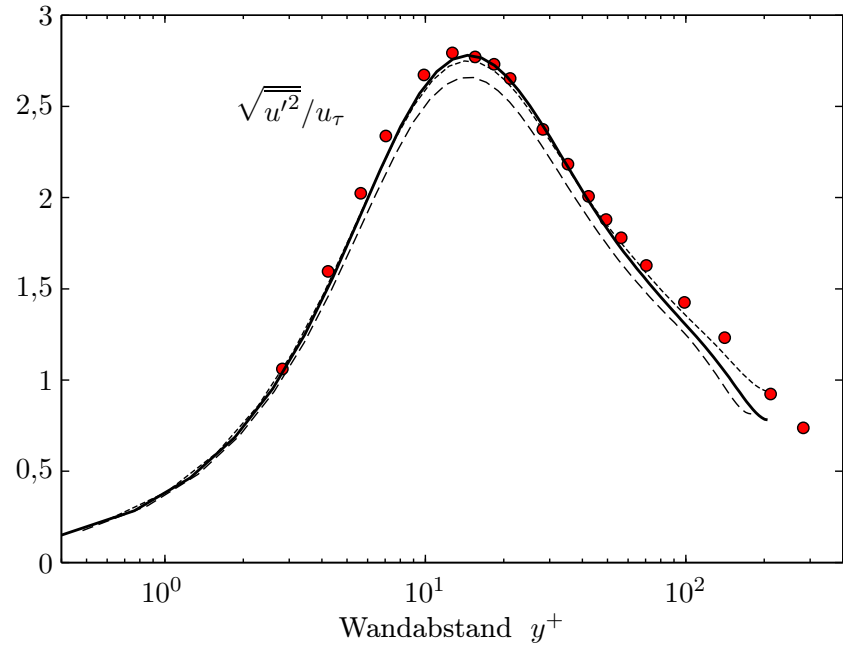


Abb. 5.8

Vergleich der Effektivwerte der Längsschwankungen: Auf Wandeinheiten bezogen und halblogarithmisch gegen den Wandabstand aufgetragen. (Legende wie Abbildung 5.6).

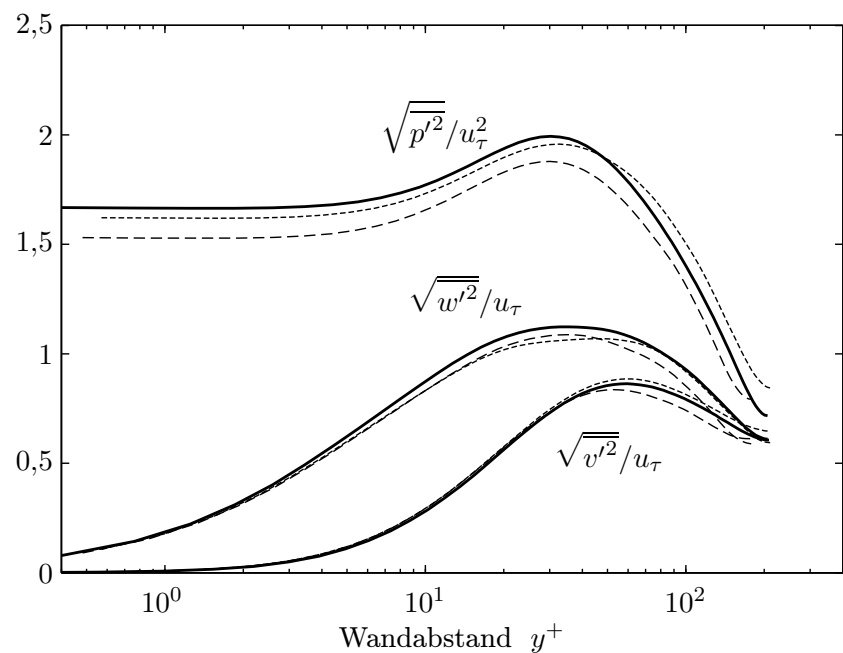


Abb. 5.9

Vergleich der Effektivwerte des Drucks und der spannweiten- und wandnormalen Schwankungsbewegungen: Auf Wandeinheiten bezogen und halblogarithmisch gegen den Wandabstand aufgetragen. (Legende wie Abbildung 5.7).

Interessant an den Effektivwertverteilungen ist noch das Verhalten in Wandnähe. Eine Taylorentwicklung der Geschwindigkeitsfluktuationen in y lässt, unter Berücksichtigung der Haftbedingung an der Wand und der Kontinuitätsgleichung, für u_{eff} und w_{eff} einen linearen Anstieg und für v_{eff} einen quadratischen Anstieg erwarten.

Abbildung 5.10 zeigt sehr deutlich, dass alle Simulationen diese Erwartung sehr gut bestätigen. Zusätzlich kann die erwartete y^3 Abhängigkeit von $-\overline{u'v'}$ sehr gut bestätigt werden. Im wandnahen Verhalten zeigen sich nahezu keine Unterschiede zwischen den verschiedenen Simulationen. Die gezeigte doppelt logarithmische Auftragung zeigt aber nur den dominierenden Term. Häufig findet man daher noch den Verlauf der Effektivwerte normiert mit dem erwarteten Anstiegsverhalten (Ab-

bildung 5.11). Mit in die Abbildung ist auch der wandnahe Verlauf von $-\overline{u'v'}$ aufgenommen. Allein hier zeigen sich in unmittelbarer Wandnähe nennenswerte Unterschiede zwischen den Simulationen, die aber nicht so signifikant sind, alsdass man sie unbedingt aufklären müsste.

Die Varianz $v_{\text{eff}}^2(y)$ der wandnormalen Komponente v' , muss nach der Reynoldsgleichung (4.5 auf Seite 35) exakt mit der Druckdifferenz von Wanddruck und Druck bei Wandabstand y übereinstimmen. In der Tat ist das in der Simulation erfüllt, sodass der v_{eff}^2 -Verlauf gleichzeitig den Verlauf des Druckmittelwertes repräsentiert.

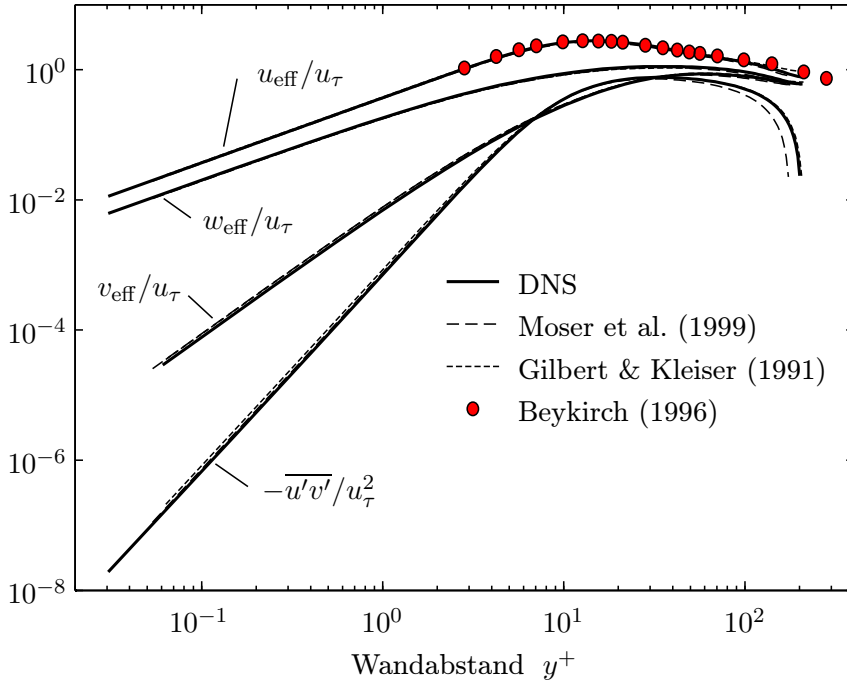


Abb. 5.10
Wandnaher Anstieg der Effektivwerte der drei Geschwindigkeitskomponenten und der turbulenten Schubspannung.

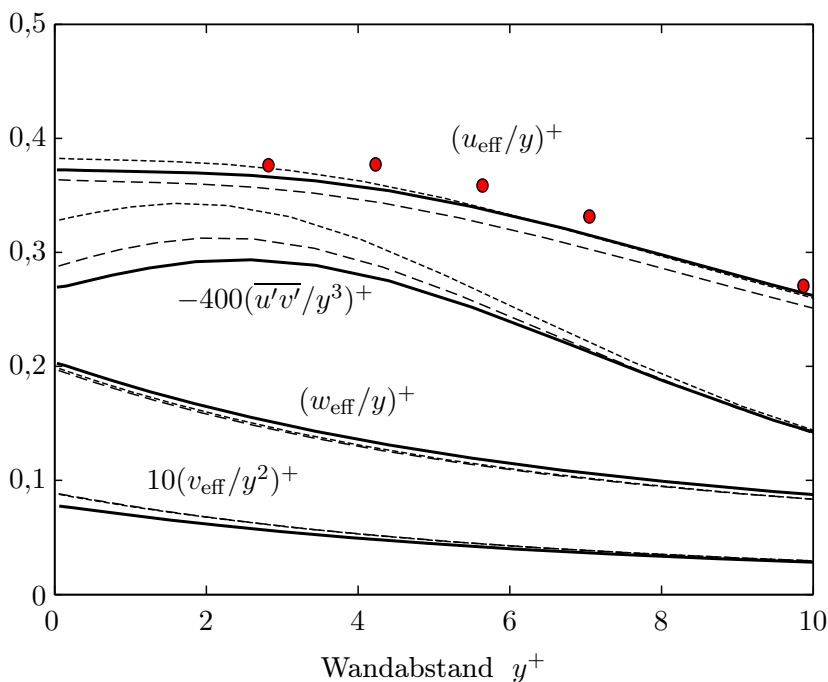


Abb. 5.11
Mit dem erwarteten Anstiegsverhalten normiertes wandnahes Verhalten.

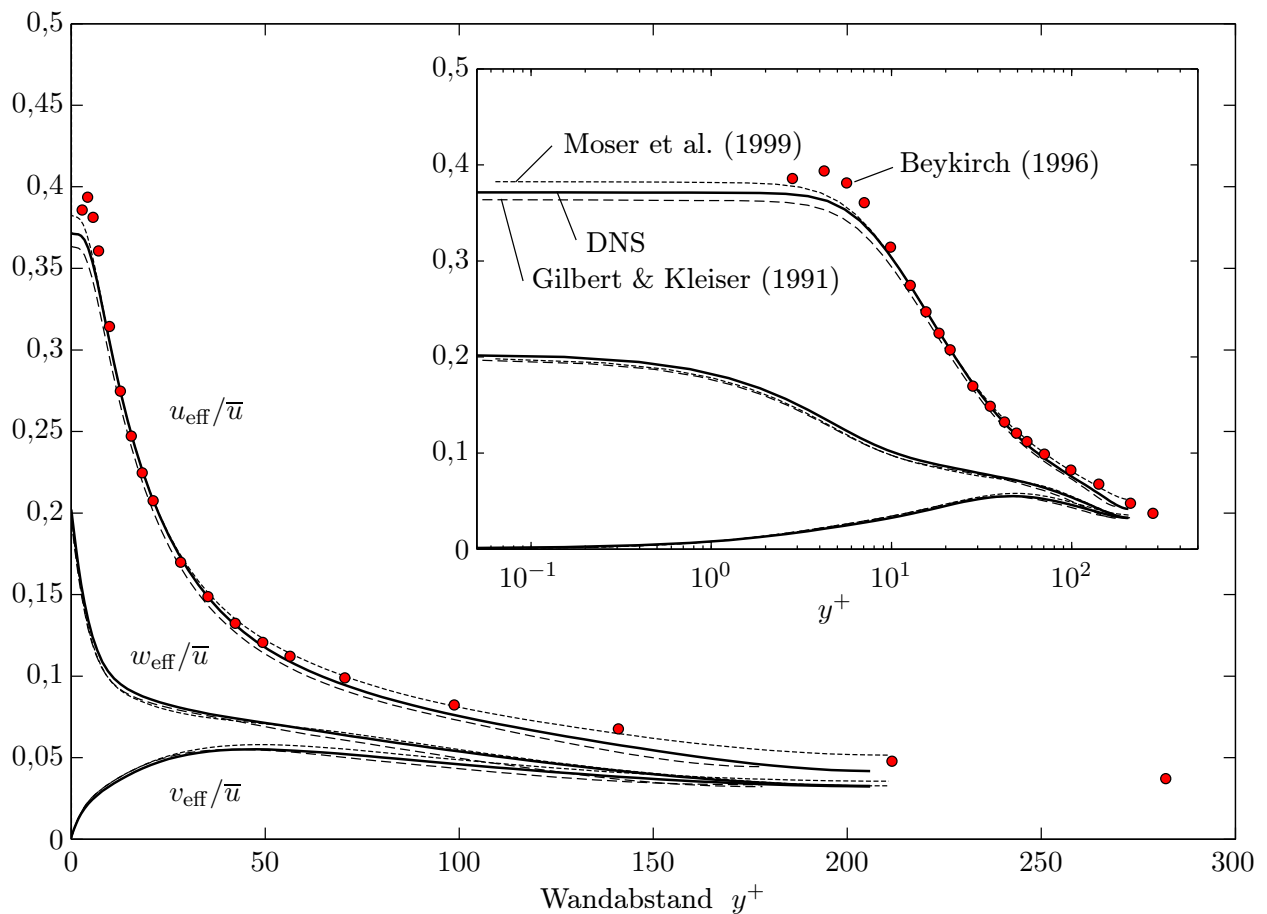


Abb. 5.12: Turbulenzgrade getrennt nach axialer, normaler und spannweitischer Geschwindigkeitskomponente: Vergleich der Simulationsdaten mit Messwerten und Simulationswerten anderer Autoren. In der eingebetteten Abbildung sind die Werte halblogarithmisch gegen den Wandabstand aufgetragen und zeigen so das wandnahe Verhalten.

5.5.1 Turbulenzgrad

Bezogen auf die lokale mittlere Geschwindigkeit \bar{u} , ergeben sich aus den Effektivwerten die in Abbildung 5.12 gezeigten Turbulenzgrade der drei Schwankungskomponenten. Im Gegensatz zu den Absolutwerten der Effektivwerte, zeigen die Turbulenzgrade nur für die normale Komponente der Geschwindigkeit ein lokales Maximum, während die axiale und spannweite Komponente den maximalen Turbulenzgrad in unmittelbarer Wandnähe annehmen. Für die axiale Komponente setzt sich der Wandwert (bei uns ca. 37%) in der gesamten viskosen Unterschicht fort, fällt dann aber recht schnell ab.

5.5.2 Kinetische Energie

In vielen Turbulenzmodellen (zum Beispiel im bekannten k - ϵ -Modell) gehört die turbulente kinetische Energie zu den Größen, für die Modellgleichungen aufgestellt werden. Um die Gültigkeit der Modelle im instationären Fall zu untersuchen, ist daher die Modulation der kinetischen Energie

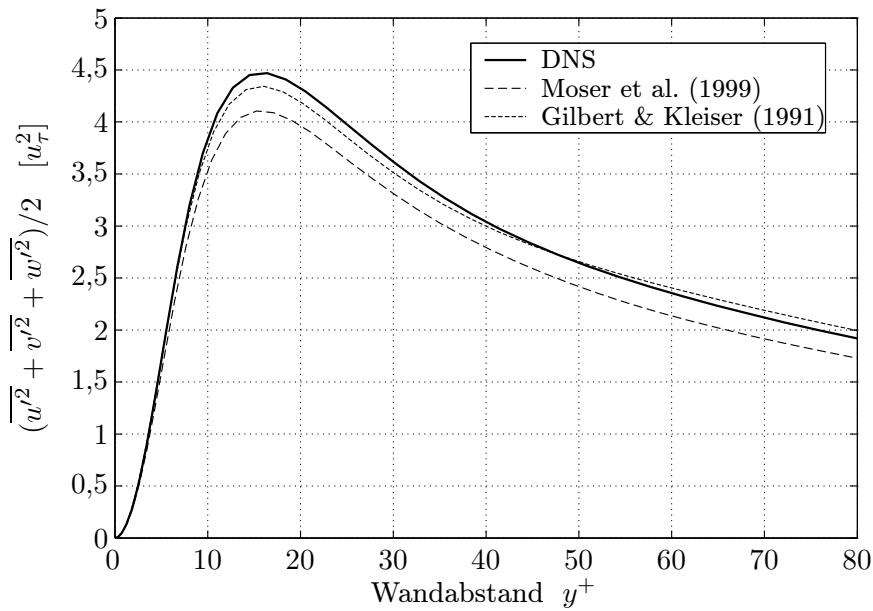


Abb. 5.13
Kinetische Energie der
Schwankungsbewegungen.

$k = (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})/2$ von besonderem Interesse. Abbildung 5.13 zeigt den Gleichwert für die stationäre Strömung. Beim Wandabstand von etwa 16 Pluseinheiten findet wir bei uns ($Re_\tau = 207$) ein Maximum der Höhe $4,5 u_\tau^2$. Der Verlauf der kinetischen Energie wird, außer im Kanalmittenbereich, von dem Verlauf der u -Varianz dominiert, denn – wie oben bereits erwähnt – sind die u -Fluktuationen im wandnahen Bereich wesentlich stärker als die der beiden anderen Komponenten.

5.6 Skewness- und Flatnessfaktoren

Die bis jetzt gezeigten Geschwindigkeitsprofile und die diversen Reynoldsspannungen sind typische Beispiele für Statistiken niedriger Ordnung. Im Vergleich zwischen Simulationsergebnissen und Messergebnissen zeigen sich aber eher bei den Statistiken höherer Ordnung Differenzen. Die genaue Messung höherer Momente ist dabei im Allgemeinen wesentlich aufwendiger als zum Beispiel einfache Geschwindigkeitsmessungen. Relativ viele Messwerte findet man aber zum dritten und vierten Moment der Verteilung der einzelnen Geschwindigkeitskomponenten. Die Schiefe und Flachheit unserer Simulationsergebnisse sind in der Abbildung 5.14 im Vergleich mit eigenen Messwerten zu sehen. Gemessen wurde aber nur die axiale Komponente der Geschwindigkeit. Ein Charakteristikum von numerischen Simulationen ist die sehr hohe Flachheit der Verteilung der normalen Geschwindigkeitskomponente in Wandnähe. Die meisten Messergebnisse zeigen diese hohen Werte nicht. Einige neuere Messungen (Günther et al. 1998) liefern – nach gewissen Korrekturen – etwas höhere Flachheiten der v -Verteilung. Die Werte liegen aber immer noch tiefer als in der Simulation. Den DNS Daten von Xu et al. (1996) kann man entnehmen, dass die großen Flachheiten vor allem durch einige sehr große negative v -Werte entstehen, die unter Umständen von Messapparaturen oder der anschließenden Signalverarbeitung nicht erfasst werden können. Dennoch bleibt nicht auszuschließen, dass in diesem Bereich die Simulationsergebnisse falsch sind.

Die in Abbildung 5.14 gezeigte Skewness- und Flatnessfaktoren sind nicht direkt durch Mitteln der zweiten, dritten und vierten Potenz der Schwankungsbewegungen, sondern aus den Momenten der

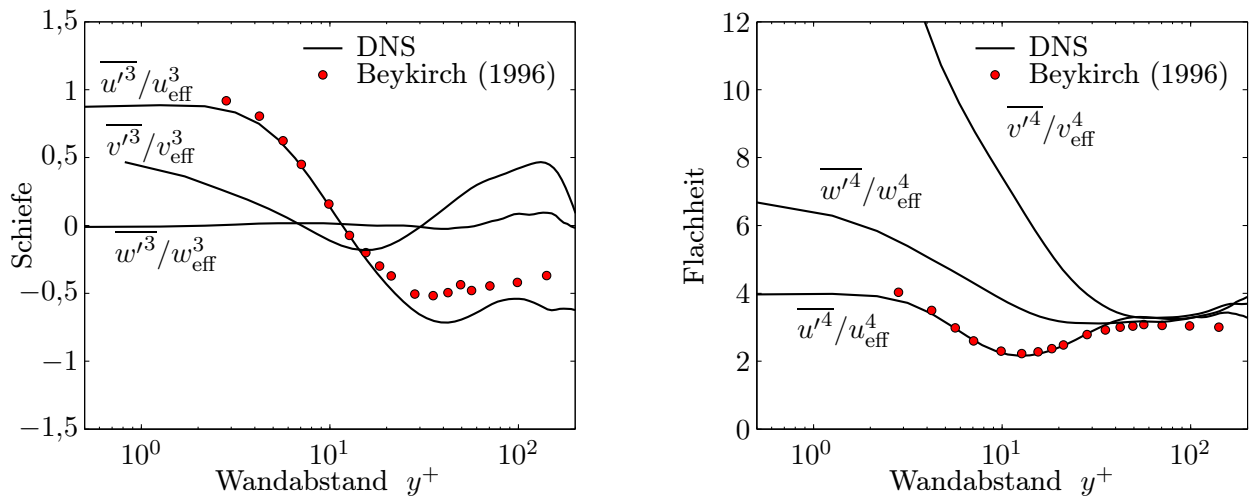


Abb. 5.14: Skewness- und Flatnessfaktoren

Amplitudenverteilungen bestimmt worden. Folgendes gilt, wenn u' als Beispiel ausgewählt wird:

$$\text{Skw} = \frac{\int u'^3 \text{pdf}(u') \, du'}{\left(\int u'^2 \text{pdf}(u') \, du'\right)^{3/2}} \quad (5.13)$$

$$\text{Flt} = \frac{\int u'^4 \text{pdf}(u') \, du'}{\left(\int u'^2 \text{pdf}(u') \, du'\right)^2}. \quad (5.14)$$

Durch den »Umweg« über die Verteilungen werden die numerischen Fehler etwas größer, als bei der direkten Methode. In jedem Fall sind für die höheren Momente aber vergleichsweise lange Mittelungszeiten notwendig. Einige generelle Bemerkungen zur Signifikanz der Mittelwerte sind weiter unten im Abschnitt 5.8.2 zu finden. Hier sei bereits bemerkt, dass für die Mittelungen der spannwitigen Komponente w' , besonders in der Kanalmittenregion wenig Freiheitsgrade vorhanden sind. Dort steht der spannwitigen Konvektion von großräumigen Strukturen vergleichsweise wenig Widerstand entgegen, sodass bei zu kurzer Mittelungszeit unter anderem \bar{w} nicht exakt null ist. In Abbildung 5.14 ist zu erkennen, dass auch die Schiefe von w' , die aus Symmetriegründen nicht vorhanden sein sollte, für große y -Werte noch nicht vollkommen verschwunden ist.

5.7 Amplitudenverteilungen

Bei einige numerischen Simulationen sind zur Laufzeit die kompletten Amplitudenverteilungen (Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen) von verschiedenen Strömungsgrößen bestimmt worden, insbesondere die von u , v und w . Man kann damit unter anderem alle Momente der Schwankungskomponenten berechnen, was weiter oben bereits für die Berechnung der Schiefe und Flachheit ausgenutzt wurde. Der gesamte Verlauf ist aber oft aufschlussreicher. Besonders interessant sind die Verteilungen, die sich deutlich von einer Gaußverteilung unterscheiden. Solche für die Turbulenz charakteristische Amplitudenverteilungen ergeben sich als Folge des nicht vollkommen stochastisch ablaufenden Strömungsvorgangs. Es wäre jedoch voreilig, allein daraus den Schluss zu ziehen, dass die Turbulenz aus gewissen – wenn man so will kohärente – Strukturen aufgebaut ist, denn in

die Wahrscheinlichkeitsdichten fließen weder die räumlichen noch die zeitlichen Verteilungen der Amplitudenwerte ein.

Anmerkung zur Notation: Die Schwierigkeit bei der Bezeichnung von Amplitudenverteilungen einer bestimmten Größe, sie sei hier q genannt, besteht darin, dass es einerseits zweckmäßig ist die Verteilung mit q zu kennzeichnen (zum Beispiel mit q als Index), andererseits aber das aktuelle Argument auch oft mit dem gleichen Symbol bezeichnet wird, sodass etwa $pdf_q(q)$ geschrieben wird. Der Index und das Argument haben dabei ganz unterschiedliche Bedeutungen, sodass es sinnvoller wäre jeweils andere Symbole zu verwenden. Oft ist das aber sehr unpraktisch.

Hier wird meist die kurze Notation $pdf(q)$ verwendet und nur dann ein kennzeichnender Index hinzugefügt, wenn Missverständnisse möglich sind. Insbesondere legt das Argument die physikalische Dimension der Wahrscheinlichkeitsdichte fest: $[pdf(q)] = [1/q]$. Die meisten Abbildungen zeigen $pdf(q/q_{\text{eff}})$, die Dichten sind dabei dimensionslos.

5.7.1 Einfache Wahrscheinlichkeitsdichten

Die Amplitudenverteilung der zeitlichen Ableitung der axialen Geschwindigkeitskomponente ist eine typische nicht gaußförmige Amplitudenverteilung der Turbulenz. Die zeitliche Ableitung $u'_t \stackrel{\text{def}}{=} \partial u' / \partial t$ und damit die komplette Verteilung $pdf(u'_t)$ hängt zwar vom Koordinatensystem ab, dennoch wurde $pdf(u'_t)$ hier als Beispiel ausgewählt. Unter anderem deshalb, weil diese Verteilung und insbesondere auch deren Modulation, in einigen experimentellen Arbeiten untersucht wurde (Flötke 1987; Wendt 1989). Die weiter unten gezeigten Verteilungen sind im ruhenden System »gemessen«, sodass nach der Taylorhypothese, $\partial u' / \partial t$ im Wesentlichen durch $\partial u' / \partial x$ bestimmt ist. Insofern ist die Verteilung von $\partial u' / \partial t$ auch für die in dieser Arbeit besonders interessierende räumliche Struktur der Strömung aufschlussreich. In den Experimenten wurde sie vornehmlich ausgesucht, da ein enger Zusammenhang zwischen einer starken lokalen Änderung der Geschwindigkeit und typischen kohärenten Strukturen vermutet wurde.

In Abbildung 5.15 ist diese Wahrscheinlichkeitsdichte für verschiedene Wandabstände im Vergleich mit einer Gaußverteilung der gleichen Varianz zu sehen. Besonders für den wandnahen Bereich, bis etwa $y^+ = 30$, zeigt sich eine deutliche Schiefe der Verteilung. Große positive Beschleunigungen sind hier wesentlich häufiger als große negative Beschleunigungen. Alle Verteilungen unterscheiden sich sehr deutlich von einer Gaußverteilung, die betragsmäßig großen Amplituden sind viel wahrscheinlicher als bei einem Gaußprozess. Die dadurch gegenüber der Gaußverteilung erhöhte Flachheit nimmt in Wandnähe besonders hohe Werte an.

Die Wahrscheinlichkeitsdichten der axialen Geschwindigkeitskomponente sind in Abbildung 5.16 zu sehen. Auch diese Amplitudenverteilung zeigt keinen gaußförmigen Verlauf. Besonders im Bereich der Pufferschicht sind die Verteilungen sehr breit. Absolut betrachtet treten hier neben sehr kleinen Geschwindigkeiten auch Geschwindigkeiten auf, die fast so groß sind, wie man sie in der Kanalmitte findet. In unmittelbarer Wandnähe ist der Bereich unterhalb des Mittelwerts sehr klein, während Geschwindigkeiten, die größer sind als der lokale Mittelwert, durchaus mehr als ein Drittel der Mittengeschwindigkeit erreichen können. Das bewirkt eine deutliche positive Schiefe der Verteilung in Wandnähe. Im Mittenbereich des Kanals ist es gerade umgekehrt. Der Vorzeichenwechsel tritt im Bereich der Pufferschicht bei etwa $y^+ = 12$ auf, einhergehend mit einer maximalen Breite der Verteilung.

Lamballais et al. (1997) geben als Interpretation für die Schiefe der u -Verteilung in Wandnähe den

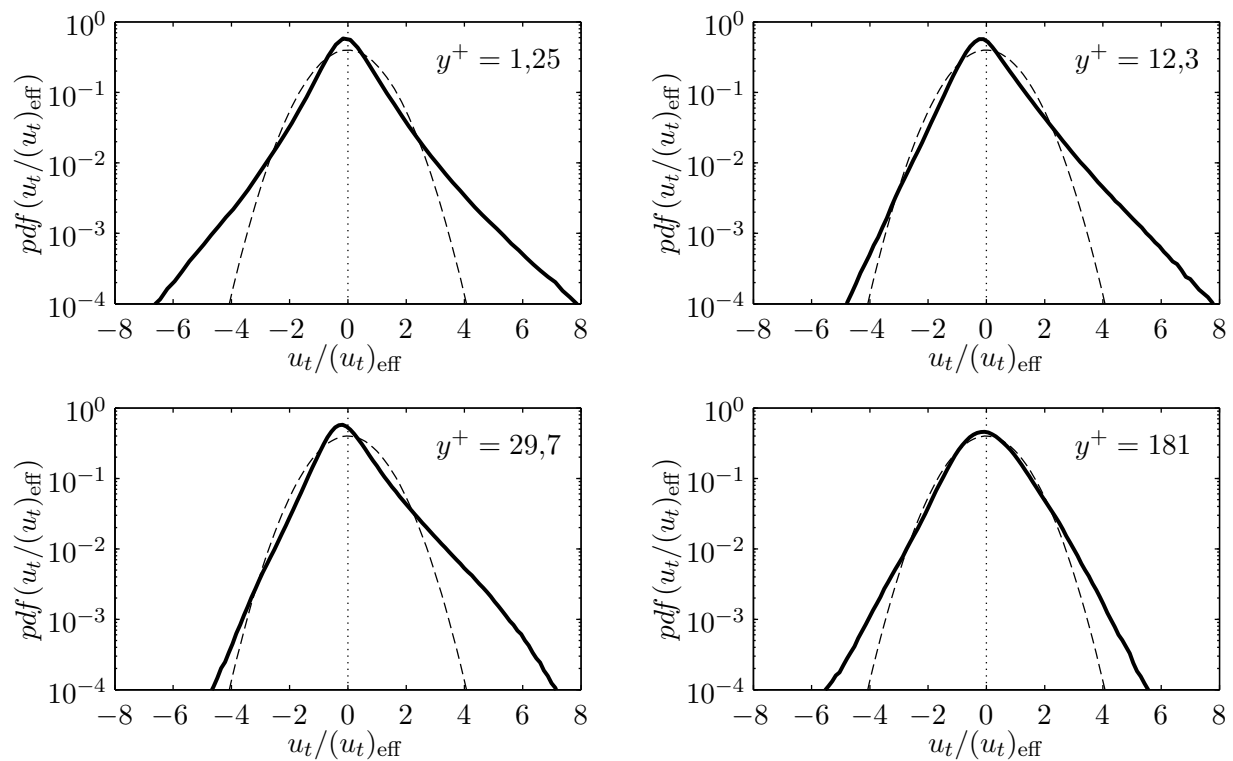


Abb. 5.15: Mittlere Wahrscheinlichkeitsdichte der zeitlichen Ableitung der axialen Geschwindigkeitskomponente bei verschiedenen Wandabständen (gestrichelt: Normalverteilung mit Mittelwert null und Varianz eins).

stark intermittenten Charakter der »High-speed-streaks« an, während die »Low-speed-streaks« eher eine (Sub-)Gaußverteilung hervorrufen. Auch die wandnormale Geschwindigkeitskomponente ist in Wandnähe stark intermittent, wobei die auf die Wand gerichtete Geschwindigkeit stärker ist, als die von der Wand weg gerichtete Geschwindigkeit. Dies steht im Einklang, wie Lamballais et al. (1997) anmerken, mit der nach »oben« gerichteten Geschwindigkeit über den Low-speed-streaks und der nach »unten« gerichteten Geschwindigkeit über den High-speed-streaks.

Einen Vergleich zwischen den Wahrscheinlichkeitsdichten der drei Schwankungskomponenten u'_i , der Druckschwankungen p' sowie der zeitlichen Ableitungen $\partial u'_i / \partial t$ zeigt Abbildung 5.17. Der in vielerlei Hinsicht ausgezeichnete Wandabstand von $y^+ = 12$ ist dort als Vergleichsort gewählt. Alle Verteilungen sind auf ihren jeweiligen Effektivwert normiert. Eine besondere Bedeutung kommt offenbar der axialen Geschwindigkeitskomponente zu, denn die Verteilung $pdf(u')$ unterscheidet sich deutlich von allen anderen Verteilungen.

Eine Plausibilitätserklärung für diesen Umstand bezieht sich auf den weiter oben im Abschnitt 5.3 erwähnten Umverteilungsprozess: Der Produktionsmechanismus der Turbulenz erzeugt zunächst nur u' -Schwankungen. Dadurch dass dieser Vorgang ortsabhängig ist, entstehen axiale Gradienten du'/dx , die sich nach der Taylorhypothese auch in du'/dt wiederfinden. Unter einem negativen du'/dx kann man sich etwa zwei »Fluidballen« vorstellen, die sich aufeinander zubewegen (in x -Richtung). Kommen sie sich sehr nah, dann muss irgendwann ein lokaler Überdruck entstehen (positives p') und die Stromlinien werden in y - und z -Richtung ausgelenkt, das heißt, es entsteht ein v'

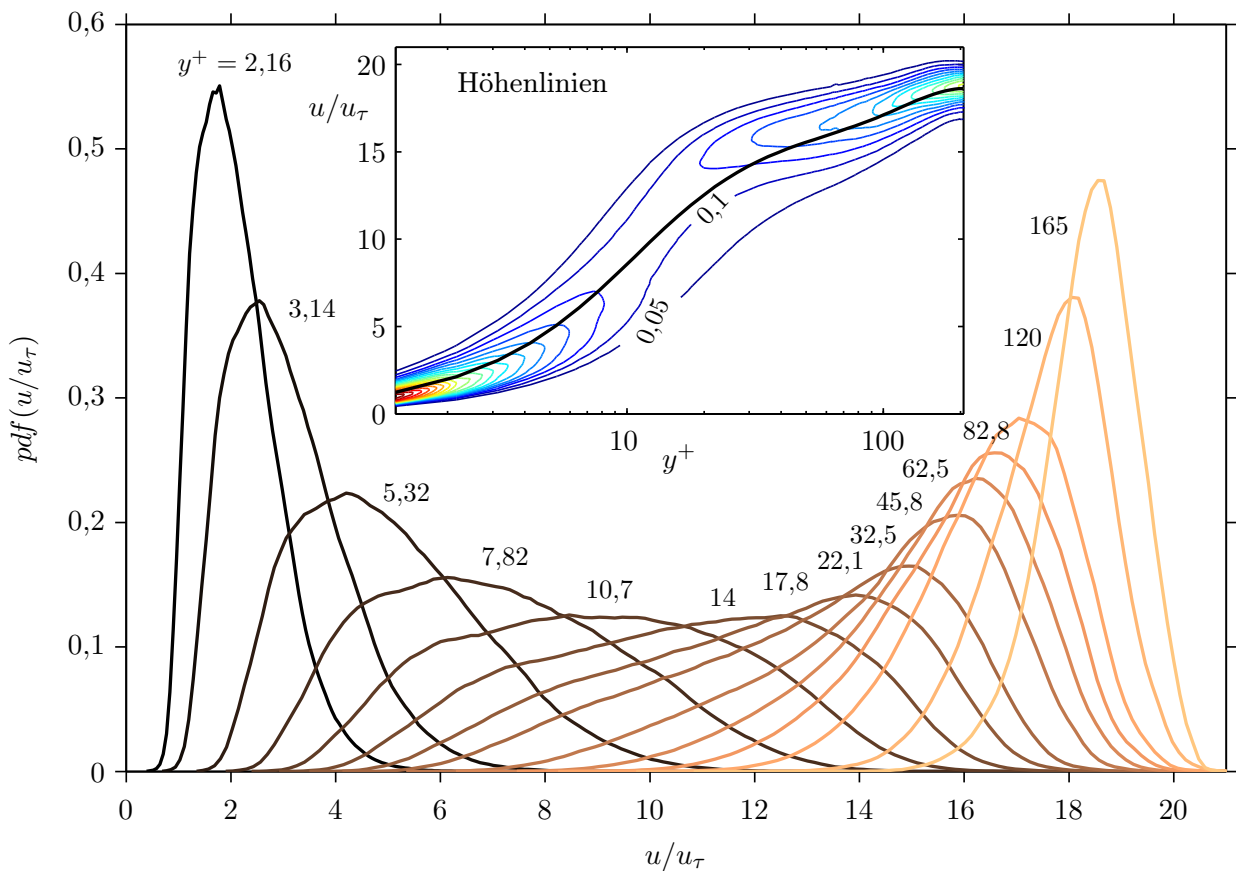


Abb. 5.16: Mittlere Wahrscheinlichkeitsdichte der axialen Geschwindigkeitskomponente bei verschiedenen Wandabständen. In der eingebetteten Abbildung ist die Wahrscheinlichkeitsdichte $pdf(u, y)$ für alle Wandabstände bis zur Kanalmitte durch Höhenlinien dargestellt. Die jeweiligen Mittelwerte der Verteilungen bei festem y ergeben das ebenfalls eingezeichnete mittlere Strömungsprofil.

und ein w' . Bewegen sich die Ballen aufeinander zu, dann verstärkt sich ständig der Gradient $\partial u'/\partial x$, und es wird verständlich, dass in $pdf(\partial u'/\partial x)$ (bzw. $pdf(\partial u'/\partial t)$) die großen Amplitudenwerten viel häufiger sind als bei $pdf(u')$ selbst. v' und w' entstehen nach dem oben beschriebenen Szenario dort, wo $\partial u'/\partial x$ groß ist. Dann ist nach der Kontinuitätsgleichung aber auch $\partial v'/\partial y + \partial w'/\partial z$ groß, sodass sich auch die weiten Ausläufer von $pdf(v')$ und $pdf(w')$ plausibel in das Bild einfügen.

In der Abbildung 5.17 fällt auf, dass der negative Ast der Druckverteilung fast deckungsgleich zum negativen Ast der wandnormalen Geschwindigkeitskomponente ist. Das ist allerdings nur zufällig durch den gewählten Wandabstand bedingt; für kleinere y^+ -Werte ist beispielsweise eine große negative Normalkomponente wahrscheinlicher als eine negative Druckschwankung, für $y^+ > 12$ ist es gerade umgekehrt. Der Druckmittelwert und auch die gesamte Verteilung ändern sich in Wandnähe fast nicht. Das gilt mit Einschränkungen – zum Beispiel innerhalb der viskosen Unterschicht – auch für die Verteilung der zeitliche Ableitung der axialen Geschwindigkeit.

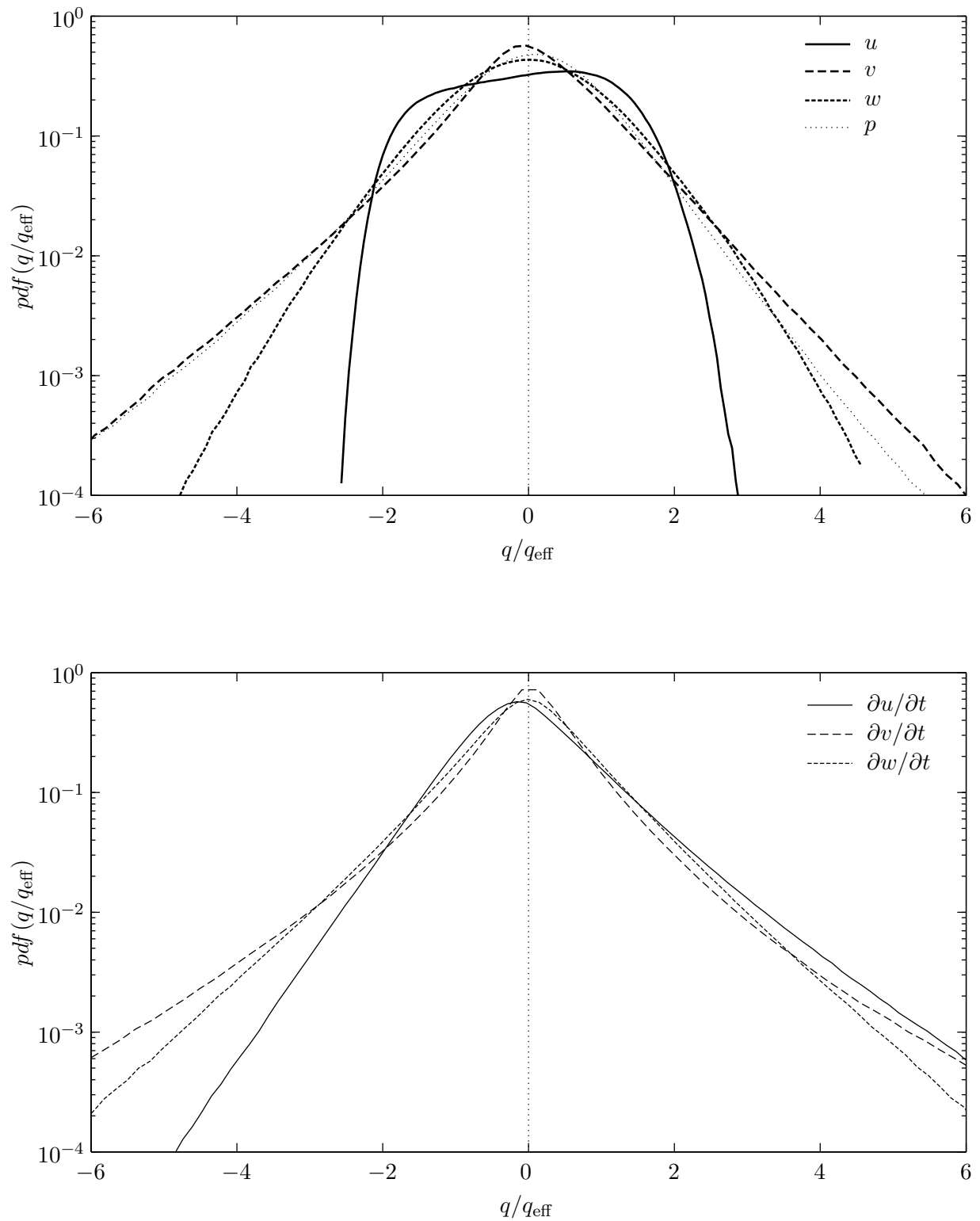


Abb. 5.17: Typische Wahrscheinlichkeitsdichten beim Wandabstand $y^+ = 12$. Oben: Amplitudenverteilungen der Geschwindigkeitsfluktuationen und der Druckfluktuationen, unten: Amplitudenverteilungen der zeitlichen Ableitungen (im ruhenden Koordinatensystem bestimmt) der drei Geschwindigkeitskomponenten.

5.7.2 Mittlere Wahrscheinlichkeitsdichten im instationären Fall

Im instationären Fall kennt man während der Simulation noch nicht die Phasenmittel der untersuchten Größen, daher können im Allgemeinen auch nicht direkt Verteilungen von Schwankungsbewegungen ausgewertet werden. Interessiert man sich beispielsweise für die Verteilung $pdf(u')$, so kann diese *nicht* aus der Verteilung $pdf(u)$ rekonstruiert werden; die, ohne Speicherung von Datenfeldern, gleich während der Simulation bestimmt werden könnte.⁶ Um auch im instationären Fall an die Verteilung von Schwankungsbewegungen zu gelangen, muss auf eine vollständige Phasenmittelung der Verteilungen zurückgegriffen werden. Insbesondere auch dann, wenn man sich neben der mittleren Verteilung für deren Modulation interessiert.

Wenn man zu jeder Phase φ der Anregung eine Wahrscheinlichkeitsdichte bestimmt hat, kann man zunächst den Mittelwert der verteilten Größe $\langle u \rangle(\varphi) = \int u pdf_u(u, \varphi) du$ berechnen, und man erhält durch eine einfache Verschiebung die gesuchten Verteilungen von u' : $pdf_{u'}(u') = pdf_u(\langle u \rangle + u')$. Die mittlere Verteilung dieser Einzelverteilungen stimmt jedoch nur mäßig genau mit der Amplitudenverteilung der stationären Strömung überein. Hier treten kleine Unterschiede zwischen den Langzeitstatistiken der instationären Strömungen und der stationären Strömung auf.

Der mathematische Grund dafür ist in der Tatsache zu sehen, dass die hier untersuchten Wahrscheinlichkeitsdichten, zwar nicht analytisch bekannt, aber sicherlich stark *nichtlineare* Funktionen ihrer Momente sind, sodass, selbst wenn die Langzeitmittelwerte der Momente mit den Momenten der Verteilung der stationären Strömung übereinstimmen, dies nicht für die Verteilung selbst gelten muss. Es wird sich noch zeigen, dass häufig im Wesentlichen die Leistung des untersuchten Turbulenzsignals moduliert ist. Normiert man daher vor einer Mittelung die Einzelverteilungen auf den phasenabhängigen Effektivwert, dann stimmt die so berechnete Verteilung meist sehr gut mit der stationären Verteilung überein.

5.7.3 Verbundwahrscheinlichkeitsdichte

Neben den Verteilungen von einzelnen Größen wie u' , v' , w' und p' sind auch Verteilungen von Funktionen dieser Größen interessant. So spiegelt sich zum Beispiel die charakteristische Korrelation zwischen u' und v' auch in der Verteilung des Produktes dieser beiden Größen wieder. Anstatt nun $pdf(u'v')$ zu untersuchen, kann man direkt einen Schritt weiter gehen und sich die Verbundwahrscheinlichkeitsdichte⁷ $pdf(u', v')$ anschauen. Alle Informationen, die eindimensionale Verteilungen von beliebigen Funktionen der beiden Größen u' und v' enthalten, können aus der Verbundverteilung

⁶ Eine zum Abschnitt 4.9 auf Seite 42 ähnliche Vorgehensweise, mit der direkt die Harmonischen eines Phasenmittels bestimmt werden können, ist im Allgemeinen nicht möglich; jedoch geht es, wenn eine Größe nicht moduliert ist (Beispiele sind die normale und spannweite Geschwindigkeitskomponente: $\langle v \rangle = 0$ und $\langle w \rangle = 0$).

⁷ Wird teilweise auch als gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte bezeichnet.

lung $pdf(u', v')$ ermittelt werden. So gelten unter anderem folgende Beziehungen:

$$pdf_{u'}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} pdf_{u',v'}(\xi, v') dv' \quad (5.15)$$

$$pdf_{v'}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} pdf_{u',v'}(u', \xi) du' \quad (5.16)$$

$$pdf_{u'v'}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|u'|} pdf_{u',v'}\left(u', \frac{\xi}{u'}\right) du' \quad (5.17)$$

$$pdf_{u'^2}(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{\xi}} (pdf_{u'}(\sqrt{\xi}) + pdf_{u'}(-\sqrt{\xi})) & \xi > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (5.18)$$

Abbildung 5.18 zeigt die Verbundverteilung $pdf(u', v')$ für diverse Wandabstände. Die negative Korrelation zwischen u' und v' erkennt man deutlich an der »schiefen« Verteilung. Die in Abbildung 5.19 dargestellten aufintegrierten Wahrscheinlichkeiten zeigen, dass im zweiten ($u' < 0, v' > 0$) und im vierten ($u' > 0, v' < 0$) Quadranten – außer in der Kanalmitte – durchgehend eine höhere Wahrscheinlichkeit der zugehörigen u' - v' -Kombination vorkommt, als die im ersten und im dritten Quadranten. In unmittelbarer Wandnähe (bis $y^+ \approx 10$) überwiegen Bewegungen von lokal langsamen Fluid ($u' < 0$) von der Wand weg ($v' > 0$). Anschließend findet man in der Mehrzahl Bewegungen von lokal schnellem Fluid ($u' > 0$) auf die Wand zu ($v' < 0$). Jemand, der an die Dominanz der kohärenten Strukturen glaubt, kann hierin ein bestätigendes Indiz für die Bedeutung des »Low-speed-streak«, »Ejection«-Mechanismus' (wandnahes langsames Fluid, das sich von der Wand weg bewegt) und sogenannter »Sweeps« (schnelles Fluid wandferner Bereich, das sich auf die Wand zu bewegt) finden.

Der Erwartungswert jeder Funktion $f = f(u', v')$ der beiden Variablen u' und v' ist durch ein Integral über die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte berechenbar:

$$\mathcal{E}[f(u', v')] = \iint_{-\infty}^{\infty} f(u', v') pdf_{u',v'}(u', v') du' dv'. \quad (5.19)$$

Im Zusammenhang mit der Quadrantenanalyse, die auf Wallace et al. (1972) zurückgeht, wird häufig die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten »Ereignisses« angegeben. So unterscheiden sich die Erwartungswerte der Funktion $f(u', v') = u'v'$ deutlich voneinander, wenn jeweils nur über einen der vier Quadranten der u' - v' -Ebene gemittelt wird. Die asymmetrische gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte impliziert, dass Q_2 -Ereignisse (Ejections) und Q_4 -Ereignisse (Sweeps) häufiger anzutreffen sind, als Q_1 - und Q_3 -Ereignisse. Abbildung 5.20 zeigt, wie sich die turbulente Schubspannung $-\mathcal{E}[u'v'](y)$ aus den einzelnen Erwartungswerten der vier Quadranten zusammen setzt.

Räumliche Ausdehnungen von »kohärenten Strukturen« oder gar räumliche und zeitliche Entwicklungen lassen sich aus den gezeigten statistischen Untersuchungen natürlich nicht ableiten. Vielfach wurde daher in der Vergangenheit auf bedingte Mittelungen zurückgegriffen (etwa auf das in der Einleitung erwähnte VITA-Verfahren, oder auf das Quadrantenverfahren, bei dem direkt gewisse Q_2 -Ereignisse als Detektionskriterium benutzt werden), um wenigstens einen Eindruck einer mittleren räumlichen Ausdehnung einer »Struktur« zu erhalten. Häufig waren aber die Vorstellungen über typische Strukturen bereits im voraus geprägt – vor allem durch visuellen Untersuchungen –

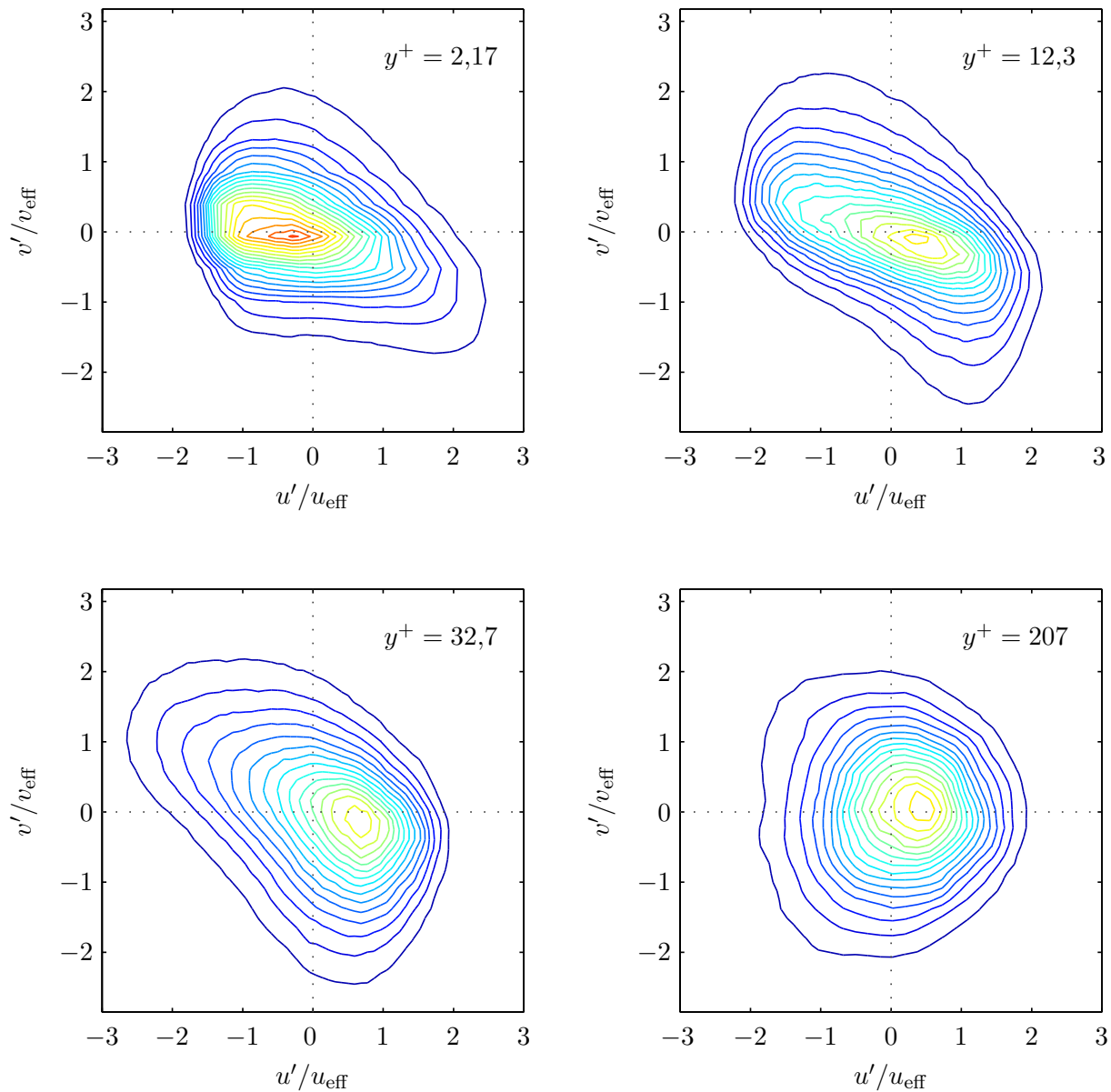


Abb. 5.18: Mittlere gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte $pdf(u', v')$ der turbulenten axialen und normalen Geschwindigkeitsfluktuationen bei diversen Wandabständen. Der Abstand der Höhenlinien ist 0,015.

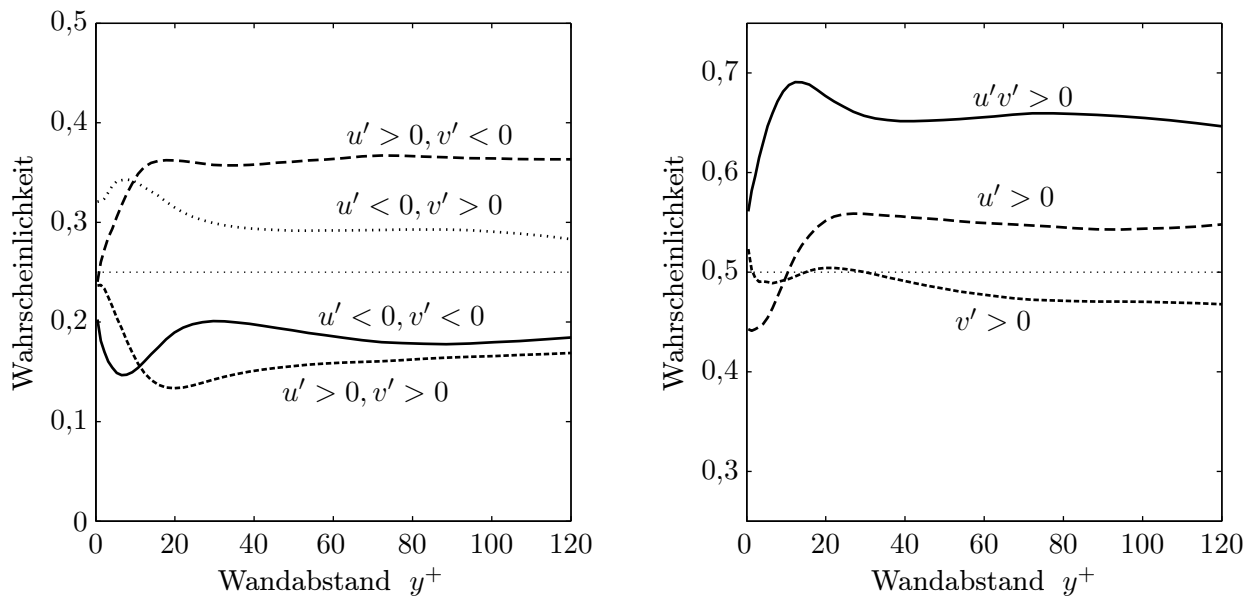


Abb. 5.19: Wahrscheinlichkeit bei simultaner Messung von u' und v' bestimmte Kombinationen von positiven und negativen Werten zu erhalten, jeweils gegen den Wandabstand aufgetragen; links: Einzelwahrscheinlichkeit von jeder der vier möglichen Kombinationen, rechts: Wahrscheinlichkeit dass $u' > 0$, Wahrscheinlichkeit dass $v' > 0$ und Wahrscheinlichkeit dass $u'v' > 0$

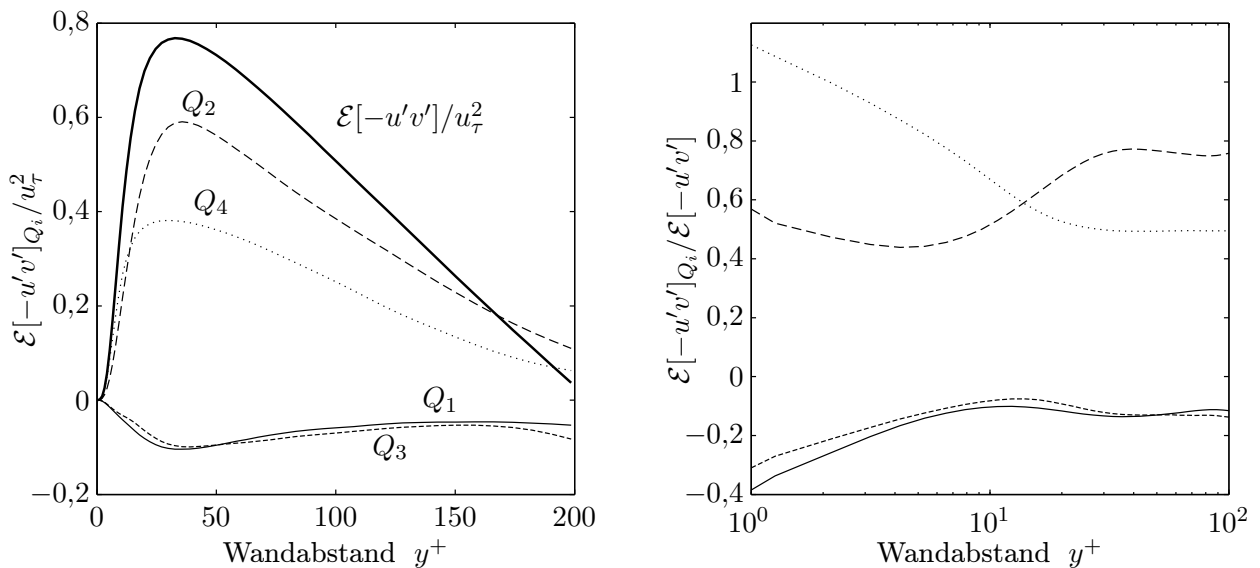


Abb. 5.20: Quadrantenanalyse: Erwartungswerte des Produktes $-u'v'$, wenn nur solche $u'-v'$ -Kombinationen berücksichtigt werden, die jeweils in einem der vier Quadranten der $u'-v'$ -Ebene liegen. Links: Einzelerwartungswerte im Vergleich mit dem Gesamterwartungswert, rechts: Anteile der Einzelerwartungswerte an dem Gesamterwartungswert.

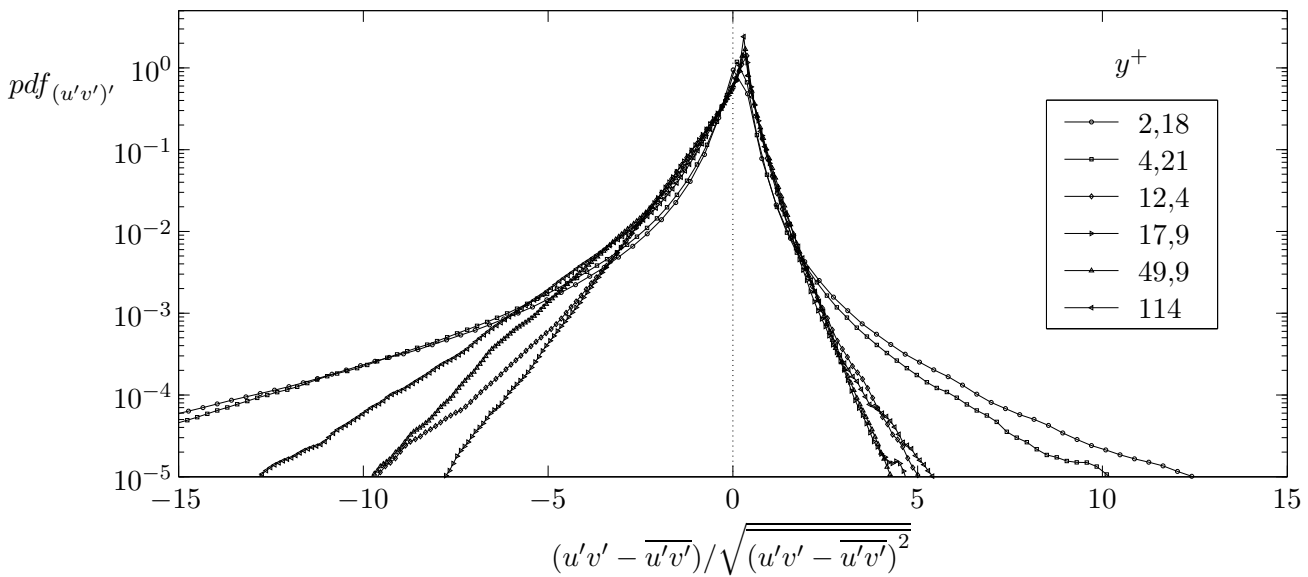


Abb. 5.21: Mittlere Wahrscheinlichkeitsdichte der turbulenten Schubspannung für verschiedene Wandabstände.

und daraus sind dann Kriterien zur Detektion entwickelt worden. Auch hat sich gezeigt (Hartmann 1995), dass die üblicherweise eingesetzten Verfahren nur solche »Strukturen« hervorbringen, die bereits aus einfachen statistischen Größen gewonnen werden können und die sich auch in Zufallssignalen finden lassen, die nichts – ausser einige wenige aufgeprägte statistische Eigenschaften niedriger Ordnung – mit echten Turbulenzsignalen gemeinsam haben. Hier wird daher nicht der wenig erfolgversprechende Versuch unternommen, solche Detektionsverfahren auch auf die instationäre Strömung anzuwenden.⁸

Diesen Abschnitt über die stationären Amplitudenverteilungen abschließend wird nun die eingangs erwähnte eindimensionale Wahrscheinlichkeitsdichte des Produktes zwischen u' und v' ermittelt. Auch sie lässt sich durch Integration von $pdf(u', v')$ berechnen. Aus Gleichung (5.17) ergeben sich die in Abbildung 5.21 dargestellten Verteilungen $pdf(u'v')$. Der Mittelwert von $u'v'$ ist dabei jeweils abgezogen, und $u'v' - \overline{u'v'}$ ist mit dem Effektivwert $\sqrt{(u'v' - \overline{u'v'})^2}$ normiert.

Für die verschiedene wandnormale Positionen zeigt sich auch in Abbildung 5.21, dass große negative Werte des Produktes $u'v'$ viel wahrscheinlicher sind als große positive Werte. Auffällig an der Form der Verteilungen ist, dass für $y^+ > 12$ der positive Ast bei allen Wandabständen fast gleich verläuft.

5.8 Spektren und Korrelationen

Alle Zweipunkt-Korrelationen in den homogenen Richtungen (x und z) sowie zusätzlich, im stationären Fall, die in der Zeitrichtung t , hängen nur von der Ort- bzw. Zeitdifferenz der beteiligten Punkte ab. In der inhomogenen Richtung y gilt dies nicht, hier hängen die Korrelationen von den

⁸ Ansätze dazu finden sich beispielsweise in Tardu et al. (1987) und Flötke (1987). Die Auswertungen waren dort aber auf experimentelle Daten beschränkt (gemessen wurde nur $u(y, t)$).

absoluten Koordinaten beider Punkte ab, z.B.:

$$R_{u'v'}(y, y') = \mathcal{E}[u'(y)v'(y')] \quad (5.20)$$

Durch diese besondere Abhängigkeit von der inhomogenen Koordinate, können die Eigenvektoren der y -Korrelationsfunktionen eine gewisse anschauliche Vorstellung von dominanten »Strukturen« in dieser Richtung liefern.

5.8.1 Karhunen-Loève Zerlegung in der inhomogenen Richtung

Eine eindimensionale »Struktur« kann in diesem Zusammenhang etwa wie folgt definieren werden: $\vec{\phi}(y)$ sei diejenige vektorwertige Funktion, die alle gegebenen Geschwindigkeitsfunktionen $\vec{u}'(y, t)$ (Zufallsvariablen) möglichst gut repräsentiert. Möglichst gut soll dabei heissen, dass das gemittelte Skalarprodukt $\mathcal{E}[(\hat{\phi}, \vec{u})] \stackrel{\text{def}}{=} \int \mathcal{E}[\hat{\phi}(y)\vec{u}(y)] dy^9$ maximiert wird, denn dann hat $\hat{\phi}(y)$ die maximale mittlere quadratische Korrelation mit den gegebenen Geschwindigkeitsfeldern $\vec{u}'(y, t)$. Die Funktionen $\hat{\phi}(y)$ können nun als typische »Strukturen« der Strömung interpretieren werden.

$\hat{\phi}(y)$ sind gerade die Lösungen (Eigenvektoren) der Variationsaufgabe¹⁰

$$\int R_{ij}(y, y')\phi_j(y') dy' = \lambda\phi_i(y), \quad (5.21)$$

wenn $R_{ij}(y, y') \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{E}[u'_i(y)u'_j(y')]$ die Zweipunkt-Korrelationsfunktion der Geschwindigkeitsfluktuationenkomponenten ist. Alle Eigenwerte $\lambda^{(n)}$ sind positiv und reell. Die Eigenvektoren $\hat{\phi}^{(n)}$ bilden ein vollständiges Orthonormalsystem. Jedes Einzelfeld $\vec{u}(y, t)$ kann damit als Summe der typischen Strukturen dargestellt werden:

$$\vec{u}(y, t) = \sum_n c_n(t)\hat{\phi}^{(n)}(y) \quad \text{mit} \quad c_n(t) = (\vec{u}(y, t), \hat{\phi}^{(n)}(y)), \quad (5.22)$$

mit unkorrelierten Koeffizienten $\mathcal{E}[c_n c_m] = \delta_{nm}\lambda^{(n)}$. Das turbulente Geschwindigkeitsfeld (hier aber nur eindimensional betrachtet) besteht danach also immer aus den gleichen »Grundbausteinen«, die sich aber in mehr oder weniger »zufälliger« Weise überlagern.

Die als Strukturen interpretierten Eigenvektoren gewinnen ihre Bedeutung erst durch die Beobachtung, dass bereits wenige Strukturen einen Großteil der gesamten kinetischen Energie enthalten. Allgemein gilt, dass die Summe aller Eigenwerte aus Gleichung (5.21) die Gesamtenergie ergibt:

$$E = \int \mathcal{E}[u'_i u'_i] dy = \sum_n \lambda^{(n)}. \quad (5.23)$$

Die zum größten Eigenvektor gehörende Struktur enthält (bei uns) aber bereits ca. 61% der Gesamtenergie, wenn man nur das wandnahe Strömungsgebiet betrachtet. Noch höhere Werte ergeben sich, wenn auch mehrdimensionale Strukturen zugelassen werden (Moin & Moser 1989).

Die dominanten Strukturen der stationären Strömung sind in Abbildung 5.22 dargestellt. Bei der beschriebenen eindimensionalen Zerlegung ist die spannweite Komponente jeder Eigenfunktion von den beiden anderen Komponenten entkoppelt, denn aus Symmetriegründen gibt es keine Korrelation

⁹ $\hat{\phi}(y)$ ist hier die auf »1« normierte Funktion $\vec{\phi}(y)$, also $\hat{\phi} = \vec{\phi}/\sqrt{(\vec{\phi}, \vec{\phi})}$

¹⁰ Es wird über alle j summiert.

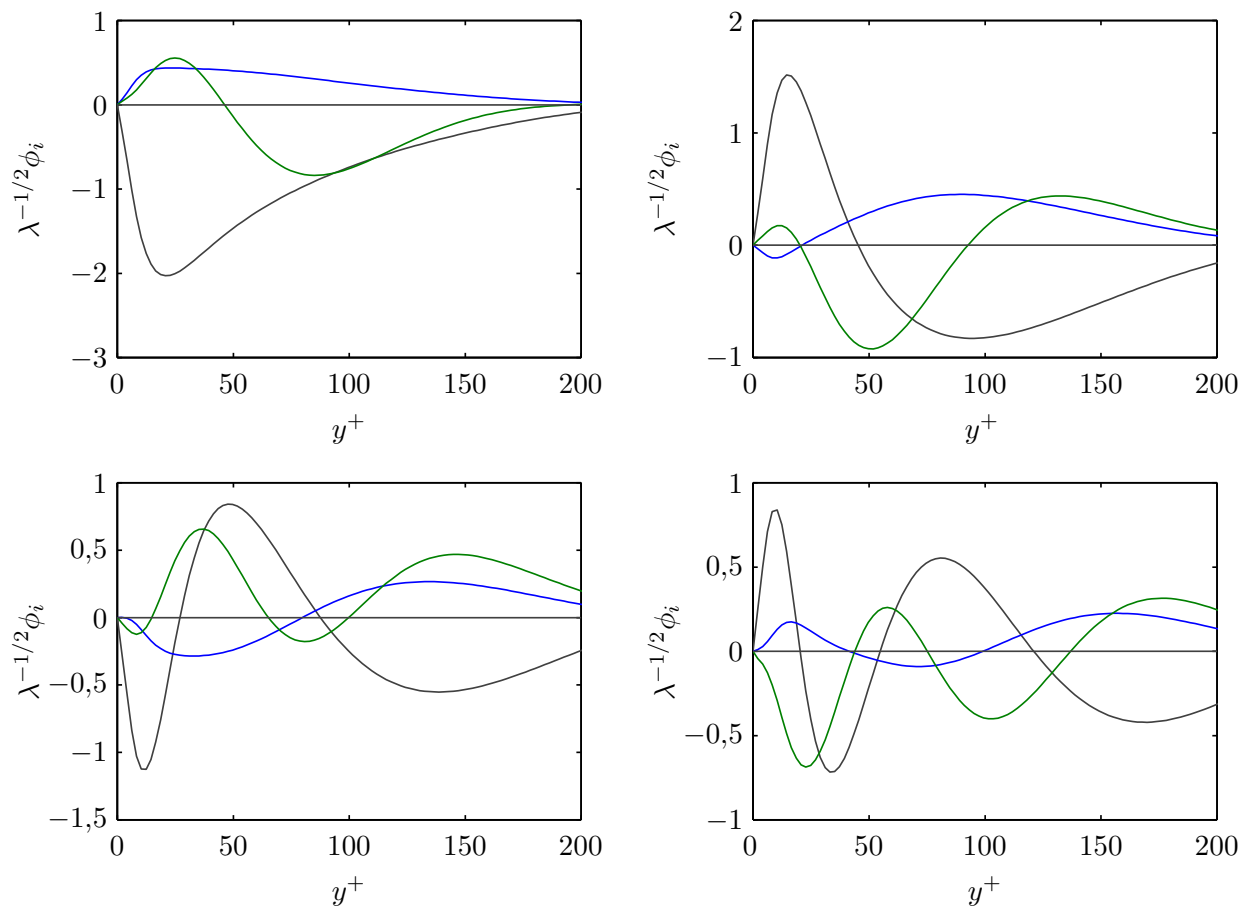


Abb. 5.22: Die ersten vier dominanten Strukturen der eindimensionalen POD Zerlegung. Man beachte, dass die w -Mode unabhängig von der gekoppelten u - v -Mode ist (siehe Text).

von w mit den beiden anderen Komponenten der Geschwindigkeit. Die Abbildung 5.22 ist daher wie folgt zu verstehen: Die gezeigten w -Moden haben keine u - und v -Komponente und die *gekoppelten* u - und v -Moden haben keine w -Komponente.

Die Erweiterung der oben eingeführten eindimensionalen Raumstruktur auf mehrere Raumdimensionen bereitet in der Kanalströmung einige Schwierigkeiten. Zwar kann man das gleiche Verfahren wie oben auch auf die homogenen Richtungen anwenden, aber als Eigenvektoren ergeben sich in dem Fall immer harmonische Funktionen. Diese sind räumlich nicht lokal und können daher schwerlich als »Struktur« interpretiert werden. Wichtiger ist vielleicht noch, dass sie auch keine turbulenzspezifischen Eigenschaften enthalten, denn sie sind die Eigenvektoren *jedes* statistisch homogenen Systems. Möchte man dennoch auch in den homogenen Richtungen eine Struktur definieren, so muss man in jedem Fall die bei der Bildung der Korrelationen verloren gegangenen Phaseninformationen mit berücksichtigen. Hierzu gibt es einige Ansätze (Moin & Moser 1989), die aber nicht ohne (willkürliche) Annahmen auskommen. Zwar kann man erwarten, dass die zeitliche Modulation einer auf diese Art definierten Struktur, einen erweiterten Einblick in die Dynamik der Strömung bringt, aber die zu erwartenden Schwierigkeiten bei der Rekonstruktion der Phasen und vor allem die wohl nicht zu vermeidene Willkür bei diesem Vorgehen, haben dazu geführt, dass dieser Ansatz hier nicht

weiter verfolgt wurde.

Belässt man es bei den Fouriermoden in den homogenen Richtungen, dann ergibt sich für jeden Wellenzahlvektor $\vec{k} = (k_x, k_z)^T$ eine eigene »Struktur« in y -Richtung. Die Verallgemeinerung der Gleichung (5.21) ist folgendes Eigenwertproblem:

$$\int E_{ij}(\vec{k}, y, y') \psi_j^*(\vec{k}, y') dy' = \lambda(\vec{k}) \psi_i(\vec{k}, y). \quad (5.24)$$

Dabei ist $E_{ij}(\vec{k}, y, y') = \mathcal{F}_{\vec{r} \rightarrow \vec{k}} \{R_{ij}(\vec{r}, y, y')\}$ und $\vec{\psi}(\vec{k}, y) = \mathcal{F}_{\vec{r} \rightarrow \vec{k}} \{\vec{\phi}(\vec{r}, y)\}$. $\hat{\psi}(\vec{k}, y) e^{i\vec{k}\vec{x}}$ sind dann die dreidimensionalen Eigenvektoren, die für die stationäre Strömung unter anderem von Moin & Moser (1989) untersucht wurden.

Abschließend sei noch angemerkt, dass es sich bei der – auf den ersten Blick sehr vielversprechenden und in letzter Zeit häufiger eingesetzten – POD Zerlegung, um eine *lineare* Zerlegung des turbulenten Strömungsfeldes handelt. Unter der Annahme, man könnte die oben erwähnten Probleme der fehlenden Phasenbeziehungen auf befriedigende Weise lösen, stellt sich dennoch die prinzipielle Frage, ob die Dynamik der Strömung, die ja durch nichtlineare Phänomene bestimmt wird, überhaupt durch eine derartige lineare Beschreibung der Felder erfasst werden kann. Auch drängt sich beim betrachten der in Abbildung 5.22 gezeigten »Strukturen« der Verdacht auf, dass auch die POD Zerlegung in der inhomogenen Richtung letztlich nichts anderes beschreibt, als eine Fourier-Zerlegung auf einem Koordinatensystem, das an der Wand durch einen kleineren Maßstab gekennzeichnet ist, als in der Kanalmitte. Dann aber wären die y -Moden für eine Strukturdefinition ebensowenig geeignet, wie die Fourier-Moden in den homogenen Richtungen.

5.8.2 Korrelationen in den homogenen Richtungen

Kapitel 7 (ab Seite 131) befasst sich ausführlich sowohl mit den stationären Spektren und Korrelationen als auch mit deren Modulation. An dieser Stelle werden vorab zwei besondere Eigenschaften der räumlichen Gleichspektren erwähnt, die sich ergeben, wenn man die Spektren gleichzeitig als Funktion der axialen als auch der spannweitigen Wellenzahl betrachtet. Auch wird die Zahl der Freiheitsgrade in den homogenen Richtungen der turbulenten Strömung untersucht. Sie ergibt sich aus den Korrelationsfunktionen und ist für die Signifikanz der berechneten Mittelwerte wichtig.

Korrelation, Kohärenz und Produktion

Während der über alle Raumfrequenzen gemittelte Korrelationskoeffizient

$$\chi_{u'v'} = \frac{-\overline{u'v'}}{\sqrt{\overline{u'^2} \overline{v'^2}}} \quad (5.25)$$

nicht über 0,5 steigt, findet man für den nach Raumfrequenzen aufgeschlüsselten Korrelationskoeffizient (Kohärenz) Werte bis fast 0,9, einhergehend mit einer deutlich anisotropen Struktur in Wandnähe. Dabei ergeben sich bei kleinen axialen Wellenzahlen besonders hohe Werte.

Die komplexe Kohärenzfunktion

$$\gamma_{u'v'}(\vec{k}) = \frac{-E_{u'v'}(\vec{k})}{\sqrt{E_{u'^2}(\vec{k}) E_{v'^2}(\vec{k})}} \quad (5.26)$$

ist ein Maß für die Ähnlichkeit zwischen u' und v' bei gegebener Raumfrequenz $\vec{k} = (k_x, k_z)^T$. Dabei ist $E_{u'v'}(\vec{k})$ das räumliche 2D-Kreuzspektrum zwischen der axialen Geschwindigkeitskomponente u' und der Normalkomponente v' . Die Abbildungen 5.23 und 5.24 zeigen Beispiele der komplexen 2D-Kohärenzfunktion aufgeschlüsselt nach Realteil, Imaginärteil und Betrag. Erstaunlich ist, dass die Kohärenz für gewisse Wellenzahlbereiche fast vollständig verschwindet. Desweiteren fällt auf, dass der Realteil teilweise positiv wird. Dem Realteil von $E_{u'v'}(\vec{k})$ kommt die besondere Bedeutung zu, dass nur er zur Schubspannung und damit zum oben angegebenen Korrelationskoeffizienten beiträgt.

Für den Produktionsterm $\int_y -\overline{u'v'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} dy$ der Energiegleichung ergibt sich damit folgendes überraschendes Ergebnis: Es gibt Wellenzahlbereiche in denen der Produktionsterm (schwach) negativ wird, d.h. im Mittel ein Energiefluss von den Schwankungsbewegungen in die mittlere Strömung stattfindet. Die Produktion in einzelnen Ebenen parallel zu den Kanalwänden zeigt in Wandnähe eine deutliche Anisotropie, die sich erwartungsgemäß mit größerem Wandabstand mehr und mehr verliert.

Betrachtet man die Produktion P allein als Funktion der axialen Wellenzahl k_x und des Wandabstandes (integriert über alle k_z), so erkennt man, abgesehen von den sehr kleinen Wellenzahlen, ein breites lokales Minimum innerhalb der Pufferschicht (Abbildung 5.25). Der Wandabstand dieses Produktionsminimums liegt bei etwa $y^+ = 16$ bis 20 und ist nur wenig abhängig von der axialen Wellenzahl (für kleinere Wellenzahlen liegt es etwas weiter von der Wand entfernt). Für die sehr kleinen axialen Wellenzahlen findet man zwar kein Minimum, mit steigender Wellenzahl wird es aber immer deutlicher. Der Wert des Minimums wird bei große axiale Wellenzahlen negativ, hier wird der Strömung im Mittel turbulente Schwankungsenergie entzogen. Integral über alle k_x betrachtet, macht die negative Produktion aber nur einige Prozent der Gesamtproduktion aus. Auf weiter Einzelheiten und Abbildungen zur Produktion bzw. zum Kreuzleistungsspektrum $E_{u'v'}(\vec{k})$ sei auf Kapitel 7 verwiesen.

Taylorhypothese

Für einige der simulierten Strömungen sind die vierdimensionalen Turbulenzfelder $u(x, y, z, t)$, $v(x, y, z, t)$, $w(x, y, z, t)$ und $p(x, y, z, t)$ gespeichert worden, jedoch meist mit reduzierter räumlicher und/oder zeitlicher Auflösung gegenüber der tatsächlichen Rechnung. Mit den Daten war es aber möglich gleichzeitig räumliche und zeitliche und auch räumlich-zeitliche Spektren zu berechnen. Unter anderem konnte so die Taylorhypothese überprüft werden, die für die Spektren besagt, dass sich ein an einem festen Ort gemessenes zeitliches Spektrum $S(\omega)$ im wesentlichen aus dem räumlichen Spektrum $E(k_x)$ ergibt: $S(\omega) = E(\omega/u_c)/u_c$. Dabei ist u_c die lokale Konvektionsgeschwindigkeit, die hier als konstant für alle Frequenzen angenommen wird.

Aus den ausgewerteten zweidimensionalen Spektren $\Phi(\omega, k_x)$ lassen sich die eindimensionalen Spektren $S(\omega)$ und $E(k_x)$ durch eine einfache Integration berechnen:

$$S(\omega) = \int \Phi(\omega, k_x) dk_x \quad (5.27)$$

$$E(k_x) = \int \Phi(\omega, k_x) d\omega. \quad (5.28)$$

Abbildung 5.26 zeigt einen Vergleich zwischen $E(k_x)$ und $S(k_x u_c)/u_c$ beim Wandabstand $y^+ = 0,03$ (erster Gitterpunkt über der Wand).

Die Spektren aller drei Schwankungskomponenten und der Druckschwankungen sind in der Abbildung zu sehen. Die Taylorhypothese ist offenbar gut erfüllt, soweit die Umrechnung von räumlichen

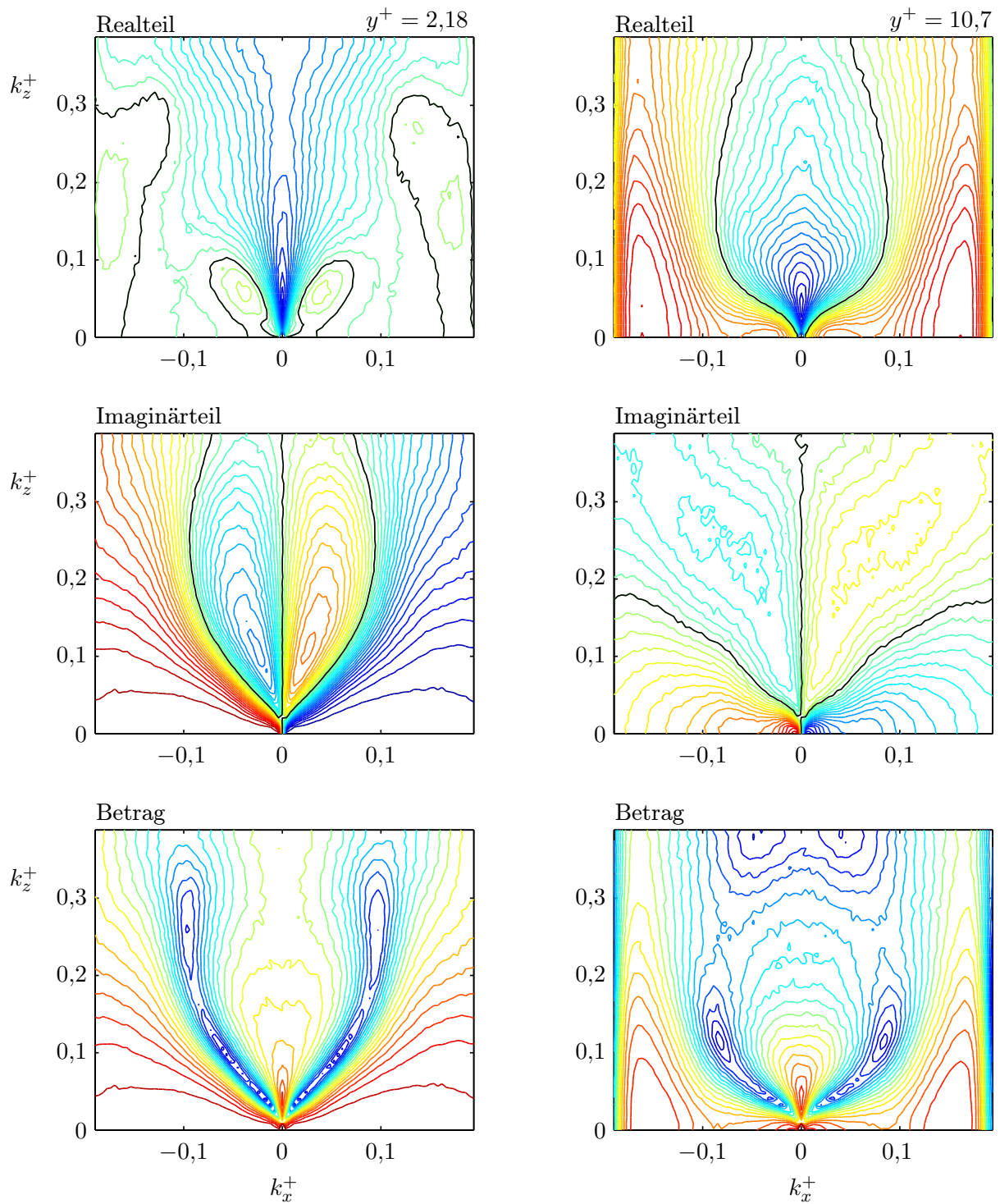


Abb. 5.23: Ausschnitt der komplexen 2D-Kohärenzfunktion $\gamma_{u'v'}(k_x, k_z)$ für zwei unterschiedliche wandnormale Positionen (linke und rechte Spalte), aufgeschlüsselt nach Realteil (oben), Imaginärteil (mitte) und Betrag (unten). Die Farbkodierung geht für den Real- und Imaginärteil von -1 (Dunkelblau) bis $+1$ (Rot), für den Betrag von 0 (Dunkelblau) bis 1 (Rot). Die Höhenlinien haben für alle Auftraggungen einen konstanten Abstand von $0,05$.

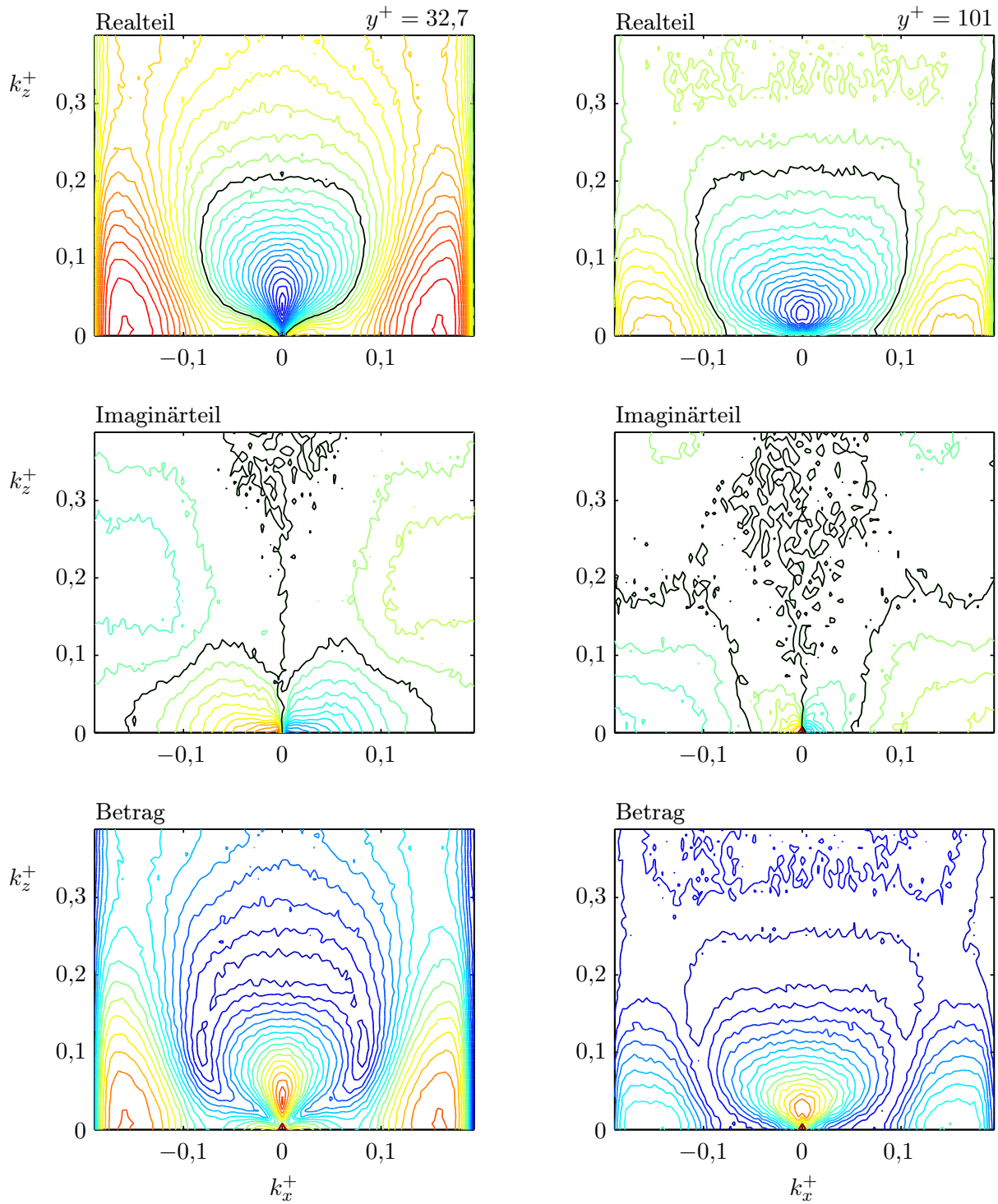


Abb. 5.24: Legende wie Abbildung 5.23.

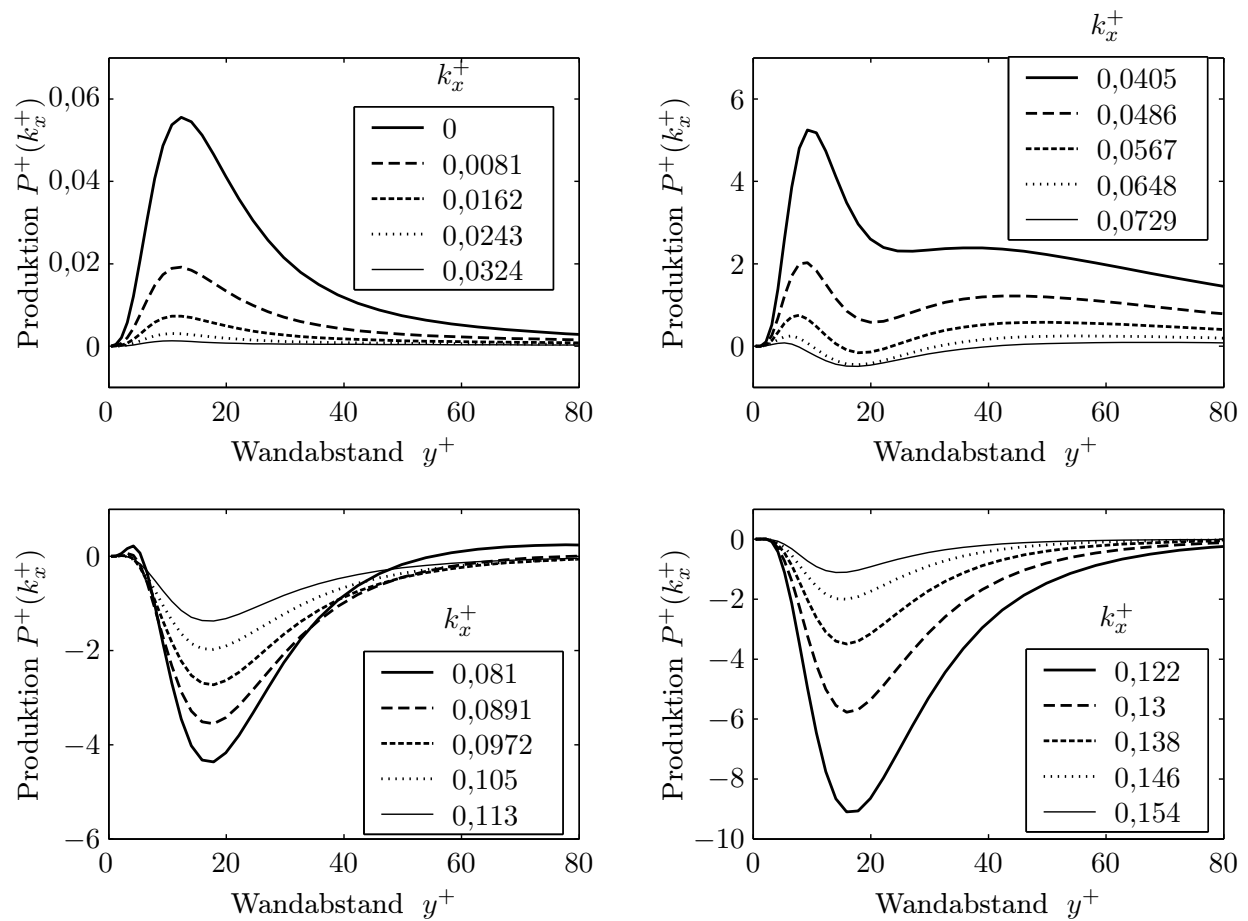


Abb. 5.25: Produktion $P(k_x) = -\overline{u'v'}(k_x) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ für verschiedene axiale Wellenzahlen k_x als Funktion des Wandabstandes y . Man beachte die unterschiedlichen Maßstäbe der Einzelbilder.

Spektren in zeitliche Spektren betroffen ist. Die Übereinstimmung ist sogar besser als erwartet, insbesondere für die hier ausgewählte sehr wandnahe Position. In Abbildung 5.26 sind auch die zeitlichen Spektren eingezeichnet, die in einem mit der lokalen Konvektionsgeschwindigkeit u_c mitbewegten Koordinatensystem gemessen würden. Auch sie lassen sich aus den räumlich-zeitlichen Spektren berechnen:¹¹

$$S_{U'^2}(\omega) = \int \Phi_{u'^2}(\omega - k_x u_c, k_x) dk_x. \quad (5.29)$$

Im mitbewegten System zeigt sich, dass die tatsächlichen zeitlichen Änderungen der Schwingungsbewegungen, also die, die nicht durch die konvektierte räumliche Struktur bedingt sind, durch vergleichsweise große Zeitskalen dominiert werden. Genau das war die Grundannahme der Taylorhypothese.

Freiheitsgrade

Erwartungswerte werden in der Simulation (als auch in jedem Experiment) durch Mittelung über eine oder mehrere homogene Richtungen erhalten. Diese Vorgehensweise beruht auf der Ergodenhypothese.

¹¹ U' bezeichnet die Schwankungen im mitbewegten System und u' die des ruhenden Systems.

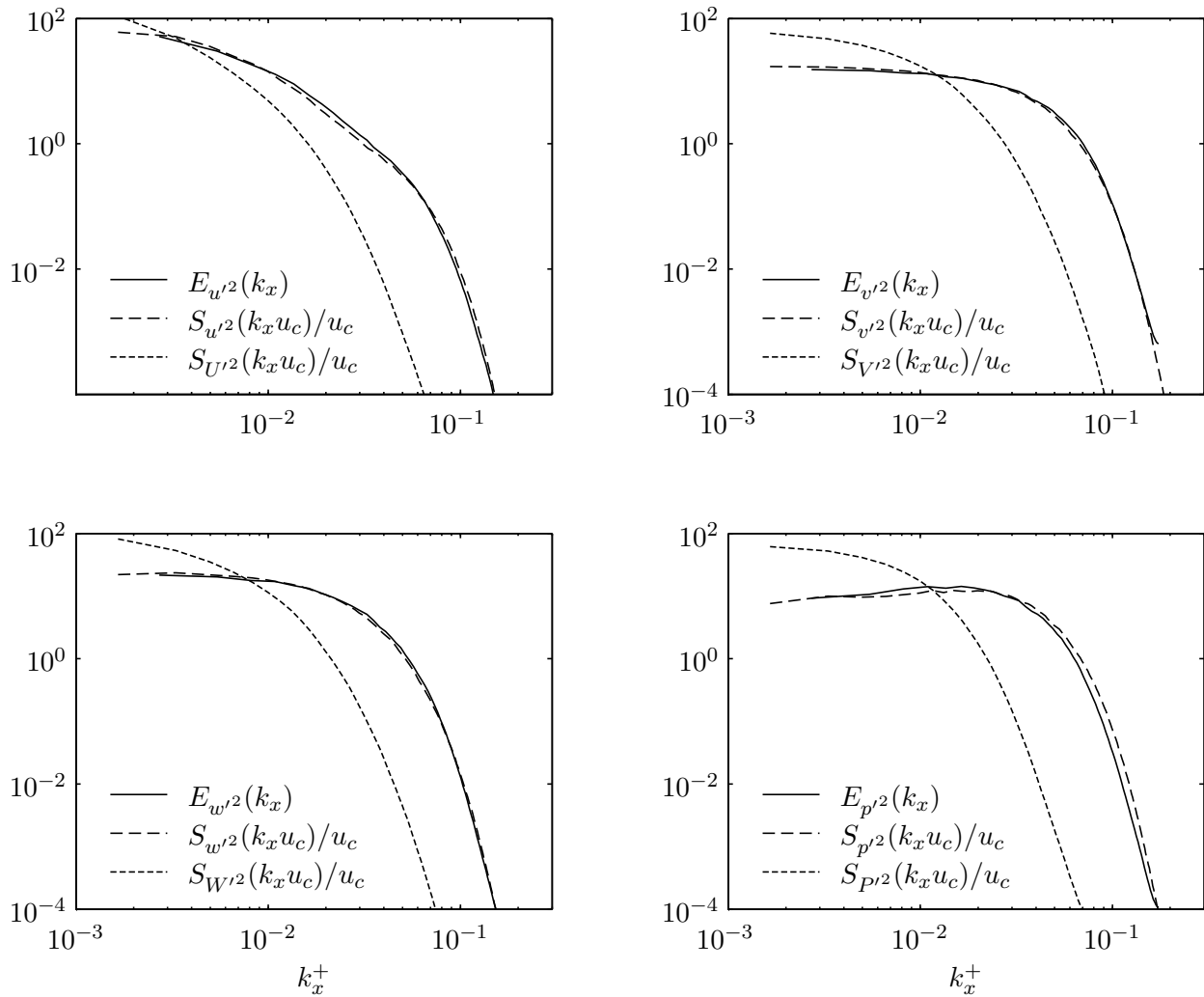


Abb. 5.26: In Raumspektren umgerechnete Zeitspektren im Vergleich mit den echten räumlichen Spektren. u' , v' , w' und p' kennzeichnen die Schwankungsbewegungen im ruhenden System während U' , V' , W' und P' Schwankungskomponenten des mit der lokalen Konvektionsgeschwindigkeit mitbewegten Systems repräsentieren. Alle Spektren sind auf die jeweilige Gesamtleistung normiert. Der Wandabstand ist $y^+ = 0,03$.

pothese, die besagt, dass die theoretisch nötige Mittelung über alle möglichen Realisationen durch eine Mittelung über die äquivalenten Punkte einer einzigen Realisation (meist Ort oder Zeit) ersetzt werden darf. Die in diesem Kapitel gezeigten stationären y -Profile, etwa $\bar{u}(y)$ oder $\overline{u'v'}(y)$, sind beispielsweise durch Mittelung der entsprechenden Größe (sie sei hier $q = q(\vec{x}, t)$ genannt) über alle Zeiten t und alle Orte x und z entstanden. Bekanntlich verhält sich die Varianz des Mittelwertes umgekehrt proportional zur Zahl der *unabhängigen* Mittelungen. Wenn aber nach jedem Zeitschritt jeweils über alle Gitterpunkte der x - z -Ebenen gemittelt wird, dann sind diese Mittelungen keineswegs unabhängig. Wären sie es, dann müssten unter anderem alle Zeitsignale die an zwei unterschiedlichen Orten gemessen werden, vollkommen unkorreliert sein, denn statistische Unabhängigkeit impliziert Unkorreliertheit¹². Die tatsächlichen Korrelationsfunktionen unterscheiden sich aber sehr deutlich von einer Deltafunktion (vergleiche Kapitel 7). Identifiziert man das Verhältnis der Varianz der Größe q zur Varianz vom berechnetem Mittelwert als die Zahl der Freiheitsgrade

$$\text{F.g.}\bar{q} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sigma_q}{\sigma_{\bar{q}}}, \quad (5.30)$$

dann muss man, um eine Aussage zur Signifikanz des berechneten Mittelwerts machen zu können, aus den statistisch abhängigen Einzelwerten von q die Zahl der Freiheitsgrade berechnen:

Nach Anhang C auf Seite 185 ist die Zahl der Freiheitsgrade pro Längeneinheit

$$\text{f.g.}\bar{q}^x = \frac{R_{q'q'}(0)}{\int R_{q'q'}(r_x) dr_x} = \frac{\int E_{q'q'}(k_x) dk_x}{E_{q'q'}(0)}. \quad (5.31)$$

Dabei bedeutet \bar{q}^x eine Mittelung von q allein in x -Richtung. $R_{q'q'}(r_x) = \mathcal{E}[q'(x)q'(x+r_x)]$ ist die Korrelationsfunktion und $E_{q'q'}(k_x) = \mathcal{F}\{R_{q'q'}\}$ das zugehörige Leistungsspektrum. Entsprechendes gilt für die z - und die Zeitrichtung.

Die Kehrwerte von $\text{f.g.}\bar{q}^x$ und $\text{f.g.}\bar{q}^z$ können als Gedächtnislängen der Turbulenz interpretiert werden und $1/\text{f.g.}\bar{q}^t$ als Gedächtniszeit. Abbildung 5.27 zeigt diese Größen als Funktion des Wandabstandes. Die Zeitspektren aus denen die Gedächtniszeiten berechnet wurden, sind in einem mit der lokalen Konvektionsgeschwindigkeit mitbewegten Koordinatensystem bestimmt worden. Dadurch wird nur die tatsächliche zeitliche Änderung der entsprechenden Größe berücksichtigt und nicht die Änderung, die im ruhenden System durch die Konvektion des räumlichen Musters hervorgerufen würde. Misst man im realen Experiment an einem festen Ort ein Zeitsignal und mittelt man anschließend die gemessene Größe, dann wird die Zahl der Freiheitsgrade dieser Mittelung im Wesentlichen durch $\text{f.g.}\bar{q}^x$ bestimmt (Taylorhypothese). In der Simulation werden die Zeitsignale dagegen vom Umlauf der Strukturen durch das periodische Rechengelände bestimmt, sodass für zeitliche Mittelungen, bei denen die Mittelungszeit groß gegen die Umlaufzeit ist, nur eine »echte« zeitliche Änderung des Strömungsmusters die Varianzen der Mittelwerte senken kann.

Die Werte der Abbildung 5.27 lassen erkennen, dass sich im Allgemeinen die »Strukturen« in Strömungsrichtung nur wenig und zeitlich nur langsam ändern. Im besonderen Maße gilt das für die u -Komponente. Sehr »effektiv« können Mittelwerte in spannweitischer Richtung bestimmt werden, denn man mittelt dabei über vergleichsweise viele Freiheitsgrade. In der Kanalmitte gilt das für w aber nur bedingt, dort gibt es offenbar großräumige Bewegungen in spannweitischer Richtung.

Die Angabe einer Zahl von Freiheitsgraden pro Längen- bzw. Zeiteinheit könnte dazu verleiten, bei gegebener Fensterlänge der Mittelung die Gesamtzahl der Freiheitsgrade durch Multiplikation mit dieser Dichte zu ermitteln. Das ist aber nur dann zulässig, wenn die Fensterlänge ausreichend lang

¹² Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht, da unkorrelierte Daten durchaus statistisch abhängig sein können.

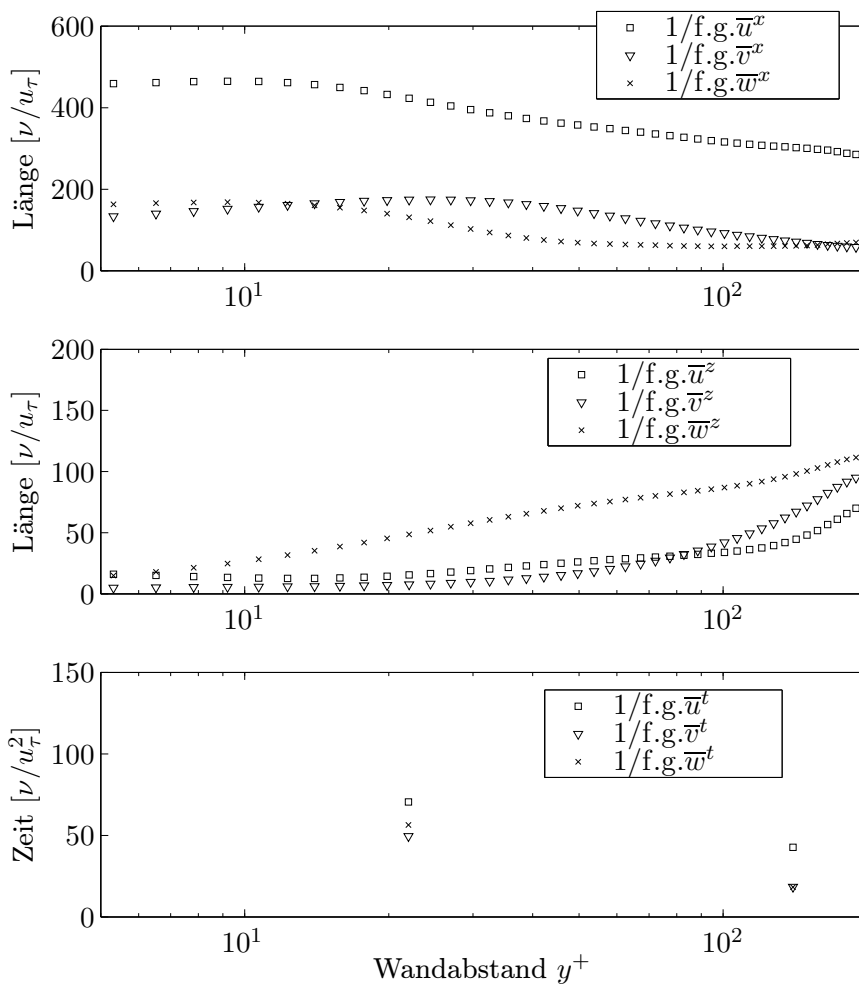


Abb. 5.27

»Gedächtnis«-Längen und
-Zeiten der Turbulenz.

ist. Bei periodischen Signalen (hier ist das für die Raumrichtungen erfüllt) heißt ausreichend lang, dass über eine vollständige Periode gemittelt werden muss. Zeitlich sind die Signale nicht periodisch und »ausreichend lang« können die Fenster dann nur näherungsweise sein. Bei kurzen Fensterlängen wirkt sich aus, dass neben dem Gleichanteil des Leistungsspektrums auch solche Frequenzkomponenten ω zur Varianz des gemittelten Signals beitragen, für die $2\pi/\omega$ kein ganzzahliges Vielfaches der Fensterlänge ist.

Es sei noch angemerkt, dass $f.g.\bar{q}^x \cdot f.g.\bar{q}^z$ nicht immer eine brauchbare Schätzung für die Zahl der Freiheitsgrade in der x - z -Ebene ergibt, wie man vielleicht vermuten könnte. Dazu muss entsprechend die zweidimensionale Korrelationsfunktion $R_{q'q'}(r_x, r_z)$ ausgewertet werden. Im Allgemeinen gilt auch nicht $f.g.\bar{q}^{x,z} < f.g.\bar{q}^x \cdot f.g.\bar{q}^z$, denn Korrelationsfunktionen können auch negativ werden und damit die Freiheitsgrade erhöhen. So gilt in der Simulation sogar $f.g.\bar{v}^{x,z} = \infty$, wenn über das gesamte Rechengebiet gemittelt wird, da die Kontinuitätsgleichung keinen Mittelwert von v in einer wandparallelen Ebene zulässt. In der Simulation wird in der Regel über alle homogenen Richtungen gemittelt, sodass für eine exakte Fehlerangabe von $\bar{q} = \bar{q}^{x,z,t}$ die dreidimensionale Korrelationsfunktion $R_{q'q'}(r_x, r_z, r_t)$ bekannt sein müsste. Die kann aber auch nur durch eine Mittelung geschätzt werden, und die Schätzung ist dabei wesentlich unsicherer als der Mittelwert \bar{q} selbst. Im Allgemeinen können aber die in Abbildung 5.27 gegebenen Werte für eine grobe Abschätzung des Fehlers herangezogen werden, auch dann wenn statt \bar{u} , \bar{v} bzw. \bar{w} andere Mittelwerte berechnet werden. Abschließend sei noch angemerkt, dass neben den Langzeitmittelwerten für die Untersuchung der instationären Strömung vor allem die bezüglich der Wandperiode phasenstarr gemittelten Werte

wichtig sind. Die Zahl der Freiheitsgrade der Phasenmittel ist dabei häufig größer als die der Langzeitmittel, denn die relevanten Zeitspektren fallen meist mehr oder weniger schnell mit der Frequenz ab, sodass die Leistungsdichte der Schwankungen bei der Modulationsfrequenz teils deutlich kleiner ist, als die Leistungsdichte bei der Frequenz null.

5.9 Momentanbilder

Ergänzend zu den statistischen Daten der vorherigen Abschnitte, die alle durch diverse Mittelungen entstanden sind, zeigen die Abbildungen 5.28 – 5.31 einige Momentanbilder der turbulenten Strömung. Dabei sind verschiedene Schnitte durch ein typisches stationäres turbulentes Strömungsfeld dargestellt. Die eingezeichneten Pfeile repräsentieren nach Betrag und Richtung die Projektion des Geschwindigkeitsvektors \vec{u} in die jeweilige Ebene. Zusätzlich sind Höhenlinien der jeweils senkrecht zur Ebene stehenden Geschwindigkeitskomponente oder Höhenlinien des Drucks eingezeichnet.

Die zweidimensionalen Abbildungen vermitteln zwar nur einen begrenzten Eindruck von der turbulenten Strömung, einige der häufig beschriebenen Strukturen können aber ganz gut identifiziert werden. So sind im y - z -Schnitt ausgeprägte Längswirbelstrukturen zu erkennen. Die Wirbelkerne sind dabei durch lokale Druckminima ausgezeichnet. Ein Druckminimum ist jedoch auch nur bedingt als Kriterium zur Identifikation eines Wirbels in einer Scherschicht geeignet (Jeong & Hussain 1995). Die Streifenstruktur der u -Komponente ist im x - z -Schnitt zu sehen. Es sind ausgedehnte Teilgebiete zu erkennen, die eine mehr oder weniger einheitliche u -Komponente aufweisen. Dennoch ist die Struktur sehr unregelmäßig und bei weitem nicht so einheitlich wie es einige Beschreibungen suggerieren.

Die rein visuelle Deutung von Strömungsbildern ist immer sehr subjektiv geprägt und es ist auch *nicht* beabsichtigt mit den gezeigten Abbildungen die physikalische Bedeutung oder auch nur die Existenz irgendeiner Struktur zu belegen. Auch die verschiedenen Möglichkeiten dreidimensionale Felder darzustellen, können eine statistische Auswertung der Daten meist nicht ersetzen. Die statistischen Auswertung müssen sich dabei keineswegs auf Langzeitmittelwerte beschränken, von denen einige in diesem Kapitel gezeigt wurden, sondern es kann auch die zeitliche Entwicklung der Turbulenz berücksichtigt werden. Die beiden nächsten Kapitel zeigen eine Möglichkeit, wie man dabei vorgehen kann.

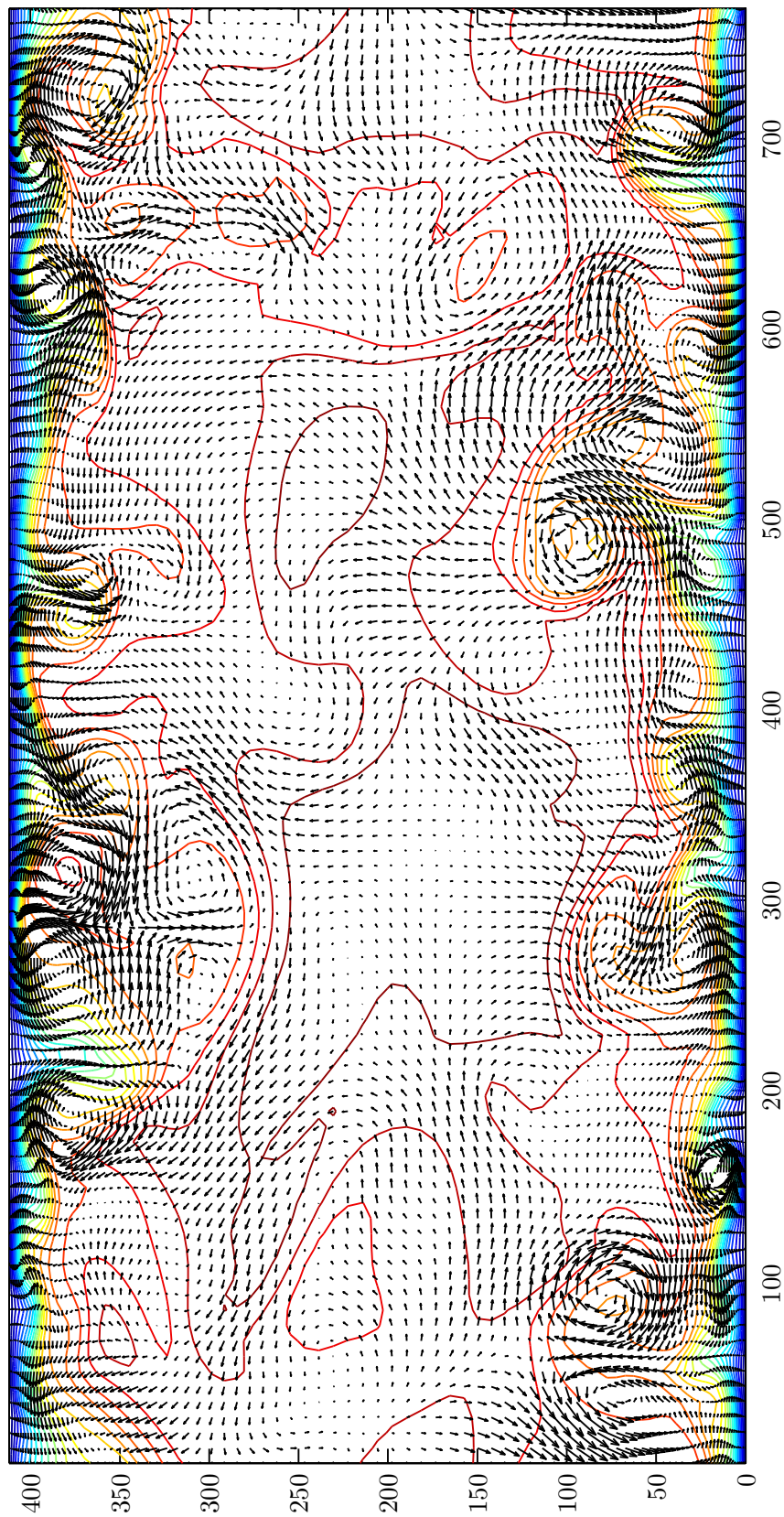


Abb. 5.28: Projektion der momentanen Geschwindigkeitsvektoren in die y - z -Ebene bei $x = 0$. Die Höhenlinien stellen die dazu senkrecht stehende Komponente u dar.

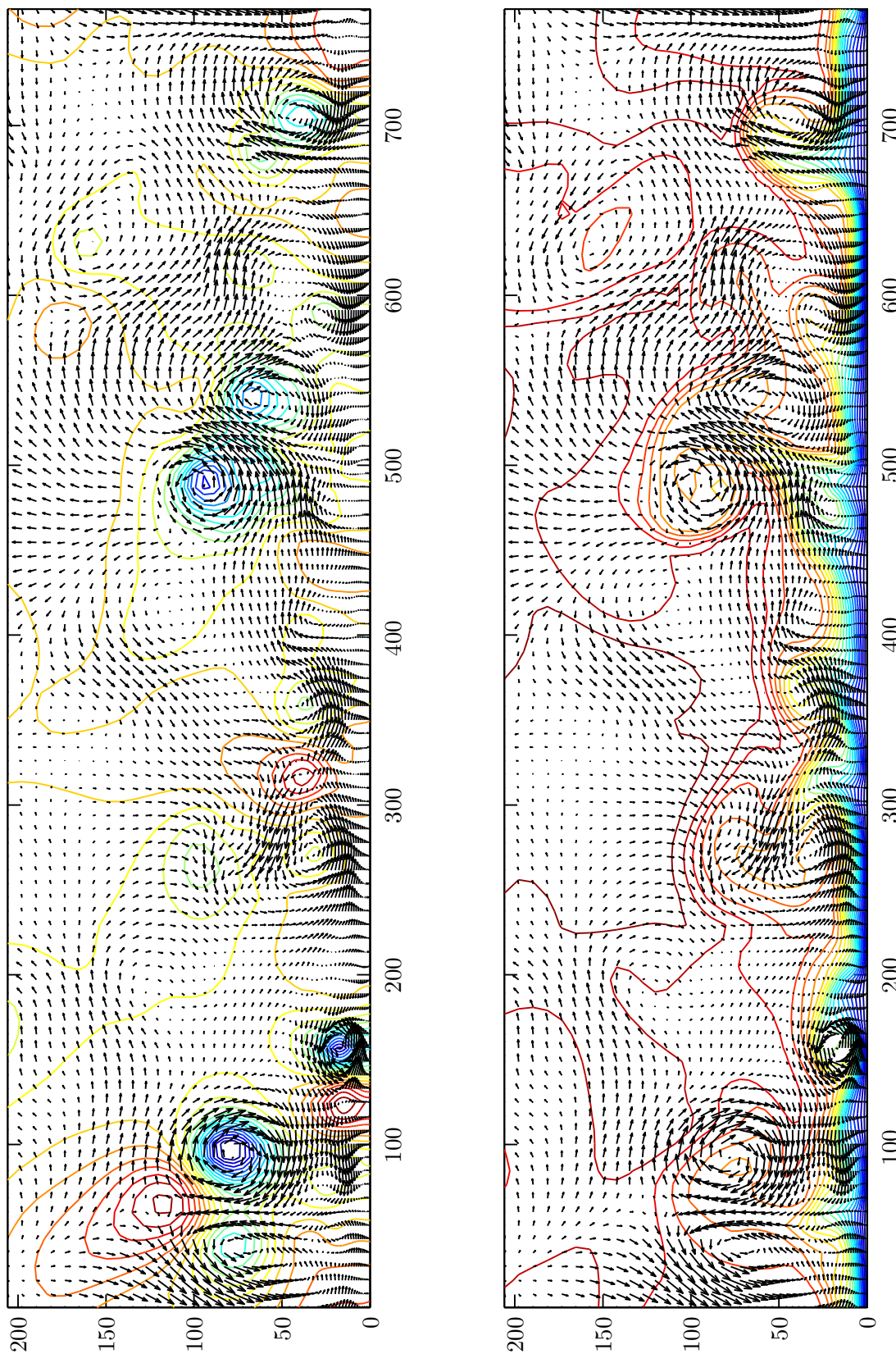


Abb. 5.29: Projektion der momentanen Geschwindigkeitsvektoren in die y - z -Ebene bei $x = 0$, einmal zusammen mit u - und einmal zusammen mit p -Höhenlinien dargestellt.

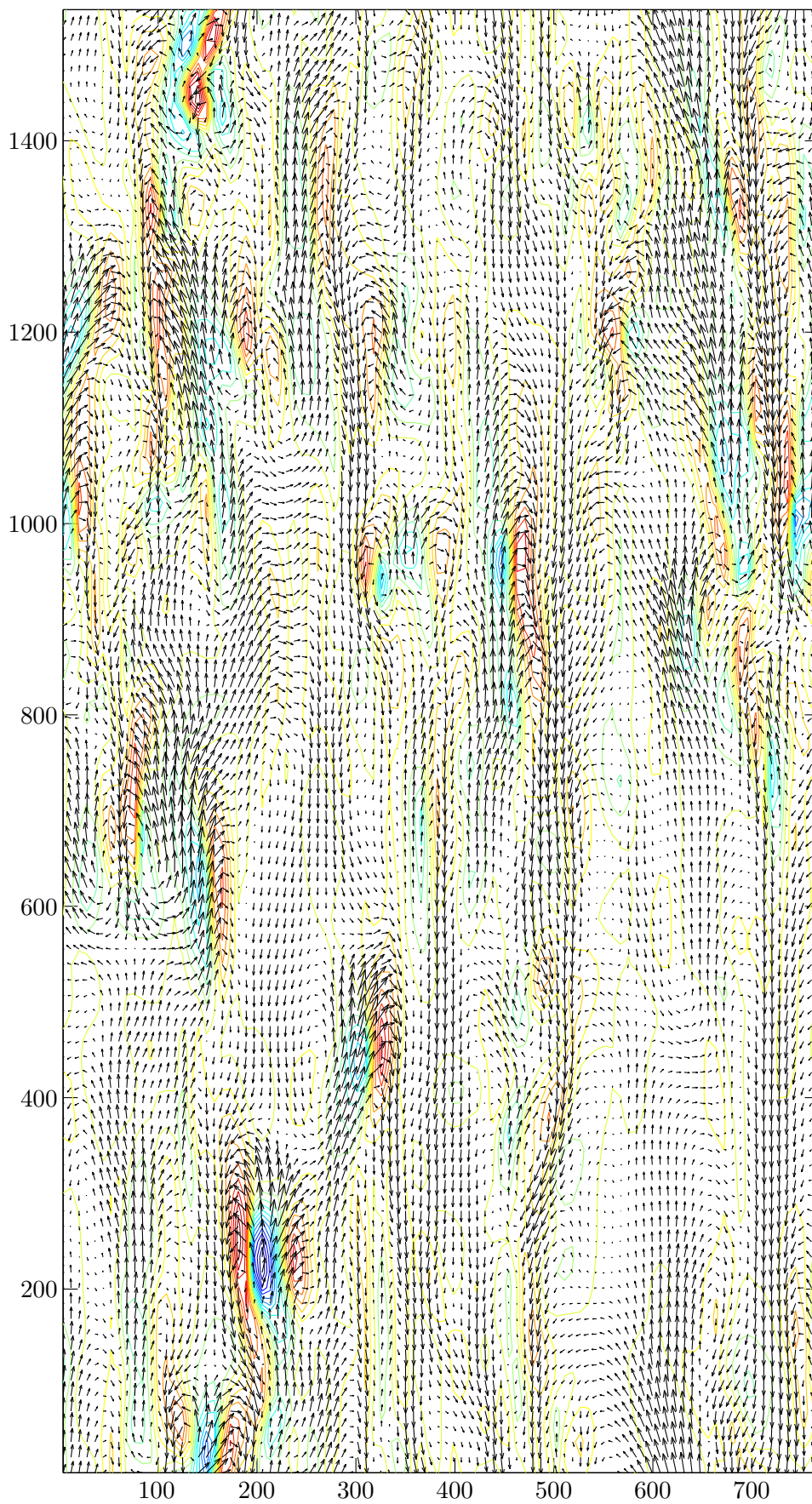


Abb. 5.30: Projektion der momentanen Geschwindigkeitsvektoren in die x - z -Ebene bei $y^+ = 11$. Von der axialen Komponente wurde die mittlere Geschwindigkeit subtrahiert. Die Höhenlinien stellen die dazu senkrecht stehende Komponente v dar.

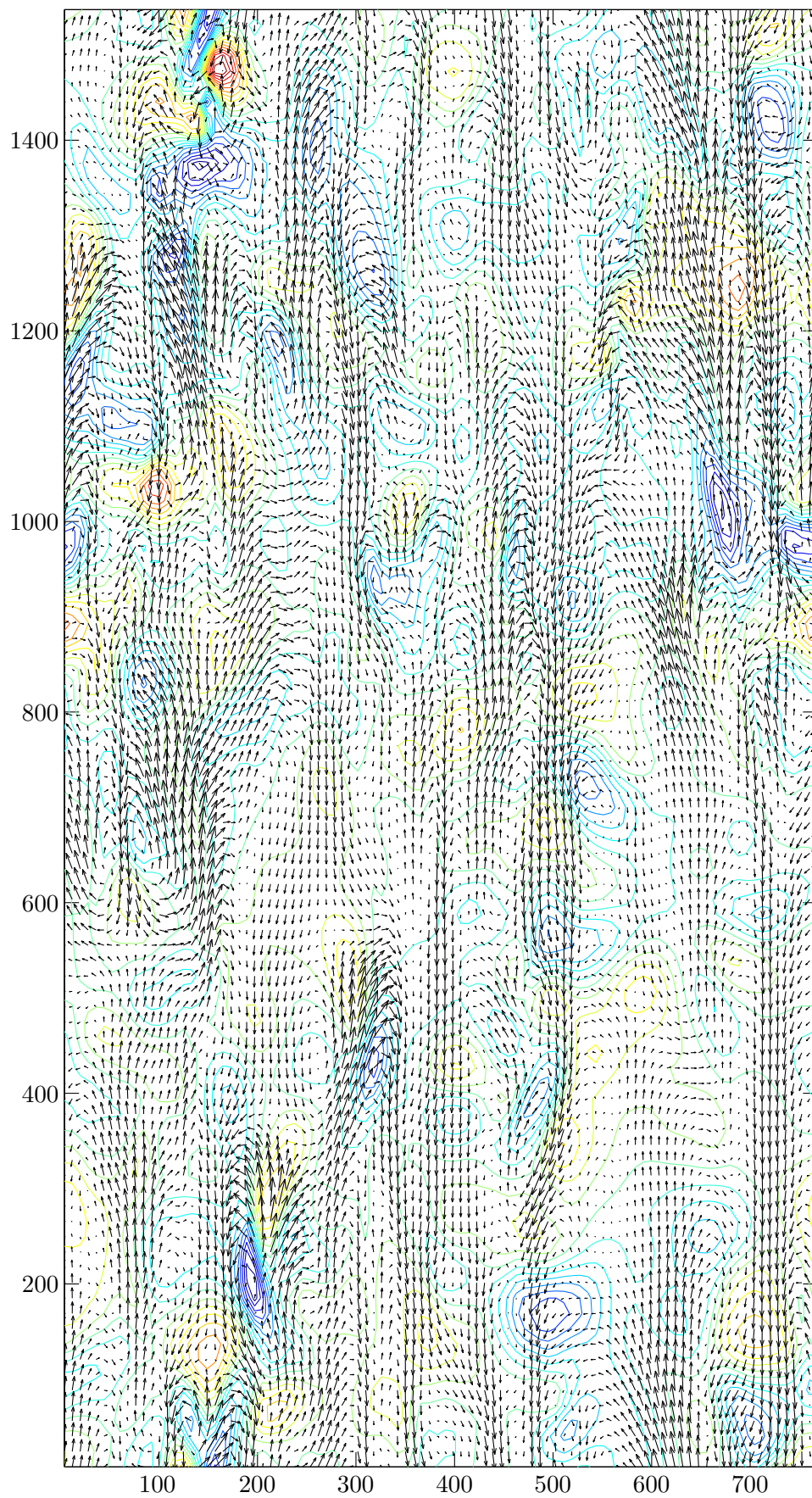


Abb. 5.31: Projektion der momentanen Geschwindigkeitsvektoren in die x - z -Ebene bei $y^+ = 11$. Von der axialen Komponente wurde die mittlere Geschwindigkeit subtrahiert. Die Höhenlinien stellen die Druckschwankungen dar.

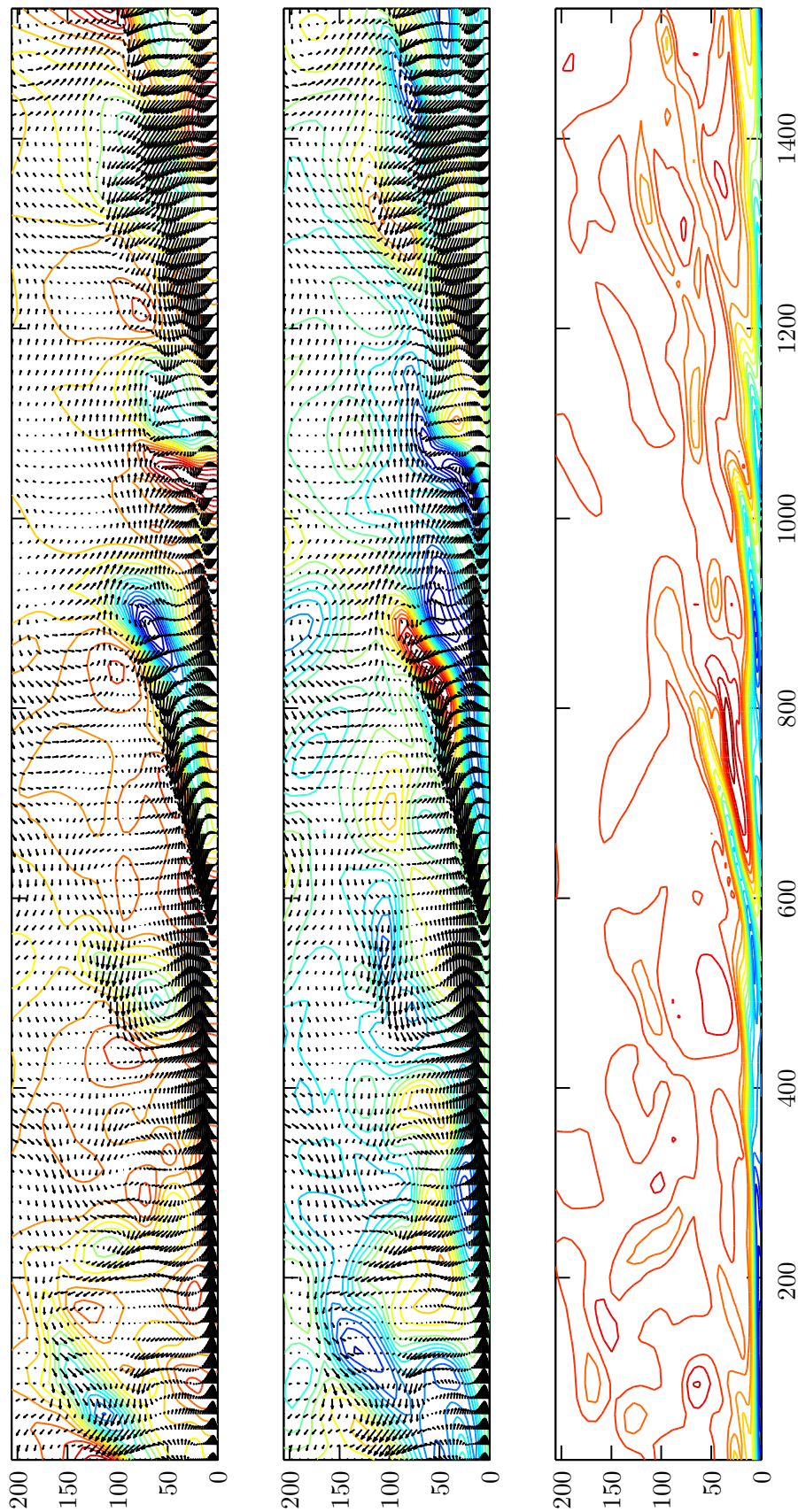


Abb. 5.32: Projektion der momentanen Geschwindigkeitsvektoren in die x - y -Ebene bei $z = 0$. Von der axialen Komponente wurde die mittlere Geschwindigkeit subtrahiert. Höhenlinien für p , w und ω_z .

6 Instationäre Kanalströmung

Die stationäre turbulente Kanalströmung ist nur bedingt zur Untersuchung der Dynamik geeignet, denn die Strömung befindet sich dabei in einem Gleichgewichtszustand, sodass zeitliche Entwicklungen und vor allem Wechselwirkungen von räumlichen Strukturen nur schwerlich zu extrahieren sind. Die folgenden Untersuchungen der instationären Kanalströmung sollen daher ein tieferes Verständnis für die dynamischen Prozesse vermitteln, die in der Turbulenz eine wesentliche Rolle spielen. Insbesondere können solche Größen, die von der Störung weitgehend unbeeinflusst bleiben, als Grundlage für zukünftige Modelle der Turbulenz benutzt werden.

Das Hauptziel besteht in der detaillierten Analyse der zeitabhängigen Abweichungen der (wandnahen) Turbulenz – die hier als dynamisches System von wechselwirkenden Strukturen verstanden wird – vom Gleichgewichtszustand. Die zeitlichen Abweichungen vom Gleichgewichtszustand werden dabei durch die Überlagerung von kleinen periodischen Wandoszillationen induziert. Konkret werden die zeitlichen Modulationen untersucht, mit der die räumlich(-zeitliche) Turbulenzstruktur auf die Variation der Randbedingungen antwortet. In der Regel werden dazu Modulationsfaktoren betrachtet, die in Abschnitt 4.8 auf Seite 40 eingeführt wurden. Eine starke Beeinflussung der untersuchten Größen durch die Störung zeigt sich an großen Beträgen der Modulationsfaktoren. Auch die Phasenverläufe (und die damit zusammenhängenden Zeitverzögerungen gegenüber der Störung) geben deutliche Hinweise auf die Parameter, die eher unbeeinflusst bleiben bzw. auf solche, die deutlich von der Störung moduliert werden.

6.1 Ausbreitung der induzierten Störung

Ausgangspunkt der Störung ist die an den Wänden durch die modulierte Schubspannung induzierte Scherwelle. Im sonst ruhenden Fluid, oder auch im *laminar* strömenden Fluid, breitet sich die Welle nach der bekannten Stokeslösung (Schlichting (1958))

$$\tilde{u}(y, t) = u_w e^{-y/l_s} \cos(\omega_w t - y/l_s - \phi_0) \quad (6.1)$$

aus (u_w , ω_w und ϕ_0 sind die Amplitude, Kreisfrequenz und Startphase der Wandschwingung; $l_s = \sqrt{2\nu/\omega_w}$ ist die Stokeslänge und y der Abstand zur Wand). Einfacher als Gleichung (6.1) schreibt sich das zugehörige analytische Signale $\tilde{u}(y, t) = \hat{u}_w e^{i(\omega_w t - y/l_s)}$. Den Ausführungen von Abschnitt 4.8 auf Seite 40 folgend, wird diese Notation hier durchgehend verwendet. Bei Überlagerung der im laminaren Fall exponentiell gedämpften Scherwelle mit einer *turbulenten* Grundströmung, wird sowohl die Ausbreitung der Scherwelle, als auch die Turbulenz durch nichtlineare Wechselwirkungen gestört.

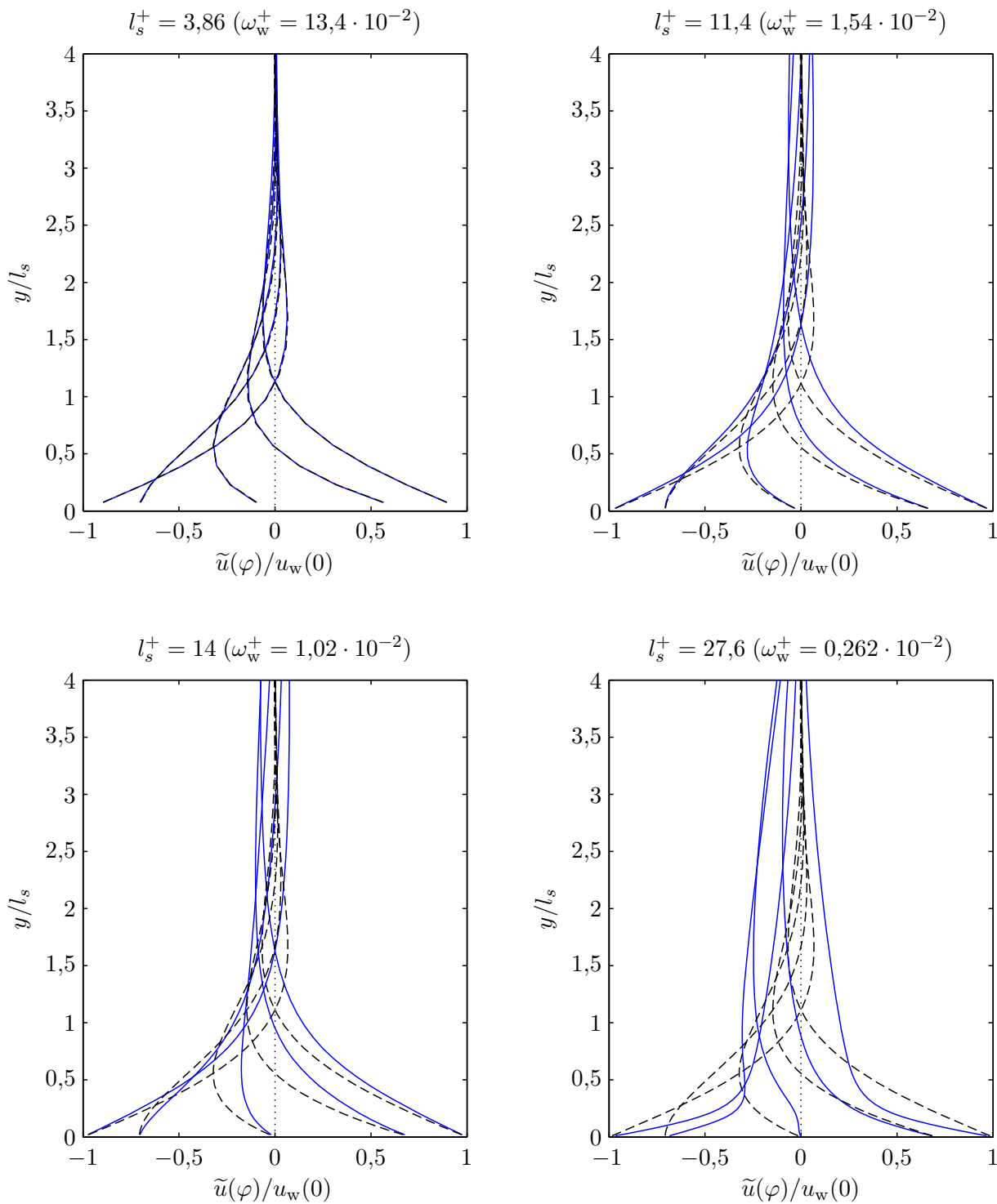


Abb. 6.1: Ausbreitung der Scherwelle in der simulierten Turbulenz. Gezeigt sind phasengemittelte Profile der axialen Geschwindigkeitskomponente jeweils zu den festen Phasen $0, \pi/4, \pi/2, 3/2\pi$ und π . Die Phasen von π bis 2π ergeben spiegelbildliche Verläufe und sind nicht eingezeichnet. Verglichen werden die Verläufe mit der Stokeslösung, die sich bei einer laminaren Grundströmung ergeben würde und die, in der verwendeten Normierung, für alle Abbildungen gleich ist.

6.1.1 Orts- und Frequenzabhängigkeit der Reaktion

Abbildung 6.1 zeigt Beispiele von zu festen Phasenzeitpunkten gemittelten Profilen der axialen Geschwindigkeitskomponente für unterschiedliche Anregungsfrequenzen. Die gezeigte Darstellung in Form von »Momentanbildern«¹ vermittelt eine recht anschauliche Vorstellung von der Ausbreitung der Scherwelle. Da aber bei jedem festen Wandabstand die erste Harmonische das Phasenmittel fast vollständig widerspiegelt, bietet sich eine Ortskurvendarstellung an. Die in Abbildung 6.1 gezeigten »Momentanbilder« sind in Wirklichkeit nicht durch phasenstarre Mittelung der Profile entstanden, sondern sie sind aus den ersten beiden Harmonischen des Phasenmittels rekonstruiert worden. Die Harmonischen wurden direkt, ohne Umweg über das Phasenmittel, bereits während der Rechnungen bestimmt (vergleiche Abschnitt 4.9).

Die Ortskurven der komplexen Wechselgeschwindigkeiten $\hat{u}(y, \omega_w)$, jeweils über die gesamte Kanalhöhe $-h \leq y \leq h$ aufgetragen, finden sich für diverse Wandfrequenzen ω_w in Abbildung 6.2. Da die Wände gegenphasige Oszillationen ausführen und in der gezeigte Auftragung die komplexen Amplituden auf die komplexe Amplitude der »unteren« Wand normiert sind, finden sich die Ausgangsorte der jeweiligen Scherwellen bei -1 und $+1$. In Wandnähe erhält man für hohe Frequenzen eine fast perfekte Übereinstimmung zwischen der berechneten Wechselgeschwindigkeit und der Wechselgeschwindigkeit der Stokeslösung². Dies ist zu erwarten, da die turbulente Schubspannungen in diesem Bereich um Größenordnungen kleiner sind, als die viskosen Schubspannungen und sie daher für die Ausbreitung der Scherwelle vernachlässigt werden können. Im Bereich der Pufferschicht ($5 \lesssim y^+ \lesssim 50$) erkennt man aber deutliche Abweichungen zum laminaren Fall. Hier kommt es zu nichtlinearen Wechselwirkungen zwischen der Scherwelle und der Turbulenz. Bei den tiefsten Anregungsfrequenzen finden wir, jedenfalls im wandnahen Bereich, ein quasistationäres Verhalten der Strömung. Der gesamte wandnahe Bereich reagiert hier in etwa mit gleicher Phase, wird also als Ganzes (einheitlich) moduliert. Man erwartet, dass die Strömung dann quasistationär antwortet, wenn die Periodenlänge der Anregung im Vergleich zu typischen Zeitkonstanten der Strömung groß ist. Eine typische Zeitkonstante ist zum Beispiel die Zeit, die ein »Wirbel« für eine Umdrehung benötigt. Die großen Wirbel³ und damit auch die großen Zeitkonstanten findet man vor allem in der Kanalmitte, während der wandnahe Bereich durch viel kleinere Zeitkonstanten ausgezeichnet ist. Es verwundert daher nicht, dass der wandnahe Bereich sehr viel schneller quasistationär reagiert, als die gesamte Strömung.

Die Ortskurvendarstellung hat den Nachteil, dass der Kurvenparameter (in Abbildung 6.2 ist das der Wandabstand y) einem Kurvenpunkt nicht ohne weitere Markierungen zugeordnet werden kann. Der Vorteil ist, dass eine komplexe Größe in *einer* Abbildung gezeigt werden kann, man also nicht Betrag und Phase oder Real- und Imaginärteil getrennt betrachten muss. Häufig vermittelt die Ortskurvendarstellung auch einen besseren Eindruck von der Modulation der Größen, die in dieser Arbeit betrachtet werden. Dennoch werden teilweise auch Betrag und Phase gezeigt, insbesondere um die Abhängigkeit von dem Parameter (das ist fast immer der Wandabstand y oder die Wandfrequenz ω_w) deutlich zu machen.

¹ Im Sinne einer festen Wandphase, jedoch gemittelt über alle Schwingungen und gemittelt in axialer und spannenweiser Richtung

² In der Ortskurvendarstellung durchläuft (als Funktion von y) die Stokeslösung für alle Frequenzen immer dieselbe Kurve, je nach Wandfrequenz aber unterschiedlich schnell.

³ Eine Abschätzung für die Ausdehnung eines Wirbels liefert zum Beispiel die erste Nulllinie der Korrelationsfunktion $R_{u'2}(r_x, r_z)$. In Kanalmitte ergibt sich damit für die größten Wirbel ein Durchmesser von etwa $1/4$ Kanalhöhen, in Wandnähe findet man Durchmesser mit maximal etwa 30 Pluseinheiten (Kim, Moin & Moser 1987)

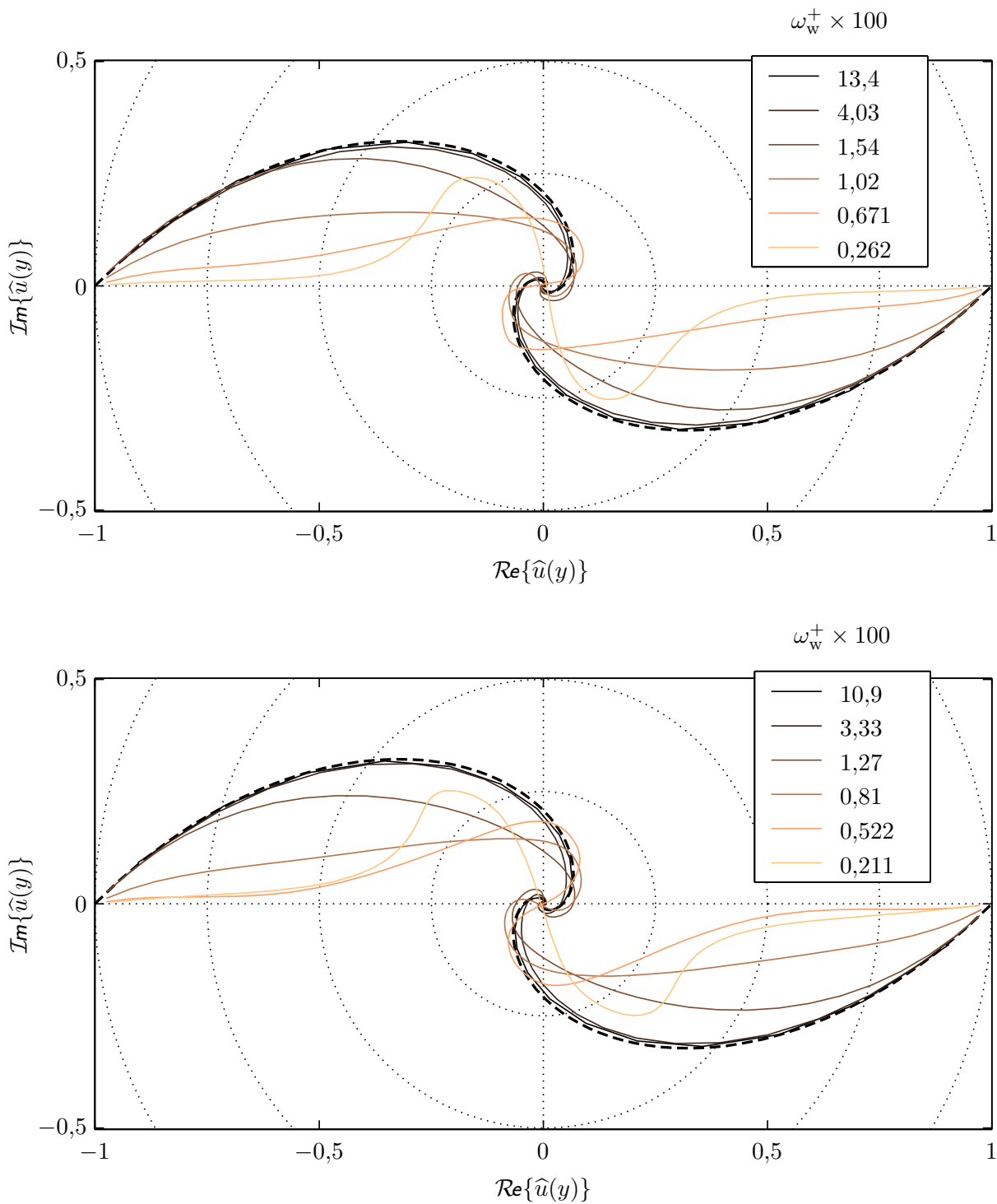


Abb. 6.2: Ausbreitung der Scherwelle in der simulierten Turbulenz. Gezeigt ist die komplexe Amplitude $u_w e^{-y/l_s} e^{-iy/l_s}$ der Welle für verschiedene Frequenzen der Wandschwingung. Die gestrichelte Grenzlinie kennzeichnet die Stokeslösung. Sie ist für alle Frequenzen gleich, wird aber mit steigender Frequenz immer schneller durchlaufen (wenn der Wandabstand als Parameter verwendet wird).

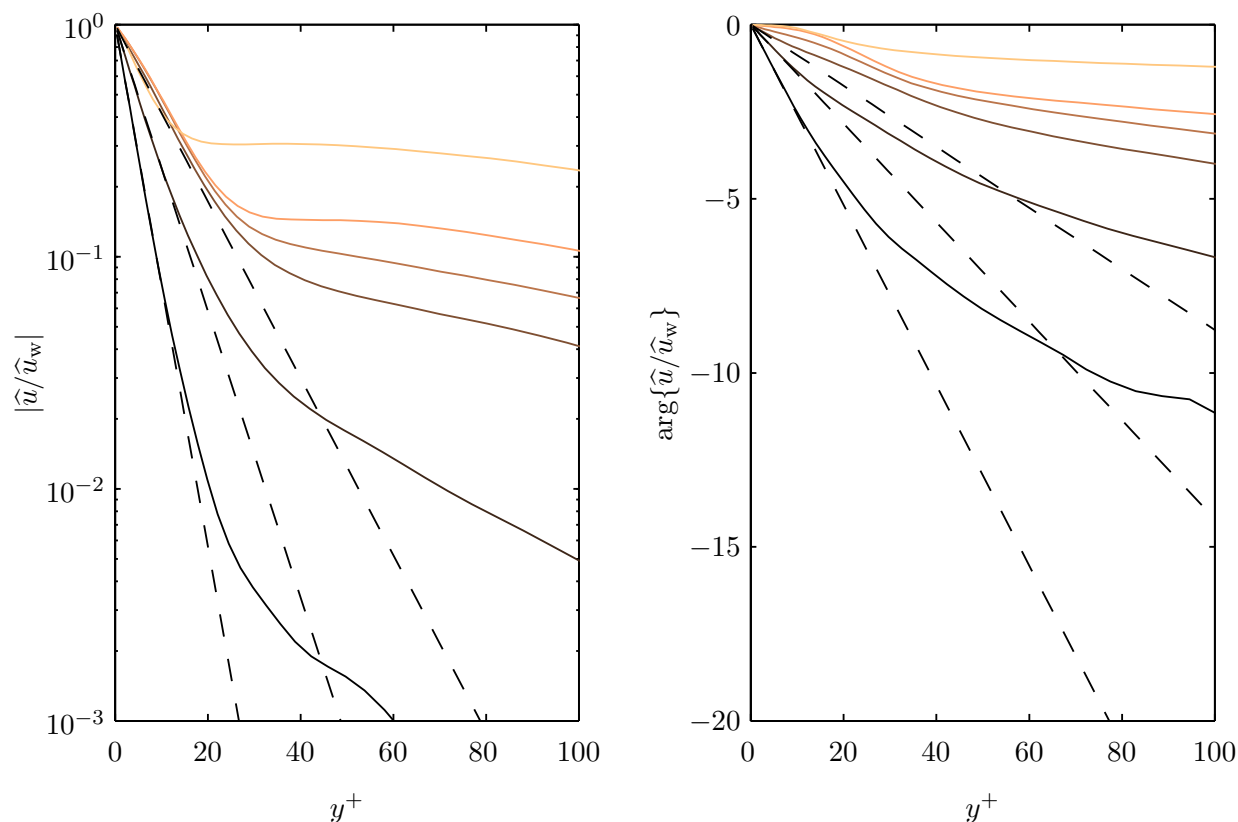


Abb. 6.3: Betrag und Phase der Scherwelle für einige Frequenzen der Anregung in Abhängigkeit vom Wandabstand. Für die hohen Frequenzen ist zum Vergleich auch die zugehörige Stokeslösung als gestrichelte Linie mit eingezeichnet. (Legende wie Abbildung 6.2 oben).

So sind in den beiden Bildern von Abbildung 6.3 der Betrag und die Phase der an der Wand induzierten Scherwelle dargestellt. Ein qualitativer Vergleich mit der Stokeslösung ist dabei leicht möglich. Für die hohen Wandfrequenzen ist die Stokeslösung als gestrichelte Kurve mit eingezeichnet. Es wird deutlich, dass sich Abweichungen zur Stokeslösung schneller in der Phase zeigen als im Betrag. Deutlich wird auch, dass sich dort wo die Turbulenz wichtig wird, also etwa ab der Pufferschicht ($y^+ \geq 5$), die Scherwelle viel schneller ausbreitet als im laminaren Fall. Die Turbulenz reagiert in der Regel auch weit von der Wand entfernt noch mit nennenswerten Amplituden auf die Störung, insbesondere natürlich für die tiefen Wandfrequenzen.

Vergleiche zwischen den Daten der Simulation und Messwerten findet man in Abbildung 6.4. Zumindest bei ausreichend hohen Anregungsfrequenz stimmen Messung und Simulation weitgehend überein. Während aber die Messwerte eine recht große Streuung aufweisen, zeigen die Daten der Simulation in der Regel einen sehr glatten Verlauf. Bei tiefen Frequenzen zeigen die Messwerte ein ungewöhnliches Verhalten mit ausgeprägten Wendepunkten in den Ortskurven. Besonders in der Nähe der Wand sind die Messwerte mit erheblichen Unsicherheiten behaftet, sodass die gemessenen Ortskurven in diesem Bereich mit einiger Sicherheit nicht die tatsächliche Physik wiedergeben. Die Qualität der instationären Simulation ermöglicht eine wesentlich genauere Analyse der Turbulenzreaktion auf die aufgeprägte Störung, als es mit den vorhandenen Messdaten möglich ist.

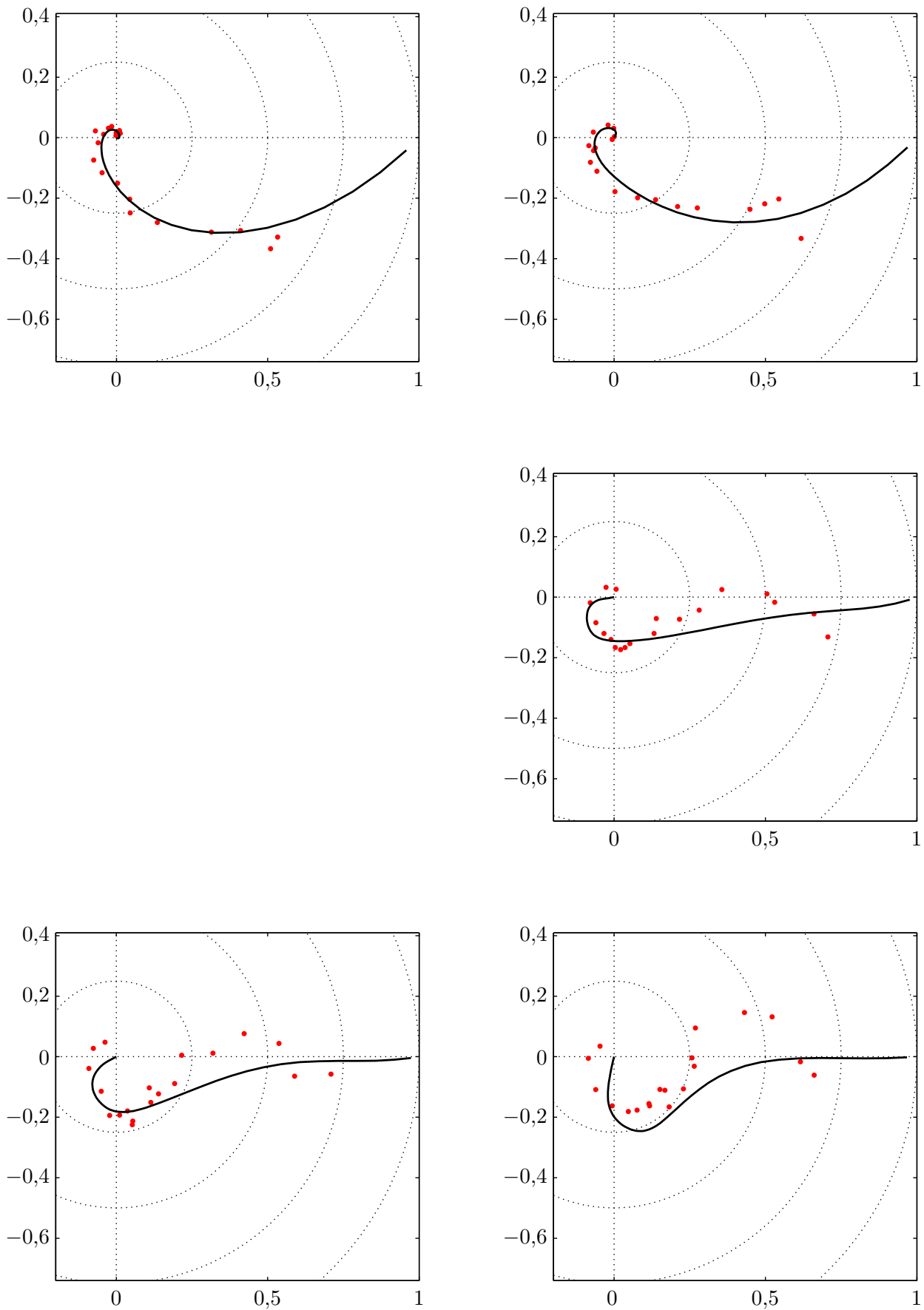


Abb. 6.4: Ausbreitung der Scherwelle im Vergleich mit Messergebnissen. Die dimensionslosen Frequenzen zwischen der Numerik und den Experimenten sind in etwa gleich.

6.1.2 Impulsantwort der turbulenten Strömung

Die Reaktion der turbulenten Strömung wurde über einen vergleichsweise großen Frequenzbereich ermittelt, vor allem aber mit einer Frequenzauflösung, die es erlaubt, aus den komplexen Amplituden $\hat{u}(y, \omega_w)$ die zugehörige Impulsantwort der turbulenten Strömung zu berechnen. Jedoch sind dazu zunächst zwei Näherungen notwendig. Zum einen sind die Modulationsfrequenzen auf der Frequenzachse nicht linear verteilt, sodass eine direkte Rücktransformation in den Zeitbereich nicht möglich ist, zum anderen ist auch nur ein endlicher Frequenzbereich abgedeckt, sodass mit den vorhandenen Frequenzen nur näherungsweise ein Puls zusammengesetzt werden kann. Um eine äquidistante Anordnung der Frequenzkomponenten zu erhalten, wurde die »Übertragungsfunktion« $\hat{u}(y, \omega_w)$ im Frequenzbereich interpoliert. Die höchste Modulationsfrequenz der hier ausgewerteten Simulationsreihe war $\omega_w^+ \approx 0,25 \cdot 10^{-2}$ und sie legt die Zeitauflösung der Impulsantwort nach dem Nyquist-Theorem auf $\Delta t^+ \approx 12,5$ fest. Es erschien wenig sinnvoll, eine Extrapolation über diesen Bereich hinaus vorzunehmen. Der dadurch entstehend »Sprung« in der Übertragungsfunktion wurde durch Multiplikation mit einer Fensterfunktion (Hanningfenster) beseitigt. Für Einzelheiten zur Theorie der Fourier-Transformtion sei auf (Coulon 1986) verwiesen.

Als Rücktransformierte der auf die oben beschriebenen Weise modifizierten Übertragungsfunktion ergibt sich die Impulsantwort

$$u_\delta(y, t) = \mathcal{F}^{-1} \{ \hat{u}(y, \omega_w) \}. \quad (6.2)$$

Sie ist in Abbildung 6.5 dargestellt. Im Kapitel 4 wurde die Impulsantwort für einen reinen Diffusionsprozess angegeben und sie könnte hier zum Vergleich mit $u_\delta(y, t)$ herangezogen werden. Die Effekte der benutzten Näherungen blieben dabei jedoch unberücksichtigt. Daher wurde die »Stokes-Übertragungsfunktion« $\hat{u}_w e^{-y/l_s}$ in gleicher Weise wie $\hat{u}(y, \omega_w)$ modifiziert. Die Impulsantwort, die sich aus der anschließenden Rücktransformation in den Zeitbereich ergab, ist in Abbildung 6.5 mit »Impulsantwort der laminaren Strömung« bezeichnete.

Erwartungsgemäß reagiert die turbulente Strömung wesentlich schneller auf die Störung als die laminare Strömung. Beispielsweise erfolgt beim Wandabstand $y^+ = 32,6$ die maximale Reaktion in der laminaren Strömung erst nach etwa 170 viskosen Einheiten⁴, bei der turbulenten schon nach weniger als der Hälfte dieser Zeit und zusätzlich mit größerer Amplitude.

6.2 Modulierte Geschwindigkeitsschwankungen

Ob und wie stark die Turbulenz durch die Wandbewegungen gestört wird, kann man nicht aus der Wechselgeschwindigkeit allein ermitteln. Man muss dazu auch turbulente Schwankungsbewegungen mit in die Untersuchung einbeziehen. So werden, neben der Geschwindigkeit selbst, auch die turbulenten Schwankungsbewegungen um diesen – jetzt phasenabhängigen – Mittelwert moduliert. Per Definition ist die Modulation der Schwankungen selbst Null (folgt aus $u'_i \stackrel{\text{def}}{=} u_i - \langle u_i \rangle$), nicht jedoch die Modulation vom Produkt zweier Schwankungen $\langle u'_i u'_j \rangle$. Im Folgenden werden die einzelnen Terme des modulierten Reynoldsschen Spannungstensors zunächst getrennt untersucht.

⁴ Der theoretische Wert liegt etwas höher: $y^{+2}/6 \approx 177$.

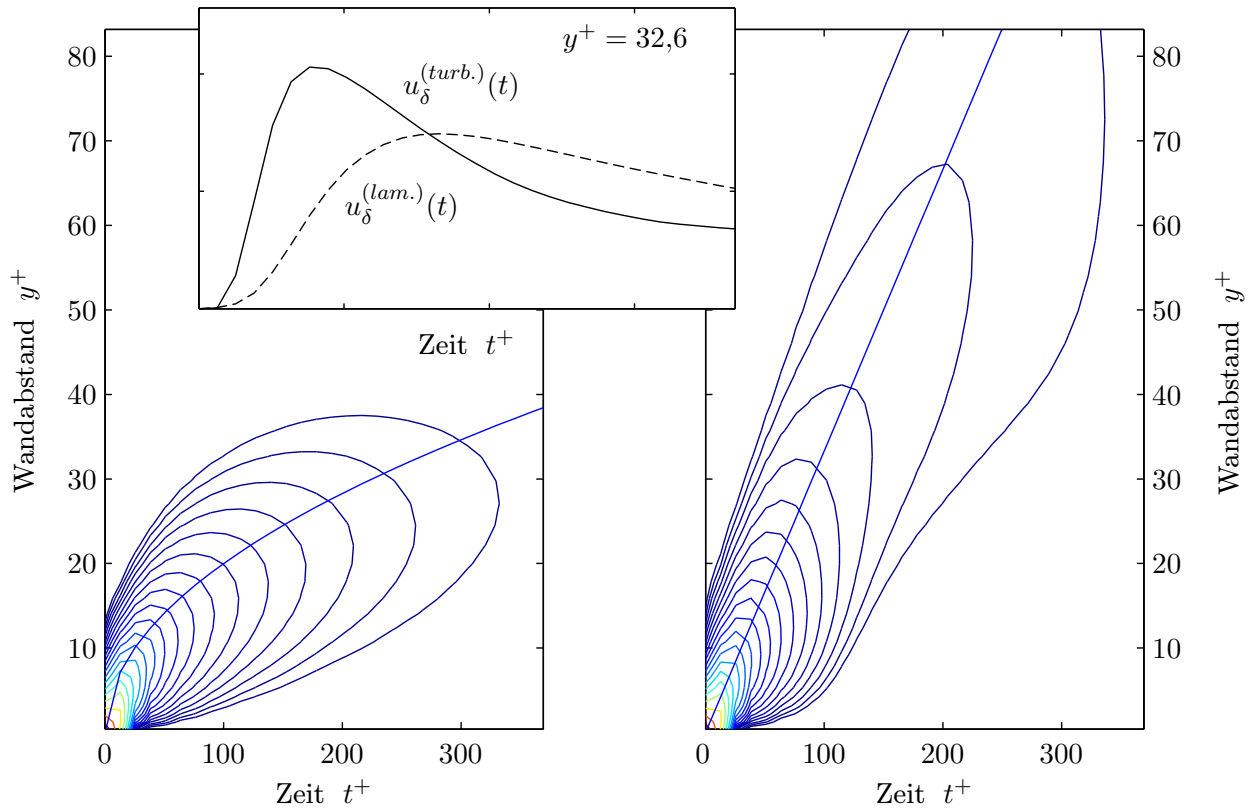


Abb. 6.5: Reaktion der Strömung auf eine näherungsweise impulsartige Anregung (siehe Text). Impulsantwort der laminaren Strömung (links) im Vergleich mit der Impulsantwort der turbulenten Strömung (rechts). Die Abstände der Höhenlinien sind logarithmisch verteilt. Oben: $u_\delta(t)$ bei $y^+ = 32,6$ in linearem Maßstab (Zeitachse wie unten).

6.2.1 Turbulente Schubspannung

Die Reynoldsgleichung (4.6 auf Seite 35) ermöglicht es aus der gemessenen bzw. simulierten Wechselforschwindigkeit $\tilde{u}(y, t)$ die Modulation der turbulenten Wechselforschubspannung $-\widehat{u'v'}(y, t)$ zu bestimmen, ohne dass man die v -Komponente der Geschwindigkeit messen muss. Bei Vernachlässigung von \tilde{f}_1 bzw. $\partial\tilde{p}/\partial x$, was im Experiment nicht immer gerechtfertigt ist, ergibt sich nach einer Fourier Transformation von Gleichung (4.6) und anschließender Integration in wandnormaler Richtung:

$$-\widehat{u'v'}(y, \omega) = i\omega \int_0^y \widehat{u}(y', \omega) dy' - \nu \frac{\partial \widehat{u}(y, \omega)}{\partial y}. \quad (6.3)$$

In der Tat wurde davon in einigen experimentellen Arbeiten Gebrauch gemacht (Höhler 1978; Breuer 1995). Allerdings hat diese Methode den Nachteil, dass die räumliche Ableitung $\partial\widehat{u}/\partial y$ benötigt wird. Die Messwerte müssen dann schon sehr dicht liegen und dürfen nicht zu stark streuen. Die indirekte Bestimmung der Modulation der turbulenten Wechselforschubspannung aus dem Wechselforschwindigkeitsprofil hat sich im Experiment als problematisch erwiesen. Auch die von Breuer (1995) durchgeführte Ausgleichsrechnung, die ohne direkte Bestimmung der räumlichen Ableitung auskommt, ist noch mit einigen Unsicherheiten behaftet.

In der Simulation und in Experimenten, bei denen man simultan u und v misst, kann man dagegen direkt die Modulation der turbulenten Wechselschubspannung $-\widetilde{u'v'}(y, t)$ auswerten. In unseren Simulationen liegen die (Mess)punkte aber recht dicht, sodass sich auch die aus Gleichung (6.3) berechnete Modulation praktisch nicht von der direkt bestimmten unterscheidet. Experimentelle Daten zur modulierten Wechselschubspannung findet man nur in vergleichsweise wenigen Arbeiten, obwohl die turbulente Wechselschubspannung eine der dynamisch wichtigsten Größen in der Turbulenz ist⁵. Mit den vorhandenen numerischen Daten steht eine umfangreiche Datenbasis für die Auswertung der modulierten Wechselschubspannung bereit. In den Abbildungen 6.6–6.11 sind einige mögliche Auftragungen der Daten für verschiedene Strömungsparameter gezeigt.

Trägt man den Modulationsfaktor $m_{u'v'}(y, \omega_w)$ gegen den Wandabstand auf (Abbildung 6.6), dann findet man für verschiedene Anregungsfrequenzen ω_w recht unterschiedliche Verläufe. An der Reaktion der turbulenten Wechselschubspannung auf eine äußere Störung sind wahrscheinlich unterschiedliche Prozesse beteiligt, deren Wirkungen sich überlagern. Im unteren Bild von Abbildung 6.6 fällt auf, dass die wandnahen Phasenverläufe für Modulationsfrequenz ober- und unterhalb von $\omega_w^+ = 2,17 \cdot 10^{-2}$ ganz unterschiedlich sind. So ändert sich die Startphase (Phase an der Wand) zwischen $\omega_w^+ = 1,44 \cdot 10^{-2}$ und $\omega_w^+ = 2,17 \cdot 10^{-2}$ um etwa 180° , einhergehend mit kleinen Beträgen des Modulationsfaktors. Im Zusammenhang mit der Ortskurvendarstellung von $m_{u'v'}(\omega_w)$ wird das noch eine Rolle spielen. Den vom Betrag her größten Modulationsfaktor findet man in der Regel unmittelbar über der Wand. Während er aber für tiefe Frequenzen recht schnell mit wachsendem Abstand von der Wand abnimmt, zeigen sich für den Übergangsbereich und auch für hohe Frequenzen lokale Maxima des Modulationsfaktors. Auch Breuer (1995) fand, so wie wir, für die tiefste Frequenz ihrer Untersuchung einen steilen Abfall des Modulationsfaktors mit wachsendem y . Jedoch beruhte ihre Beobachtung nur auf wenigen Messpunkten und es war unklar, ob das Auswerteverfahren diesen Effekt, der nun bestätigt scheint, bewirken konnte.

Insgesamt nimmt der Modulationsfaktor mit sinkender Frequenz zu – das gilt aber nicht für alle Wandabstände – und er erreicht unmittelbar über der Wand für die tiefen Frequenzen ein Maximum von knapp drei. Beachtenswert ist, dass man auch weit entfernt von der Wand noch betragsmäßig recht große Modulationsfaktoren findet. Jedoch nimmt die Aussagekraft der Modulationsfaktoren zur Kanalmitte hin ab, denn der Gleichwert – auf den ja der Modulationsfaktor normiert ist – verschwindet im Gegensatz zur Modulationsamplitude mit Annäherung auf die Kanalmitte, sodass die Normierung in diesem Bereich sinnlos wird.

Einschub: Modulierter Korrelationskoeffizient

Alternativ zur Normierung auf den Mittelwert, kann die Schubspannung auch auf die Effektivwerte der beiden beteiligten Signale u' und v' normiert werden. Im stationären Fall erhält man damit den Korrelationskoeffizient

$$\chi_{u'v'}(y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{-\overline{u'v'}}{\sqrt{\overline{u'^2} \overline{v'^2}}}. \quad (6.4)$$

Bei der naheliegenden Erweiterung auf den instationären Fall, wird auch das Phasenmittel $-\langle u'v' \rangle$ mit den stationären Gleichwerten u_{eff} und v_{eff} normiert. Die so normierten Gleich- und Wechselanteile der turbulenten Schubspannung sind für vier Anregungsfrequenzen im linken Teil von Abbildung 6.7 dargestellt. Vom Wechselanteil ist nur der Betrag gezeigt, denn die Phase ändert sich durch die Normierung gegenüber $-\widetilde{u'v'}$ nicht. Die Amplitude der Wand war in allen Fällen gleich

⁵ Neben ihrem unmittelbaren Einfluss auf das Strömungsfeld $\langle u(y) \rangle$, ist sie zum Beispiel für die Produktion turbulenter kinetischer Energie maßgeblich (vergleiche auch Kapitel 4).

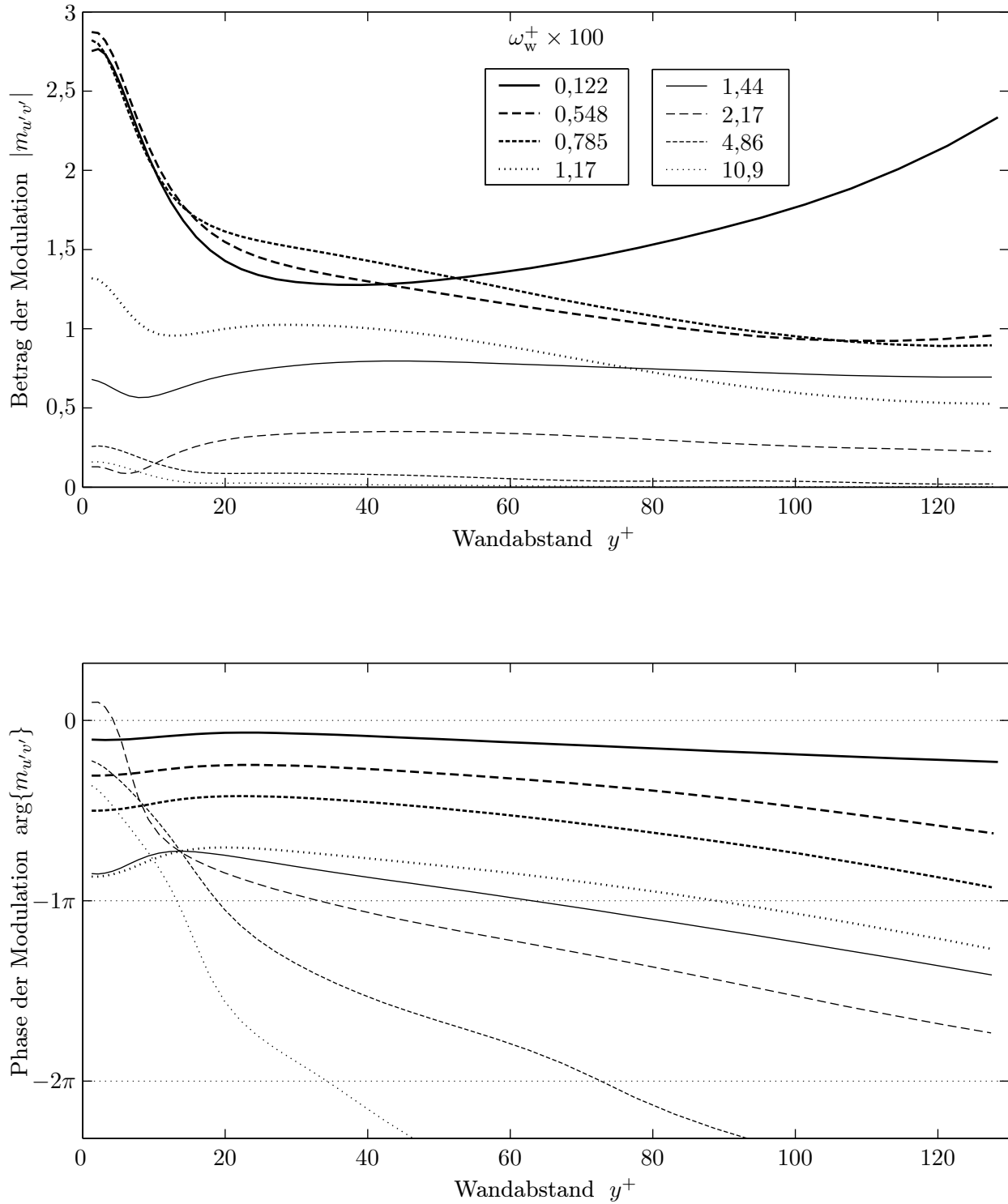


Abb. 6.6: Modulationsfaktoren der turbulenten Schubspannung für diverse Frequenzen der Anregung: Betrag (oben) und Phase (unten) gegen den dimensionslosen Wandabstand aufgetragen.

$0,15u_b$ und ist hier deshalb erwähnt, weil der Wechselanteil nicht wie üblich auf a_{τ_w} bezogen wurde und damit von der Amplitude abhängt. Die Gleichanteile, das heißt, die langzeitgemittelten Korrelationskoeffizienten, unterscheiden sich erwartungsgemäß bei den vier instationären Strömungen praktisch nicht. Die auf die stationären Effektivwerte normierte Wechselschubspannung schwankt zeitlich, um den in Gleichung (6.4) definierten und in der Abbildung gezeigten stationären Gleichwert und zwar mit der ebenfalls dargestellten Amplitude. Der Ausdruck $-\widetilde{u'v'}/(u_{\text{eff}}v_{\text{eff}})$ kann auch größer als eins werden, da er *nicht* – wie man vielleicht annehmen könnte – die Modulation eines Korrelationskoeffizienten darstellt. Im konkreten Beispiel der Abbildung 6.7 ist, aufgrund der kleinen Amplitude der Anregung, jedoch immer $-\widetilde{u'v'}/(u_{\text{eff}}v_{\text{eff}}) < 1$.

Berücksichtigt man, dass neben der Schubspannung auch die Normalspannungen und damit die Effektivwerte u_{eff} und v_{eff} moduliert werden, erhält man einen phasengemittelten Korrelationskoeffizient. Dazu wird das Phasemittel $-\langle u'v' \rangle(y, t)$ auf die *phasengemittelten* Effektivwerte normiert:

$$\langle \chi_{u'v'} \rangle(y, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{-\langle u'v' \rangle}{\sqrt{\langle u'^2 \rangle \langle v'^2 \rangle}}. \quad (6.5)$$

Man hat jetzt wieder überall den gleichen Mittelungsoperator und es gilt die Schwarzsche Ungleichung, die in diesem Fall besagt, dass der Ausdruck (6.5) zu keinem Zeitpunkt dem Betrage nach größer als eins werden kann. Die gegebene Definition (6.5) kann somit als phasengemittelter Korrelationskoeffizient interpretiert werden. Nun ergibt sich aber das Problem, dass die Modulation des Korrelationskoeffizienten aus einer *nichtlinearen* Kombination der beteiligten Modulationen zusammensetzt ist und dadurch auch immer höhere Harmonische entstehen. Das geschieht selbst dann, wenn die Modulationen der Schubspannung und der beiden Normalspannungen perfekt harmonisch sind. Es zeigt sich aber, dass die nichtlinearen Glieder in der Regel klein und häufig zu vernachlässigen sind. Insbesondere kann das Verhältnis zum linearen Anteil durch Verminderung der Anregungsamplitude vermindert werden. Dann ist es gerechtfertigt eine Entwicklung des Bruchs durchzuführen und man gelangt, unter Vernachlässigung der nichtlinearen Glieder, zu folgendem Ausdruck:

$$\langle \chi_{u'v'} \rangle(y, t) \approx \chi_{u'v'} \left(1 + \frac{\widetilde{u'v'}}{u'v'} - \frac{1}{2} \left(\frac{\widetilde{u'^2}}{u'^2} + \frac{\widetilde{v'^2}}{v'^2} \right) \right) \quad \text{mit} \quad \chi_{u'v'} = \frac{-\overline{u'v'}}{\sqrt{\overline{u'^2} \overline{v'^2}}}. \quad (6.6)$$

Für die hier interessierende erste Harmonische ergibt sich damit⁶

$$\widehat{\chi}_{u'v'}(y, \omega_w) \approx \frac{-\widehat{u'v'}}{\sqrt{\overline{u'^2} \overline{v'^2}}} - \chi_{u'v'} \frac{a_{u'^2} + a_{v'^2}}{2}. \quad (6.7)$$

Der erste Term der rechten Seite ist die im linken Teil der Abbildung 6.7 dargestellte Modulation der Schubspannung (normiert auf die stationären Effektivwerte). Wird aber die Modulation der Effektivwerte berücksichtigt, so taucht mit dem zweiten Term ein zum stationären Korrelationskoeffizienten $\chi_{u'v'}$ proportionaler Anteil auf, der vom ersten Term (komplex) subtrahiert werden muss. Dadurch ergibt sich meist effektiv eine wesentlich kleinere Modulation, wie man im rechten

⁶ Nichtlineare Funktionen von modulierten Größen werden noch öfter auftreten. Die Vorgehensweise, um daraus den zur Anregung synchronen Anteil zu extrahieren, ist immer ähnlich: Im Ausdruck der stationären Strömung, dessen Modulation untersucht werden soll, werden alle Langzeitmittelungsoperatoren $\overline{(\cdot)}$ durch das zeitabhängigen Phasemittel $\langle \cdot \rangle$ ersetzt. Diese werden in einen Gleichanteil und einen Wechselanteil aufgeteilt und der Gesamtausdruck in Potenzen der Wechselanteile entwickelt. Insbesondere ist diese Vorgehensweise nützlich, um quasistationäre Grenzwerte zu bestimmen.

Teil der Abbildung 6.7 erkennen kann. Besonders bemerkenswert ist, dass bei etwa $y^+ \approx 30$ bis 35, unabhängig von der Frequenz, nahezu keine Modulation des Korrelationskoeffizienten stattfindet.

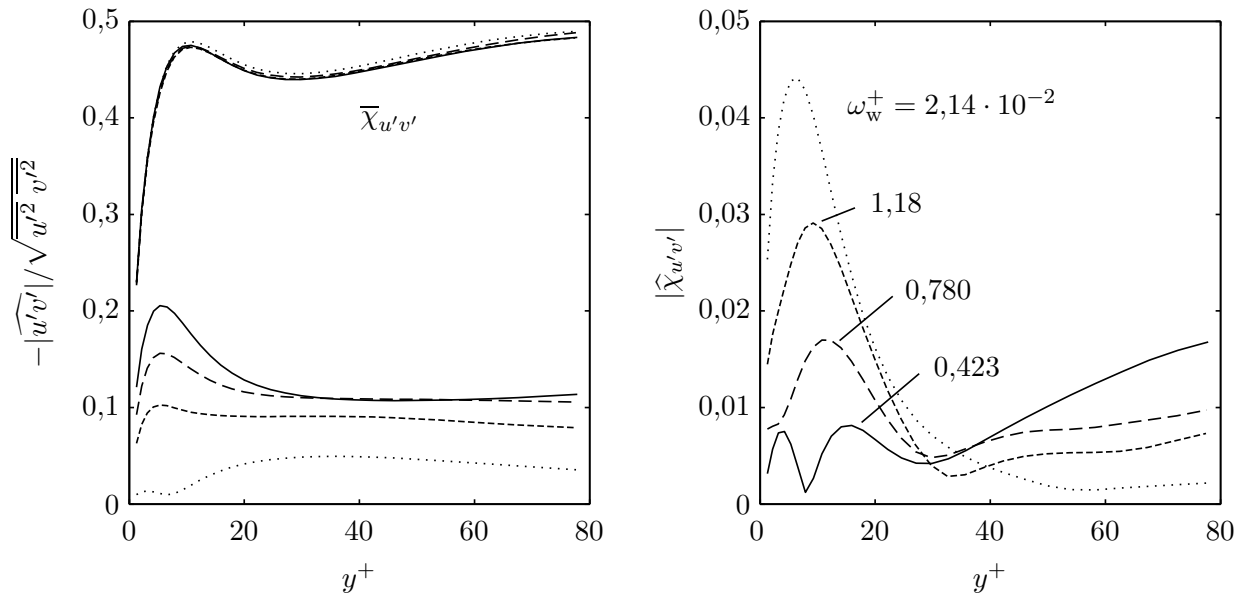
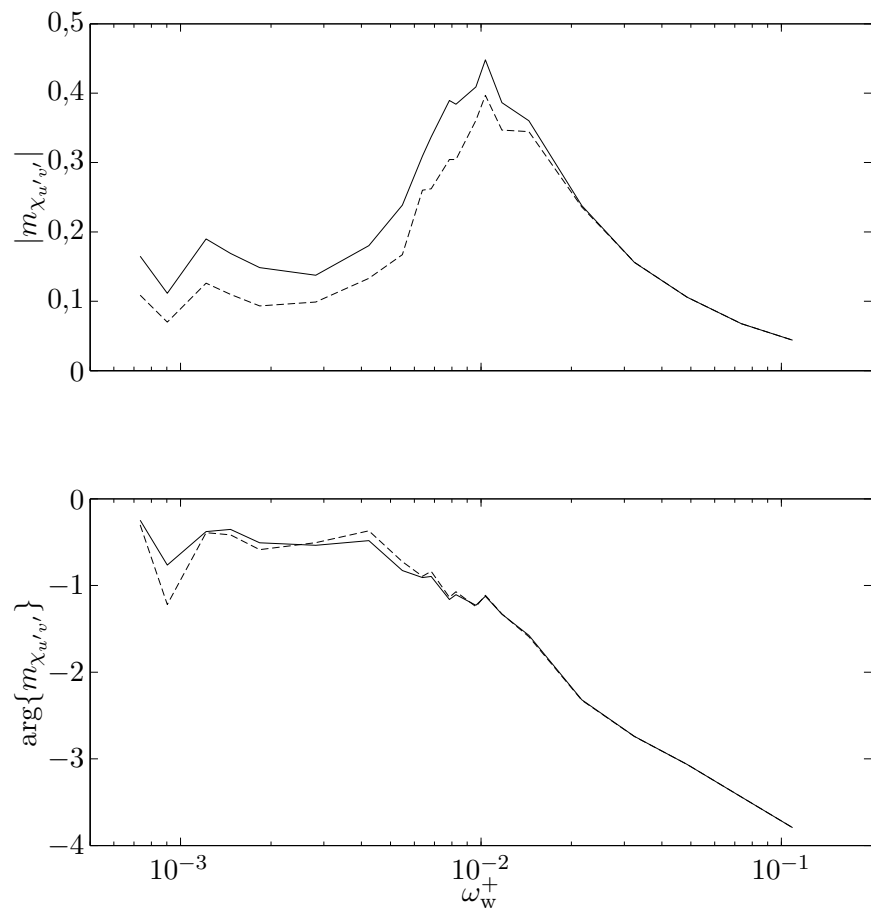


Abb. 6.7: Modulation des Korrelationskoeffizienten; links ohne und rechts mit Berücksichtigung der Modulation der Effektivwert (Achtung! Unterschiedliche Maßstäbe). Für vier Anregungsfrequenzen (links und rechts durch dieselben Stricharten gekennzeichnet) sind die Gleichanteile und die Beträge der Wechselgrößen gezeigt. Die Wandamplitude war in allen Fällen gleich $0,15u_b$. Die Wechselanteile sind hier *nicht* auf a_{τ_w} normiert. Die zu den.

Verglichen mit der Wandschubspannungsmodulation a_{τ_w} ergeben sich für die Modulation des Korrelationskoeffizienten dem Betrage nach recht kleine Werte. Der Modulationsfaktor $\hat{\chi}_{u'v'}/(\bar{\chi}_{u'v'} a_{\tau_w})$ zeigt dabei aber eine ausgeprägte Frequenzabhängigkeit. In Abbildung 6.8 ist der Modulationsfaktor beim Wandabstand $y^+ = 12$ nach Betrag und Phase zu sehen. Man kann ein deutliches Maximum bei der Wandfrequenz $\omega_w^+ \approx 0,01$ erkennen. Die Frequenz entspricht einer Stokeslänge von $l_s^+ \approx 14$ und damit einer typischen Turbulenzfrequenz. Oberhalb und auch unterhalb dieser Frequenz ist die Modulation des Korrelationskoeffizienten deutlich schwächer. Vergleicht man die Modulation statt mit a_{τ_w} mit dem quasistationären Grenzwert, dann kann bei $\omega_w^+ = 0,01$ nicht mehr von einer kleinen Modulation gesprochen werden. Bei anderen (wandnahen) Orten zeigt sich ein sehr ähnliches Verhalten. Das Maximum wandert kaum, verliert aber mit wachsendem Wandabstand an Höhe.

Die in Abbildung 6.8 gezeigten Modulationsfaktoren sind einmal direkt aus Gleichung (6.5) berechnet worden und einmal mit Hilfe der linearen Näherung (Gleichung 6.7). Bei hohen Frequenzen zeigen sich erwartungsgemäß keine nichtlinearen Effekte, während bei den tieferen Frequenzen kleine Differenzen zwischen den Kurven zu sehen sind. Eine weitere Analyse des Korrelationskoeffizienten erfolgt im Zusammenhang mit der Modulation von spektralen Eigenschaften der Strömung im siebten Kapitel (Seite 131). Insbesondere wird auch der spektral aufgelöste Korrelationskoeffizient, die sogenannte Kohärenzfunktion, untersucht. Hier möchte ich zunächst zur modulierten Schubspannung zurückkehren.

**Abb. 6.8**

Modulationsfaktoren des Korrelationskoeffizienten $\chi_{u'v'}$ bei $y^+ = 12$ als Funktion der Wandfrequenz. Die gestrichelten Kurven sind mit der linearen Näherung der Gleichung (6.7) berechnet worden.

Modulierte Schubspannung

In Abbildung 6.9 ist der Modulationsfaktor $m_{u'v'}(y, \omega_w)$ gegen die Wandfrequenz aufgetragen. Abweichend zur Erwartung des monotonen Abfalls mit wachsender Wandfrequenz der Anregung, zeigt sich für die wandnahe Reaktion der Turbulenz ein Minimum bei etwa $\omega_w^+ \approx 0,02$. Betrachtet man den Phasenverlauf in diesem Bereich, dann findet man in der Regel einen Sprung. Die Ortskurven der Modulationsfaktoren zeigen die (formale) Ursache dafür sehr deutlich (Abbildung 6.10). In den Ortskurven gibt es »Schleifen« in der Nähe des Nullpunktes. Bei Frequenzen ober- und unterhalb von etwa $\omega_w^+ \approx 0,02$ gehorcht die Strömung offenbar einer unterschiedlichen Dynamik. Das hat sich ja bereits bei der Wandschubspannungsimpedanz gezeigt (Abbildung 4.2 auf Seite 44). Wandnah ist die Reaktion der turbulenten Wechselschubspannung auf die Störung durch kleine Resonanzen geprägt.

In Abbildung 6.10 sind auch Ortskurven von Modulationsfaktoren dargestellt, die bei Strömungen mit der recht großen Anregungsamplitude von $0,6u_b$ gefunden wurden.⁷ In Wandnähe können dabei nichtlineare Effekte nicht mehr ausgeschlossen werden. Dennoch zeigen sich keine besonders großen Unterschiede gegenüber Anregungen mit kleinen Amplituden. Weiter unten werden noch einige generelle Aspekte bezüglich der erwarteten Reaktionen bei großen Amplituden diskutiert.

Die Phasenverläufe der Abbildung 6.6 bestätigen die Beobachtung von Breuer (1995), dass für tiefe und moderat hohe Frequenzen ein lokales Maximum der Phase in der Pufferschicht zu finden ist,

⁷ Auch die Modulationsfaktoren der Abbildung 6.9 stammen aus der A-Serie (Abschnitt 3.1 auf Seite 27). Die Daten dieser Simulationsreihe wurden hier nicht wegen der großen Wandamplituden gewählt, sondern weil dabei mehr Rechnungen für hohe Modulationsfrequenzen durchgeführt wurden.

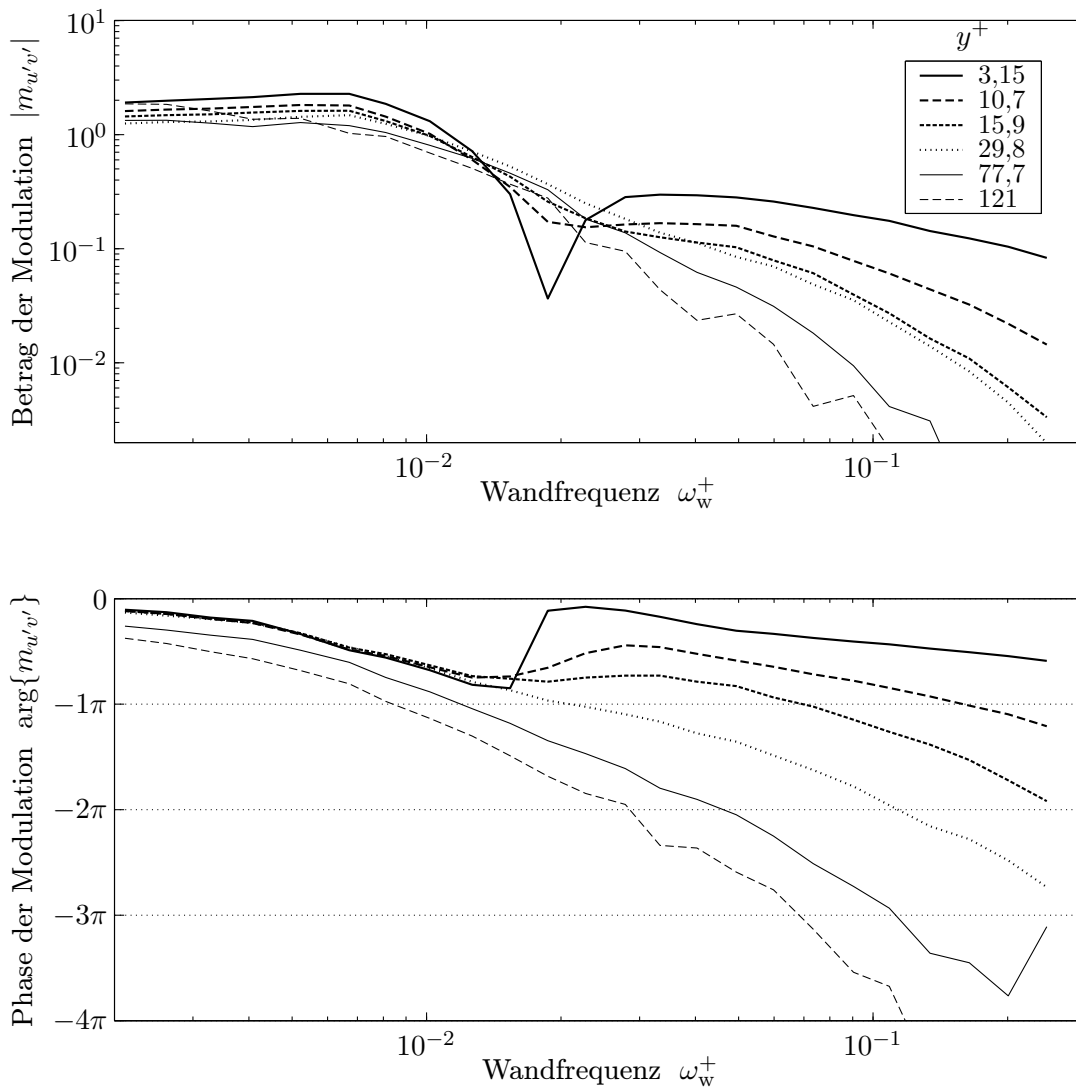


Abb. 6.9: Modulation der turbulenten Schubspannung als Funktion der Modulationsfrequenz nach Betrag (oben) und Phase (unten).

das heißt, eine minimale Phasenverzögerung gegenüber der modulierten Wandschubspannung. In der Ortskurvendarstellung mit dem Wandabstand als Parameter wird der Effekt wesentlich deutlicher. Abbildung 6.11 zeigt das wandnahe Verhalten der modulierten turbulenten Schubspannung als Funktion von y in der komplexen Ebene. Deutlich ist bei bestimmten Wandabständen eine Art »Knick« in den Ortskurven zu erkennen. Der zugehörige y^+ -Wert liegt dabei immer im Bereich zwischen 20 und 30 viskosen Einheiten. Die phänomenologische Modellannahme von Ronneberger (1985), die unter anderem auf Arbeiten von Höhler (1978) basiert, dass sich die turbulente Wechschubspannung von einem Gebiet $20 \lesssim y^+ \lesssim 30$ ausgehend räumlich ausbreitet, scheint dadurch bekräftigt zu werden. In unmittelbarer Wandnähe sollten, so die Annahme, die turbulente Schubspannung und die Scherrate vollkommen entkoppelt sein. Ein sehr ähnliches Verhalten wird sich im Folgenden bei den turbulenten Normalspannungen zeigen.

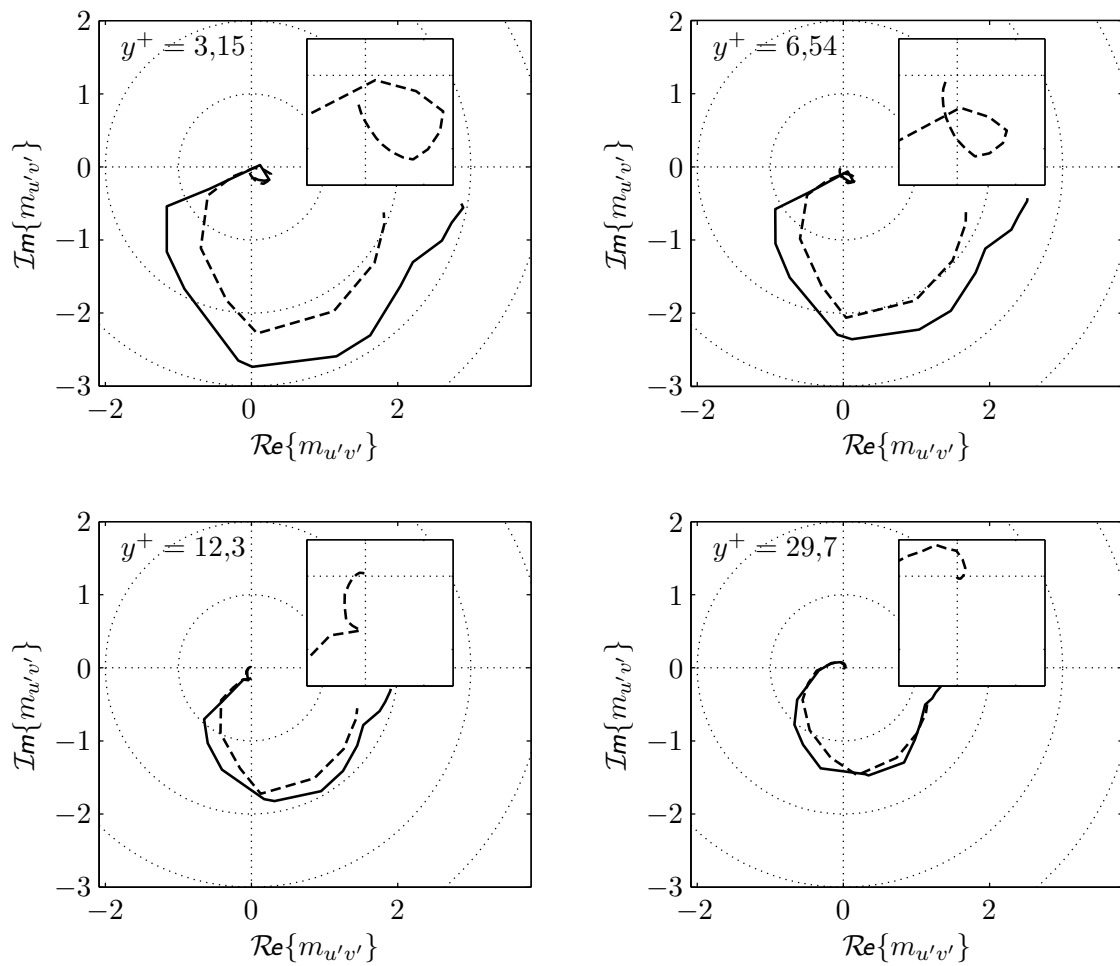
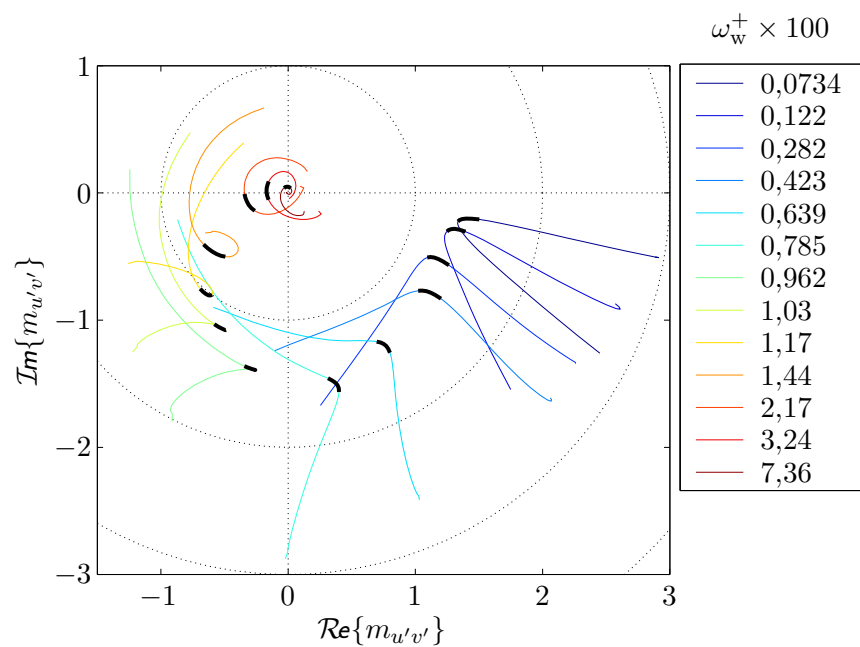


Abb. 6.10: Modulation der turbulenten Schubspannung als Funktion der Modulationsfrequenz für vier Abständen von der Wand und zwei unterschiedlichen Modulationsamplituden.

Abb. 6.11

Modulation der turbulenten Schubspannung als Funktion des Wandabstandes für diverse Modulationsfrequenzen. Gezeigt ist das wandnahe Verhalten bis $y^+ < 130$. Der Wandabstandsbereich von $y^+ = 20$ bis $y^+ = 32$ ist schwarz markiert.



6.2.2 Turbulente Normalspannungen

Im Gegensatz zur turbulenten Wechselschubspannung $-\rho\widetilde{u'v'}$ gibt es einige experimentelle Untersuchungen zur Modulation der axialen Schwankungen $\widetilde{u'^2}$. In unserer eigenen Arbeitsgruppe wurde in den letzten Jahren ausschließlich die u -Komponente der Geschwindigkeit gemessen, sodass etwa $\widetilde{u'v'}$ nur mit erheblichen Unsicherheiten indirekt über die Reynoldsgleichung bestimmt werden konnte. Die aus dem Messsignal $u(y, t)$ ermittelten Modulationsfaktoren $m_{u,2}$ sind wesentlich zuverlässiger und sie werden daher hier zum Vergleich mit den Simulationen herangezogen. Es wird zunächst ausschließlich die Modulation der Gesamtleistung betrachtet. Später folgt dann eine weitere Aufschlüsselung der Modulation nach einzelnen Amplitudenwerten (Abschnitt 6.5 auf Seite 122) und Frequenzkomponenten (Kapitel 7 auf Seite 131).

Ortsabhängigkeit der Modulation

Abbildung 6.12 zeigt die Modulation der Varianz der longitudinalen Geschwindigkeitskomponente, bezogen auf den örtlichen Langzeitmittelwert und bezogen auf die relative Modulation der Wandschubspannung. Neben der recht guten Übereinstimmung zwischen den numerischen und den experimentellen Daten fällt auf, dass die Modulation auch bei hohen Wandfrequenzen zur Kanalmitte hin sehr viel langsamer abfällt, als im rein viskosen Fall. Alle unsere bisherigen Untersuchungen deuten darauf hin, dass die Ursache hierfür in einem viskoelastischen Verhalten des turbulenten Strömungsfeldes liegt, worauf im Abschnitt 6.3 noch näher eingegangen wird.

Bei tiefen Anregungsfrequenzen beobachten wir, dass die Phasenverzögerung von $\widetilde{u'^2}$ (bezogen auf die Phase der Wandschubspannungsmodulation) in Wandnähe mit steigendem Wandabstand unerwartet zunächst kleiner wird, und erst ab ca. $y^+ \approx 25$ bis 30 für die tiefsten Wandfrequenzen immer weiter ansteigt. Abbildung 6.13 zeigt zur Verdeutlichung des Beschriebenen einige Modulationsfaktoren für den wandnahen Bereich (bis ca. $y^+ = 145$) in der komplexen Ebene. Wie bei der modulierten turbulenten Schubspannung findet man auch hier, dass die zu den tiefen Frequenzen gehörenden Ortskurven bei etwa den gleichen Wandabständen »abknicken«. Bei etwas höheren Frequenzen bilden die Ortskurven auch kleine Schleifen. Der Bereich $y^+ \approx 25$ bis 30 hat für die Dynamik der Strömung scheinbar eine besondere Bedeutung. Wodurch der beschriebene Effekt letztendlich hervorgerufen wird ist im Detail aber unklar. Offenbar sind die Antwortzeiten gegenüber der Störung im angegebenen Bereich minimal, sodass es naheliegt, eine Ausbreitung der turbulenten Wechselspannungen von diesem Gebiet aus anzunehmen. Der primäre Ausgangsort der Störung ist natürlich die modulierte Wechselschubspannung an der Wand, die Modulationsfaktoren charakterisieren aber immer einen *eingeschwungenen* Zustand. In einem zeitlichen Bild kann man die Arbeitshypothese einer innerhalb der Pufferschicht reflektierten Scherwelle aufstellen.

Dass es sich bei dem beschriebenen Effekt nicht um einen Artefakt der Simulation handelt, zeigen die in Abbildung 6.13 mit eingezeichneten Messwerte. Üblicherweise wurden die experimentell ermittelten Modulationsfaktoren nach Betrag und Phase oder auch nach Real- und Imaginärteil als Funktion des Wandabstandes aufgetragen. Dann zeigt sich der ausgezeichnete Ort bzw. Bereich weit weniger augenscheinlich.

Modulierte Normalspannung als Funktion der Frequenz

Die turbulente Wechselschubspannung ist sowohl abhängig vom Ort innerhalb der Strömung, als auch von der Anregungsfrequenz: $\widehat{u'^2} = \widehat{u'^2}(\omega_w, y)$. Während aber der Wandabstand nur ein Parameter ist, handelt es sich bei der Modulationsfrequenz um eine dynamische Variable des Systems.

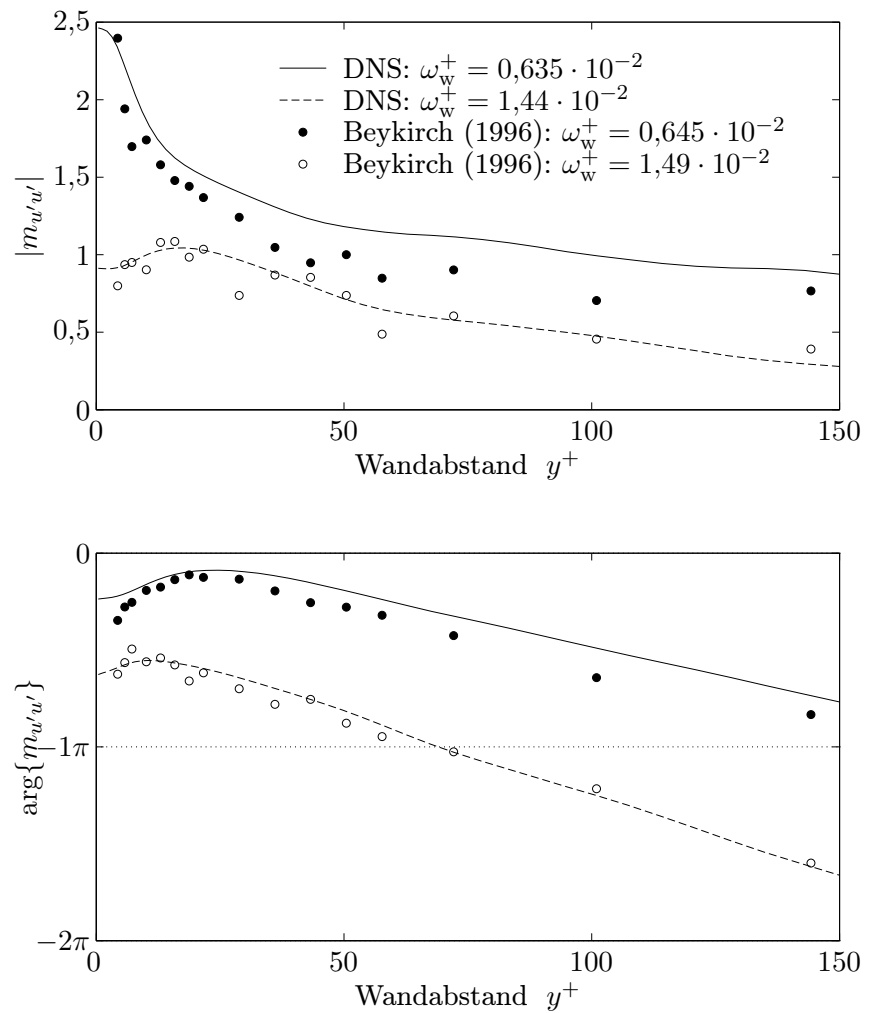


Abb. 6.12

Modulationsfaktoren nach Betrag (oben) und Phase (unten) der axialen Schwankungsbewegungen im Vergleich mit dem Experiment.

Verbindet man die Modulationsfaktoren in der bewährten Ortskurvendarstellung für feste Wandabstände y , erhält man einen besseren Eindruck von der Dynamik. Exemplarisch ist das für zwei Wandabstände in der Abbildung 6.14 dargestellt. Zusätzlich zu den Modulationsfaktoren der axialen Geschwindigkeitsfluktuationen sind die der wandnormalen und spannweiten Komponente mit eingezeichnet.

Generell bestätigt sich die Erwartung, dass die Reaktion der Turbulenz mit steigender Frequenz abnimmt. Zum einen klingt dann die induzierte Scherwelle sehr schnell ab – innerhalb der viskosen Unterschicht – und kann daher kaum mit der Turbulenz wechselwirken, zum anderen hat die Turbulenz auch keine Zeit, auf die geänderten Randbedingungen zu reagieren. Die axiale Komponente zeigt einige Abweichungen gegenüber den beiden anderen Komponenten. So nimmt die Amplitude von $\widehat{u'^2}$ – vor allem in Wandnähe – meist schneller mit wachsender Modulationsfrequenz ab, als bei $\widehat{v'^2}$ und $\widehat{w'^2}$. Auch sind die Phasenlaufzeiten gegenüber der modulierten Wandschubspannung in der Regel deutlich kleiner. Die Phasenlaufzeiten können nicht direkt den Ortskurven entnommen werden, denn neben der Phasenverschiebung geht dabei auch die Frequenz der Anregung ein. Abbildung 6.15 zeigt für den Wandabstand $y^+ = 12$ die aus den Phasen der Modulationsfaktoren berechneten Phasenlaufzeiten $-\arg\{\widehat{u'_i u'_i} / \widehat{\tau_w}\} / \omega_w^+$.

Für alle Modulationsfrequenzen findet man für u'^2 die kleinsten Laufzeiten. Deutlich ist auch ein unterschiedliches Verhalten von u'^2 gegenüber v'^2 und w'^2 für tiefe Frequenzen zu erkennen. Die

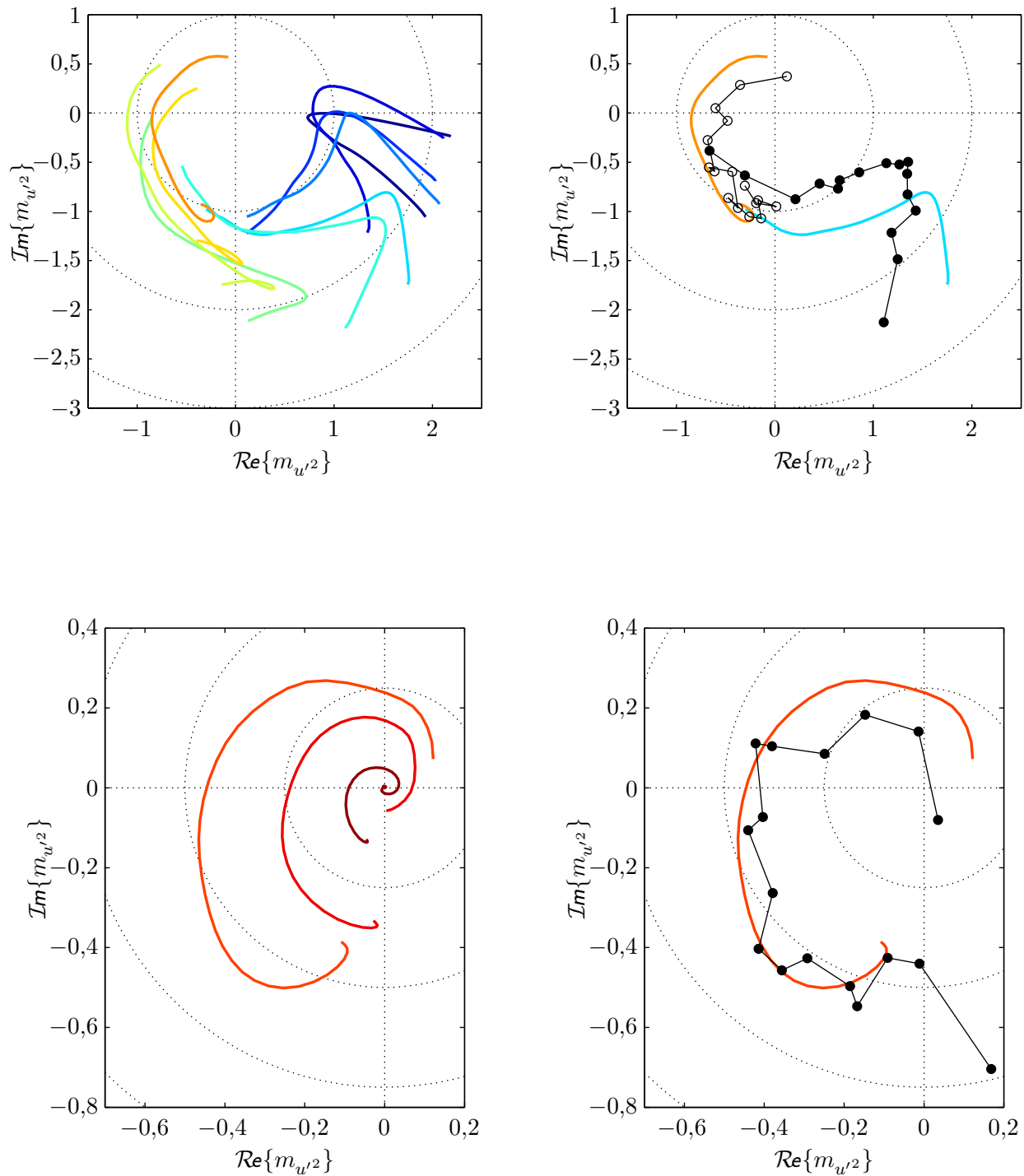


Abb. 6.13: Modulationsfaktoren der axialen Schwankungsbewegungen in der komplexen Ebene für diverse Frequenzen. Gezeigt ist das wandnahe Verhalten bis $y^+ < 145$. Oben rechts: ● Messung: $\omega_w^+ = 0,645 \cdot 10^{-2}$, ○ Messung: $\omega_w^+ = 1,49 \cdot 10^{-2}$, – DNS: $\omega_w^+ = 0,639 \cdot 10^{-2}$, – DNS: $\omega_w^+ = 1,44 \cdot 10^{-2}$; unten rechts: ● Messung: $\omega_w^+ = 2,13 \cdot 10^{-2}$, – DNS: $\omega_w^+ = 2,17 \cdot 10^{-2}$. (Legende der Farbkodierung wie Abbildung 6.11).

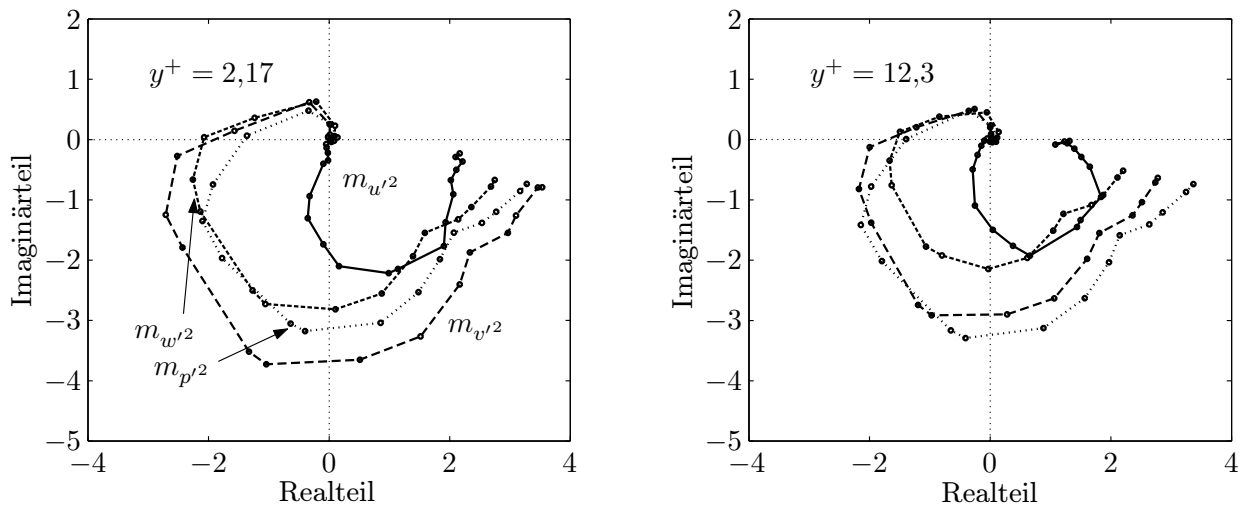


Abb. 6.14: Modulationsfaktoren der Normalspannungen und des Drucks als Funktion der Frequenz.

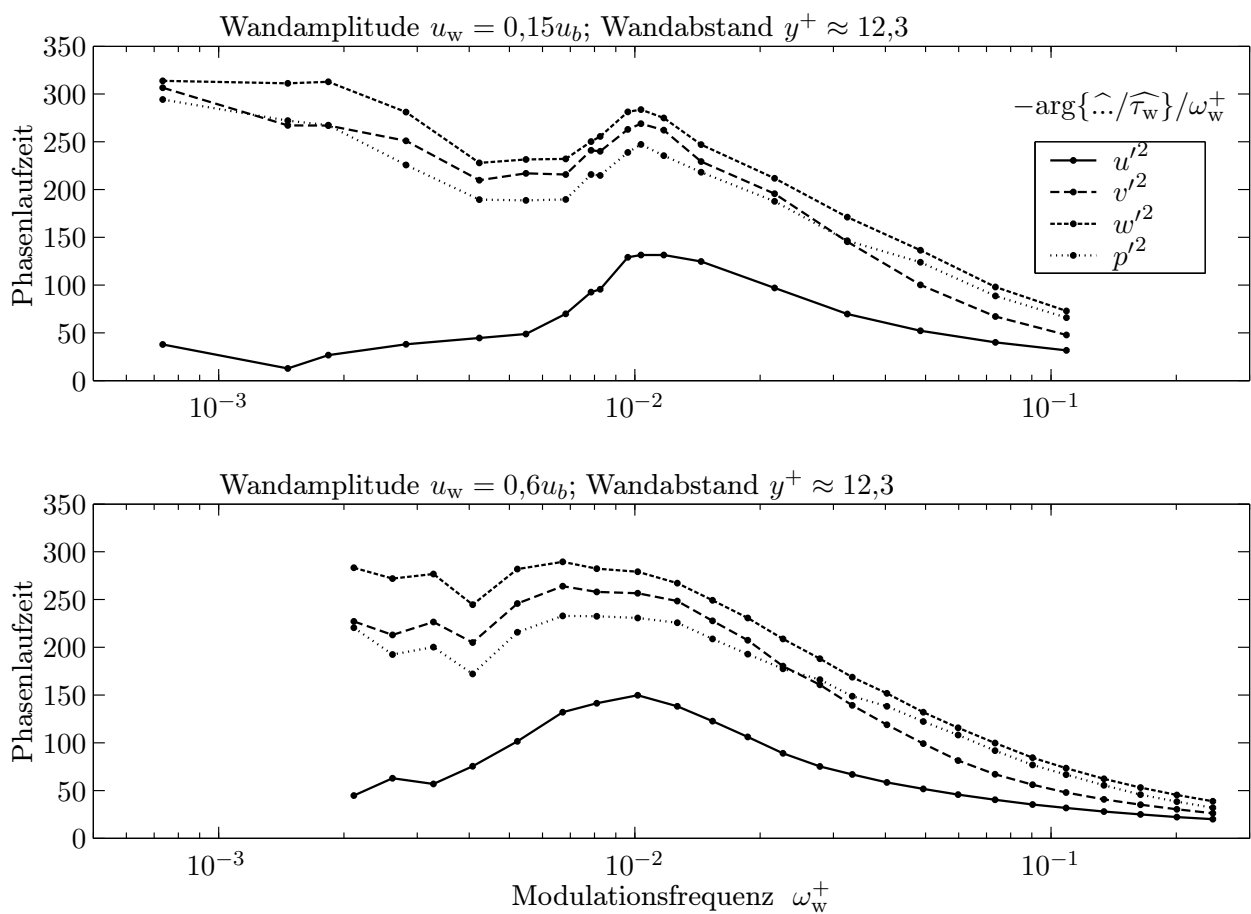


Abb. 6.15: Phasenlaufzeiten gegenüber der modulierten Wandschubspannung.

Phasenlaufzeiten für u'^2 sind für $\omega_w^+ \approx 1 \cdot 10^{-2}$ maximal und nehmen von dort sowohl für wachsende als auch für sinkende Frequenzen kontinuierlich ab. Auch v'^2 und w'^2 zeigen lokale Maxima bei $\omega_w^+ \approx 1 \cdot 10^{-2}$. Im Gegensatz zu den Phasenlaufzeiten von u'^2 , steigen diese aber für die normale und spannweite Komponente der Geschwindigkeit für die tiefen Frequenzen wieder an.

Weiter oben wurde bereits erwähnt, dass die Energie, die der mittleren Strömung pro Zeiteinheit entzogen wird, zuerst auf die axiale Komponente übertragen wird. Damit wurde unter anderem begründet, dass der Effektivwert der turbulenten u -Schwankungen deutlich größer ist als die Effektivwerte der v - und w -Schwankungen. Das war aber nur eine Plausibilitätsklärung, denn eine zeitliche Entwicklung ist bei den Effektivwerten überhaupt nicht berücksichtigt. An den Phasenlaufzeiten zeigt sich nun aber auch in einem zeitlichen Bild, dass die axialen Fluktuationen schneller auf Störungen – die hier durch die aufgeprägte Scherwelle induziert wurden – reagieren, als die beiden anderen Komponenten. Genaugenommen müssten eigentlich die Gruppenlaufzeiten $-\widehat{du'_i u'_i} / \widehat{\tau_w} / d\omega_w$ untersucht werden, wenn zeitliche Abfolgen wichtig sind. Die Modulationsfrequenzen liegen aber nicht ausreichend dicht, um die Ableitung hinreichend genau bestimmen zu können, sodass die ausgewerteten Gruppenlaufzeiten mit erheblichen Unsicherheiten behaftet sind und auf eine Darstellung verzichtet wurde. Tendenziell konnten auch nur geringe Unterschiede gegenüber den Phasenlaufzeiten beobachtet werden.

In der Ortskurvendarstellung des Modulationsfaktors $m_{u'^2}(y)$ (Abbildung 6.13) konnte für den Wandabstandsbereich zwischen $y^+ = 25$ und $y^+ = 30$ ein besonderes Verhalten beobachtet werden. Unter anderem waren die Phasen dort minimal gegenüber $\arg\{\widehat{\tau_w}\}$ verschoben. Die Auswirkungen auf die Phasenlaufzeiten sind in der Abbildung 6.16 zu sehen.

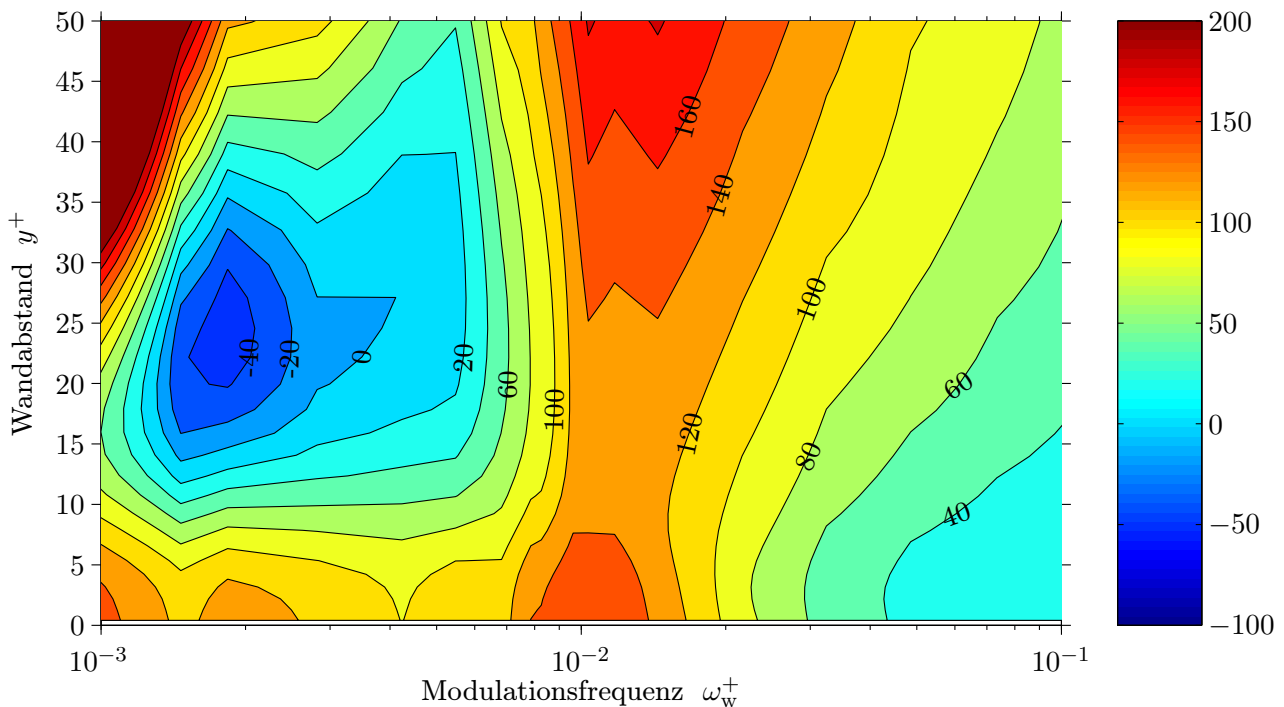


Abb. 6.16: Phasenlaufzeit $-\arg\{\widehat{u'^2} / \widehat{\tau_w}\} / \omega_w^+$ als Funktion der Modulationsfrequenz und des Wandabstandes. Laufzeiten von mehr als 200 viskosen Einheiten sind nicht dargestellt (dunkelroter Bereich links oben).

Im Bereich $y^+ \approx 25$ ist ein deutliches Minimum zu erkennen. Die Phasenlaufzeiten sind dort sogar

negativ, das heißt, $\widetilde{u'^2}$ eilt der modulierten Wandschubspannung voraus. Diese Beobachtung stützt die Hypothese einer in diesem Bereich reflektierten Scherwelle. Zum Vergleich sind in der Abbildung 6.17 die Phasenlaufzeiten für $\widetilde{v'^2}$ und $\widetilde{u'v'}$ dargestellt. Die Phasenlaufzeiten der modulierten turbulenten Schubspannung zeigen ein ähnliches, jedoch nicht so ausgeprägtes, Minimum wie $\widetilde{u'^2}$. Die Phasenlaufzeit $-\arg\{\widehat{v'^2}/\widehat{\tau_w}\}/\omega_w^+$ ändert sich dagegen im gesamten Bereich $0 < y^+ < 50$ kaum, sinkt aber mit wachsender Modulationsfrequenz.

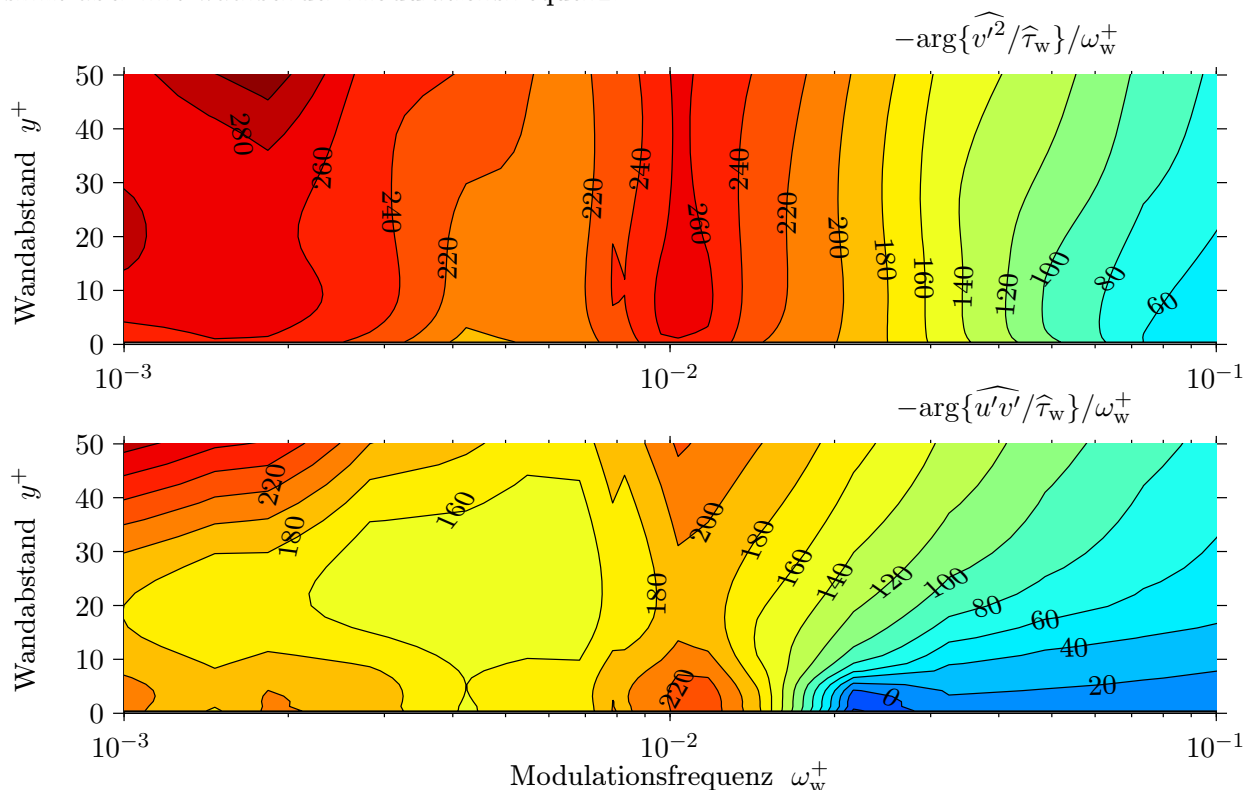


Abb. 6.17: Phasenlaufzeiten $-\arg\{\widehat{v'^2}/\widehat{\tau_w}\}/\omega_w^+$ (oben) und $-\arg\{\widehat{u'v'}/\widehat{\tau_w}\}/\omega_w^+$ (unten) als Funktion der Modulationsfrequenz und des Wandabstandes.

Modulierte Normalspannung als Funktion der Frequenz im Vergleich mit den experimentellen Daten

Für den folgenden Vergleich mit experimentellen Daten ist eine Auftragung nach Betrag und Phase gewählt. So lassen sich durch eine logarithmische Darstellung vor allem die kleinen Beträge der Modulationsfaktoren besser in einer Abbildung vergleichen. Für ausgewählte Wandabstände ist in Abbildung 6.18 der Modulationsfaktor $m_{u'^2}$ als Funktion der Anregungsfrequenz ω_w im Vergleich mit den vorhandenen Messergebnissen gezeigt. Insgesamt stimmen die Messergebnisse und die Simulationsergebnisse erstaunlich gut überein. Im Detail gibt es aber dennoch einige Unterschiede. So zeigt sich bei den Simulationsergebnissen für alle Wandabstände bis etwa $y^+ = 120$ ein Maximum des Modulationsfaktors bei $0,01 \lesssim \omega_w^+ \lesssim 0,08$. Bei den Messwerten ist dieses Maximum in der Regel nur schwach ausgeprägt, oder es ist überhaupt nicht vorhanden. Der mit wachsender Frequenz näherungsweise exponentielle Abfall des Modulationsfaktors wird aber sowohl in der Simulation, als auch im Experiment beobachtet. Auch die Absolutwerte stimmen hier sehr gut überein. Die Phasenverläufe sind in Abbildung 6.19 zu sehen. Auch hier findet man eine bemerkenswert gute Übereinstimmungen zwischen Messung und Simulation.

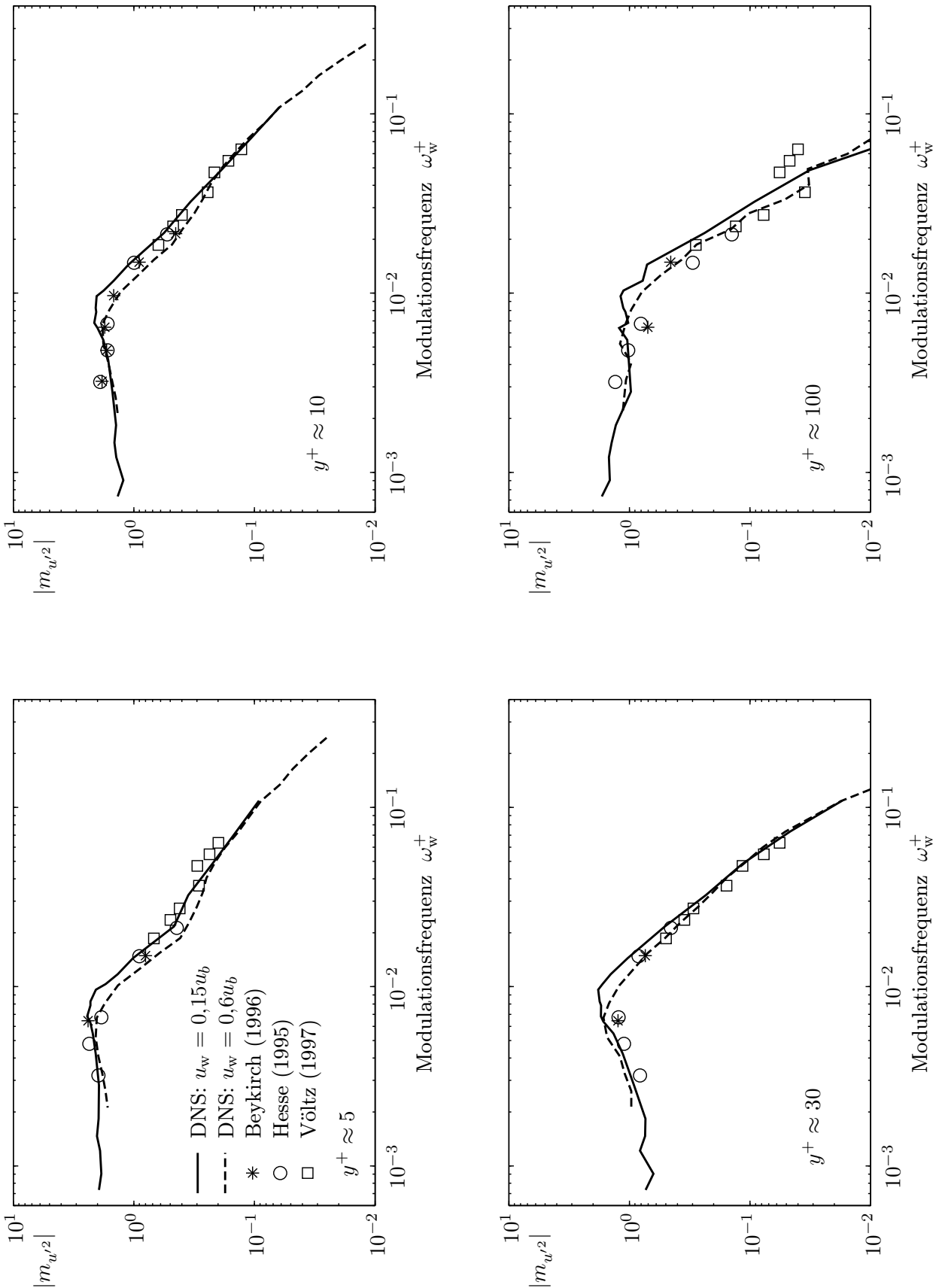


Abb. 6.18: Betrag des Modulationsfaktors der axialen Geschwindigkeitsschwankungen als Funktion der Modulationsfrequenz im Vergleich mit dem Experiment.

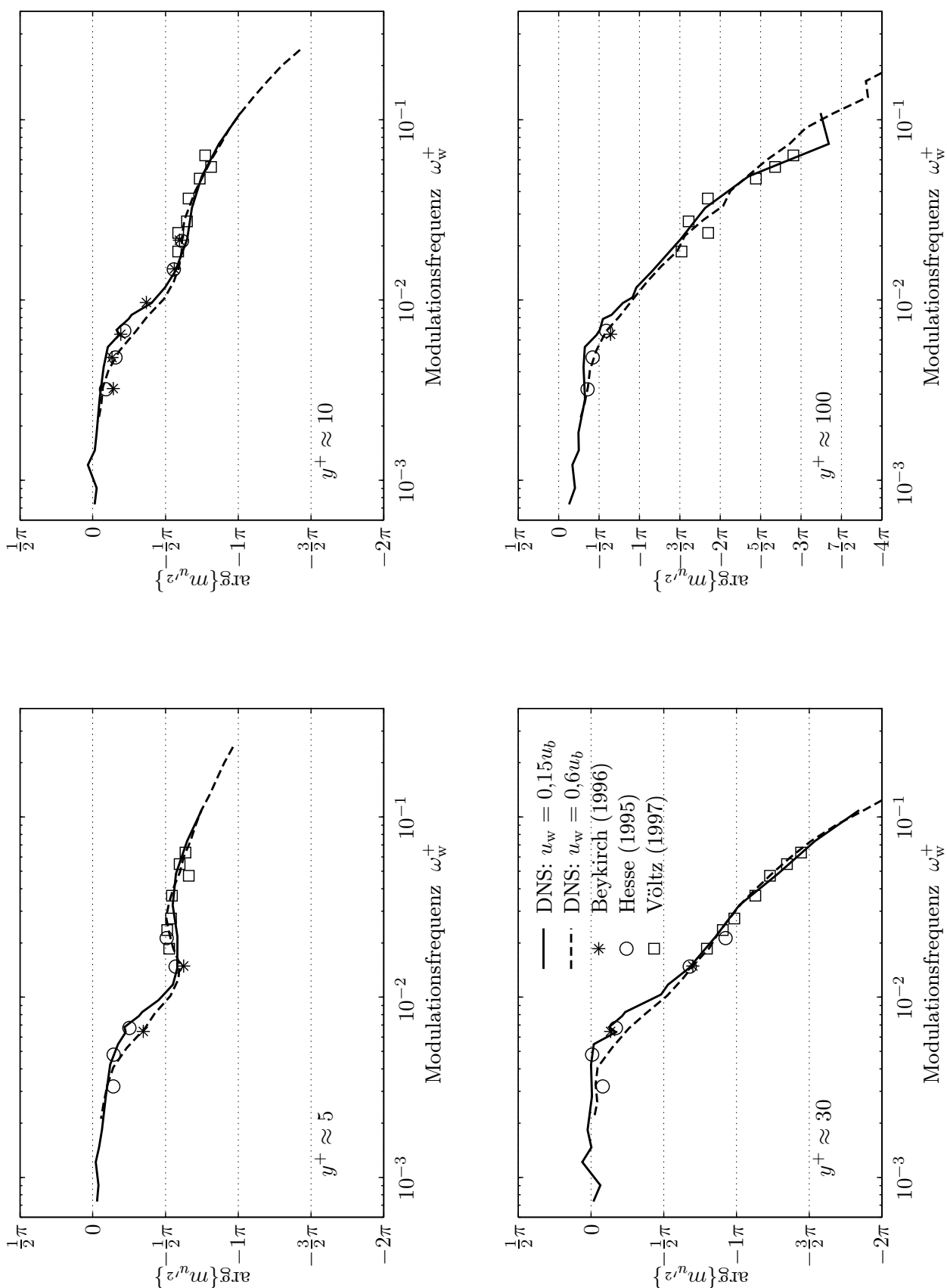


Abb. 6.19: Phase des Modulationsfaktors der axialen Geschwindigkeitsschwankungen als Funktion der Modulationsfrequenz im Vergleich mit dem Experiment.

6.2.3 Einfluss der Wandamplitude

Die Modulation der Normalspannungen, sowie auch die Modulationen aller anderen Größen, sind abhängig von der Amplitude der Wandbewegungen. Wenn aber Modulationsfaktoren betrachtet werden, dann sind die Modulationen auf die relative Modulation der Wandschubspannung normiert, die in gleicher Weise (linear) von der Wandamplitude abhängt, sodass die Wandamplitude keine Rolle spielt. Das gilt aber nur in erster Näherung, wenn also alle nichtlinearen Effekte vernachlässigt werden können. Ist die Wandamplituden größer, sodass das Phasenmittel nicht durch den Mittelwert und die erste Harmonische vollkommen bestimmt ist, ergeben sich für den Modulationsfaktor zunächst zwei Effekte. Der Mittelwert des Phasenmittels stimmt nicht mehr exakt mit dem Mittelwert der stationären Strömung überein, sodass allein hierdurch der Modulationsfaktor beeinflusst werden kann. Auch verteilt sich die Energie des Phasenmittels auf mehr als eine Harmonische, sodass die Amplitude der ersten Harmonischen in der Regel abfällt. Allgemein hängt der Modulationsfaktor m_m der Größe q (zum Beispiel $q = u'^2$) von vier Größen ab: Den beiden Mittelwerten \bar{q} und $\bar{\tau}_w$, sowie den beiden ersten Harmonischen \hat{q} und $\hat{\tau}_w$. Nichtlineare Effekte können sich auf alle vier Größen auswirken und beeinflussen damit auf komplizierte Weise den Modulationsfaktor.⁸ Wie sich eine Wandamplitude von 60% der Durchflussgeschwindigkeit gegenüber einer Amplitude von 12,5% auf den Mittelwert und die erste Harmonische der axialen Geschwindigkeitsfluktuationen $\widetilde{u'^2}$ auswirkt, zeigt die Abbildung 6.20. Aus einer genaueren Analyse der vorhandenen Daten, unter anderem durch Berechnung der hier nicht gezeigten höheren Harmonischen des Phasenmittels und durch Vergleiche mit Ergebnissen bei sehr kleinen Amplituden, kann man folgern, dass bei einer Amplitude von 12,5% fast keine nichtlinearen Effekte auftreten. Das gilt nicht nur für $\widetilde{u'^2}$, sondern für alle in dieser Arbeit untersuchten Größen.⁹ Der Wert sollte aber allenfalls als Richtwert verstanden werden, denn eine genauere Untersuchung der Amplitudenabhängigkeit wurde nicht durchgeführt. Die Mittelwerte werden aber selbst bei sehr hohen Amplituden nur wenig beeinflusst, während die Form des Phasenmittels wesentlich empfindlicher reagiert.

6.3 Scheinviskosität als Funktion der Frequenz

Die Gesamtschubspannung setzt sich aus einem viskosen und einem turbulenten Anteil zusammen:

$$\tau_{\text{gesamt}} = \mu \frac{d\bar{u}}{dy} - \overline{\rho u'v'}. \quad (6.8)$$

Der Ausdruck

$$\mu_t = \frac{-\overline{\rho u'v'}}{d\bar{u}/dy} \quad (6.9)$$

wird daher oft turbulente Scheinviskosität («eddy viscosity») genannt. In vielen Turbulenzmodellen wird versucht diese, für die Dynamik der Turbulenz sehr wichtige Größe, zu modulieren. Abbildung 6.21 zeigt die turbulente Scheinviskosität in Einheiten der molekularen Viskosität. Bei $y^+ \approx 12,5$ ist μ_t bereits genau so groß wie μ und bei $y^+ \approx 95$ knapp zwanzig mal größer, sodass die Relevanz für die Dynamik der Strömung offensichtlich ist.

⁸ Im Grunde genommen macht es keinen Sinn bei nichtlinearem Verhalten den Modulationsfaktor auszuwerten, denn er wurde ja gerade eingeführt, um die Amplitudenabhängigkeit zu beseitigen.

⁹ Im Vergleich mit anderen Größen hat sich herausgestellt, dass $\overline{u'^2}$ und $\widetilde{u'^2}$ im besonderen Maße durch nichtlineare Effekte beeinflusst werden.

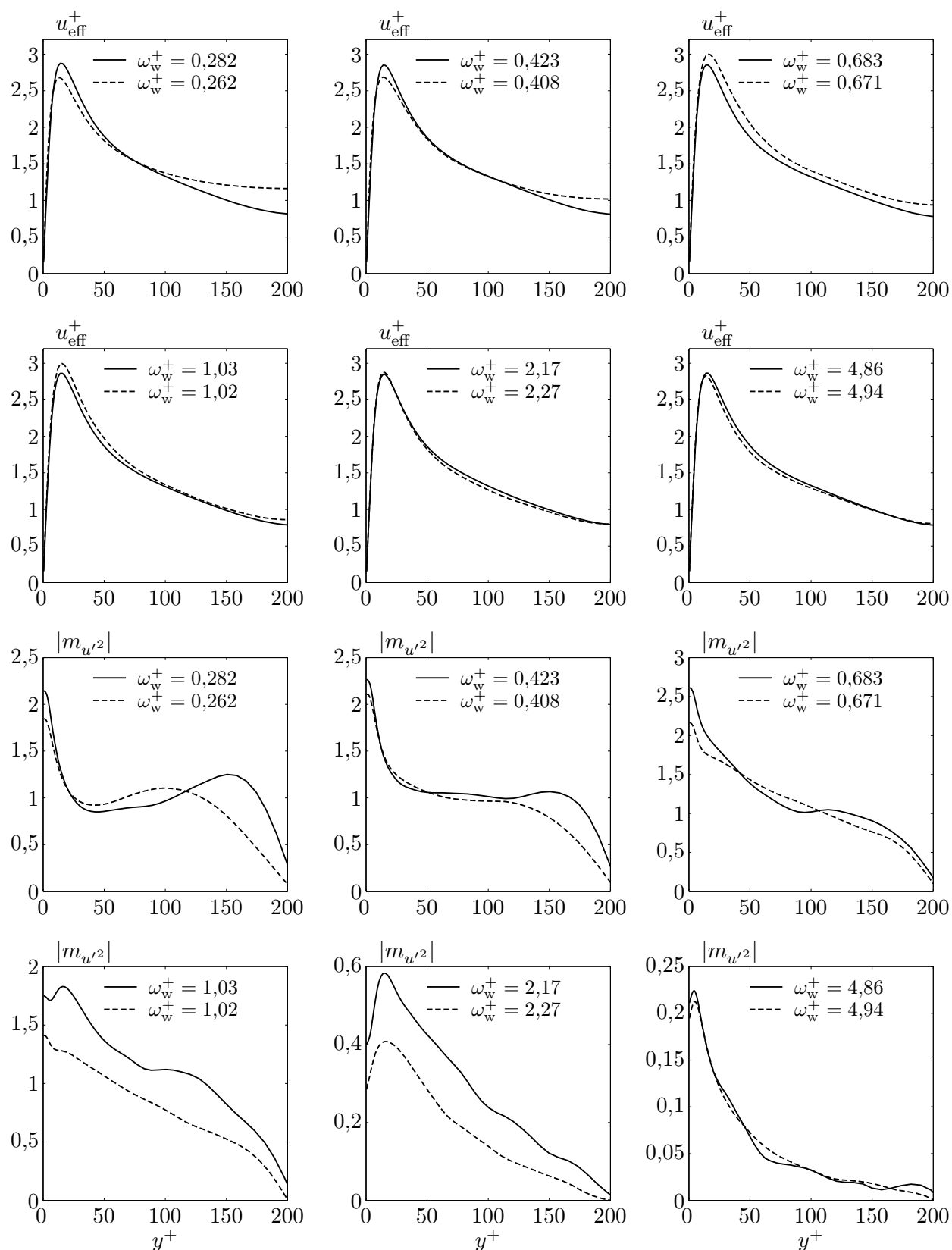


Abb. 6.20: Einfluss der Wandamplitude u_w auf $u_{\text{eff}} = \overline{(u'^2)}^{1/2}$ und auf den Betrag des Modulationsfaktors $m_{u'^2} = \frac{\widehat{u'^2}}{u'^2} / \frac{\widehat{\tau_w}}{\tau_w}$.

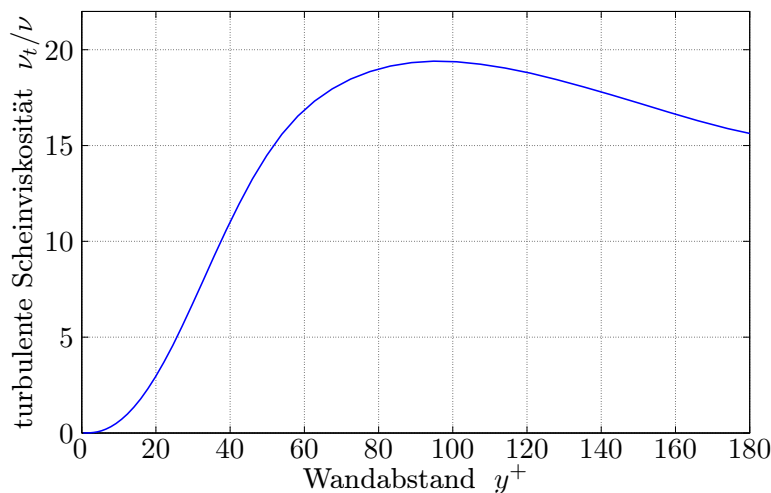


Abb. 6.21
Turbulente Scheinviskosität als Funktion des dimensionslosen Wandabstandes.

Die Modulation der turbulenten Schubspannung $-\rho \widetilde{u'v'}$ wurde bereits in Abschnitt 6.2.1 diskutiert, die Modulation der Scherrate $d\widetilde{u}/dy$ ergibt sich aus der Modulation der Geschwindigkeit, indem die komplexe Amplitude $\widehat{u}(y)$ räumlich nach y differenziert wird. Nun wird das Verhältnis der beiden komplexen Modulationsamplituden, also $\frac{-\rho \widetilde{u'v'}}{d\widehat{u}/dy}$, mit dem Ziel untersucht, die Modulation der turbulenten Schubspannung aus einem anderen Blickwinkel als in Abschnitt 6.2.1 zu betrachten. Jetzt wird die Modulation der turbulenten Schubspannung direkt auf die »Ursache« bezogen. In der Sprache der Signalverarbeitung geht es also um die Übertragungsfunktion: Mit welcher Amplitude und Phase reagiert die turbulente Schubspannung auf die aufgeprägte Scherrate? Dabei steht die Hypothese im Hintergrund, dass zwischen der turbulenten Schubspannung und der Scherrate eine unmittelbare lokale Beziehung besteht.

Für den Wandabstand $y^+ = 12$ sind in der Abbildung 6.22 die Modulationsfaktoren der turbulenten Schubspannung und der Scherrate miteinander verglichen. Für tiefe Frequenzen werden die beiden Größen ganz unterschiedlich moduliert und sie sind offenbar – mindestens für den gewählten Wandabstand – mehr oder weniger entkoppelt. Das gilt aber nicht für die hohen Modulationsfrequenzen. Dort scheint umgekehrt ein starker Zusammenhang zwischen der turbulenten Schubspannung und der Scherrate zu existieren. Besonders augenscheinlich wird das in der Ortskurvendarstellung. Durchläuft man die Ortskurve der turbulenten Schubspannung, dann ändert sich der ursprüngliche Trend im Bereich $2 \cdot 10^{-2} \lesssim \omega_w^+ \lesssim 3 \cdot 10^{-2}$ deutlich. Die Schubspannungs-Ortskurve »folgt« dann nahezu dem Verlauf der Scherraten-Ortskurve. Sehr gut ist der plötzliche Trendwechsel auch an den Phasenverläufen zu sehen. Im Abschnitt 6.2.1 wurden im Zusammenhang mit der modulierten turbulenten Schubspannung kleine Resonanzeffekte im wandnahen Bereich beobachtet. Der in Abbildung 6.22 gezeigte Vergleich mit der modulierten Scherrate legt die Vermutung nahe, dass die turbulente Schubspannung durch zwei unterschiedliche Effekte beeinflusst wird. Einer dieser Effekte ist eine starke Kopplung von $\widetilde{u'v'}$ an $d\widetilde{u}/dy$ für hohe Modulationsfrequenzen. Die modulierte Scherrate sorgt dann dafür, dass die turbulente Schubspannung für einige hohe Frequenzen stärker moduliert wird, als es der unbekannte zweite Mechanismus allein bewirkt hätte.

Für größere Wandabstände zeigt sich, dass, oberhalb einer vom Wandabstand abhängigen Modulationsfrequenz, die auf den jeweiligen Gleichwert normierten Modulationen der turbulenten Schubspannung und der Scherrate dem Betrage nach fast gleich sind, jedoch immer ein negativer Phasenunterschied (die Scherrate eilt voraus) bestehen bleibt. Die genaue Größe dieses Phasenunterschiedes wird in den folgenden Abschnitten noch eingehend diskutiert. Für einige hohe Modulationsfrequen-

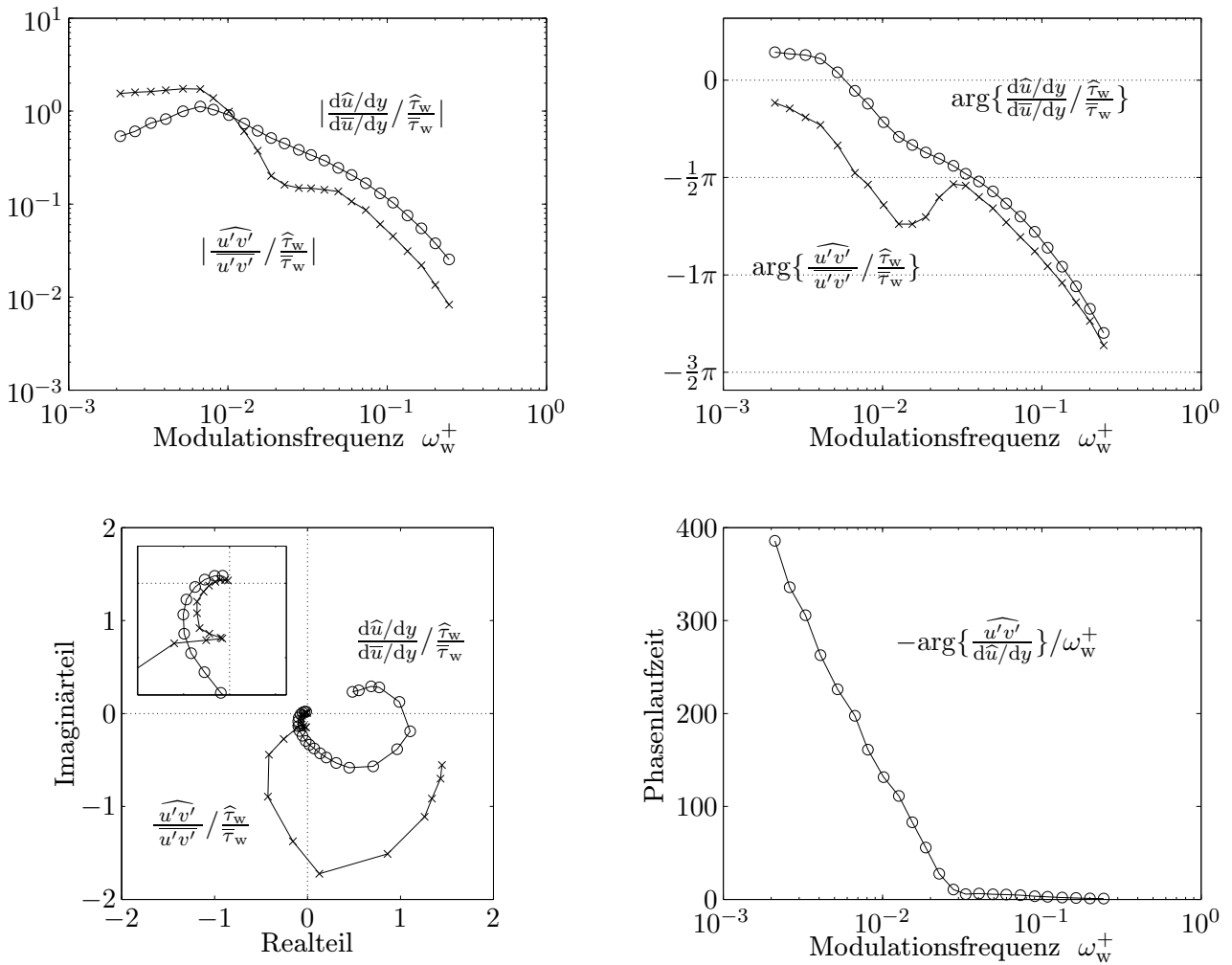


Abb. 6.22: Vergleich zwischen den Modulationsfaktoren der turbulenten Schubspannung und der Scherrate. Unten rechts ist zusätzlich die Phasenlaufzeit zwischen Schubspannung und Scherrate gezeigt (jeweils für den gleichen y -Abstand ausgewertet).

zen zeigt Abbildung 6.23 die Phasendifferenz als Funktion des Wandabstands. Überall ist die Schubspannung gegenüber der Scherrate verzögert und zwar mit einer Phasendifferenz, die nicht größer als null und nicht kleiner als -90° wird.

Zusätzlich zu den Modulationsfaktoren ist in der Abbildung 6.22 die Phasenlaufzeit zwischen der turbulenten Schubspannung und der Scherrate dargestellt. Für tiefe Frequenzen reagiert $-\rho\hat{u}'v'$ mit deutlichen Phasenverzögerungen gegenüber $d\hat{u}/dy$. Die Phasenlaufzeit fällt bis etwa $\omega_w^+ = 2 \cdot 10^{-2}$ nahezu exponentiell ab. Für die hohen Frequenzen ist die modulierte turbulente Schubspannung dann nur noch um einige ν/u_τ^2 gegenüber der modulierten Scherrate verzögert.

6.3.1 Phasendifferenz von Schubspannung und Scherrate

Im rein viskosen Fall ist die Schubspannung proportional zur Scherrate. Für ein vollkommen elastisches Medium sind Schubspannung und Scherung ($\int d\hat{u}/dy dt$) proportional zueinander. Daraus

ergibt sich, dass eine harmonische Modulation der Scherrate beim viskosen Medium zu einer phasengleichen Modulation der Schubspannung führt, hingegen beim rein elastischen Medium die Schubspannung der modulierten Scherrate um 90° nacheilt.

Man könnte erwarten, dass die Strömung rein viskos auf die Modulation reagiert, denn das Strömungsfluid der Simulation ist ja auch rein viskos. Es wurden keine elastischen Eigenschaften vorgegeben. In der Tat reagiert das Fluid selbst rein viskos, nicht aber die turbulente Strömung.

Wertet man den Ausdruck $\frac{-\rho \widehat{u'v'}}{\widehat{d\bar{u}/dy}}$ in der turbulenten Kanalströmung aus, so findet man, je nach Wandabstand und Frequenz, Phasendifferenzen zwischen -90° und 0° (Abbildung 6.23 und Abbildung 6.24), also ein viskoelastisches Verhalten der turbulenten Strömung. Dies ist nun aber keine Eigenschaft des Strömungsfluids an sich – eine solche ist ja auch gar nicht vorgegeben – sondern eine Eigenschaft der Strömungsstruktur selbst. Nach unserem Wissen ist damit der erste *direkte* Nachweis geführt, dass ein turbulentes Strömungsfeld auf Scherverformungen mit einer Schubspannung antwortet, die neben einem viskosen Anteil auch einen elastischen Anteil zeigt. Ein solches Verhalten wurde zum Beispiel durch Crow (1968) theoretisch untersucht und von Maxey (1982) auch für die turbulente Kanalströmung postuliert, obwohl hier nicht alle Voraussetzungen der »Crow'schen Theorie« erfüllt sind.

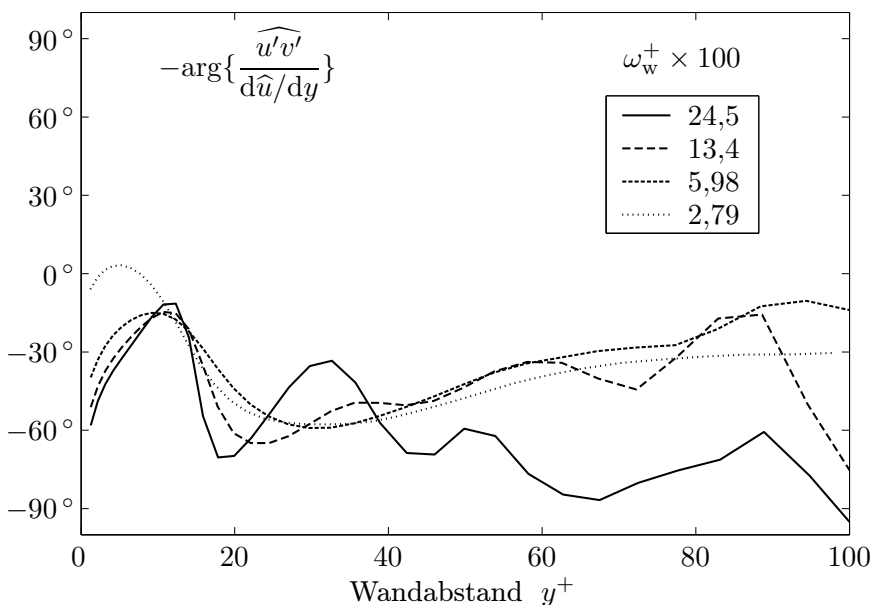


Abb. 6.23

Phasendifferenz zwischen der modulierten turbulenten Schubspannung und der modulierten Scherrate als Funktion des Wandabstands.

6.3.2 Viskoelastizität

Die elastische Reaktion eines turbulenten Strömungsfeldes zeigt sich nur für kurze Zeit. Nach einer gewissen Relaxationszeit kann eine aufgeprägte Scherung keine Schubspannung mehr aufrechterhalten, sodass dazu eine Scherrate zwingend notwendig ist. Bei unserer Art der Anregung, bei der eine harmonisch variierende Scherrate aufgeprägt wird, sich also sowohl Scherrate, als auch Scherung zeitlich ändert, wird sich der elastische Anteil aber ständig zeigen. Jede Änderung der Scherung ruft eine neue Reaktion hervor, und die Scherung ändert sich bei der Anregung ständig. Erst dadurch wird die Auswertung des Ausdrucks $\frac{-\rho \widehat{u'v'}}{\widehat{\partial \bar{u} / \partial y}}$ überhaupt sinnvoll.

Mit der oben beschriebenen und gezeigten Auswertung kann nur ein Verhältnis zwischen der rein

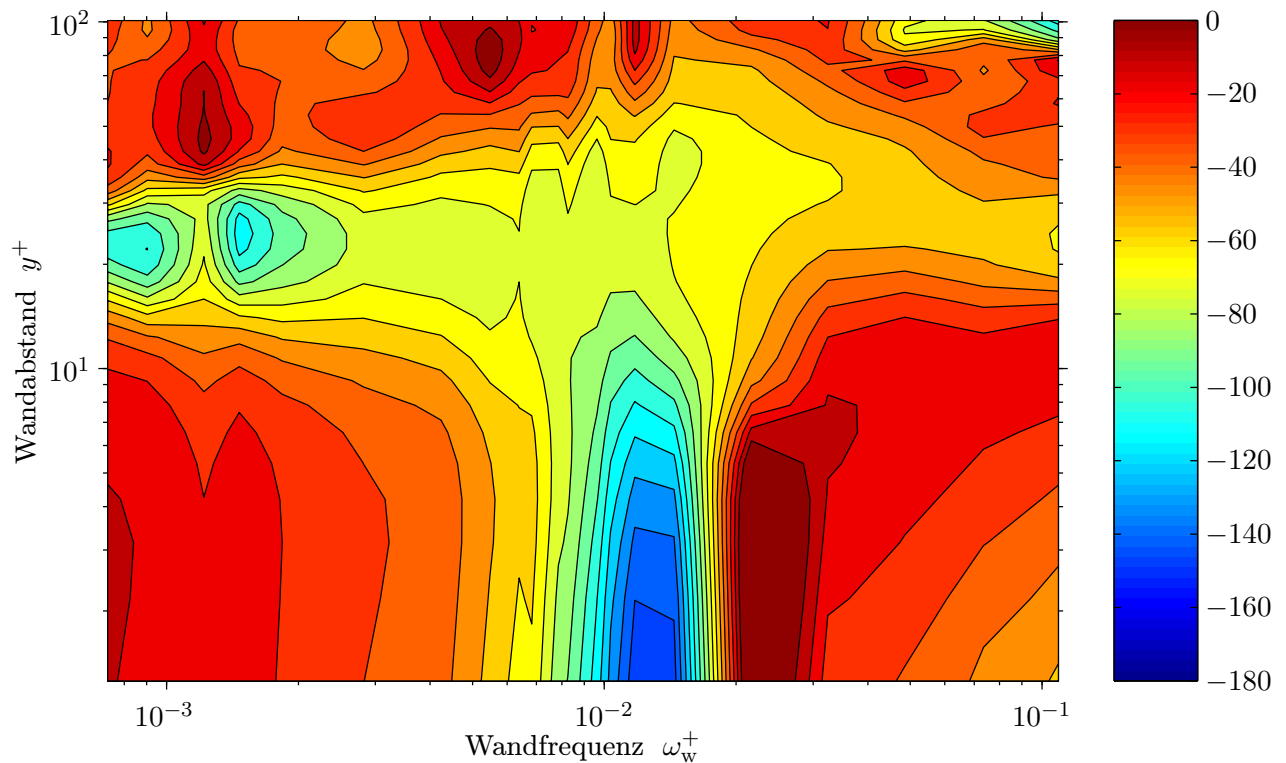


Abb. 6.24: Phasendifferenz (in Grad) zwischen der modulierten turbulenten Schubspannung und der modulierten Scherrate als Funktion der Modulationsfrequenz und des Wandabstands: $\arg\left\{\frac{-\widehat{u'v'}}{\widehat{d\bar{u}/dy}}\right\}$.

viskosen und der rein elastischen Reaktion ermittelt werden. Um auch Aussagen über typische Zeitkonstanten der Relaxation machen zu können, muss man ein Modell der Elastizität aufstellen. Das wohl einfachste Modell – damit aber auch leicht handhabbar – beruht auf der Annahme, dass die Strömung mit einer einzigen Zeitkonstante reagiert, nach der der elastische Anteil der Reaktion im Wesentlichen abgeklungen ist. Typischerweise setzt man hier einen exponentiellen Abfall an, sodass man zu folgender Annahme kommt.

Annahme

Wird der turbulenten Gleichströmung eine plötzliche Scherverformung $\xi(t)$ aufgeprägt, dann reagiert das Turbulenzfeld mit einer quasielastischen Schubspannung $G \cdot \xi$, die mit einer einzigen Zeitkonstante T abklingt.

$$\tau(t) = G \cdot \xi(t) \cdot e^{-t/T}. \quad (6.10)$$

Damit hat man ein einfaches Modell mit zwei Parametern, dem Schubmodul G und der Zeitkonstanten T . Man kann den Ausdruck (6.10) der elastischen Schubspannung entweder als Sprungantwort auf die Scherverformung oder als Impulsantwort auf die Scherrate $\partial\xi/\partial t$ interpretieren. Für die Übertragungsfunktion zwischen der Scherrate und der Schubspannung ergibt sich:

$$\frac{\mathcal{F}\{\tau\}}{\mathcal{F}\{\partial\xi/\partial t\}} = \frac{G}{\frac{1}{T} + i2\pi f}. \quad (6.11)$$

Im Fall der harmonisch modulierten Strömung setzt man für τ die moduliert turbulente Schubspannung $-\rho\overline{u'v'}$ und für $\partial\bar{u}/\partial t$ die modulierte Scherrate $\partial\tilde{u}/\partial y$ ein. Für das Verhältnis der komplexen Amplituden gilt dann folgende Beziehung:

$$\frac{-\rho\widehat{u'v'}(f)}{\partial\widehat{u}/\partial y(f)} = \frac{GT}{1 + i2\pi fT}. \quad (6.12)$$

Damit ist es dann möglich G und T zu berechnen. Abbildung 6.25 zeigt das Ergebnis als Funktion der Modulationsfrequenz für einige Wandabstände.

Für tiefe Modulationsfrequenzen sind die Modellannahmen sicherlich nicht erfüllt, sodass die Werte dort keine besondere Aussagekraft haben. Für hohe Frequenzen zeigt sich, dass zwar das Produkt GT einen nahezu konstanten Wert annimmt, dass aber die Relaxationszeit T und folglich auch Schubmodul G keineswegs konstant (frequenzunabhängig) werden. Das in Abbildung 6.25 gezeigte Produkt GT ergibt für alle Modulationsfrequenz ω_w^+ oberhalb von etwa $2 \cdot 10^{-2}$ Werte, die in etwa der turbulenten Scheinviskosität $\frac{-\rho\overline{u'v'}}{d\bar{u}/dy}$ entsprechen. Für die Relaxationszeiten T erhält man Werte zwischen 1 bis 10 viskosen Zeiteinheiten. T fällt im untersuchten Frequenzbereich noch kontinuierlich und es ist nicht sicher zu erkennen, ob bei weiterer Steigerung der Frequenz eventuell ein konstanter Wert erreicht wird, oder ob T immer weiter sinkt. Nur für den Fall, dass T relativ konstant wird, wäre die einfache Modellannahme, bei der angenommen wurde, dass die Turbulenz bei hohen Frequenzen im Wesentlichen mit einer einzigen Zeitkonstanten antwortet, gerechtfertigt.

Zusammenfassend kann Folgendes gesagt werden: Die Antwort der Turbulenz auf eine mittlere Verformung ist viskoelastisch, das heißt, sie ist vom Zustand (Mode) der Deformation abhängig. In schnell verformter Turbulenz werden die turbulenten Spannungen durch die absolute Verzerrung bestimmt, bei langsam verformter Turbulenz werden die turbulenten Spannungen durch die Verzerrungsrate bestimmt. Beide Arten der Scherung kommen in technisch relevanten Strömungen vor, sodass ein brauchbares Modell die Viskoelastizität widerspiegeln sollte. Unter instationären Bedingungen spielt die »Struktur der Turbulenz« für die Ausbreitung der turbulenten Spannungen eine Schlüsselrolle. Um die Ausbreitung von hochfrequenten Störungen zu modellieren, muss das »Gedächtnis« der Turbulenz berücksichtigt werden. Die relevanten Zeitskalen liegen dabei in einem Bereich von einigen viskosen Zeiteinheiten.

6.3.3 Wirbelstreckung

Es stellt sich die Frage, wie man den elastischen Anteil der Reaktion der Strömung anschaulich verstehen kann. Es ist zunächst recht plausibel, dass bei einer *plötzlichen* (sehr schnellen) Änderung der Scherrate $\partial\bar{u}/\partial y$ um einen gewissen Betrag – bei uns hervorgerufen durch die aufgeprägten Scherkräfte – die turbulente Schubspannung $-\rho\overline{u'v'}$ im ersten Augenblick unverändert bleibt. Erst allmählich wird sie sich dem neuen Gleichgewichtszustand annähern. Der neue Gleichgewichtszustand wird sich also erst nach einer gewissen Relaxationszeit einstellen. Bleibt der Turbulenz keine Zeit sich auf den einen neuen Gleichgewichtszustand einzustellen, weil zum Beispiel durch Körperkräfte die Scherrate zwischenzeitlich wieder geändert wurde, so wird die turbulente Schubspannung der Scherrate ständig verzögert nachfolgen. Das ist aber, unter geeigneten Phasenbeziehungen, nichts anderes als eine elastische Reaktion. Bei einer im Vergleich zur typischen Relaxationszeit eher langsamen Änderung von $\partial\bar{u}/\partial y$, wird aber die Schubspannung fast phasengleich der neuen Scherrate folgen können und es wird sich nahezu ein rein viskoses Verhalten zeigen. Insgesamt kann also bei

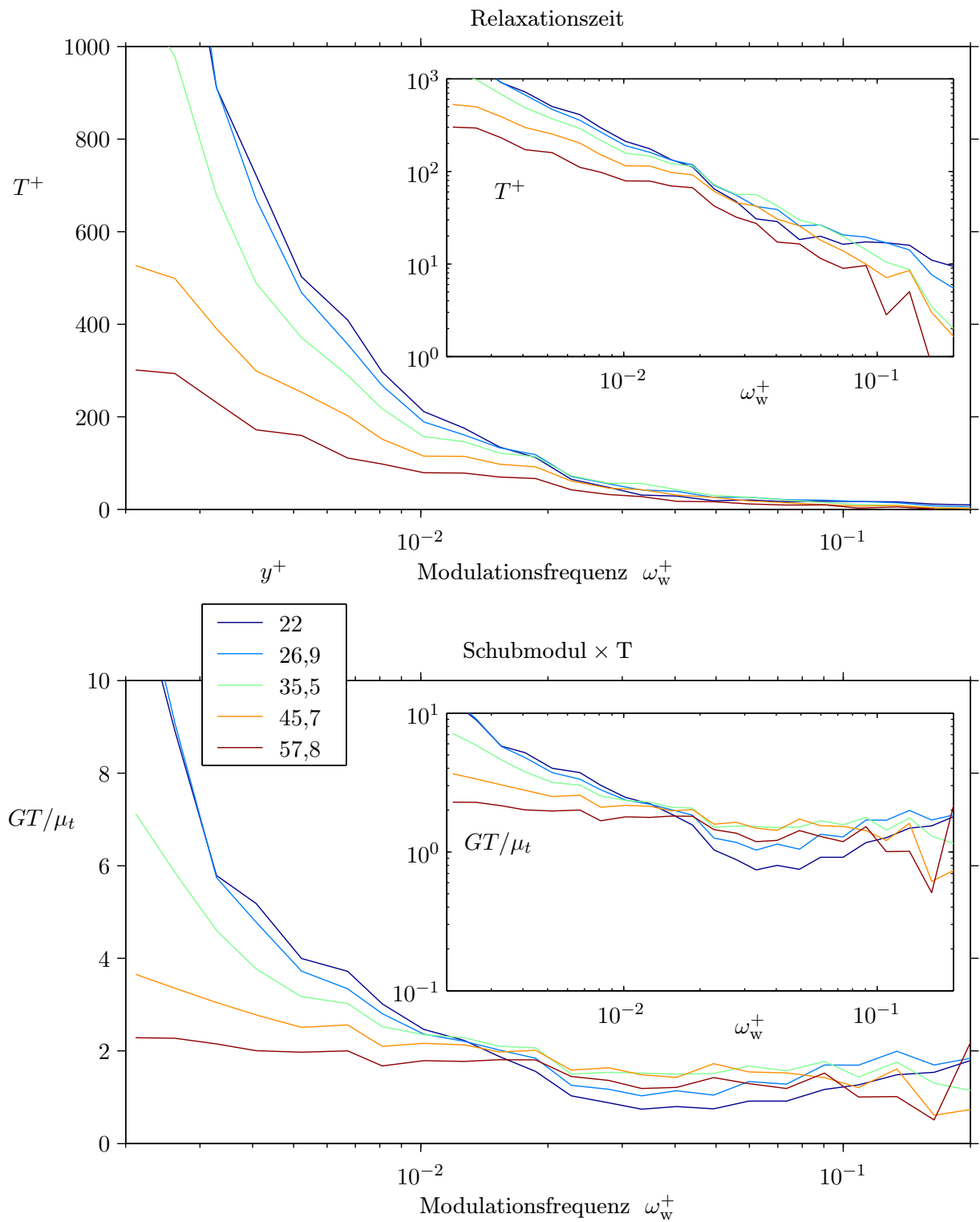


Abb. 6.25: Relaxationszeit T und »Viskosität« GT als Funktion der Modulationsfrequenz für verschiedene Wandabstände.

einer impulsartigen Anregung (Änderung der Scherrate), die ja alle Frequenzen enthält, für alle turbulenten Scherströmungen eine viskoelastische Reaktion vermutet werden.

Für eine mehr theoretische Erläuterung benötigt man eine Gleichung für die zeitliche Änderung der turbulenten Schubspannung. Eine solche Transportgleichung kann direkt aus der Navier-Stokes Gleichung abgeleitet werden. Dazu multipliziert man die Impulsgleichung für u' mit v' , die Impulsgleichung für v' multipliziert man mit u' , addiert beide Gleichungen und mittelt das Ergebnis. Dann ergibt sich folgende Transportgleichung:

$$\frac{\partial \langle u'v' \rangle}{\partial t} + \langle v'^2 \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} - \langle p' \left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right) \rangle + 2\nu \langle \frac{\partial u'}{\partial x_k} \frac{\partial v'}{\partial x_k} \rangle + \frac{\partial \langle u'(v'^2 + p') \rangle}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 \langle u'v' \rangle}{\partial y^2} = 0 \quad (6.13)$$

Neben dem Produktionsglied (zweiter Term) spielt vor allem die Druck-Scherraten-Korrelation (dritter Term) eine wichtige Rolle. Sie kann durchaus in der Größenordnung des Produktionsgliedes liegen, vermindert aber im Gegensatz dazu den Betrag der Reynoldsen-Schubspannung $\langle u'v' \rangle$ (Hinze S. 326). Die Druckschwankungen p' können in zwei Beiträge p'_M und p'_T aufteilt werden. Der Druck ist in der Navier-Stokes Gleichung keine unabhängige Größe, man kann ihn aus dem Geschwindigkeitsfeld berechnen¹⁰. p'_T sei der Anteil an p' der durch die konvektiven Beschleunigungen der Turbulenz durch das eigene Feld verursacht wird, also durch Wechselwirkungen von Geschwindigkeitsfluktuationen untereinander. p'_M resultiert aus den Wechselwirkungen der mittleren Strömung mit den Schwankungsbewegungen. Nach Rotta (1972) kann man damit folgende Abschätzung der Druck-Scherraten-Korrelation machen:

$$p'_M \left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right) \approx \frac{2}{5} k \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}. \quad (6.14)$$

Vernachlässigt man in Gleichung (6.13) die Diffusionsglieder und den Korrelationsanteil der von p'_T herrührt – das sind Dreierkorrelationen von Geschwindigkeitsschwankungen – dann erhält man folgenden funktionalen Zusammenhang zwischen der Scherrate und der turbulenten Schubspannung:

$$-\rho \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial t} = \rho (\overline{v'^2} - 2k/5) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}. \quad (6.15)$$

Der Vorfaktor der rechten Seite kann als eine Art Schubmodul $G \stackrel{\text{def}}{=} \rho (\overline{v'^2} - 2k/5)$ interpretiert werden. Wenn man nämlich bedenkt, dass sich im Mittel ein materieller Punkt in der Zeit ∂t um $\partial \xi = \bar{u} \partial t$ verschiebt, dann zeigt sich unmittelbar die Analogie zu einem elastischen Medium, denn die turbulente Schubspannung $\tau = -\rho \overline{u'v'}$ ändert sich nach Gleichung (6.15) gemäß

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = G \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right). \quad (6.16)$$

Wenn G als konstant angenommen wird, dann ist das gerade die zeitliche Ableitung des Hookeschen Elastizitätsgesetzes eines vollkommen elastischen Mediums.

In der turbulenten Strömung sind die Zusammenhänge allerdings wesentlich komplizierter, so wird sich G sicherlich nach längerer Wirkung der Scherrate zeitlich ändern. Auch kann man natürlich $p'_T (\partial u' / \partial y + \partial v' / \partial x)$ nicht vollkommen vernachlässigen und die Diffusionsglieder können außer in einer Integralbetrachtung nicht unberücksichtigt bleiben. Dennoch wird die elastische Reaktion einer turbulenten Scherströmung verständlich. Theoretisch genauer wurde das Problem von Crow (1968) untersucht, allerdings nicht für die Kanalströmung, sondern für turbulente Strömungen die nahezu

¹⁰ Die Geschwindigkeitsschwankungen von allen Orten des Strömungsfeldes tragen dabei zu den lokalen Druckschwankungen an einem Ort bei.

homogen und isotrop sind. Vor allem wurde angenommen, dass das mittlere Feld nur sehr schwach ist und die Turbulenz als fein granuliert¹¹ (fine grained) angesehen werden kann. Er konnte unter den Voraussetzungen auch für die substantielle Ableitung \overline{D}/Dt der Reynoldsspannungen ableiten, dass die Turbulenz auf eine beliebige Verformung zunächst elastisch reagieren sollte. Dabei bedeutet \overline{D}/Dt , dass für die Zeitableitung nur die Konvektion der mittleren Strömung berücksichtigt wird, für die Kanalströmung wäre das $\partial/\partial t + \bar{u}\partial/\partial x$. Die Viskoelastizität wird damit auch für konvektionsdominante stationäre Strömungen (zum Beispiel Grenzschichtströmungen) wichtig. Als Schubmodul G ergab sich in seinen Überlegungen übrigens ein Wert von $(4/15)k$, wobei k wieder die turbulente kinetische Energie ist.

6.4 Wandschubspannung

6.4.1 Modulierte Wandschubspannung

Für die Strömung ist die Ursache der Störung nicht die aufgeprägte Wandbewegung an sich, sondern die dadurch hervorgerufene Änderung der Schubspannung an der Wand. Die Impedanz zwischen diesen beiden Größen, also das Verhältnis des Wechselanteils der Wandschubspannung zum Wechselanteil der Wandgeschwindigkeit, ist nicht konstant, sondern abhängig von der Frequenz der Wandbewegung. Je nach Frequenz der aufgeprägten Wandoszillation wird die Wandschubspannung also mehr oder weniger stark moduliert, und damit eine Scherwelle mit mehr oder weniger großer Amplitude angeregt, die dann mit der Turbulenz innerhalb des Kanals wechselwirkt. Die relative Modulation der Wandschubspannung dient daher in der Regel auch als Normierungsgröße für fast alle betrachteten Modulationen. Gegenüber der Normierungen auf den Wechselanteil der Wandgeschwindigkeit, hat sie auch den Vorteil unabhängig vom Koordinatensystem zu sein.

Die Wandschubspannungsimpedanz ist bereits in Abschnitt 4.2 auf Seite 44 gezeigt. Für hohe Frequenzen ist die Impedanz viel größer als für kleine Frequenzen, das heißt, bei gleicher Wandamplitude ist die Amplitude der induzierten Scherwelle somit für hohe Frequenzen wesentlich größer als für kleine. Allerdings ist sie für hohe Frequenzen auch sehr viel stärker gedämpft.

Für sehr große Wandamplituden ändert sich die Impedanz leicht. Bei Tardu et al. (1994) zeigt sich für tiefe Frequenzen sogar eine kleine negative Phase, das heißt, die Wandschubspannung folgt der Wandbewegung nach. In der Simulation zeigt sich zwar auch ein Einfluss der Amplitude, aber eine negative Impedanz finden wir im betrachteten Frequenzbereich nicht.

6.4.2 Modulierte Wandschubspannungsfuktuationen

Die Haftbedingung sorgt dafür, dass in der Nähe von festen Wänden große Geschwindigkeitsgradienten auftreten. Die viskosen Spannungen dominieren die Strömung in diesem Bereich. Dennoch verschwindet die Turbulenz auch in unmittelbarer Wandnähe nicht vollkommen. Zwar kann es direkt an der Wand keine Schwankungen der Geschwindigkeit geben, aber an den Schwankungen

¹¹ Das heißt im Wesentlichen, dass die zweiten (und höheren) räumlichen Ableitungen der mittleren Strömung zu vernachlässigen sind und damit insbesondere, dass die Scherverformung der Turbulenz homogen sein soll, also konstant auf einem Raumbereich, der groß gegen die Ausdehnung der maßgeblichen Wirbel ist. Auch die Gleichung (6.14) enthält übrigens die implizite Annahme, dass Ableitungen höherer Ordnung der mittleren Strömung vernachlässigt werden können.

des wandnormalen Gradienten der Geschwindigkeit (Wandschubspannung) zeigt sich die Turbulenz auch direkt an der Wand.

Es gibt einige Methoden, um im Experiment direkt die Wandschubspannung zu messen. Die Reaktion der Turbulenz auf einen aufgeprägten oszillierenden Druckgradienten bzw. auf eine oszillierende Wand kann dann aus der Modulation der Wandschubspannungsfuktuationen ermittelt werden. Die primäre Ursache der Störung ($\widehat{\tau_w}$) wird dabei am selben Ort betrachtet, wie die Wirkung ($\widehat{\tau_w' \tau_w'}$), und man könnte annehmen, dass sich an der modulierten Wandschubspannungsfuktuation in gewisser Weise die direkteste Reaktion der Turbulenz auf die aufgeprägte Störung zeigt. Dieser Schluss wäre jedoch falsch, denn es ist umgekehrt so, dass die Wandschubspannungsfuktuationen durch Strömungsvorgänge oberhalb der Wand hervorgerufen werden, sodass zwischen der modulierten Schubspannung an der Wand und der modulierten Wandschubspannungsfuktuation noch komplizierte Transportprozesse beteiligt sind.

In zwei unabhängigen Experimenten (Mao & Hanratty 1986; Tardu & Binder 1993) hat sich gezeigt, dass mit steigender Modulationsfrequenz ω_w zwar zunächst erwartungsgemäß der Modulationsfaktor $m_{\tau_w' \tau_w'}(\omega_w)$ betragsmäßig immer kleiner wird, es dann aber, ab einer gewissen Frequenz, wieder zu einem Anstieg im Betrag kommt. Obwohl die Turbulenz mit steigender Frequenz immer weniger Zeit hat auf die Störung zu reagieren, zeigten die Messwerte, in einem gewissen Frequenzbereich, ein stetiges Anwachsen der modulierten Schwankungsbewegungen.

In keiner unserer Simulationen konnten wir diesen ungewöhnlichen Effekt beobachten. Vielmehr zeigten alle Daten für hohe Frequenzen den erwarteten stetigen Abfall der Modulation der turbulenten Wandschubspannungsfuktuationen mit steigender Frequenz. In Abbildung 6.26 ist der Betrag und die Ortskurve des komplexen Modulationsfaktors $m_{\tau_w' \tau_w'}(\omega_w)$ zu sehen. Die Messwerte von Mao & Hanratty (1986) und Tardu & Binder (1993) sind mit in die Abbildung eingezeichnet. Die Differenz zu den Simulationsergebnissen bei den hohen Frequenzen ist gut zu erkennen. Um die Unterschiede zwischen der Simulation und den Experimenten zu diskutieren, ist in der Ortskurvendarstellung eine Spirale mit eingezeichnet, der die Messwerte von Tardu & Binder (1993) in etwa folgen. Eine derartige Spirale ist typisch für die Reaktion eines aus einem Tiefpassfilter und einer Zeitverzögerung bestehenden Systems. Die Spirale konvergiert allerdings auf eine Amplitude ungleich Null. Daraus kann man folgern, dass die gemessene Reaktion von $\widehat{\tau_w' \tau_w'}$ eine Summe der Reaktion eines Tiefpasssystems mit gewissen Zeitverzögerungen und einer direkten breitbandigen Reaktion darstellt. Der Konvergenzpunkt der Spirale (mit Phase Null) charakterisiert dabei die Amplitude der Reaktion auf die hohen Frequenzen. Die Simulationsergebnisse zeigen für hohe Modulationsfrequenzen einen auch qualitativ anderen Verlauf als die Messwerte. Der Konvergenzpunkt liegt wie erwartet im Ursprung. Zunächst läuft die Kurve aber auf einen Punkt zu, der etwas unterhalb des Ursprungs auf der negativen imaginären Achse liegt. Sie nähert sich dann in einer zweiten sehr schmalen Spirale – nahezu entlang der imaginären Achse – dem Ursprung.

Für tiefe Modulationsfrequenzen kann man – im quasistationären Grenzfall – einen Modulationsfaktor vom Betrag zwei erwarten, denn es gilt in linearer Näherung (siehe unten): $\widehat{\tau_w' \tau_w'_{qs}} = 2\widehat{\tau_w'_{qs}}$. Werden die Amplituden der Anregung aber groß, ist die lineare Näherung immer schlechter erfüllt. Der Modulationsfaktor $m_{\tau_w' \tau_w'}(\omega_w)$ liegt für große Amplituden der Anregung durchgängig unterhalb des Falles, bei dem ein vollkommen lineares Verhalten angenommen werden darf, er konvergiert insbesondere für $\omega_w \rightarrow 0$ nicht gegen den quasistationären Erwartungswert von zwei. Die gestrichelte Kurve in Abbildung 6.26 gehört zu einer Simulationsreihe mit recht kleinen Amplituden (15% der Durchflussgeschwindigkeit), sie konvergiert für tiefe Frequenzen in etwa auf den Wert zwei, während die durchgezogene Kurve zu einer Simulationsreihe mit recht großen Amplituden (60% der

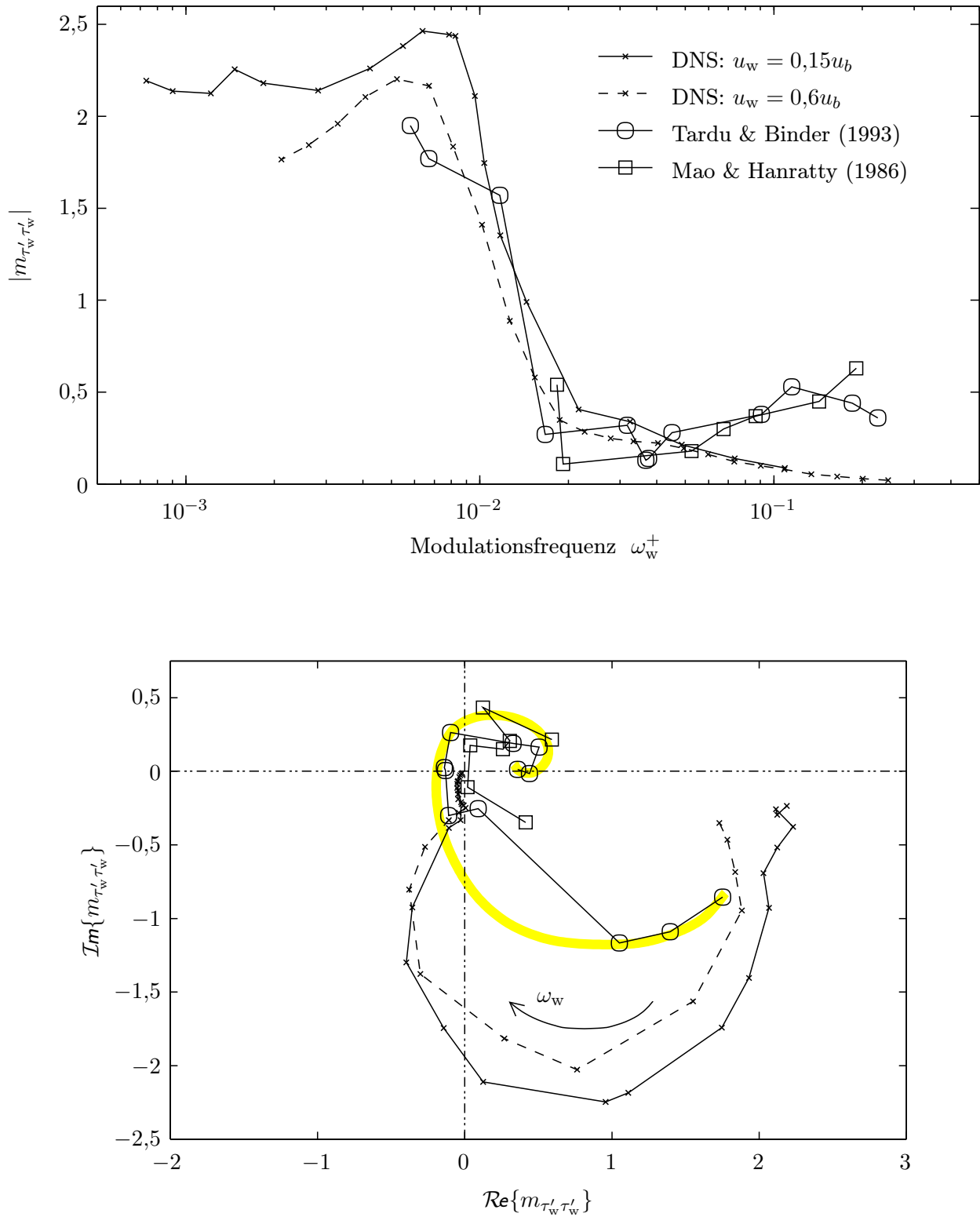


Abb. 6.26: Modulationsfaktor der Wandschubspannungsfuktuationen nach Betrag (oben) und in der Ortskurvendarstellung (unten) als Funktion der Modulationsfrequenz.

Durchflussgeschwindigkeit) gehört und, vor allem für tiefe Frequenzen, betragsmäßig unterhalb der gestrichelten Kurve verläuft.

Die verwendete Beziehung $\widehat{\tau'_w \tau'_{wqs}} = 2\widehat{\tau'_{wqs}}$ lässt sich folgendermaßen herleiten: Nach dem universellen Wandgesetz ist im stationären Fall sowohl \bar{u}^+ , als auch $\overline{u'^2}/u_\tau^2$ eine Funktion allein von y^+ , sodass für das Quadrat des Turbulenzgrades $\overline{u'^2}/\bar{u}^2 = f(y^+)$ gilt. Für den quasistationären Grenzfall hat man daher entsprechend $\langle u'^2 \rangle / \langle u - u_w \rangle^2 = f(\langle y^+ \rangle) = \langle u_\tau \rangle y / \nu$. Die universelle Funktion $f(y^+)$ ist in Wandnähe nahezu konstant (vergleiche etwa Abbildung 5.12 auf Seite 59), sodass ausgeschrieben folgendes gilt:

$$\frac{\overline{u'^2} + \widetilde{u'^2}}{\bar{u}^2 + (\bar{u} - \bar{u}_w)^2 + 2\bar{u}(\bar{u} - \bar{u}_w)} \approx \text{const.} \quad (6.17)$$

Für kleine Anregungsamplituden gilt $\bar{u} - \bar{u}_w \ll \bar{u}$, sodass das quadratische Glied vernachlässigt werden kann. Es ergibt sich schließlich:

$$\frac{\widetilde{u'^2}}{\overline{u'^2}} = 2 \frac{\bar{u} - \bar{u}_w}{\bar{u}}. \quad (6.18)$$

Somit gilt $a_{u'u',qs} = 2a_{u-u_w,qs}$ und entsprechend auch $\widehat{\tau'_w \tau'_{wqs}} = 2\widehat{\tau'_{wqs}}$.

6.5 Modulation von Amplitudenverteilungen

Unabhängig von den spektralen Eigenschaften der Geschwindigkeitskomponenten, die die räumliche Verteilung widerspiegeln und ausführlich im nächsten Kapitel behandelt werden, ist die Verteilung ihrer Amplituden. Dabei kommt es nicht auf die räumliche (oder zeitliche) Anordnung der Amplitudenwerte, sondern auf die Wahrscheinlichkeit ihres Vorkommens in der Strömung an. Eine Änderung im Spektrum bewirkt im Allgemeinen auch eine Änderung in der Amplitudenverteilung (Wahrscheinlichkeitsdichte), und umgekehrt. Dennoch können zwei Signale durchaus gleiche Leistungsspektren, aber sehr unterschiedliche Amplitudenverteilungen haben oder gleiche Amplitudenverteilungen aber ganz unterschiedliche Leistungsspektren. Die Untersuchung von modulierten Amplitudenverteilungen gestattet somit einen erweiterten Einblick in die Reaktion der Turbulenz auf die aufgeprägte Störung.

Die Leistung eines Signals findet sich sowohl im Leistungsspektrum, als auch in der Amplitudenverteilung. Greift man die häufig betrachtete axiale Geschwindigkeitskomponente als Beispiel heraus, so gilt:

$$u_{\text{eff}}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} E_u(k) dk = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 pdf_u(u) du. \quad (6.19)$$

Dabei steht k symbolisch für eine Frequenz, das kann zum Beispiel die Raumfrequenz k_x oder k_z sein oder auch die Zeitfrequenz ω . Bereits eine Modulation der Leistung der Schwankungsbewegungen liefert somit eine Modulation des Spektrums und der Amplitudenverteilung. Dieser Effekt kann sowohl für die Spektren, als auch für die Amplitudenverteilungen getrennt von der Modulation der Form untersucht werden. Für die Amplitudenverteilung werden dazu die phasenabhängigen Einzelverteilungen auf den jeweiligen Effektivwert dieser Phase normieren. Zeigt sich dann immer noch eine Modulation, so ist diese unabhängig von der Modulation der Signalleistung, deren Modulation bereits weiter oben untersucht worden ist.

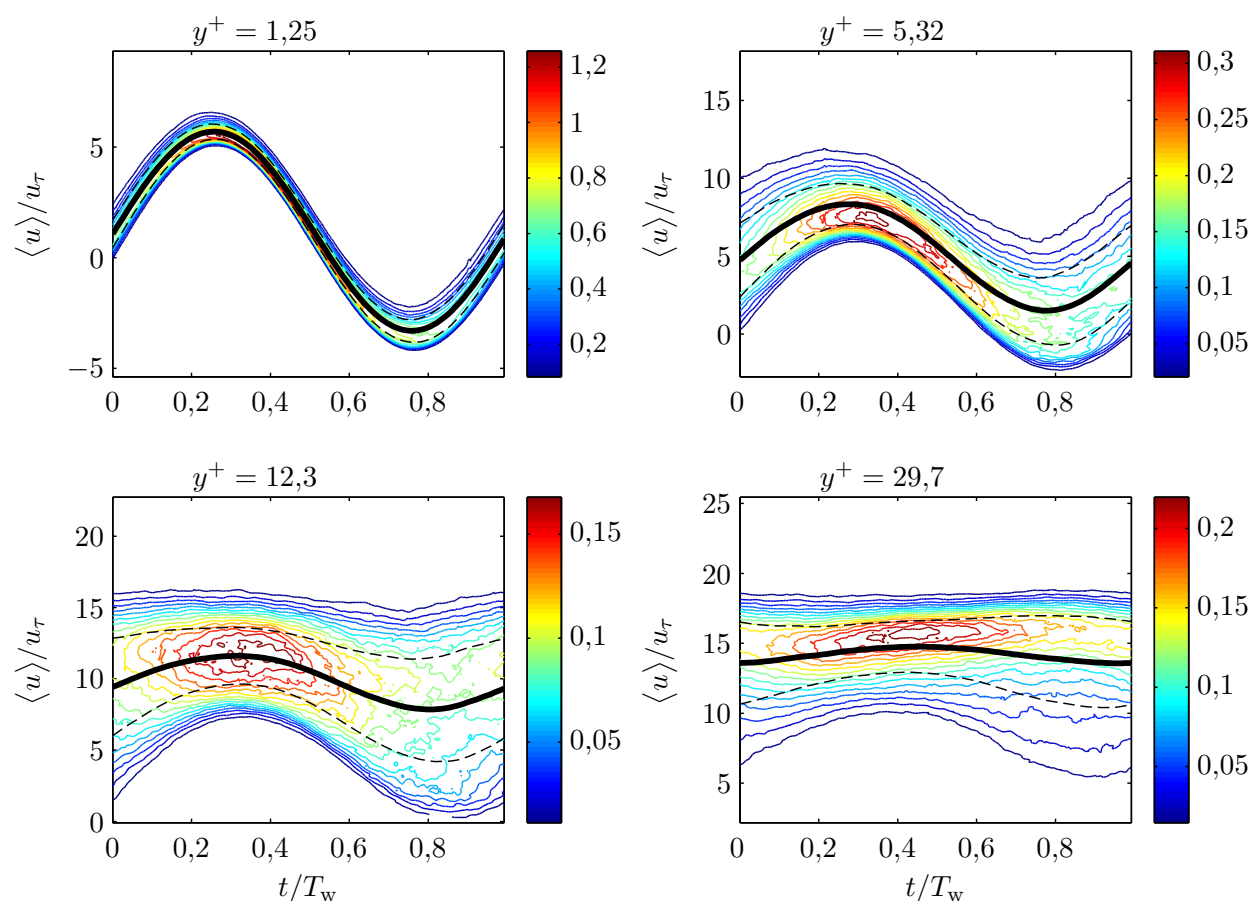


Abb. 6.27: Phasengemittelte Amplitudenverteilungen der axialen Geschwindigkeitskomponente. Die schwarzen Kurven zeigen die ersten Momente (Mittelwerte) der Verteilungen. Addiert oder subtrahiert man zum bzw. vom Mittelwert die phasenabhängigen Effektivwerte (Wurzel aus den zweiten Zentralmomenten), gelangt man zu den gestrichelten Kurven. $\omega_w^+ \approx 0,97 \cdot 10^{-2}$.

6.5.1 Phasenabhängige Amplitudenverteilungen der Geschwindigkeit

In Abbildung 6.27 sind die phasengemittelten Amplitudenverteilungen der axialen Geschwindigkeitskomponente u für verschiedene Wandabstände zu sehen. Die Modulationsfrequenz war in dem gezeigten Beispiel $\omega_w^+ \approx 0,97 \cdot 10^{-2}$ und lag damit in einem Frequenzbereich, für den deutliche Wechselwirkungen zwischen der induzierten Störung und der Turbulenz zu erwarten sind, insbesondere auch deshalb, weil die Modulationsamplitude mit $4,9u_\tau$ vergleichsweise groß war. Zur Bestimmung der phasengemittelten Amplitudenverteilungen wurde für 128 Phasen der Wandperiode mittlere Häufigkeitshistogramme erstellt. Eine Einteilung der Perioden in Intervalle war nicht nötig, um ausreichend glatte Verteilungen zu erhalten, sodass damit jeder der 128 Verteilungen eine eindeutige Phase zugeordnet ist.

Die in Abbildung 6.27 dargestellten Verteilungen zeigen eine deutliche Phasenabhängigkeit. So fällt auf, dass wenn der phasenabhängige Mittelwerte der Geschwindigkeit groß ist, die Verteilungen vergleichsweise schmal und hoch sind. Breite und flache Verteilungen ergeben sich für die Phasen,

bei denen die mittlere Geschwindigkeit klein ist. Dazu ist jedoch anzumerken, dass die gezeigten Verteilungen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen sind, sodass für alle Phasen

$$\int pdf_u(u) du = 1 \quad (6.20)$$

gilt. Breite Verteilungen werden damit automatisch flach. Abgesehen von der Normierung mit u_τ sind die Verteilungen in Abbildung 6.27 jedoch nicht weiter normiert, insbesondere nicht auf den phasenabhängigen Effektivwert. Das wäre für die Verteilung $pdf_u(u)$ auch nicht sinnvoll, denn darin ist noch der (phasenabhängige) Mittelwert von u enthalten.

Normiert man jedoch die Verteilungen der turbulenten Schwankungen $u' = u - \langle u \rangle$ auf die phasenabhängigen Effektivwerte $u_{\text{eff}}(\varphi)$ und läßt somit die Modulation der Gesamtleistung ausser acht, dann zeigt sich nur eine sehr kleine Modulation. Die von der Wandphase φ abhängigen Verteilungen $pdf_{u'}(u', \varphi)$ erhält man direkt aus den in Abbildung 6.27 gezeigten Einzelverteilungen $pdf_u(u, \varphi)$:

$$pdf_{u'}(u', \varphi) = pdf_u(\langle u \rangle(\varphi) + u', \varphi) \quad \text{mit} \quad \langle u \rangle(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} u pdf_u(u, \varphi) du. \quad (6.21)$$

In Abbildung 6.28 sind die auf die phasenabhängigen Effektivwerte

$$u_{\text{eff}}(\varphi) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} u'^2 pdf_{u'}(u', \varphi) du' \right)^{-1/2} \quad (6.22)$$

normierten Verteilungen der turbulenten Schwankungen gezeigt.

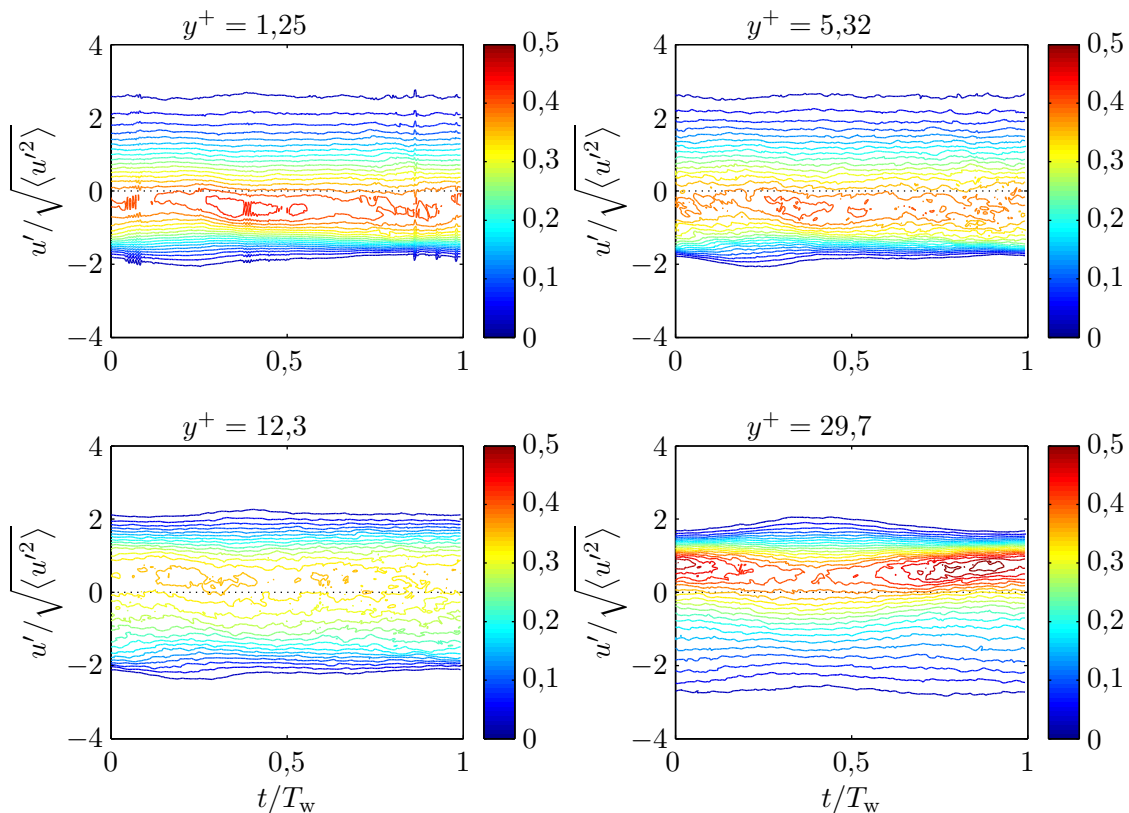


Abb. 6.28: Phasengemittelte Amplitudenverteilung der axialen Schwankungskomponente (normiert auf den phasenabhängigen Effektivwert). $\omega_w^+ \approx 0,97 \cdot 10^{-2}$.

Die so normierten Verteilungen lassen kaum eine Änderung mit der Wandphase erkennen. Abgesehen von der modulierten Gesamtleistung, ist die Verteilung der Schwankungsamplituden offenbar wenig durch die Störung zu beeinflussen. Das gilt auch für v' und w' und für die Verteilungen der zeitlichen Ableitungen. Die Amplitudenverteilungen der räumlichen Ableitungen wurde nicht untersucht. Für die Ableitungen in Strömungsrichtung kann nach der Taylorhypothese aber angenommen werden, dass sie sich im wesentlichen so wie die Verteilungen der im ruhenden Koordinatensystem »gemessenen« zeitlichen Ableitungen verhalten.

Die Abbildung 6.28 lässt zwar keine nennenswerten Modulationen erkennen, es kann daraus aber noch nicht gefolgert werden, dass die relativen Modulationen bzw. die Modulationsfaktoren überall klein sind.

6.5.2 Modulationsfaktoren der Schwankungsamplituden

Aus der phasengemittelten Amplitudenverteilung $pdf(u')$ ¹² kann für alle Amplitudenwerte die erste Harmonische bezüglich der Wandoszillation berechnet werden. Bezieht man wie üblich diese komplexe Amplitude auf den Gleichwert und auf die relative Modulation der Wandschubspannung, dann kann für jeden Amplitudenwert u' der Verteilung ein Modulationsfaktor angegeben werden:

$$m_{pdf}(u') = \frac{\widehat{pdf}(u')}{pdf(u')} / \frac{\widehat{\tau}_w}{\bar{\tau}_w}. \quad (6.23)$$

Die Modulationsfaktoren sind für $y^+ = 12$ in Abbildung 6.29 zu sehen. Sie sind aus den phasengemittelten Einzelverteilungen berechnet worden, zum Vergleich einmal, nachdem jede Verteilung zuvor auf den stationären Effektivwert normiert wurde, und einmal, nachdem jede Verteilung zuvor auf den phasenabhängigen Effektivwert normiert wurde. Im ersten Fall (linker Teil der Abbildung 6.29) enthalten die Modulationsfaktoren damit die Modulation der Gesamtleistung, im zweiten Fall dagegen nicht. Die obere linke Abbildung zeigt zusätzlich die mittlere Verteilung von u' beim gewählten Wandabstand im Vergleich mit dem Betrag der ersten Harmonischen. Der Betrag $|\widehat{pdf}(u')|$ selbst ist zwar abhängig von der Wandamplitude, die in diesem Fall $0,3u_b$ war, wurde hier aber zur Verdeutlichung der Größenverhältnisse mit eingezeichnet.

Die modulierte Gesamtleistung wirkt sich für die u' -Verteilung so aus, dass sowohl die positiven Werte, als auch die negativen Werte einen deutlichen Einbruch in der Modulation zeigen. Die Minima liegen bei u' -Werten, die in etwa dem stationären Effektivwert u_{eff} entsprechen. Die Phase des Modulationsfaktors springt dabei jeweils um π . Offenbar werden die Seitenarme der Verteilung jeweils gleichphasig aber gegenphasig zum Bereich $-u_{\text{eff}} < u' < u_{\text{eff}}$ moduliert. Das wird auch erwartet, da das Integral über die Verteilungen zu jeder Phase auf eins normiert ist und daher beispielsweise die gesamte Verteilung nicht gleichphasig moduliert werden kann. Große Fluktuationsamplituden reagieren mit kürzeren Phasenverzögerungen als die kleineren. Auch werden die großen Amplitudenwerte sehr stark moduliert, wenn die Modulation auf die jeweiligen Gleichwerte normiert wird.

Im rechten Teil der Abbildung 6.29 ist die Modulation der auf ein konstantes zweites Moment normierten Verteilung zu sehen. Die Modulationsfaktoren sind wesentlich kleiner als im linken Teil. Dennoch steigt die Modulation für die großen Amplitudenwerte wieder deutlich an. Die Werte sind in

¹² Der kennzeichnende Index wird hier und im Folgenden meist eingespart (siehe Anmerkungen im Abschnitt 5.7 auf Seite 61).

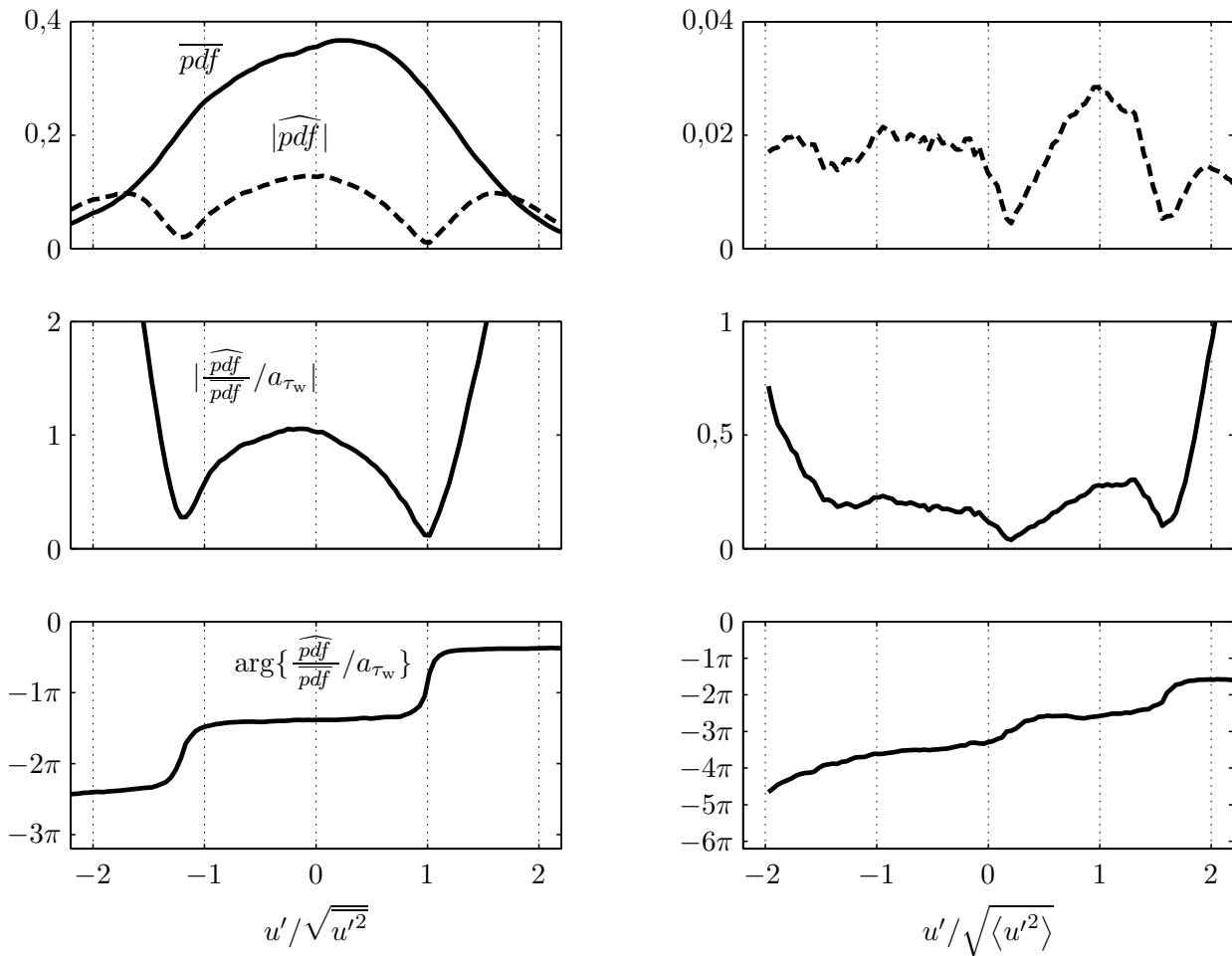


Abb. 6.29: Modulation der Wahrscheinlichkeitsdichte der axialen Schwankungsbewegungen u' beim Wandabstand $y^+ = 12$. Die u' -Amplituden sind in der linken Spalte auf den stationären Effektivwert bezogen, in der rechten Spalte auf den phasenabhängigen Effektivwert.

diesem Bereich jedoch mit erheblichen Unsicherheiten behaftet, denn die Wahrscheinlichkeitsdichten sind dort insgesamt sehr klein. Auffällig ist aber, dass die Phasen einem recht klaren Trend folgen, selbst dort, wo die Amplituden bereits sehr klein sind. Auch erkennt man bei etwa $u' \approx 0$ ein klares Minimum im Betrag des Modulationsfaktors.

Ähnlich wie die Amplitudenverteilung von u' wird die Verteilung der zeitlichen Ableitung du'/dt moduliert. So ist der Anteil der Modulation, der nicht auf die Modulation des Effektivwerts zurückgeführt werden kann, auch für $pdf(du'/dt)$ sehr klein. Die von Flötke (1987) experimentell ermittelten Modulationsfaktoren stimmen im Wesentlichen mit denen der Simulation überein, sodass auf eine weitere Analyse hier verzichtet werden kann. Es gibt jedoch keine experimentellen Daten zur Modulation der wandnormalen und spannwitigen Geschwindigkeitskomponente, insofern ist hier mit den Simulationenwerten eine wichtige Ergänzung geschaffen.

Die Modulationsfaktoren von $pdf(v')$ und $pdf(w')$ sind für verschiedene y -Positionen des wandnahen Bereichs in Abbildung 6.30 im Vergleich mit $m_{pdf(u')}$ zu sehen. Im linken Teil sind die Geschwindigkeiten auf die stationären Effektivwerte bezogen, im rechten Teil sind sie mit den phasenabhängigen

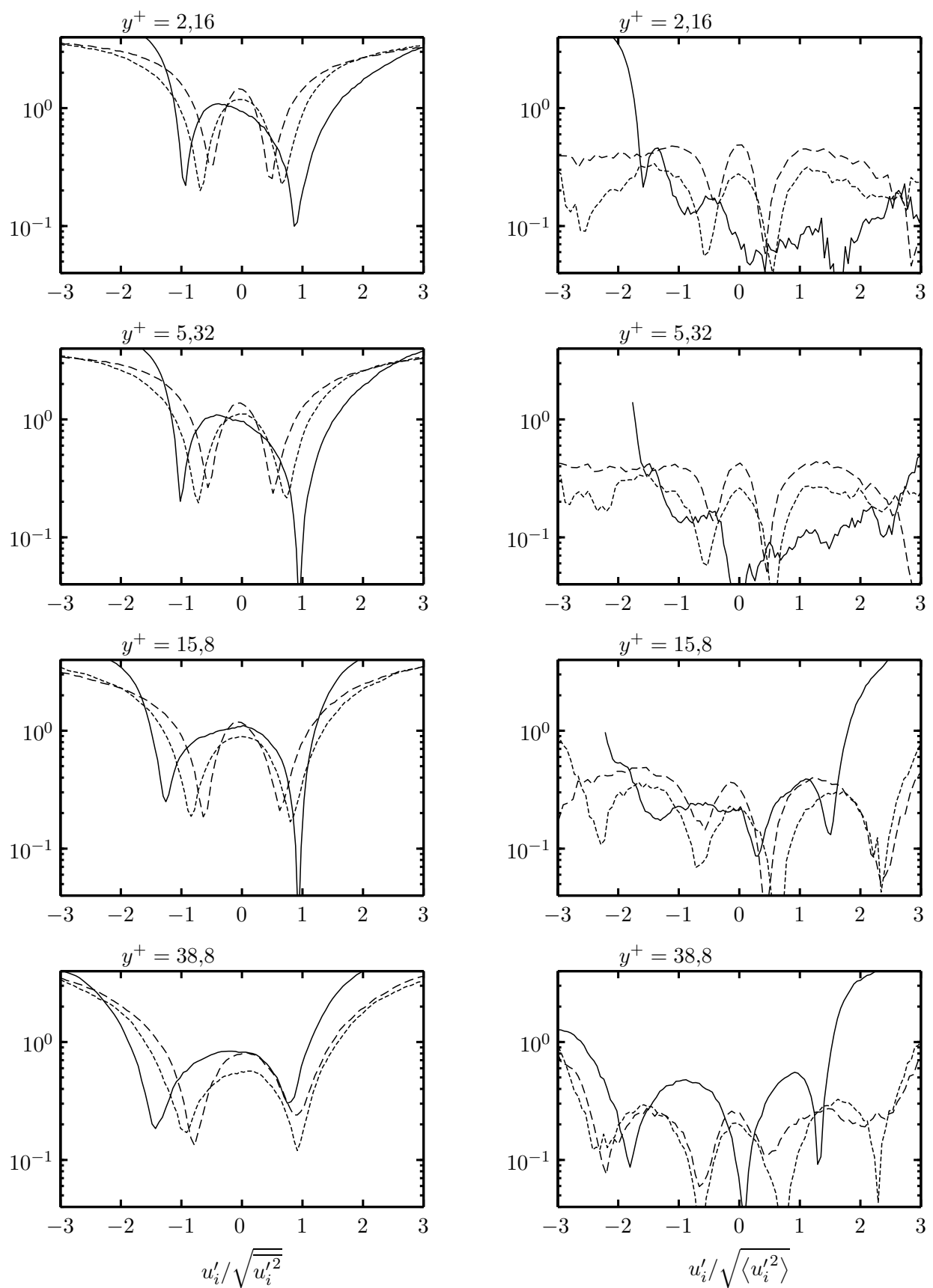


Abb. 6.30: Modulierte Wahrscheinlichkeitsdichten der drei Geschwindigkeitskomponenten u' , v' und w' bei diverse Wandabstände; links auf den stationären Effektivwert und rechts auf den phasenabhängigen Effektivwert bezogen. Modulationsfrequenz: $\omega_w^+ = 0,973 \cdot 10^{-2}$.

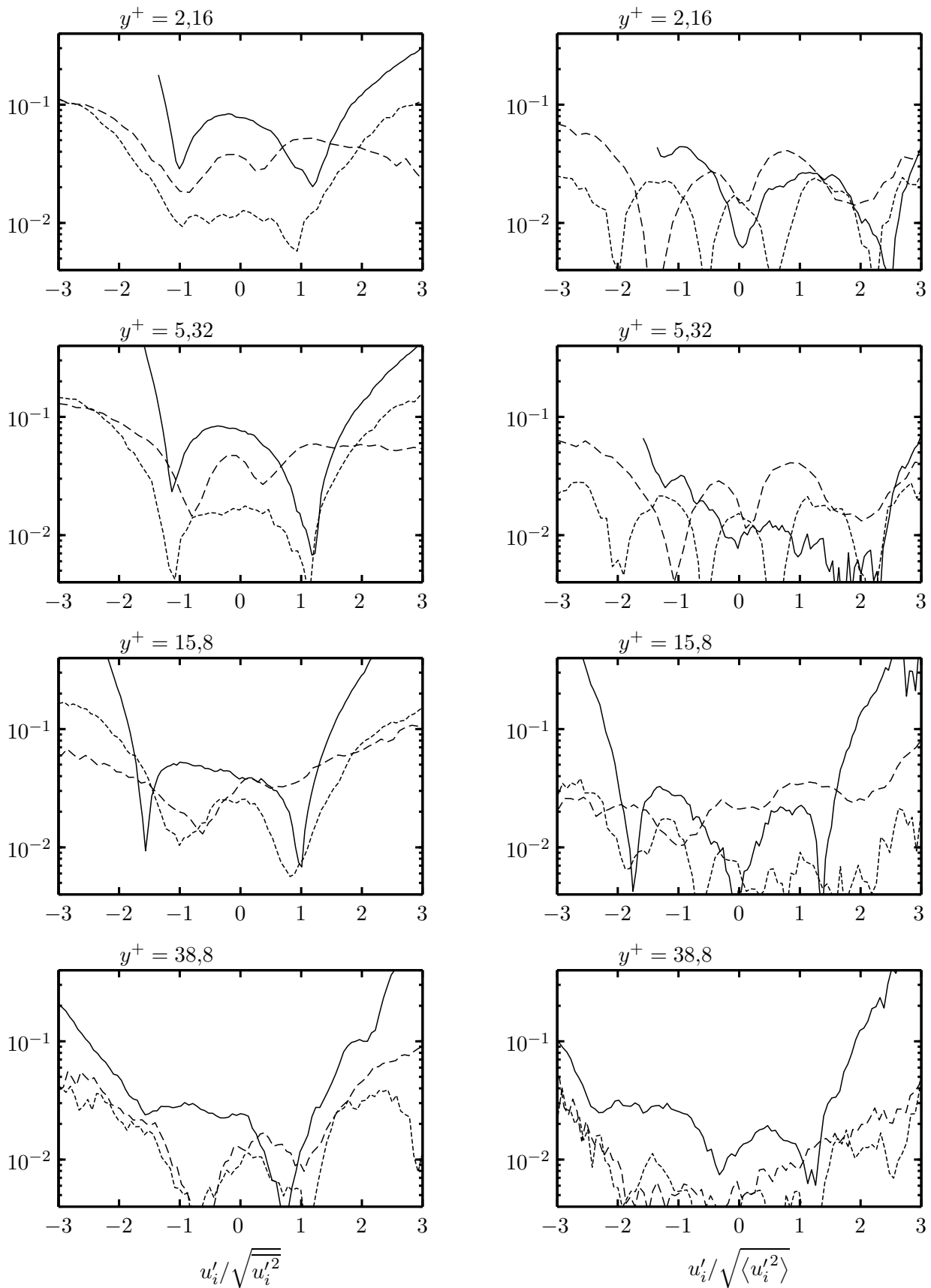


Abb. 6.31: Modulierte Wahrscheinlichkeitsdichten der drei Geschwindigkeitskomponenten u' , v' und w' bei diverse Wandabstände; links auf den stationären Effektivwert und rechts auf den phasenabhängigen Effektivwert bezogen. Modulationsfrequenz: $\omega_w^+ = 7,34 \cdot 10^{-2}$. (Legende wie Abbildung 6.30).

Effektivwerten normiert. Die gleichen Auftragungen für eine etwa 7,5 mal höhere Modulationsfrequenz ($\omega_w^+ = 7,34 \cdot 10^{-2}$) sind in der Abbildung 6.31 dargestellt. Man beachte beim Vergleich der zu den beiden unterschiedlichen Modulationsfrequenzen zugehörigen Modulationsfaktoren, dass die Maßstäbe in beiden Fällen unterschiedlich sind.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass die Modulation aller Verteilungen primär durch Modulation der zugehörigen Effektivwerte hervorgerufen werden. Eine darüber hinausgehende (sekundäre) Modulation ist zwar vorhanden, aber im Allgemeinen sehr klein. Der »sekundäre« Effekt weist zwar einige Systematik auf, insbesondere wenn man die hier nicht dargestellten Phasenverläufe berücksichtigt, er erweist sich aber als sehr komplex und weit weniger einheitlich als die durch den modulierten Effektivwert bedingte Modulation. Auch hat sich gezeigt, dass nichtlineare Effekte selbst bei der relativ kleinen Wandamplitude von $u_w = 0,15u_b$ nicht ganz vernachlässigt werden können. So findet man im sekundären Effekt häufig ein lokales Maximum für solche Amplitudenwerte, bei denen der primäre Effekt nahezu keine Modulation zeigt. Genau bei diesen Werten finden sich aber nennenswerte Beiträge der höheren Harmonischen des Phasenmittels, sodass die Auswertung mit einer linearen Methode fraglich wird.

Insgesamt können aber die Wahrscheinlichkeitsdichten aller Geschwindigkeitskomponenten als sehr stabile Eigenschaften der Turbulenz angesehen werden. Sie lassen sich in ihrer Form durch die Störung nur wenig beeinflussen. Ein möglicher Ansatz Strukturelemente der Turbulenz über Verhältnisse von Geschwindigkeitsfluktuationen zu definieren, scheint daher erfolgversprechender, als eine Charakterisierung über die räumliche Verteilung dieser Geschwindigkeiten. Denn wie das folgende Kapitel zeigen wird, werden die spektralen Eigenschaften viel stärker moduliert als die hier gezeigten Amplitudenverteilungen.

7 Spektren und Korrelationen

Die räumliche Struktur der Turbulenz wird in dieser Arbeit aus den in der Simulation relativ einfach zugänglichen räumlichen Spektren bzw. Korrelationen der Geschwindigkeitsfluktuationen bestimmt. Dabei sollte beachtet werden, dass in den homogenen Richtungen x und z sämtliche Phaseninformationen einzelner Frequenzen bei der Bildung der Leistungsspektren verloren gehen¹. Die Korrelationsfunktionen dürfen nicht mit »echten« Strukturen verwechselt werden, sondern sie spiegeln »nur« die mittlere räumliche Verteilung der Geschwindigkeiten wider.

Interessant für unsere Untersuchungen ist insbesondere die zeitliche Modulation der räumlichen Struktur der Turbulenz. Dazu wurden räumlich eindimensionale und zweidimensionale Spektren ausgewertet, einschließlich ihrer zeitlichen Modulationen. Desweiteren sind teilweise zeitliche und begrenzt räumlich-zeitliche Spektren berechnet worden. Dabei haben wir sowohl die Autospektren aller drei Geschwindigkeitskomponenten, als auch das Kreuzspektrum zwischen u' und v' untersucht. Zusätzlich wurden die Spektren in Korrelationsfunktionen umgerechnet. Diese enthalten zwar dieselben Informationen wie die dazugehörigen Spektren, sie sind aber teilweise anschaulicher, oder bieten eine erweiterte Sicht auf die Effekte. Zur Notation sei noch Folgendes vereinbart: Es gilt

\vec{r} Verschiebungsvektor; $\vec{r} = (r_x, r_z)^T$

\vec{k} Wellenzahl (auch: Raumfrequenz); $\vec{k} = (k_x, k_z)^T = (2\pi/\lambda_x, 2\pi/\lambda_z)^T$

ω (Zeit)frequenz; $\omega = 2\pi/\text{Periodendauer}$

R räumliche Korrelation

E räumliches Spektrum

Durch die periodischen Randbedingungen, erhält man diskrete Raumspektren:

$$E(k_x) = \sum_l E_l \delta(k_x/(2\pi) - l/L_x) \text{ und } E(k_z) = \sum_m E_m \delta(k_z/(2\pi) - m/L_z)$$

Dabei sind l und m ganze Zahlen (Frequenzindizes).

S zeitliches Spektrum

7.1 Vorbemerkungen

7.1.1 Spektrale Eigenschaften im realen Experiment

In realen Experimenten ist es im Allgemeinen sehr aufwändig oder teilweise unmöglich, räumliche Spektren bzw. Korrelationen zu messen. Man kann zwar beispielsweise mittels der »Particle Image Velocimetry« auch gleichzeitig an vielen Orten messen, aber besonders im wandnahen Gebiete ist dieses Messverfahren meist nicht anwendbar – auch ist die zeitliche Auflösung für den instationären

¹ Kreuzspektren haben allerdings eine Phase, die das Verhältnis des gemittelten Imaginärteils zum gemittelten Realteil vom Produkt der Amplitudenspektren der beteiligten Signale beschreibt.

Fall nicht ausreichend. Die meisten experimentellen Arbeiten sind daher auf Zeitsignale angewiesen, die an einigen wenigen Orten gemessen wurden (typischerweise mit Heissfilmen und Hitzdrähten oder Laser Doppler Anemometern). Für eine Anzahl von Sondenabständen kann man so Korrelationswerte ermitteln. So hat Beykirch (1996) bei spannungweichter Separation der Sonden räumliche Korrelationen gemessen, insbesondere auch für die instationäre Strömung. Mehrfachsonden bereiten aber, durch ihre geometrischen Abmessungen, häufig messtechnische Probleme, vor allem in der Nähe einer Wand. Ein Problem von Korrelationsmessungen bei denen die Orte zweier Sonden nur in Strömungsrichtung verschieden sind ist, dass sich die stromabwärts positionierte Sonde immer im Nachlauf der anderen Sonde befindet. Dies stört insbesondere bei kurzen Abständen. Mittels der Taylorhypothese kann man in diesem Fall versuchen aus zeitlichen Korrelationen (die mit einer Einfachsonde bestimmt werden können) die räumlichen Korrelationen zu berechnen.

Wird die Strömung zeitlich moduliert, so ergibt sich die *prinzipielle* Schwierigkeit, wie man die resultierende Modulation der Zeitspektren bestimmen soll. Man müsste im Prinzip zu jedem Phasenzeitpunkt der Wand ein Spektrum bestimmen. Um aber ein zeitliches Spektrum bzw. die zugehörige zeitliche Korrelationsfunktion zu ermitteln, muss man immer Zeitintervalle betrachten. Man kann die Unschärferelation »Frequenzauflösung \times Zeitauflösung > 1 « nicht umgehen. Einen Ausweg bietet die Wigner-Verteilung (Claasen & Mecklenbräucker 1980), die in gewisser Weise eine optimale Möglichkeit bietet, die spektralen Eigenschaften eines Signals zeitaufgelöst darzustellen. Mit Hilfe der phasenstarr gemittelten Wigner-Verteilung haben Hesse (1995) und Beykirch (1996) die zeitlichen Turbulenzsignale der axialen Geschwindigkeitskomponente einer modulierten Kanalströmung analysiert. Die Interpretation der Ergebnisse ist aber mit einigen Schwierigkeiten verbunden, denn die Wigner-Verteilung lässt sich nicht direkt als Kurzzeitspektrum deuten. Sie kann negativ werden und es können im Allgemeinen auch Interferenzterme auftreten. Echte Kurzzeitspektren erhält man nur durch Faltung der Wigner-Verteilung mit geeigneten Gewichtsfunktionen, wobei dann aber wieder die Unschärferelation zur Geltung kommt.

Nur in eingeschränkter Weise bietet hier die Taylorhypothese eine Möglichkeit, einen Zusammenhang zwischen der zeitlichen Struktur des Turbulenzsignals und der räumlich-zeitlichen Struktur der Turbulenz herzustellen. Viele experimentelle Arbeiten beruhen auf dieser Hypothese, also der Vorstellung, dass ein quasi eingefrorenes räumliches Strömungsmuster (zum Beispiel $U(x)$ bzw. $P(x)$) mit einer Konvektionsgeschwindigkeit u_c an der Messposition vorbeikonvektiert. Das Muster kann sich unter zeitlich variablen Randbedingungen auch synchron mit den Randbedingungen ändern²: $U = U(x, t)$, so die erweiterte Annahme bei instationären Strömungen. Bei ruhendem Koordinatensystem misst man im Zeitsignal dann sowohl die »echte« zeitliche Änderung des Musters (das ist der interessante Teil, den man gern extrahieren möchte), als auch ein Abbild des räumlichen Musters: $u_{\text{mess}}(t) = U(-u_c t, t)$. Leider gibt es keine Möglichkeit, allein aus dem so erhaltenen Zeitsignal in eindeutiger und unmittelbarer Weise die zeitliche Modulation des räumlichen Spektrums zu ermitteln³. Misst man an einem festen Ort die Geschwindigkeit, so kann man nicht zwischen einer Änderung durch Konvektion und einer echten zeitlichen Änderung des räumlichen Musters unterscheiden. Auch ist die Konvektionsgeschwindigkeit im instationären Fall selbst moduliert ($u_c = u_c(t)$). Das erschwert zusätzlich die Umrechnungen zwischen Zeit- und Raumspektren. Mit Hilfe der numerischen Simulation ist es aber möglich, direkt die räumlichen Spektren und vor allem deren zeitliche Modulationen zu analysieren. Die Taylorhypothese ist nicht notwendig, ihre Gültigkeit kann vielmehr

² Das große U steht hier für die Geschwindigkeit im mitbewegten Koordinatensystem.

³ Nicht einmal das zeitliche Gleichspektrum $S_U(\omega)$ des mitbewegten Systems kann aus dem Zeitspektrum $S_u(\omega)$ des ruhenden Systems bestimmt werden, denn dazu benötigt man das räumlich-zeitliche Spektrum: Es gilt $S_U(\omega) = \int S_u(k, \omega - k u_c) dk$.

überprüft werden (siehe Abbildung 5.26 auf Seite 78).

7.1.2 Dimension der Spektren

In den homogenen Richtungen der Kanalströmung (das sind die Raumrichtungen x und z) sowie im stationären Fall in der Zeitrichtung t ist kein Punkt (Ort oder Zeit) ausgezeichnet. Alle Korrelationsfunktionen hängen daher nur von der Orts- bzw. *Zeitdifferenz* der Punkte ab. Wenn sich die beiden Punkte der Korrelationsfunktion⁴ in allen homogenen Richtungen unterscheiden, erhält man im Allgemeinen immer noch eine dreidimensionale Funktion. Solche räumlich(2D)-zeitlichen(1D) Korrelationsfunktionen bzw. die daraus berechneten Spektren, enthalten zwar sehr viele Informationen der Strömung, bereiten hier aber besonders aus zwei Gründen Probleme. Erstens hat man keine Richtung mehr über die man mitteln könnte, sodass zum Mitteln ein ganzes Ensemble von Strömungen berechnet werden muss. Zweitens kann man eine Funktion die von drei Variablen abhängt auch nur unzureichend gut darstellen, sodass man letztendlich auf Schnitte oder weitere Mittelwerte angewiesen ist. Werden neben Autospektren auch Kreuzspektren betrachtet, dann sind die Funktionen komplexwertig, die Dimension ist also nochmals erhöht.

Im instationären Fall sind nur Strömungszustände mit gleicher Phase der Wandbewegung äquivalent, sodass das Zeitmittel durch ein Phasenmittel ersetzt werden muss. Durch phasenstarre Mittelung von räumlich zweidimensionalen Spektren – die hier im Wesentlichen untersucht werden – erhält man für jede räumliche Wellenzahlkomponente des Spektrums einen komplexen Modulationsfaktor. Bei der Modulation von Kreuzspektren (etwa von $E_{u'v'}(\vec{k})$) ergibt sich die Schwierigkeit, dass die Modulation einer komplexen Größe betrachtet werden muss. Wie man dabei zu einer vernünftigen Interpretation der Modulationsfaktoren gelangen kann, wird später an entsprechender Stelle diskutiert.

7.2 Eindimensionale Korrelationen und Spektren

Betrachtet man zwei Orte innerhalb der Strömung, die sich zunächst nur in ihrer z -Koordinate unterscheiden sollen, und mittelt dann das Produkt von zwei Schwankungsgrößen $u'_i(z)$ und $u'_j(z + r_z)$, dann zeigt sich, dass diese Korrelation

$$R_{u'_i u'_j}(r_z) = \mathcal{E}[u'_i(z)u'_j(z + r_z)] \quad (7.1)$$

in der turbulenten Strömung im Allgemeinen erst ab einem gewissen Abstand r_z nahezu auf Null abgefallen ist. Die turbulenten Bewegungen innerhalb der Strömung sind also keineswegs vollkommen stochastisch, sondern mindestens von ihrer näheren Umgebung abhängig. Quantitativ ergibt sich für die drei Autokorrelationen $R_{u'^2}(r_z)$, $R_{v'^2}(r_z)$ und $R_{w'^2}(r_z)$ der in Abbildung 7.1 gezeigte Verlauf. Die auf die jeweiligen Effektivwerte der Einzelsignale, also auf $(\mathcal{E}[u'^2])^{-1/2}$ und $(\mathcal{E}[v'^2])^{-1/2}$, normierte negative Kreuzkorrelation $-R_{u'v'}(r_z)$ ist ebenfalls mit in die Abbildung 7.1 eingezeichnet, allerdings nur für die positiven Verschiebungen r_z ; aus Symmetriegründen gilt aber $R_{u'v'}(-r_z) \approx R_{u'v'}(r_z)$. Die Autokorrelationen sind symmetrisch und nehmen ihr Maximum – in der Normierung ist das genau eins – bei $r_z = 0$ an. Für die Kreuzkorrelation gilt beides im Allgemeinen nicht. Es könnte also durchaus vorkommen, dass die Signale u' und v' am selben Ort ($r_z = 0$) weniger stark

⁴ In dieser Arbeit werden nur Zweipunkt-Korrelationsfunktionen betrachtet. Höhere Korrelationen sind zwar durchaus interessant, erhöhen die Dimension des Problems aber zusätzlich und erschweren die Interpretierbarkeit der Ergebnisse. Des Weiteren müsste die Rechenzeit deutlich verlängert werden, um genügend statische Mittelungen vornehmen zu können.

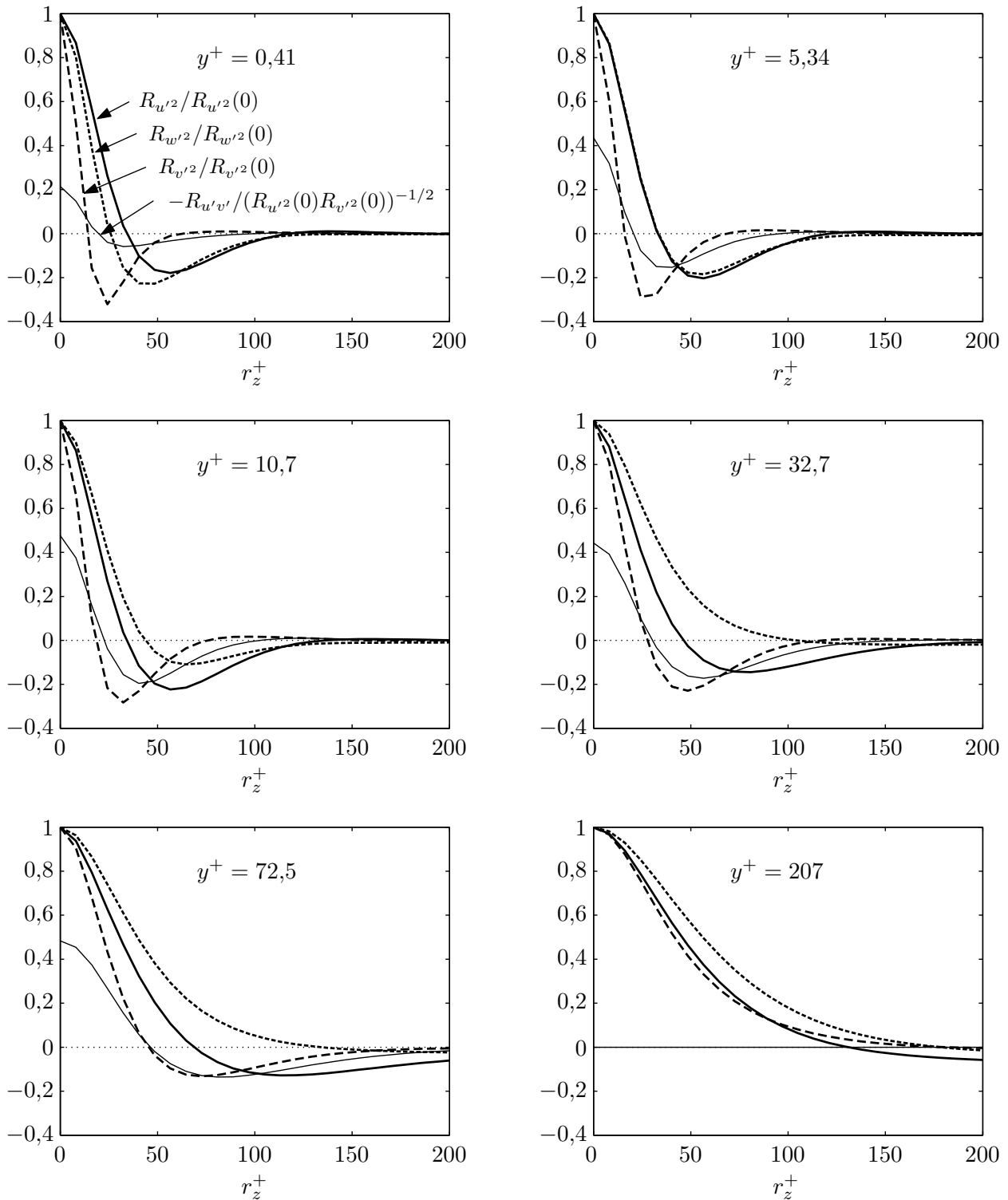


Abb. 7.1: Korrelationen zwischen Geschwindigkeitsschwankungen als Funktion der spannweiten Verschiebung der Signale bei verschiedenen Wandabständen.

korreliert sind, als an zwei voneinander entfernten Orten ($r_z \neq 0$). Aufgrund der Symmetrie in z -Richtung, findet man das aber nicht. Das Maximum des gezeigten Kreuzkorrelationskoeffizienten $\chi_{u'v'}(r_z) = -R_{u'v'}(r_z)/\sqrt{R_{u'^2}(0)R_{v'^2}(0)}$ liegt immer bei $r_z = 0$.⁵

In analoger Weise kann man die Abhängigkeit der gezeigten Korrelationen von der axialen Verschiebung r_x betrachten. In Abbildung 7.2 unterscheiden sich die beiden Orte der Korrelationsfunktion nur in ihrer x -Koordinate. Für die wandnahen Punkte befindet sich das Maximum der normierten negativen Kreuzkorrelation nicht bei $r_x = 0$, wie man es vielleicht erwartet hätte. Weiter zeigt sich, dass vor allem die Korrelation der axialen Geschwindigkeitskomponente innerhalb des Rechengebietes nicht vollkommen auf Null abfällt. Nennenswerten Einfluss auf die Ergebnisse hat dass jedoch nicht, denn auch nach Verdoppelung der Periodenlänge – im gezeigten Beispiel war $L_x^+ \approx 1550$ – änderten sich alle ausgewerteten Größen nur wenig. Die Periodenlänge von 1550 viskosen Längeneinheiten ist dabei schon vergleichsweise groß, da auch eine Halbierung von L_x die Ergebnisse im Wesentlichen ungeändert ließ.

Vergleicht man die Auftragungen von Abbildung 7.1 und Abbildung 7.2, dann fällt eine deutliche Querstruktur der Strömung auf. Die spannwitigen Korrelationen zeigen, vor allem in Wandnähe, einen verhältnismäßig schnellen Abfall zu negativen Korrelationen. Die axialen Korrelationen fallen bei gleichen Wandabständen wesentlich langsamer ab, sodass man folgern kann, dass die Strukturen in Wandnähe wesentlich schmaler als lang sind. Die gezeigten Korrelationen sind konsistent mit dem Bild einer in spannwitiger Richtung quasiperiodischen Anordnung von »Low-speed-streaks«. Der experimentell und numerisch bestätigte typischen Abstand von $r_z^+ \approx 100$ bis 130 (in Wandnähe) findet sich auch hier, wenn man das negative Maximum der Autokorrelation der axialen Geschwindigkeitskomponente als halbe Querwellenlänge identifiziert. Das negative Maximum von $R_{v'^2}(r_z)$ findet man in etwa bei dem halben Wert des negativen Maximums von $R_{u'^2}(r_z)$, sodass sich auch die oft postulierten axialen Längswirbel, die jeweils zwischen den »Streaks« liegen, in das Bild einfügen.

Der Korrelationskoeffizient $\chi_{u'v'}$ ist in Abbildung 7.3 für alle Wandabstände und alle Abstände r_x bzw. r_z gezeigt. Hier für eine Rechnung mit $L_x^+ \approx 775$ und $L_z^+ \approx 388$. Die obere Höhenliniendarstellung zeigt $\chi_{u'v'}(r_x = 0, y, r_z)$ und ist erwartungsgemäß symmetrisch bezüglich der $r_z = 0$ Achse (durch die endliche Anzahl der Mittelungen natürlich nur näherungsweise). Da die Strömungsstruktur in x -Richtung konvektiert wird, findet man keine derartige Symmetrie in der unteren Abbildung, die $\chi_{u'v'}(r_x, y, r_z = 0)$ zeigt. In Wandnähe zeigt sich die größte (negative) Korrelation bei positiven r_x -Werten. Nach der Vorzeichenkonvention der Definition (7.1) bedeutet das, dass die Axialkomponente der Geschwindigkeit u' in Wandnähe stärker mit der stromab liegenden Normalkomponente v' korreliert ist, als mit der Normalkomponente am gleichen Ort. Im Bereich um $y^+ = 15$ ist die Kreuzkorrelation nahezu symmetrisch, in wandferneren Bereichen liegt das negative Maximum der Korrelation stromauf ($r_x < 0$).

Die oft zitierte und beschriebene Bewegung der »Low-speed-Streaks« ($u' < 0$) von der Wand weg ($v' > 0$) passt zu – oder besser widerspricht nicht – den gezeigten Korrelationen. Jedoch ist bei der Interpretation von Korrelationsfunktionen große Vorsicht geboten, denn sie entstehen aus einer Mittelung und dürfen nicht mit momentanen Strömungsvorgängen gleichgesetzt werden.

Die normierte Korrelationsfunktion ist ein Maß für die Gemeinsamkeit zweier Gesamtsignale. Interessiert man sich zusätzlich für die Gemeinsamkeit einzelner Frequenzkomponenten der Signale, dann genügt es nach dem Wiener-Khintchin-Theorem die Fourier Transformierte der Korrelati-

⁵ Theoretisch könnte dort auch ein Minimum liegen.

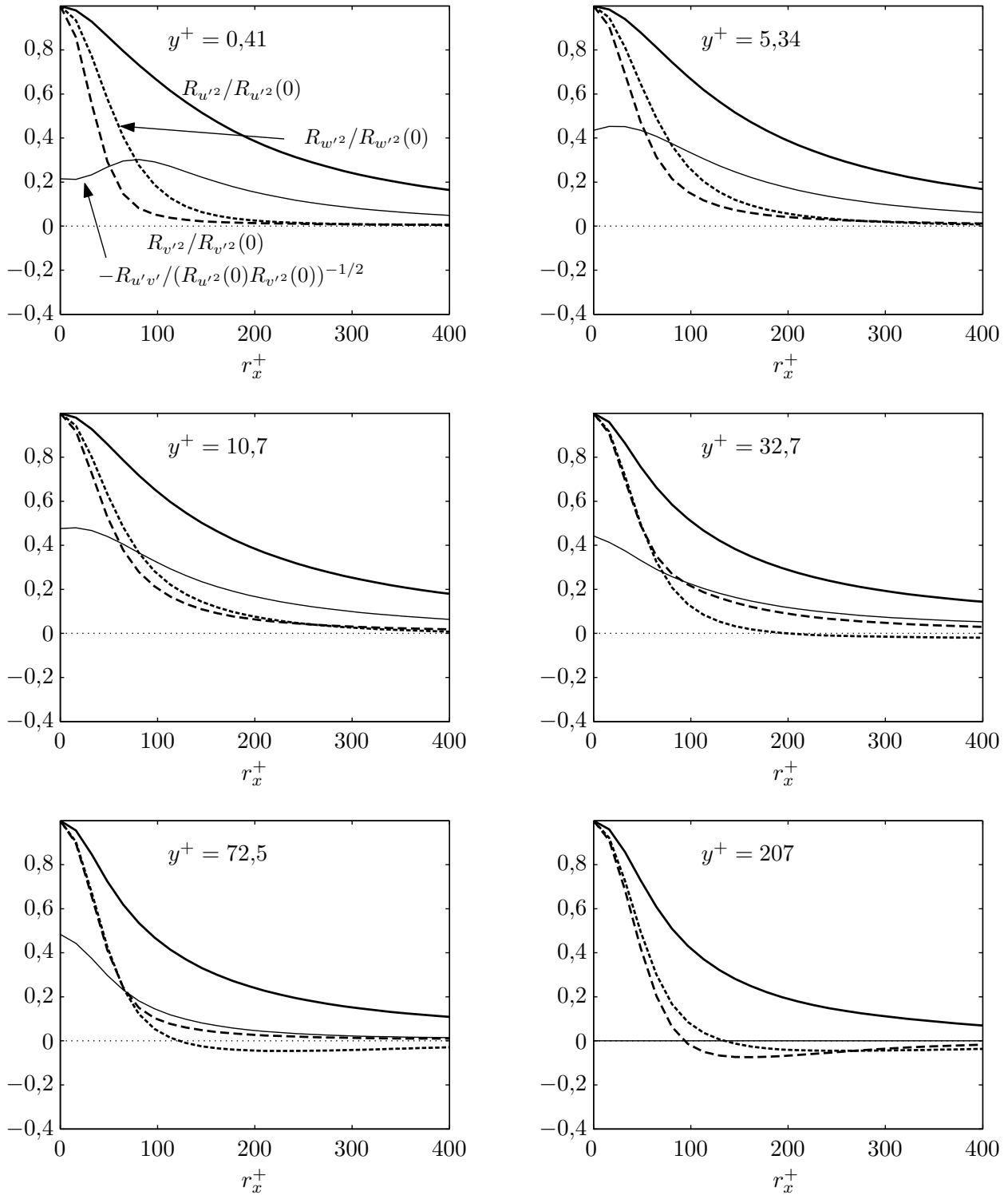


Abb. 7.2: Korrelationen zwischen Geschwindigkeitsschwankungen als Funktion der axialen Verschiebung der Signale bei verschiedenen Wandabständen.

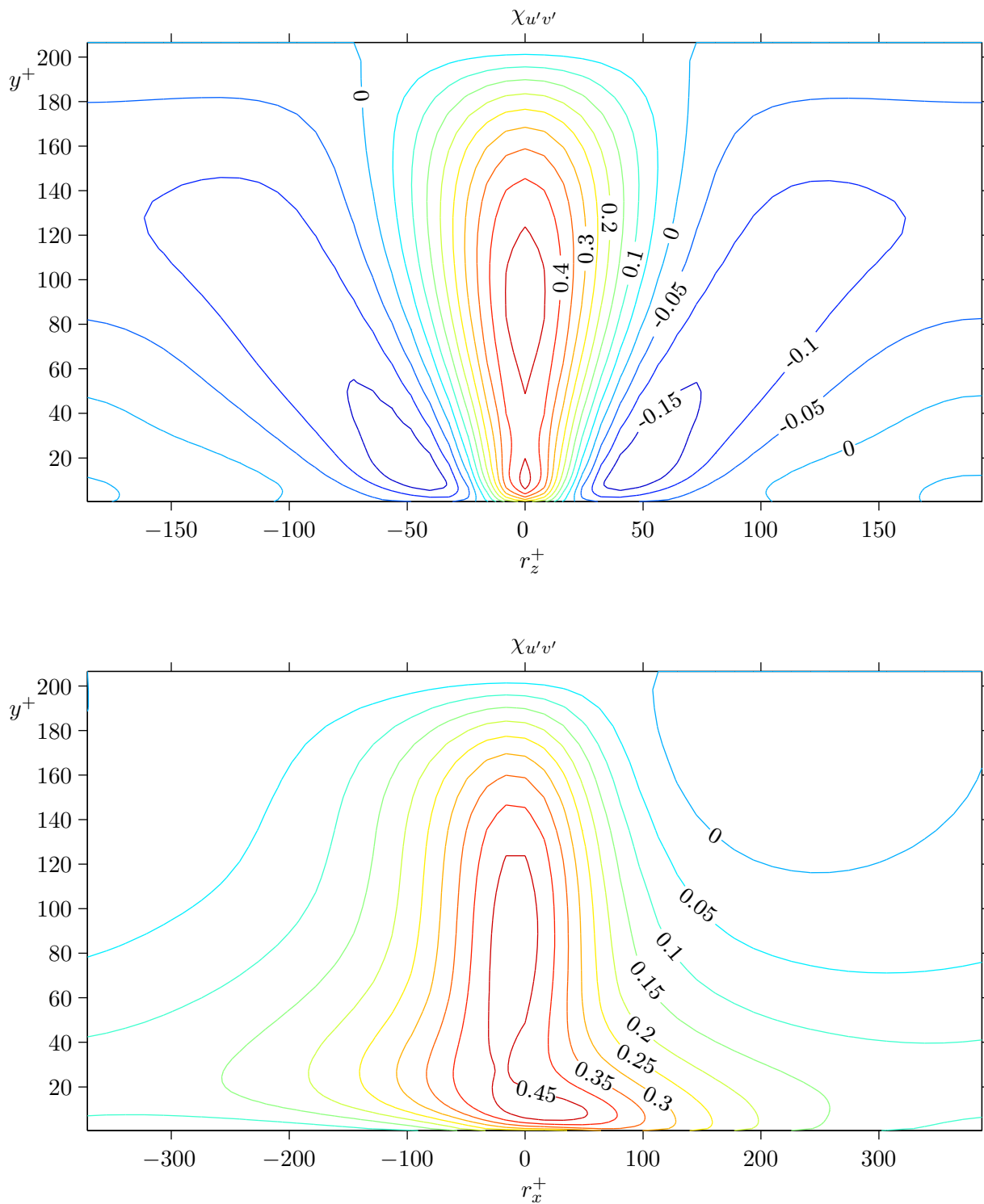


Abb. 7.3: Korrelationskoeffizient zwischen den axialen und normalen turbulenten Fluktuationen. Oben als Funktion des spannweiten Abstandes zwischen u' und v' , unten als Funktion des axialen Abstandes.

onsfunktion zu betrachten:

$$E_{u'_i u'_j}(k) = \mathcal{F}_{r \rightarrow k} \{ R_{u'_i u'_j}(r) \}, \quad (7.2)$$

wobei k die axiale oder spannweite Wellenzahl und r die Verschiebung in dieser Richtung darstellt. Im Fall $i = j$ spricht man vom Autoleistungsspektrum – kurz: Autospektrum – sonst vom Kreuzleistungsspektrum – kurz: Kreuzspektrum. Autospektren sind rein reell, hingegen haben Kreuzspektren im Allgemeinen eine Phase. Die Phase eines Kreuzspektrums bei einer bestimmten Frequenz beschreibt das Verhältnis des gemittelten Imaginärteils zum gemittelten Realteil vom Produkt der Amplitudenspektren der beteiligten Signale bei dieser Frequenz. Die Amplitude eines Kreuzspektrums ist das gemittelte Produkt der Amplituden der Einzelsignale (genauer: ein viertel dieses Wertes). Häufig normiert man die Amplitude des Kreuzspektrums auf die Effektivwerte der Einzelsignale bei dieser Frequenz. Man erhält so einen (komplexen) Korrelationskoeffizient für jede Frequenzkomponente und spricht dann von Kohärenz statt Korrelation:

$$\gamma_{u'v'}(k) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{-E_{u'v'}(k)}{\sqrt{E_{u'^2}(k)E_{v'^2}(k)}} \quad \text{mit } k \in \{k_x, k_z\}. \quad (7.3)$$

Aus der Schwarzschen Ungleichung ergibt sich, dass der Betrag der Kohärenz für alle k zwischen null und eins liegt.

Abbildung 7.4 zeigt die stationären Autospektren der drei Geschwindigkeitskomponenten. Die spektrale Leistungsdichte fällt mit steigender Wellenzahl in der Regel schnell ab. Die $E(k_z)$ Spektren haben aber häufig das Maximum der spektralen Leistungsdichte bei Frequenzen $k_z > 0$, insbesondere im wandnahen Bereich und am ausgeprägtesten bei $E_{v'^2}(k_z)$. Die Maxima sind die Folgen der ausgeprägten Querstruktur, die schon bei den Korrelationsfunktionen diskutiert wurde. Als Anmerkung zu den Spektren sei noch gesagt, dass sich Schwächen in einem numerischen Verfahren häufig dadurch zeigen, dass die Leistung bei den höchsten Frequenzen wieder ansteigt. Ein derartiger Anstieg findet sich in keiner unserer Simulationen, sodass auch die Spektren keinen Anlass geben, die prinzipielle Übertragbarkeit der Ergebnisse auf die Realität anzuzweifeln.

Die komplexen Kohärenzfunktionen $\gamma_{u'v'}(k_x)$ und $\gamma_{u'v'}(k_z)$ sind in Abbildung 7.5 für ausgewählte Wandabstände dargestellt. $\gamma_{u'v'}(k_x)$ hat im Gegensatz zu $\gamma_{u'v'}(k_z)$ einen Imaginärteil. Er entspricht dem weiter oben diskutierten Umstand, dass die Kreuzkorrelation zwischen u' und v' davon abhängt, ob v' gegenüber u' stromauf oder stromab verschoben ist. In spannweitere Richtung gibt es dagegen keine ausgezeichnete Richtung und die Korrelation ist in dieser Richtung symmetrisch und somit $\gamma_{u'v'}(k_z)$ rein reell. In Abbildung 7.5 ist gut zu erkennen, dass der Imaginärteil von $\gamma_{u'v'}(k_x)$ in Wandnähe nennenswerte Beträge erreicht, wandferner jedoch sehr klein ist. Die Strömung ist in der Kanalmittenregion deutlich isotroper. Der Realteil von $\gamma_{u'v'}(k_x)$ wird ab einer bestimmten Raumfrequenz k_x negativ.⁶ Für sehr kleine k_z kann das auch bei $\gamma_{u'v'}(k_z)$ beobachtet werden. In Abschnitt 5.8.2 wurde schon gezeigt, dass die zweidimensionale Kohärenzfunktionen $\gamma_{u'v'}(k_x, k_z)$ teilweise negativ wird und es wurde darauf hingewiesen, dass die zugehörigen Wellenzahlbereiche zu einer negativen Produktion turbulenter kinetischer Energie führen. Das gilt offenbar auch, wenn in der k_x - k_z -Ebene entlang einer Koordinatenrichtung integriert wird, wie Abbildung 7.5 deutlich zeigt. Im Zusammenhang mit den später diskutierten zweidimensionalen Spektren wird die negative

⁶ Ob der darauf folgende steile Anstieg bei den höchsten Raumfrequenzen die tatsächlich Physik wiedergibt, ist insofern fraglich, als hier Artefakte, die durch die räumliche Auflösung des Gitters bedingt sind, nicht auszuschließen sind. Die höchste dargestellte Frequenz entspricht einer Wellenlänge von etwas mehr als dem doppeltem Gitterpunktabstand (erste Frequenzlinie unterhalb der Nyquistfrequenz). In der Regel sind alle folgenden Auftragungen bis zu dieser Frequenzkomponente dargestellt, jedoch sollte die Werte bei den großen Raumfrequenzen mit gewisser Skepsis betrachtet werden.

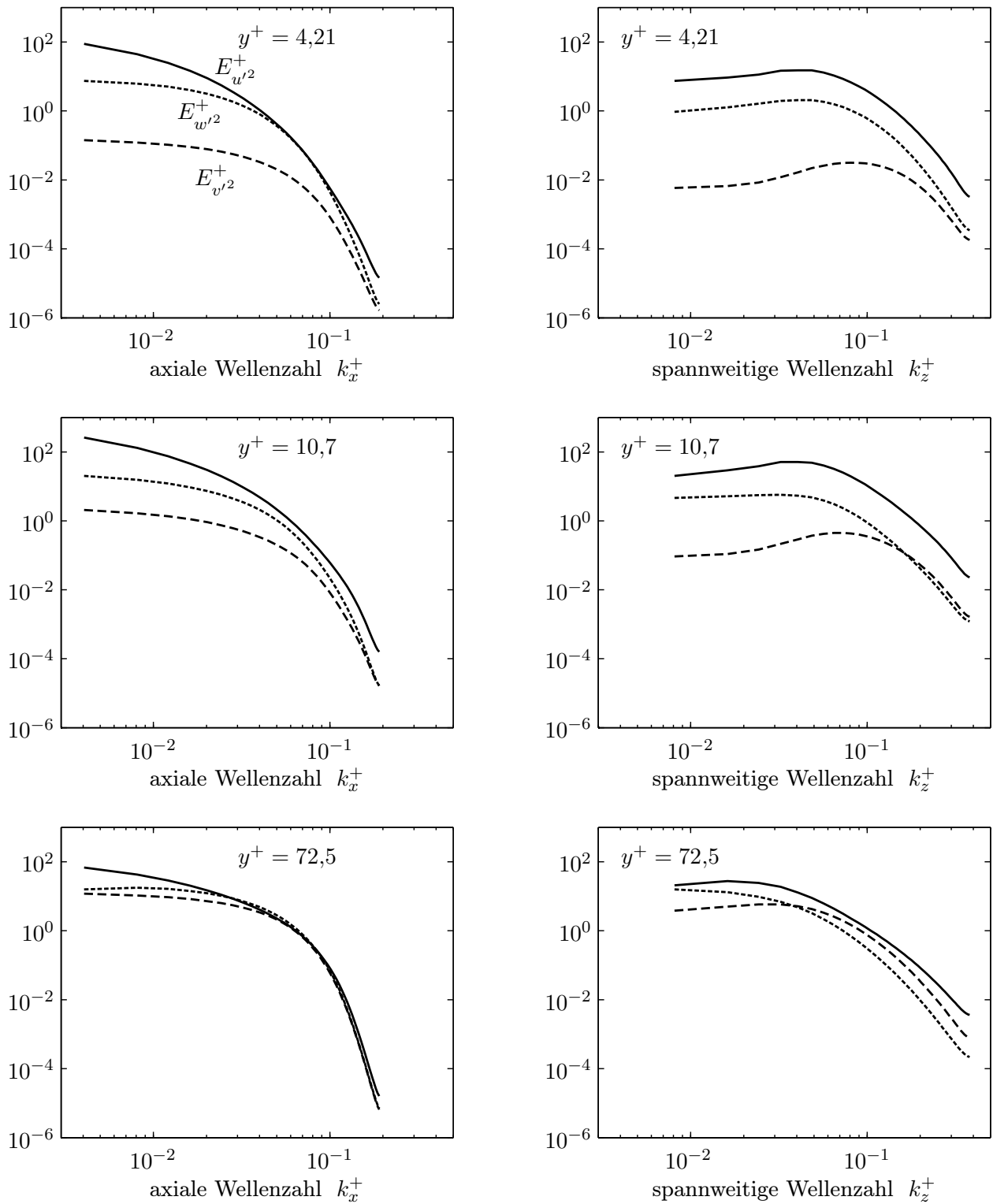


Abb. 7.4: Spektrale Leistungsdichten der turbulenten Fluktuationen. Alle Größen sind mit ν und u_τ entdimensionalisiert, sodass die integrierten Spektren die Gesamtleistung in Einheiten von u_τ^2 ergeben.

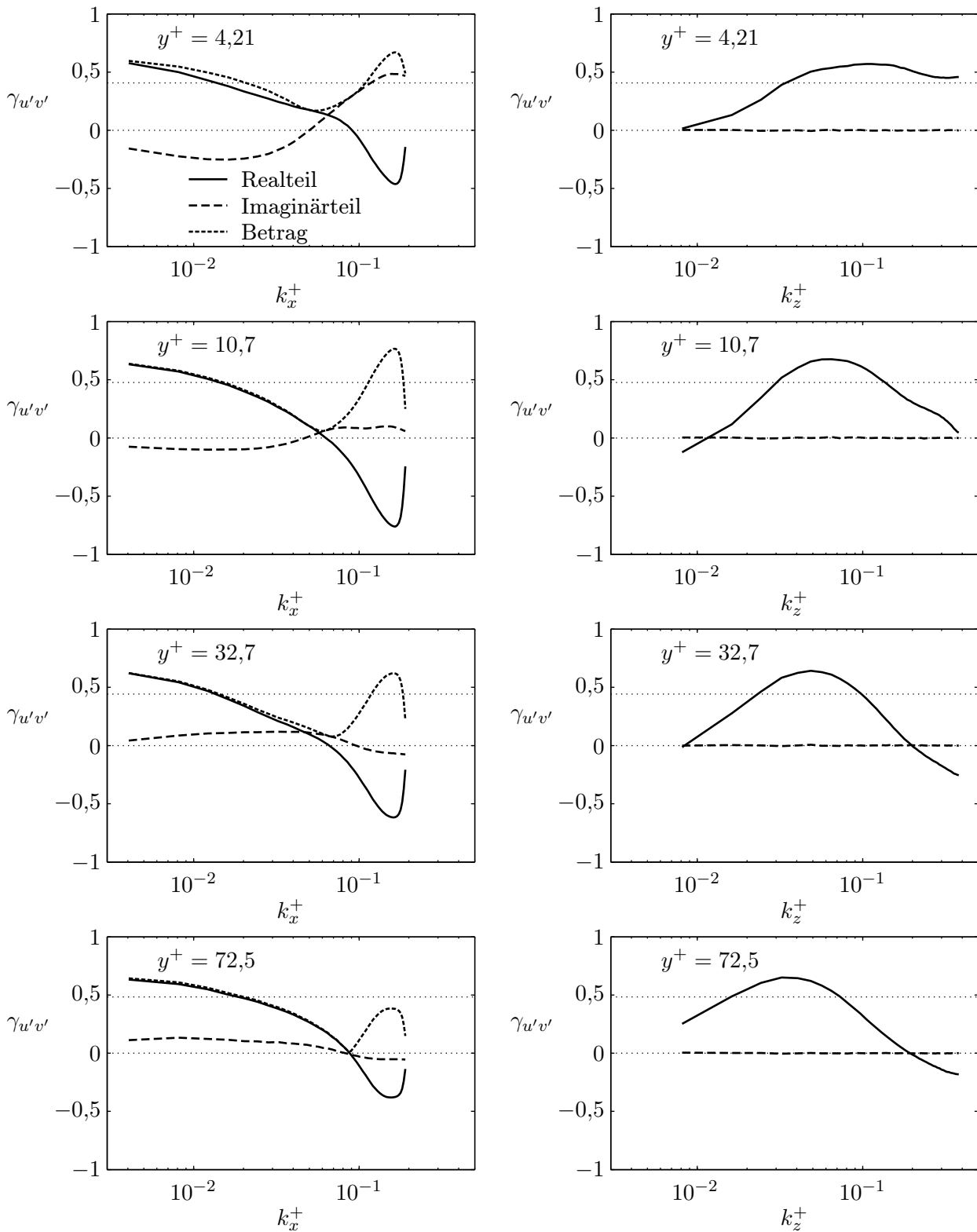


Abb. 7.5: Kohärenzfunktionen $\gamma_{u'v'}(k_x)$ (links) und $\gamma_{u'v'}(k_z)$ (rechts) bei verschiedene wandnormale Positionen.

Produktion auch quantifiziert. Maximal ergibt sich dabei ein Wert von etwa -5% , gemessen an der Gesamtproduktion bei einem bestimmten Wandabstand.

In Abbildung 7.6 findet man die Realteile der Kohärenzfunktionen $\gamma_{u'v'}(k_x, y)$ und $\gamma_{u'v'}(k_z, y)$ für alle Wandabstände bis $y^+ = 150$ in einer Höhenliniendarstellung. Die jeweils höchsten Frequenzkomponenten sind jeweils ausgespart, da hier die Werte sehr unsicher sind.

7.2.1 Überblick über die Modulation der Spektren

Bis jetzt wurde die Modulation der Gesamtleistung $m_{u'2}(y; \omega_w)$ als Funktion des Wandabstands und der Modulationsfrequenz betrachtet (Abschnitt 6.2.2). Man beachte, dass dabei der Wandabstand nur ein Parameter ist, die Modulationsfrequenz aber eine dynamische Variable des Systems. Ausgehend vom Modulationsfaktor $m_{u'2}(y; \omega_w)$ – der in der komplexen Ebene für gegebene Werte von y und ω_w durch einen Punkt dargestellt werden kann – wird nun die Modulation nach einzelnen Wellenzahlkomponenten aufgeschlüsselt. Einen generellen Eindruck der Abhängigkeit des Modulationsfaktors von den Wellenzahlen k_x bzw. k_z vermittelt Abbildung 7.7. Der ausgewählte Modulationsfaktor $m_{u'2}(y^+ = 12; \omega_w^+ = 8,3 \cdot 10^{-3})$ ist in der Auftragung als ein Punkt zu erkennen. Wie sich diese Modulation der Gesamtleistung des u' -Signals mit dem Wandabstand und der Modulationsfrequenz ändert, wurde bereits diskutiert, ist aber zum Vergleich mit in die Abbildung eingezeichnet. Der Modulationsfaktor

$$m_{u'2}(y, k; \omega_w) = \frac{\widehat{E}_{u'2}(y, k; \omega_w)}{\overline{E}_{u'2}(y, k; \omega_w)} / a_{\tau_w}(\omega_w) \quad \text{mit } k \in \{k_x, k_z\} \quad (7.4)$$

beschreibt die Modulation der axialen Schwankungsbewegung bei einer bestimmten Wellenzahl, mit anderen Worten, die Modulation des räumlichen Spektrums. Wenn keine Verwechslung mit der Modulation der Gesamtleistung zu befürchten ist, wird, abweichend zur normalen Notation, kurz $m_{u'2}(k)$ statt $m_{E_{u'2}}(k)$ geschrieben.

Abgesehen von den in Abschnitt 6.2.2 beschriebenen Besonderheiten, nähert sich die Modulation der Gesamtleistung mit wachsendem Wandabstand schnell dem Nullpunkt. Typische Beträge dieser Modulationsfaktoren im wandnahen Bereich liegen zwischen eins und zwei. Frequenzselektiv betrachtet, findet man eine wesentlich stärkere Modulation bei den hohen Raumfrequenzen. Die entsprechenden Raumfrequenzkomponenten werden, verglichen auch mit den tiefen Raumfrequenzkomponenten, sehr stark von der Störung beeinflusst. Dabei muss aber bedacht werden, dass die Leistung die in den hohen Frequenzen steckt, nur ein Bruchteil der Leistung ist, die sich im langwelligen Bereich des Spektrums findet. Im hochfrequenten Bereich wirken sich selbst sehr große (relative) Modulationen kaum auf die Gesamtleistung aus.

Einen sehr deutlichen Unterschied findet man zwischen den Modulationen der Raumspektren in x - und z -Richtung. Während erstgenannte eine ausgeprägte Systematik aufweisen, unter anderem finden sich deutliche Phasenunterschiede in der Reaktion der einzelnen Frequenzkomponenten, reagiert die Querstruktur der Strömung eher einheitlich, für alle Frequenzen in etwa mit gleicher Phase. Der typische Anstieg der Modulation zu den hohen Raumfrequenzen findet sich aber auch im spannwitigen Spektrum. Auffällig bei der Modulation der spannwitigen Spektren ist eine scheinbar unetstetige Änderung der Modulation bei den tiefsten Frequenzkomponenten. Hier wirkt sich unter anderem aus, dass in spannwitiger Richtung das Rechengebiet vergleichsweise kurz ist und daher die Raumfrequenzlinien entsprechend weit auseinander liegen.

Die Mittelungszeiten bei der zweit- und dritt-tiefsten Modulationsfrequenz waren vergleichsweise

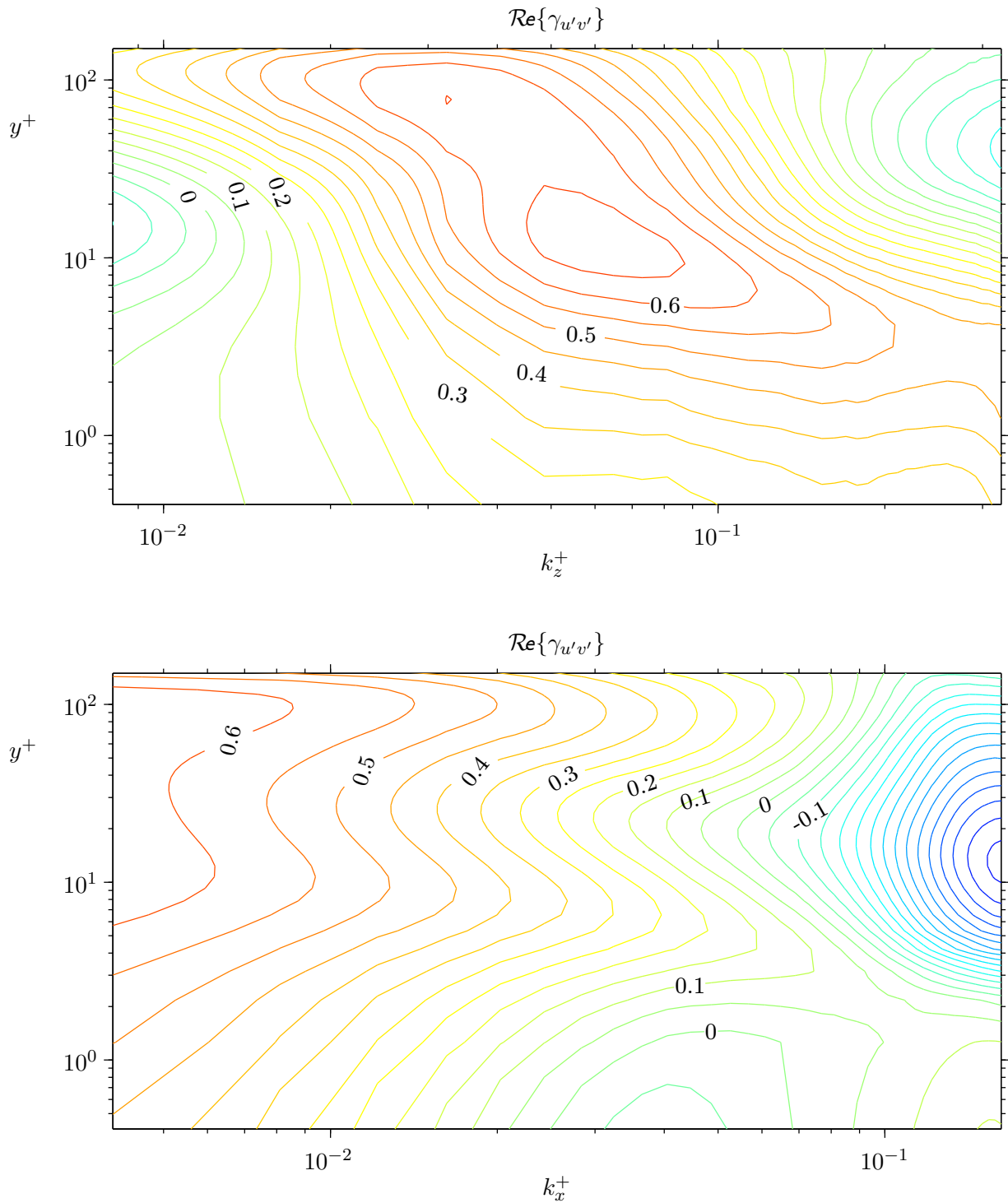


Abb. 7.6: Kohärenz der turbulenten Schwankungsbewegungen. Oben für die spannweite Wellenzahlen, unten für die axialen Wellenzahlen.

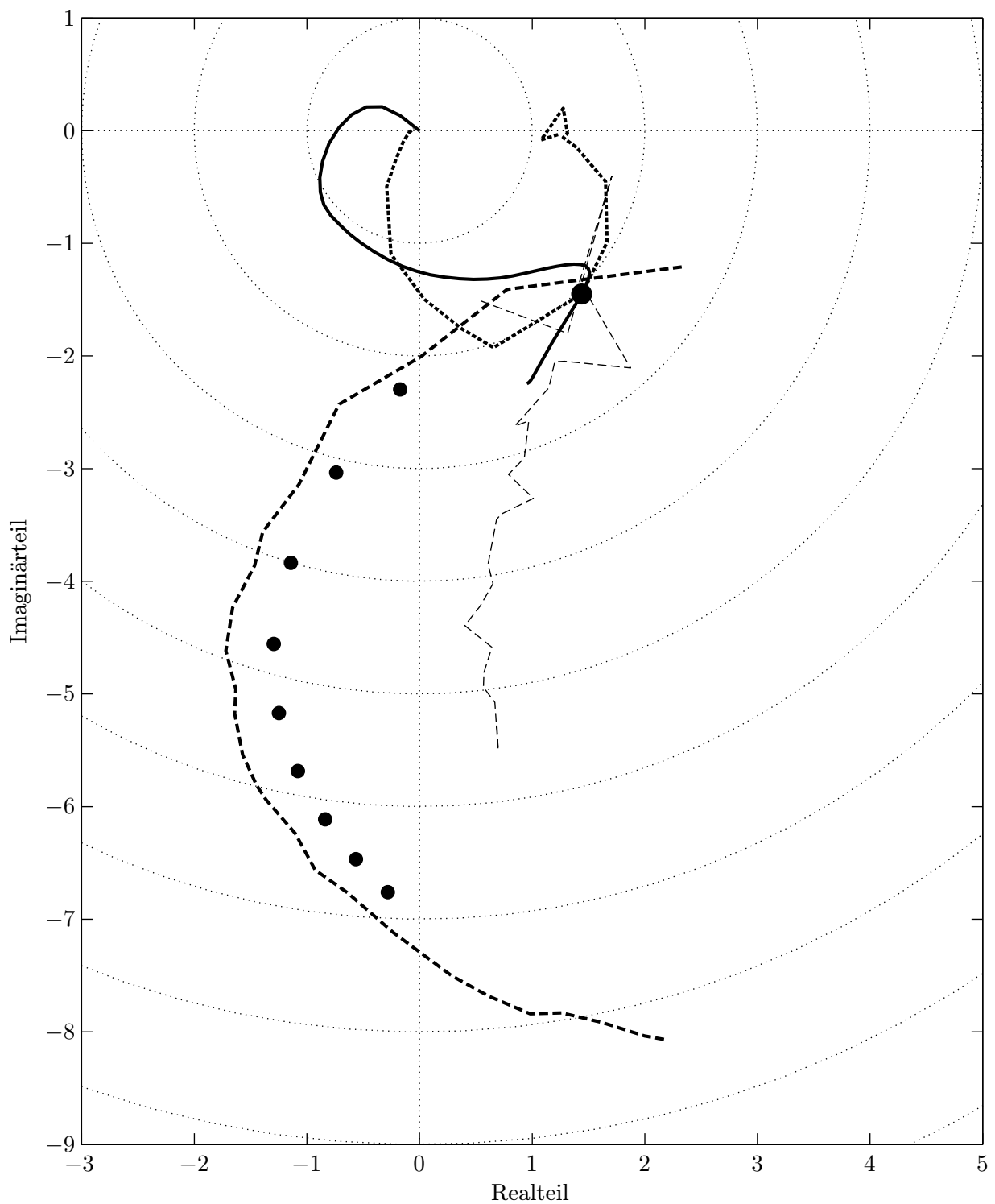


Abb. 7.7: Exemplarische Abhängigkeiten des Modulationsfaktors der axialen Geschwindigkeitsschwankungen u' . Gezeigt sind die Modulation der Gesamtleistung mit dem Wandabstand als Parameter für eine feste Modulationsfrequenz $\omega_w^+ = 8,3 \cdot 10^{-3}$, die Modulation der Gesamtleistung als Funktion der Modulationsfrequenz für einen festen Wandabstand $y^+ = 12$, die Modulation des axialen räumlichen Spektrums bei festen y und ω_w und die Modulation des spannweitigen räumlichen Spektrums bei festem y und ω_w . Zusätzlich sind für das axiale Spektrum die Modulationen der ersten 10 Momente mit eingezeichnet (siehe Text).

kurz, sodass die Modulationsfaktoren dieser Rechnungen teilweise vom Trend abweichen. So ist in Abbildung 7.7 zu sehen, dass sich $m_{u'^2}$ für die tiefsten Frequenzen scheinbar etwas sonderbar verhält. Dennoch sind auch in den folgenden Abbildungen immer alle Werte eingezeichnet, auch die, die nicht »im Trend« liegen. Es sollte jedoch bedacht werden, dass sich die Signifikanzen der Einzelwerte in der Regel unterscheiden.

7.2.2 Momente der Ortskurven

Die Harmonischen der Gesamtleistung können als nullte Momente der zugehörigen Raumspektren aufgefasst werden. Auch höhere Momente können direkt aus dem Spektrum berechnet werden:

$$\Gamma_{u'^2}^{(m)} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} k^m E_{u'^2}(k) dk. \quad (7.5)$$

Die Interpretation der Momente ist einfach, sie entsprechen den Harmonischen der Leistung der räumlichen Ableitungen. Zum Beispiel gilt, wenn u'_{x^m} die m -te räumliche Ableitung von u' in x -Richtung ist:

$$\Gamma_{u'^2}^{(m)} = (2\pi)^{-m} \int_{-\infty}^{\infty} E_{u'_{x^m/2} u'_{x^m/2}}(k_x) dk_x. \quad (7.6)$$

Man beachte, dass auch halbzahlige Ableitungen möglich sind. Das Verhältnis der ersten zur nullten Harmonischen der Momente beschreibt somit die Modulation von Gesamtleistungen. So ergibt sich für die Modulationsfaktoren der Gesamtleistung des turbulenten Geschwindigkeitssignals u' und der Gesamtleistung der ersten Ableitung u'_x :

$$m_{u'^2} = \frac{\widehat{\Gamma}_{u'^2}^{(0)} / \overline{\Gamma}_{u'^2}^{(0)}}{a_{\tau_w}} \quad (7.7)$$

$$m_{u'_x u'_x} = \frac{\widehat{\Gamma}_{u'^2}^{(2)} / \overline{\Gamma}_{u'^2}^{(2)}}{a_{\tau_w}}. \quad (7.8)$$

Die ersten 10 Momente der Ortskurve des axialen Spektrums finden sich in Abbildung 7.7. Die Bezeichnung »Moment der Ortskurve« sollte nicht missverstanden werden. Es ist *nicht* das Moment $\int k^m m_{u'^2}(k) dk$ gemeint, sondern das m -te Moment der ersten Harmonischen des Spektrums, bezogen auf das m -te Moment der nullten Harmonischen des Spektrums.

7.2.3 Systematische Analyse der modulierten Spektren

Abbildung 7.7 zeigt bereits die wesentlichen Reaktionen der räumlichen Struktur der Turbulenz, die man aus den modulierten eindimensionalen Spektren ablesen kann. Jedoch wurde bisher nur die Modulation des Spektrums der der axialen Geschwindigkeitskomponente u' bei einem ausgewählten Wandabstand und einer Modulationsfrequenz betrachtet. Welche Unterschiede sich für die beiden anderen Komponenten v' und w' , für das Kreuzspektrum zwischen u' und v' , für andere Wandabständen und vor allem für andere Modulationsfrequenzen ergeben, wird im Folgenden untersucht. Die nach axialen Wellenzahlen aufgeschlüsselten Spektren stehen dabei im Vordergrund. Diese lassen sich in eingeschränkter Weise (vergleiche Abschnitt 7.1.1) mit den im Experiment ermittelten modulierten Zeitspektren vergleichen. Auch werden, wie bereits erwähnt, die spannwitigen Wellenzahlkomponenten eher einheitlich moduliert.

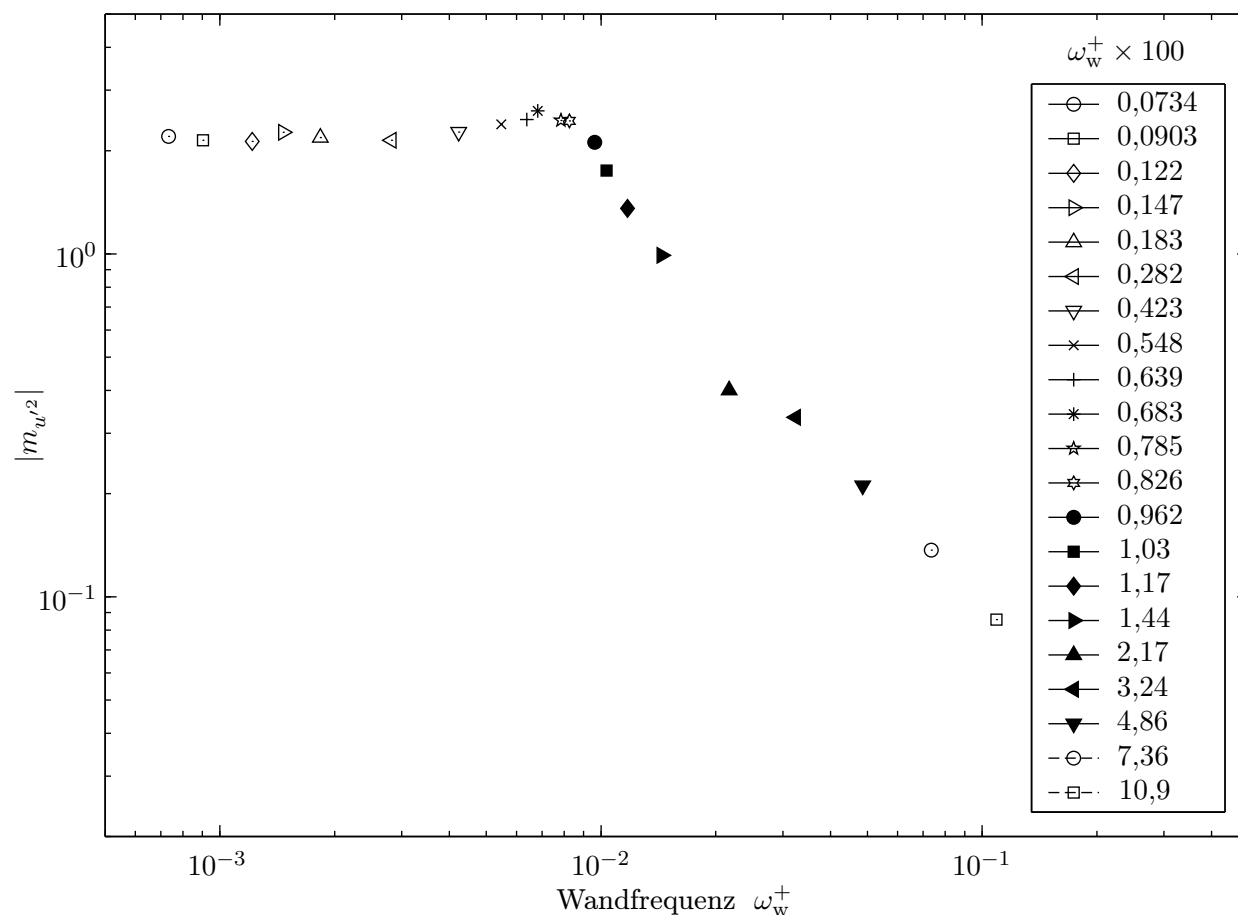


Abb. 7.8: Modulation der Gesamtleistung des u' -Signals bei einem Wandabstand von $y^+ = 0,4$. Diese Abbildung kann als Legende für die im Folgenden gezeigten Ortskurven benutzt werden, denn die Symbole werden dort beibehalten. Man beachte, dass die Symbole der beiden höchsten Anregungsfrequenzen mit denen der beiden tiefsten übereinstimmen. Zur Unterscheidung werden gestrichelte Linien durch die Symbole gezeichnet.

Die im Folgenden gezeigten Modulationsfaktoren der Spektren sind vielfach der B-Serie (vergleiche Abschnitt 3.1 auf Seite 27) entnommen. Das Strömungsgebiet hatte dabei eine vergleichsweise kleine Abmessung. Dennoch unterscheiden sich die Modulationsfaktoren praktisch nicht von den Modulationsfaktoren der C-Serie, bei der das Rechenggebiet verdoppelt wurde. Bei der A-Serie – dort wurde mit der größeren Wandamplituden von $0,6 u_b$ statt $0,15 u_b$ gerechnet – zeigten sich (kleine) nicht-lineare Effekte. Die Modulationen waren dabei in der Regel etwas kleiner als bei den Rechnungen mit der kleineren Amplitude. Prinzipielle Unterschiede fanden sich jedoch kaum.

In der Abbildung 7.8 sind die 21 Wandfrequenzen der B-Serie mit Symbolen markiert und in der Legende werden die ω_w^+ Werte aufgelistet. Diese Symbole werden im Folgenden beibehalten, sodass die Abbildung 7.8 als Legende verwendet werden kann. Gezeigt ist in der Abbildung der Betrag des Modulationsfaktors der Gesamtleistung des u' -Signals, also $|m_{u'}(\omega_w^+)|$, ausgewertet bei einem sehr nahen Wandabstand von $y^+ = 0,4$. Bei den tiefen Frequenzen liegt der Modulationsfaktor dabei in der Nähe des quasistationären Grenzwertes. Quasistationär wird $m_{u'}$ mit der doppelten relativen Amplitude der Wandschubspannung und phasengleich mit ihr moduliert.

Abhängigkeit des axialen Spektrums von der Modulationsfrequenz

Die Modulationsfaktoren von $E_{u^2}(k_x)$ sind für drei Wandabstände und für Anregungsfrequenzen von $\omega_w^+ = 0,0734$ bis $10,9 \cdot 10^{-2}$ in den Abbildungen 7.9–7.14 dargestellt. Die drei Wandabstände sind $y^+ = 0,41$ (viskose Unterschicht), $y^+ = 12$ (Pufferschicht; Ort mit maximaler Gesamtleistung des u' -Signals) und $y^+ = 67$. Die tiefste dargestellte Raumfrequenzkomponente entspricht dem Gleichanteil ($k_x^+ = 0$), die höchste dargestellte Raumfrequenzkomponente entspricht einer Wellenlänge von $\lambda_x^+ \approx 32,3$. Die Frequenzauflösung ist $\delta k_x^+ = 2\pi/775$.

Generell werden die Ortskurven mit wachsender Modulationsfrequenz immer kleiner. Auch sind die Spektren bei den großen Wellenzahlen immer wesentlich stärker moduliert als bei den kleinen. Im wandnahen Bereich zeigt sich eine charakteristische Krümmung, die bis auf wenige Ausnahmen immer nach links gerichtet ist, wenn man von den kleinen zu den großen Wellenzahlen geht. Die Krümmung verschwindet mit wachsendem Abstand zur Wand und die Ortskurven gehen dann fast in Geraden über. Auch verliert sich die Krümmung mit sinkender Modulationsfrequenz immer mehr.

Alle Ortskurven konvergieren für die hohen Modulationsfrequenzen auf den Ursprung zu, der in dieser Hinsicht als Fixpunkt betrachtet werden kann. Nicht nur die Modulation der Gesamtleistung verschwindet also bei den höchsten Modulationsfrequenzen, sondern auch die Modulation bei den großen räumlichen Wellenzahlen, die ansonsten sehr groß im Vergleich zu der Modulation der Gesamtleistung ist.

Lässt man für den Moment einmal die Schwierigkeiten bei der Umrechnung zwischen zeitlichen und räumlichen Spektren außer acht, dann knüpfen diese Ergebnisse direkt an die offenen Fragen der in der Arbeit von Hesse (1995) genannten Probleme an. Dort wurde bei der Modulation des zeitlichen Spektrums beobachtet, dass die Ortskurven in ihrer Gesamtheit nicht um den Nullpunkt verteilt sind, sondern das »Zentrum« zeigte sich in Richtung $1-i$ verschoben. Für hohe Modulationsfrequenzen verliefen die Ortskurven dann teilweise direkt durch den Ursprung, sodass aufgeprägte Minima im Betrag und Sprünge in den Phasen entstanden. Die höchste untersuchte Modulationsfrequenz des Experiments war $\omega_w^+ = 2,06 \cdot 10^{-2}$ und lag gerade in dem kritischen Bereich, bei der die Ortskurven quasi über den Ursprung hinwegliefen. Unbeantwortet blieb die Frage, was bei weiterer Steigerung der Anregungsfrequenz passieren würde. Ob, wie die Ergebnisse vermuten ließen, sich die Ortskurven über den Ursprung hinweg bewegen würden und damit eine Steigerung der Modulation mit der Anregungsfrequenz bedeuten hätten oder ob sich die Ortskurven auf den Ursprung zusammen ziehen würden und sämtliche Modulationen zum Verschwinden gebracht hätten. Die hier untersuchten Raumspektren beantworten diese Frage zugunsten der zweiten Alternative. Die Modulation verschwindet für alle Raumfrequenzkomponenten des u' -Signals mit steigender Modulationsfrequenz.

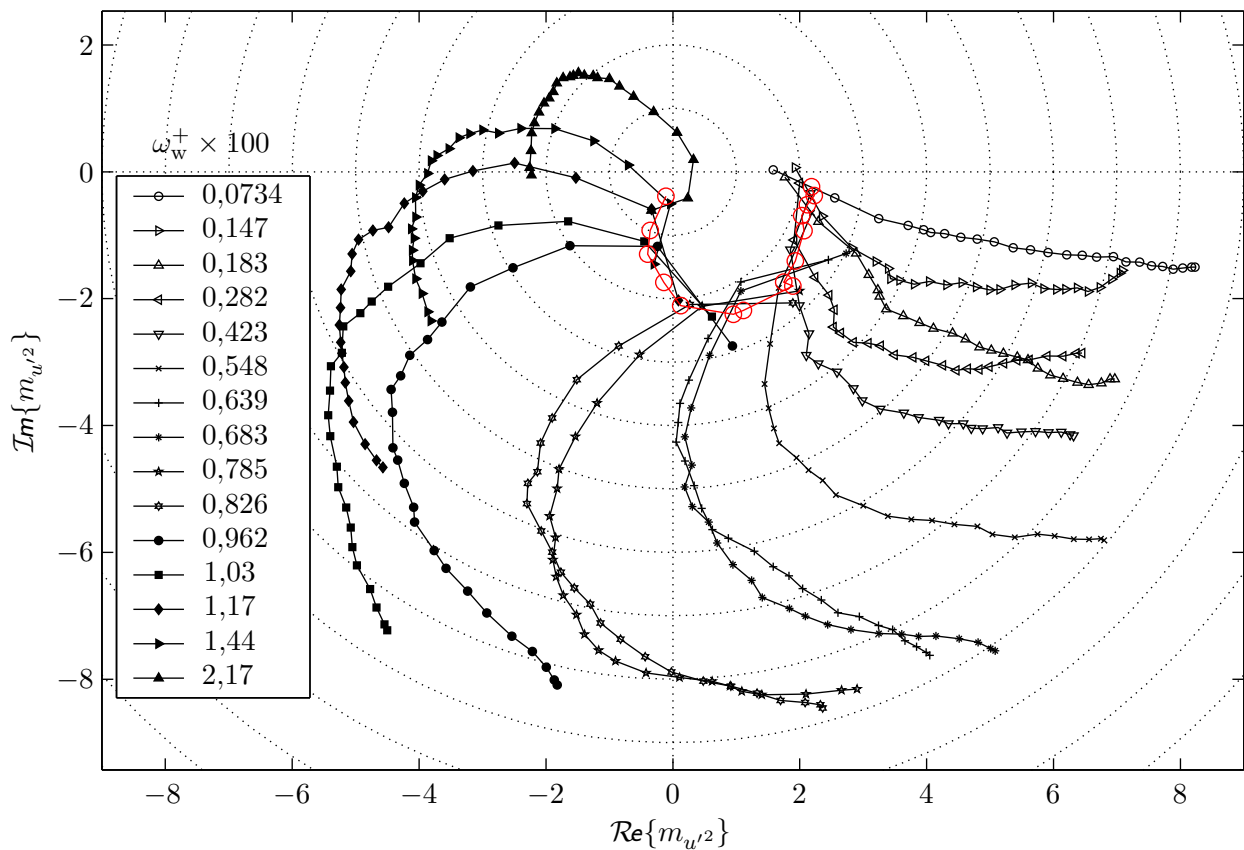
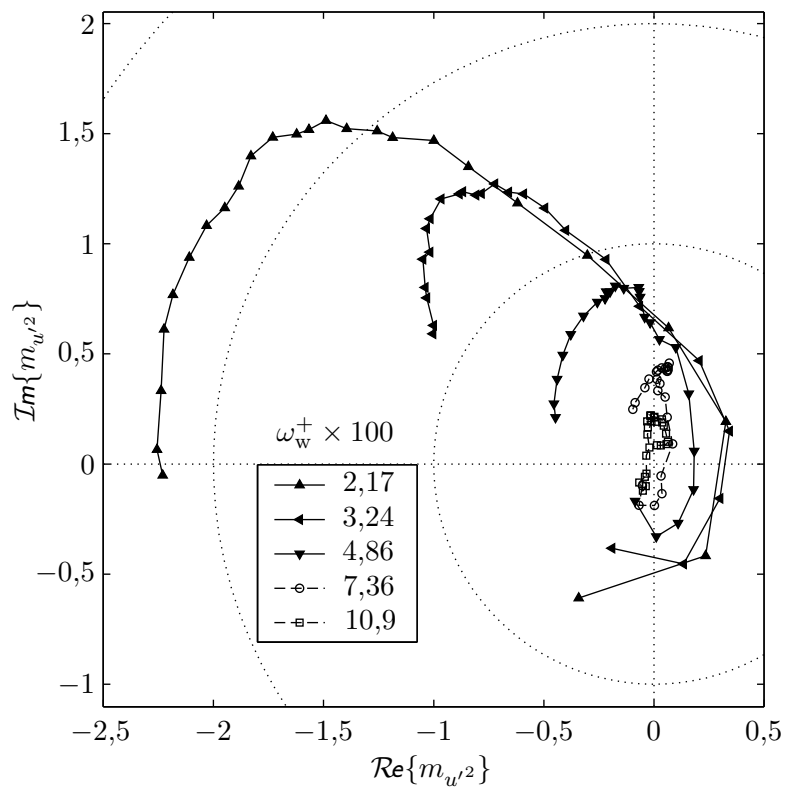


Abb. 7.9: Legende siehe unten

Abb. 7.10

Modulation des axialen räumlichen Spektrums $E_{u'}^2(k_x)$ bei $y^+ = 0,41$ für unterschiedliche Modulationsfrequenzen. Oben: Modulationsfrequenzen bis $\omega_w^+ = 2,2 \cdot 10^{-2}$, unten: vergrößerter Ausschnitt der hohen Modulationsfrequenzen ab $\omega_w^+ = 2,2 \cdot 10^{-2}$.



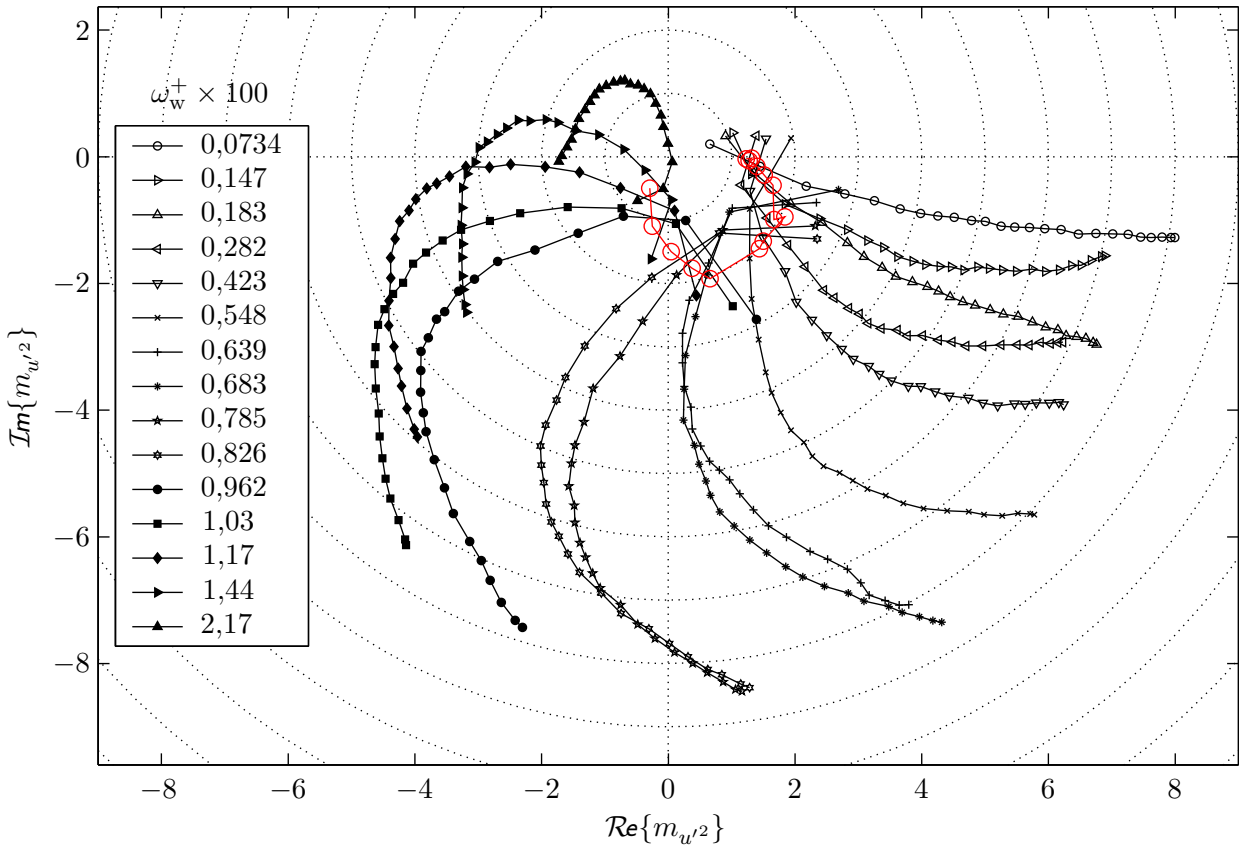


Abb. 7.11: Legende siehe unten

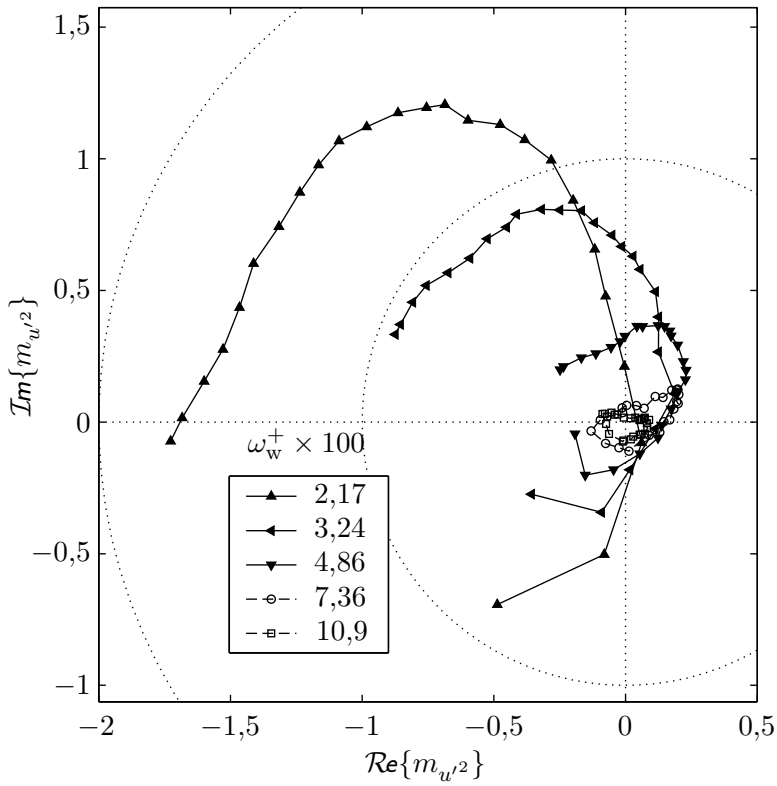


Abb. 7.12
 Modulation des axialen räumlichen Spektrums $E_{u/2}(k_x)$ bei $y^+ = 12$ für unterschiedliche Modulationsfrequenzen. Oben: Modulationsfrequenzen bis $\omega_w^+ = 2,2 \cdot 10^{-2}$, unten: vergrößerter Ausschnitt der hohen Modulationsfrequenzen ab $\omega_w^+ = 2,2 \cdot 10^{-2}$.

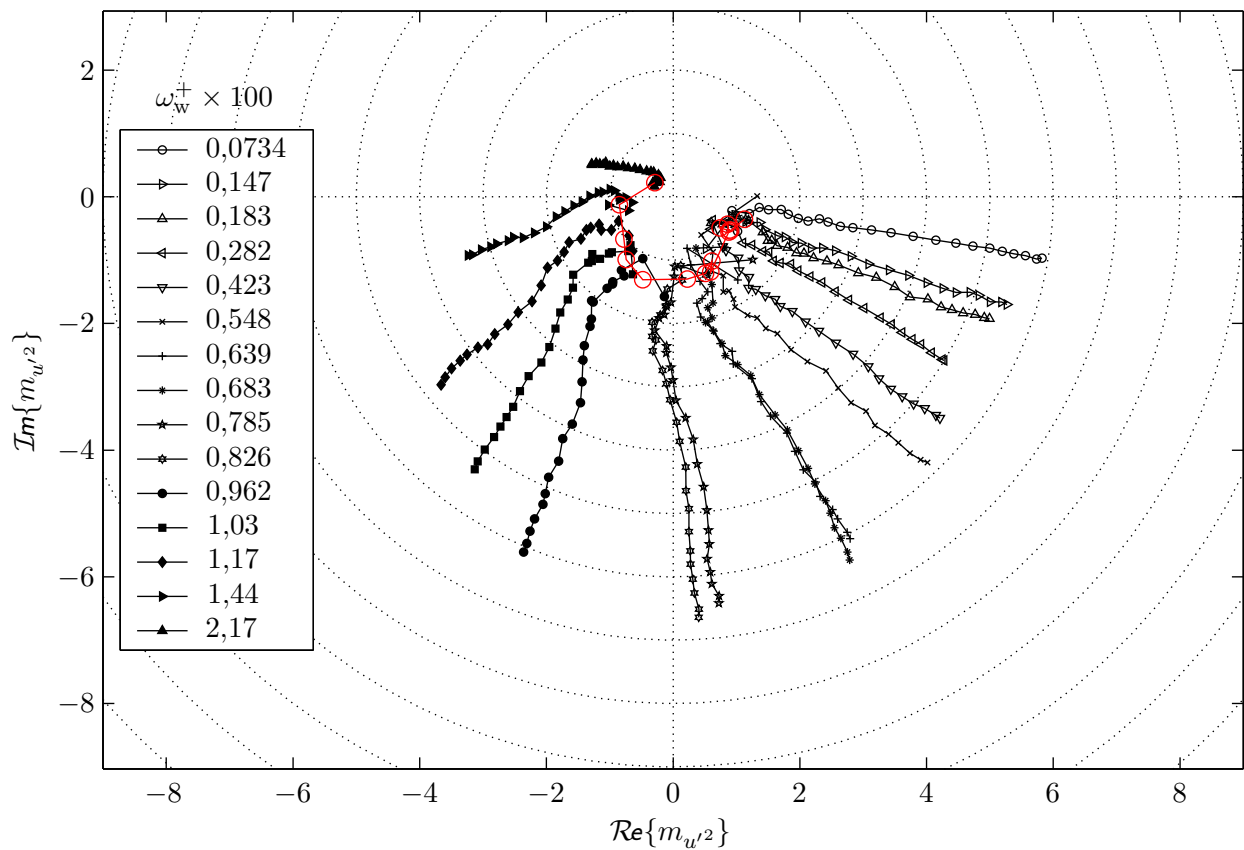
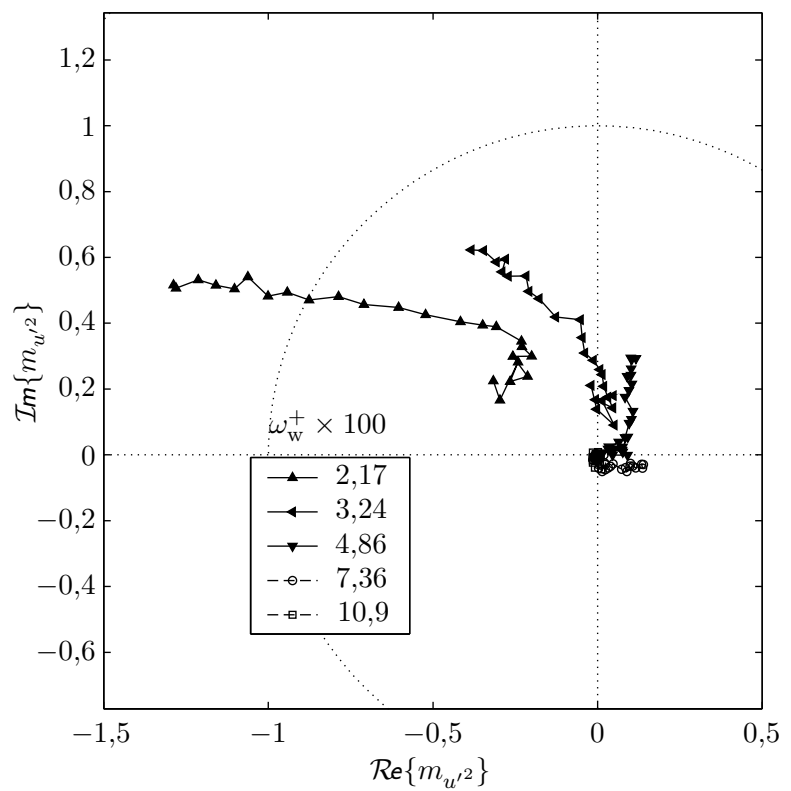


Abb. 7.13: Legende siehe unten

Abb. 7.14

Modulation des axialen räumlichen Spektrums $E_{u'}(k_x)$ bei $y^+ = 68$ für unterschiedliche Modulationsfrequenzen. Oben: Modulationsfrequenzen bis $\omega_w^+ = 2,2 \cdot 10^{-2}$, unten: vergrößerter Ausschnitt der hohen Modulationsfrequenzen ab $\omega_w^+ = 2,2 \cdot 10^{-2}$.



Obwohl die modulierten Zeitspektren des Experiments bei dem Vergleich mit den hier untersuchten modulierten Raumspektren einige Unterschiede aufweisen, wurde qualitativ ein sehr ähnliches Verhalten festgestellt. Die im Experiment beobachtete »Verschiebung« der Ortskurven gegenüber dem Ursprung wurde von Hesse (1995) mit einer unterschiedlichen Modulation der Form des Spektrums und der Modulation der Gesamtleistung (nulltes Moment) gedeutet. Als Konsequenz musste eine Hypothese von früheren Arbeiten dahingehend revidiert werden, dass nicht die tiefen Frequenzen zuerst auf die geänderten Randbedingungen reagieren, sondern, dass umgekehrt die hohen Frequenzen eine kleinere Zeitverzögerung gegenüber der modulierten Wandschubspannung zeigen, wenn allein die Modulation der Form betrachtet wird.

Die Abbildungen 7.9–7.14 zeigen deutlich, dass sich auch hier die Ortskurven quasi um das nullte Moment (die Gesamtleistung) spiralen und nicht um den Ursprung, wie man vielleicht vermutet hätte. In die Abbildungen 7.9, 7.11 und 7.13 sind die nullten Momente jeweils mit eingezeichnet. Die Momente befinden sich immer sehr nah an den Ortskurven. Das gilt auch für die hier nicht eingezeichneten höheren Momente (vergleiche Abbildung 7.7). Im Sinne der Interpretation der geraden Momente als Modulationsfaktoren der räumlichen Ableitungen, zeigt der Verlauf der Ortskurven somit auch die Modulation der Gesamtleistungen der axialen Geschwindigkeitsgradienten in der Strömung.

Die Modulation der Form des Spektrums lässt sich nun einfach dadurch separieren, dass man die nullten Momente jeweils in den Ursprung legt. Denn nach der üblichen Linearisierung gilt:

$$\frac{\langle E_{u'^2} \rangle(k_x)}{\langle u'^2 \rangle} = \frac{\overline{E_{u'^2}}(k_x) + \widetilde{E_{u'^2}}(k_x)}{u'^2 + \widehat{u'^2}} \quad (7.9)$$

$$\approx \frac{\overline{E_{u'^2}}(k_x)}{u'^2} + \frac{\widetilde{E_{u'^2}}(k_x)}{u'^2} - \frac{\overline{E_{u'^2}}(k_x)\widehat{u'^2}}{u'^2{}^2}. \quad (7.10)$$

Und für den Modulationsfaktor des auf die phasenabhängige Gesamtleistung normierten räumlichen Spektrums folgt:

$$m_{E_{u'^2}} = \frac{\widehat{E_{u'^2}}(k_x)}{\overline{E_{u'^2}}(k_x)} - \frac{\widehat{u'^2}}{u'^2}. \quad (7.11)$$

Abbildung 7.15 zeigt Ortskurven des modulierten axialen räumlichen Spektrums im Vergleich mit experimentell ermittelten Modulationsfaktoren. Jeweils in der Simulation und bei den Messwerten (Beykirch 1996; Hesse 1995) ist die Modulation der Gesamtleistung abgezogen, sodass die nullten Momente aller Ortskurven im Ursprung liegen. Gemessen wurde dabei jedoch nicht direkt die Modulation von räumlichen Spektren, sondern die Modulation von Zeitspektren. Nimmt man die Gültigkeit der Taylorhypothese im instationären Fall an, dann lassen sich mit der lokalen Konvektionsgeschwindigkeit $u_c(y)$ die Zeitfrequenzen ω in räumliche Wellenzahlen k_x umrechnen: $k_x = \omega/u_c$. Die Konvektionsgeschwindigkeit für u bei dem gewählten Wandabstand $y^+ = 10,2$ ergibt sich aus Abbildung 5.5 auf Seite 54 in etwa zu $u_c = 10 u_\tau$. Zu den Zeitfrequenzen der Messung ist zu sagen, dass es sich dabei um die Mittenfrequenzen von sieben Oktavbändern handelt über die die Zeitspektren jeweils gemittelt wurden. Von den räumlichen Wellenzahlen der Simulation sind dann diejenigen ausgewählt worden, die den in Raumfrequenzen umgerechneten Mittenfrequenzen der Messung am nächsten liegen. Man beachte in der Auftragung, dass den beiden tiefsten Frequenzen der Messung keine passenden Raumfrequenzen in der Simulation zugeordnet werden konnte – die Periodenlänge war dafür zu klein – sodass hier die Raumfrequenz null gewählt wurde. Damit enthalten die Simulationsortskurven in der Auftragung nur jeweils sechs Punkte. Trotz der vielen Näherungen stimmen die Ortskurven der Simulation und die der Messungen ziemlich gut überein.

Abweichungen gibt es vor allem bei den hohen Raumfrequenzen. Das verwundert jedoch nicht, denn sowohl die Simulationwerte als auch die Messwerte müssen hier mit besonderer Skepsis betrachtet werden. Insbesondere deshalb, weil die Leistung, die in den großen Wellenzahlkomponenten steckt, sehr klein und damit die Fehler der Modulationsfaktoren sehr groß werden. Die Abweichungen bei den tieferen Frequenzen sind vornehmlich auf die etwas unterschiedlichen Anregungsfrequenzen von Messung und Simulation zurückzuführen. Die insgesamt recht gute Übereinstimmung scheint die Gültigkeit der instationären Taylorhypothese zu bestätigen. Auf prinzipielle Fehler der aus Zeitsignalen gewonnen Modulationsfaktoren soll hier nicht eingegangen werden. Es sei hierzu auf die Arbeit von Ickler (1997) verwiesen. Insbesondere muss beachtet werden, dass bereits eine modulierte Konvektionsgeschwindigkeit zu einer scheinbaren Modulation im Spektrum führt.

Die wandnormale und die spannweite Geschwindigkeitskomponente

Messwerte zur wandnormalen und spannweitigen Geschwindigkeitskomponente der *instationären* turbulenten Strömung sind vergleichsweise selten. Mit den Daten der durchgeführten Simulation ist hier eine wichtige Ergänzung geschaffen worden. Unter anderem konnten so auch die modulierten Spektren dieser Größen in gleicher Weise untersucht werden, wie es mit den experimentellen Daten fast ausschließlich mit der axialen Komponente gemacht wurde. Ob sich dabei die senkrechten Komponenten v' und w' in ähnlicher Weise verhalten würden wie u' war zunächst offen. Insbesondere deshalb, weil sich u' in vielerlei Hinsicht anders verhält als v' oder w' . So wird die turbulente kinetische Energie primär durch Produktion von u -Schwankungen erzeugt und vom Druck erst in einem sekundären Prozess auf v' und w' verteilt.

In der Tat verhalten sich die modulierten Gesamtleistungen zwar ähnlich, im Detail aber dennoch etwas unterschiedlich, wie Kapitel 6 gezeigt hat. Die spektral aufgeschlüsselte Gesamtleistung bei vier Wandabständen für alle drei Komponenten der Geschwindigkeit zeigen die Abbildungen 7.16 und 7.17. Die Modulation der Gesamtleistung wurde hier nicht abgezogen. Zur besseren Übersicht sind markierende Symbole jeweils nur für die erste Harmonische (die Wellenlänge ist dabei gleich der axialen Ausdehnung des Rechengebietes) und die Nyquist Frequenz (Wellenlänge gleich doppelter Gitterpunktabstand) eingezeichnet.

Als Hauptergebnis der Vergleiche kann festgestellt werden, dass die spannweite und auch die wandnormale Komponente der Geschwindigkeitsfluktuationen sehr ähnlich wie die axiale Komponente moduliert werden. Sowohl die Richtung, als auch – mit Einschränkung – die Ausdehnung und Form der Ortskurven ist bei allen Frequenzen und allen Wandabständen sehr ähnlich. Die Drehungen der Kurven gegen die positive reelle Achse entsprechen den Zeitverzögerungen mit denen die einzelnen Komponenten auf die modulierte Wandschubspannung reagieren und spiegeln damit einen wichtigen Teil der Dynamik der turbulenten Strömung wieder. Offenbar gibt es hier keine besonderen Unterschiede zwischen $\widehat{u'^2}(k_x)$, $\widehat{v'^2}(k_x)$ und $\widehat{w'^2}(k_x)$. Gewissen Abweichungen von den beiden anderen Komponenten zeigt v' , die jedoch sehr gering ausfallen, sodass an dieser Stelle nicht weiter darauf eingegangen wird.

Kreuzspektrum zwischen der axialen und der normalen Komponente

Das Kreuzspektrum $E_{u'v'}(k_x)$ kann nicht in äquivalenter Weise wie oben die Autospektren behandelt werden, denn letztere sind rein reelle Größen, während Kreuzspektren auch eine Phase haben. Beim modulierten Kreuzspektrum tritt das Problem auf, dass man die Modulation einer an sich schon komplexen Größe untersuchen muss. Das phasengemittelte Kreuzspektrum könnte zwar als komplexes Signal ebenfalls nach Fourier in Einzelfrequenzen bezüglich der Wandfrequenz zerlegt werden,

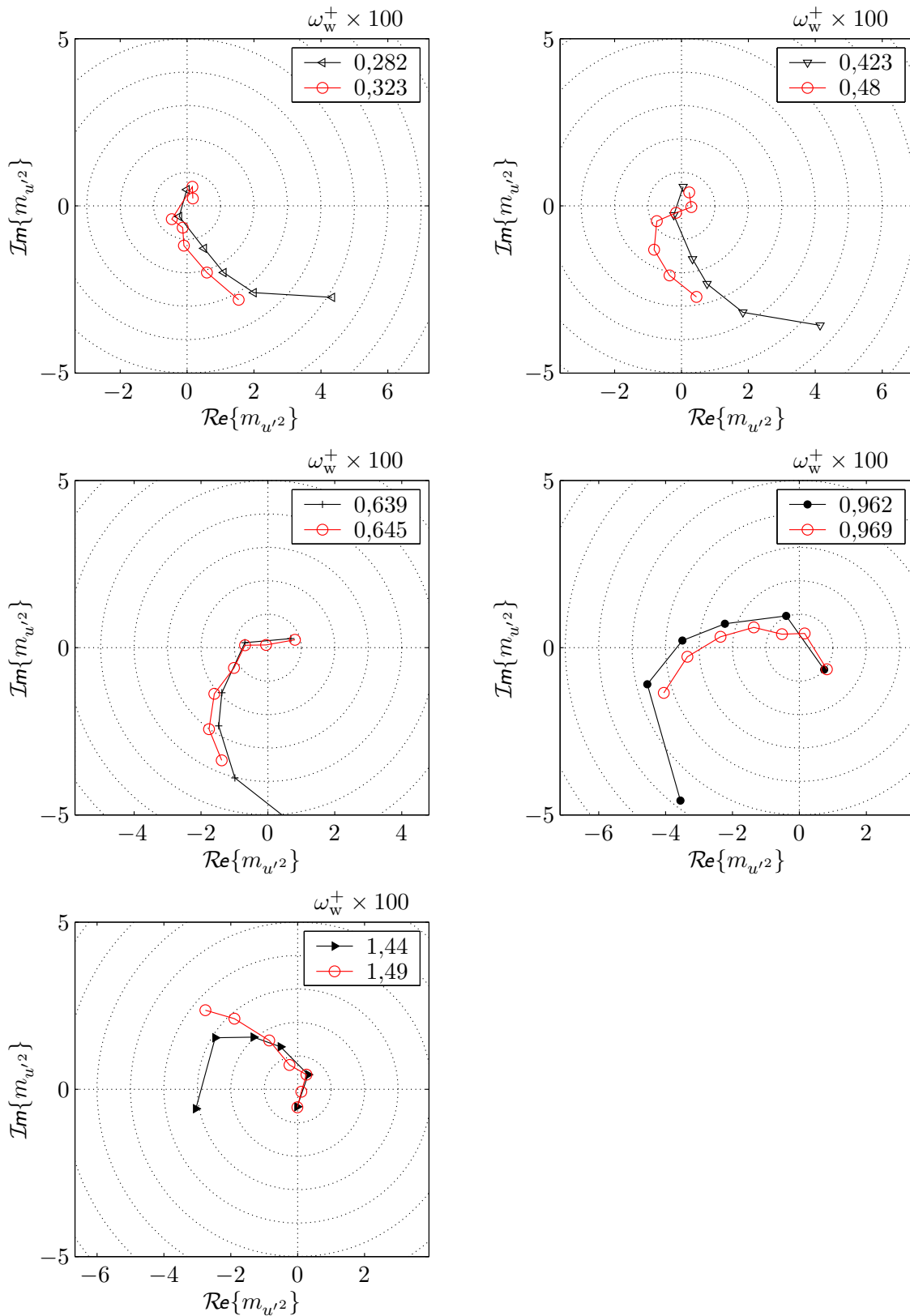


Abb. 7.15: Modulierte Zeitspektren aus Messungen (Beykirch 1996) (o) im Vergleich mit den modulierten axialen räumlichen Spektren der Simulation (Symbole wie in Abbildung 7.8). Die Zeitfrequenzen sind mit $k_x^+ = \omega/u_c$ in Raumfrequenzen umgerechnet. Der Wandabstand ist $y^+ = 10,2$ und die Konvektionsgeschwindigkeit ist dort ca. $u_c = 10 u_\tau$.

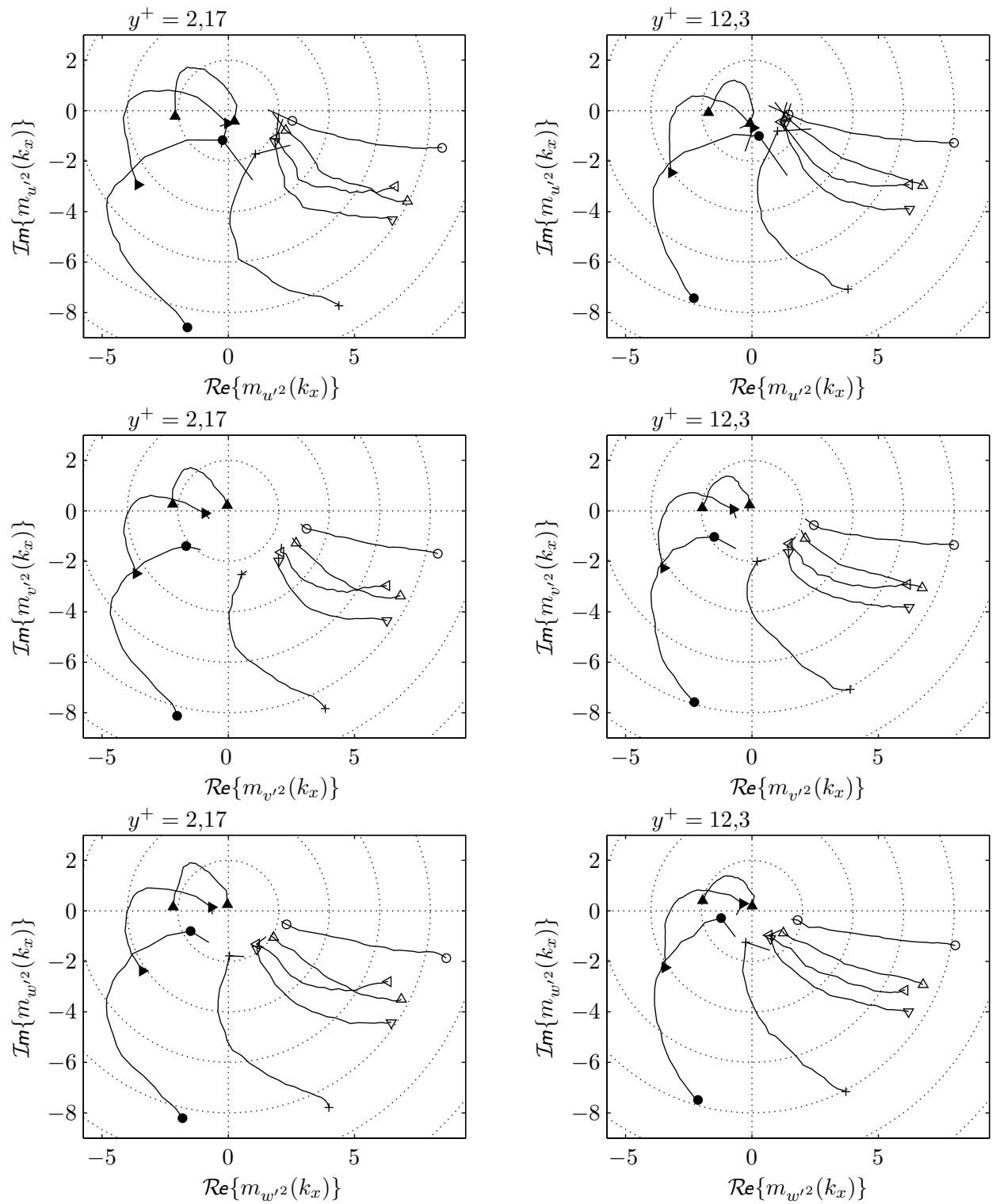


Abb. 7.16: Modulation der räumlichen Spektren $E_{u'}^2(k_x)$, $E_{v'}^2(k_x)$ und $E_{w'}^2(k_x)$ für unterschiedliche Modulationsfrequenzen bei den Wandabständen $y^+ = 2,17$ (links) und $y^+ = 12,3$ (rechts). (Symbole wie in Abbildung 7.8)

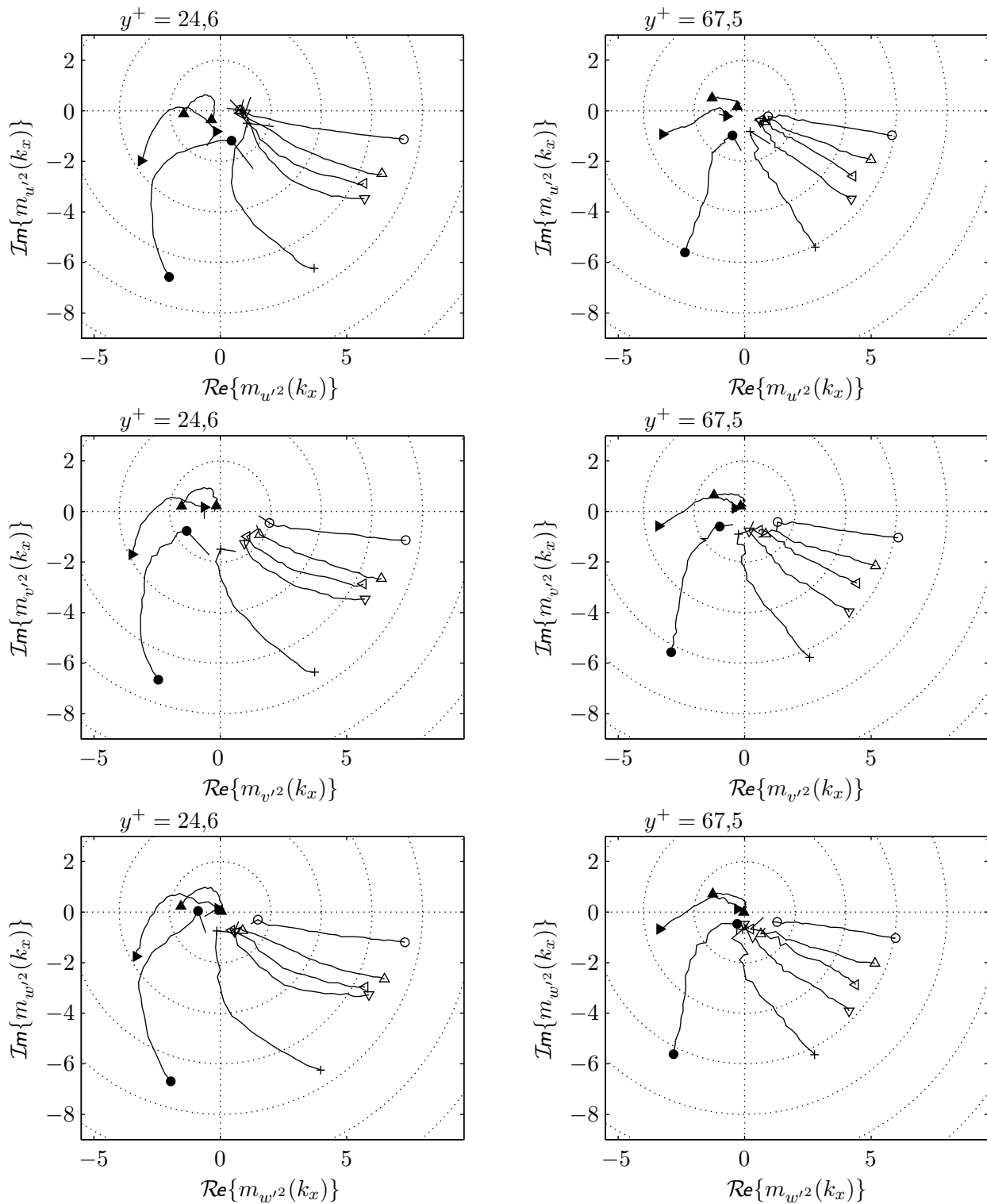


Abb. 7.17: Modulation der räumlichen Spektren $E_{u'}(k_x)$, $E_{v'}(k_x)$ und $E_{w'}(k_x)$ für unterschiedliche Modulationsfrequenzen bei den Wandabständen $y^+ = 24,6$ (links) und $y^+ = 67,5$ (rechts). (Symbole wie in Abbildung 7.8)

um dann die erste Harmonische als Grundlage zur Berechnung der Modulationsfaktoren zu benutzen, man hätte damit aber zwei ganz unterschiedliche Phasen miteinander vermischt. Zum einen die Phase des Kreuzspektrums von u' und v' , die ein Maß für die räumliche Verschiebung einzelner Frequenzkomponenten der Signale ist, und zum anderen die Phase bezüglich der Wandbewegung. Der Interpretation zugänglicher ist dagegen die getrennte Untersuchung des modulierten Realteils und des modulierten Imaginärteils des Kreuzspektrums. Dem Realteil kommt dabei die besondere Bedeutung zu, dass er allein für die turbulente Schubspannung verantwortlich ist, also dafür, dass u' und v' im Mittel – am selben Ort – miteinander korreliert sind.⁷

Im Folgenden wird zunächst die Modulation des Realteils des Kreuzspektrums $E_{u'v'}(k_x) = E_{u'v'}^{(r)} + iE_{u'v'}^{(i)}$ betrachtet. Physikalisch wird damit die Reaktion der turbulente Schubspannung $-\rho\overline{u'v'}$ auf die äußere Störung dahingehend untersucht, bei welchen Wellenlängen (die in gewisser Weise als Strukturabmessungen gedeutet werden können) sie sich besonders unempfindlich oder empfindlich gegenüber geänderten Randbedingungen erweist. Im Gegensatz zur Gesamtschubspannung

$$-\rho\overline{u'v'} = -2\rho \int_0^\infty \overline{E_{u'v'}^{(r)}}(k_x) dk_x \quad (7.14)$$

kann $\overline{E_{u'v'}^{(r)}}(k_x)$ teilweise null oder sogar negativ werden (Abbildung 7.5 auf Seite 140). Es ist somit wenig sinnvoll Modulationsfaktoren der Form

$$m_{u'v'}(k_x) = \frac{\widehat{E_{u'v'}^{(r)}}(k_x)}{\overline{E_{u'v'}^{(r)}}(k_x)} \frac{\widehat{\tau_w}}{\overline{\tau_w}} \quad (7.15)$$

zu untersuchen. Das Kreuzspektrum wird daher zunächst auf das geometrische Mittel der zugehörigen Autospektren normiert und es wird damit zur Kohärenzfunktion.

Modulierte Kohärenzfunktion

Für den komplexen Wechselanteil der phasengemittelte Kohärenzfunktion

$$\langle \gamma_{u'v'}(k_x) \rangle = \frac{-\langle E_{u'v'}(k_x) \rangle}{\sqrt{\langle E_{u'^2} \rangle(k_x) \langle E_{v'^2} \rangle(k_x)}} \quad (7.16)$$

ergibt sich aus einer zu zum Einschub des Abschnitts 6.2.1 (Seite 94) analogen Herleitung folgende lineare Näherung:

$$\widehat{\gamma}_{u'v'} \approx \frac{-\widehat{E_{u'v'}}}{\sqrt{\widehat{E_{u'^2}} \widehat{E_{v'^2}}}} - \overline{\gamma}_{u'v'} \frac{\widehat{E_{u'^2}}/\overline{E_{u'^2}} + \widehat{E_{v'^2}}/\overline{E_{v'^2}}}{2} \quad \text{mit} \quad \overline{\gamma}_{u'v'} = \frac{-\overline{E_{u'v'}}}{\sqrt{\overline{E_{u'^2}} \overline{E_{v'^2}}}}. \quad (7.17)$$

⁷ Denn das Kreuzspektrum ist die Fourier Transformierte der *reellen* Korrelationsfunktion $R_{u'v'}(r_x)$. Daher ist $E_{u'v'}(-k_x) = E_{u'v'}^*(k_x)$ und somit

$$\mathcal{E}[u'v'] = R_{u'v'}(r_x = 0) = \int_{-\infty}^{\infty} E_{u'v'}(k_x) dk_x = 2 \int_0^{\infty} \mathcal{Re}\{E_{u'v'}(k_x)\} dk_x. \quad (7.12)$$

Der Imaginärteil ist für die Korrelation zwischen u' und v' für Verschiebungen mit $r_x \neq 0$ wichtig. Für den zeitabhängigen Wechselanteile des Spektrums gilt – hier nicht als analytisches Signale geschrieben:

$$\widetilde{E}_{u'v'}(k_x, t) = \frac{1}{2} \widehat{E}_{u'v'}(k_x) e^{i\omega_w t} + \frac{1}{2} \widehat{E}_{u'v'}^*(-k_x) e^{-i\omega_w t}. \quad (7.13)$$

Wichtig ist das Minuszeichen, denn es sorgt dafür, dass nach Rücktransformation in den Raumbereich der Wechselanteil der Kreuzkorrelation reell wird.

Dabei sind die k_x -Abhängigkeiten der besseren Übersicht halber weggelassen. Das Betragsquadrat $|\hat{\gamma}_{u'v'}(k_x)|^2$ der Kohärenzfunktion wird oft als Korrelation der Signale bei einer bestimmten Raumfrequenzkomponente gedeutet. Aus den weiter oben beschriebenen Gründen, wird hier aber der Realteil des Kreuzspektrums eingesetzt, um die Modulation der spektral aufgelösten turbulenten Schubspannung zu untersuchen:

$$\hat{\gamma}_{u'v'}^{(r)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{-\hat{E}_{u'v'}^{(r)}}{\sqrt{\bar{E}_{u'^2} \bar{E}_{v'^2}}} - \bar{\gamma}_{u'v'} \frac{\hat{E}_{u'^2}/\bar{E}_{u'^2} + \hat{E}_{v'^2}/\bar{E}_{v'^2}}{2}. \quad (7.18)$$

Bezieht man $\hat{\gamma}_{u'v'}^{(r)}$ ⁸ auf die relative Modulation der Wandschubspannung, erhält man den Modulationsfaktor der Kohärenzfunktion:

$$m_{\hat{\gamma}_{u'v'}^{(r)}} = \underbrace{\frac{-\hat{E}_{u'v'}^{(r)}/a_{\tau_w}}{\sqrt{\bar{E}_{u'^2} \bar{E}_{v'^2}}}}_{m_{-u'v'}(k_x)} - \bar{\gamma}_{u'v'} \underbrace{\frac{\hat{E}_{u'^2}/\bar{E}_{u'^2} + \hat{E}_{v'^2}/\bar{E}_{v'^2}}{2a_{\tau_w}}}_{\frac{1}{2}(m_{u'^2}(k_x) + m_{v'^2}(k_x))}. \quad (7.19)$$

Der erste Term von Gleichung (7.19) kann dabei als (verallgemeinerter) Modulationsfaktor der turbulenten Schubspannung interpretiert werden.

Abbildung 7.18 zeigt $m_{-u'v'}(k_x)$ und $\frac{\bar{\gamma}_{u'v'}}{2}(m_{u'^2}(k_x) + m_{v'^2}(k_x))$ beim Wandabstand $y^+ = 12$ im Vergleich. Die höchsten Raumfrequenzkomponenten wurden dabei nicht berücksichtigt (vergleiche die Anmerkung der Fussnote 6 von Seite 138). Die höchste dargestellte Raumfrequenz entspricht einer Wellenlänge von $\lambda_x^+ \approx 38,8$ die tiefste Raumfrequenz einer Wellenlänge von $\lambda_x^+ \approx 775$.

Offensichtlich werden die beiden Terme der Gleichung (7.19) sehr ähnlich moduliert, insbesondere für tiefe Modulationsfrequenzen und bei höheren Raumfrequenzen. Nahe der Wand ($y^+ < 5$) und für größere Wandabstände ($y^+ > 40$) ist die Übereinstimmung noch wesentlich besser. Für $y^+ = 50$ ist der Vergleich in Abbildung 7.19 zu sehen. Nach Gleichung (7.19) bedeutet das für den Modulationsfaktor der Kohärenzfunktion, dass er für nahezu alle Wandabstände, alle Modulationsfrequenzen und auch alle Raumfrequenzkomponenten sehr klein ist. Die räumliche Kohärenz kann somit zu den kaum beeinflussbaren Eigenschaften der Turbulenz gezählt werden. Das gilt insbesondere auch für die spannweitige Kohärenz, die hier jedoch nicht genauer betrachtet wird. Im Folgenden werden aber die zweidimensionalen Spektren der Einzelgrößen u' und v' sowie das Spektrum von w' genauer untersucht, vor allem auch deren Modulation.

7.3 Zweidimensionale Korrelationen und Spektren

Bereits die eindimensionalen axialen Spektren haben gezeigt, dass die aufgeprägte Störung die kleinskaligen und die großskaligen turbulenten Schwankungsbewegungen ganz unterschiedlich beeinflusst. Weitgehend unabhängig von der Modulation der Gesamtleistung erwies sich die Modulation der Form der Spektren. Bei den im Folgenden betrachteten zweidimensionalen Spektren $E_{u'_i u'_j}(k_x, k_z)$ wird nun zusätzlich zur axialen Struktur die spannweitige Struktur der Turbulenz mit in die Untersuchungen einbezogen. $E_{u'_i u'_j}(k_x, k_z)$ kann entweder aus der zweidimensionalen Korrelationsfunktion

$$R_{u'_i u'_j}(r_x, r_z) = \mathcal{E}[u'_i(x, z)u'_j(x + r_x, z + r_z)] \quad (7.20)$$

⁸ Der hochgestellte Index »(r)« deutet dabei lediglich an, dass die Kohärenzfunktion mit dem Realteil des Kreuzspektrums berechnet wurde, es gilt also *nicht*: $\hat{\gamma}_{u'v'}^{(r)} = \text{Re}\{\hat{\gamma}_{u'v'}\}$.

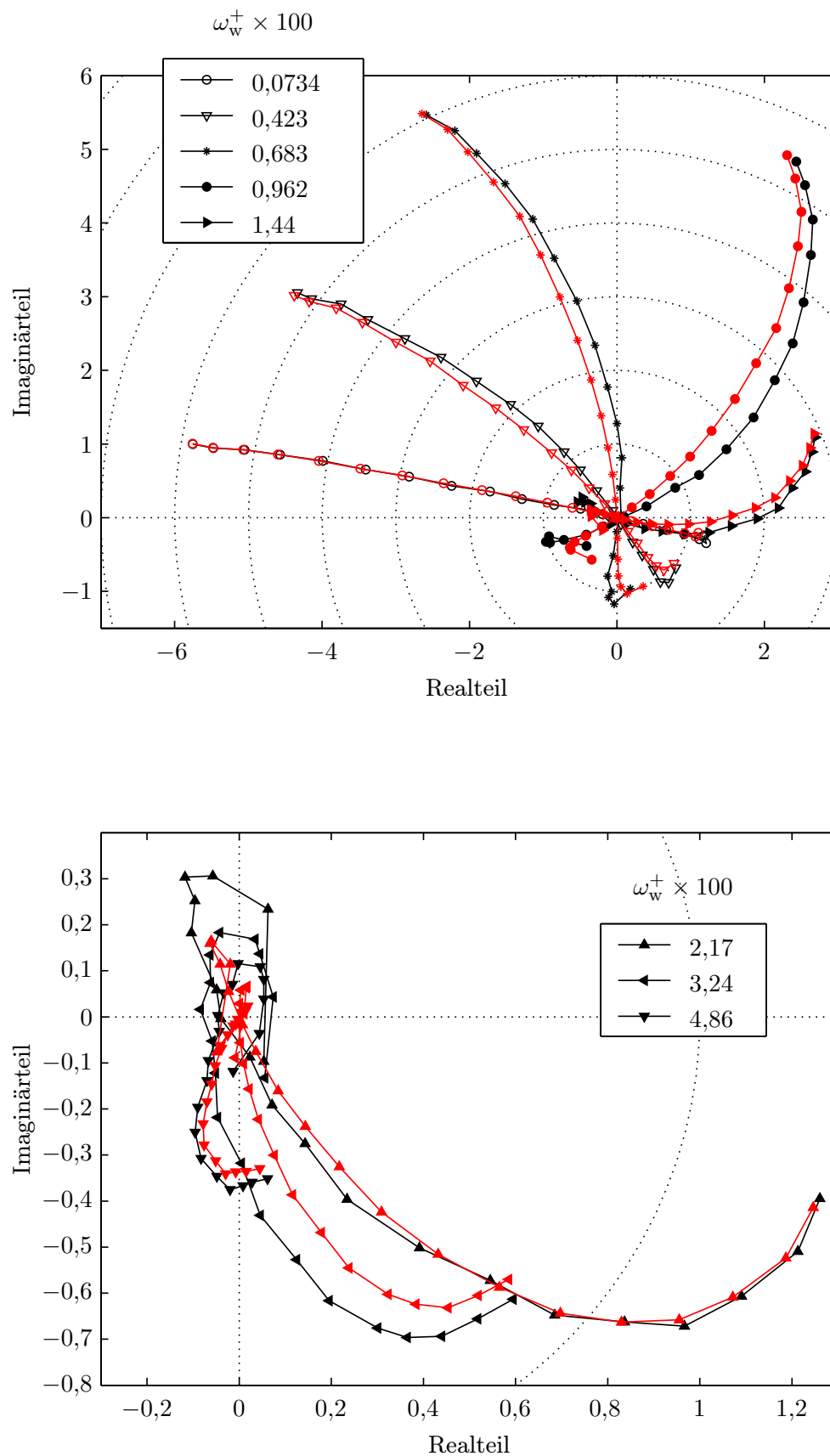


Abb. 7.18: Der verallgemeinerte Modulationsfaktor $m_{-u'v'}(k_x)$ (schwarz) im Vergleich mit $\frac{\gamma_{u'v'}}{2}(m_{u',2}(k_x) + m_{v',2}(k_x))$ (rot) beim Wandabstand $y^+ = 12$.

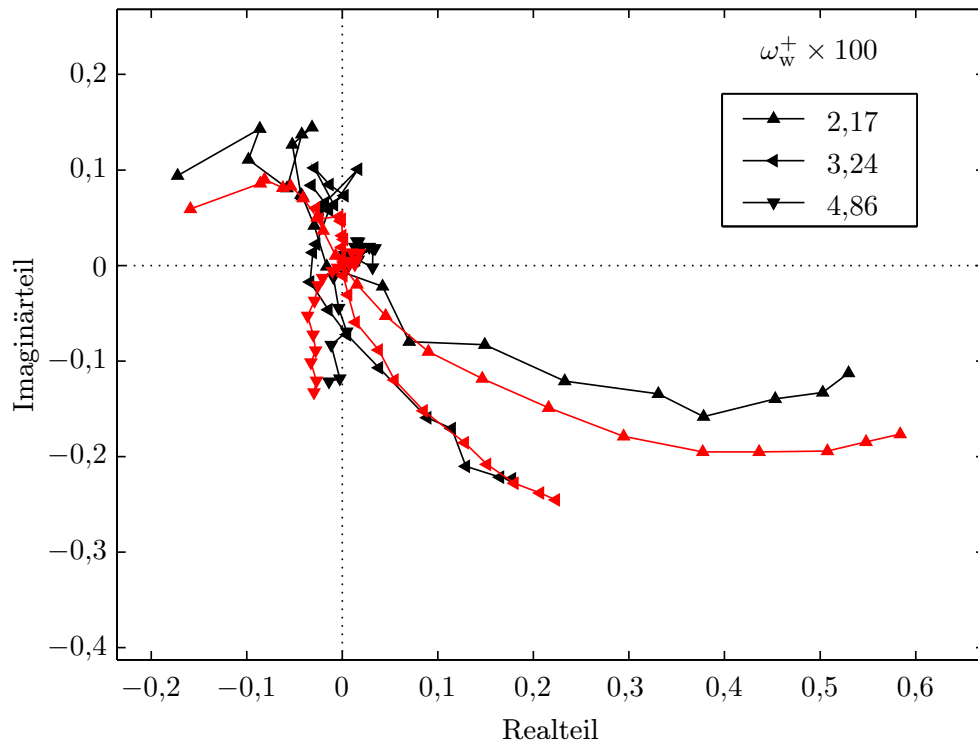
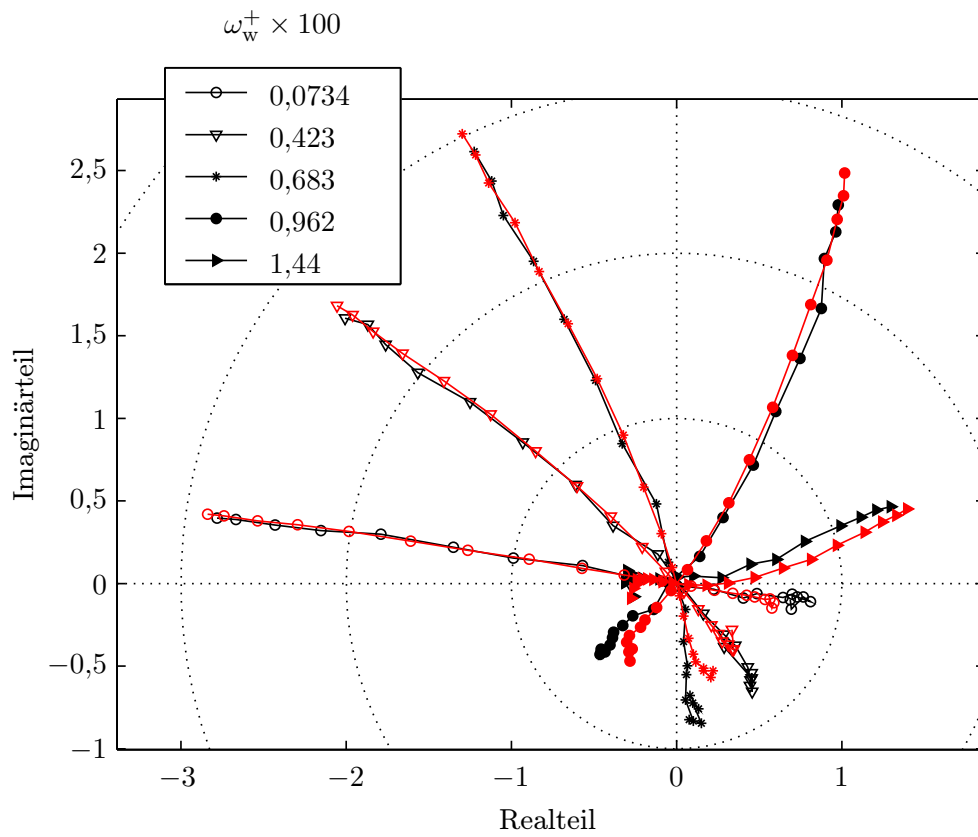


Abb. 7.19: Der verallgemeinerte Modulationsfaktor $m_{-u'v'}(k_x)$ (schwarz) im Vergleich mit $\frac{\bar{\gamma}_{u'v'}}{2}(m_{u'^2}(k_x) + m_{v'^2}(k_x))$ (rot) beim Wandabstand $y^+ = 50$.

berechnet werden oder direkt aus den räumlichen Amplitudenspektren $U'_i(k_x, k_z) = \mathcal{F}\{u'_i(x, z)\}$:

$$E_{u'_i u'_j}(k_x, k_z) = \mathcal{E}[U'_i(k_x, k_z)(U'_j)^*(k_x, k_z)]. \quad (7.21)$$

In der Simulation kann die zweite (schnellere) Methode benutzt werden, während in realen Experimenten Korrelationsfunktionen einfacher zu messen sind⁹. Die komplexe Amplitude des Wechselanteils wurde direkt während der Simulation durch Wichten mit $e^{-i\omega_w t}$ berechnet. Für die reellen Autospektren geschah das gemäß

$$\widehat{E}_{u'_i{}^2}(k_x, k_z) = \frac{1}{N T_w} \int_0^{N T_w} |U'_i(k_x, k_z)|^2 e^{-i\omega_w t} dt, \quad (7.22)$$

wobei N die Zahl der ausgewerteten Wandperioden ist. Bei den Kreuzspektren $E_{u'_i u'_j}(k_x, k_z)$ wurden die Modulation des Realteils und des Imaginärteils getrennt untersucht. Die Leistung des Autospektrums $E_{u'_i{}^2}(k_x, k_z)$ bei $k_x = k_z = 0$ kann nicht direkt während der Simulation bestimmt werden, denn dann sind das Phasenmittel und damit die turbulenten u' -Schwankungen noch unbekannt. Nach der in Abschnitt 4.9 beschriebenen Methode sind daher sowohl das Gleichspektrum $\overline{E}_{u'_i{}^2}$ als auch $\widehat{E}_{u'_i{}^2}$ bei $k_x = k_z = 0$ korrigiert worden.

7.3.1 Gleichwerte

Autoleistungsspektren

Abbildung 7.20 zeigt die langzeitgemittelten Autospektren der turbulenten Schwankungsbewegungen beim Wandabstand $y^+ = 0,41$ und $y^+ = 14,1$. Die Spektren sind so normiert, dass

$$\int E(k_x, k_z) dk_x dk_z = 1$$

gilt. Für die aus den normierten Spektren berechneten Korrelationen folgt damit

$$R(r_x = 0, r_z = 0) = 1.$$

Allgemein fällt bei den zweidimensionalen Spektren auf, dass die größte Leistung vornehmlich in k_z -Richtung verteilt ist. Die energiereichsten Anteile der turbulenten Schwangungsbewegungen findet man für $k_x = 0$, das sind Längs-»Strukturen« ohne jegliche Variation in Strömungsrichtung. Andererseits tragen Strukturen mit $k_z = 0$ nur vergleichsweise wenig zur Gesamtleistung bei, ausgenommen solche Strukturen, für die auch k_x klein ist. Die drei Komponenten zeigen dabei ein ähnliches, im Detail aber doch unterschiedliches Verhalten. Unabhängig vom Wandabstand gilt beispielsweise $E_{v'^2}(k_x = 0, k_z = 0) = 0$, denn das inkompressible Fluid gestattet keine einheitliche wandnormale Bewegung (zu jedem Zeitpunkt muss das in der x - z -Ebene gemittelte v exakt null sein). $E_{w'^2}(k_x = 0, k_z = 0)$ liefert dagegen fast den größten Beitrag zur Gesamtleistung der spannungsweitigen Schwankungen. In Wandnähe fällt auf, dass das Spektrum der spannungsweitigen Komponente für kleine k_z -Werte eine Arte »Einschnürung« aufweist. Die w -Schwankungen mit $k_z = 0$ sind in Wandnähe offenbar besonders energiearm.

⁹ Dazu genügen im Prinzip zwei Einzelsonden, die räumlich gegeneinander verschoben werden. Für verschiedene Abstände der Sonden müssen dann jeweils die zeitlich fluktuierenden Geschwindigkeiten gemessen werden. Solche Experimente sind meist sehr aufwändig und mit einigen messtechnischen Problemen verbunden.

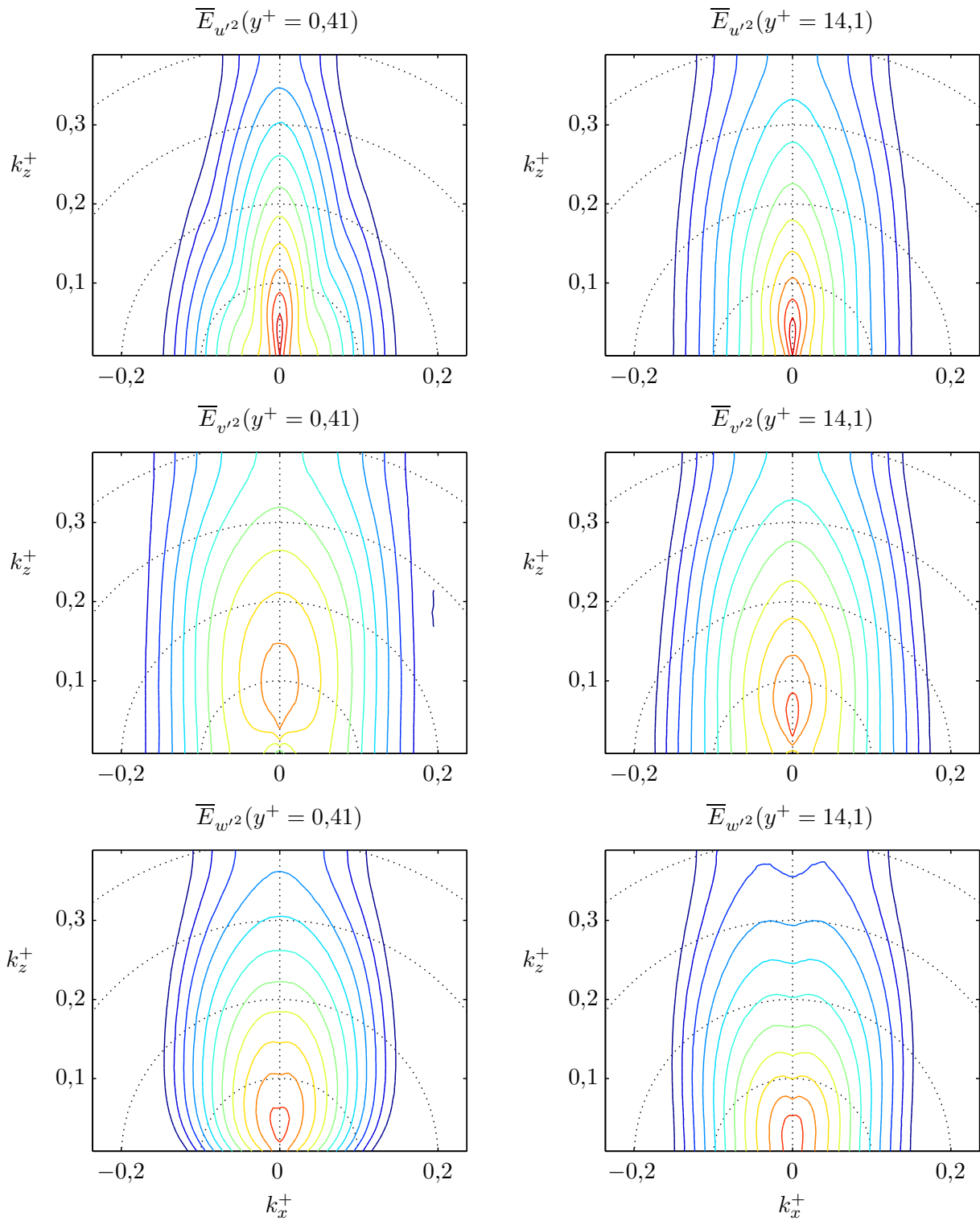


Abb. 7.20: Auf die Gesamtleistung $\overline{u_i^2}$ normierte langzeitgemittelte Autospektren $E_{u_i^2}(k_x, k_z)$ der turbulenten Schwankungsbewegungen beim Wandabstand $y^+ = 0,41$ (links) und $y^+ = 14,1$ (rechts). Die Höhenlinien sind logarithmisch verteilt: von 10^{-3} bis 10^3 in 0,5-er Schritten des Exponenten.

Beykirch (1996) hat die zeitspektral aufgelöste spannweitige Korrelation $R(\omega, r_z)$ von u' gemessen. Die Zeitfrequenzen ω hat er – der Taylorhypothese folgend – mit der mittleren Strömungsgeschwindigkeit beim jeweiligen Wandabstand in Raumfrequenzen k_x umgerechnet. Aus einer Modellfunktion für die spannweitige Korrelation ließ sich den einzelnen Längswellenlängen $\lambda_x = 2\pi/k_x$ eine Querwellenlänge λ_z derart zuordnen, dass die Kombination (λ_x, λ_z) als dominante »Struktur« angesehen werden konnte. Der Zusammenhang zwischen Längs- und Querskalen innerhalb der Pufferschicht folgte dabei dem einem einfachen Skalierungsgesetz:

$$\frac{\lambda_x^+}{\lambda_z^+} = C \cdot (\lambda_x^+)^m. \quad (7.23)$$

Die vom Wandabstand abhängigen Konstanten C und m wurden im Bereich $10 \leq y^+ \leq 50$ für C mit 0,02 bis 0,025 und für m mit 0,76 bis 0,8 angegeben. Das in der Simulation ausgewerteten räumlich zweidimensionalen Spektrum $E_{u'^2}(k_x, k_z)$, könnte zunächst in $R_{u'^2}(k_z, r_z)$ umgerechnet werden und dann der selben Prozedur unterzogen werden, wie sie für die Messdaten durchgeführt wurde. Die Zuordnung einer dominanten spannweitigen Raumfrequenz oder Wellenlänge zu einer gegebenen axialen Raumfrequenz kann aber auch direkt im Spektrum $E_{u'^2}(k_x, k_z)$ vorgenommen werden. Dazu bestimmt man für ein festes k_x das Maximum entlang der k_z -Richtung. Für große k_x -Werte liegt das Maximum immer bei $k_z = 0$ und die Gleichung 7.23 gilt nicht. Die untersuchten Raumfrequenzen der Messung lagen jedoch mehr im langwelligen Bereich des Spektrums. Sie reichten bei $y^+ = 10$ etwa bis $k_x^+ = 0,069$. In dem Bereich finden sich im räumlichen Spektrum der Simulation tatsächlich Maxima mit $k_z \neq 0$. Bei $k_x = 0$ ist es in Abbildung 7.20 deutlich zu sehen. Auch das von Beykirch (1996) angegebene Skalierungsverhalten erwies sich im langwelligen k_x -Bereich als passable Näherung. Tendenziell ergaben sich in der Simulation aber etwas höhere Exponenten m . Im kurzwelligen k_x -Bereich konnten die Messwerte zur der Vermutung leiten, dass die zugehörigen Querwellenlängen dann überproportional lang werden und somit kurze und breite »Strukturen« favorisiert sind. Das kann bestätigt werden, denn für große k_x ist das u' -Spektrum für $k_z = 0$ maximal. Das gilt aber zum Beispiel nicht für das w' -Spektrum, wenn man sich auf den wandnahen Bereich konzentriert (siehe Abbildung 7.20 unten links).

Kreuzleistungsspektrum

In Abschnitt 5.8.2 wurde erwähnt, dass der Realteil der Kohärenzfunktion

$$\gamma_{u'v'}(k_x, k_z) = \frac{-E_{u'v'}(k_x, k_z)}{\sqrt{E_{u'^2}(k_x, k_z)E_{v'^2}(k_x, k_z)}} \quad (7.24)$$

für gewisse Wellenzahlkomponenten positiv wird und es wurde daraus gefolgert, dass diese Wellenzahlkomponenten einen negativen Beitrag zur Produktion turbulenter kinetischer Energie leisten, sie der mittleren Strömung somit Energie zuführen statt ihr Energie zu entziehen. Die Kohärenzfunktion gestattet aber keine Quantifizierung dieser Aussage, denn das für die Produktion maßgebliche Kreuzleistungsspektrum $E_{u'v'}(k_x, k_z)$ ist dort auf die Autoleistungsspektren von u' und v' normiert. Für die nach Wellenzahlen aufgeschlüsselte Produktion gilt:

$$P(k_x, k_z) = -\text{Re}\{E_{u'v'}(k_x, k_z)\} \frac{d\bar{u}}{dy}. \quad (7.25)$$

Für einige wandnormale Positionen y ist der Realteil des Kreuzspektrums in Abbildung 7.21 dargestellt. Die positiven und negativen Werte sind zur besseren Unterscheidung jeweils unterschiedlich hervorgehoben. Die positiven Korrelationen findet man vor allem bei kleinen k_z -Werten, die unmittelbare Wandnähe einmal ausgenommen. Das negative Integral über alle Raumfrequenzen ergibt

die turbulente Schubspannung – nach einer Multiplikation mit der Dichte – und sie ist für alle Wandabstände stets positiv. Zum Vergleich wurde anschließend nur über solche Raumfrequenzen integriert, für die $\text{Re}\{E_{u'v'}(k_x, k_z)\} > 0$ gilt. Der vom Wandabstand abhängige Vergleich der beiden Integrationen ist in einem Teilbild der Abbildung 7.21 gezeigt. Der maximale Beitrag der »negativen turbulenten Schubspannung« an der turbulenten Gesamtschubspannung liegt bei knapp -5% ¹⁰ beim Wandabstand $y^+ \approx 20$ und damit etwas näher an der Wand, als der Ort maximaler turbulenter Schubspannung ($y^+ \approx 35$). Unmittelbar über der Wand ergeben sich noch etwas höhere prozentuale Werte ($\approx -8\%$), dort ist aber die turbulente Schubspannung insgesamt sehr klein. In den wandferneren Schichten ist der Realteil des Kreuzspektrums überall negativ, dennoch sind die Leistungsdichten bei kleine spannweitige Wellenzahlen (insbesondere bei $k_z = 0$) meist sehr klein.

Den größten Beitrag zur negativen Korrelation zwischen u' und v' liefern Raumfrequenzkomponenten mit $k_x = 0$ und einer nur wenig vom Wandabstand abhängigen spannweitigen Wellenlänge von $\lambda_z^+ \approx 190$ (in Wannähe bei etwas kürzeren, in der Kanalmitte bei etwas längeren Wellenlängen).

Integriert man über alle axialen Raumfrequenzen und multipliziert das Ergebnis mit der Scherrate, dann zeigt sich ein Maximum in der Produktion bei $y^+ \approx 14$ und einer spannweitigen Wellenlänge von $\lambda_z^+ \approx 128$. Für $k_z = 0$ und die tiefste spannweitige Wellenlänge von $\lambda_z^+ \approx 775$ findet man etwa bei dem gleichen y -Wert ein negatives Maximum in der Produktion. Eine Integration über alle spannweitigen Raumfrequenzen ergibt für kleine k_x immer positive Produktionswerte (den größten für $k_x = 0$). Mit wachsendem k_x dominiert dann die positive Korrelation zwischen u' und v' und die Produktion wird hier negativ (besonders deutlich im Bereich $y^+ = 16$ bis 20).

Für eine Erklärung, warum bestimmte Wellenzahlkomponenten der mittleren Strömung Energie zuführen, seien hier folgende Überlegungen aufgeführt. Zunächst denke man sich die Zunahme der turbulenten Schwankungsenergie durch angefachte Wellen beschrieben. Die angefachten Wellen (Moden) entnehmen die dazu nötige Energie der mittleren Strömung. Das Produkt der Korrelation $-\overline{u'v'}$ mit der Scherrate $d\bar{u}/dy$ quantifiziert dabei den Energieübertrag pro Zeiteinheit. Mit wachsender Amplitude der angefachten Moden werden nichtlineare Effekte immer wichtiger und es kommt im Wellenzahlraum zum Übertrag der Energie auf andere Moden. Wenn diese aber nicht auch angefacht sind, dann kann die Energie nur entweder dissipiert werden, oder aber zurück in die Gleichströmung fließen. Vor allem für die kleineren Wellenzahlen und bei größeren Wandabständen kann die Dissipation aber sicherlich vernachlässigt werden. Wellen die eine negative Produktion bewirken sollten also dadurch ausgezeichnet sein, dass sie zeitlich gedämpft sind, wobei die Dämpfung aber nicht einfach die Folge einer Energiedissipation ist. Eine Abnahme in der Amplitude der gedämpften Wellen bedeutet eine zeitliche Änderung ihres Impulses, und genau diese Kraft ist es, die die Gleichströmung beschleunigt und damit auch die kinetische Energie erhöht. Für Einzelheiten des Zusammenhangs zwischen der Stabilität einer Welle und dem Energieerzeugungsterm sei auf (Betchov & Criminale 1967) verwiesen. Dort findet sich auch eine anschauliche Erklärung für die »Wirkungsweise« des Produktionsterms $-\overline{u'v'}d\bar{u}/dy$.

Kreuz- und Autokorrelation

Abbildung 7.22 zeigt die durch Fourier-Rücktransformation aus den Kreuz- und Autospektren berechneten Korrelationsfunktionen bei $y^+ = 10,7$. Die Autokorrelationen sind jeweils auf

$$R_{u_i'^2}(r_x = 0, r_z = 0) = \overline{u_i'^2}$$

¹⁰ Das ist auch gleichzeitig der Anteil der negativen Produktion, denn die Multiplikation mit der Scherrate ändert das Verhältnis nicht.

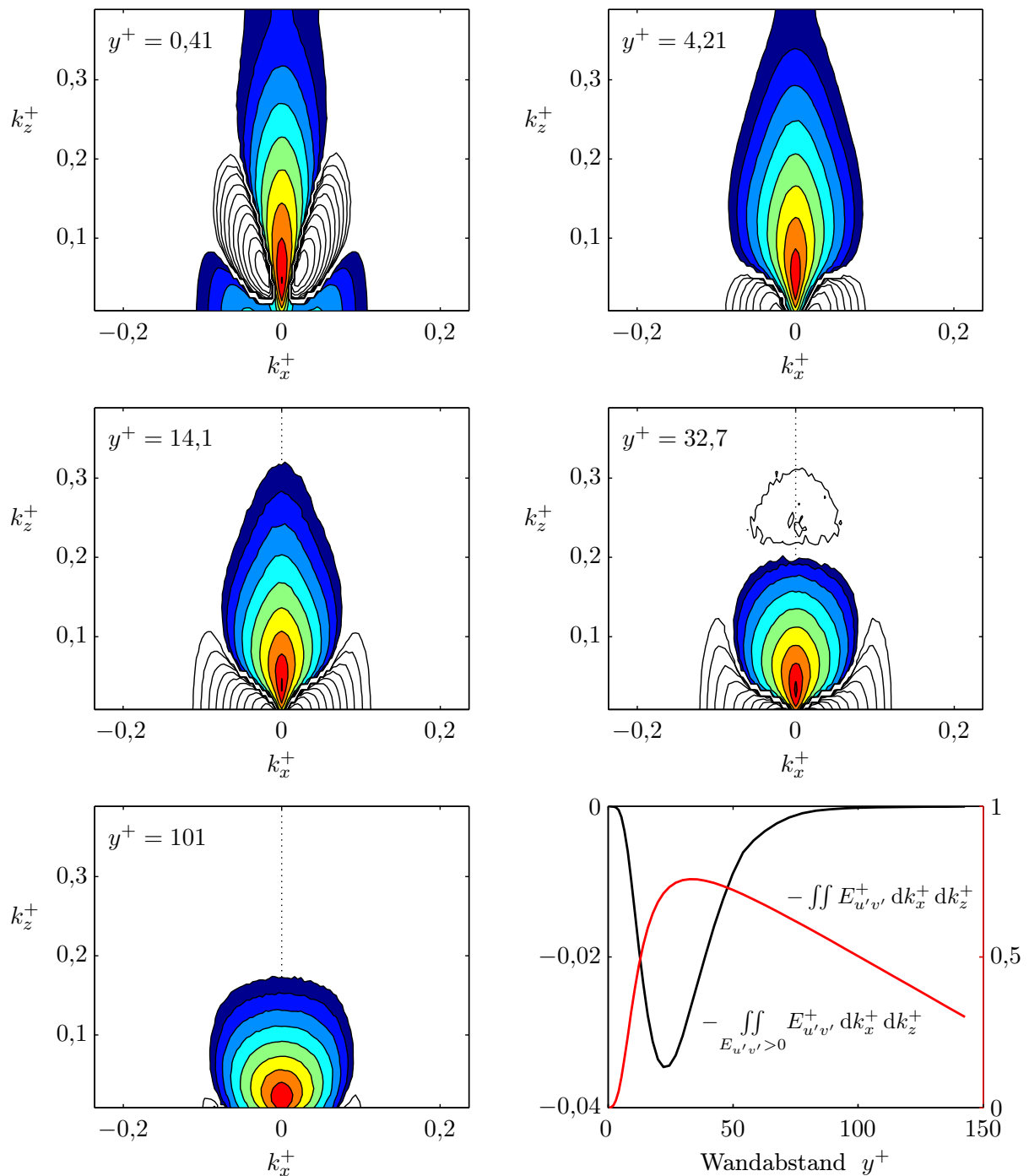


Abb. 7.21: Negativer Realteil des auf die turbulente Schubspannung normierten Kreuzspektrums $E_{u'v'}^+(k_x, k_z)$ in der stationären Strömung für verschiedene Wandabstände. Die Höhenlinien sind logarithmisch verteilt: für die positiven Werte (farbig) von $10^{-1,25}$ bis $10^{2,8}$ in 0,5-er Schritten des Exponenten, für die negativen Werte (schwarz) von -10^1 bis $-10^{-1,25}$ in 0,25-er Schritten des Exponenten. Unten rechts: Vergleich der turbulenten Gesamtschubspannung mit der »negativen turbulenten Schubspannung«.

normiert, während die negative Kreuzkorrelation $R_{u'v'}(r_x, r_z)$ auf

$$(R_{u'^2}(0,0)R_{v'^2}(0,0))^{-1/2} = u_{\text{eff}}v_{\text{eff}}$$

bezogen ist und damit zum Kreuzkorrelationskoeffizient $\chi_{u'v'}(r_x, r_z)$ wird. Die Kreuzkorrelation $R_{u'v'}(r_x, r_z)$ ist – vor allem in Wandnähe – nicht symmetrisch. So findet sich beim gewählten Wandabstand die maximal positive Korrelation zwischen u' und v' nicht bei $r_x = 0$, sondern bei etwa $r_x^+ = 19$ und $r_z^+ = \pm 42$. Nach der gewählten Vorzeichenkonvention bedeutet ein positives r_x eine stromab Verschiebung von v' gegenüber u' . Nähert man sich der Wand, dann verschiebt sich das negative Maximum von $\chi_{u'v'}(r_x, r_z)$ in r_z -Richtung kaum, in r_x -Richtung aber hin zu immer größeren Verschiebungen. Wandferner liegt das negative Maximum in etwa bei $r_x = 0$, dennoch bleibt $\chi_{u'v'}(r_x, r_z)$ asymmetrisch. Unter anderem liegt das positive Maximum von $\chi_{u'v'}$ für Wandabstände mit $y^+ > 15$ bei Verschiebungen mit $r_x < 0$, das heißt, u' ist dann mit einem stromauf liegenden v' -Wert maximal negativ korreliert. In Wandnähe ist es gerade umgekehrt. Mathematisch ist es der Imaginärteil des Kreuzspektrums $E_{u'v'}(k_x, k_z)$ (weiter oben wurde nur der Realteil gezeigt) der für die Asymmetrie verantwortlich ist. Bei einer physikalischen Interpretation bieten Korrelationsfunktionen viel Raum für Spekulationen, unter anderem, weil keine Phasenbeziehungen zwischen den beteiligten Signalen berücksichtigt sind. Umgekehrt können aber Modellvorstellungen dahingehend überprüft werden, ob sie konsistent mit den bekannten Korrelationsbeziehungen sind. Eine Zuordnung zwischen »kohärenten Strukturen« und den gezeigten Korrelationen wird hier nicht versucht und diesbezüglich auf die Anmerkungen in der Einleitung verwiesen.

Auffällig bei $R_{u'^2}(r_x, r_z)$ ist der langsame Abfall mit r_x , insbesondere für kleine r_z -Werte. Für $r_z = 0$ hat das ja bereits die eindimensionale Korrelationsfunktion $R_{u'^2}(r_x)$ gezeigt (Abbildung 7.2 auf Seite 136). Das gebräuchliche Mikro-Längenmaß

$$\lambda \stackrel{\text{def}}{=} (-\partial^2 R_{u'^2} / \partial r^2 / R_{u'^2}(r = 0))^{-1/2}$$

(reziproke Krümmung im Nullpunkt) ist für u' in Hauptströmungsrichtung besonders groß, das heißt, die »Strukturen« haben in x -Richtung eine große Ausdehnung, während die spannwitigen Abmessungen viel kleiner sind. Bei der wandnormalen und der spannwitigen Komponente der Geschwindigkeit zeigt sich das nur bedingt und weit weniger ausgeprägt als bei u' . In der Kanalmittenregion verhalten sich die v' - und w' -Schwankungen nahezu isotrop, die Höhenlinien der Korrelationsfunktion werden dort zu Kreisen. Für u' zeigt sich das nicht so deutlich, dennoch sind dort die langgestreckten u' -Strukturen weitgehend verschwunden. Es kann davon ausgegangen werden, dass in Wandnähe die starke Scherung $d\bar{u}/dy$ für das immer wieder beobachtete Streifenmuster sorgt.

7.3.2 Modulation der zweidimensionalen Spektren

Die Modulationsfaktoren der räumlichen Autospektren Spektren $E_{u'^2}$, $E_{v'^2}$ und $E_{w'^2}$ sowie die des Kreuzspektrums $E_{u'v'}$ wurden für jedes Wellenzahlpaar (k_x, k_z) , alle Wandabstände y und für diverse Wandfrequenzen ω_w – die vom nahezu quasistationären bis zum quasilaminaren Bereich reichen – bestimmt. Hier werden die wesentlichen Ergebnisse hauptsächlich anhand der Daten der C-Serie (Abschnitt 3.1 auf Seite 27) präsentiert. Die Periodenlängen in x - und z -Richtung waren dabei $L_x^+ = 1550$ und $L_z^+ = 775$, sodass sich ein spektrale Auflösung von $\Delta k_x^+ \approx 4 \cdot 10^{-3}$ und $\Delta k_z^+ \approx 8 \cdot 10^{-3}$ ergab. Bei jeweils 96 Gitterpunkten in den beiden Richtungen lagen die Nyquistfrequenzen bei $k_x^+ \approx 0,194$ ($\lambda_x^+ \approx 32$) und $k_z^+ \approx 0,389$ ($\lambda_z^+ \approx 16$). Die acht Modulationsfrequenzen

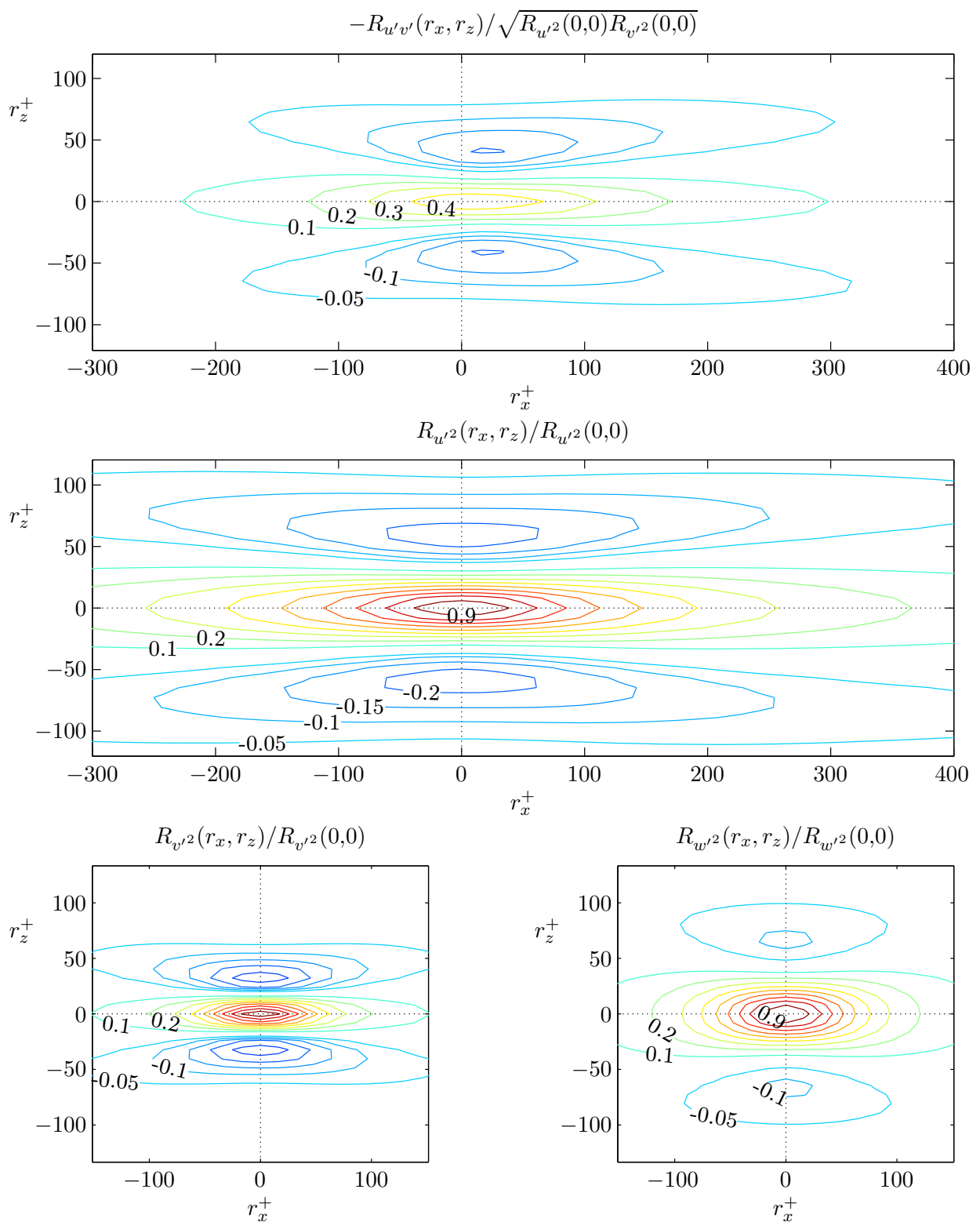


Abb. 7.22: Korrelationsfunktionen der stationären Strömung beim Wandabstand $y^+ = 10,7$. Die Kreuzkorrelationsfunktion $R_{u'v'}(r_x, r_z)$ (oben) ist negiert gezeigt und auf die geometrisch gemittelte Varianz von u' und v' normiert. Die Höhenlinien haben für die positiven Werte einen Abstand von 0,1, für die negativen Werte einen Abstand von 0,05.

der C-Serie $\omega_w^+ \cdot 100 = 0,280; 0,423; 0,637; 0,781; 0,965; 1,18; 1,44; 2,14$ lagen im kritischen Frequenzbereich, dort wo starke Wechselwirkungen mit der Turbulenz zu erwarten sind und weder eine quasistationäre noch eine quasilaminare Näherung sinnvoll ist. Die Autospektren sind aus mathematischen Gründen punktsymmetrisch bezüglich $k_x = k_z = 0$. Aus physikalischen Gründen sind sie ausserdem achsensymmetrisch bezüglich der k_x - und der k_z -Achse, sodass im Folgenden immer nur die positiven Frequenzkomponenten gezeigt werden.

Für eine vergleichsweise hohe Modulationsfrequenz von $\omega_w^+ = 2,14 \cdot 10^{-2}$ ist in Abbildung 7.23 der Betrag des Modulationsfaktors $\frac{\widehat{E}_{u'^2}}{E_{u'^2}}/a_{\tau_w}$ beim Wandabstand $y^+ = 10,7$ dargestellt. Zum Vergleich sind auch das langzeitgemittelte Spektrum $\overline{E}_{u'^2}(k_x, k_z)$ und die erste Harmonische bezüglich der Anregung $\widehat{E}_{u'^2}(k_x, k_z)$ gezeigt. Beim Modulationsfaktor fällt auf, dass er wesentlich stärker von der axialen Wellenzahl k_x abhängt, als von der spannweitigen Wellenzahl k_z . Die Strömung wird offenbar spannweitig sehr einheitlich moduliert. Weiter ist zu erkennen, dass »Strukturen« mit großem k_x viel stärker beeinflusst werden, als die langwelligen. Das gilt auch, und im gezeigten Beispiel insbesondere, wenn gleichzeitig k_z klein ist, also kaum eine Variation in spannweitischer Richtung vorkommt. Mit anderen Worten gesagt heißt das, dass die kurzen und breiten Strukturelemente besonders empfindlich auf eine Störung reagieren. In einem gewissen Wellenzahlbereich (in der Abbildung dunkel blau dargestellt) sind die Modulationsfaktoren praktisch null. Der Bereich überstreicht dabei sämtliche spannweitige Wellenzahlen. Das erstaunt zunächst besonders, denn im Gegensatz zur Modulation bei großen k_z -Werten zeigt das Spektrum bei großen k_x -Werten besonders hohe Modulationsfaktoren. Im Wesentlichen verhalten sich $E_{v'^2}(k_x, k_z)$ und $E_{w'^2}(k_x, k_z)$ in gleicher Weise wie $E_{u'^2}(k_x, k_z)$. Das Spektrum der axialen Schwankungsbewegungen reagiert jedoch für $k_x = 0$ bzw. kleine k_x -Werte etwas anders als $E_{v'^2}$ und $E_{w'^2}$. Bei $k_x = 0$ findet man für die u' -Schwankungen, im Gegensatz zu den beiden anderen Komponenten, vergleichsweise große Modulationsfaktoren.

Eine bessere Vorstellung vom Verhalten einzelner Raumfrequenzkomponenten von u' , v' und w' erhält man, wenn auch die Phase des Modulationsfaktors $\frac{\widehat{E}_{u'^2}}{E_{u'^2}}/a_{\tau_w}$ berücksichtigt wird. Zuvor sei jedoch auf Abbildung 7.24 verwiesen, die den Einfluss der Wandfrequenz auf den Betrag des Modulationsfaktors zeigt. Dabei fällt auf, dass sich der Bereich minimaler Modulation schnell mit sinkender Frequenz ändert. Noch deutlicher als bei der oben diskutierten vergleichsweise hohen Modulationsfrequenz, zeigt sich, dass die Modulationsbeträge keine nennenswerte Abhängigkeit von der spannweitigen Wellenzahl k_z aufweisen (mit Ausnahmen bei kleinen k_x -Werten). Die Wellenzahlkomponenten mit großem k_x (kurze Strukturen) reagieren bei allen Modulationsfrequenzen mit maximaler relativer Amplitude. Besonders hohe Werte ergeben sich für die Frequenzen von $\omega_w^+ = 0,635 \cdot 10^{-2}$ bis $0,963 \cdot 10^{-2}$. Die farbkodierte Amplitude der Modulationsfaktoren sind in Abbildung 7.24 für alle Auftragungen gleich, sodass sofort zu erkennen ist, dass die Amplituden bei hohen Modulationsfrequenzen deutlich kleiner werden.

Ortskurven

Die bis jetzt unberücksichtigten Phasen der Modulationsfaktoren zeigt Abbildung 7.25. Für einige ausgewählte spannweitige Wellenzahlen k_z sind Ortskurven mit k_x als Parameter dargestellt. Alle Ortskurven sind sehr ähnlich, schrumpfen für große k_z jedoch etwas zusammen. Die Phasen bestätigen die Beobachtung, dass die spannweitige Struktur der Turbulenz für alle Skalen sehr einheitlich moduliert wird. Die Ortskurven laufen in dem gezeigten Beispiel durch den Ursprung, sodass für gewissen Wellenzahlkomponenten die Modulation praktisch vollkommen verschwindet. Die Phase macht dabei einen Sprung um 180° . Die minimalen Beträge könnten zu der Vermutung führen,

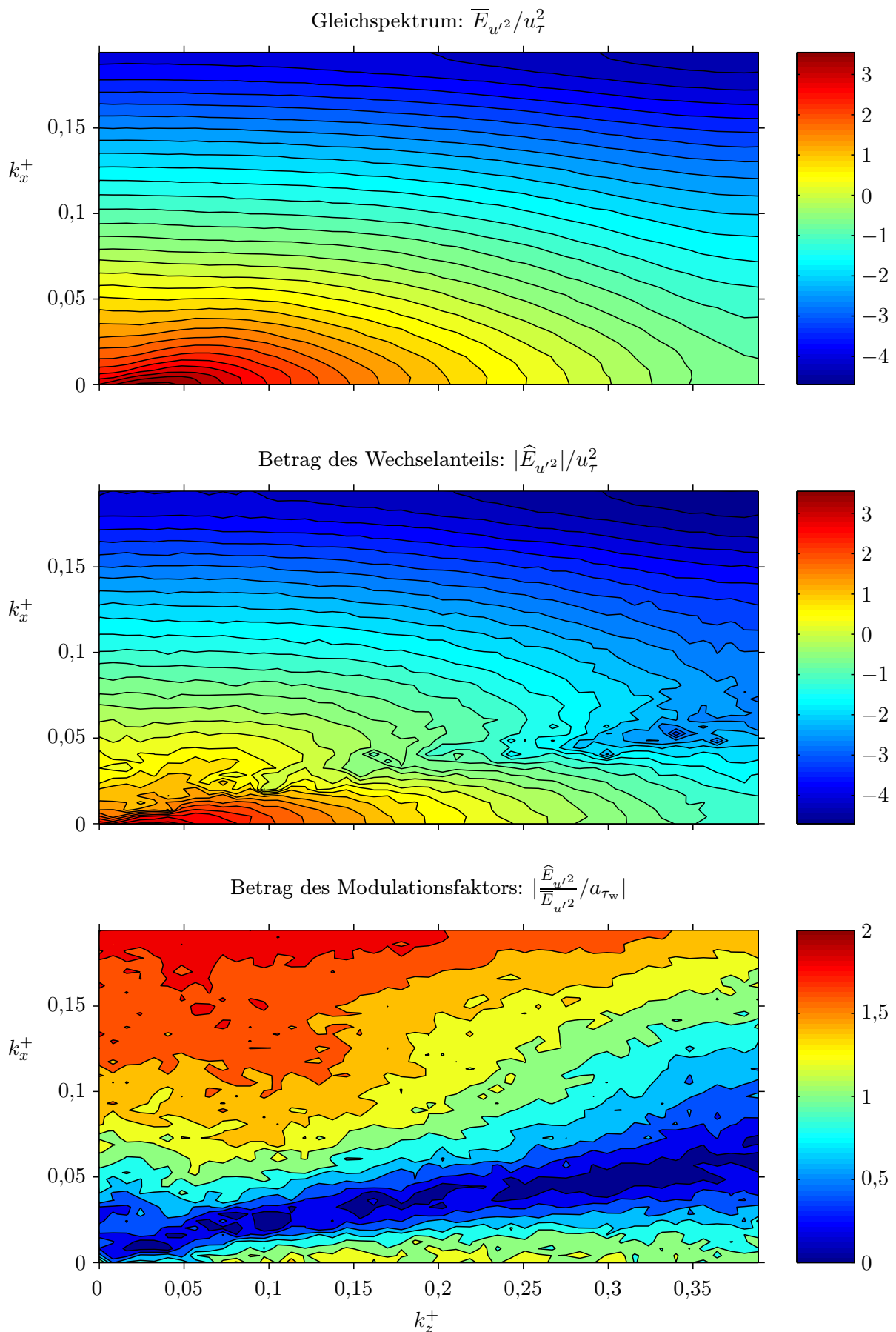


Abb. 7.23: Modulation des räumlichen Spektrums der axialen Schwankungsbewegungen bei $y^+ = 10,7$ und einer Modulationsfrequenz von $\omega_w^+ = 2,14 \cdot 10^{-2}$.

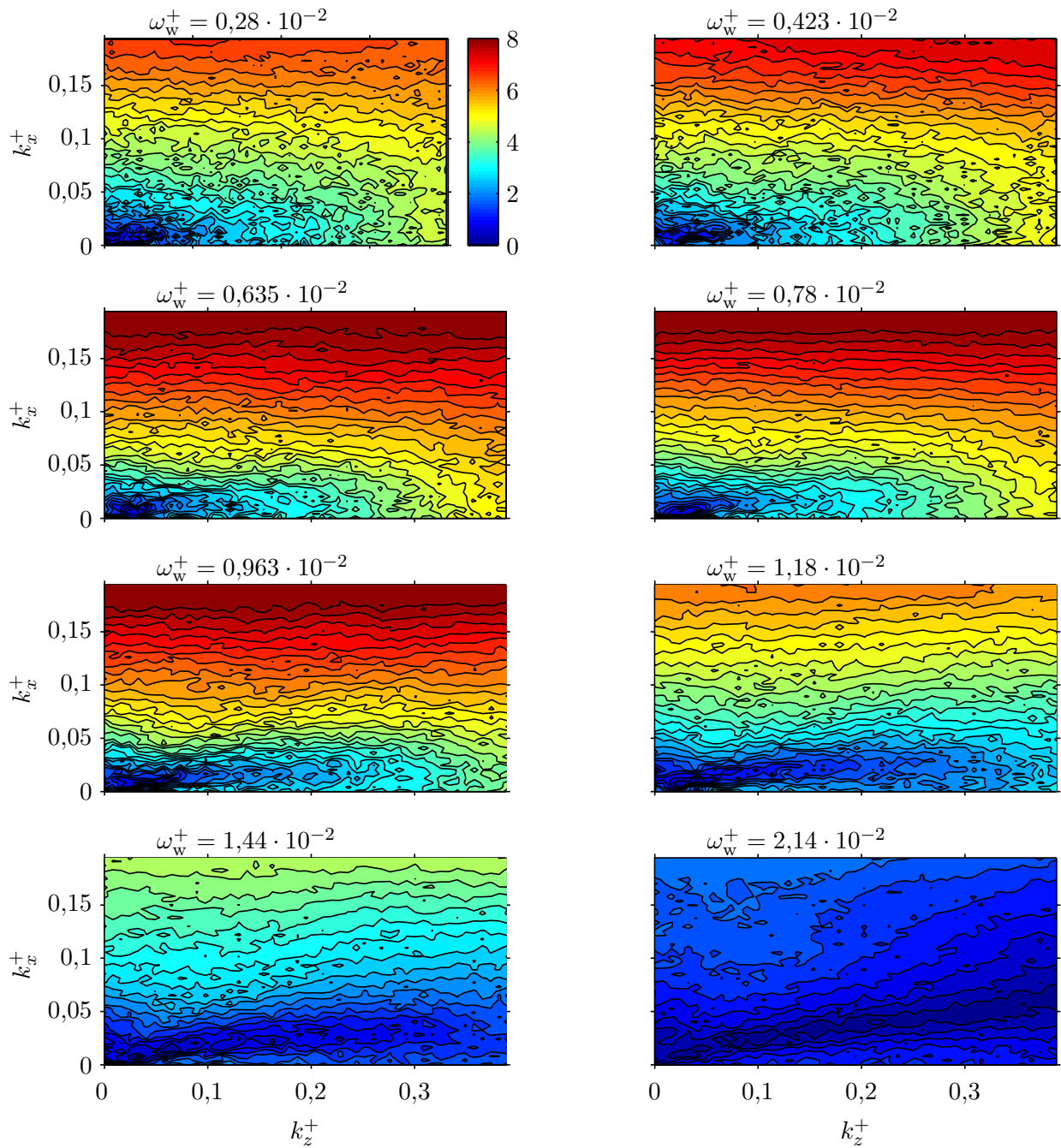


Abb. 7.24: Modulation des räumlichen Spektrums der axialen Schwankungsbewegungen. Gezeigt ist der Betrag des Modulationsfaktors beim Wandabstand $y^+ = 10,7$ für verschiedene Anregungsfrequenzen. Die Farbkodierung ist für alle Abbildungen gleich und geht von 0 (dunkelblau) bis 8 (dunkelrot).

Abb. 7.25

Modulationsfaktor

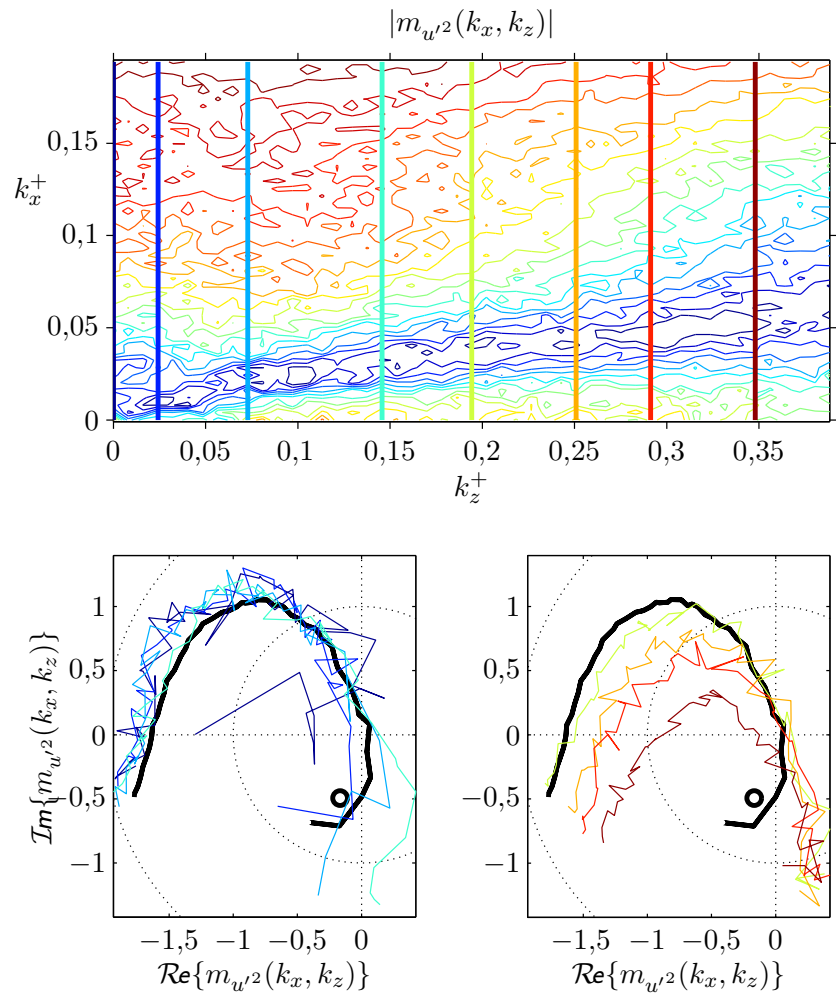
$$\frac{\widehat{u'^2}(k_x, k_z)}{u'^2(k_x, k_z)} / a_{\tau_w}$$

der axialen
Schwankungsbewegungen als
Funktion der
Raumfrequenzen. Die
schwarze Ortskurve zeigt die
über k_z integrierte
Modulation:

$$\frac{\int \widehat{u'^2}(k_x, k_z) dk_z}{\int u'^2(k_x, k_z) dk_z} / a_{\tau_w}.$$

Der Punkt markiert den
Modulationsfaktor der
Gesamtleistung.

$$\omega_w^+ = 2,14 \cdot 10^{-2}, y^+ = 10,7.$$



dass es ausgezeichnete Wellenzahlkomponenten gibt, die eine besondere Bedeutung für die (hier wandnahe) Strömung haben, da sie offenbar kaum durch die äußere Störung beeinflusst werden. Die Ortskurven lassen jedoch eher vermuten, dass der Nulldurchgang mehr »zufällig« entsteht, denn wären gewissen Wellenzahlkomponenten tatsächlich ausgezeichnet, würde man erwarten, dass die Ortskurven dort einen scharfen Knick oder eine schnelle Richtungsänderung aufwiesen. Bezieht man die Modulation einzelner Frequenzkomponenten auf die Modulation der Gesamtleistung, dann wird die Erklärung für den Nulldurchgang offensichtlich: Die Modulation der Gesamtleistung (Turbulenzenergie) wird von einem anderen physikalischen Prozess bewirkt, als die Modulation der Form des Spektrums. Andere Möglichkeiten sind zwar denkbar, jedoch schwer vorstellbar. Bereits bei den eindimensionalen Spektren hat sich die Vermutung aufgedrängt und es scheint nun offensichtlich, dass die durch die Modulation bewirkte Umverteilung der Energie innerhalb des Spektrums nicht an die phasenabhängige Gesamtenergie gekoppelt ist.

Zieht man von allen Modulationsfaktoren $\frac{\widehat{u'^2}(k_x, k_z)}{u'^2(k_x, k_z)} / a_{\tau_w}$ jeweils den Modulationsfaktor der Gesamtenergie ab, dann wird die einheitliche Reaktion aller spannerweiter Wellenzahlkomponenten noch deutlicher als zuvor. Die Wellenzahlkomponenten mit großem k_x reagieren dann immer zuerst und mit der größten Amplitude. Die kleinsten Amplituden finden sich bei kleinen k_x -Werten. Hierin unterscheidet sich das modulierte Spektrum der axialen Komponente u' von den modulierten Spektren der beiden senkrecht dazu stehenden Komponenten v' und w' kaum.

An dieser Stelle wäre es möglich noch über viel Detailinformationen der modulierten zweidimen-

sionalen Spektren zu berichten und auch Unterschiede zwischen den einzelnen Komponenten herauszuarbeiten, aber angesichts der Tatsache, dass allein die Darstellung der modulierten Spektren $E_{u'2}(k_x, k_z, \omega_w, y)$, $E_{v'2}(k_x, k_z, \omega_w, y)$, $E_{w'2}(k_x, k_z, \omega_w, y)$ und $E_{u'v'}(k_x, k_z, \omega_w, y)$ für wenige Wandabstände y und Modulationsfrequenzen ω_w einen enormen Umfang annehmen würde, und dass die vielen Detailinformationen die man den Modulationsfaktoren entnehmen kann, kaum in einer halbwegs kompakten Beschreibung untergebracht werden können, wird hier darauf verzichtet den Rahmen der Arbeit in wohl unangemessener Weise auszuweiten. Ohnehin wurden hier nur subjektiv ausgewählte Daten präsentiert, von denen der Autor der Meinung ist, dass sie einen Beitrag zum besseren Verständnis der Turbulenz leisten können. Auf eine möglichst vollständige Darstellung der Daten wurde bewußt zugunsten einer Darstellung der wesentlichen Resultate verzichtet.

8 Zusammenfassung, Ergebnisse und Ausblick

„Wenn ich in den Himmel kommen sollte, erhoffe ich Aufklärung über zwei Dinge: Quantenelektrodynamik und Turbulenz. Was den ersten Wunsch betrifft, bin ich ziemlich zuversichtlich.“

Horace Lamb, 1932

Die numerisch simulierte turbulente Kanalströmung wurde durch kleine aufgeprägte Oszillationen der Wände in definierter Weise gestört. Die homogen in der Wandebene und in Hauptströmungsrichtung bewegten Wände erzeugen eine Scherwelle die sich in die Strömung ausbreitet. Nur für sehr hohe Frequenzen bleibt die Turbulenz dadurch weitgehend unbeeinflusst, denn dann klingt die Scherwelle sehr schnell ab und der Turbulenz bleibt keine Zeit sich auf die geänderten Randbedingungen einzustellen.

Auf sehr tiefen Wandfrequenzen reagiert die Turbulenz quasistationär. Sie wird dann als Ganzes und ohne Phasenverzögerungen gegenüber der Störung moduliert, das heißt, die Strömung ist zu jedem Zeitpunkt in einem Gleichgewichtszustand, der durch die aktuellen Randbedingungen charakterisiert ist. Bei der tiefsten Frequenz die hier untersucht wurde, reagiert die Strömung in Wandnähe näherungsweise quasistationär, wandferner, dort wo die Zeitkonstanten der Turbulenz wesentlich größer sind, jedoch nicht.

Bei Anregungsfrequenzen die im Übergangsbereich zwischen dem quasistationären und dem quasilaminaren Frequenzbereich liegen – und denen hier ein besonderes Interesse galt – kommt es zu starken Wechselwirkungen zwischen der Scherwelle und der Turbulenz. Dabei kann weder eine quasistationäre noch eine quasilaminare Näherung die beobachteten Effekte erklären. Die detaillierte Untersuchung der Wechselwirkungen wurde hier mit dem Ziel durchgeführt, mehr über die dynamischen Prozesse zu erfahren, die für die Turbulenz wesentlich sind. Insbesondere galt es herauszufinden, inwieweit die stationäre Strömungsstruktur den kleinen zeitlichen Änderungen der Randbedingungen standhält.

8.1 Lineare Reaktion

Es ist bekannt, dass wesentliche Teile der Dynamik durch die wandnahe Pufferschicht bestimmt werden, und in einer Vielzahl von Arbeiten der vergangenen Jahrzehnte konnte gezeigt werden, dass dort organisierte Bewegungen vorherrschen, also nur begrenzt viele Freiheitsgrade angeregt sind.

Die Strukturelemente, so die Arbeitshypothese, stehen dabei in einem dynamischen Gleichgewicht und die Reaktion auf eine Störung dieses Gleichgewichtes kann dann als linear angenommen werden, wenn die Amplitude klein ist, sodass zwar die Wechselwirkungen, nicht aber die Strukturen selbst beeinflusst werden. Die Annahme kann dadurch gerechtfertigt werden, dass bei den instationären Strömungen einerseits keine nennenswerte Änderung der Langzeitmittelwerte beobachtet werden und andererseits die sinusförmige Anregung immer auch sinusförmige Systemantworten hervorruft. Genauer gesagt werden bei kleinen Störampplituden alle Phasenmittel durch den zur Wandbewegung synchronen Anteil dominiert.

8.2 Nichtlineare Effekte

Mit wachsender Amplitude zeigen sich jedoch einige nichtlineare Effekte. So kann im Frequenzbereich $0,5 \cdot 10^{-2} \lesssim \omega_w^+ \lesssim 5 \cdot 10^{-2}$ bei einer Wandamplitude von 60% der Durchflussgeschwindigkeit – die noch als vergleichsweise klein bezeichnet werden kann – eine Absenkung von maximal etwa 4% im Mittelwert der Wandschubspannung und damit eine Absenkung des Strömungswiderstandes beobachtet werden. Bei spannwitiger Oszillation der Wände wird in mehreren Arbeiten von einer Widerstandverminderung um bis zu 40% berichtet, jedoch bei deutlich höheren Amplituden als sie hier untersucht wurden. Es ist daher zu vermuten, dass bei weiterer Steigerung der Wandamplitude, auch bei axialer Oszillation der Wände, der Widerstand noch weiter abgesenkt werden kann. Gesichert ist das aber keineswegs und es wäre daher interessant in dieser Richtung weitere numerische und/oder reale Experimente durchzuführen. Bei der hier vorgestellten Untersuchung sind alle nichtlinearen Effekte aber unerwünscht und es hat sich gezeigt, dass sie bei Wandamplituden von 10–20% der Durchflussgeschwindigkeit in guter Näherung vernachlässigt werden können. Aber auch bei einer Amplitude von 60% sind die nichtlinearen Effekte häufig vernachlässigbar. Im Allgemeinen werden die Modulationsfaktoren dann aber etwas kleiner.

8.3 Auswertung

Für eine Reihe von Anregungsfrequenzen wurde die Übertragungsfunktion zwischen der modulierten Wandschubspannung und verschiedenen turbulenten Größen bestimmt. Daraus wurden Modulationsfaktoren berechnet, die die relative Modulation der untersuchten Größen mit der relativen Modulation der Wandschubspannung vergleichen. Die modulierte Wandschubspannung wird als diejenige Größe der induzierten Scherwelle betrachtet, die für die primäre Wechselwirkung mit der Turbulenz verantwortlich ist und die Wandschubspannungsmodulation wurde daher als Bezugsgröße der ausgewerteten Modulationsfaktoren gewählt. Dass die Störung tatsächlich primär durch die geänderte Schubspannung bewirkt wird, ist aber nur eine – jedoch sehr plausible – Hypothese. Die vom Koordinatensystem abhängige Wechselgeschwindigkeit kommt als Ursache der gestörten Turbulenz jedoch nicht in Betracht, denn eine Bewegung der Strömung als Ganzes kann die Turbulenz nicht beeinflussen.

Auf der Suche nach solchen Strukturparametern die möglichst stabil auf die äußere Störung reagieren wurden vor allem die modulierten turbulenten Geschwindigkeitsfluktuationen untersucht. Es wäre ebenso möglich auch andere Größen, etwa die Wirbeligkeit, zu betrachten, die Anschaulichkeit geht dabei aber häufig verloren. Im Gegensatz zu den meisten Experimenten, konnten alle Komponenten des Geschwindigkeitsvektors ausgewertet werden. Es war daher unter anderem möglich, die Modula-

tion des gesamten Reynoldsschen Schubspannungstensors zu analysieren. Neben den Modulationen der Effektivwerte bzw. der Gesamtleistungen wurden auch die modulierten Amplitudenverteilungen und vor allem die modulierten räumlichen Spektren der Geschwindigkeitsfluktuationen untersucht.

8.4 Vergleich mit dem Experiment

Dort wo Vergleiche mit experimentellen Daten möglich sind, zeigen sich in aller Regel keine signifikanten Unterschiede zu den Ergebnissen der durchgeführten direkten numerischen Simulation, sodass angenommen werden darf, dass auch die anderen Resultate die tatsächliche Physik der Turbulenz wiedergeben. Der prinzipielle Unterschied zwischen den realen und den numerischen Experimenten besteht darin, dass in der Simulation periodische Randbedingungen vorgegeben werden und damit das in der Realität offene System zu einem geschlossenem System wird. Für die stationäre Strömung konnten Jiménez & Moin (1991) zeigen, dass sich selbst bei minimale Periodenlängen die numerische Turbulenz kaum von der echten Turbulenz unterscheiden lässt. Alle unsere Ergebnisse deuten darauf hin, dass dies auch für die instationäre Strömung gilt, dass sich also das simulierte geschlossene System so verhält, wie das offene System im realen Experiment. Insbesondere tragen die weitgehende Unabhängigkeit der Ergebnisse von der Periodenlänge und die teils erstaunlich guten Übereinstimmungen mit dem realen Experiment zu der Schlussfolgerung bei.

Dennoch zeigen sich auch Unterschiede zu den experimentellen Ergebnissen. Messungen direkt an der Wand und auch solche im wandnahen Bereich sind immer besonders problematisch. So weisen die wandnahen Wechselgeschwindigkeitsprofile, die im Ölkanal unsere eigenen Arbeitsgruppen gemessen wurden, trotz sehr sorgfältiger Messungen und auch nach vielfältigen Verbesserungen der Messapparatur, sehr ungewöhnliche Verläufe auf. Es ist daher nicht sehr überraschend, dass die Simulationswerte hier teils deutlich vom Experiment abweichen, während die wandferneren Messergebnisse viel besser mit den numerischen Experimenten übereinstimmen.

Weitere Unterschiede zu experimentellen Daten finden sich bei der Modulation der Wandschubspannungsfluktuationen. Mao & Hanratty (1986) und später Tardu & Binder (1993) fanden einen unerwarteten Anstieg in der Modulationsamplitude bei hohen Anregungsfrequenzen, wir können das jedoch in der Simulation nicht beobachten. Der im Experiment beobachtete Anstieg von $\widehat{\tau_w' \tau_w'}$ mit steigender Modulationsfrequenz ist insofern erstaunlich, als dass damit die verbreitete Vorstellung, dass mit hohen Modulationsfrequenzen die Turbulenz nicht nennenswert beeinflusst werden kann, überdacht werden müsste. Trägt man die komplexe Übertragungsfunktion zwischen der modulierten Wandschubspannung und den modulierten Wandschubspannungsfluktuationen in der komplexen Ebene auf (Ortskurvendarstellung), dann legen die Messwerte die Vermutung nahe, dass sie die Folge eines Tiefpasssystems und einer direkten breitbandigen Reaktion sind. Während die Tiefpasswirkung die erwartete Reaktion der Turbulenz wiedergibt, könnte die ungewöhnliche breitbandige Reaktion eventuell die Folge der Messapparatur sein. Lässt man die breitbandige Reaktion außer acht, dann stimmen die Messwerte recht gut mit den Simulationswerten überein.

8.5 Reaktionen bei hohen Modulationsfrequenzen

Generell hat sich in der Simulation die Erwartung bestätigt, dass mit steigender Modulationsfrequenz die Reaktionen aller untersuchten Turbulenzgrößen immer schwächer werden. Unter anderem zeigt sich, dass die Scherwelle dann fast nur durch reine Diffusion transportiert wird und praktisch

nicht mehr von der Stokeslösung zu unterscheiden ist. Auch die Modulationsamplituden der Geschwindigkeitsschwankungen verschwinden mit wachsender Modulationsfrequenz fast vollständig. Das gilt für alle drei Komponenten gleichermaßen. Bei hohen Modulationsfrequenzen zeigen selbst die nach einzelnen Raumfrequenzkomponenten aufgeschlüsselten Schwankungsamplituden in keinem Wellenzahlbereich eine nennenswerte Reaktion. Die ohnehin nur wenig modulierten Histogramme der Schwankungsamplituden weichen auch nicht von diesem Trend ab.

Bei hohen Frequenzen verhält sich die Strömung dennoch nicht vollkommen quasilaminar, sondern das turbulente Strömungsfeld reagiert dann viskoelastisch. Das zeigt sich insbesondere daran, dass die modulierte turbulente Schubspannung der modulierten Scherrate nicht phasengleich folgt, sondern ihr um knapp 90° nacheilt. Die Phasendifferenz variiert dabei jedoch leicht mit dem Wandabstand, liegt aber fast überall zwischen -90° und etwa -30° . Die Reaktion ist also weder vollkommen viskos noch vollkommen elastisch. Als Folge des elastischen Verhaltens der Turbulenzstruktur breiten sich auch bei hohen Frequenzen alle turbulenten Spannungen viel schneller aus, als im rein laminaren Fall. Es wird daher verständlich, dass auch bei großen Wandabständen, dort wo die Störung längst abgeklungen sein sollte, noch nennenswerte Modulationen gefunden wurden. Eine Ausbreitungsgeschwindigkeit in der Größenordnung u_τ bis $2u_\tau$ kann sowohl für die turbulente Schubspannung $-\widehat{u'v'}$ als auch für $\widehat{u'^2}$, $\widehat{v'^2}$ und $\widehat{w'^2}$ beobachtet werden.

Als sehr einfache Modellannahme wurde die Hypothese aufgestellt, dass die Reaktion bei hohen Frequenzen im Wesentlichen durch eine einzige Zeitkonstante beschrieben werden kann. Gestärkt wurde die Vermutung durch die Tatsache, dass die ermittelten Zeitkonstanten in einem Bereich von nur einigen viskosen Zeiteinheiten liegen und damit im Einklang mit der sogenannten »Rapid Distortion« (Townsend 1976; Maxey 1982; Mankbadi & Liu 1992) Theorie stehen, die von einer ähnlichen Zeitkonstanten ausgeht. Im Gegensatz zur Modellannahme erwies sich die Relaxationszeit jedoch selbst bei hohen Frequenzen als frequenzabhängig: Sie fällt mindestens proportional zum Kehrwert der Frequenz ab. Letztlich müsste der Frequenzbereich aber noch deutlich zu höheren Frequenzen hin ausgedehnt werden, um entscheiden zu können, ob wenigstens im asymptotischen Fall eine einzige Zeitkonstante das »Gedächtnis« der Turbulenz ausreichend genau beschreiben kann.

Unabhängig davon, ob die Reaktion mit einer einzigen Zeitkonstanten beschrieben werden kann oder – wie zu vermuten ist – nicht, kann mit der hier angewandten Untersuchungsmethode aber klar demonstriert werden, dass bei schnell verformter Turbulenz die turbulenten Spannungen wesentlich durch die Verformung selbst und nicht allein durch die Verformungsrate bestimmt werden, also insgesamt viskoelastisch reagieren.

8.6 Reaktionen im Übergangsbereich

Die für die Dynamik der Strömung interessantesten Effekte spielen sich in einem Frequenzbereich ab, der mit etwa $0,3 \cdot 10^{-2} \lesssim \omega_w^+ \lesssim 3 \cdot 10^{-2}$ angegeben werden kann. Hier reagiert die Turbulenz unter anderem mit ausgeprägten Phasendifferenzen gegenüber der modulierten Wandschubspannung. Auch sind die Reaktionen wesentlich stärker, als etwa die oben beschriebenen Effekte bei sehr hohen Frequenzen.

Der Frequenzbereich $0,3 \cdot 10^{-2} \lesssim \omega_w^+ \lesssim 3 \cdot 10^{-2}$ kann grob als Übergangsbereich zwischen der quasistationären Reaktion und der quasilaminaren Reaktion bezeichnet werden, obwohl bei $\omega_w^+ \approx 0,3 \cdot 10^{-2}$ die Strömung noch nicht wirklich quasistationär und bei $\omega_w^+ \approx 3 \cdot 10^{-2}$ auch nicht wirklich quasilaminar reagiert. Dennoch spielen sich fast alle wesentlichen Effekte in diesem Frequenzbereich ab.

Das zeigt sich zum Beispiel sehr gut an der modulierten Wandschubspannung. Im vergleichsweise kleinen Übergangsbereich ändert sich die Phase der Wandschubspannungsimpedanz vom Stokeswert 45° auf nahezu den quasistationären Grenzwert von 0° . Die Änderung vollzieht sich in der Simulation sogar noch etwas schneller – das heißt, auf einem kleineren Frequenzbereich – als im Experiment.

8.6.1 Besondere und unerwartete Effekte

Resonanzeffekte der turbulenten Schubspannung

Im oberen Teil des oben definierten Übergangsbereichs reagiert die turbulente Schubspannung im wandnahen Bereich ($y^+ \lesssim 15$) auf die aufgeprägte Störung unerwartet. Zunächst fällt der Betrag des Modulationsfaktors erwartungsgemäß mit steigender Modulationsfrequenz, er steigt dann aber wieder (leicht) an und fällt erst bei höheren Modulationsfrequenzen auf sehr kleine Werte ab. Die lokalen Minima liegen dabei um $\omega_w^+ \approx 2 \cdot 10^{-2}$, während sich die lokalen Maxima der »Resonanz« um $\omega_w^+ \approx 3 \cdot 10^{-2}$ zeigen. In der Ortskurvendarstellung mit der Modulationfrequenz als Parameter ist die Resonanzen besonders gut zu erkennen. Die Ortskurven bilden kleine Schleifen in der Nähe des Nullpunktes. Im Vergleich mit der Modulation der Scherrate drängt sich die Vermutung auf, dass die turbulente Schubspannung oberhalb von etwa $\omega_w^+ \approx 2 \cdot 10^{-2}$ stark an die lokale Scherrate gekoppelt ist, bei tiefen Frequenzen jedoch nicht. Die Resonanz erklärt sich dann als Wechselwirkung dieser Kopplung mit einem weiteren unbekanntem Mechanismus. Das ist jedoch nur eine Hypothese. Es scheint lohnenswert, dieser Frage in zukünftigen Arbeiten genauer nachzugehen. Insbesondere wäre ein experimentelle Untersuchung interessant, denn da es keine mit der Simulation vergleichbaren Daten zur modulierten turbulenten Schubspannung gibt, sollten die Resonanzeffekt zunächst im Experiment bestätigt werden, bevor der Frage nach der Ursache genauer nachgegangen wird. Für u'^2 , v'^2 und w'^2 finden sich im angegebenen Frequenzbereich keine vergleichbaren Resonanzeffekt wie für $u'v'$.

Ausgezeichnete Frequenz

Der Korrelationskoeffizienten $\chi_{u'v'}$ zwischen den axialen und den wandnormalen Geschwindigkeitsfluktuationen wird zwar insgesamt nur wenig moduliert – diese Beobachtung wird weiter unten noch diskutiert werden – in einem kleinen Frequenzbereich um $\omega_w^+ \approx 1 \cdot 10^{-2}$ findet sich aber ein recht ausgeprägtes Maximum des Modulationsfaktors. Dieses Maximum ist dabei von anderer »Qualität«, als die kleinen Maxima, die sich im Modulationsfaktor von $u'v'$ bei höheren Frequenzen zeigen. So ist das Maximum des Modulationsfaktors nicht nur auf den sehr wandnahen Bereich beschränkt, sondern zeigt sich vielmehr bei allen Wandabständen bis etwa $y^+ = 30$ und immer ziemlich genau bei $\omega_w^+ = 1 \cdot 10^{-2}$. Die genannte Modulationsfrequenz zeichnet sich auch hinsichtlich anderen Reaktionen der Turbulenz aus. So sind im gesamten wandnahen Bereich die Antwortzeiten aller Komponenten des Reynoldschens Schubspannungstensors bei $\omega_w^+ = 1 \cdot 10^{-2}$ maximal, sieht man einmal von den sehr tiefen Modulationsfrequenzen ab. Die dimensionslose Kreisfrequenz von $1 \cdot 10^{-2}$ entspricht auch genau dem Übergangsbereich zwischen der vorwiegend quasistationären und der vorwiegend quasilaminaren Reaktion der Turbulenz, genauer gesagt ändert sich dort die Phase der Wandschubspannungsimpedanz maximal schnell. Offenbar spielt die Frequenz $\omega_w^+ \approx 1 \cdot 10^{-2}$ für die wandnahe Dynamik der Turbulenz eine Sonderrolle.

Ausgezeichneter Wandabstand

Eine Sonderrolle kommt auch dem Wandabstandsbereich von etwa $y^+ = 25$ bis $y^+ \approx 30$ zu. Besonders deutlich zeigt sich das in der y -Ortskurvendarstellung der Modulationsfaktoren der turbulenten Schubspannung und der turbulenten axialen Normalspannung. Trägt man die Modulationsfaktoren von $u'v'$ oder u'^2 in der komplexen Ebene mit dem Wandabstand y als Parameter auf, dann findet man bei $25 \lesssim y^+ \lesssim 30$ teils sehr starke Richtungsänderungen. Die Ortskurven »knicken« förmlich ab. Das gilt vor allem, aber nicht nur, für die tieferen Modulationsfrequenzen. Für die wandnormalen und die spannweitigen Normalspannungen findet man ein ähnliches Verhalten – jedoch weniger ausgeprägt.

Dort wo die Ortskurven »abknicken« ist die Phase minimal gegenüber der modulierten Wandschubspannung verschoben. Daraus ergibt sich, dass die Antwortzeiten (Phasenlaufzeiten) – besonders die von $u'v'$ und u'^2 – im angegebenen y -Bereich minimal sind. Die von Ronneberger (1985) aufgestellte Vermutung, dass die an der Wand induziert Scherwelle in diesem Bereich quasi wie an einer festen Platte reflektiert wird, steht im Einklang mit den hier gefundenen Ergebnissen. Diese Erklärung macht es zumindest plausibel, warum die minimalen Antwortzeiten nicht in direkter Wandnähe gefunden werden, wie man vermuten könnte, sondern in einer Schicht die fünf- bis sechsmal so weit von der Wand entfernt ist, wie die Grenze der viskosen Unterschicht.

Ob – und wenn ja inwiefern – die oben erwähnte ausgezeichnete Modulationsfrequenz von $\omega_w^+ = 1 \cdot 10^{-2}$ für eine mögliche Erklärung des unbekanntenen physikalischen Prozesses, der die angenommene Reflektion hervorrufen kann, wichtig ist, ist unklar. Auch in der y -Ortskurvendarstellung zeichnen sich die Frequenz $\omega_w^+ = 1 \cdot 10^{-2}$ dadurch aus, dass die Richtungsänderung der zugehörigen y -Ortskurve besonders ausgeprägt ist (die Richtung ändert sich um fast 180°).

8.6.2 Größen die kaum moduliert werden

Ein Maß für die Ähnlichkeit der beiden Signale u' und v' ist der Korrelationskoeffizient $\chi_{u'v'}$ und dieses Maß wird von der äußeren Störung kaum beeinflusst – mit der oben beschriebenen Ausnahme. In der stationären Strömung ergeben sich für den Korrelationskoeffizienten fast im gesamten wandnahen Bereich konstante Werte von etwas mehr als 0,4 und $\chi_{u'v'}$ wird damit zu einer Größe, die kennzeichnet für die wandbegrenzte Turbulenz ist. Es zeigt sich, dass sich auch in der instationären Strömung der charakteristische Korrelationskoeffizient zwischen u' und v' kaum ändert, denn die Beträge der Modulationsfaktoren sind für fast alle Frequenzen und Wandabstände sehr klein. Die Einzelgrößen die in die Berechnung von $\chi_{u'v'}$ eingehen – das sind zum einen die Korrelation zwischen u' und v' und zum anderen die Varianzen von u' und v' – werden aber sehr wohl moduliert. Offenbar aber so, dass $\tilde{\chi}_{u'v'}(t)$ weitgehend konstant bleibt.

Der Korrelationskoeffizient wird selbst dann kaum moduliert, wenn er mit den (beliebig) räumlich verschobenen Signalen $u'(x, t)$ und $v'(x+r_x, t)$ berechnet wird, oder – was auf dasselbe hinausläuft – wenn er für einzelne räumliche Wellenzahlen k_x ausgewertet wird. Mit anderen Worten: Die modulierte Kohärenzfunktion $\gamma_{u'v'}(k_x, t)$ ändert sich (für alle k_x) nur wenig als Funktion der Zeit. Das gilt in ähnlicher Weise auch für die spannweitige Kohärenzfunktion $\gamma_{u'v'}(k_z, t)$. Im Gegensatz zum Korrelationskoeffizient $\chi_{u'v'}$, bei dem u' und v' am selben Ort ausgewertet werden, berücksichtigt die Kohärenzfunktion $\gamma_{u'v'}$ auch die räumliche Struktur der Turbulenz. Soweit die Kohärenzfunktion betroffen ist, kann die räumliche Struktur als stabil betrachtet werden. Ähnlich wie beim Korrelationskoeffizienten sind jedoch die Einzelgrößen, die in den Modulationsfaktor der Kohärenzfunktion

einfließen, also das Kreuzspektrum zwischen u' und v' sowie die Autospektren von u' und v' , teilweise sehr stark moduliert, insbesondere für große k_x -Werte. Davon wird im nächsten Abschnitt, in dem die stark modulierten Eigenschaften zusammengefasst sind, noch die Rede sein.

Die Modulationen der spektralen Autoleistungsdichten von u' , v' und w' wurde ähnlich wie die Modulation der Kohärenzfunktion mit dem Ziel untersucht, die Modulation der räumlichen Struktur der Turbulenz zu erfassen. Insbesondere an den modulierten zweidimensionalen Spektren $E(k_x, k_z)$ zeigt sich, dass die gesamte spannweitige Struktur der Strömung auf die aufgeprägte Störung in der Regel sehr einheitlich reagiert. Unter anderem reagieren alle spannweitigen Wellenzahlkomponenten näherungsweise mit gleichen Antwortzeiten, vor allem dann, wenn man zuvor die Modulation der Gesamtleistung abzieht, also das nullte Moment in den Ursprung legt. Für Wellenzahlen $\vec{k} = (k_x, k_z)^T$ mit großem k_x ändern sich auch die Amplituden der Modulationsfaktoren als Funktion von k_z nur wenig. Bei kleinen k_x -Werten nimmt die Amplitude aber mit steigendem k_z zu.

Überlegungen zur Modulation der räumlichen Struktur: Betrachtet man auf der einen Seite die modulierte Kohärenzfunktion zwischen u' und v' und auf der anderen Seite das modulierte Kreuzspektrum und die modulierten Autospektren von u' und v' , dann werden dadurch jeweils andere Aspekte der modulierten räumlichen Struktur der Turbulenz erfasst. Vor allem bei großen axialen Wellenzahlen werden das Kreuz- und die Autospektren vergleichsweise stark moduliert, die Kohärenzfunktion im Gegensatz dazu aber kaum. Die besonders starken Modulationen der Leistungsdichten bei großen k_x -Werten sind zwar für die Gesamtenergie unerheblich, jedoch heißt das nicht, dass sie auch unwichtig für die Dynamik sind. Die räumliche u' - und v' -Struktur (vor allem die axiale) ändert sich deutlich im Takt der Wandperiode. Dass dabei besonders die Amplituden der hohen Raumfrequenzkomponenten starken Schwankungen unterworfen sind, bedeutet, dass zu bestimmten Phasen besonders starke räumliche Gradienten vorhanden sind, zu anderen Phasen hingegen nicht. In einem Strukturbild kann man sich etwa vorstellen, dass die Konvektionsbewegungen von Turbulenzballen durch die periodische Störung getriggert werden, und zwar so, dass sie zu gewissen Phasen verstärkt »aufeinander prallen«, wobei – zunächst in $u'(x)$ – großen räumliche Geschwindigkeitsgradienten entstehen. Das Fluid ist jedoch inkompressible, sodass es am Ort des »Zusammenpralls« der Ballen umgelenkt wird. Vor allem in Wandnähe werden die Stromlinien dabei vorwiegend in y -Richtung ausgelenkt und es entstehen große v' -Komponenten. Da dieser Vorgang nur auf ein kleines x -Gebiet (Ort des Zusammenpralls) begrenzt ist, entstehen auch große räumliche Gradienten von v' . In dem beschriebenen Szenario ändern sich die Einzelstrukturen $u'(x)$ bzw. $v'(x)$ deutlich im Takt der Wand und vorwiegend die Wellenzahlkomponenten mit großem k_x , während die Kohärenz zwischen u' und v' , also die »Ähnlichkeit« der räumlichen u' - und v' -Struktur für bestimmte Wellenzahlkomponenten, auch zeitlich weitgehend erhalten bleibt.

Weitere Eigenschaften, die zu den stabileren der Strömung gezählt werden können, sind die Histogramme der Amplitudenwerte der Geschwindigkeitsfluktuationen u' , v' und w' . Es hat sich bereits in früheren Experimenten gezeigt, dass die Amplitudenverteilung von u' (sowie die von du'/dt) im Wesentlichen dadurch moduliert wird, dass sich das zweite Moment der Verteilung im Takt der Wand-schwingung ändert. Die auf das zweite Moment normierten Verteilungen bleiben aber weitgehend unverändert. In der Simulation wird das auch für die Histogramme der beiden anderen Komponenten v' und w' beobachtet. Eine über die Modulation der zweiten Momente hinausgehende Modulation kann zwar für alle Verteilungen beobachtet werden – und hier zeigen sich auch erkennbare Differenzen zwischen den einzelnen Größen – jedoch sind die Modulationsfaktoren insgesamt sehr klein. Der als sekundärer Effekt bezeichneten Modulation, wird keine besondere Bedeutung zugemessen, denn es zeigt sich, dass dort die höheren Harmonischen der phasengemittelten Histogramme nicht

mehr vernachlässigt werden können und somit die Beschreibung durch Modulationsfaktoren wenig sinnvoll ist.

8.6.3 Größen die deutlich moduliert werden

Wenn die Modulationsfrequenz nicht bereits im quasilaminaren Bereich liegt, findet man für die zweidimensionalen Spektren $E(k_x, k_z)$ unabhängig von der spannweitigen Wellenzahl k_z bei großen axialen Wellenzahlen k_x immer sehr große Modulationen. Das gilt folglich auch für die über alle spannweitigen Wellenzahlen integrierten Spektren $E(k_x)$, die hier vornehmlich untersucht wurden. Bei hohen Modulationsfrequenzen verschwindet die Modulation der Spektren aber bei alle Wellenzahlen k_x , insbesondere auch bei den großen.

Im Übergangsbereich $0,3 \cdot 10^{-2} \lesssim \omega_w^+ \lesssim 3 \cdot 10^{-2}$ reagieren die einzelnen axialen Wellenzahlkomponenten mit deutlich unterschiedlichen Antwortzeiten auf die Modulation der Wandschubspannung. Betrachtet man dabei die Modulation der Form der Spektren getrennt von der Modulation der Gesamtleistung, verschiebt also das nullte Moment in den Ursprung, dann zeigt sich, dass als erstes immer die Wellenzahlkomponenten mit großem k_x auf die Störung reagieren und zwar mit relativen Amplituden die teilweise um eine Größenordnung über der Modulation der Gesamtleistung liegen. Vergleicht man das beispielsweise mit den modulierten Histogrammen, deren Modulationen quasi ausschließlich durch die Modulationen der entsprechenden Gesamtleistungen bedingt sind, dann wird deutlich, wie stark die spektralen Leistungsdichten bei den großen axialen Wellenzahlen moduliert sind. Auch insgesamt erweist sich die Form der Spektren – also die räumliche Verteilung der Geschwindigkeitsfluktuationen – als ungeeignet zur Charakterisierung von »stabilen« Strukturelementen. Geeigneter wären die Verhältnisse von Fluktuationsamplituden, die sich in den kaum modulierten Histogrammen widerspiegeln, sowie die räumliche Kohärenz zwischen u' und v' , die sich auch in der zeitlich modulierten Strömung kaum ändert.

8.7 Negative Produktion

In jeder turbulenten Strömung wird in den kleinsten Wirbeln ständig kinetische Energie irreversibel in Wärme verwandelt, sodass die Turbulenz nur dann aufrechterhalten werden kann, wenn auch ein Energiezufluss vorhanden ist. In der turbulenten Kanalströmung findet im Mittel pro Zeiteinheit ein Energieübertrag $P = -\overline{u'v'}d\bar{u}/dy$ von der Gleichströmung auf die turbulenten Schwankungsbewegungen statt. Der Produktionsterm P ist dabei für alle Wandabstände stets positiv. Überraschenderweise finden sich aber in der spektral aufgelösten Korrelation $\overline{u'v'}$ Wellenzahlbereiche, die allein betrachtet, eine negative Produktion bewirken, also kinetischen Energie von der Turbulenz in die Gleichströmung transferieren. Berücksichtigt man nur die Wellenzahlkomponenten, für die u' und v' positiv korreliert sind, dann ergibt sich bei $y^+ \approx 20$ eine negative Produktion, die etwa -5% an der Gesamtproduktion ausmacht. Bei anderen Wandabständen ist der Anteil kleiner. Vornehmlich solche Wellen, die sehr langwellig in spannweitung Richtung sind, bewirken die negative Produktion. Je größer dabei die axiale Wellenzahl ist, um so stärker wird der Effekt. Es wurde die Vermutung aufgestellt, dass die ausgezeichneten Wellenzahlkomponenten zeitlich gedämpften Wellen zugeordnet werden können, die ihre Energie zunächst durch nichtlineare Wechselwirkungen den angefachten Wellen entnehmen (Energiekaskade im Wellenzahlraum), sie dann aber nicht zu ihrer eigenen Anfachung verwenden können. Letztlich kann die Energie dann aber nur noch dissipiert werden, oder sie muss zurück in die Gleichströmung fließen.

8.8 Schlussbemerkungen und Ausblick

Die hier vorgestellte Untersuchungsmethode ermöglicht es, auf konzeptionell einfache Weise die Dynamik einer turbulenten wandbegrenzten Strömung zu erforschen. Die Grundidee die Turbulenz in definierter Weise zu stören, um so aus dem Antwortverhalten etwas über die innere Struktur der Strömung zu erfahren, wurde in einer Reihe von experimentellen Arbeiten der vergangenen Jahrzehnte verfolgt. Hier wurden die Ergebnisse der erste numerischen Simulation präsentiert, die sich dieser Untersuchungsmethode in umfangreicher Weise bedient hat. Die Ergebnisse können als Grundlage für zukünftigen Turbulenzmodelle verwendet werden. Ein denkbarer Weg wäre der, dass man einige der Eigenschaften heranzieht, die sich auch im instationären Fall kaum gegenüber dem stationären Fall ändern und dann versucht damit einen geeigneten Schließungsansatz zu formulieren.

Ein solches Turbulenzmodell müsste sich natürlich über die instationäre turbulente Kanalströmung hinaus auch in anderen instationären Strömung bewähren, bevor es als brauchbar angesehen werden kann. Eine weitere Strömung die ohne Änderungen am Programm untersucht werden könnte, ist die turbulente Couette-Strömung. Dabei ist die turbulente Couette-Strömung zwar nicht so praxisnah wie die turbulente Kanalströmung, aber konzeptionell noch einfacher. In der stationären Couette-Strömung ist beispielsweise die turbulente Schubspannung überall konstant und nicht wie bei der Kanalströmung eine Funktion des Wandabstandes. Eine Untersuchung der turbulenten Couette-Strömung mit der gleichen Methode wie sie hier für die turbulente Kanalströmung angewandt wurde scheint daher lohnenswert. Dazu würde man die Wände in entgegengesetzter Richtung mit konstanter Geschwindigkeit bewegen und dieser konstanten Geschwindigkeit noch eine kleine harmonische Oszillation überlagern.

Es sind aber auch andere Formen der Anregung möglich. Solche nicht sinusförmigen Anregungen wären auch für die Kanalströmung interessant, insbesondere die Reaktion auf eine sprung- oder impulsartige Anregung vermittelt meist einen sehr anschaulichen Eindruck von der Reaktion der Strömung. Theoretisch hätte man damit sogar die – als linear vorausgesetzte – Reaktion der Strömung vollständig erfasst. Problematisch bei einer Sprung- oder Impulsanregung sind aber die kurzzeitig auftretenden Singularitäten. Besser geeignet sind Sweep oder Rauschanregung, um in einem Simulationslauf das Antwortverhalten eines großen Frequenzbereichs zu erfassen. Hier wurde am Beispiel der modulierten Wechselschubspannung durch Fourier-Rücktransformation eine näherungsweise Impulsantwort aus den Einzelfrequenzen berechnet. Diese Vorgehensweise könnte zunächst auch für andere modulierte Größen durchgeführt werden.

Zukünftig könnte man sich auch direkt das deterministische Verhalten der numerischen Strömung zunutze zu machen, indem man einmal die zeitliche Entwicklung der Turbulenz ohne Störung und einmal – vom gleichen Startfeld ausgehend – die zeitliche Entwicklung nach einer Störung ermitteln. Die Differenz der Entwicklungen könnte so direkt erfasst werden und würde sehr anschaulich zeigen, wie die Turbulenz auf die Störung reagiert. Ein erster Test in dieser Richtung wurde bereits durchgeführt. Dabei wurde die Reaktion auf eine sprungartige Anregung direkt anhand der Differenzfelder verfolgt. Es war gut zu erkennen, dass sich die Störung viel schneller als im laminaren Fall ausbreitet, für größere Wandabstände mit nahezu konstanter Geschwindigkeit in der Größenordnung von u_T .

A Diskrete Operatoren

Mathematisch betrachte man die diskreten Operatoren als Matrizen und die Variablen auf die sie wirken als Vektoren. Da alle Variablen von *drei* den Indizes i , j und k abhängen (vergleiche Abbildung 2.5 auf Seite 19), muss man diese zunächst bijektiv auf *einen* Index abbilden, zum Beispiel so: $(i, j, k) \leftrightarrow i + N_x(j + N_y k)$. Dann könnte man die Matrixelement der Matrizen (Operatoren) angeben, die auf solche Vektoren wirken. Im vorliegenden Fall wären dann aber fast alle Einträge der Matrizen Null.

Daher wird hier eine mehr intuitive Schreibweise verwendet. Man beachte, dass gleichbleibende Indizes auf den rechten Seiten jeweils ausgespart sind. Die Operatoren in z -Richtung sind nicht aufgeführt, sie ergeben sich aus den Operatoren der x -Richtung, wenn i durch k und Δx durch Δz ersetzt werden.

A.1 Divergenz D

$$\begin{aligned} (D_1 q)_{i,j,k} &= D_1^{(1)}(q_{i+1/2} - q_{i-1/2}) + D_1^{(2)}(q_{i+3/2} - q_{i-3/2}) \\ (D_2 q)_{i,j,k} &= (q_{j+1/2} - q_{j-1/2})/\Delta y_j \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Zahlenwerte für die homogenen Richtungen:

$$D_1^{(1)} = 27/(24\Delta x), \quad D_1^{(2)} = -1/(24\Delta x) \quad (\text{A.2})$$

A.2 Gradient G

$$\begin{aligned} (G_1 q)_{i+1/2,j,k} &= G_1^{(1)}(q_{i+1} - q_i) + G_1^{(2)}(q_{i+2} - q_{i-1}) \\ (G_2 q)_{i,j+1/2,k} &= G_{2,j+1/2}^{(-1)} q_{j-1} + G_{2,j+1/2}^{(0)} q_j + G_{2,j+1/2}^{(1)} q_{j+1} + G_{2,j+1/2}^{(2)} q_{j+2} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Für die Randzellen ($j = 1$ und $j = N_y$) ist:

$$(G_2 q)_{i,j+1/2,k} = \frac{q_{j+1} - q_j}{\Delta y_{j+1/2}} \quad (\text{A.4})$$

Zahlenwerte für die homogenen Richtungen:

$$G_1^{(1)} = 27/(24\Delta x), \quad G_1^{(2)} = -1/(24\Delta x) \quad (\text{A.5})$$

A.3 Laplace L

$$\begin{aligned} (L_1 q)_{i+1/2,j,k} &= L_1^{(0)} q_{i+1/2} + L_1^{(1)}(q_{i+3/2} + q_{i-1/2}) + L_1^{(2)}(q_{i+5/2} + q_{i-3/2}) \\ (L_1 q)_{i,j+1/2,k} &= L_1^{(0)} q_i + L_1^{(1)}(q_{i+1} + q_{i-1}) + L_1^{(2)}(q_{i+2} + q_{i-2}) \\ (L_2 q)_{i,j+1/2,k} &= L_{2,j+1/2}^{(-2)} q_{j-3/2} + L_{2,j+1/2}^{(-1)} q_{j-1/2} + L_{2,j+1/2}^{(0)} q_{j+1/2} + L_{2,j+1/2}^{(1)} q_{j+3/2} + L_{2,j+1/2}^{(2)} q_{j+5/2} \\ (L_2 q)_{i+1/2,j,k} &= L_{2,j}^{(-2)} q_{j-2} + L_{2,j}^{(-1)} q_{j-1} + L_{2,j}^{(0)} q_j + L_{2,j}^{(1)} q_{j+1} + L_{2,j}^{(2)} q_{j+2} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Für die Randzellen ($j = 1$ und $j = N_y$) ist:

$$\begin{aligned} (\mathbf{L}_2 q)_{i,j-1/2,k} &= L_{2,j-1/2}^{(-1)} q_{j-3/2} + L_{2,j-1/2}^{(0)} q_{j-1/2} + L_{2,j-1/2}^{(1)} q_{j+1/2} \\ (\mathbf{L}_2 q)_{i+1/2,j,k} &= L_{2,j}^{(-1)} q_{j-1} + L_{2,j}^{(0)} q_j + L_{2,j}^{(1)} q_{j+1} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Zahlenwerte für die homogenen Richtungen:

$$L_1^{(0)} = -30/(12(\Delta x)^2), \quad L_1^{(1)} = 16/(12(\Delta x)^2), \quad L_1^{(2)} = -1/(12(\Delta x)^2) \quad (\text{A.8})$$

A.4 Divergenz \times Gradient $\mathcal{L} = \mathbf{DG}$

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_1 q)_{l,j,m} &= \mathcal{L}_1^{(0)} q_i + \mathcal{L}_1^{(1)} (q_{i-1} + q_{i+1}) + \mathcal{L}_1^{(2)} (q_{i-2} + q_{i+2}) + \mathcal{L}_1^{(3)} (q_{i-3} + q_{i+3}) \\ (\mathcal{L}_2 q)_{l,j,m} &= \mathcal{L}_{2,j}^{(-2)} q_{j-2} + \mathcal{L}_{2,j}^{(-1)} q_{j-1} + \mathcal{L}_{2,j}^{(0)} q_j + \mathcal{L}_{2,j}^{(1)} q_{j+1} + \mathcal{L}_{2,j}^{(2)} q_{j+2} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{aligned} L_1^{(0)} &= -2(\mathbf{G}_1^{(1)} \mathbf{D}_1^{(1)} + \mathbf{G}_1^{(2)} \mathbf{D}_1^{(2)}) \\ L_1^{(1)} &= \mathbf{G}_1^{(1)} \mathbf{D}_1^{(1)} - \mathbf{G}_1^{(2)} \mathbf{D}_1^{(1)} - \mathbf{G}_1^{(1)} \mathbf{D}_1^{(2)} \\ L_1^{(2)} &= \mathbf{G}_1^{(1)} \mathbf{D}_1^{(2)} + \mathbf{G}_1^{(2)} \mathbf{D}_1^{(1)} \\ L_1^{(3)} &= \mathbf{G}_1^{(2)} \mathbf{D}_1^{(2)} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{2,j}^{(-2)} &= -G_{2,j-1/2}^{(-1)} / \Delta y_j \\ \mathcal{L}_{2,j}^{(-1)} &= (G_{2,j+1/2}^{(-1)} - G_{2,j-1/2}^{(0)}) / \Delta y_j \\ \mathcal{L}_{2,j}^{(0)} &= (G_{2,j+1/2}^{(0)} - G_{2,j-1/2}^{(1)}) / \Delta y_j \\ \mathcal{L}_{2,j}^{(1)} &= (G_{2,j+1/2}^{(1)} - G_{2,j-1/2}^{(2)}) / \Delta y_j \\ \mathcal{L}_{2,j}^{(2)} &= G_{2,j+1/2}^{(2)} / \Delta y_j \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Zahlenwerte für die homogenen Richtungen:

$$\begin{aligned} L_1^{(0)} &= -7300/(2880(\Delta x)^2), \quad L_1^{(1)} = 3915/(2880(\Delta x)^2), \\ L_1^{(2)} &= -270/(2880(\Delta x)^2), \quad L_1^{(3)} = 5/(2880(\Delta x)^2) \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

B Phasenmittelung

In der Abbildung B.1 ist das Prinzip der gewichteten Phasenmittelung, so wie es in allen Rechnungen benutzt wurde, graphisch verdeutlicht. Das Phasenmittel eines beliebigen Signals soll in dem gezeigten Beispiel zu vier Phasenzeitpunkten bestimmt werden. Trifft ein Sampelzeitpunkt der Rechnung (Ist-Phase: die Punkte in der Abbildung) genau mit einer der gewünscht Phase innerhalb der Wandperiode (Soll-Phase: durch Pfeile markiert) zusammen, so wird der Wert des zu mitteln- den Signals voll zum Phasenmittel hinzuaddiert. Liegt dagegen die Ist-Phase zwischen zwei der Soll-Phasen, so wird der Signalwert anteilmäßig auf die beiden benachbarten Soll-Phasen verteilt. Die Gewichtung skaliert linear mit dem Abstand der Ist-Phase von den unmittelbar benachbarten Soll-Phasen. Man beachte, dass es im Allgemeinen nicht nötig ist, dass die Soll-Phasen äquidistant verteilt sind, oder mit irgendwelchen Ist-Phasen zusammentreffen. In der Abbildung ist es aber der besseren Übersicht halber so eingezeichnet.

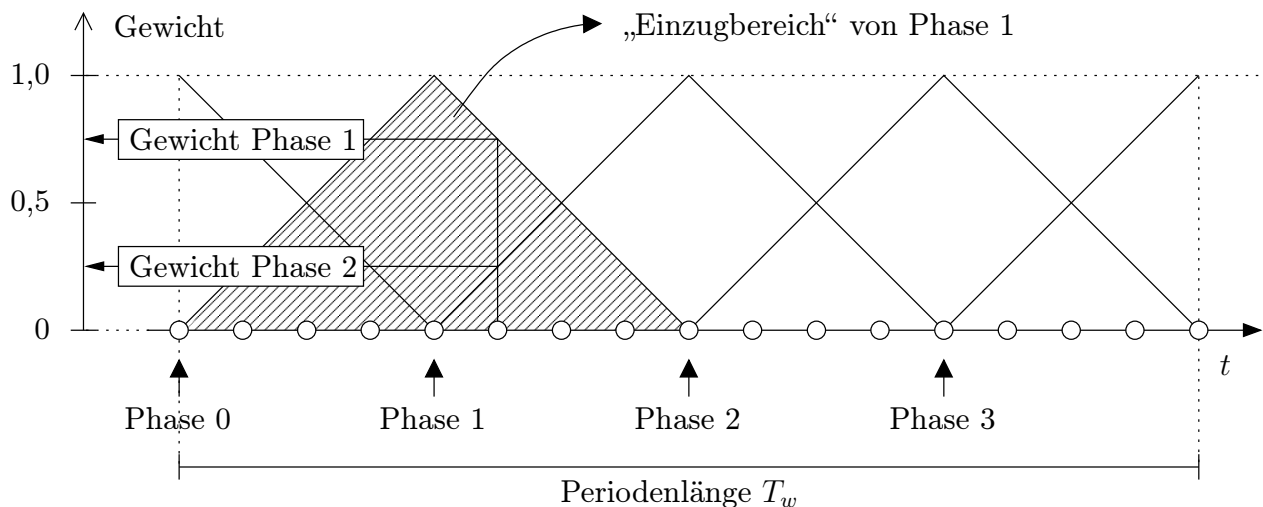


Abb. B.1: Prinzip der gewichteten Phasenmittelung.

Durch das beschriebene Verfahren erhält man allerdings einen systematischen Fehler im berechneten Phasenmittel. Dieser Fehler lässt sich aber nachträglich vollständig beseitigen.

Man betrachte dazu das berechnete Phasenmittel als Faltung des echten Phasenmittels mit der Gewichtsfunktion (hier einem Dreiecksignal):

$$\langle q_{\text{ist}} \rangle(\phi) = \langle q_{\text{soll}} \rangle(\phi) * \Delta(\phi) \tag{B.1}$$

Im Spektralbereich der Fouriertransformation entspricht dies einer Multiplikation der transformierten Gewichtsfunktion mit dem transformierten echten Phasenmittel

$$A_{q_{\text{ist}}}^n = A_{q_{\text{soll}}}^n \cdot \text{sinc}^2(n). \tag{B.2}$$

Außer dem Mittelwert des Signals werden somit alle Fourier-Komponenten systematisch abgeschwächt. Um nun das echte Phasenmittel aus dem berechneten Phasenmittel zu bestimmen braucht man nur die Transformierte des berechneten Phasenmittels durch die Transformierte der Gewichtsfunktion teilen und das Ergebnis in den Zeitbereich zurücktransformieren.

C Freiheitsgrade

Sei $\overline{(\cdot)}$ irgendein Mittelungsoperator, der mit der Erwartungwertbildung $\mathcal{E}[\cdot]$ vertauscht. $q(t)$ sei ein stationäres Zufallssignal das gemittelt (gefiltert) werden soll. Das Verhältnis zwischen den Varianzen vor und nach der Mittelung ist die Zahl der Freiheitsgrade der Mittelung:

$$\text{F.g.}\bar{q} = \frac{\mathcal{E}[(q - \mathcal{E}[q])^2]}{\mathcal{E}[(\bar{q} - \mathcal{E}[\bar{q}])^2]} \quad (\text{C.1})$$

Für den Mittelungsoperator wird zunächst nur angenommen, dass er durch eine Gewichtsfunktion $g(t)$ beschrieben werden kann:

$$\bar{q}(t) = \int q(t - t')g(t') dt' \quad (\text{C.2})$$

Von der Gewichtsfunktion $g(t)$ wird gefordert, dass $\int g(t) dt = 1$ gilt, dann ist sichergestellt das der Erwartungswert des gefilterten Signals mit dem Erwartungswert des Ausgangssignals übereinstimmt: $\mathcal{E}[\bar{q}] = \mathcal{E}[q]$. Der Zähler von Gleichung (C.1) ist die Gesamtleistung des Leistungssignals $q'(t) = q(t) - \mathcal{E}[q]$. Sei $R_{q'}(\Delta t) = \mathcal{E}[q'(t)q'(t + \Delta t)]$ die Autokorrelationsfunktion und $S_{q'}(f) = \mathcal{F}_{\Delta t \rightarrow f}\{R_{q'}(\Delta t)\}$ das Leistungsdichtespektrum von $q'(t)$, dann gilt:

$$\mathcal{E}[(q - \mathcal{E}[q])^2] = \int S_{q'}(f) df = R_{q'}(0). \quad (\text{C.3})$$

Für den Nenner von Gleichung (C.1) ist die mittlere quadratische Abweichung des gefilterten Signals vom Erwartungswert gesucht:

$$\mathcal{E}[(\bar{q} - \mathcal{E}[q])^2] = \mathcal{E}\left[\left(\int q'(t)g(t) dt\right)^2\right] \quad (\text{C.4})$$

$$= \iint \mathcal{E}[q'(t - t')q'(t - t'')g(t')g(t'')] dt' dt'' \quad (\text{C.5})$$

$$= \iint R_{q'}(t'' - t')g(t')g(t'') dt' dt'' \quad (\text{C.6})$$

$$= \int S_{q'}(f)G(f)G^*(f) df. \quad (\text{C.7})$$

$G(f)$ ist dabei das Amplitudenspektrum der Gewichtsfunktion $g(t)$. Der Einfachheit halber sei nun $\bar{q}(t) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} q(t - t') dt'$ die üblicherweise angewandte Mittelung, dann gilt

$$g(t) = \begin{cases} 1/T & \text{für } -T/2 \leq t \leq T/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{C.8})$$

und

$$G(f) = \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}. \quad (\text{C.9})$$

Für lange Fensterlängen T gilt im Grenzwert

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T |G(f)|^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} T \frac{\sin^2(\pi f T)}{(\pi f T)^2} = \delta(f). \quad (\text{C.10})$$

Damit ergibt sich für die Zahl der Freiheitsgrade pro Mittelungseinheit:

$$\text{f.g.}\bar{q} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{F.g.}\bar{q}}{T} \quad (\text{C.11})$$

$$= \frac{\int S_{q'}(f) \, df}{\int S_{q'}(f) \delta(f) \, df} \quad (\text{C.12})$$

$$= \frac{\int S_{q'}(f) \, df}{S_{q'}(0)}. \quad (\text{C.13})$$

D Tabellen der Strömungsparameter

In den folgenden Tabellen sind die Parameter der Hauptserien und einiger Zusatzfelder aufgelistet. Alle Werte sind mit u_{cl}^{lam} , h und ν entdimensionalisiert.

Startfeld	$N_x \times N_y \times N_z$	$L_x \times L_y \times L_z$	Re_Q	Re_{cl}	Re_τ	T =Rechenzeit; Δt =Schrittweite			u_c
↳ Folgefild	T =Rechenzeit; Bemerkungen			Re_{cl}	Re_τ	U_w	T_w	a_{τ_w}	u_c
T_2	$96 \times 97 \times 96$	$6 \times 2 \times 3$	5000			$T=730,12$; $\Delta t=0,01$			
↳ T_5	$T=1035,63$			3864	207,5				0,0
↳ I_1	$T=1485,36$; A-Serie			3858	206,6	0,4	3,00	$-3,6810 + 3,4340 i$	0,0
↳ I_2	$T=1484,97$; A-Serie			3860	206,2	0,4	4,50	$-2,9805 + 2,8026 i$	0,0
↳ I_3	$T=1485,36$; A-Serie			3861	206,2	0,4	6,75	$-2,3803 + 2,2640 i$	0,0
↳ I_4	$T=1485,26$; A-Serie			3864	205,3	0,4	10,13	$-1,9402 + 1,8709 i$	0,0
↳ I_5	$T=1483,33$; A-Serie			3856	204,8	0,4	15,19	$-1,5719 + 1,5436 i$	0,0
↳ I_6	$T=1484,25$; A-Serie			3858	203,3	0,4	22,78	$-1,2980 + 1,2859 i$	0,0
↳ I_7	$T=1484,75$; A-Serie			3844	201,3	0,4	34,17	$-1,0853 + 1,0452 i$	0,0
↳ I_8	$T=1485,27$; A-Serie			3835	200,3	0,4	51,26	$-0,8436 + 0,7884 i$	0,0
↳ I_9	$T=1485,21$; A-Serie			3816	202,4	0,4	76,89	$-0,4985 + 0,6167 i$	0,0
↳ I_{10}	$T=1485,55$; A-Serie			3815	204,5	0,4	115,33	$-0,2170 + 0,5835 i$	0,0
↳ I_{11}	$T=1485,13$; A-Serie			3804	211,3	0,4	173,00	$-0,0621 + 0,7162 i$	0,0
↳ I_{12}	$T=2384,13$; A-Serie			3782	213,7	0,4	259,50	$-0,0689 + 0,7354 i$	0,0
↳ I_{1b}	$T=1482,41$; A-Serie			3851	206,4	0,4	3,67	$-3,3159 + 3,1049 i$	0,0
↳ I_{2b}	$T=1483,23$; A-Serie			3849	206,4	0,4	5,51	$-2,6744 + 2,5269 i$	0,0
↳ I_{3b}	$T=1482,81$; A-Serie			3842	204,6	0,4	8,27	$-2,1739 + 2,0809 i$	0,0
↳ I_{4b}	$T=1484,33$; A-Serie			3849	205,6	0,4	12,40	$-1,7347 + 1,6893 i$	0,0
↳ I_{5b}	$T=1483,95$; A-Serie			3861	204,2	0,4	18,60	$-1,4172 + 1,4043 i$	0,0
↳ I_{6b}	$T=1483,55$; A-Serie			3847	201,5	0,4	27,90	$-1,2050 + 1,1838 i$	0,0
↳ I_{7b}	$T=1482,36$; A-Serie			3845	200,5	0,4	41,85	$-0,9822 + 0,9153 i$	0,0
↳ I_{8b}	$T=1933,87$; A-Serie			3840	199,8	0,4	62,78	$-0,6965 + 0,6812 i$	0,0
↳ I_{9b}	$T=1933,68$; A-Serie			3829	203,5	0,4	94,17	$-0,3299 + 0,5928 i$	0,0
↳ I_{10b}	$T=1933,00$; A-Serie			3808	205,3	0,4	141,25	$-0,1143 + 0,6359 i$	0,0
↳ I_{11b}	$T=1931,41$; A-Serie			3793	212,1	0,4	211,87	$-0,0570 + 0,7231 i$	0,0
↳ I_{12b}	$T=1931,17$; A-Serie			3795	216,5	0,4	317,81	$-0,0925 + 0,7429 i$	0,0
↳ I	$T=1036,63$								0,4
↳ $I_{1\#2}$	$T=1633,26$					0,2	3,00		0,4
↳ $I_{2\#2}$	$T=1633,36$					0,2	4,50		0,4
↳ $I_{3\#2}$	$T=1634,11$					0,2	6,75		0,4
↳ $I_{4\#2}$	$T=1633,59$					0,2	10,13		0,4
↳ $I_{5\#2}$	$T=1631,85$					0,2	15,19		0,4
↳ $I_{6\#2}$	$T=1611,72$					0,2	22,78		0,4
↳ $I_{7\#2}$	$T=1613,90$					0,2	34,17		0,4
↳ $I_{8\#2}$	$T=1634,04$					0,2	51,26		0,4
↳ $I_{9\#2}$	$T=1632,50$					0,2	76,89		0,4
↳ $I_{10\#2}$	$T=1632,08$					0,2	115,33		0,4
↳ $I_{11b\#2}$	$T=1841,96$					0,2	173,00		0,4
↳ $I_{12b\#2}$	$T=2225,96$				211,1	0,1	259,50	$-0,0275 + 0,2308 i$	0,4
↳ I_{4c}	$T=1229,64$				211,1	0,1	10,08	$-0,4393 + 0,4489 i$	0,4
↳ I_{4c2}	$T=1509,47$				207,9	0,1	10,08	$-0,4527 + 0,4582 i$	0,2
↳ I_{4c3}	$T=1508,63$				207,2	0,1	10,08	$-0,4540 + 0,4604 i$	0,6
↳ I_{7c}	$T=1178,69$				207,1	0,2	33,92	$-0,4971 + 0,4639 i$	0,4
↳ I_{7c2}	$T=1302,52$				206,0	0,2	33,92	$-0,5065 + 0,4789 i$	0,2
↳ I_{7c3}	$T=1297,27$				205,8	0,2	33,92	$-0,5078 + 0,4882 i$	0,0
↳ I_{8c}	$T=1261,43$				209,7	0,1	51,20	$-0,1556 + 0,1525 i$	0,4
↳ I_{9c}	$T=1363,83$				209,9	0,1	76,80	$-0,0478 + 0,1551 i$	0,4
↳ I_{11c}	$T=1575,51$				211,0	0,1	172,96	$-0,0048 + 0,2184 i$	0,4
↳ CC_2	$T=2637,47$; POD				207,0	0,0	0,0		0,0

Tabelle D.1: Parameter der Simulation: A-Serie und einige Zusatzfelder.

Startfeld	$N_x \times N_y \times N_z$	$L_x \times L_y \times L_z$	Re_Q	Re_{cl}	Re_τ	T =Rechenzeit; Δt =Schrittweite			u_c
↳ Folgefeld	T =Rechenzeit; Bemerkungen			Re_{cl}	Re_τ	U_w	T_w	a_{τ_w}	u_c
F ₂	48 × 97 × 48	3.75 × 2 × 1.875	5000			$T = 1088,83$; $\Delta t = 0,01$			0,0
↳ F _{2a}	$T = 3352,31$				207,14				0,0
↳ F _{2b}	$T = 3175,67$; skewed symmetric								0,0
↳ F _{2p0}	$T = 3452,26$; pdf				206,80				0,0
↳ F _{2p1}	$T = 5494,77$; pdf					0,2	51,20		0,0
↳ F _{2p2}	$T = 3085,15$; pdf					0,2	76,80		0,0
↳ F _{2p3}	$T = 5477,92$; pdf					0,2	10,24		0,0
↳ F _{2p1c}	$T = 5807,36$; pdf				204,5	0,2	51,20	$-0,3857 + 0,3754 i$	0,0
↳ F _{2p2c}	$T = 5787,59$; pdf				205,0	0,2	76,80	$-0,1908 + 0,2899 i$	0,0
↳ F _{2p3c}	$T = 8136,48$; pdf				206,0	0,2	10,24	$-0,9169 + 0,9257 i$	0,0
↳ F _{V1}	$T = 1619,20$; 2d-pdf								0,0
↳ F _{V2}	$T = 3300,66$; 2d-pdf					0,2	51,20		0,0
↳ F _{SW1}	$T = 3136,83$; Sweep Anregung					0,02	256,00		0,0
↳ F _{SW1b}	$T = 7232,83$; Sweep Anregung					0,02	256,00		0,0
↳ F _{FILM1}	$T = 1394,09$; xz-Ebene								0,0
↳ F _{FILM2}	$T = 1373,34$; xy-Ebene					0,1	10,24		0,0
↳ F _{FILM3}	$T = 1395,89$; xy-Ebene								0,0
↳ F _{FILM4}	$T = 1457,43$; yz-Ebene					0,1	77,00		0,0
↳ F _{FILM5}	$T = 1390,81$; yz-Ebene; $\Delta t = 0,005$					0,1	77,00		0,4
↳ M ₁	$T = 3364,83$; B-Serie			3842	207,19	0,1	259,50	$-0,0226 + 0,2028 i$	0,0
↳ M ₂	$T = 3364,83$; B-Serie			3840	207,11	0,1	173,00	$-0,0176 + 0,1972 i$	0,0
↳ M ₃	$T = 3595,43$; B-Serie			3848	206,48	0,1	115,33	$-0,0361 + 0,1708 i$	0,0
↳ M ₄	$T = 4113,93$; B-Serie			3847	206,12	0,1	94,17	$-0,0485 + 0,1557 i$	0,0
↳ M ₅	$T = 3595,53$; B-Serie			3851	206,04	0,1	76,89	$-0,0881 + 0,1438 i$	0,0
↳ M ₆	$T = 3486,13$; B-Serie			3847	206,46	0,1	62,78	$-0,1347 + 0,1456 i$	0,0
↳ M ₇	$T = 3595,53$; B-Serie			3845	206,10	0,1	51,26	$-0,1769 + 0,1742 i$	0,0
↳ M ₈	$T = 3680,73$; B-Serie			3856	205,96	0,1	34,17	$-0,2513 + 0,2414 i$	0,0
↳ M ₉	$T = 3566,83$; B-Serie			3843	206,25	0,1	22,78	$-0,3041 + 0,3105 i$	0,0
↳ M ₁₀	$T = 3719,23$; B-Serie			3846	206,35	0,1	15,19	$-0,3725 + 0,3797 i$	0,0
↳ M ₁₁	$T = 3517,43$; B-Serie			3846	205,32	0,1	10,13	$-0,4636 + 0,4679 i$	0,0
↳ M ₁₂	$T = 3475,83$; B-Serie			3846	206,63	0,1	6,75	$-0,5632 + 0,5649 i$	0,0
↳ M _{2b}	$T = 3440,83$; B-Serie			3845	206,54	0,1	134,50	$-0,0167 + 0,1870 i$	0,0
↳ M _{3b}	$T = 3440,83$; B-Serie			3840	206,78	0,1	107,60	$-0,0265 + 0,1731 i$	0,0
↳ M _{4b}	$T = 3440,91$; B-Serie			3844	205,97	0,1	89,67	$-0,0541 + 0,1552 i$	0,0
↳ M _{5b}	$T = 3440,73$; B-Serie			3849	205,75	0,1	71,73	$-0,1098 + 0,1424 i$	0,0
↳ M _{2b#2}	$T = 3440,83$					0,04	134,50		0,0
↳ M _{3b#2}	$T = 3440,83$					0,04	107,60		0,0
↳ M _{4b#2}	$T = 3440,91$					0,04	89,67		0,0
↳ M _{5b#2}	$T = 3440,73$					0,04	71,73		0,0
↳ M ₀	$T = 9288,83$; B-Serie			3836	206,91	0,1	1000,00	$-0,0124 + 0,1806 i$	0,0
↳ M ₀₈	$T = 2888,83$; B-Serie			3842	208,54	0,1	800,00	$-0,0120 + 0,1884 i$	0,0
↳ M ₀₆	$T = 3088,83$; B-Serie			3830	207,51	0,1	600,00	$-0,0251 + 0,1903 i$	0,0
↳ M ₀₅	$T = 5288,83$; B-Serie			3831	206,99	0,1	500,00	$-0,0253 + 0,1977 i$	0,0
↳ M ₀₄	$T = 5288,83$; B-Serie			3844	206,90	0,1	400,00	$-0,0233 + 0,1984 i$	0,0
F _{1b}	96 × 97 × 96	7.5 × 2 × 3.75	5000			$T = 633,29$; $\Delta t = 0,01$			0,0
↳ L ₁	$T = 1252,29$; C-Serie			3855	208,06	0,1	259,50	$-0,0282 + 0,2041 i$	0,0
↳ L ₂	$T = 1425,29$; C-Serie			3842	207,24	0,1	173,00	$-0,0196 + 0,1952 i$	0,0
↳ L ₃	$T = 1886,59$; C-Serie			3845	207,09	0,1	115,33	$-0,0255 + 0,1766 i$	0,0
↳ L ₄	$T = 3558,39$; C-Serie			3850	206,86	0,1	94,17	$-0,0488 + 0,1586 i$	0,0
↳ L ₅	$T = 2271,09$; C-Serie			3850	205,92	0,1	76,89	$-0,0878 + 0,1394 i$	0,0
↳ L ₆	$T = 1988,89$; C-Serie			3859	206,23	0,1	62,78	$-0,1327 + 0,1516 i$	0,0
↳ L ₇	$T = 1758,49$; C-Serie			3850	206,27	0,1	51,26	$-0,1797 + 0,1687 i$	0,0
↳ L ₈	$T = 1758,39$; C-Serie			3853	207,04	0,1	34,17	$-0,2522 + 0,2404 i$	0,0
↳ F _{1ba}	$T = 745,96$				206				0,0
↳ F _{1bb}	$T = 848,78$; POD				206				0,0

Tabelle D.2: Parameter der Simulation: B-Serie, C-Serie und einige Zusatzfelder.

Startfeld	$N_x \times N_y \times N_z$	$L_x \times L_y \times L_z$	Re_Q	Re_{cl}	Re_τ	T =Rechenzeit; Δt =Schrittweite			u_c
↳ Folgefeld	T =Rechenzeit; Bemerkungen			Re_{cl}	Re_τ	U_w	T_w	a_{τ_w}	u_c
T_1	$64 \times 67 \times 64$	$6 \times 2 \times 3$	5000			$T=1522,75; \Delta t=0,01$			0,0
↳ S_1	$T=1906,75$								0,0
↳ S_4	$T=1548,35$								0,0
↳ E_1	$T=1632,07$					0,2	34,24		0,0
↳ E_2	$T=$					0,2	34,24		0,0
↳ E_3	$T=2263,77$					0,2	51,20		0,0
↳ E_4	$T=3212,35$					0,2	51,20		0,0
↳ E_5	$T=3166,44$					0,2	76,80		0,0
↳ E_6	$T=1933,67$					0,0	0,0		0,0
↳ J_1	$T=2606,60$; D-Serie			3844	205,6	0,4	3,00	$-3,6212 + 3,5190 i$	0,0
↳ J_2	$T=2606,50$; D-Serie			3846	204,9	0,4	4,50	$-2,9537 + 2,8604 i$	0,0
↳ J_3	$T=1522,75$; D-Serie			3846	203,7	0,4	6,75	$-2,4146 + 2,3452 i$	0,0
↳ J_4	$T=1522,75$; D-Serie			3852	203,8	0,4	10,13	$-1,9457 + 1,9073 i$	0,0
↳ J_5	$T=1522,75$; D-Serie			3839	203,2	0,4	15,19	$-1,5793 + 1,5683 i$	0,0
↳ J_6	$T=1522,75$; D-Serie			3855	202,8	0,4	22,78	$-1,2881 + 1,2911 i$	0,0
↳ J_7	$T=1522,75$; D-Serie			3854	201,0	0,4	34,17	$-1,0750 + 1,0445 i$	0,0
↳ J_8	$T=2608,30$; D-Serie			3837	198,3	0,4	51,26	$-0,8595 + 0,8080 i$	0,0
↳ J_9	$T=1522,75$; D-Serie			3821	198,1	0,4	76,89	$-0,5545 + 0,6136 i$	0,0
↳ J_{10}	$T=1522,75$; D-Serie			3813	202,9	0,4	115,33	$-0,2219 + 0,6030 i$	0,0
↳ J_{13}	$T=2590,88$; D-Serie			3787	216,2	0,4	350,00	$-0,0938 + 0,7050 i$	0,0
↳ J_{7b}	$T=2571,81$; D-Serie			3848	205,5	0,2	34,17	$-0,5147 + 0,4970 i$	0,0
↳ J_{8b}	$T=2595,39$; D-Serie			3837	204,0	0,2	51,26	$-0,3905 + 0,3651 i$	0,0
↳ J_{9b}	$T=2569,07$; D-Serie			3832	204,7	0,2	76,89	$-0,2045 + 0,2935 i$	0,0
↳ J_{10b}	$T=2582,81$; D-Serie			3831	206,6	0,2	115,33	$-0,0717 + 0,3354 i$	0,0
↳ J_{11b}	$T=1882,40$; D-Serie			3842	208,5	0,2	173,00	$-0,0529 + 0,3822 i$	0,0
↳ J_{7c}	$T=2330,41$; D-Serie			3849	206,5	0,1	34,17	$-0,2581 + 0,2436 i$	0,0
↳ J_{8c}	$T=2331,94$; D-Serie			3859	205,3	0,1	51,26	$-0,1872 + 0,1798 i$	0,0
↳ J_{9c}	$T=2331,01$; D-Serie			3844	205,2	0,1	76,89	$-0,1006 + 0,1456 i$	0,0
↳ J_{10c}	$T=2329,67$; D-Serie			3830	206,4	0,1	115,33	$-0,0418 + 0,1835 i$	0,0
↳ J_{11c}	$T=2331,31$; D-Serie			3850	206,5	0,1	173,00	$-0,0251 + 0,2013 i$	0,0
↳ J_{12c}	$T=2332,81$; D-Serie			3837	206,7	0,1	259,50	$-0,0235 + 0,2039 i$	0,0
↳ C_{6a}	$T=1852,22$				206,7	0,4	22,78		0,0
↳ C_{6b}	$T=2223,82$				206,7	0,4	22,78		0,0
↳ C_{6e}	$T=2228,66$				206,7	0,2	22,78		0,0
↳ C_{6f}	$T=2241,02$				206,7	0,1	22,78		0,0
↳ C_{6g}	$T=2236,16$				206,7	0,8	22,78		0,0
↳ C_{6h}	$T=2296,98$				206,7		22,78		0,0
↳ C_{T1}	$T=2394,97; f_1 = \text{const.}$								0,0
↳ C_{T1a}	$T=3149,50$					0,4	51,26		0,0
↳ C_{T1b}	$T=$					0,4	51,26		0,0
↳ U_1	$T=1622,75$								0,0

Tabelle D.3: Parameter der Simulation: D-Serie und einige Zusatzfelder.

Startfeld	$N_x \times N_y \times N_z$	$L_x \times L_y \times L_z$	Re_Q	Re_{cl}	Re_τ	T =Rechenzeit; Δt =Schrittweite			u_c
↳ Folgefeld	T =Rechenzeit; Bemerkungen			Re_{cl}	Re_τ	U_w	T_w	a_{τ_w}	u_c
F ₃	192 × 97 × 48	15 × 2 × 1.875	5000			$T = 628,47; \Delta t = 0,01$			0,0
↳ F _{3a}	$T = 1188,53$								0,0
↳ N ₄	$T = 3271,93$				206,92	0,1	94,17	-0,0411 + 0,1599 i	0,0
↳ N _{4b}	$T = 2384,25$					0,1	94,17		0,0
↳ N ₆	$T = 2594,13$					0,1	62,78		0,0
↳ N ₈	$T = 2425,53$					0,1	34,17		0,0
F ₄	96 × 97 × 48	3.75 × 2 × 1.875	5000			$T = 639,655; \Delta t = 0,005$			0,0
↳ F _{4a}	$T = 1208,97$								0,0
T ₆	96 × 67 × 96	9 × 2 × 4.5	5000			$T = 538,04; \Delta t = 0,01$			0,0
↳ S ₃	$T = 666,04$								0,0
↳ C _{6c}	$T = 837,86$					0,4	22,78		0,0
T ₇	64 × 67 × 64	6 × 2 × 3	4000			$T = 794,29; \Delta t = 0,01$			0,0
↳ C _{6d}	$T = 1140,66$					0,4	22,78		0,0
T ₈	96 × 97 × 96	9 × 2 × 4.5	4000			$T = 2232,375; \Delta t = 0,01$			0,0
↳ P ₁	$T = 3152,59; xz$ -Ebene					0,1	34,17		0,0
↳ P ₂	$T = 3122,28; xz$ -Ebene					0,1	34,17		0,0
M ₂	32 × 67 × 32	2.5 × 2 × 0.75	5000			$T = 865,09; \Delta t = 0,01$			0,0
↳ M ₃	$T = 1491,55$								0,0
↳ CC ₁	$T = 1798,85; \text{POD}$								0,0
↳ XZ ₁	$T = 1798,85; xz$ -Ebene								0,0
↳ P ₄	$T = 2301,35$					0,4	51,26		0,0
B _{C1}	128 × 129 × 128	11.2155 × 2 × 5.969	5000			$T = 191,13; \Delta t = 0,0075$			0,0
↳ B _{C2}	$T = 749,933$				205,8				0,0
↳ B _{C2b}	$T = 563,812 \rightarrow 742,568$								0,0
↳ B _{I8}	$T = 676,185$					0,2	51,24		0,0
↳ B _{XZ}	$T = 369,510$								0,0
↳ B _{XZ2} #3	$T = 238,444, \Delta t = 0,002$								0,4
B ₁	128 × 121 × 128	10 × 2 × 5	5000			$T = 1473,65; \Delta t = 0,0075;$ u_c ab 1082,65			0,4
↳ B _{2b}	$T = 1831,52, \Delta t = 0,005$								0,4
BBIG ₁	128 × 121 × 128	12 × 2 × 6	5000			$T = 1082,650; \Delta t = 0,005$			0,0
BIG ₂	128 × 121 × 128	6 × 2 × 3	5000			$T = 552,61; \Delta t = 0,01$			0,0
↳ CBIG _a	$T = 866,02$								0,0
↳ CBIG _b	$T = 916,01$								0,0
↳ K ₈	$T = 954,22$					0,4	51,26		0,0
MIN ₁	32 × 97 × 32	2.5 × 2 × 0.625	5000			$T = 300,00; \Delta t = 0,01$			0,0
↳ MIN _{1a}	$T = 500,00$								0,0
↳ MIN _{1b}	$T = 500,00$								0,4
↳ MIN _{1c}	$T = 1723,73; \text{Sweep Anregung}$								0,0

Tabelle D.4: Parameter der Simulation: Zusatzfelder.

Literatur

- Aubray, N., Holmes, P., Lumley, J. L., Stone, E., 1988, The dynamics of coherent structures in the wall region of a turbulent boundary layer, *J. Fluid Mech.*, 192, S. 115–173.
- Barenblatt, G. I., 1993, Scaling laws for fully developed turbulent shear flows, *J. Fluid Mech.*, 248, Part 1, S. 513–520, Part 2, S. 521–529.
- Baron, A., Quadrio, M., 1996, Turbulent drag reduction by spanwise wall oscillations, *App. Sci. Res.*, 55, S. 311–326.
- Bechert, D. W., Bartenwerfer, M., Hoppe, G., 1989, Turbulent drag reduction by non-planar surfaces – a survey on the research at TU/DLR Berlin, *In: Structure of turbulence and drag reduction*, Gyr A (Hrsg.), Springer, S. 525–543.
- Betchhof, R., Criminale, W. O., Jr., 1967, Stability of parallel flows, *Academic Press*.
- Beykirch, M., 1996, Untersuchung räumlich-zeitlicher Geschwindigkeitskorrelationen in einer periodisch gestörten turbulenten Kanalströmung, *Dissertation*, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultäten der Universität Göttingen.
- Binder, G., Tardu, S. F., Blackwelder, R. F., Kueny, J. L., 1985, Étude expérimental de couches limites turbulentes instationnaires soumises à des gradients de pression moyens nuls ou positifs, *AGARD-paper*, No. 386.
- Blackwelder, R. F., Eckelmann, H., 1979, Streamwise vortices associated with the bursting phenomenon, *J. Fluid Mech.*, 94, 577–594.
- Breuer, K., 1995, Messung der Schubspannung in einer zeitlich modulierten turbulenten Kanalströmung, *Diplomarbeit*, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultäten der Universität Göttingen.
- Brooke, J. W., Hanratty, T. J., 1993, Origin of turbulence-producing eddies in a channel flow, *Phys. Fluids A*, 5, S. 1011–1021.
- Butler, K. M., Farrel, B. F., 1993, Optimal perturbations and streak spacing in wall-bounded turbulent shear flow, *Phys. Fluids A*, 5, S. 774–777.
- Cantwell, B. F., 1981, Organized motion in turbulent flow, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 13, S. 547ff.
- Canuto, C., Hussaini, M. Y., Quarteroni, A., Zang, T. A., 1987, Spectral methods in fluid dynamics, *Springer-Verlag*, New York.
- Cenedese, A., Romano, G. P., Antonia, R. A., 1998, A comment on the “linear” law of the wall for fully developed turbulent channel flow, *Experiments in Fluids*, 25, S. 165–170.
- Choi, H., Moin, P., Kim, J., 1993, Direct numerical simulation of turbulent flow over riblets., *J. Fluid Mech.*, 255, S. 503–539.
- Choi, K.-S., DeBisschop, J.-R., Clayton, B. R., 1998, Turbulent boundary-layer control by means of spanwise-wall oscillation, *AIAA Journal*, 36 (7), S. 1157–1163.

- Chorin, A. J., 1967**, The numerical solution of the Navier-Stokes equations for an incompressible fluid, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73, S. 928-931.
- Chorin, A. J., 1968**, Numerical solution of the Navier-Stokes equations, *Math. Comp.*, 22, S. 745-762.
- Chorin, A. J., 1969**, On the convergence of discrete approximations to the Navier-Stokes equations, *Math. Comp.*, 23, S. 341-353.
- Classen, T. A. C. M., Mecklenbräucker, W. F. G., 1980**, The Wigner distribution – a tool for time-frequency signal analysis, *Philips Journal of Research*, Vol. 35, Part I: No. 3, S. 217-250, Part II: No. 4/5, S. 276-300, Part III: No. 6, S. 372-389.
- Cotton, M. A., Guy, A. W., Launder, B. .E., 1997**, Second-moment modeling of periodic and transient pipe flow, *Proc. 11th Symposium on Turbulent Shear Flows*, Grenoble, France, Vol. 2, S. 14-1-14-5.
- de Coulon, F., 1986**, Signal theory and processing, *Artech House*.
- Crow, S. C., 1968**, Viscoelastic properties of fine-grained incompressible turbulence, *J. Fluid Mech.*, 33, S. 1-20.
- Davis, R. E., 1972**, On prediction of the turbulent flow over a wavy boundary, *J. Fluid Mech.*, 52, S. 287ff.
- Dean, R. B., 1978**, Reynolds number dependance of skin friction and other bulk flow variables in two-dimensional rectangular duct flow, *Trans. ASME I: J. Fluids Eng.*, 100, S. 215-223.
- Dejoan, A., Vedy, E., Schiestel, R., 1997**, Large eddy simulation of perturbed turbulent wall flows, *Proc. 11th Symposium on Turbulent Shear Flows*, Grenoble, France, Vol. 3, S. 30-25-30-30.
- Dhank, M. R., Si, C., 1999**, On reduction of turbulent wall friction through spanwise wall oscillation, *J. Fluid Mech.*, 383, S. 175-195.
- E, W., Liu, J.-G., 1995**, Projection method I: Convergence and numerical boundary layers, *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. 32, No. 4, S. 1017-1057.
- E, W., Liu, J.-G., 1996**, Projection method II: Godunov-Ryabenski analysis, *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. 33, No. 4, S. 1597-1621.
- Finnicum, D. S., Hanratty, T. J., 1988**, Influence of imposed flow oscillation on turbulence, *PCH PhysicoChemical Hydrodynamics*, 10 (5/6), S. 585-598.
- Flötke, H., Schewe, J., Wendt, V., Ronneberger, D., 1989**, Propagation of small perturbations thru the structure of turbulence in a wall boundary layer, *Advances in Turbulence 2*, H.-H. Fernholtz, H. E. Fiedler (Hrsg.), Springer, S. 122-127.
- Flötke, H., 1987**, Modulation von Häufigkeitsverteilungen in einer turbulenten Strömungsgrenzschicht an einer schwingenden Wand, *Dissertation*, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultäten der Universität Göttingen.
- Gilbert, N., Kleiser, L., 1991**, Turbulence model testing with the aid of direct numerical simulation results, *Proc. of 8th Symposium on Turbulent Shear Flows, München*, Paper 26-1.
- Günther, A., Papavassiliou, D. V., Warholic, M. D., Hanratty, T. .J., 1998**, Turbulent flow in a channel at a low Reynolds number, *Experiments in Fluids*, 25, S. 503-511.
- Hamilton, M., Kim, J., Waleffe, F., 1995**, Regeneration mechanisms of near-wall turbulence structures, *J. Fluid Mech.*, 287, S. 317-348.

- Harlow, F. H., Welch, E., 1965**, Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluids with free surface, *Phys. Fluids*, 8, S. 2182ff.
- Hartmann, M., Ronneberger, D., 1996**, Ejections, bursts and sweeps in stochastic signals, *Advances in Turbulence VI*, S. Gavrilakis (Hrsg.), Kluwer Academic Publishers, S. 107–110.
- Hartmann, M., 1995**, Intermittente Strukturen in stochastischen Signalen mit stationären statistischen Eigenschaften, *Diplomarbeit*, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultäten der Universität Göttingen.
- Hesse, K., 1995**, Zeitabhängigkeit der spektralen Eigenschaften einer zeitlich modulierten Kanalströmung, *Diplomarbeit*, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultäten der Universität Göttingen.
- Höhler, G., 1978**, Ausbreitung von Scherwellen in einer turbulenten Wandgrenzschicht, *Dissertation*, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultäten der Universität Göttingen.
- Hunt, J. C. R., Carruthers, D. J., 1990**, Rapid distortion theory and the 'problems' of turbulence, *J. Fluid Mech.*, 212, S. 497–532.
- Ickler, A., 1997**, Analyse von Turbulenzspektren der instationären Kanalströmung, *Diplomarbeit*, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultäten der Universität Göttingen.
- Jang, P. S., Benney, D. J., Gran, R. L., 1986**, On the origin of streamwise vortices in a turbulent boundary layer, *J. Fluid Mech.*, 169, S. 109–123.
- Jayaraman, R., Parikh, R., Reynolds, W. C., 1982**, An experimental study of the dynamics of an unsteady turbulent boundary layer, *Dept. Mech. Engrng., Stanford Univ.*, Rep. TF-18.
- Jeong, J., Hussain, F., 1995**, On the identification of a vortex, *J. Fluid Mech.*, 285, S. 69–94.
- Jiménez, J., Moin, P., 1991**, The minimal flow unit in near wall turbulence, *J. Fluid Mech.*, 225, S. 221–240.
- Jiménez, J., Pinelli, A., 1999**, The autonomous cycle of near-wall turbulence, *J. Fluid Mech.*, 389, S. 335–359.
- Jung, W. J., Mangiavacchi, N., Akhavan, R., 1992**, Suppression of turbulence in wall bounded flows by high-frequency spanwise oscillation, *Physics of Fluids A*, 8, S. 1605–1607.
- Kim, J., Moin, P., 1985**, Application of a fractional-step method to incompressible Navier-Stokes equation, *J. Comput. Phys.*, 59, S. 308–323.
- Kim, J., Moin, P., Moser, P., 1987**, Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number, *J. Fluid Mech.*, 177, S. 133ff.
- Kline, S. J., Reynolds, W. C., Schraub, F. A., Rundstadler, P. W., 1967**, The structure of turbulent boundary layers, *J. Fluid Mech.*, 30, S. 741ff.
- Kravchenko, A. G., Choi, H., Moin, P., 1993**, On the relation of near-wall streamwise vortices to wall skin friction in turbulent boundary layers, *Physics of Fluids A*, 5 (12), S. 3307ff.
- Laadhari, F., Skandaji, L., Morel, R., 1994**, Turbulence reduction in boundary layer by a local spanwise oscillating surface, *Physics of Fluids*, 6 (10), S. 3218–3220.
- Lamballais, E., Lesieur, M., Métais, O., 1997**, Probability distribution functions and coherent structures in a turbulent channel, *Physical Review E*, 56 (6), S. 6761–6766.
- Lesieur, M., 1997**, Turbulence in fluids, *Kluwer Academic Publishers, Netherlands*, Dritte erweiterte Auflage.

- Luchini, P., Manzo, F., Pozzi A., 1991**, Resistance of a grooved surface to parallel flow and cross-flow, *J. Fluid Mech.*, 228, S. 87–109.
- Malik, M. R., Zang, T. A., Hussaini, M. Y., 1985**, A spectral collection method for the Navier-Stokes equation, *J. Comput. Phys.*, Vol. 61, S. 64–88.
- Mankbadi, R. R., Liu, J. T. C., 1992**, Near-wall response in turbulent shear flows subjected to imposed unsteadiness, *J. Fluid Mech.*, 238, S. 55–71.
- Mankbadi, R. R., Mobark, A., 1991**, Quasi-steady turbulence modeling of unsteady flows, *J. Heat & Fluid Flow*, 12, S. 120–129.
- Mao, Z.-X., Hanratty, T. J., 1986**, Studies of the wall shear stress in a turbulent pulsating pipe flow, *J. Fluid Mech.*, 170, S. 545–564.
- Mao, Z.-X., Hanratty, T. J., 1991**, Measurement of wall shear rate in large amplitude unsteady reversing flows, *Proc. Eight Symp. on Turbulent Shear Flows*, München, S. 11-1-1 – 11-1-3.
- Maxey, M. R., 1982**, Distortion of turbulence in flows with parallel streamlines, *J. Fluid Mech.*, 124, S. 261–282.
- Menendez, A. N., Ramaprian, B. R., 1983**, Study of unsteady turbulent boundary layers, *IHR Rep. 270*, The University of Iowa.
- Moin, P., Mahesh, K., 1998**, Direct numerical simulation: a tool in turbulence research, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 150, S. 441–450.
- Moin, P., Moser, R. D., 1989**, Characteristic-eddy decomposition of turbulence in a channel, *J. Fluid Mech.*, 200, S. 471–509.
- Moser, R. D., Kim, J., Mansour, N. N., 1999**, Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to $Re_\tau = 590$, *Physics of Fluids*, 11 (4), S. 943–945.
- Orlandi, P., Jiménez, J., 1994**, On the generation of turbulent wall friction, *Phys. Fluids*, 6, S. 634–641.
- Perot, J. B., 1993**, An analysis of the fractional step method, *J. Comput. Phys.*, Vol. 108, S. 51–58.
- Perot, J. B., 1995**, Comments on the fractional step method, *J. Comput. Phys.*, Vol. 121.
- Quadrio, M., Sibilla, S., 2000**, Numerical simulation of turbulent flow in a pipe oscillating around its axis, *J. Fluid Mech.*, 424, S. 217–241.
- Ramaprian, B. R., Tu, S. W., 1983**, Fully developed periodic turbulent pipe flow. Part 2. The detailed structure of the flow, *J. Fluid Mech.*, 137, S. 31ff.
- Robinson, S. K., 1991**, Coherent motions in the turbulent boundary layer, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 23, S. 601–639.
- Ronneberger, D., Ahrens, 1977**, Wall shear stress caused by small amplitude perturbation of turbulent boundary layer flow: an experimental investigation, *J. Fluid Mech.*, 83, S. 433ff.
- Ronneberger, D., 1985**, Investigation of the dynamics of a turbulent wall boundary layer by introduction of a small external perturbation, *5. Symp. on Turbulent Shear Flows, Cornell University*, S. 18.19–18.24.
- Rotta, J. C., 1972**, Turbulente Strömungen, *B. G. Teubner*, Stuttgart.

- Sabot, J., Comte-Bellot, G., 1976**, Intermittency of coherent structures in the core region of fully developed turbulent pipe flow, *J. Fluid Mech.*, 74, S. 767ff.
- Schewe, J., 1988**, Ausbreitung einer schwachen transversal inhomogenen Störung durch die Struktur der Turbulenz in einer Wandgrenzschicht, *Dissertation*, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultäten der Universität Göttingen.
- Schlichting, H., 1958**, Grenzschicht Theorie, *vorm. Braunsche Hofbuchdruckerei und Verlag, Karlsruhe*, Dritte Auflage.
- Smith, C. R., Metzler, S. P., 1983**, The characteristics of low-speed streaks in the near-wall region of a turbulent boundary layer, *J. Fluid Mech.*, 129, S. 27–54.
- Spurk, J. H., 1996**, Strömungslehre: Einführung in die Theorie der Strömungen, *Springer Verlag*, vierte Auflage.
- Strikwerda, J. C., Lee, Y. S., 1999**, The accuracy of the fractional step method, *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. 37, No. 1, S. 37–47.
- Swearing, J. D., Blackwelder, R. F., 1987**, The growth and breakdown of streamwise vortices in the presence of a wall, *J. Fluid Mech.*, 182, S. 255–290.
- Taru, S. F., Binder, G., 1993**, Wall shear stress modulation in an unsteady turbulent channel flow with high imposed frequencies, *Physics of Fluids A*, 5 (8), S. 2028–2037.
- Tardu, S. F., 1996**, Reaction of bursting to oscillating pressure gradient, *European Journal of Mechanics B / Fluids*.
- Taru, S. F., Binder, G., Blackwelder, R., F., 1987**, Modulation of bursting by periodic oscillations imposed on channel flow, *Proc. Sixth Symp. on Turbulent Shear Flows, Toulouse, Frankreich*, S. 4.5.1.
- Taru, S. F., Binder, G., Blackwelder, R. F., 1994**, Turbulent channel flow with large-amplitude velocity oscillations, *J. Fluid Mech.*, 267, S. 109–151.
- Townsend, A. A., 1976**, The structure of turbulent shear flow, *Cambridge University Press*, Zweite Auflage.
- Tu, S. W., Ramaprian, B. R., 1983**, Fully developed periodic turbulent pipe flow. Part 1. Main experimental results and comparison with predictions, *J. Fluid Mech.*, 137, S. 31.
- Völtz, Camilla, 1997**, Modulation der turbulenten Kanalströmung bei hohen Modulationsfrequenzen, *Diplomarbeit*, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultäten der Universität Göttingen.
- Waleffe, F., Kim, J., Hamilton, J. M., 1993**, On the origin of streaks in turbulent boundary layers, *Turbulent Shear Flows 8 (Ed. F. Durst, R. Friedrich, B. E. Launder, F. W. Schmidt, U. Schumann, J. H. Whitelaw)*, S. 37–49.
- Wallace, J. M., Eckelmann, H., Brodkey, R. S., 1972**, The wall region in a turbulent shear flow, *J. Fluid Mech.*, 54, S. 39–48.
- Wendt, V., 1989**, Statistische Analyse der turbulenten Geschwindigkeitsfluktuationen in einer periodisch gestörten Wandgrenzschicht, *Diplomarbeit*, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultäten der Universität Göttingen.
- Willmarth, W. W., Wooldridge, C. E., 1962**, Measurements of the fluctuating pressure at the wall beneath a thick turbulent boundary layer, *J. Fluid Mech.*, 14, S.187ff.

- Wills, J. A. B., 1964**, On convection velocities in turbulent shear flows, *J. Fluid Mech.*, 20, S. 417ff.
- Wills, J. A. B., 1970**, Measurements of the wave-number/phase velocity spectrum of wall pressure beneath a turbulent boundary layer, *J. Fluid Mech.*, 45, S. 65ff.
- Xu, C., Zhang, Z., Toonder, J. M. J., Nieuwstadt, F. T. M., 1996**, Origin of high kurtosis levels in the viscous sublayer. Direct numerical simulation and experiment, *Phys. Fluids*, 8, S. 1938–1944.
- Zagarola, M. V., Smits, A. J., 1997**, Experiments in high Reynolds number turbulent pipe flow, *Phys. Rev. Lett.*, 78.

Danksagung

Die vorliegende Arbeit wurde im Dritten Physikalischen Institut der Universität Göttingen angefertigt. Ich bedanke mich bei allen, die mich dabei direkt oder indirekt unterstützt haben.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. Dirk Ronneberger. Er gab die Anregung zu dieser Arbeit und er hat, durch sein fortwährendes Interesse an der Weiterentwicklung, sehr zur Motivation beigetragen. Vor allem bedanke ich mich für seine ständige Bereitschaft zur Diskussion und für die vielfältigen Lösungsvorschläge, mit denen er mir bei den aufgetretenen Schwierigkeiten behilflich war.

Bei Herrn Prof. Dr. Helmut Eckelmann bedanke ich mich für die Übernahme des Korreferates und dafür, dass er als Sprecher des Graduiertenkollegs Strömungsinstabilitäten und Turbulenz viele interessante Veranstaltungen organisiert hat.

Mein Dank gilt der Gesellschaft für Wissenschaftliche Datenverarbeitung Göttingen (GWDG) und dem Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin (ZIB), auf deren Rechenanlagen alle Simulationen durchgeführt wurden. Bei Herrn Prof. Dr. Oswald Haan von der GWDG bedanke ich mich für seine Einführung in die Programmierung von Parallelrechnern. Herrn Dr. Hinnack Stüben vom ZIB danke ich für die Beratungen im Umgang mit den Rechenanlagen und insbesondere dafür, dass er stets zur schnellen Lösung aller technischen Probleme beigetragen hat.

Herrn Prof. Dr. Werner Lauterborn danke ich für die gute Ausstattung unseres Institutes.

Bei allen ehemaligen und derzeitigen Mitgliedern der Arbeitsgruppe Strömungsakustik bedanke ich mich für das stets sehr gute Arbeitsklima.

Dankenswerterweise haben meine Freundin Manuela und Arno Ickler die Mühsal des Korrekturlesens übernommen. Manuela danke ich darüberhinaus für ihre Geduld in der Endphase der Arbeit, in der sie so manche Last von mir genommen hat.

Diese Arbeit wurde durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft unterstützt, der hiermit mein Dank ausgesprochen sei.

Dank auch an Horace Lamb, der mein Interesse an der Turbulenz geweckt hat.

Lebenslauf

Am 13. Dezember 1969 wurde ich als Sohn des Bankkaufmanns Hubert Hartmann und seiner Ehefrau Elisabeth, geborene Gockel, in Rüthen geboren.

Nach meinem Abitur am städtischen Gymnasium in Rüthen im Mai 1990 nahm ich zum Beginn des Wintersemesters 1990/91 das Physikstudium an der Georg-August-Universität zu Göttingen auf. Im Rahmen des Hauptstudiums begann ich dort im Frühjahr 1994 mit der Anfertigung meiner Diplomarbeit am Dritten Physikalischen Institut. Die Diplomarbeit trägt den Titel »Intermittente Strukturen in stochastischen Signalen mit stationären statistischen Eigenschaften« und wurde von Prof. Dr. Dirk Ronneberger betreut. Das Hauptstudium konnte ich im April 1995 mit der Diplomprüfung erfolgreich abschließen.

Am 1. Juni 1995 begann ich mit den Arbeiten zu meiner Promotion. Seit dem Zeitpunkt bin ich auch Mitglied des Graduiertenkollegs »Strömungsinstabilitäten und Turbulenz«. Zunächst als Stipendiat und seit dem 1. Dezember 1997 als assoziiertes Mitglied.

