

Dynamik und Bifurkationsverhalten eines getriebenen Oszillators mit frei aufliegender Dämpfermasse

Dissertation
zur Erlangung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Doktorgrades
„Doctor rerum naturalium“
der Georg-August-Universität Göttingen

vorgelegt von
Alexander Többens
aus Nordhorn

Göttingen, 2011

Referent: Prof. Dr. Andreas Dillmann
Korreferent: Prof. Dr. Ulrich Parlitz

Tag der mündlichen Prüfung: 2. Mai 2011

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Strömungsinduzierte Schwingungen in Strahltriebwerken	3
2.1	Der innere Aufbau eines Strahltriebwerks	3
2.2	Schaufelschwingungen	5
2.3	Reibungsdämpfer und ihre Modellierung	7
3	Eindimensionaler Oszillator mit frei beweglicher Dämpfermasse	11
3.1	Bewegungsgleichungen	11
3.2	Reibungsmodell	13
3.3	Übergangsbedingungen	13
3.4	Beweis der Hinreichbarkeit der Übergangsbedingungen	14
4	Numerische Behandlung nichtglatter Differentialgleichungen	17
4.1	Extrapolation	17
4.2	Der Algorithmus zur Nullstellensuche	19
4.3	Ljapunow-Exponenten und ihre Berechnung im Falle nichtglatter Systeme	19
5	Filippov-Systeme	22
5.1	Definition und allgemeine Eigenschaften	22
5.2	Der Phasenraum eines Filippov-Systems	25
5.3	Gleitbifurkationen	26
5.4	Der Oszillator als Filippov-System	28
5.5	Die Diskontinuitätsebene des Oszillators	29
6	Die Resonanzkurve des Oszillators	31
6.1	Das Nichtlineare Regime	31
6.2	Das Reibelement als Schwingungsdämpfer	33
6.3	Systemdynamik im Nichtlinearen Regime	40
6.4	Symbolische Dynamik	46
7	Koexistierende Attraktoren	58
7.1	Symmetrieeigenschaften	58
7.2	Hysterese	62

7.3	Phasenraumabtastung	64
8	Parameterstudien	67
8.1	Auswirkung der Reibelementenmasse	67
8.2	Dynamik bei hoher Normalbeschleunigung	67
8.3	Dynamik unter Erdbeschleunigung	71
8.4	Dynamik unter Triebwerksbedingungen	81
9	Messergebnisse	88
9.1	Versuchsaufbau	88
9.2	Umrechnung des Messsignals	89
9.3	Resonanzkurven	89
10	Schlussbetrachtung	93

Kapitel 1

Einleitung

Die vorliegende Dissertationsschrift entstand am Institut für Aeroelastik des Deutschen Zentrums für Luft- und Raumfahrt (DLR) am Standort Göttingen. Die Aeroelastik ist eine Wissenschaft, die sich mit der Wechselwirkung zwischen Gasströmen und Strukturmechanik beschäftigt. Wie groß ihre Rolle im menschlichen Alltag ist, ist nur wenigen bewusst. Die Fähigkeit strömender Fluide, Schwingungen anzuregen, erschwert die Konstruktion zahlreicher Bauwerke und Verkehrsmittel beträchtlich. Ihre Auswirkungen sind manchmal harmlos, wie das „Singen“ von Stromleitungen im Wind, manchmal gefährlich, wie zum Beispiel das Flattern von Flugzeugflügeln, und mitunter katastrophal, wie im Fall der 1940 eingestürzten Tacoma-Narrows-Brücke. Vorfälle wie dieser, bei dem nur durch Glück alle Beteiligten mit dem Leben davorkamen, machen deutlich, wie wichtig ein fundamentales Verständnis der den genannten Phänomenen zugrunde liegenden Mechanismen ist.

Ein spezielles Problem, das auch unter die Zuständigkeit der Aeroelastik fällt, sind die Schwingungen von Turbinenschaufeln in den Strahltriebwerken moderner Flugzeuge. Die durch sie verursachte Materialermüdung ist nicht nur ein Kostenfaktor, sondern auch ein Sicherheitsrisiko. Eine beliebte Methode, ihnen entgegenzuwirken, ist der Einsatz frei aufliegender Reibungsdämpfer, die, von der Zentrifugalkraft zwischen die Schaufelfüße gepresst, im laufenden Betrieb einen Reibkontakt darstellen, der der Schwingung Energie entzieht [44, 36, 41, 43, 8]. Die Frage nach der bestmöglichen Gestaltung dieser Dämpfer ist Gegenstand intensiver Forschung, die Modellierung angesichts der Komplexität des Problems allerdings schwierig, was unter anderem auf die Existenz von Reibkontakten zurückzuführen ist. Trockene Reibung zwischen zwei Kontaktflächen ist eines der am schwierigsten quantifizierbaren Phänomene der Mechanik, abhängig von so vielen Faktoren, dass es unmöglich ist, sie durch ein universales Gesetz zu beschreiben. Sie wird beeinflusst durch Druck, Temperatur, Oberflächenbeschaffenheit sowie die Relativgeschwindigkeit der Reibflächen. Sie verhält sich bei hohen und bei niedrigen Geschwindigkeiten unterschiedlich [29, 45], und infolge von Abrieb, Oxidation oder anderem ist noch nicht einmal garantiert, dass sie innerhalb ein und

desselben Systems reproduzierbar ist [29]. Schon die Vielzahl unterschiedlicher Modelle, die in der Vergangenheit zur Darstellung der Geschwindigkeitsabhängigkeit genutzt wurden, zeigt die Komplexität des Problems [56, 9, 3, 22, 46]. Eine wirklich genaue Beschreibung bedingt zudem die Berücksichtigung von Hystereseeffekten, die im Bereich kleiner Relativgeschwindigkeiten auftreten [40, 62, 60]. Eine Übersicht über die verschiedenen Ansätze zur Reibungsmodellierung findet sich zum Beispiel bei STEIN et al. [52].

Die vorliegende Arbeit ist der Versuch einer neuen Herangehensweise an das Problem der schwingenden Turbinenschaufel mit Reibungsdämpfer. Statt zu versuchen, das Schaufel-Dämpfer-System realistisch zu modellieren, um unter Einsatz hoher Rechenleistung technisch verwertbare Aussagen zu ermöglichen, wird ein Oszillator entworfen, der als *toy model* diese besondere Art der Schwingungsdämpfung auf die denkbar einfachste Weise verwirklicht. Auf den folgenden Seiten werden die Bewegungsgleichungen des Oszillators hergeleitet und diese dann mit bekannten Methoden aus dem Bereich der Nichtlinearen Dynamik untersucht. Wichtigstes Werkzeug war dabei das selbstgeschriebene Computerprogramm `fric1`. Es enthält einen effizienten Algorithmus zur Zeitintegration der Bewegungsgleichungen und erlaubt die numerische Berechnung von Ljapunow-Exponenten und anderer wichtiger Kenngrößen. Das folgende Kapitel eröffnet mit einer Einführung in die Funktion eines Strahltriebwerks, erläutert den Ursprung der Schaufelschwingungen und stellt Methoden zu ihrer Bekämpfung vor. Dem interessierten Leser bringt es die Hintergründe der Arbeit näher. Für ihr Verständnis ist seine Lektüre aber nicht vonnöten.

Für einige englische Fachbegriffe, für die, soweit mir bekannt, noch keine deutschen Entsprechungen existieren, habe ich mir erlaubt, eigene Übersetzungen zu verwenden, um den Textfluss angenehm zu halten. Die Originalbezeichnungen werden in diesem Fall bei Einführung des Begriffs in Klammern angegeben, um dem Leser weiterführende Recherchen zu ermöglichen.

Kapitel 2

Strömungsinduzierte Schwingungen in Strahltriebwerken

2.1 Der innere Aufbau eines Strahltriebwerks

Das Prinzip, mittels eines Rotors Luft nach hinten abzustößen, um auf diese Weise einen Vortrieb zu erzeugen, ist so alt wie die motorisierte Luftfahrt selbst. Schon die Brüder Wright setzten es an ihren experimentellen Fluggeräten um. In den mehr als hundert Jahren, die seit damals vergangen sind, ist die Fliegerei zu einem festen Bestandteil unserer Zivilisation geworden, und die Ansprüche an ein Flugzeug, das dem Transport von Waren oder Passagieren dient, sind andere als die an die Machbarkeitsstudien eines Flugpioniers gestellten. Es muss leistungsstark und effizient sein. Ein modernes Flugzeugtriebwerk ist eine komplexe Maschine, die an die Ingenieurskunst ihrer Erbauer hohe Ansprüche stellt.

Trotz einer Vielzahl möglicher Bauweisen, die sich in wesentlichen Details unterscheiden, funktionieren fast alle modernen Strahltriebwerke nach einem gemeinsamen Grundprinzip, veranschaulicht in Abb. 2.1. Den Schub erzeugt der Fan, ein an der vorderen Triebwerksöffnung angebrachter Rotor, der atmosphärische Luft ansaugt und durch das Triebwerk hindurch wieder abstößt. Angetrieben wird er durch eine im hinteren Teil des Triebwerks positionierte Turbine. Bevor die nach hinten abgestoßene Luft diese aber passiert, wird sie zunächst in einem wiederum turbinengetriebenen Verdichter komprimiert und danach in der Brennkammer durch Einspritzung und Zündung von Treibstoff erhitzt. Der Kreisprozess eines solchermaßen konstruierten Triebwerks (Abb. 2.2) entspricht dem eines klassischen Viertakt-Kolbenmotors [1]. Punkt A repräsentiert ein an der Frontseite eingesaugtes Luftvolumen unter atmosphärischem Druck, das dann im Verdichter entlang der Linie AB komprimiert wird. Punkt B markiert den Eintritt in die Brennkammer, wo die Luft erhitzt wird und in der Folge ihr Volumen vergrößert. Theoretisch ist dieser Vorgang isobar, in der Praxis geht aus technischen Gründen ein wenig Druck verloren [1]. Die Luft entweicht nun durch die Turbine

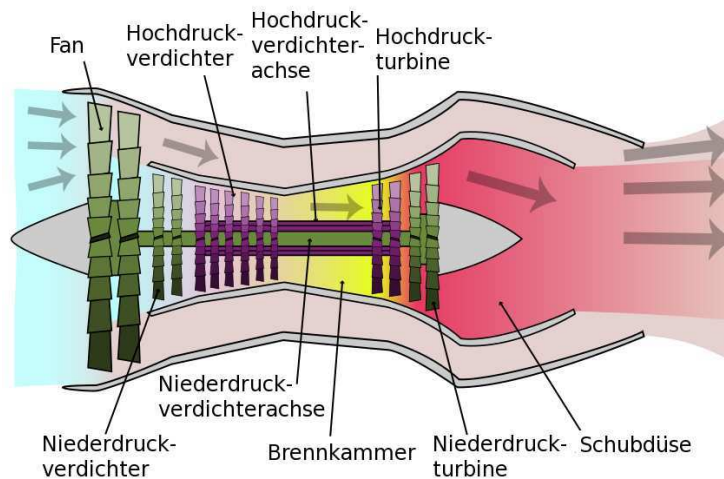


Abbildung 2.1: Beispiel für den inneren Aufbau eines Strahltriebwerks. (Bildquelle: Wikimedia Commons [2])

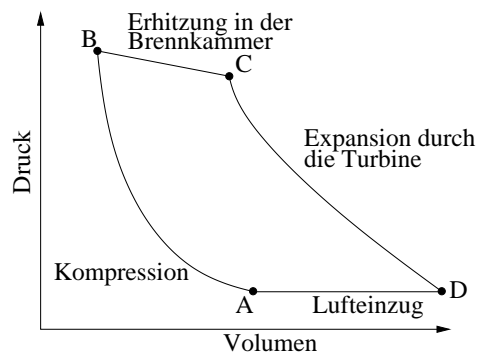


Abbildung 2.2: Kreisprozess eines Strahltriebwerks

und expandiert dabei weiter, bis ihr Druck wieder auf atmosphärisches Niveau abgesunken ist. In diesem Schritt wird ihr ein Teil ihrer Energie entzogen und in mechanische Energie umgewandelt. Der Rest entweicht durch die Schubdüse und verleiht dem Flugzeug Impuls nach vorn. Die Linie DA repräsentiert den Austausch der ausgestoßenen, durch Erhitzung ausgedehnten Luft durch neue, kühle Luft am Einzug.

Das Strahltriebwerk ist eine Wärmekraftmaschine. Je stärker die Erhitzung, desto stärker die Expansion der Luft und desto höher der Wirkungsgrad. Eine zu hohe Temperatur führt aber zu Materialschäden an der Turbinen. Heutige Triebwerke sind deshalb für gewöhnlich mit einem Kühlsystem ausgestattet, das mittels eines gesonderten Luftstroms die Turbinenschaufeln vor Überhitzung schützt und damit eine stärkere Aufheizung der antreibenden Luft erlaubt. Abb. 2.1 zeigt ein Triebwerk mit zwei Verdichtersritten (Niederdruck und Hochdruck), die jeweils

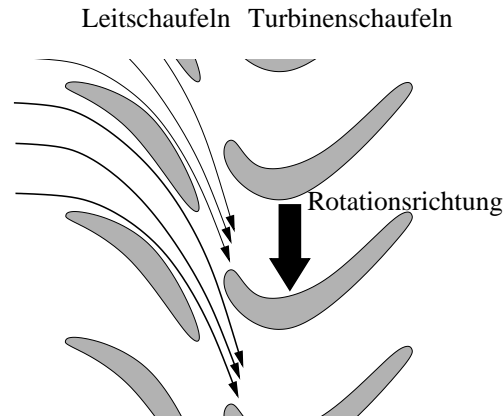


Abbildung 2.3: Luftströmung durch die Leitbleche eines Stators auf die dahinter liegenden Turbinenschaufeln (Draufsicht).

wiederum in mehrere Stufen unterteilt sind. Es handelt sich außerdem um ein sogenanntes Mantelstromtriebwerk. Bei dieser Bauweise, die sich heute als Standard durchgesetzt hat, wird nur ein geringer Teil der eingesaugten Luft durch Verdichter und Brennkammer geleitet und der Rest außen an diesen vorbei geführt. Der Grund ist auch hier ein höherer Wirkungsgrad. Da der Impuls eines Luftvolumens linear von seiner Geschwindigkeit abhängt, die Bewegungsenergie aber quadratisch, ist es energetisch günstiger, eine große Luftmenge auf moderate Geschwindigkeit zu beschleunigen als eine kleine Menge auf hohe Geschwindigkeit. Eine hohe Strömungsgeschwindigkeit begünstigt zudem Verwirbelungen, die ebenfalls Energie ungenutzt verbrauchen.

Die in Abb. 2.1 dargestellte Bauweise ist nur eine unter vielen und zudem stark vereinfacht. Sie stellt aber ein gutes Beispiel für die grundlegende Arbeitsweise eines modernen Strahltriebwerks dar. Auf die diversen anderen Bauweisen, die Feinheiten und Realisierungsmöglichkeiten der einzelnen Triebwerksabschnitte sowie die weiteren elementaren technischen Komponenten soll in dieser Arbeit nicht eingegangen werden. Dem interessierten Leser sei das von der Rolls-Royce Aerospace Group herausgegebene Standardwerk *The Jet Engine* empfohlen [1]. Es bietet einen umfassenden und sehr guten Überblick und vermeidet komplexes Formelwerk und Fachsprache.

2.2 Schaufelschwingungen

Die Blätter der im hinteren Teil des Triebwerks liegenden Turbinen sind im Betrieb hohen mechanischen und thermischen Belastungen ausgesetzt. Um Gewicht

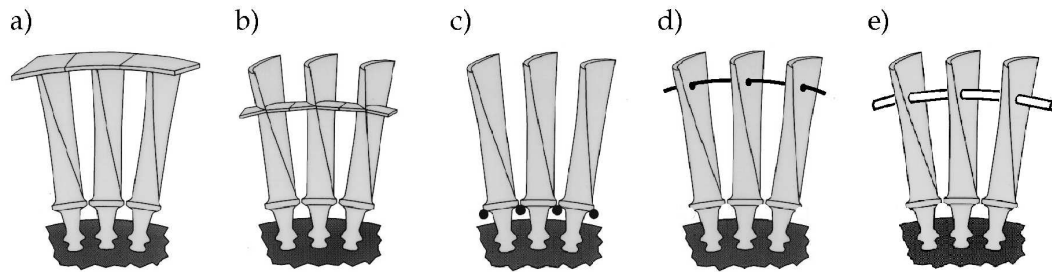


Abbildung 2.4: Verschiedene konstruktive Methoden der Dämpfung strömungserregter Schwingungen von Rotorblättern: a) Geteiltes Deckband. b) Stützflügel. c) Reibelemente. d) Eingelegter Dämpferdraht. e) Bindestifte. (Bildquelle: PAN-NING [37], mit freundlicher Genehmigung des Autors.)

einzusparen sowie den Wirkungsgrad zu optimieren ist es zudem wünschenswert, das Triebwerk dicht an der Grenze seiner Belastbarkeit zu betreiben. Neben Hitze und hohen Fliehkräften sind es vor allem durch Luftkräfte angeregte Schwingungen, die das Material der Schaufeln beanspruchen. Jeder Turbine vorgeschaltet ist ein sogenannter Stator, eine starre Anordnung von Leitschaufeln, die die einströmende Luft so umlenken, dass sie im günstigsten Winkel auf die Turbinenblätter trifft (Abb. 2.3). Diese Bauweise ermöglicht eine wesentlich höhere Energieausbeute, bewirkt aber auch eine räumliche Inhomogenisierung des Strömungsfeldes. Eine Turbinenschaufel, die sich in diesem Feld bewegt, erfährt dadurch eine periodische Anregung. Die aus dieser ständigen Beanspruchung resultierende Materialermüdung führt, wenn sie ignoriert wird, im Laufe der Zeit zu ernsthaften Schäden, bis hin zum Bruch einer Schaufel im laufenden Betrieb. Sie stellt dadurch einen hohen laufenden Kostenfaktor dar – einerseits durch den erheblichen Wartungsaufwand, den sie verursacht, andererseits, weil sie die Optimierung des Wirkungsgrades des Triebwerks begrenzt und damit indirekt den Treibstoffverbrauch erhöht. Innerhalb des Zeitraumes von 1992 bis '97 entfielen 39% der Schadensbehebungskosten an Gasturbinen auf die Beschädigungen von Turbine und Verdichter. Ein wesentlicher Anteil davon war auf Schwingungen und Laufunruhen zurückzuführen [53].

Ein wichtiger Aspekt der Konstruktion eines Rotors ist deshalb die Minimierung strömungsinduzierter Oszillationen. Das bedeutet zunächst, dass man der gesamten Struktur eine hohe Steifigkeit zu verleihen versucht, um für die Resonanzfrequenzen aller Schaufelschwingungsmoden möglichst hohe Werte zu erzielen, die im normalen Betrieb nicht erreicht werden. Desweiteren werden dem Schaufelkranz konstruktive Elemente hinzugefügt, von denen einige Gängige in Abb. 2.4 vorgestellt werden. Sie alle dienen entweder der Erhöhung der Steifigkeit oder führen Reibkontakte ein, die durch Wärmeentwicklung der Schwingung Energie entziehen. Desweiteren erhöht jede dargestellte Methode die Kopplung

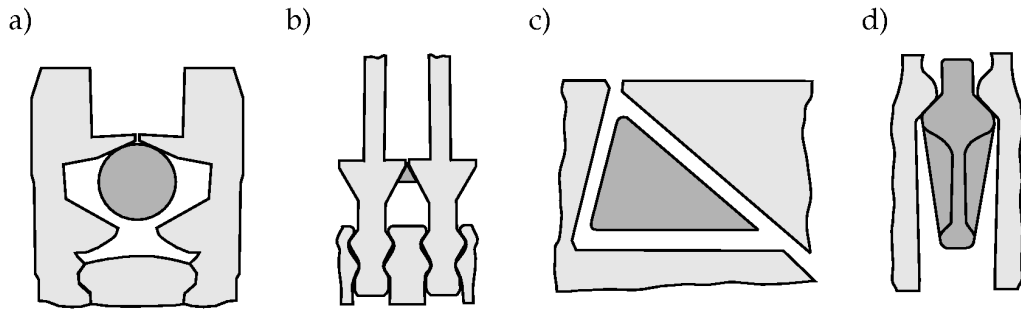


Abbildung 2.5: Reibelementgeometrien verschiedener Patentschriften: a) Zylindrischer Dämpfer nach DODD et al. [13]. b) Keilförmiger Dämpfer nach BOBO [10]. c) Asymmetrischer Dämpfer nach MUELLER et al. [32]. d) Komplexe Dämpfergeometrie nach NELSON [34]. (Bildquelle: PANNING [37], mit freundlicher Genehmigung des Autors.)

zwischen einzelnen Schaufeln, was dem sogenannten *Mistuning*, also der Verstimmung des Gesamtsystems, entgegenwirkt. Dieser Ausdruck bezeichnet den Einfluss unbeabsichtigter Parameterabweichungen zwischen den Schaufeln, die die zyklische Periodizität stören, sodass einzelne Segmente nicht mehr als identisch angenommen werden können. Eine häufige Folge ist die als Lokalisierung bekannte Konzentration der Schwingungsenergie auf nur einige wenige Schaufeln, deren Amplitude sich im Extremfall gegenüber dem unverstimmten System um das Dreifache erhöhen kann [26]. Ein weiterer Effekt ist die individuelle Verschiebung der Resonanzfrequenzen der einzelnen Schaufeln, sodass gleich ein ganzes Spektrum kritischer Frequenzen vorliegt. Eine resonanzfreie Auslegung der Beschaukelung gestaltet sich dadurch ungleich schwieriger. Laut WEI und PIERRE [58, 59] sind es vor allem schwach gekoppelte Systeme, die anfällig für Mistuning sind. Eine Verstärkung der Kopplung begünstigt den Austausch von Schwingungsenergie und bewirkt dadurch eine Angleichung des Schwingungsverhaltens der einzelnen Elemente.

2.3 Reibungsdämpfer und ihre Modellierung

Ein vielgenutztes, weil bewährtes Mittel sind die in Abb. 2.4c gezeigten Reibungsdämpfer. Dabei handelt es sich um zylindrische Stahlstifte mit variabler Grundfläche und einem Gewicht von meist drei bis zehn Gramm. Sie sind locker aufliegend in den Schaufelkranz eingefasst und so positioniert, dass sie im laufenden Betrieb von der Zentrifugalkraft so zwischen die Schaufelfüße gepresst werden, dass sie einen Reibkontakt bilden. Abb. 2.5 zeigt einige Beispiele für Dämpfergeometrien. In der Praxis kommen am häufigsten die runde und die keilförmig-symmetrische Form zum Einsatz (Abb. 2.5a und b).

Ein vieldiskutiertes Thema in entsprechenden Fachzeitschriften ist die Frage nach einer geeigneten Modellierung eines auf solche Weise schwingungsgedämpften Schaufelkranzes. Für den Konstrukteur ist es wichtig, schon in der Entwurfsphase verlässliche Aussagen über zu erwartende Resonanzfrequenzen und Schwingungsamplituden treffen zu können, was angesichts der Komplexität des Systems aber nicht einfach ist. Eine wirklich realistische Vorhersage erfordert den Einsatz sehr rechenaufwendiger Diskretisierungsverfahren, etwa eines Finite-Elemente-(FE)-Modells, das neben dem Schaufelkranz zumindest noch die Turbinenscheibe und den Stator berücksichtigt und im Idealfall auch die Geometrie des Strömungskanals, kombiniert mit einem Verfahren zur numerischen Strömungsberechnung. Abgesehen von der benötigten Rechenkapazität sind derartige Modelle aufgrund der hohen Anzahl an Freiheitsgraden in aller Regel unzugänglich für analytische Ansätze. Der Erkenntnisgewinn, der sich aus einem guten FE-Modell ziehen lässt, entspricht im Grunde dem eines Laborversuchs. Es liefert, eine angemessene Modellierung vorausgesetzt, richtige Vorhersagen und erlaubt empirische Schlüsse, aber zum Verständnis beitragen kann es für sich genommen nicht. Bestehende Ansätze zur vereinfachten Beschreibung setzen meist auf eine Kombination aus Diskretisierung und modellhafter Beschreibung einzelner Systemkomponenten. So veröffentlichten PETROV und EWINS [41, 42, 43] im Jahr 2007 eine leistungsstarke Modellierung eines keilförmigen Dämpfers, die sich in ein FE-Modell einer Turbine integrieren lässt. PANNING [37] stellte in seiner 2005 fertiggestellten Dissertation ein sehr effizientes Modell vor, das eine realistische Vorhersage der Systemdynamik für nahezu beliebige Dämpfergeometrien mit verschiedenen Materialeigenschaften erlaubt. Es basiert auf der Annahme zyklischer Randbedingungen, die es erlauben, das Gesamtsystem auf ein einzelnes Segment einer beschauelten Scheibe mit einem Reibelement zu reduzieren. Auch die oben erwähnten Effekte des Mistunings lassen sich durch das Modell simulieren.

Der Nutzen derartiger Ansätze liegt vor allem im Bereich der Anwendung. Sie senken den Rechenaufwand und erhöhen die physikalische Genauigkeit computergestützter Vorhersagen. Ihr Wert für den Konstrukteur einer Turbine liegt auf der Hand. Hinsichtlich des genannten Problems der fehlenden analytischen Zugänglichkeit helfen sie hingegen nur bedingt weiter. Hierzu bedarf es einer viel stärkeren Vereinfachung in Form eines idealisierten Feder-Masse-Modells mit nur wenigen Freiheitsgraden pro Segment. Ein Beispiel für einen solchen Ansatz ist zum Beispiel das im Jahr 1992 von PFEIFFER und HAJEK [44] vorgestellte Modell (Abb. 2.6). Es beschreibt die Turbinenblätter durch jeweils zwei gekoppelte, horizontal schwingende Massen, von denen eine die Schaufel, die andere den Schaufelfuß repräsentiert. Das Gesamtmodell besteht aus zwei solchen Schwingern, gekoppelt durch einen zwischen die „Füße“ gepressten Reibungsdämpfer mit wahlweise runder oder parabolischer Grundfläche. Die Arbeit stellt auch eine experimentelle Umsetzung des Modells vor, das die hohe Zentrifugalkraft auf den Dämpfer durch eine Zugfeder simuliert.

Das Modell von PFEIFFER und HAJEK weist neben seiner allgemeinen starken

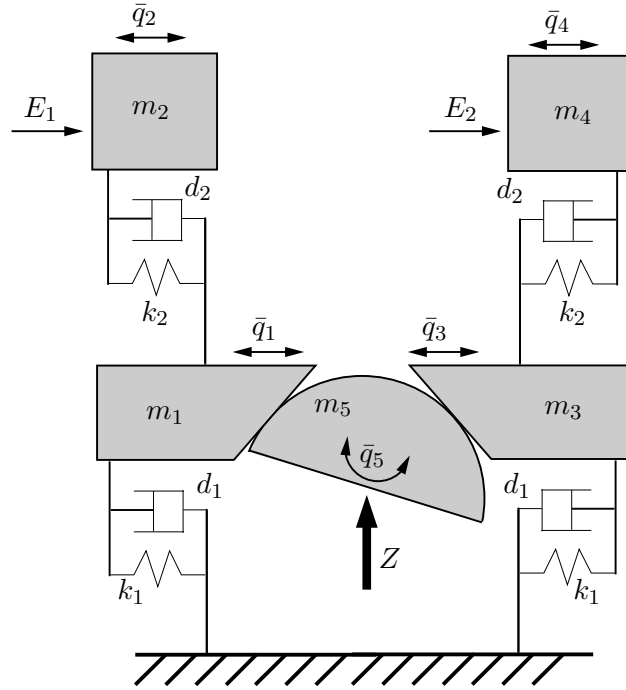


Abbildung 2.6: Der Oszillator von PFEIFFER und HAJEK. m_n : Massen. k_n : Federkonstanten. d_n : Viskose Dämpfungen. \bar{q}_n : Freiheitsgrade. E_n : Erregerkräfte. Z : Konstante Kraft auf den Dämpfer.

Idealisierung noch weitere Vereinfachungen auf, die in der Realität nicht zutreffen [50, 43]. So wird die Oszillation der schwingenden Massen als eindimensional angenommen, und kurzzeitige Kontaktverluste an den Reibflächen werden nicht berücksichtigt. Trotzdem ist es noch immer so kompliziert, dass man zur Lösung seiner Bewegungsgleichungen auf numerische oder experimentelle Methoden angewiesen ist. Der Grund sind nicht nur die immerhin noch fünf Freiheitsgrade, die der Oszillator aufweist, sondern auch die Einwirkung von Reibkontakten. Dynamische Systeme mit trockener Reibung sind mathematisch per se schwierig zu handhaben, da sie sich nicht durch einen einzigen, glatten Satz von Differentialgleichungen beschreiben lassen. Selbst unter Annahme des einfachsten Reibungsmodells, der Coulomb-Reibung, treten Unstetigkeiten in den Bewegungsgleichungen auf. Anders als die viskose Reibung verschwindet die Kraft der trockenen Kontaktreibung nicht für kleine Geschwindigkeiten. Ein Richtungswechsel der Relativgeschwindigkeit an einer reibenden Kontaktstelle bewirkt also einen un stetigen Sprung der auf den Oszillator einwirkenden Kraft. Hinzu kommt die Unterscheidung zwischen haftender und gleitender Reibung. Zwei reibende Kontaktflächen verkanten sich, sobald sie sich relativ zueinander nicht mehr bewegen. Das System verliert dadurch vorübergehend einen Freiheitsgrad. Erst ab einer gewissen tangential wirkenden Kraft, festgelegt durch die Haftreibungskonstante

μ_0 , löst sich die Verkantung wieder. Ein Oszillator mit einer Reibkontaktfläche kann sich demnach, je nach Relativbewegung der beiden reibenden Flächen, in drei verschiedenen Systemzuständen befinden, von denen jeder einzelne durch einen eigenen Satz von Bewegungsgleichungen beschrieben wird. Der Oszillator von PFEIFFER und HAJEK besitzt demzufolge, entsprechend seinen zwei Reibkontaktflächen, neun mögliche Zustände. Würde man für beide Kontaktflächen noch eine mögliche Ablösung des Dämpfers auf beiden Seiten in Betracht ziehen, erhöhte sich diese Zahl sogar auf 16.

Selbst auf den ersten Blick völlig überschaubare Systeme verlieren also ihre Anschaulichkeit, sobald trockene Reibung ins Spiel kommt. Will man ihr dynamisches Verhalten nicht nur empirisch erforschen, ist es sinnvoll, den Blick zunächst auf noch viel einfachere Systeme zu wenden. Dieser Ansatz soll in der vorliegenden Arbeit verfolgt werden. Auf den folgenden Seiten wird zunächst ein Reibungsozillator vorgestellt, der die Grundidee der Schwingungsdämpfung durch einen locker aufliegenden Reibungsdämpfer auf ihr absolutes Minimum reduziert, und dieser dann anhand von Methoden aus der nichtlinearen Dynamik und der Chaosforschung untersucht. Die Forderung nach größtmöglicher Reduktion bedeutet konkret:

- nur eine Reibkontaktfläche;
- eine kleinstmögliche Anzahl an Freiheitsgraden;
- freie und unbegrenzte Beweglichkeit des Reibungsdämpfers innerhalb seiner gegebenen Freiheitsgrade, keine *Impact*-Ereignisse;
- kein Kontaktverlust des Dämpfers zu seiner Auflagefläche;
- Eine einfache Reibungscharakteristik;
- eine einfache, harmonische Erregerkraft.

Nachdem zunächst die Bewegungsgleichungen sowie die Phasenraumtopologie des Oszillators hergeleitet werden, soll untersucht werden, welche Bifurkationen auftreten und wie sie sich auf die Effektivität des Dämpfers auswirken. Spätere Arbeiten könnten den Oszillator schrittweise um neue Komponenten erweitern und jeweils erforschen, wie sich das auf die Systemeigenschaften auswirkt. Nach und nach könnte man sich auf diese Weise einem Modell ähnlich dem in Abb. 2.6 gezeigten annähern. In dieser Arbeit aber soll nicht dem Realismus Priorität gegeben werden, sondern der Simplifizierung. Unter diesem Aspekt ist der im nun folgenden Abschnitt eingeführte Masseschwinger zu verstehen. Mit dem Ursprungsproblem, der Vorhersagbarkeit der Dynamik einer reibungsgedämpften Turbine, hat er nur indirekt zu tun.

Kapitel 3

Eindimensionaler Oszillator mit frei beweglicher Dämpfermasse

3.1 Bewegungsgleichungen

Wir betrachten einen linearen Oszillator mit Federkonstante k und schwingender Masse m , viskos gedämpft mit Dämpfungszahl d und periodisch getrieben von einer äußeren Kraft $E(t) = B \sin(\omega_{\text{ext}}t)$. Locker auf der schwingenden Masse des Oszillators liege eine zweite Masse m_D auf (Abb. 3.1), im folgenden *Reibelement* genannt. Es werde mit einer vertikal zur Schwingungsrichtung wirkenden Kraft $F_0 = m_D \cdot G$ auf den Oszillator gedrückt, wobei G eine konstante Beschleunigung ist, beispielsweise die Fallbeschleunigung der Erde. Die Ausdehnung der Kontaktfläche zwischen beiden Massen in Schwingungsrichtung wird als unbegrenzt angenommen. Unter dieser Annahme treten keine Randeffekte auf, und die Position des Reibelements ist für die Systemdynamik bedeutungslos.

Die Auslenkung der schwingenden Masse relativ zur natürlichen Ruhelage sei mit $x(t)$, die Relativgeschwindigkeit des Reibelements mit $v_D(t)$ bezeichnet. Das dynamische Verhalten des Gesamtsystems ist abhängig vom Bewegungszustand des Reibelements. Befindet es sich in Bewegung, wirkt eine Reibungskraft, und das System wird beschrieben durch

$$\begin{aligned} m\ddot{x}(t) &= E(t) - d\dot{x}(t) - kx(t) - \xi\mu(v_D)F_0 \\ m_D\dot{v}_D(t) &= \xi\mu(v_D)F_0 - m_D\ddot{x}(t). \end{aligned} \quad (3.1)$$

$\mu(v_D)$ ist eine Reibungscharakteristik und ξ eine Vorzeichenfunktion. Sei $t_{h \rightarrow g}$ der Zeitpunkt des Übergangs vom Haft- in den Gleitzustand, dann ist ihr Wert folgendermaßen bestimmt:

$$\xi = \text{sgn}[E(t_{h \rightarrow g}) - d\dot{x}(t_{h \rightarrow g}) - kx(t_{h \rightarrow g})]. \quad (3.2)$$

Das entspricht der Forderung, dass die Beschleunigung des Reibelements in Richtung der durch die schwingende Masse übertragenen Trägheitskraft erfolgen muss.

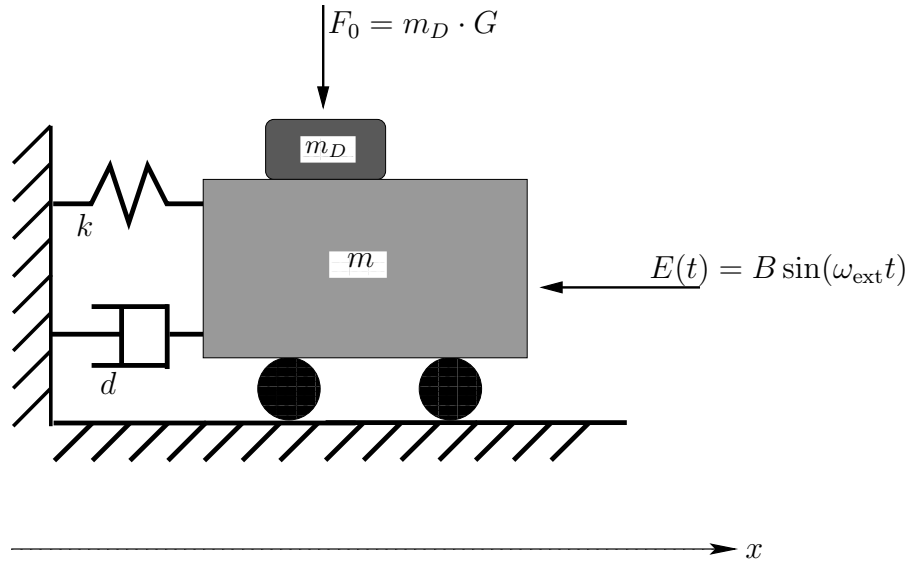


Abbildung 3.1: Getriebener eindimensionaler Oszillator der Masse m mit locker aufliegendem Reibelement der Masse m_D .

Diese etwas umständliche Definition ist notwendig für eine genaue numerische Integration der Bewegungsgleichungen. Die Richtung der Reibungskraft einfach durch das Vorzeichen von v_D festzulegen, hieße, sie unmittelbar zu Beginn einer Gleitphase gleich null zu setzen, was nicht der physikalischen Wirklichkeit entspricht. Ein Merkmal trockener Reibung ist es, für verschwindende Relativgeschwindigkeit gegen einen endlichen, von null verschiedenen Wert zu konvergieren.

Befindet das Reibelement sich im Haftzustand, tritt keine trockene Reibung auf. Stattdessen bildet das Gesamtsystem einen gewöhnlichen linearen Oszillator, und das Reibelement ist im mitbewegten System kräftefrei:

$$\begin{aligned} (m + m_D)\ddot{x}(t) &= E(t) - d\dot{x}(t) - kx(t) \\ \dot{v}_D(t) &= 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Mit x_D bezeichnen wir die relative Position des Reibelements, gegeben durch

$$x_D(t) = x_D^0 + \int_0^t v_D(\tau) d\tau. \quad (3.4)$$

Tabelle 3.1 enthält eine Auflistung sämtlicher Parameter des Oszillators mit ihren zugeordneten Werten, wie sie in den folgenden Kapiteln für alle Berechnungen verwendet werden, es sei denn, es werden explizit andere Werte genannt.

m	Schwingende Masse	0,975 kg
m_D	Reibelementenmasse	nicht festgelegt
k	Federkonstante	11 409 N/m
d	Viskose Dämpfung	0,2 Ns/m
G	Konstante Normalbeschleunigung	nicht festgelegt
f_1		0,160
f_2	Reibungsparameter	931,715 s/m
f_3		0,213
B	Erregeramplitude	7,58 N
ω_{ext}	Erregerkreisfrequenz	nicht festgelegt

Tabelle 3.1: Parameterwerte des Oszillators.

3.2 Reibungsmodell

Die Reibcharakteristik $\mu(v_D)$ in Gl. (3.1) sei gegeben durch

$$\mu(v_D) = \frac{f_1}{1 + f_2 |v_D|} + f_3 \quad (3.5)$$

und die Haftreibungskonstante durch

$$\mu_0 = \mu(0). \quad (3.6)$$

Das Modell enthält das klassische Coulomb-Modell für trockene Reibung als Grenzfall für $f_2 \rightarrow \infty$. Die den Reibungsparametern f_1 , f_2 und f_3 zugeteilten Werte, aufgeführt in Tabelle 3.1, sind an eine Messreihe von DOKOS [14, 29] für trockene Reibung zwischen zwei Stahlflächen angepasst (Abb. 3.2).

Bei der durch Gl. 3.5 gegebenen Reibungscharakteristik handelt es sich um den Spezialfall eines Modells von POPP und STELTER [46]. Letzteres beinhaltet noch einen quadratischen Term, der für große Werte von v_D einen Anstieg der Reibungskraft bewirkt. Durch dessen Vernachlässigung sowie die Wahl eines sehr großen Wertes für f_2 ist μ , außer für sehr kleine Werte nahe null, fast unabhängig von v_D . Laut LIM et al. [29] ist diese Annahme im Fall zweier Stahlflächen physikalisch zutreffend, solange eine Relativgeschwindigkeit von $v_D \sim 1$ m/s nicht überschritten wird. Die Auswirkungen hoher Geschwindigkeiten sowie weitere Abhängigkeiten, wie zum Beispiel von Temperatur und Oberflächenbeschaffenheit [45], bleiben in der vorliegenden Arbeit unberücksichtigt. Das gleiche gilt für komplizierte Reibungsphänomene wie Mikroschlupf oder Hysterese, die in fortgeschrittenen Modellen berücksichtigt werden [60].

3.3 Übergangsbedingungen

Der Übergang vom Haft- in den Gleitzustand erfolgt, sobald die auf das Reibelement wirkende Trägheitskraft den durch die Haftbedingung vorgegebenen

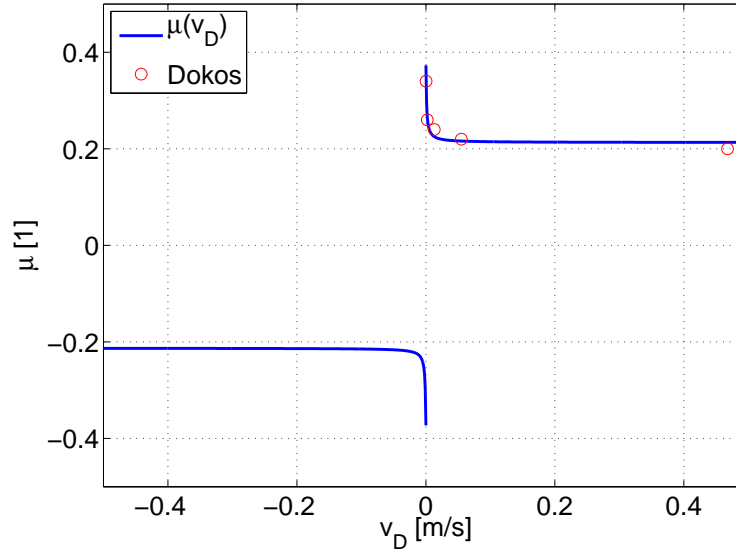


Abbildung 3.2: Reibungscharakteristik $\mu(v_D)$ nach Gl. (3.5), angepasst an Messwerte von DOKOS für trockene Reibung zwischen zwei Stahlflächen.

kritischen Wert erreicht:

$$m_D |\ddot{x}(t)| = \mu_0 F_0. \quad (3.7)$$

Der umgekehrte Übergang vom Gleit- in den Haftzustand findet statt, wenn die Relativgeschwindigkeit des Reibelements gleich null wird, unter der Voraussetzung, dass gleichzeitig auch die Haftbedingung erfüllt ist:

$$v_D(t) = 0 \quad \wedge \quad m_D |\ddot{x}(t)| < \mu_0 F_0. \quad (3.8)$$

Ist letzteres nicht gegeben, so beginnt stattdessen eine neue Gleitphase. In diesem Fall muss auch ξ neu bestimmt werden.

3.4 Beweis der Hinreichbarkeit der Übergangsbedingungen

Ein Übergang vom haftenden in den gleitenden Zustand darf nur dann stattfinden, wenn neben der Bedingung (3.7) gleichzeitig auch folgende Zusatzbedingung erfüllt ist:

$$\frac{m_D}{m} |E(t) - d\dot{x}(t) - kx(t) - \xi\mu(0)F_0| \geq \mu(0)F_0. \quad (3.9)$$

Die linke Seite der Ungleichung ist die auf das Reibelement wirkende Trägheitskraft im Gleitzustand nach Gl. (3.1). Ist diese zu Beginn der Gleitphase kleiner als die entgegengesetzte Reibungskraft, ergibt sich die physikalisch unsinnige Situation, dass das Reibelement gegen die Trägheitskraft beschleunigt wird und

seine Reibungskraft fortan in Bewegungsrichtung zeigt. (Zur Erinnerung: Das Vorzeichen ξ wird zu Beginn jeder Gleitphase festgelegt und bleibt dann bis zum nächsten Zustandsübergang erhalten.) Es lässt sich aber zeigen, dass aus der Erfüllung von Bedingung (3.7) die Erfüllung der Zusatzbedingung (3.9) folgt und letztere damit redundant ist.

Satz: *Wenn die notwendige Bedingung (3.7) für den Übergang in den Gleitzustand erfüllt ist, dann ist es auch die hinreichende Bedingung (3.9).*

Beweis:

Wir verwenden die Abkürzung $K = E(t) - dx - kx$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $K > 0$ und somit $\xi = 1$. Wegen $\mu_0 = \mu(0)$ und durch Einsetzen von (3.3) lässt die notwendige Bedingung (3.7) sich schreiben als

$$m_D \frac{K}{m + m_D} = \mu(0)F_0 \quad (3.10)$$

und die hinreichende (3.9) als

$$\frac{m_D}{m} |K - \mu(0)F_0| \geq \mu(0)F_0. \quad (3.11)$$

Angenommen, der Ausdruck innerhalb der Betragsklammern sei negativ, also $K < \mu(0)F_0$. Dann kann wegen

$$\frac{m_D}{m + m_D} K < K < \mu(0)F_0 \quad (3.12)$$

die notwendige Bedingung (3.10) nicht erfüllt sein. Folglich ist für die hinreichende Bedingung (3.11) folgende Form äquivalent:

$$\frac{m_D}{m} (K - \mu(0)F_0) \geq \mu(0)F_0. \quad (3.13)$$

Zum Schluss wenden wir auf die notwendige Bedingung (3.10) einige elementare Umformungen an:

$$\begin{aligned} m_D K &= (m + m_D) \mu(0) F_0 \\ \Rightarrow m_D K - m_D \mu(0) F_0 &= m \mu(0) F_0 \\ \Rightarrow \frac{m_D}{m} (K - \mu(0) F_0) &= \mu(0) F_0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Der Vergleich mit (3.13) zeigt, dass mit Erfüllung der notwendigen Bedingung immer auch die hinreichende erfüllt ist, was zu beweisen war.

Trotz ihrer mathematischen Redundanz ist Gl. (3.9) aber von Bedeutung für die numerische Integration der in diesem Kapitel eingeführten Bewegungsgleichungen. Die Routine zur Ermittlung des genauen Zeitpunktes des Zustandsübergangs, die in der Implementierung erhalten sein muss (in Kap. 4 wird ausführlich

darauf eingegangen), muss auch die Gültigkeit der Bedingung (3.9) überprüfen. Der Grund ist das Gleichheitszeichen in (3.14): Zusatzbedingung (3.9) ist im Augenblick des Übergangs vom Haft- in den Gleitzustand nicht einfach erfüllt, sondern sie ist *exakt* erfüllt. Die beiden auf das Reibelement wirkenden Kräfte, Trägheitskraft und Gleitreibungskraft, halten sich in diesem Augenblick also die Waage. Da aber jeder Algorithmus den Zeitpunkt des Übergangs nur näherungsweise bestimmen kann, wird in der Simulation auch die Ausgewogenheit der Kräfte nicht vollständig gegeben sein. Liegt das Ungleichgewicht auf Seiten der Reibungskraft, dann erfährt das Reibelement eine Beschleunigung in die verkehrte Richtung, will heißen entgegen der beschleunigenden Trägheitskraft. Letztere legt aber das Vorzeichen ξ der Reibungskraft fest, die dann also in Bewegungsrichtung zeigt. Sofern dieser Fehler nicht umgehend durch die Systemdynamik korrigiert wird, erfährt das aufliegende Reibelement dann eine nie endende Beschleunigung in eine Richtung. Eine Überprüfung der Gültigkeit von Gl. 3.9 als Bedingung für einen Zustandsübergang stellt sicher, dass dieses Szenario nicht eintritt.

Kapitel 4

Numerische Behandlung nichtglatter Differentialgleichungen

Phasenräume von fallweise definierten Differentialgleichungssystemen, wie der in Kap. 3 vorgestellte Reibungszillator, weisen an den Stellen, an denen ein Zustandsübergang stattfindet, Sprungstellen auf. An diesen vollzieht sich ein Übergangsloser Wechsel der Flussrichtung, was die Genauigkeit klassischer numerischer Methoden erheblich beeinträchtigt. Eine unstetige Änderung der rechten Seite des Gleichungssystems bewirkt einen Fehler der Ordnung $O(h)$ (Abb. 4.1), wobei h die Schrittweite bezeichnet. Eine einfache Lösung wäre, sich durch wiederholte Reduktion der Schrittweite möglichst dicht an die Sprungstelle anzunähern. Die Effektivität des Integrationsalgorithmus würde darunter aber erheblich leiden.

Ein naheliegender und zu früheren Zeiten gängiger Ansatz war, die Sprungstellen durch glatte Funktionen zu approximieren, etwa durch einen Tangens Hyperbolicus. Dabei wird allerdings nicht nur eine gewisse Ungenauigkeit in Kauf genommen, es können auch lokale Steifigkeiten auftreten, was wiederum den Rechenaufwand erhöht. Eine viel effektivere Methode ist, beim Überschreiten einer Sprungstelle die Integration abzubrechen, um dann den exakten Zeitpunkt des Übergangs sowie die Funktionswerte an dieser Stelle zu ermitteln. Danach wird der Integrationsvorgang an eben jener Stelle neu gestartet, wobei die ermittelten Funktionswerte als Ausgangswerte verwendet werden. Für die in dieser Arbeit durchgeführten numerischen Integrationen der Gleichungen aus Kap. 3 wird ein 1997 von MEIJAARD [31] vorgestellter Algorithmus verwendet, der im Folgenden kurz vorgestellt wird.

4.1 Extrapolation

Indikatoren für einen Wechsel zwischen zwei Systemzuständen sind sogenannte Ereignisfunktionen, die beim Eintreten einer Übergangsbedingung verschwinden.

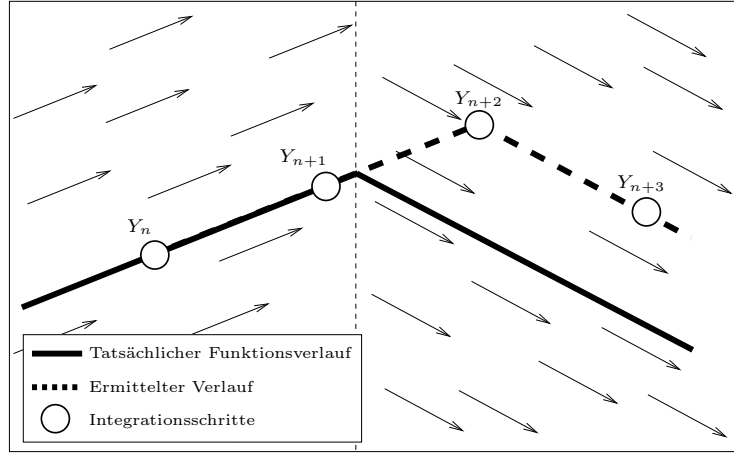


Abbildung 4.1: Numerischer Fehler an einer nichtglatten Stelle im Phasenraum.

Für den eindimensionalen Oszillator mit Reibungsdämpfer aus Abschnitt 3.1 lauten sie:

$$\begin{aligned}
 T_{st} &= |m_D \cdot \dot{v}(t)| - \mu_0 F_0 && \text{Haften} \rightarrow \text{Gleiten} \\
 T_{sl} &= v_D(t) && \text{Gleiten} \rightarrow \text{Haften} \\
 & && \text{Gleiten} \rightarrow \text{Gleiten.}
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Ein Übergang zeigt sich dann durch einen Vorzeichenwechsel der entsprechenden Ereignisfunktion. Zur Ermittlung des exakten Zeitpunkts wird zunächst der Verlauf der Funktion zwischen den beiden Zeitschritten links und rechts des Übergangs konstruiert. Runge-Kutta-Verfahren basieren auf Extrapolation der rechten Seite eines Differentialgleichungssystems und besitzen deshalb natürliche Extrapolationsformeln. Der für diese Arbeit verwendete Löser basiert auf der Dormand-Prince-Methode [48], einem Runge-Kutta-Verfahren mit adaptiver Schrittweitenregelung durch Vergleich der Funktionswerte vierter und fünfter Ordnung jedes Iterationsschrittes. Eine Formel für den Funktionsverlauf zwischen dem n -ten und dem $(n+1)$ -ten Zeitschritt, basierend auf den ersten sechs Funktionsauswertungen, ist hier gegeben durch

$$\begin{aligned}
 Y(\xi) = & Y_n + h \left[\left(\xi - \frac{1337}{480} \xi^2 + \frac{1039}{360} \xi^3 - \frac{1163}{1152} \xi^4 \right) k_1 + \left(\frac{4216}{1113} \xi^2 \right. \right. \\
 & - \frac{18728}{3339} \xi^3 + \frac{7580}{3339} \xi^4 \left. \right) k_3 + \left(-\frac{27}{16} \xi^2 + \frac{9}{2} \xi^3 - \frac{415}{192} \xi^4 \right) k_4 \\
 & + \left(-\frac{2187}{8480} \xi^2 + \frac{2673}{2120} \xi^3 - \frac{8991}{6784} \xi^4 \right) k_5 + \left(\frac{33}{35} \xi^2 - \frac{319}{105} \xi^3 \right. \\
 & \left. \left. + \frac{187}{84} \xi^4 \right) k_6 \right], \tag{4.2}
 \end{aligned}$$

wobei $\xi = (t - t_n)/h$. Der Fehler dieser Formel ist um eine Ordnung größer als der der Dormand-Prince-Methode selbst. Eine kleine Ungenauigkeit an den

Sprungstellen liegt also immer noch vor. Es gibt Methoden, diese zu vermeiden, für die aber weitere Funktionsauswertungen in Kauf genommen werden müssen. Laut ENRIGHT [15] et al. ist die Genauigkeit der Gl. (4.2) in den meisten Fällen hinreichend.

4.2 Der Algorithmus zur Nullstellensuche

Sei $\tau(t)$ eine beliebige Funktion mit bekannten Werten $\tau(a)$ und $\tau(b)$. Weiterhin sei $\tau(a) \cdot \tau(b) < 0$. Innerhalb des Intervalls $[a, b]$ befindet sich also mindestens eine Nullstelle. Die Suche nach ihr geschieht durch eine spezielle Form der Intervallschachtelung. Der erste Schritt ist eine Abschätzung der Nullstelle durch lineare Interpolation, will heißen, innerhalb des Intervalls $[a, b]$ wird ein Punkt c definiert durch

$$c = b - \tau(b)(b - a) / (\tau(b) - \tau(a)). \quad (4.3)$$

Danach wird eine quadratische Interpolation auf Basis von $\tau(a)$, $\tau(c)$ und $\tau(b)$ durchgeführt und die Nullstelle der ermittelten Parabel als neuer Wert für c benutzt. Zum Schluss wird ermittelt, in welchem der beiden Teilintervalle die Nullstelle liegt und das Intervall entsprechend angepasst. Ist $\tau(a) \cdot \tau(c) < 0$, so wird $b = c$ gesetzt, ansonsten $a = c$. Die Prozedur wird wiederholt, bis entweder $\tau(c)$ oder die Intervalllänge $b - a$ einen Toleranzwert unterschreiten. Im letzteren Fall ist $c = (a + b)/2$.

Die Methode konvergiert gewöhnlich innerhalb von vier bis zehn Iterationsschritten, je nach Größe der Toleranz. Wenn nach einer festen Anzahl von Schritten – im Falle des für diese Arbeit verwendeten Löser sind es 20 – keine Konvergenz erreicht ist, liegt offenbar ein schwieriges Problem vor. Der Grund könnten beispielsweise große Rundungsfehler sein. In dem Fall wird zum einfachen Bisektionsverfahren gewechselt, d. h. die Bestimmung von c in jedem Iterationsschritt geschieht durch $c = (a + b)/2$.

Der Zeitpunkt des Zustandsübergangs ist nun bekannt. Die Bestimmung der entsprechenden Funktionswerte geschieht durch Gleichung (4.2).

4.3 Ljapunow-Exponenten und ihre Berechnung im Falle nichtglatter Systeme

Das grundlegende dynamische Verhalten eines Systems definiert sich über das Verhalten dicht benachbarter Trajektorien zueinander. Ein System heißt chaotisch, wenn beliebig kleine Fehler in den Anfangsbedingungen unter seiner Dynamik nicht korrigiert werden, sondern anwachsen. Sei $\dot{x}(t) = f[x(t)]$ ein dynamisches System und $y(t)$ eine Nachbartrajektorie von x mit infinitesimal abweichenden Eingangswerten. Dann ist die Zeitentwicklung des Abstandes $d(t) =$

$y(t) - x(t)$ gegeben durch

$$\dot{d}(t) = f(y) - f(x) = Df(x)d(t), \quad (4.4)$$

wobei $Df(x)$ die Jacobi-Matrix ist. Der Lösungsansatz für diese linearisierte Gleichung ist offensichtlich

$$d(t) = d_0 e^{\lambda t} \quad (4.5)$$

mit einem Spektrum von Eigenwerten $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$. Jeder einzelne legt das lokale Wachstum der Störung d bezüglich einer Phasenraumrichtung fest. Die Eingangsbetrachtung einer kleinen Störung der Anfangsbedingung lässt sich damit verallgemeinern. Sei p_0 ein sphärisches Phasenraumvolumen infinitesimaler Ausdehnung, dessen Mittelpunkt zu einem Attraktor gehört. Unter Zeitentwicklung deformiert die Systemdynamik p_0 in ein infinitesimales Hyperellipsoid. Sei $p_i(t)$ die Ausdehnung der i -ten Hauptachse des Ellipsoids, dann sind die *Ljapunow-Exponenten* des Systems definiert durch

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t - t_0} \ln \frac{p_i(t)}{p_i(t_0)}, \quad (4.6)$$

wobei $p_i(t_0)$ dem Durchmesser der n -Sphäre p_0 entspricht. Durch die Grenzwertbildung werden die ortsabhängigen Eigenwerte in Gl. (4.5) zu einer globalen, den Attraktor charakterisierenden Größe. Ljapunow-Exponenten, benannt nach dem russischen Mathematiker Alexander Michailowitsch Ljapunow, sind ein Maß für die Zeitentwicklung kleiner Störungen der Systemdynamik. Ein Attraktor ist chaotisch, wenn mindestens ein Wert des Spektrums seiner Ljapunow-Exponenten positiv ist. Im Falle eines durchgehend negativen Spektrums konvergiert das System gegen einen Fixpunkt, und periodische Attraktoren kontinuierlicher Systeme weisen einen Ljapunow-Exponenten des Wertes null auf, während alle übrigen negativ sind. Liegen zwei oder drei Exponenten der Wertigkeit null vor und sind alle übrigen kleiner, dann ist der Attraktor quasiperiodisch.

In vielen Fällen ist deshalb die Kenntnis des gesamten Spektrums gar nicht vonnöten, um die Dynamik eines Systems zu charakterisieren. Es genügt, den Wert des größten Ljapunow-Exponenten zu kennen. Die gängigste Methode, ihn numerisch zu ermitteln, ist, parallel zu den Bewegungsgleichungen einen beliebigen linearisierten Störungsvektor d_0 anhand von Gl.(4.4) zeit zu entwickeln. Der Störungsvektor dreht sich dabei unabhängig von seiner anfänglichen Orientierung in die Richtung des stärksten Wachstums. Zu einem Zeitpunkt t_0 , wenn die Ausrichtung abgeschlossen ist, skaliert man seine Länge wieder auf $|d_0|$ und setzt die Zeitentwicklung fort. Jeweils nach Ablauf einer Zeit Δt sollte dann eine weitere Reskalierung erfolgen. Ansonsten kommt es zu numerischen Fehlern, weil der Betrag des Störungsvektors entweder zu groß oder zu klein wird, um vom Computer noch genau verrechnet zu werden. Der größte Ljapunow-Exponent ist dann gegeben durch

$$\lambda_{\max} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\Delta t} \sum_{i=1}^n \ln \frac{|d(t_0 + i\Delta t)|}{|d_0|}. \quad (4.7)$$

Zweckmäßigerweise sollte d_0 so gewählt sein, dass $|d_0| = 1$.

Wegen ihrer leichten Umsetzbarkeit und geringen Fehleranfälligkeit ist diese Methode im Allgemeinen eine gute Wahl. Leider ist sie aber auf Systeme mit Phasenraumdiskontinuitäten nicht ohne weiteres anwendbar, weil die Jacobi-Matrix, die die linearisierten Gleichungen festlegt, nicht überall definiert ist. Eine Möglichkeit, diese Problematik zu umgehen, ist, die linearisierten Gleichungen mit passenden Übergangsbedingungen zu versehen. Eine allgemein anwendbares Verfahren dazu wurde 1995 von MÜLLER vorgestellt [33]. Alternativ kann die Nutzung linearisierter Gleichungen auch einfach vermieden werden, indem man tatsächlich zwei unterschiedliche Trajektorien mit Anfangsbedingungen x_0 und $y_0 = x_0 + \delta x_0$ simultan zeitentwickelt. Der Wert von λ_{\max} ist dann ebenfalls durch Gl. (4.7) gegeben, wobei aber $d(i\Delta t) = y(i\Delta t) - x(i\Delta t)$, und die Reskalierung zum Zeitpunkt $i\Delta t$ wird ersetzt durch eine Verschiebung von $y(i\Delta t)$ entlang der Linie $y(i\Delta t) - x(i\Delta t)$, sodass $|y(i\Delta t) - x(i\Delta t)| = |\delta x_0|$. Diese sehr direkte Methode, die schon 1985 von WOLF et al. [61] vorgestellt wurde, ist allerdings fehleranfällig und sollte deshalb immer mit Bedacht angewandt werden. Wesentlich ist vor allem die richtige Wahl der Anfangsverschiebung δx_0 . Sie muss klein genug sein, dass der Abstand bis zur nächsten Korrektur von y innerhalb des exponentiellen Bereichs gemäß Gl. (4.5) bleibt, aber groß genug, um den Computer im Falle eines schrumpfenden Phasenraumvolumens nicht an die Grenzen seiner Rechengenauigkeit zu bringen. Von größter Wichtigkeit ist auch eine hinreichend häufige Korrektur von y . Das gilt um so mehr bei Systemen mit Diskontinuitäten, denn dort muss vermieden werden, dass x und y durch eine Diskontinuitätsgrenze voneinander getrennt werden und sich in der Folge in völlig unterschiedliche Richtungen entwickeln. Ein solcher Vorfall verfälscht das Ergebnis, da der Abstand zwischen ihnen dann nicht mehr die Zeitentwicklung einer infinitesimalen Störung widerspiegelt [21].

Die für diese Arbeit vorgenommenen Berechnungen von Ljapunow-Exponenten geschahen unter Anwendung der Methode von Wolf.

Kapitel 5

Filippov-Systeme

5.1 Definition und allgemeine Eigenschaften

Physikalische Systeme unterschiedlicher Art beinhalten oft Größen, deren Abhängigkeit von Systemzustand nicht glatt oder sogar unstetig ist. Die dynamischen Gleichungen eines solchen Systems müssen fallweise definiert werden. Sein Phasenraum setzt sich also aus mehreren unabhängigen Vektorfeldern zusammen, die durch unterschiedliche analytische Ausdrücke beschrieben werden und durch Mannigfaltigkeiten, die man als Diskontinuitätsebenen (engl. *discontinuity boundaries* oder *switching manifolds*) bezeichnet, voneinander getrennt sind.

Interessant sind stückweise glatte Systeme vor allem aufgrund ihres Bifurkationsverhaltens. Neben den meisten aus der klassischen Bifurkationstheorie bekannten Szenarien zeichnen sie sich durch eine spezifische Klasse von Bifurkationen aus, die durch Wechselwirkungen von Attraktoren mit Diskontinuitätsebenen verursacht werden. Zusammengefasst bezeichnet man sie als diskontinuitätsinduzierte Bifurkationen (DIBs). Erstmals beschrieben wurden sie im Jahr 1970 in Russland durch FEIGIN [16, 17, 18], wo sich die Bezeichnung *C-Bifurkationen* durchsetzte. Feigins Ergebnisse, die auch eine umfassende analytische Beschreibung dieser neuen Art von Bifurkationen umfassen, blieben aber in der westlichen wissenschaftlichen Welt lange Zeit unbeachtet. Erst 1998 wurden sie, in kompletierter Form und im Kontext moderner Bifurkationstheorie, von DI BERNARDO et al. [5] einer größeren Leserschaft zugänglich gemacht.

Heute ist eine Vielzahl unterschiedlicher Arten von DIBs bekannt, von denen die meisten für diese Arbeit nicht weiter von Interesse sind. Eine gute Übersicht findet sich in einem entsprechenden Artikel von CHAMPNEYS und DI BERNARDO [11] in der Scholarpedia¹. Wir beschränken uns im folgenden auf eine spezielle Klasse stückweise glatter Systeme, die als *Filippov-Systeme* bekannt sind. Sie zeichnen sich dadurch aus, dass ihr Vektorfeld zwar stetig, aber nicht an jeder

¹Eine frei zugängliche Internet-Enzyklopädie mit Peer-Review-System, die wissenschaftlichen Standards genügt. (www.scholarpedia.org)

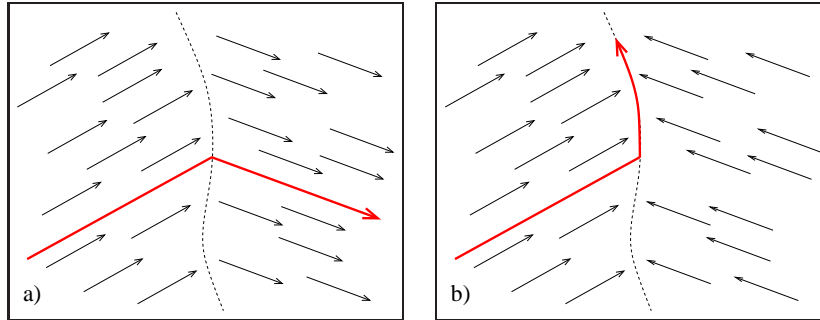


Abbildung 5.1: a) Passage einer Diskontinuitätsebene im Phasenraum eines Filippov-Systems. b) Gleiten der Trajektorie bei gegenläufigem Fluss.

Stelle differenzierbar ist (Abb. 5.1a). Beim Durchstoß einer Diskontinuitätsebene findet also kein Sprung der Funktionswerte statt, wie es zum Beispiel bei Oszillatoren mit starren Grenzen (Impact-Oszillatoren) der Fall ist [28, 23]. Ein solcher Durchstoß setzt allerdings voraus, dass der Fluss auf der anderen Seite von der Diskontinuitätsebene fortführt. Wo das nicht gegeben ist, kann eine auf die Ebene treffende Trajektorie sich unter Zeitentwicklung nicht mehr von dieser entfernen. Das System büßt auf diesen Phasenraumbereichen einen Freiheitsgrad ein. Es muss sich auf der Diskontinuitätsebene weiterentwickeln, bis ein Punkt erreicht ist, wo der Fluss sich auf einer Seite umkehrt (Abb. 5.1b). Man bezeichnet diese eingeschränkte Bewegung im Phasenraum als Gleiten (engl. *sliding*), die Untermenge der Diskontinuitätsebene, auf der dieses Verhalten auftritt, als Gleitebene (engl. *sliding section*). Da das Vektorfeld auf der Gleitebene eindeutig bestimmt ist, egal von welcher Seite die Trajektorie auftrifft, sind Systeme, in denen Gleiten auftritt, nicht invertierbar.

Systeme mit trockener Reibung, so wie der in Kap. 3 eingeführte Oszillator, lassen sich durch Filippov-Systeme beschreiben. Sie sind nur stückweise glatt, weil trockene Reibungskraft, anders als im Fall viskoser Reibung, für kleine Relativgeschwindigkeiten v_D nicht verschwindet, sondern gegen einen endlichen, von null verschiedenen Wert konvergiert, dessen Vorzeichen aber von der Richtung der Relativbewegung abhängt. An der Stelle $v_D = 0$ liegt also eine Unstetigkeit vor (siehe zum Beispiel die Reibungscharakteristik in Abb. 3.2). Die Gleitebene eines Filippov-Systems, das einen Reibungsozillator beschreibt, repräsentiert physikalisch die Zustände, in denen Haftreibung zwischen zwei Kontaktflächen vorliegt [51].

Filippov-Systeme zeichnen sich durch eine eigene Unterklasse von DIBs aus, die als *sliding bifurcations*, im folgenden Gleitbifurkationen genannt, bekannt sind. Wird ein Parameter eines Filippov-Systems variiert, so ist es möglich, dass ein Stück der Trajektorie im Phasenraum sich so verschiebt, dass es mit dem Rand einer Gleitebene in Kontakt gerät. Eine solche Grenzkollision kann mit einer Bifurkation einhergehen, mitunter in Form eines Wechsels von periodischer

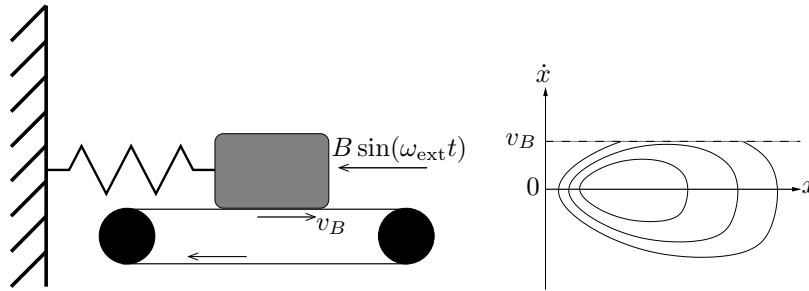


Abbildung 5.2: Der Oszillator von YOSHITAKE und SUEOKA [63] mit Phasenraumdarstellung einer Grenzkollision eines einfach periodischen Orbits.

zu chaotischer Dynamik, der sich durch keinen der bekannten Wege ins Chaos ankündigt.

Schon in den neunziger Jahren beschrieben einige Autoren, wie DANKOWICZ und NORDMARK [12] oder GALVANETTO und BISHOP [19, 20] ungewöhnliche Bifurkationen an einem einfachen Massenschwinger auf reibender Unterlage, teilweise mit Übergängen zum Chaos, und brachten sie mit Wechselwirkungen mit den Phasenraumdiskontinuitäten in Verbindung. Eines der wichtigsten Beispiele jedoch ist der Reibungsozillator, den YOSHITAKE und SUEOKA [63, 7] im Jahr 2000 numerisch untersuchten. Er besteht aus einer periodisch getriebenen schwingenden Masse ohne innere Dämpfung, die auf einem Laufband aufliegt, das sich konstant mit einer Geschwindigkeit v_B bewegt (Abb. 5.2). Wird die Erregerkraft auf null gesetzt und die trockene Reibung zwischen Masse und Band hinreichend schwach gewählt, dann stellt sich ein stabiles Gleichgewicht ein. Die Masse verharrt in der Auslenkung x , in der sich Gleitreibung und Federkraft die Waage halten. Wird dann eine nicht zu starke Erregung hinzugeschaltet, verwandelt sich die stationäre Lösung in eine periodische. YOSHITAKE und SUEOKA variierten nun die Erregerfrequenz so, dass die Schwingungsamplitude zunahm. Oberhalb eines kritischen Wertes erreichte die schwingende Masse die Geschwindigkeit des Laufbandes, so dass sie relativ zu ihrem Untergrund ruhte und in den Haftzustand überging.

Wie dieser Übergang im Phasenraum für eine zyklische Lösung der Periode 1 aussieht, wird auf der rechten Seite von Abb. 5.2 skizziert, wobei hier der Fall gezeigt wird, dass der periodische Orbit die Kollision mit der durch $\dot{x} = v_B$ definierten Diskontinuitätsebene überlebt. Das erwies sich aber als nicht selbstverständlich. In vielen Fällen wurde stattdessen ein überraschender Wechsel zu nicht-periodischer Dynamik beobachtet. Numerische Untersuchungen brachten weitere ungewöhnliche Verhaltensweisen zutage, wie zum Beispiel die Existenz vorzeitig abbrechender Periodenverdopplungskaskaden. Bis auf die Feststellung, es handle sich offenbar um eine Art nichtglatter Bifurkationen, die mit dem Übergang von reiner Rutsch- zur Haft-Rutsch-Dynamik zu tun habe, konnten die Autoren aber keine Erklärung für die entdeckten Phänomene liefern. Das gelang erst DI

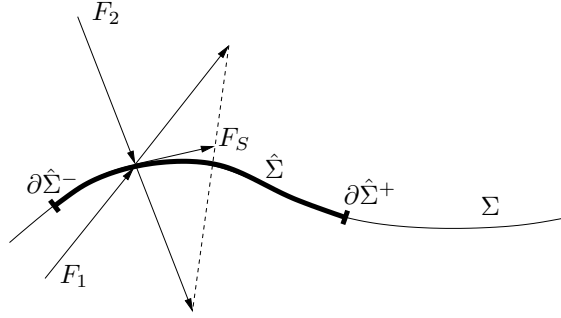


Abbildung 5.3: Geometrische Konstruktion des Vektorfeldes F_S auf der Gleitebene.

BERNARDO et al. [7] im Jahr 2003. Sie erkannten die abrupten Wechsel zu chaotischer Dynamik als Folge von Gleitbifurkationen und lieferten eine analytische Erklärung, die auch die genauen Bedingungen nennt, unter denen ein periodischer Orbit eine Bifurkation übersteht.

5.2 Der Phasenraum eines Filippov-Systems

Der Phasenraum eines Filippov-Systems lässt sich in zwei oder mehr Bereiche unterteilen, innerhalb derer das Vektorfeld glatt ist, während beim Übergang von einem Bereich in einen anderen eine Diskontinuität auftritt. Gehen wir der Einfachheit halber von nur zweien solcher Bereiche aus, dann ist die allgemeine Darstellung wie folgt:

$$\dot{y} = \begin{cases} F_1(y) & \text{für } H(y) > 0 \\ F_2(y) & \text{für } H(y) < 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

F_1 und F_2 sind glatte Vektorfelder, und $H(y)$ ist eine skalare Funktion der Systemvariablen. Die Diskontinuitätsebene Σ , die die Grenze zwischen beiden Vektorfeldern darstellt, ist die durch $H(y) = 0$ definierte Hyperfläche:

$$\Sigma := \{x \in \mathbb{R}^n : H(y) = 0\} \quad (5.2)$$

Die Gleitebene $\hat{\Sigma}$ ist eine Untermenge von Σ , die dadurch charakterisiert ist, dass der Fluss auf beiden Seiten in Richtung der Diskontinuitätsebene führt, so dass die weitere Zeitentwicklung tangential zu ihr verlaufen muss. Das Vektorfeld F_S auf der Gleitebene ergibt sich nach UTKIN [57] aus

$$F_S = \frac{F_1 + F_2}{2} + H_u \frac{F_2 - F_1}{2}, \quad H_u \in \mathbb{R}. \quad (5.3)$$

Die geometrischen Überlegungen hinter dieser Gleichung werden in Abb. 5.3 veranschaulicht. Der erste Term beschreibt den Fluss auf $\hat{\Sigma}$ als Überlagerung der durch beide Vektorfelder vorgegebenen Bewegungen. Der zweite ist ein Korrekturterm. H_u muss so gewählt sein, dass der Vektor tangential zu $\hat{\Sigma}$ liegt. F_S ist

also der zu $\hat{\Sigma}$ parallele Anteil der Linearkombination von F_1 und F_2 . Aufgrund der Forderung der Tangentialität gilt $\langle \nabla H, F_S \rangle = 0$. Angewandt auf (5.3) liefert diese Beziehung den Wert von H_u :

$$H_u(y) = -\frac{\langle \nabla H, F_1 \rangle + \langle \nabla H, F_2 \rangle}{\langle \nabla H, F_2 \rangle - \langle \nabla H, F_1 \rangle}. \quad (5.4)$$

Eine entgegengesetzte Flussrichtung von F_1 und F_2 , wie sie innerhalb der Gleitebene per Definition vorliegt, bedingt unterschiedliche Vorzeichen von $\langle \nabla H, F_1 \rangle$ und $\langle \nabla H, F_2 \rangle$. Die Differenz der beiden Ausdrücke ist dann betragsmäßig größer als ihre Summe, so dass H_u laut Gl. (5.4) einen Wert zwischen -1 und 1 aufweisen muss. Die Gleitebene ist folglich definiert durch

$$\hat{\Sigma} := \{x \in \Sigma : |H_u(y)| < 1\} \quad (5.5)$$

und ihre Grenzen durch

$$\partial \hat{\Sigma}^- := \{x \in \Sigma : H_u(y) = -1\} \quad (5.6)$$

$$\partial \hat{\Sigma}^+ := \{x \in \Sigma : H_u(y) = 1\}. \quad (5.7)$$

5.3 Gleitbifurkationen

Eine besondere Eigenart von Filippov-Systemen ist, dass es bei Änderung eines Parameters mitunter zu abrupten, völlig übergangslosen Änderungen der Systemdynamik kommen kann. Wir bezeichnen derartige Ereignisse im folgenden als *Gleitbifurkationen* (engl. *sliding bifurcations*). Sie werden ausgelöst durch Wechselwirkungen der Trajektorie einer periodischen Lösung mit dem Rand der Gleitebene $\partial \hat{\Sigma}^\pm$. Grundsätzlich lassen sich vier verschiedene Arten unterscheiden [6, 17, 27], die in Abb. 5.4 illustriert sind.

Durchstoßbifurkation (engl. *crossing-sliding bifurcation*). Eine Trajektorie, die Σ an einer Stelle durchstößt, verschiebt sich durch Variation eines Parameters derart, dass sie schließlich mit dem Rand der Gleitebene in Berührung gerät. Weitere Variation verschiebt den Kontaktpunkt ins Innere von $\hat{\Sigma}$, so dass nun ein Abschnitt der Trajektorie sich auf der Diskontinuitätsebene befindet (Abb. 5.4a).

Streifbifurkation (engl. *grazing-sliding bifurcation*). Ein Teil der Trajektorie, der vollständig in F_1 oder F_2 liegt, verschiebt sich in Richtung der Diskontinuitätsebene, bis er sie schließlich an einem Punkt von $\hat{\Sigma}^\pm$ tangential berührt. Wird die Variation fortgesetzt, entsteht auch hier ein Abschnitt gleitender Systemdynamik (Abb. 5.4b).

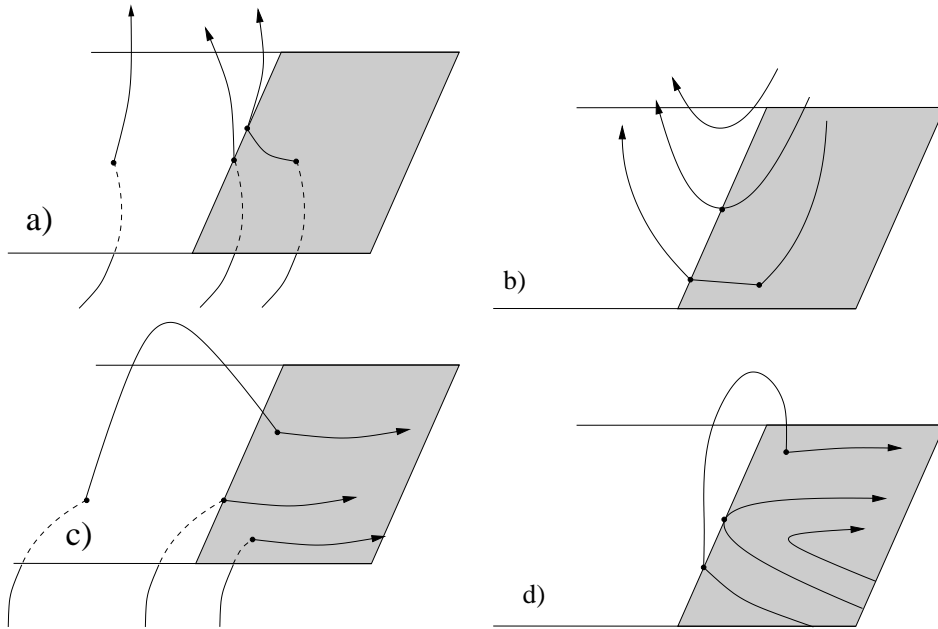


Abbildung 5.4: Die vier Arten von Gleitbifurkationen durch Wechselwirkung mit dem Rand der Gleitebene (grau): a) Durchstoßbifurkation. b) Streifbifurkation. c) Wechselbifurkation. d) Mehrfachgleitbifurkation.

Wechselbifurkation (engl. *switching-sliding bifurcation*). Dieses Szenario ähnelt der Durchstoßbifurkation. Die Trajektorie durchstößt Σ an einer gegebenen Stelle, die sich durch Variation eines Parameters an $\partial\Sigma^\pm$ annähert. Wenn es schließlich zur Berührung kommt, wird Σ nicht mehr durchstoßen (Abb. 5.4c). Die Dynamik führt in diesem Fall vom Rand der Gleitebene fort, nicht zu diesem hin, wie es bei der Durchstoßbifurkation der Fall ist (Abb. 5.4c).

Mehrfachgleitbifurkation (engl. *multisliding* oder *adding sliding bifurcation*). Ein Abschnitt der Trajektorie, der komplett auf der Gleitebene liegt, nähert sich deren Rand an und berührt ihn schließlich tangential. Fortgesetzte Variation generiert einen neuen Abschnitt der Trajektorie, der ober- oder unterhalb der Diskontinuitätsebene verläuft (Abb. 5.4d).

Der in Abb. 5.2 gezeigte Übergang zu Haft-Gleit-Dynamik ist eine Streifbifurkation. Sie wurde von DI BERNARDO et al. [7] anhand des gezeigten Oszillators gründlich untersucht und gilt heute als typische Verursacherin plötzlicher Ausbrüche chaotischer Dynamik. Ein weiteres Beispiel ist zum Beispiel ein einfacher Impact-Oszillator [35].

Im Jahr 2010 wurde durch JEFFREY et al. [25] eine neue Art von Gleitbifurkationen vorgestellt, von den Autoren als *katastrophale Gleitbifurkationen* eingeführt. Ihre Ursache sind Kollisionen mit abstoßenden Gleitebenen, die an

Stellen vorliegen, wo der Fluss auf beiden Seiten von der Diskontinuitätsebene fortführt. Die Bewegung auf einer abstoßenden Gleitebene ist instabil, und die auf ihr liegenden Lösungen sind hinsichtlich ihrer zeitlichen Vorwärtsentwicklung nicht eindeutig.

5.4 Der Oszillator als Filippov-System

Das in Kap. 3 eingeführte dynamische System beschreibt einen Reibungoszillator und lässt sich deshalb als Filippov-System beschreiben. Der Übergang in den haftenden Zustand kann als Kollision der Trajektorie mit einer Gleitebene verstanden werden, deren Dynamik durch Gleichung (5.3) vorgegeben ist [51].

Der Beweis beginnt mit der Überführung der Bewegungsgleichungen (3.1) für den Rutschzustand in ein autonomes System erster Ordnung. Dafür definieren wir die neuen Größen $v(t) := \dot{x}(t)$ für die Geschwindigkeit der schwingenden Masse und $\Phi(t) = \omega_{\text{ext}}t$ für die Erregerphase und erhalten durch Einsetzen:

$$\dot{x}(t) = v(t) \quad (5.8)$$

$$\dot{v}(t) = (B \sin \Phi(t) - dv(t) - kx(t) - \xi \mu(v_D) F_0)/m \quad (5.9)$$

$$\dot{v}_D(t) = \xi \mu(v_D) F_0 \left(\frac{1}{m_D} + \frac{1}{m} \right) - (B \sin \Phi(t) - dv(t) - kx(t))/m \quad (5.10)$$

$$\dot{\Phi}(t) = \omega_{\text{ext}} \quad (5.11)$$

Wir erinnern uns: Die Unstetigkeit dieses Systems ist gegeben durch die Vorzeichenfunktion ξ , die je nach relativer Bewegungsrichtung des Reiblements die Werte 1 und -1 annehmen kann. Obiges System lässt sich also im Sinne des vorigen Abschnitts in zwei glatte Teilsysteme unterteilen, gegeben durch

$$F_1 = \begin{pmatrix} v \\ (B \sin \Phi - dv - kx + \mu(v_D) F_0)/m \\ -\mu(v_D) F_0 \left(\frac{1}{m_D} + \frac{1}{m} \right) - (B \sin \Phi - dv - kx)/m \\ \omega_{\text{ext}} \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

und

$$F_2 = \begin{pmatrix} v \\ (B \sin \Phi - dv - kx - \mu(v_D) F_0)/m \\ \mu(v_D) F_0 \left(\frac{1}{m_D} + \frac{1}{m} \right) - (B \sin \Phi - dv - kx)/m \\ \omega_{\text{ext}} \end{pmatrix}, \quad (5.13)$$

wobei $y = (x, v, v_D, \Phi)$. Der Übergang findet statt bei einem Vorzeichenwechsel von v_D . Es gilt also

$$H(y) = v_D \quad \Rightarrow \quad \nabla H = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.14)$$

Direktes Einsetzen in (5.4) liefert

$$H_u(y) = \frac{B \sin \Phi - dv - kx}{m\mu(v_D)F_0 \left(\frac{1}{m_D} + \frac{1}{m} \right)}. \quad (5.15)$$

Einsetzen in (5.3) ergibt dann folgendes Vektorfeld für die Gleitebene:

$$F_S = \begin{pmatrix} v \\ (B \sin \Phi - dv - kx)/(m + m_D) \\ 0 \\ \omega_{\text{ext}} \end{pmatrix}. \quad (5.16)$$

Tatsächlich entspricht es genau den Bewegungsgleichungen (3.3) des Oszillators im Haftzustand. Die Grenzen der Gleitebene sind laut den Gleichungen (5.6) und (5.7) definiert durch

$$\frac{B \sin \Phi - dv - kx}{m\mu(v_D = 0)F_0 \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m_D} \right)} = \pm 1. \quad (5.17)$$

Umformung ergibt

$$m_D \frac{B \sin \Phi - dv - kx}{m + m_D} = \pm \mu(0)F_0, \quad (5.18)$$

was äquivalent ist zu

$$m_D \left| \frac{B \sin \Phi - dv - kx}{m + m_D} \right| = \mu(0)F_0. \quad (5.19)$$

Das ist genau die Übergangsbedingung (3.7), die den Wechsel vom Haft- in den Rutschzustand markiert.

5.5 Die Diskontinuitätsebene des Oszillators

Die Diskontinuitätsebene des hier gegebenen Systems ist definiert durch

$$\Sigma = \{y \in (x, v, v_D) : v_D = 0\}. \quad (5.20)$$

Die Grenzen der Gleitebene ergeben sich direkt aus Gleichung (5.18):

$$v(x) = -\frac{k}{d}x \pm \frac{\mu(0)F_0}{d} \left(\frac{m}{m_D} + 1 \right) + \frac{B}{d} \sin(\omega_{\text{ext}}t). \quad (5.21)$$

Die Funktion beschreibt die Gleitebene als ein unendlich langes, gekipptes Band, das in v -Richtung die Ausdehnung

$$2 \frac{\mu(0)F_0}{d} \left(\frac{m}{m_D} + 1 \right),$$

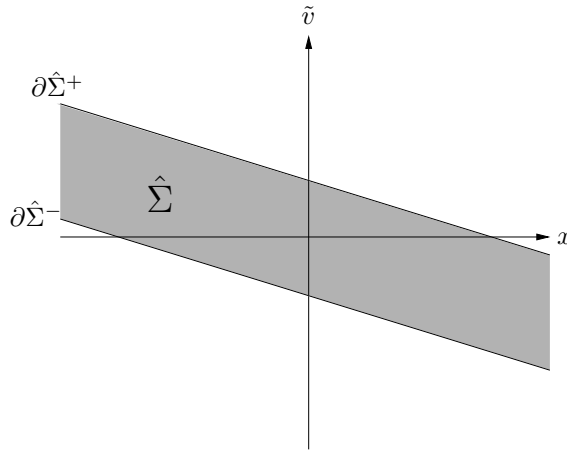


Abbildung 5.5: Qualitative Darstellung der Gleitebene $\hat{\Sigma}$ des Systems aus Kapitel 3.1 in der x - \tilde{v} -Ebene.

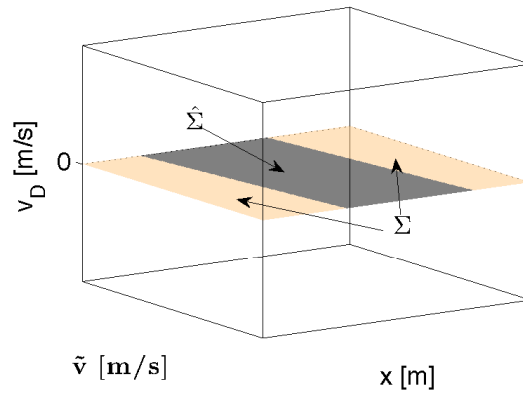


Abbildung 5.6: Diskontinuitäts- und Gleitebene im Phasenraum.

aufweist und synchron zur externen Erregung um den Ursprung oszilliert. Um eine graphische Darstellung zu ermöglichen, führen wir die neue Variable

$$\tilde{v}(t) = v(t) - \frac{B}{d} \sin(\omega_{\text{ext}} t) \quad (5.22)$$

ein. Sie definiert ein mitbewegtes System, in dem die Gleitebene relativ zum Ursprung ruht. Abb. 5.5 zeigt eine qualitative Darstellung. Die gesamte Phasenraumtopologie des Oszillators mit Diskontinuitäts- und Gleitebene wird in Abb. 5.6 veranschaulicht.

Kapitel 6

Die Resonanzkurve des Oszillators

6.1 Das Nichtlineare Regime

Abbildung 6.1 zeigt eine typische Resonanzkurve des in Kap. 2 eingeführten Oszillators in Kombination mit der relativen Haftzeit. Letztere gibt den Zeitanteil an, den das Reibelement im Haftzustand verbringt. Ein Wert von 1 bezeichnet eine reine Haftlösung ganz ohne Ablösung der gleitenden Masse.

Voraussetzung für Übergänge in den Rutschzustand ist das Auftreten hinreichend großer Beschleunigungskräfte, die den durch die Haftbedingung vorgegebenen kritischen Wert überschreiten:

$$m_D |\ddot{x}_{\max}| \geq \mu_0 F_0. \quad (6.1)$$

Je nach Wahl der Erregerfrequenz und -amplitude ist es möglich, dass das niemals eintritt. Das Reibelement befindet sich dann dauerhaft im Haftzustand, Nichtlinearitäten treten keine auf. Allgemein lässt die Resonanzkurve sich in drei Intervalle unterteilen. Innerhalb zweier kritischer Erregerkreisfrequenzen $\hat{\omega}_1$ und $\hat{\omega}_2$ treten Beschleunigungen auf, die Bedingung (6.1) erfüllen. Das Reibelement befindet sich dann zumindest zeitweise in Bewegung, sodass das System unter dem Einfluss nichtlinearer Reibungskräfte steht. Wir bezeichnen $\hat{\omega}_1$ und $\hat{\omega}_2$ im folgenden als *Ablösekreisfrequenzen*, die zugehörigen Amplituden $\hat{A}_{1,2}$ dementsprechend als *Ablöseamplituden* und das Intervall $[\hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2]$ als das *nichtlineare Regime* (NLR) der Resonanzkurve.

Im Fall einer Annäherung an das NLR von außerhalb sind seine Grenzen durch die Systemdynamik eindeutig definiert. Solange keine Ablösung des Reiblements auftritt, beschreibt der Oszillator im eingeschwungenen Zustand eine harmonische Schwingung, gegeben durch

$$x(t) = A(\omega_{\text{ext}}) \sin(\omega_{\text{ext}} t + \varphi(\omega_{\text{ext}})), \quad (6.2)$$

wobei

$$A(\omega_{\text{ext}}) = \frac{B}{\sqrt{(M\omega_{\text{ext}}^2 - k)^2 + d^2\omega_{\text{ext}}^2}} \quad (6.3)$$

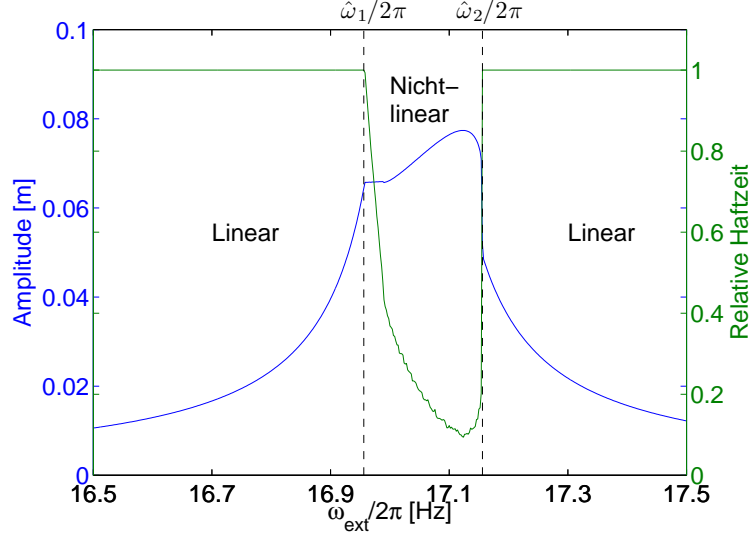


Abbildung 6.1: Typische Resonanzkurve: Innerhalb eines von zwei kritischen Erregerkreisfrequenzen $\hat{\omega}_{1,2}$ begrenzten Bereichs sind die auftretenden Beschleunigungen so groß, dass es zur Ablösung des Reibelements kommt. Außerhalb dieses Bereichs befindet es sich dauerhaft im Haftzustand, und die Resonanzkurve ist die eines linearen, extern erregten Oszillators.

mit $M = m + m_D$. Durch zweifache Zeitableitung von (6.2) erhalten wir $|\ddot{x}_{\max}| = \omega_{\text{ext}}^2 A(\omega_{\text{ext}})$ und damit durch Einsetzen in (6.1) folgende Beziehung für die Ablösekreisfrequenzen:

$$\frac{\hat{\omega}^2 B}{\sqrt{(M\hat{\omega}^2 - k)^2 + d^2\hat{\omega}^2}} = \frac{\mu_0 N_0}{m_D} = \mu_0 G. \quad (6.4)$$

Sie lässt sich umformen zu

$$\hat{\omega}^4 + c_1 \hat{\omega}^2 + c_2 = 0, \quad (6.5)$$

wobei

$$c_1 = \frac{2kM - d^2}{\left(\frac{B}{\mu_0 G}\right) - M^2}, \quad c_2 = \frac{-k^2}{\left(\frac{B}{\mu_0 G}\right) - M^2}. \quad (6.6)$$

Die Ablösekreisfrequenzen sind folglich gegeben durch

$$\hat{\omega}_{1,2} = \left(-\frac{c_1}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{c_1}{2}\right)^2 - c_2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.7)$$

und Einsetzen in Gleichung (6.3) liefert die zugehörigen Amplituden. Eine Vereinfachung dieser Beziehung lässt sich erreichen durch Vernachlässigung der viskosen

Reibung, sprich durch die Annahme $d = 0$. Gleichung (6.4) wird dann zu

$$\frac{B\hat{\omega}^2}{|M\hat{\omega}^2 - k|} = \mu_0 G \quad (6.8)$$

mit den Lösungen

$$\hat{\omega}_{1,2} = \sqrt{\frac{k}{M \pm \left(\frac{B}{\mu_0 G}\right)}} \quad (6.9)$$

Je kleiner die Größe $B/(\mu_0 G)$, desto mehr nähern sich beide Lösungen der Haftresonanzkreisfrequenz $\omega_\infty = \sqrt{k/M}$ an. Es ist unmittelbar erkennbar, dass $\hat{\omega}_1$ unabhängig von der Wahl der Parameter immer definiert ist. Im dämpfungsfreien Fall weist jede Resonanzkurve ein nichtlineares Regime auf, unabhängig von der Erregeramplitude.

Für $B/(\mu_0 G) \geq M$ ist $\hat{\omega}_2$ physikalisch nicht sinnvoll definiert und damit das nichtlineare Regime auf der rechten Seite unbegrenzt. Die Resonanzkurve unterteilt sich in diesem Fall nur noch in zwei Bereiche: einen linearen auf dem Intervall $[0, \hat{\omega}_1)$ und einen nichtlinearen auf dem Intervall $[\hat{\omega}_1, \infty)$.

Für die Ablöseamplituden des dämpfungsfreien Falls ergibt sich eine lineare Abhängigkeit von der Reibelementenmasse:

$$\hat{A}_{1,2}(m_D) = \frac{B}{|M\hat{\omega}_{1,2}^2 - k|} = \frac{\mu_0 G}{k}(m + m_D) \pm \frac{B}{k}. \quad (6.10)$$

Voraussetzung für die Gültigkeit der Näherungen (6.9) und (6.10) ist, dass die viskose Dämpfung unbedeutend gegenüber den auftretenden Feder- und Trägheitskräften ist. Das ist laut Gl. (6.6) erfüllt, wenn

$$2kM \gg d^2. \quad (6.11)$$

Der Wurzelterm in (6.3) lässt sich umformen zu $M^2\omega_{\text{ext}}^4 - (2kM - d^2)\omega_{\text{ext}}^2 + k^2$, womit die Gültigkeit auch für die Ablöseamplitude gegeben ist.

Sowohl die Beziehung (6.7) für die Ablösekreisfrequenz als auch ihre Idealisierung (6.9) mit der zugehörigen Amplitude (6.10) basieren auf der Annahme einer harmonischen Schwingung des Systems. Sie setzen also voraus, dass man sich den Grenzen des nichtlinearen Regimes von außerhalb annähert und sind auch nur dann gültig. Bei Annäherung von innerhalb findet der Übergang im allgemeinen an einer anderen Stelle statt. Es tritt Hysterese auf, ein Aspekt, auf den in Kapitel 7.2 näher eingegangen wird, wo die Phasenraumstruktur des Oszillators untersucht wird.

6.2 Das Reibelement als Schwingungsdämpfer

Die für die Bewegung des Reibelements aufgewandte Energie entstammt der Schwingung der tragenden Masse m . Zu erwarten ist deshalb eine dämpfende

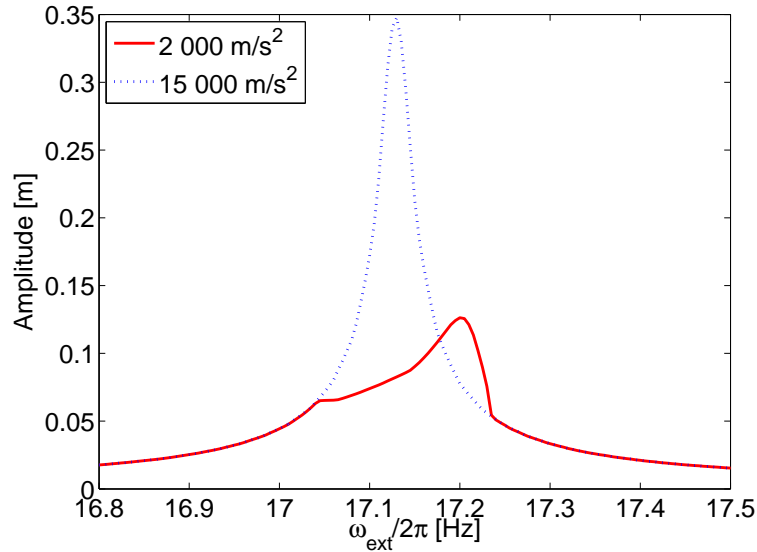


Abbildung 6.2: Amplituden der schwingenden Masse m als Funktion der Erregerfrequenz bei moderater und starker konstanter Beschleunigung G auf eine gleitende Masse $m_D = 0,01$ kg.

Wirkung des Reibelements. Der durch trockene Reibung entstandene Energieumsatz des hier betrachteten Oszillators wurde bereits 2004 von LÓPEZ et al. [30] untersucht und, unter der Annahme einer coulombschen Reibungscharakteristik, analytisch gelöst. Durch die Verwendung der Coulomb-Reibung werden die Bewegungsgleichungen stückweise linear. Dadurch gelang der Gruppe die Herleitung einer Formel für die optimale Reibungskraft, die die umgesetzte Energie und damit die Dämpfungswirkung maximiert. Da die in dieser Arbeit verwendete Reibungscharakteristik (3.5) in guter Näherung dem Coulomb-Modell entspricht, ist zu erwarten, dass die Ergebnisse von LÓPEZ et al. auch hier gültig sind. Eine Untersuchung der Tauglichkeit von Reibungsdämpfern komplexerer Systeme, darunter auch Triebwerksschaufelkränze, findet sich zum Beispiel bei POPP [47].

Abb. 6.2 zeigt zwei Resonanzkurven des Oszillators, die sich im Betrag der vertikalen Beschleunigung G unterscheiden. Die eine repräsentiert einen Wert von $G = 15\,000\text{m/s}^2$. Die zur Ablösung des Reibelements nötige Beschleunigung wird bei diesem hohen Wert an keiner Stelle erreicht. Es handelt sich hier also um die wohlbekanntere Resonanzkurve eines linearen Oszillators der Masse $m + m_D$. Die andere gezeigte Kurve steht für einen schwächeren Wert von $G = 2\,000\text{m/s}^2$. Hier existiert ein nichtlineares Regime, innerhalb dessen sie von der linearen Kurve abweicht. Der Dämpfungseffekt ist in globaler Hinsicht deutlich zu erkennen. Die Amplitude der schwingenden Masse erreicht an keiner Stelle den Spitzenwert des linearen Falls. Zu erkennen ist aber auch, dass die Dämpfungswirkung lokal negativ sein kann. Auf einem Intervall am rechten Rand des nichtlinearen Regimes bewirkt die Bewegung des Reibelements offenbar eine Erhöhung der

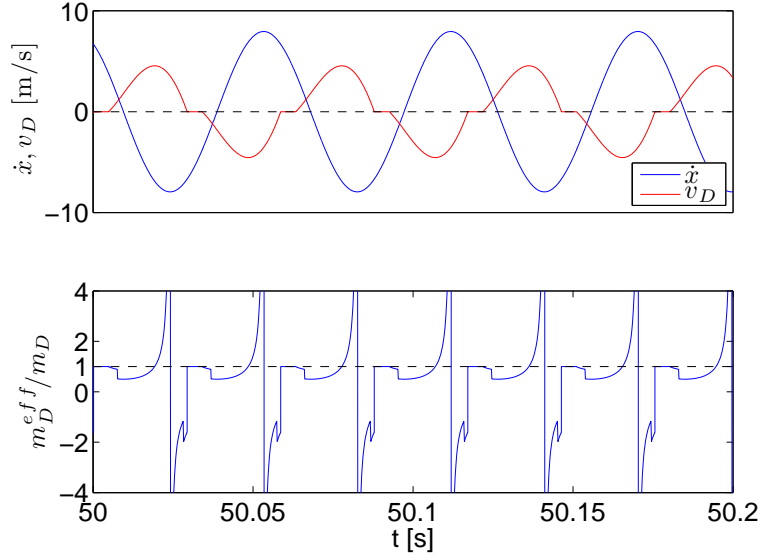


Abbildung 6.3: Zeitreihe zu der roten Resonanzkurve aus Abb. 6.2 für $\omega_{\text{ext}}/2\pi = 17,1$ Hz mit Auftragung der effektiven Reibelementenmasse m_D^{eff} .

Schwingungsamplitude.

Der Grund für dieses Verhalten ist die Verschiebung des Resonanzfrequenz des Gesamtsystems in Folge der Bewegung des Reibelements. Die Masse eines Körpers ist in der Mechanik ein Maß für den Widerstand, den er einer Beschleunigung entgegengesetzt. Der Anteil des Reibelements an der Kraft, die der äußeren Anregung $E(t)$ entgegengesetzt wird, ist im Haftzustand gegeben durch $m_D \ddot{x}$ und im Rutschzustand laut Gl. (3.1) durch $\xi \mu(v_D) F_0 = \xi \mu(v_D) G m_D$. Dies erlaubt die Definition einer effektiven Reibelementenmasse, gegeben durch

$$m_D^{\text{eff}} = \begin{cases} m_D & \text{im Haftzustand} \\ \xi \frac{\mu(v_D(t)) G}{\ddot{x}(t)} m_D & \text{im Rutschzustand.} \end{cases} \quad (6.12)$$

Der Anteil des Reibelements an der Gegenkraft zur äußeren Anregung ist dann zu jedem Zeitpunkt gegeben durch $m_D^{\text{eff}} \ddot{x}$.

Das Bemerkenswerte an der effektiven Reibelementenmasse m_D^{eff} ist, dass sie im Rutschzustand infolge ihrer Abhängigkeit vom Systemzustand implizit zeitabhängig ist. Sie kann theoretisch alle reellen Werte bis auf null annehmen, auch negative, und sogar divergieren. Jedem momentanen Wert von m_D^{eff} entspricht eine momentane Resonanzfrequenz des Gesamtsystems, definiert durch

$$\omega_{\text{res}}[v_D(t)] = \sqrt{\frac{k}{m + m_D^{\text{eff}}(v_D)} - \frac{d^2}{2(m + m_D^{\text{eff}}(v_D))^2}}. \quad (6.13)$$

Die Resonanzfrequenz des Oszillators ist also eine zeitlich veränderliche Größe. Ihre Zeitentwicklung ist durch die nichtlineare Dynamik des Gesamtsystems be-

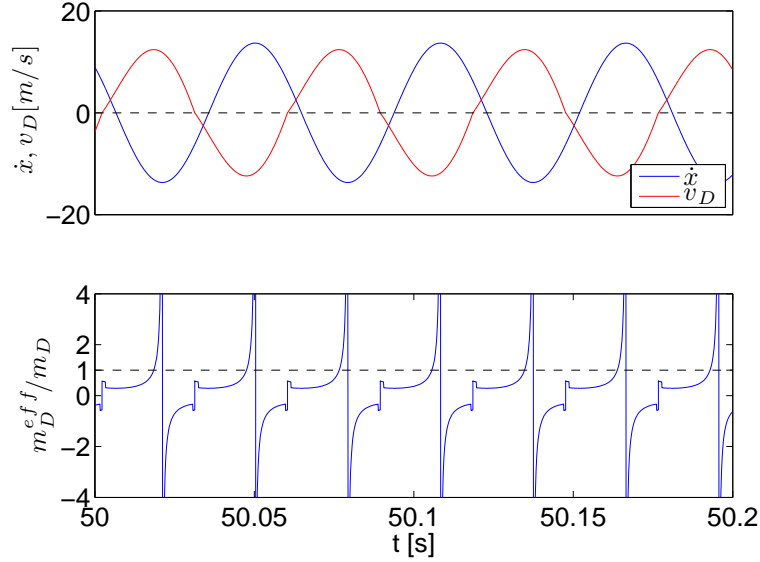


Abbildung 6.4: Wie Abb. 6.3, aber für $\omega_{\text{ext}}/2\pi = 17,2$ Hz.

stimmt, was analytische Betrachtungen größtenteils ausschließt. Wohl aber ist es möglich, anhand von Definition (6.12) und einiger grundsätzlicher Überlegungen qualitative Vorhersagen über die Auswirkungen auf das Schwingungsverhalten zu treffen.

Dazu sei zunächst festgestellt, dass zum Zeitpunkt des Übergangs vom Haft- in den Rutschzustand $m_D^{\text{eff}} = m_D$ gilt, in der Zeitentwicklung von m_D^{eff} also keine Unstetigkeit auftritt. Aufgrund der Übergangsbedingung (3.7) sowie der Definition der Haftreibungskonstante (3.6) ist nämlich $\mu(v_D = 0)G/\ddot{x}(t) = \mu_0 F_0/(m_D \ddot{x}(t)) = \pm 1$. Da weiterhin per Definition $\xi = \text{sgn}(\ddot{x})$ ist, siehe Gl. (3.2), folgt unmittelbar aus (6.12) die Behauptung.

Der Wert von m_D^{eff} bleibt in dem Augenblick, in dem das Reibelement sich ablöst, also zunächst unverändert. Wird es aber im folgenden beschleunigt, wird die Reibungskraft, also der Zähler in Gl. (6.12), kleiner. Gleichzeitig findet ein Übergang vom Haft- in den Gleitzustand immer zu einem Zeitpunkt statt, an dem die im Nenner stehende Beschleunigung der schwingenden Masse \ddot{x} betragsmäßig zunimmt. Und sofern nicht gerade der durch Gl. (6.1) dargestellte Grenzfall vorliegt, an dem der kritische Wert nur gerade eben erreicht, aber noch nicht überschritten wird, ist zu erwarten, dass diese Zunahme innerhalb eines begrenzten Zeitraums anhält.

Zusammengefasst ist die effektive Reibelementenmasse also gleich m_D zum Zeitpunkt des Übergangs und nimmt unmittelbar danach ab. Jedes mal, wenn das Reibelement durch die Beschleunigung seines Untergrunds ins Rutschen gerät, wird dem System effektiv Masse entnommen, wodurch die Resonanzfrequenz in Richtung größerer Frequenzen verschoben wird. Am linken Rand des nichtli-

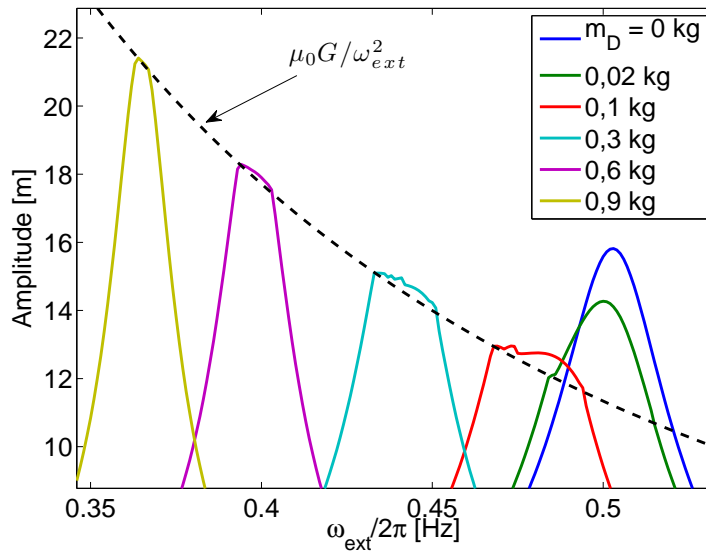


Abbildung 6.5: Annäherung der Resonanzkurve an eine Grenzfunktion im Nicht-linearen Regime bei steigender Reibelementenmasse. Die Parameter wurden für die dargestellten Resonanzkurven so gewählt, dass die Resonanzfrequenzen im Haftmodus klein sind und die Grenzfunktion langsam abfällt. ($m = 1 \text{ kg}$, $k = 10 \text{ N/m}$, $d = 0,2 \text{ Ns/m}$, $G = 300 \text{ m/s}^2$, $B = 10 \text{ N}$.)

nearen Regimes führt dies zu einer Dämpfung der Schwingung, während die Erregerfrequenzen am rechten Rand durch diese Verschiebung, gesetzt den Fall, sie fällt nicht allzu groß aus, dichter an die Resonanzfrequenz gerückt werden. Deshalb hat die Bewegung des Reibelements hier keine dämpfende Wirkung, sondern verleiht der Oszillation sogar noch zusätzlich Schub.

Zu Beginn dieses Kapitels wurde in Abb. 6.2 die Resonanzkurve eines Systems mit nichtlinearem Regime vorgestellt. Abb. 6.3 zeigt die Zeitreihe, die in dieser Kurve der Erregerfrequenz $17,1 \text{ Hz}$ entspricht. Dargestellt sind im oberen Teil die Geschwindigkeiten der schwingenden Masse sowie des Reibelements, \dot{x} und v_D . Es handelt sich um eine einfach periodische Haft-Rutsch-Lösung. Der untere Teil zeigt die Zeitentwicklung der effektiven Reibelementenmasse. Ihre Abnahme nach jedem Einsetzen einer neuen Gleitphase ist gut zu erkennen. Überhaupt ist ersichtlich, dass ihre Bilanz unterm Strich negativ ist, d. h. sie ist fast immer kleiner als m_D , abgesehen von einem kurzen Zeitraum vor der Polstelle, die durch den Vorzeichenwechsel von \ddot{x} entsteht.

Ein weiteres Diagramm für die Erregerfrequenz $17,2 \text{ Hz}$, einer Stelle mit negativem Dämpfungseffekt, zeigt Abb. 6.4. Zu sehen ist eine reine Gleitlösung. Die insgesamt negative effektive Massenbilanz ist auch hier deutlich erkennbar.

Da die Reibungskraft zwischen rutschender und schwingender Masse proportional zu m_D ist, steigt mit zunehmender Masse des Reibelements auch seine

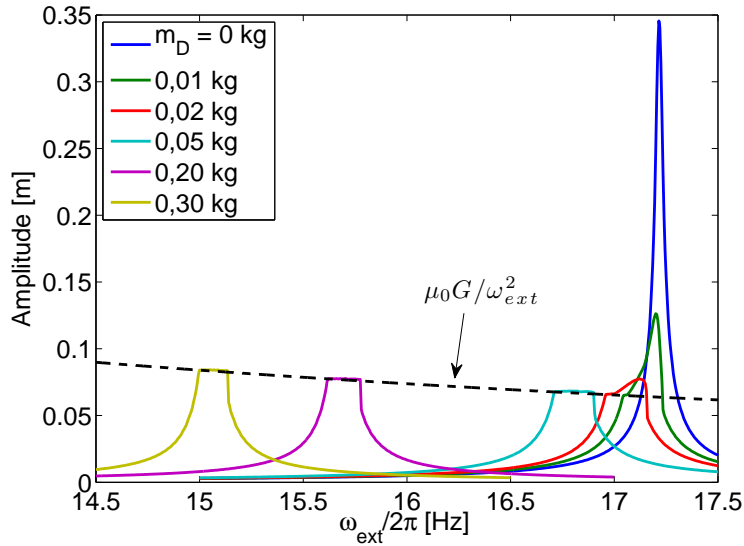


Abbildung 6.6: Resonanzkurven in Abhängigkeit von der Reibelementenmasse bei großer Federkonstante. Parameter gewählt wie in Abb. 6.2 mit $G = 2000 \text{ m/s}^2$.

Stoppwirkung. Ein schweres Reibelement drückt die Amplitude der Schwingung stärker als ein leichtes. Eine beliebig starke Dämpfung ist aber nicht erreichbar, da durch Gl. (6.1) auch ein unterer Grenzwert für die Amplitude vorgegeben ist. Durch $|\ddot{x}_{\max}| = A\omega_{\text{ext}}^2 = \mu_0 F_0/m_D = \mu_0 G$ erhalten wir die Funktion

$$A(\omega) = \frac{\mu_0 G}{\omega_{\text{ext}}^2}. \quad (6.14)$$

Sie beschreibt eine Kurve gleicher maximaler Beschleunigung, auf der die kritische Trägheitsbeschleunigung, die das Reibelement abzulösen vermag, gerade noch erreicht wird. Eine Dämpfung der Amplitude unter den durch Gl. (6.14) vorgegebenen Wert ist nicht möglich. Das Reibelement würde dann liegenbleiben, womit auch seine dämpfende Wirkung wegfiel. Folglich definiert Gl. (6.14) eine Grenzkurve, gegen die der Verlauf der Resonanzkurve innerhalb des Nichtlinearen Regimes umso mehr konvergiert, je größer die rutschende Masse m_D gewählt wird. Abb. 6.5 zeigt diese Konvergenz am Beispiel eines Oszillators mit geringer Federkonstante. Bei großen Federkonstanten liegen die Peaks der Resonanzkurven im Bereich hoher Frequenzen, wo die Kurve (6.14) schon sehr flach verläuft. Die Nichtlinearen Regimes im Falle großer Reibelementenmassen werden dann zu fast ebenen Plateaus, die Resonanzkurven wirken wie abgeschnitten (Abb. 6.6).

Die Konvergenz des Verlaufs der Resonanzkurve gegen eine streng monoton abfallende Funktion innerhalb des Nichtlinearen Regimes für zunehmende Werte von m_D lässt den Schluss zu, dass für hinreichend große Reibelementenmassen

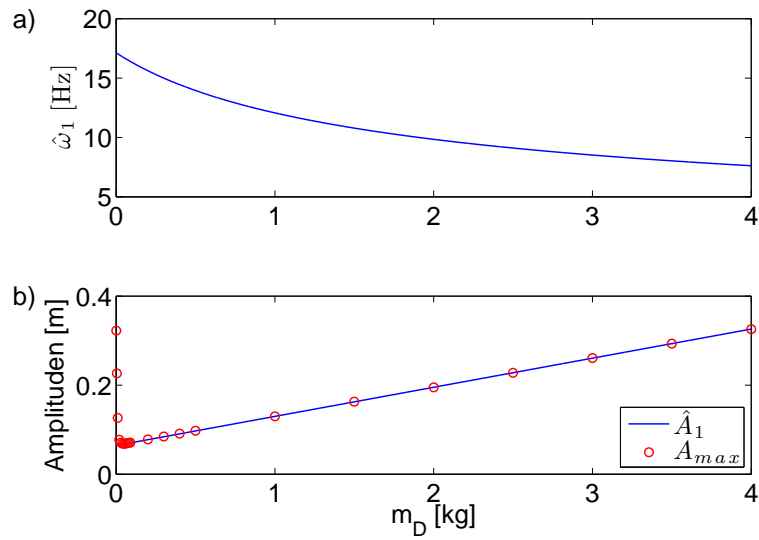


Abbildung 6.7: a) Erste Ablösekreisfrequenz nach Gl. (6.7) als Funktion der Reibelementenmasse. b) Zugehörige Ablöseamplitude \hat{A} mit den Maximalamplituden für verschiedene Reibelementenmassen. Übrige Parameter gemäß Abb. 6.6.

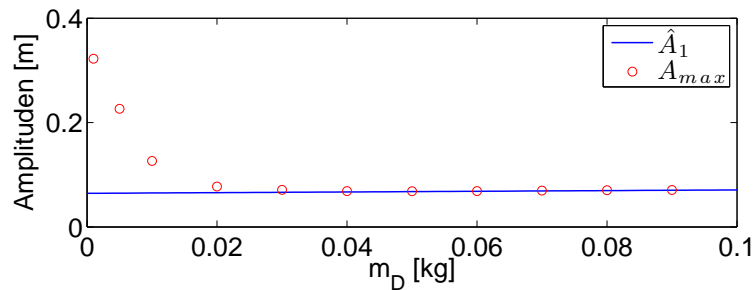


Abbildung 6.8: Detail aus Abb. 6.7.

die erste Ablöseamplitude \hat{A}_1 mit der Maximalamplitude der jeweiligen Resonanzkurve gleichgesetzt werden kann. Verdeutlicht wird dies in Abb. 6.7. Sie zeigt die erste Ablösekreisfrequenz gemäß Gl. (6.7) als Funktion von m_D , wobei die übrigen Parameter den für Abb. 6.6 gewählten entsprechen, und in einer zweiten Auftragung die zugehörigen Ablöseamplituden. Aufgrund der großen Federkonstante k gilt Näherung (6.10), und der Anstieg von \hat{A}_1 ist fast linear. Beide Auftragungen überdecken einen weiten Bereich von Reibelementenmassen bis hin zu sehr großen Werten mit $m_D/m > 4$. Die zweite ist ergänzt um die Maximalamplituden der Resonanzkurven für ausgewählte Reibelementenmassen. Offensichtlich kommt es nur für sehr kleine Werte von m_D zu einer Abweichung von \hat{A}_1 . Hier ist die Dämpfungswirkung so schwach, dass die Resonanzkurve innerhalb des Nichtlinearen Regimes noch ansteigt. Für alle hinreichend großen Werte hingegen schmiegt sie sich so dicht an die Grenzfunktion (6.14) an, dass die erste Ablöseamplitude zugleich ihr Maximum darstellt.

Da die Ablöseamplitude aber wiederum nicht konstant ist, sondern mit m_D ansteigt, existiert eine ideale Reibelementenmasse, die den maximalen Ausschlag des Oszillators minimiert. In Abb. 6.7 liegt sie etwa bei $m_D = 0,05$ kg, wie eine Detailansicht zeigt (Abb. 6.8).

6.3 Systemdynamik im Nichtlinearen Regime

Innerhalb des Nichtlinearen Regimes, wo es zur Ablösung der gleitenden Masse kommt, wird der Oszillator von trockener Reibung beeinflusst und stellt damit ein Filippov-System gemäß der Beschreibung in Kap. 5 dar. Zu erwarten ist also eine komplexe, von Gleitbifurkationen geprägte Dynamik.

Abb. 6.9 zeigt das Nichtlineare Regime der Resonanzkurve für $G = 300$ m/s² und $m_D = 0,3$ kg in Kombination mit mehreren Aspekten der Systemdynamik. Die oberste Auftragung zeigt die absolute (nicht die gemittelte) Amplitude der schwingenden Masse m , die zweite die relative Haftzeit. Die dritte Auftragung zeigt den maximalen Ljapunow-Exponenten, wobei der Null-Exponent, der die äußere Anregung repräsentiert, ignoriert wird, und die vierte schließlich ein Bifurkationsdiagramm. Es zeigt für jeden abgetasteten Parameterwert die Projektion eines stroboskopischen, an der Erregerphase orientierten Poincaré-Schnitts. Zwecks besserer Lesbarkeit des Diagramms ist das Wertespektrum für jeden Wert des Kontrollparameters so verschoben, dass der kleinste Wert der Poincaré-Koordinate auf der null liegt.

Die numerische Integration zur Ermittlung der in der Abbildung gezeigten Größen wurde für jeden Parameterschritt mit willkürlichen Eingangswerten durchgeführt, die nicht an die Endwerte des Vorgängers anknüpften. Im wesentlichen repräsentieren die dargestellten Werte also den Attraktor mit dem größten Einzugsgebiet.

Das erste, was bei der Betrachtung von Abb. 6.9 auffällt, ist, dass das Nicht-

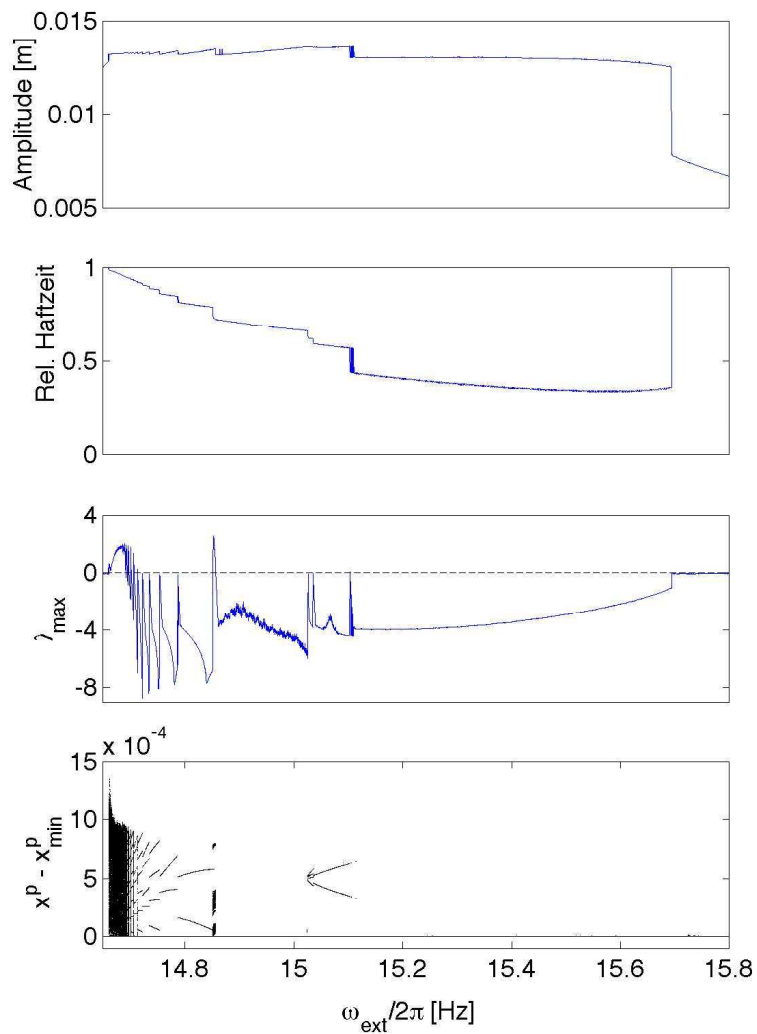


Abbildung 6.9: Systemdynamik im Nichtlinearen Regime der Resonanzkurve bei $G = 300 \text{ m/s}^2$ und $m_D = 0,3 \text{ kg}$. Alle anderen Parameter gemäß Abb.6.6. Von oben nach unten: Amplitude, Relative Haftzeit, größter Ljapunow-Exponent und verschobenes Bifurkationsdiagramm.

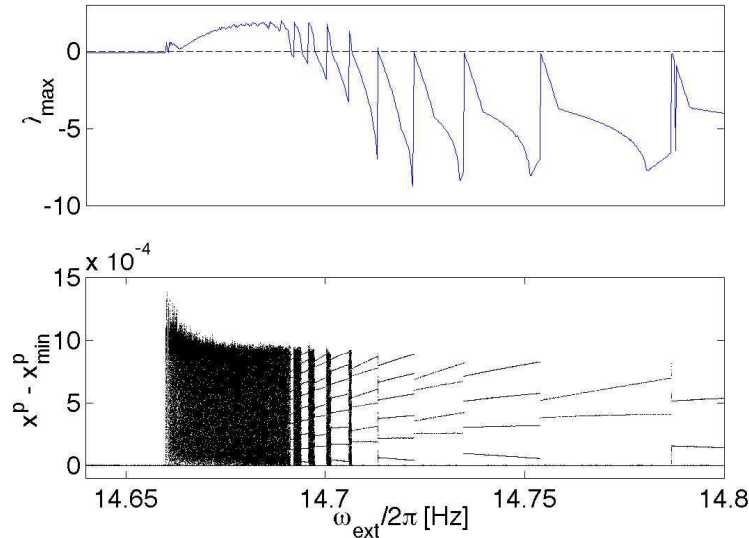


Abbildung 6.10: Detail aus Abb. 6.9. Gezeigt ist der linke Rand des Nichtlinearen Regimes.

lineare Regime sich wiederum in zwei Bereiche unterteilen lässt. Während linkerseits die für Filippov-Systeme typischen irregulären Sprünge zwischen verschiedensten Dynamiken auftreten, wechselt das System etwa in der Mitte in einen einfach periodischen Grenzyklus, der über den gesamten Rest des Nichtlinearen Regimes stabil bleibt. Der Schlüssel zum Verständnis dieses Bifurkationsverhaltens ist die in Kap. 5.5 vorgestellte Phasenraumtopologie des Systems. Man betrachte zunächst den Fall einer äußeren Erregung $\omega_{\text{ext}} < \hat{\omega}_1$. Die Erregerfrequenz liegt also außerhalb des Nichtlinearen Regimes, die gleitende Masse befindet sich im permanenten Haftzustand. Im Phasenraum entspricht dies einer geschlossenen Kurve, die komplett auf der Gleitebene liegt (Abb. 6.11).

Nun werde die Erregerfrequenz langsam erhöht. Da dies eine Annäherung an die Resonanzfrequenz des Haftfalls bedeutet, die laut Gl. (6.9) immer innerhalb des Nichtlinearen Regimes liegt, erhöht sich damit auch die Schwingungsamplitude. Die Kreisbahn, die die Trajektorie auf der Gleitebene beschreibt, wird also weiter, bis sie schließlich, bei $\omega_{\text{ext}} = \hat{\omega}_1$, deren Rand berührt und die gleitende Masse sich erstmals ablöst. Die Berührung des Randes der Gleitebene leitet eine Rutschphase ein, der sich eine neue Haftphase anschließt. Im Phasenraumbild entspricht das einem Abheben der Trajektorie von der Gleitebene mit unmittelbar anschließendem Rücksturz. Bei diesem Übergang von einer reinen Haft- zu einer Haft-Rutsch-Lösung handelt es sich um eine Mehrfachgleitbifurkation (siehe Abb. 5.4), die, wie Abb. 6.9 bzw. die Detaildarstellung in Abb. 6.10 zeigt, unmittelbar einen Wechsel zu chaotischer Dynamik bewirkt.

Die Ursache dieses Wechsels liegt wiederum in der Phasenraumtopologie des Oszillators. Typisch für chaotische Systeme ist eine Phasenraumdynamik, die

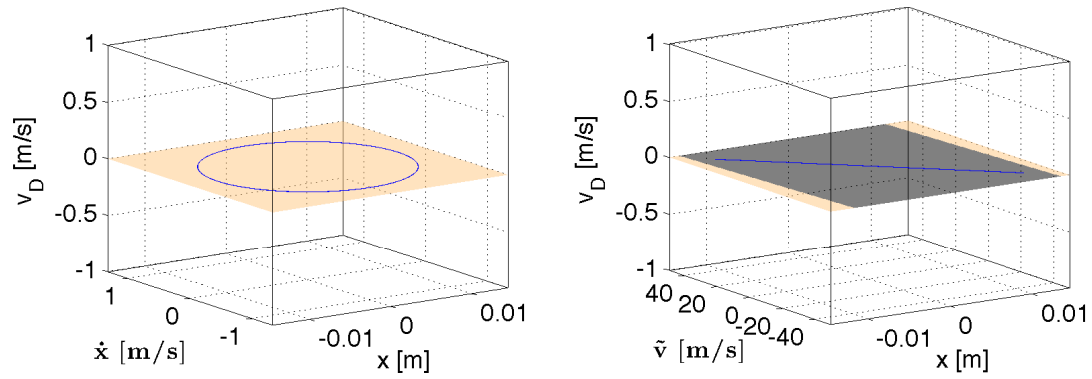


Abbildung 6.11: Phasenraumdynamik außerhalb des Nichtlinearen Regimes. Auftragung zu Abb. 6.9 mit $\omega_{\text{ext}}/2\pi = 14,6$ Hz, links in realen und rechts in mitbewegten Koordinaten gemäß Gl.(5.22). Die grau unterlegte Fläche ist die Gleitebene.

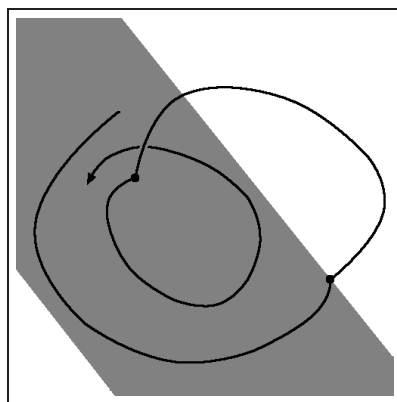


Abbildung 6.12: Schematische Phasenraumdarstellung einer nichtperiodischen Haft-Rutsch-Lösung.

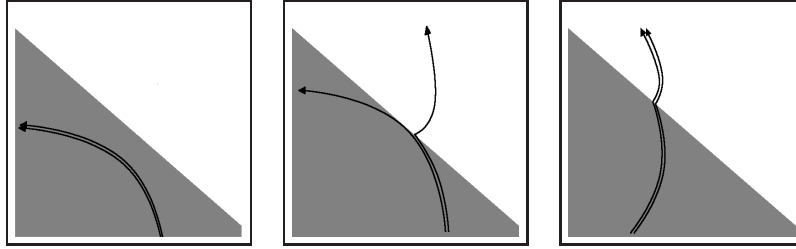


Abbildung 6.13: Schematische Darstellung einer Mehrfachgleitbifurkation. Bei tangentialen Kontakt kommt es zur Trennung benachbarter Eingangswerte.

eine Expansionsbewegung mit einer Faltung kombiniert, die die Trajektorie zurückwirft, sobald eine bestimmte Schwelle überschritten ist. Das bekannteste und wohl einfachste Beispiel ist der Rössler-Attraktor, der in dem Buch von JACKSON [24] ausführlich besprochen wird. Die Faltung ist im Falle des vorliegenden Systems durch die schwingungsdämpfende Wirkung der gleitenden Masse realisiert. Ihre Bewegung führt zu einem Amplitudenverlust. Der Aufschlagpunkt der Trajektorie am Ende der Rutschphase liegt also innerhalb der Kreisbahn, die sie während des letzten Erregerzyklus vor der Ablösung beschrieben hat (Abb. 6.12). Mit Beginn der neuen Haftphase ist der Oszillator aber wieder linear und strebt deshalb zu seiner „natürlichen“ Schwingungsperiode zurück. Auf der Gleitebene beginnt also eine Spiralbewegung nach außen, die anhält, bis aufs neue der Rand der Gleitebene erreicht wird und der Ablauf von vorn beginnt.

Eine weitere Bedingung für chaotische Dynamik ist das Vorhandensein eines Mechanismus, der dicht benachbarte Eingangsbedingungen im Laufe ihrer Zeitentwicklung voneinander trennt. Dies geschieht am Rand der Gleitebene. Die zyklische Trajektorie, die aufgrund einer Parametervariation ihren Radius vergrößert, berührt den Rand zunächst tangential. Schon eine kleine Störung kann dann bewirken, dass eine Trajektorie sich ablöst, die ansonsten noch auf der Gleitebene geblieben wäre (Abb. 6.13). Aufgrund der unendlich hohen Trajektorienichte auf der Gleitebene, die bei Aperiodizität vorliegen muss, liegen benachbarte Eingangsbedingungen fast immer auf unterschiedlichen Trajektorien. Unter Zeitentwicklung bleiben sie zwar zunächst benachbart, aber innerhalb einer hinreichend langen Zeitspanne muss es schließlich zwangsläufig zu einer Trennung gemäß dem eben geschilderten Szenario kommen.

Eine weitere Erhöhung der Erregerfrequenz bringt das System näher an den Resonanzwert des reinen Haftfalls. Der Amplitudenzuwachs pro Periode nach Abschluss einer Rutschphase wird dadurch größer. Die Spiralarme wandern weiter nach außen, so dass der Rand der Gleitebene nicht mehr tangential getroffen wird (Abb. 6.13, rechts). Die Bedingungen für chaotische Dynamik sind damit nicht mehr erfüllt, und das System wechselt in eine periodische Lösung, die erhalten bleibt, bis der nächstäußere Spiralarm den Rand der Gleitebene erreicht. Die wiederholten Wechsel zwischen verschiedenen chaotischen und periodischen

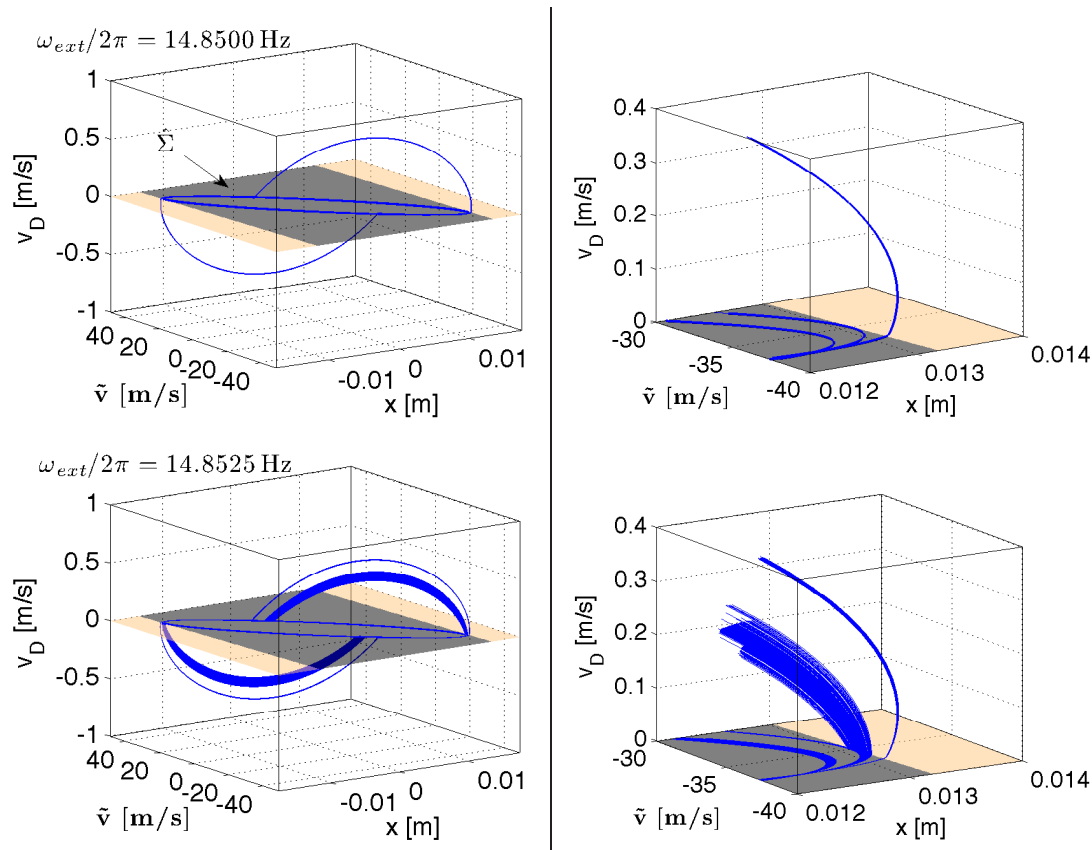


Abbildung 6.14: Links: Phasenraumaufragungen für zwei Erregerfrequenzen vor und hinter einer Mehrfachleitbifurkation, die einen Übergang von einem Periode-3-Orbit zu einem chaotischen Attraktor bewirkt. Die Auftragungen beziehen sich auf Abb. 6.9. Rechts: Detailvergrößerungen.

Attraktoren, die in Abb. 6.10 zu sehen sind, lassen sich als Kaskade von Mehrfachleitbifurkationen deuten. Die Abbildung zeigt aber auch, dass nicht jede Bifurkation zwingend zu chaotischer Dynamik führen muss. Oft findet lediglich ein Übergang zwischen zwei periodischen Attraktoren statt, voneinander abgegrenzt durch eine isolierte quasiperiodische Lösung.

Abb. 6.14 zeigt die Bifurkation an der Stelle $\omega_{\text{ext}}/2\pi = 14,85$ Hz, die einen Wechsel von einem Periode-3-Orbit zu einem chaotischen Attraktor bewirkt. In der Detailansicht auf der rechten Seite ist zu sehen, wie die Trajektorie in der zweiten Periode nur noch knapp den Rand der Gleitebene passiert. Durch Steigerung der Frequenz um $1/400$ Hz kommt es zum Kontakt, worauf der periodische Orbit kollabiert und durch einen chaotischen Attraktor ersetzt wird (untere Auftragung). In der Detaildarstellung erkennbar ist die Zweiteilung des mittleren Spiralarms und die dadurch verursachte Trennung unmittelbar benachbarter Lösungen. Eine Zeitreihendarstellung derselben Bifurkation mit Auslenkung x und relativer Position x_D der gleitenden Masse zeigt Abb. 6.15.

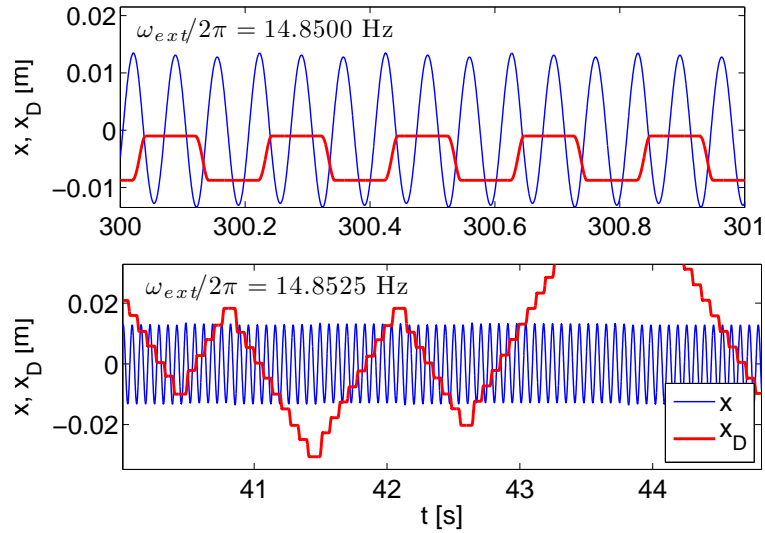


Abbildung 6.15: Bifurkation aus Abb. 6.14 als Zeitreihe

Am rechten Rand des Nichtlinearen Regimes hat die Bewegung der gleitenden Masse aus dem in Kap. 6.1 genannten Grund keine dämpfende Wirkung. Chaotische Dynamik gemäß dem soeben erläuterten Mechanismus ist damit nicht möglich. Statt dessen geht das System, nähert man sich von außerhalb der Ablösekreisfrequenz $\hat{\omega}_2$ an, bei deren Erreichen direkt in eine einfach periodische Haft-Rutsch-Lösung über. Für hinreichend kleine Werte von G ist auch der direkte Übergang in eine reine Rutschlösung möglich. (Abb. 6.16 und 6.17).

6.4 Symbolische Dynamik

Eine Poincaré-Ebene ist eine Untermannigfaltigkeit eines Phasenraums mit der Eigenschaft, unter der Dynamik des Systems durchstoßen zu werden. Die Position eines Durchstoßpunktes auf der Ebene ergibt sich dabei, ein deterministisches System vorausgesetzt, eindeutig aus der Position seines Vorgängers. Die Definition einer Poincaré-Ebene bedeutet also im Grunde die Überführung einer kontinuierlichen Abbildung $\dot{y} = f(y)$ in eine iterierte Abbildung $y_{n+1} = g(y_n)$, die sogenannte Poincaré-Abbildung. Die iterierte Abbildung eines chaotischen Attraktors lässt sich numerisch ermitteln. Am im nichtperiodischen Fall ein kompakter Bereich auf der Poincaré-Ebene abgetastet wird, genügt es, die numerisch ermittelte Folge y_n gegen y_{n+1} aufzutragen, um eine graphische Darstellung der Funktion $g(y_n)$ zu erhalten.

Die Einführung einer Poincaré-Ebene bedeutet in gewisser Weise immer eine Vereinfachung, da die Phasenraumdimension der auf ihr definierten iterierten Abbildung um den Wert eins kleiner ist als die des eigentlichen Systems. Manche Aspekte der Dynamik offenbaren sich in der iterierten Darstellung besser. Mit-

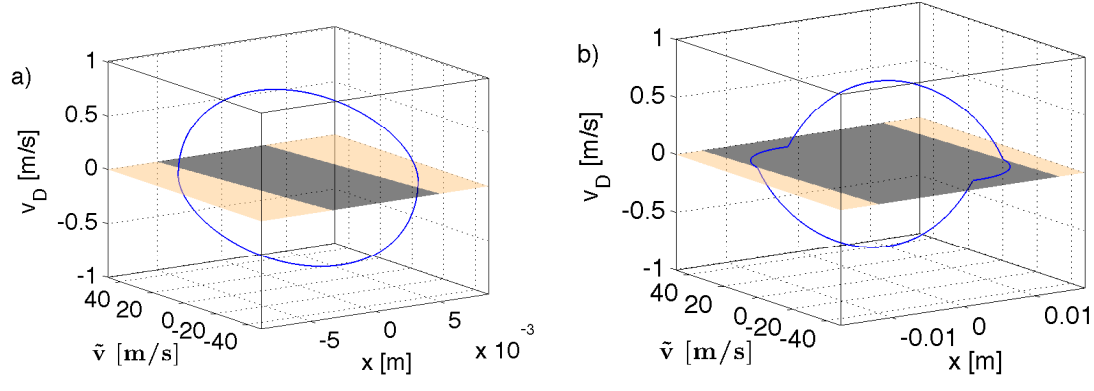


Abbildung 6.16: Phasenraumauftragungen für Erregerfrequenzen dicht an $\hat{\omega}_2$. a) $G = 100\text{m/s}^2$, $\omega_{\text{ext}}/2\pi = 16.5\text{Hz}$. b) $G = 300\text{m/s}^2$, $\omega_{\text{ext}}/2\pi = 15.4\text{Hz}$.

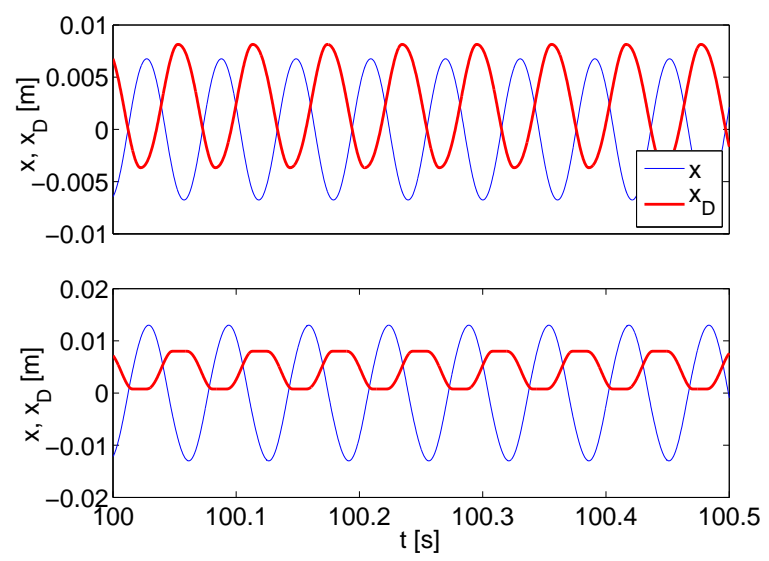


Abbildung 6.17: Zeitreihen zu Abb. 6.16.

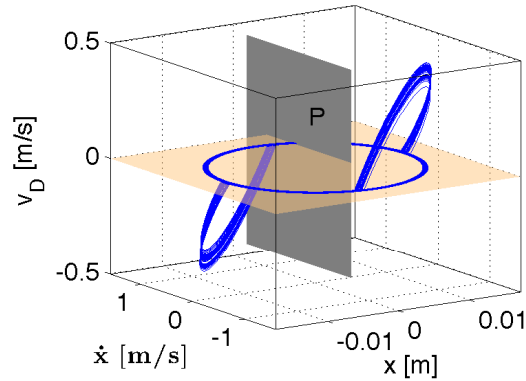


Abbildung 6.18: Lage der in Gl. (6.15) definierten Poincaré-Ebene P im Phasenraum.

unter lässt sich, bei geeigneter Topologie des Attraktors, durch geschickte Wahl der Ebene sogar noch eine weitere Reduktion erzielen. So ist zum Beispiel der Rössler-Attraktor stellenweise so gestaucht, dass die parallel verlaufenden Trajektorien sich fast in einer Ebene befinden. Durch die Platzierung der Poincaré-Ebene an einer solchen Stelle lässt sich das eigentlich dreidimensionale Rössler-System in guter Näherung in eine eindimensionale iterierte Abbildung überführen [54]. Die Betrachtung der Poincaré-Abbildung erleichtert oft das Verständnis des Gesamtsystems, indem sie die innere Struktur chaotischer Attraktoren anschaulicher macht. Zweckmäßig in vielen Fällen ist vor allem die Untersuchung der symbolischen Dynamik des Systems. Dafür unterteilt man die Poincaré-Abbildung sinnvoll in Partitionen und betrachtet, welche Partitionen wie oft und in welcher Reihenfolge unter Iteration der Abbildung angesteuert werden. Ein Beispiel für eine solche Analyse anhand des Rössler-Attraktors findet sich in dem Manuskript zu einem Vortrag, den TUFILLARO [54] am Institut für Mathematik und ihre Anwendungen der Universität von Minnesota hielt. In [55] präsentiert er ein Beispiel für eine physikalische Anwendung anhand der Untersuchung einer chaotisch schwingenden Saite.

Auch für den hier untersuchten Oszillator bietet sich der Versuch einer solchen Analyse an, denn auf seinen chaotischen Attraktoren gibt es Bereiche, an denen alle Trajektorien sich nicht nur näherungsweise, sondern sogar exakt in einer Ebene befinden, und zwar auf der Gleitebene $\hat{\Sigma}$. Eine geeignete Poincaré-Ebene ist definiert durch

$$P = \{y \in (x, \dot{x}, v_D) : x = 0,005 \text{ m}; \dot{x} > 0\} \quad (6.15)$$

(siehe Abb.6.18). Wir verwenden wieder die gleichen Parameter, mit denen im vorigen Abschnitt die Abb.6.9 erstellt wurde und betrachten nacheinander die vier in Abb.6.19 markierten Erregerfrequenzen, unter denen die Dynamik des Systems chaotisch ist.

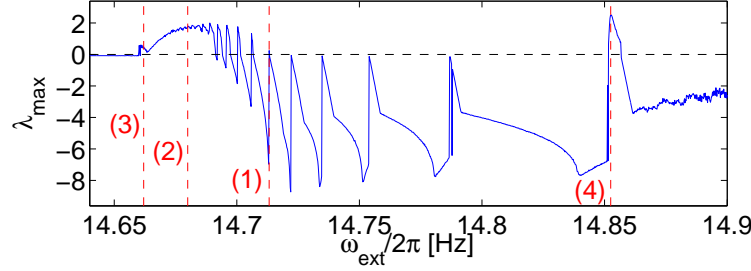


Abbildung 6.19: Ausschnitt aus der Auftragung von λ_{max} in Abb. 6.9 mit Markierung der vier chaotischen Stellen, deren symbolische Dynamik untersucht werden soll.

Im Folgenden sei v_n^p der \dot{x} -Wert des n -ten Durchstoßpunktes auf P . Zuerst betrachtet sei der Fall $\omega_{ext}/2\pi = 14,7132$ Hz, in Abb. 6.19 hervorgehoben durch Markierung 1. Wie in der Abbildung zu sehen, gehört er zu einem sehr schmalen chaotischen Fenster und in der Kaskade von Mehrfachgleitbifurkationen zu der letzten, die überhaupt noch einen chaotischen Attraktor erzeugt (abgesehen von der an Markierung 4, die, wie am Ende dieses Kapitels gezeigt wird, einen Sonderfall darstellt und nicht in besagte Kaskade einzuordnen ist). Abb. 6.20 zeigt die numerisch ermittelte iterierte Abbildung $g : v_n^p \rightarrow v_{n+1}^p$ des Attraktors bezüglich der Ebene P zusammen mit 50 Iterationen. Wie in der Auftragung zu erkennen, ist die Abbildung keineswegs eindeutig definiert. Der Grund dafür ist die Existenz eines Erregerterms in den Bewegungsgleichungen. Um die Zeitentwicklung des Systems eindeutig festzulegen, ist die Kenntnis der Eingangswerte $(x^{init}, \dot{x}^{init}, v_D^{init})$ allein nicht hinreichend, sondern es muss auch die Eingangsphase der externen Anregung, Φ^{init} , gegeben sein. Die dadurch verursachte Streuung ist allerdings klein genug, um die Abbildung durch eine eindimensionale Funktion zu approximieren. Eine gute Näherung ist gegeben durch folgende Funktion (in Abb. 6.20 dargestellt durch eine rote Kurve):

$$v_{n+1}^p = \begin{cases} a_1 v_n^{p2} + b_1 v_n^p + c_1 & \text{für } s_0 \leq v_n^p < s_1 \\ \frac{1}{a_2(v_n^p - b_2)^{c_2}} + d_2 & \text{für } s_1 \leq v_n^p < s_2 \\ \frac{1}{a_3(v_n^p - b_3)^{c_3}} + d_3 & \text{für } s_2 \leq v_n^p \leq s_3 \end{cases} \quad (6.16)$$

mit den Parametern wie folgt:

$a_1 = -2,2845$	$a_2 = 25\,000$	$a_3 = 20\,000$	$s_0 = 1,0550$
$b_1 = 6,1437$	$b_2 = 1,1029$	$b_3 = 1,1149$	$s_1 = 1,1058$
$c_1 = -2,8672$	$c_2 = 0,9806$	$c_3 = 1,0260$	$s_2 = 1,1190$
	$d_2 = 1,0531$	$d_3 = 1,0600$	$s_3 = 1,1335$

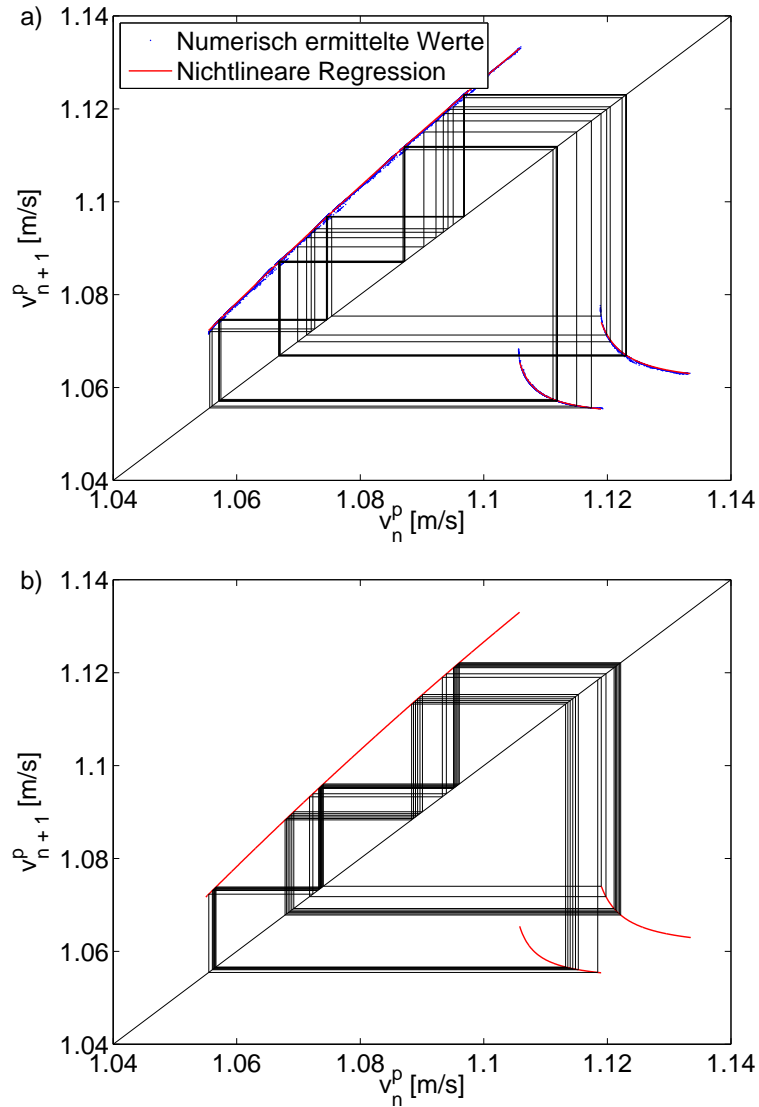


Abbildung 6.20: a) Numerisch ermittelte iterierte Abbildung für Erregerfrequenz $\omega_{\text{ext}}/2\pi = 14,7132$ Hz mit nichtlinearer Regression gemäß Gl. (6.16). Die gezeigten 50 Iterationen beziehen sich auf die numerischen Werte. b) Die letzten 50 von insgesamt 550 Iterationen der genäherten iterierten Abbildung (6.16) für $v_1^p = 1,11$ m/s.

Die Einheiten dimensionsbehafteter Parameter wurden aus Gründen der Übersichtlichkeit ausgelassen. Alle aufgeführten Werte beziehen sich auf ihre metrischen Grundeinheiten.

Die Dynamik dieser idealisierten Funktion zeigt die untere Auftragung in Abb. 6.20. Im Vergleich ist zu sehen, dass sie die Dynamik der tatsächlichen Poincaré-Abbildung, wie sie in der Auftragung darüber zu sehen ist, in ihren Grundzügen gut rekonstruiert.

Die iterierte Dynamik folgt einem festen, sich beständig wiederholenden Schema. Der Wert von v_n^p arbeitet sich zunächst an dem ansteigenden Zweig im Intervall $[s_0, s_1)$ hoch, um dann von einem der beiden hyperbolischen Bögen zurückgeworfen zu werden. Die Bögen sind für die Faltung verantwortlich, die eine chaotische Dynamik ermöglicht. Damit wird die iterierte Abbildung (6.16) auch physikalisch anschaulich. Der ansteigende Zweig repräsentiert die Haftbewegung auf der Gleitebene, die ja durch eine stetig ansteigende Amplitude gekennzeichnet ist, und die zwei Bögen auf den Intervallen $[s_1, s_2)$ und $[s_2, s_3]$ die Rutschphasen. Innerhalb dieser Intervalle ist die Schwingungsamplitude also so groß, dass es innerhalb der anschließenden Periode zur Ablösung des Reibelements kommen wird. Die zwei Bögen entsprechen dabei den zwei Seiten der Gleitebene, auf denen es zur Ablösung kommen kann. Man beachte, dass an keiner Stelle die Bedingung $v_n^p = v_{n+1}^p$ erfüllt ist. Innerhalb des chaotischen Attraktors gibt es also keine instabilen Periode-1-Orbits.

Weitere Erkenntnisse über die Dynamik des Attraktors lassen sich durch eine statistische Betrachtung der symbolischen Dynamik erarbeiten. Dazu unterteilt man das zu untersuchende iterierte System $y_n \rightarrow y_{n+1}$ in geeignete Partitionen A, B, C, \dots , sodass sich jeder Iterationsschritt eindeutig einer Partition zuordnen lässt. Für das idealisierte System (6.16) böte sich zum Beispiel eine Einteilung in drei Partitionen A, B, C an, wobei jede einem der drei Definitionsintervalle entspräche. Für das reale, nicht idealisierte System ist diese Einteilung aber nicht eindeutig, weil die Intervalle sich an ihren Rändern überlappen. Zweckmäßiger ist hier eine Unterteilung in Planfelder, wie in Abb. 6.21 auf der linken Seite gezeigt. Ist eine eindeutige Einteilung in Partitionen erst gegeben, lässt sich jedem Anfangswert y_1 eine Symbolfolge $S(y_1)$ zuordnen, indem jeder folgende Iterationsschritt durch die Bezeichnung seiner zugehörigen Partition ersetzt wird. So gilt zum Beispiel für die in Abb. 6.21 gezeigte Einteilung $S(1,06 \text{ m/s}) = \{A, A, A, C, A, \dots\}$. Fasst man Symbolfolgen bestimmter endlicher Länge zu sogenannten Wörtern zusammen, kann man eine Statistik über die relativen Häufigkeiten bestimmter Sequenzen erstellen.

Infolge der Einteilung in drei Partitionen ergeben sich bei einer Wortlänge von drei Symbolen 27 mögliche Wörter, deren Wahrscheinlichkeiten, ermittelt aus einer Sequenz von 730 000 Iterationen, auf der rechten Seite von Abb. 6.21 aufgetragen sind. Spätestens hier zeigt sich, dass die chaotische Dynamik des Attraktors global betrachtet sehr geordnet verläuft. Eine ganze Klasse der denkbaren Wörter kommt gar nicht erst vor, und zwar all diejenigen, die einer di-

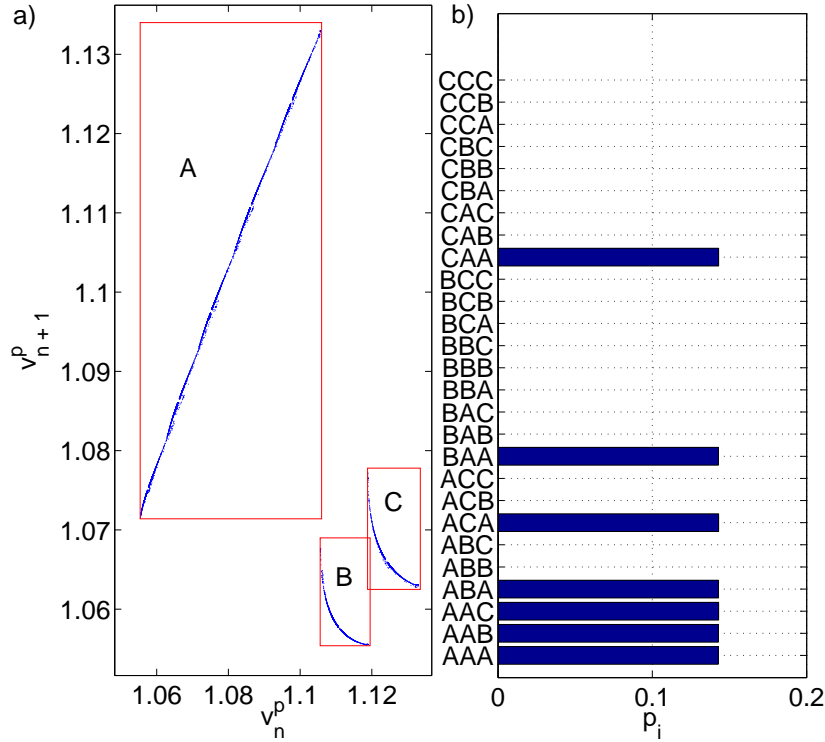


Abbildung 6.21: a) Einteilung der aus der kontinuierlichen Systemdynamik ermittelten iterierten Funktion in symbolische Partitionen. b) Wahrscheinlichkeiten aller denkbaren Symbolfolgen bei einer Wortlänge von drei.

rekten oder indirekten Abbildung der Partitionen A und B aufeinander oder auf sich selbst entsprechen. Oder anders ausgedrückt: Von drei aufeinanderfolgenden Iterationen liegen immer mindestens zwei in der Partition A . Die Unterschiede in der Häufigkeit der vorkommenden Wörter sind, sofern überhaupt vorhanden, minimal.

Wie in Abb. 6.20 bereits zu erahnen, verläuft die Dynamik des Attraktors in globaler Hinsicht also nach einem recht starren Muster. Nach jeweils zwei oder drei reinen Haftperioden folgt eine einzelne Periode mit genau einer Rutschphase. Entsprechend gering ist der Informationsgehalt der symbolischen Dynamik. Die normierte Shannon-Entropie der in Abb. 6.21 gezeigten Verteilung beträgt

$$\bar{H} = -\frac{1}{\log_2 27} \sum_{i=1}^{27} p_i \log_2 p_i = 0,144. \quad (6.17)$$

Als nächstes betrachtet sei der Fall einer Erregerfrequenz von $\omega_{\text{ext}}/2\pi = 14,68$ Hz (Markierung 2 in Abb. 6.19). Die Frequenz gehört zu jenem durchgängig chaotischen Intervall am linken Rand des Nichtlinearen Regimes, innerhalb dessen die Mehrfachleitbifurkationen zu dicht aufeinander folgen, um Raum für peri-

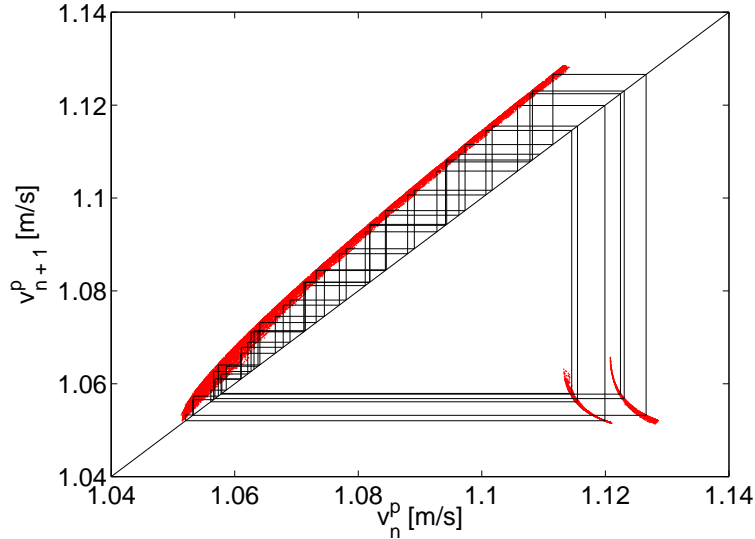


Abbildung 6.22: Poincaré-Abbildung für $\omega_{\text{ext}}/2\pi = 14,68$ Hz mit 50 Iterationsschritten.

odische Fenster zu lassen. Die Verschmierung der zugehörigen iterierten Abbildung (Abb. 6.22) ist in diesem Bereich sehr viel stärker als im zuletzt untersuchten Fall. Eine Idealisierung durch eine eindimensionale Abbildung ist deshalb kaum sinnvoll. Auch ist die Überlappung der einzelnen Zweige zu stark, um sie, wie in Abb. 6.21 durch rechteckige Planfelder eindeutig zuzuordnen. Stattdessen definieren wir wie in Abb. 6.23 gezeigt die Geraden $a(v^p) = v^p$ und $b(v^p) = -3,965v^p + 5,5$ m/s und bezeichnen

- mit A alle Punkte, die oberhalb von a liegen,
- mit B alle Punkte, die unterhalb von a und b liegen,
- mit C alle Punkte, die unterhalb von a , aber oberhalb von b liegen.

Die Dynamik folgt dem gleichen Grundschema wie im zuletzt untersuchten Fall 1, wobei sie aber, entsprechend dem langsameren Anwachsen der Amplitude während der Haftphase, länger auf dem parabolischen Zweig verbleibt. Dies führt zu einer Häufung der Sequenz AAA (Abb. 6.23) und damit zu einer noch geringeren Entropie. Ihr Wert beträgt $\bar{H} = 0,097$.

Bei einer Erregerfrequenz von $\omega_{\text{ext}}/2\pi = 14,662$ Hz (Markierung 3 in Abb. 6.19) wird die Verschmierung so stark, dass eine sinnvolle Einteilung in Partitionen in der eindimensionalen Darstellung kaum noch möglich ist (Abb. 6.24). Zudem kommt es auch zu einer grundlegenden Änderung der Dynamik derart, dass auf jeden Faltungsvorgang zunächst eine Phase abnehmender Amplitude folgt. Letztere ist aber nicht unmittelbar auf Reibungsdämpfung zurückzuführen, sondern

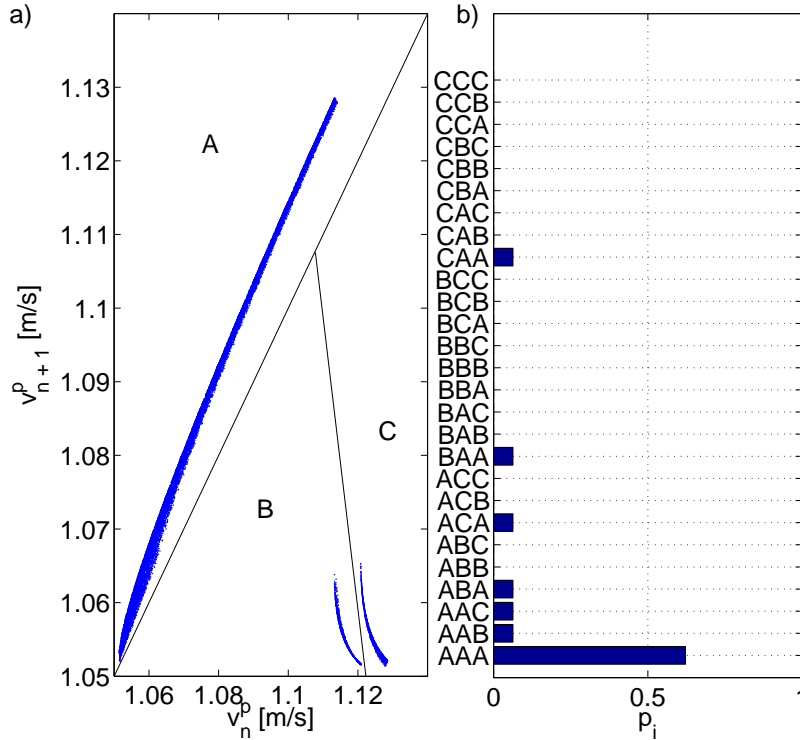


Abbildung 6.23: a) Einteilung der Funktion aus Abb. 6.22 in Partitionen. b) Wahrscheinlichkeiten aller denkbaren Wörter der Länge drei.

es handelt sich um einen Einschwingvorgang, wie aus der Zeitreihendarstellung unter der Abbildung ersichtlich ist.

Als letzten Fall betrachten wir die Frequenz $\omega_{\text{ext}}/2\pi = 14,8525$ Hz (Markierung 4 in Abb. 6.19). Hierbei handelt es sich um denselben Attraktor, der bereits in Abb. 6.14 auf der rechten Seite als Phasenraumaufragung zu sehen war. Er gehört zu jenem letzten chaotischen Fenster in der Kaskade von Mehrfachgleitbifurkationen, das sich schon durch seine Lage von den anderen abhebt. Alle Übrigen liegen dicht am linken Rand des Nichtlinearen Regimes. Grenzkollisionen, die sich mehr in der Mitte des NLRs ereignen, leiten ansonsten keine chaotischen Fenster mehr ein.

Ein Blick auf die Poincaré-Abbildung (Abb. 6.25) macht dann auch sofort ersichtlich, dass das Chaos in diesem Fenster völlig anders geartet ist. Die Attraktoren der zuletzt betrachteten Fälle wiesen alle eine Topologie auf, die in ihrer Schlichtheit an den klassischen Rössler-Attraktor erinnert: Eine Trajektorie windet sich auf einer zweidimensionalen Ebene spiralförmig nach außen und wird schließlich, bei Erreichen einer kritischen Amplitude, zurück ins Innere der Ebene geworfen. Dieser Rückwurf, der sich im Falle des hier untersuchten Systems physikalisch als Rutschbewegung der aufliegenden Masse m_D deuten lässt, ist für jene fortlaufende Faltung des Phasenraumvolumens verantwortlich, die chaoti-

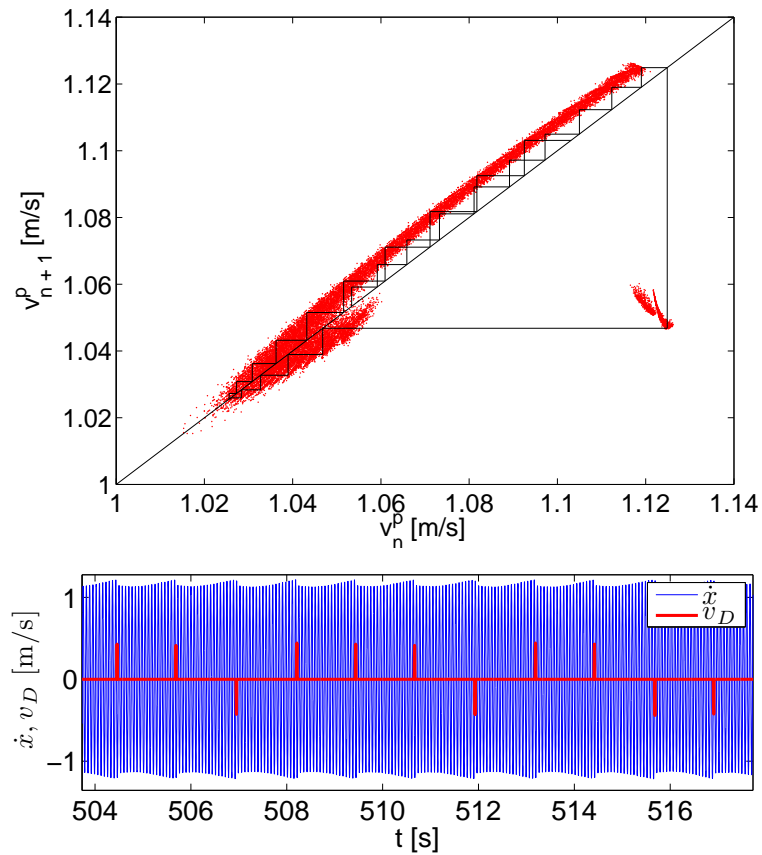


Abbildung 6.24: Oben: Numerisch ermittelte Poincaré-Abbildung für $\omega_{\text{ext}}/2\pi = 14,662$ Hz mit 25 Iterationen. Unten: Zeitreihendarstellung desselben Attraktors.

sche Dynamik ermöglicht. Im Falle des vorliegenden Attraktors ist die Dynamik aber derart, dass die aufliegende Masse innerhalb fast jeder Periode einmal ins Rutschen gerät (siehe die Zeitreihendarstellung in Abb. 6.25), ohne dass dies im Vergleich zur jeweils vorangehenden Periode zu einer Abnahme der Amplitude führen würde. Diese befindet sich vielmehr in einem stabilen Gleichgewicht. Der chaotische Attraktor positioniert sich um zwei instabile periodische Orbits (in der Poincaré-Darstellung definiert durch die Schnittpunkte der iterierten Abbildung mit der Einheitsgeraden), in deren Nähe die Trajektorie sich immer zunächst befindet, sich aber in einer Oszillationsbewegung immer mehr entfernt, sich schließlich von ihr löst und daraufhin an den jeweils anderen periodischen Orbit weitergereicht wird. Dieser Aufbau des Attraktors aus zwei Flügeln, die sich unter Zeitentwicklung die Trajektorie gegenseitig zuspieren, erinnert an den Lorenz-Attraktor, wobei aber in diesem Fall die Flügel ineinander verschachtelt sind, statt die bekannte Schmetterlingsform zu bilden (Abb. 6.26).

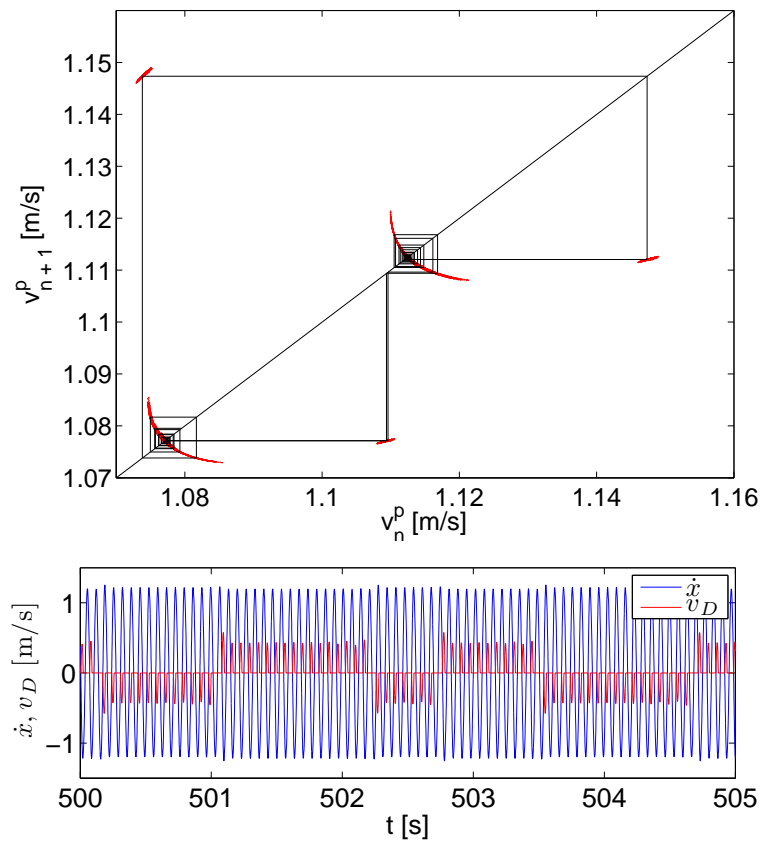


Abbildung 6.25: Numerisch ermittelte Poincaré-Abbildung für $\omega_{\text{ext}}/2\pi = 14,8525$ Hz mit 50 Iterationen. Darunter die Zeitreihendarstellung desselben Attraktors.

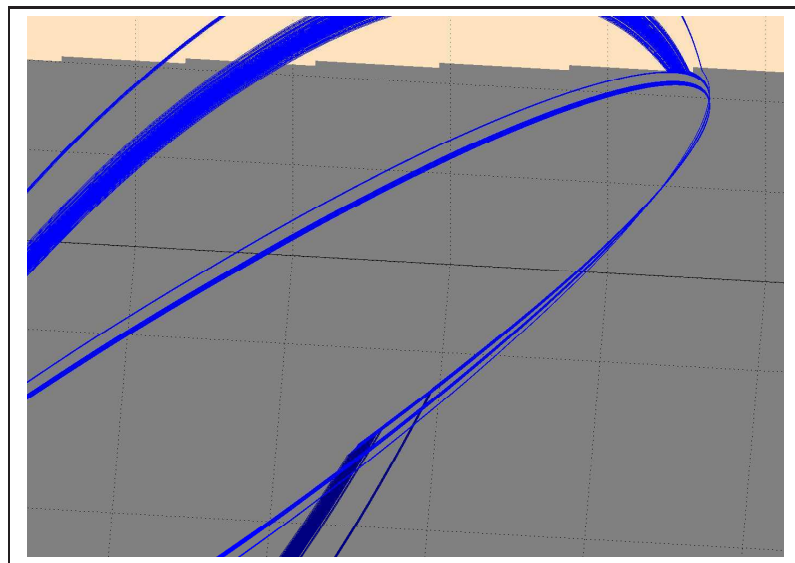


Abbildung 6.26: Nahaufnahme des chaotischen Attraktors in Abb. 6.14 unter verändertem Kamerawinkel, die seine verschachtelte Struktur sichtbar macht.

Kapitel 7

Koexistierende Attraktoren

7.1 Symmetrieeigenschaften

Ein dynamisches System $\dot{y} = F(y)$ heißt symmetrisch bezüglich einer Transformation \widehat{T} , wenn $\widehat{T}F(y) = F(\widehat{T}y) \forall y \in \mathbb{R}^n$. Attraktoren von Systemen mit einer Symmetrie sind häufig selbst symmetrisch bezüglich \widehat{T} . Andernfalls koexistiert ein Partnerattraktor, so dass ein Attraktor sich durch Anwendung von \widehat{T} in den anderen überführen lässt. Geht ein symmetrischer Attraktor aufgrund einer kleinen Variation eines Kontrollparameters in einen asymmetrischen über, spaltet er sich also in zwei koexistierende Attraktoren auf. Besagtes Szenario, bekannt als Symmetriebruchbifurkation, lässt sich zum Beispiel am Duffing-Oszillator beobachten [38, 39].

Der in Kap. 3 vorgestellte Oszillator ist symmetrisch bezüglich einer Punktspiegelung am Ursprung des Phasenraums, abgesehen von einer physikalisch bedeutungslosen Verschiebung der Erregerphase um den Wert π . Es existiert demnach zu jedem asymmetrischen Attraktor ein Spiegelattraktor, der aber hinsichtlich seiner Zeitentwicklung gegenüber seinem Partner um eine halbe Erregerperiode verschoben ist. Unter Verwendung der in Kap. 5.4 eingeführten vierdimensionalen Beschreibung $y(t) = (x, v, v_D, \Phi)$ lässt diese Symmetrie sich folgendermaßen ausdrücken: Gegeben seien die Transformationen

$$\widehat{T}_1 : \begin{pmatrix} x \\ v \\ v_D \\ \Phi \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ v \\ v_D \\ \Phi + \pi \end{pmatrix} \quad (7.1)$$

und

$$\widehat{T}_2 : \begin{pmatrix} x \\ v \\ v_D \\ \Phi \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -x \\ -v \\ -v_D \\ \Phi \end{pmatrix}, \quad (7.2)$$

wobei die zweite sich als Matrix darstellen lässt:

$$\widehat{T}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.3)$$

Dann gilt folgende Symmetrie:

$$F(\widehat{T}_1 \widehat{T}_2 y) = \widehat{T}_2 F(y). \quad (7.4)$$

Da das Vektorfeld y je nach Bewegungszustand der rutschenden Masse unterschiedlich definiert ist, geschieht der Beweis durch eine Fallunterscheidung. Wir betrachten zunächst den Fall $v_D \neq 0$. Das System befindet sich dann im Rutschzustand und wird, je nach Vorzeichen von v_D , beschrieben durch die Gleichungen (5.12) bzw. (5.13), die sich zusammenfassend auch in folgender Form darstellen lassen:

$$F(y) = \begin{pmatrix} v \\ (B \sin \Phi - dv - kx + \operatorname{sgn}(v_D) \mu(v_D) F_0)/m \\ -\operatorname{sgn}(v_D) \mu(v_D) F_0 \left(\frac{1}{m_D} + \frac{1}{m} \right) - (B \sin \Phi - dv - kx)/m \\ \omega_{\text{ext}} \end{pmatrix} \quad \text{für } v_D \neq 0, \quad (7.5)$$

so dass

$$\begin{aligned} \widehat{T}_2 F(y) &= \begin{pmatrix} -v \\ (-B \sin \Phi + dv + kx - \operatorname{sgn}(v_D) \mu(v_D) F_0)/m \\ \operatorname{sgn}(v_D) \mu(v_D) F_0 \left(\frac{1}{m_D} + \frac{1}{m} \right) - (-B \sin \Phi + dv + kx)/m \\ \omega_{\text{ext}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -v \\ (B \sin(\Phi + \pi) + dv + kx + \operatorname{sgn}(-v_D) \mu(-v_D) F_0)/m \\ -\operatorname{sgn}(-v_D) \mu(-v_D) F_0 \left(\frac{1}{m_D} + \frac{1}{m} \right) - (B \sin(\Phi + \pi) + dv + kx)/m \\ \omega_{\text{ext}} \end{pmatrix} \\ &= F(\widehat{T}_1 \widehat{T}_2 y), \end{aligned} \quad (7.6)$$

Die Symmetrie ist außerhalb der Diskontinuitätsebene $\Sigma : v_D = 0$ also erfüllt. Bei der Umformung wurde ausgenutzt, dass die Reibungscharakteristik $\mu(v_D)$ laut Gl. (3.5) achsensymmetrisch ist, so dass sie jederzeit durch $\mu(-v_D)$ ersetzt werden darf. Der Fall $v_D = 0$ ist ein wenig komplizierter, weil hier wiederum zwischen zwei Vektorfeldern unterschieden werden muss: dem auf der Gleitebene und dem außerhalb liegenden. Auf der Gleitebene gelten die Bewegungsgleichungen (5.16)

für den Haftfall, so dass

$$\begin{aligned}
\widehat{T}_2 F(y) &= \begin{pmatrix} -v \\ (-B \sin \Phi + dv + kx)/(m + m_D) \\ 0 \\ \omega_{\text{ext}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -v \\ (B \sin(\Phi + \pi) + dv + kx)/(m + m_D) \\ 0 \\ \omega_{\text{ext}} \end{pmatrix} \\
&= F(\widehat{T}_1 \widehat{T}_2 y) \quad \text{für } v_D = 0, y \in \widehat{\Sigma}.
\end{aligned} \tag{7.7}$$

Außerhalb der Gleitebene hingegen ist das Vektorfeld wie folgt:

$$F(y) = \begin{pmatrix} v \\ (B \sin \Phi - dv - kx - \xi \mu_0 F_0)/m \\ \xi \mu_0 F_0 \left(\frac{1}{m_D} + \frac{1}{m} \right) - (B \sin \Phi - dv - kx)/m \\ \omega_{\text{ext}} \end{pmatrix} \quad \text{für } v_D = 0, y \notin \widehat{\Sigma}. \tag{7.8}$$

Dies sind wiederum die Bewegungsgleichungen für den Rutschfall. Aufgrund der Definition (3.6) ist der Betrag der trockenen Reibung gegeben durch $\mu(v_D = 0)F_0 = \mu_0 F_0$, und ihr Vorzeichen ξ ist festgelegt durch Gl. (3.2). In ausgeschriebener Form liegt auf der Diskontinuitätsebene außerhalb der Gleitebene also folgendes Vektorfeld vor:

$$F(y) = \begin{pmatrix} v \\ (B \sin \Phi - dv - kx - \text{sgn}(B \sin \Phi - dv - kx) \mu_0 F_0)/m \\ \text{sgn}(B \sin \Phi - dv - kx) \mu_0 F_0 \left(\frac{1}{m_D} + \frac{1}{m} \right) - (B \sin \Phi - dv - kx)/m \\ \omega_{\text{ext}} \end{pmatrix}, \tag{7.9}$$

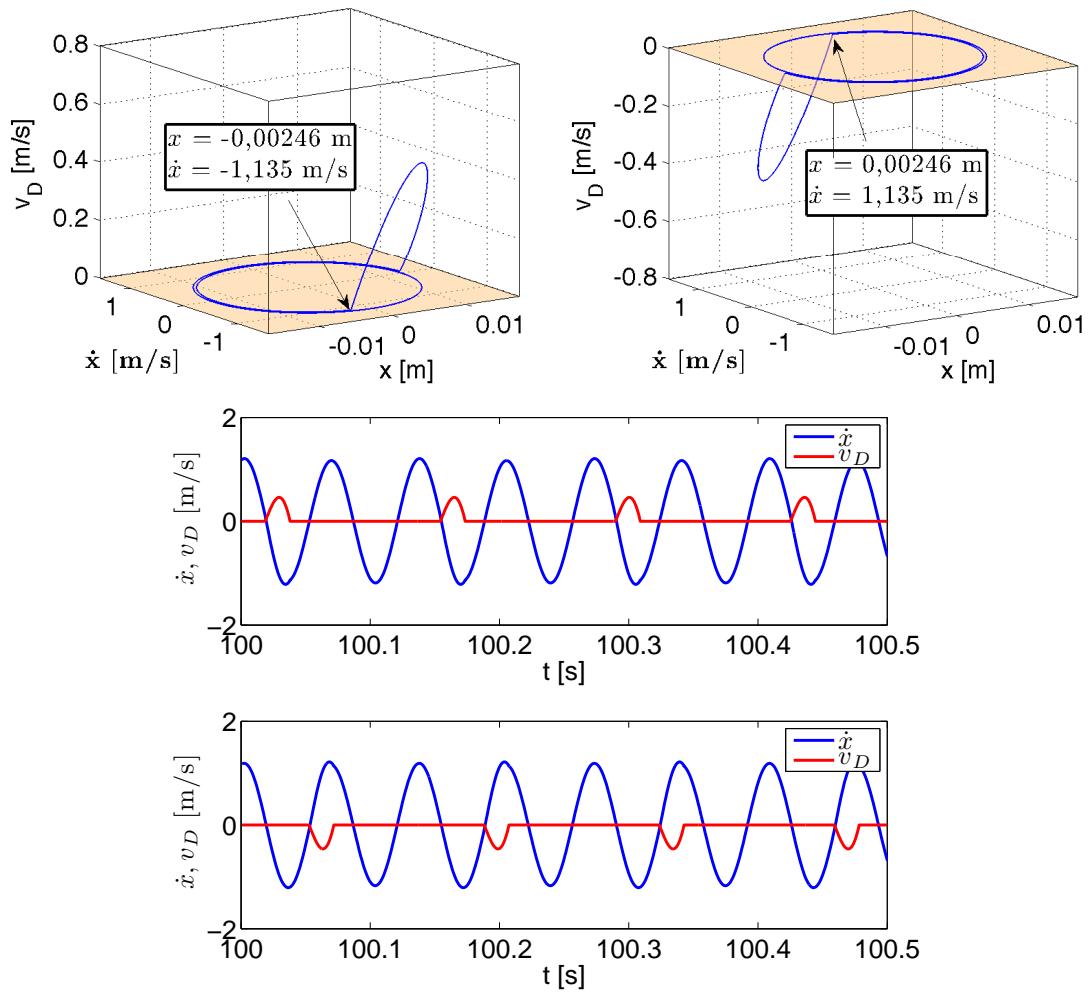


Abbildung 7.1: Beispiel für zwei koexistierende asymmetrische Partnerattraktoren. Die Parameter entsprechen denen aus Abb. 6.9 bei einer Erregerfrequenz von 14,76 Hz. Die Betrachtung zweier ausgezeichnete Punkte in der Phasenraumdarstellung, hier der jeweilige Aufschlagpunkt auf der Gleitebene, zeigt die exakte Ursprungssymmetrie. Die Phasenverschiebung zwischen den beiden Orbits ist nur in der Zeitreihendarstellung erkennbar.

welches ebenfalls die eingangs vorgestellte Symmetrie aufweist:

$$\begin{aligned}
\widehat{T}_2 F(y) &= \\
&\left(\begin{array}{c} -v \\ (-B \sin \Phi + dv + kx + \operatorname{sgn}(B \sin \Phi - dv - kx)\mu_0 F_0)/m \\ -\operatorname{sgn}(B \sin \Phi - dv - kx)\mu_0 F_0 \left(\frac{1}{m_D} + \frac{1}{m} \right) - (-B \sin \Phi + dv + kx)/m \\ \omega_{\text{ext}} \end{array} \right) = \\
&\left(\begin{array}{c} -v \\ (B \sin(\Phi + \pi) + dv + kx - \operatorname{sgn}(B \sin(\Phi + \pi) + dv + kx)\mu_0 F_0)/m \\ \operatorname{sgn}(B \sin(\Phi + \pi) + dv + kx)\mu_0 F_0 \left(\frac{1}{m_D} + \frac{1}{m} \right) - (B \sin(\Phi + \pi) + dv + kx)/m \\ \omega_{\text{ext}} \end{array} \right) \\
&= F(\widehat{T}_1 \widehat{T}_2 y).
\end{aligned} \tag{7.10}$$

Wenn aber die behauptete Symmetrie für beide auf Σ definierten Vektorfelder erfüllt ist, dem auf der Gleitebene liegenden für den Haftfall und dem außerhalb liegenden, das den Rutschfall beschreibt, dann gilt sie auch für das Gesamtfeld. Die Übergangsbedingung (5.19) ist nämlich indifferent gegenüber der Transformation $\widehat{T}_1 \widehat{T}_2$, wie sich durch einfaches Einsetzen leicht überprüfen lässt. Ein transformierter Zustandsvektor $\widehat{T}_1 \widehat{T}_2 y \in \Sigma$ liegt folglich genau dann außerhalb der Gleitebene, wenn sein Partnervektor y das auch tut.

Die Symmetrie (7.4) ist also für jeden Zustandsvektor y des Systems erfüllt, was zu beweisen war. Zu jedem asymmetrischen Attraktor des Systems existiert demnach ein Partnerattraktor, der sich im (x, \dot{x}, v_D) -Raum durch eine Punktspiegelung am Ursprung ergibt.

Ein Beispiel anhand eines asymmetrischen Grenzyklus der Periode 2 zeigt Abb. 7.1. In der Phasenraumdarstellung erscheinen beide Attraktoren als exakte Punktspiegelungen voneinander. Erst ein Vergleich der zugehörigen Zeitreihen, hier anhand der Geschwindigkeiten von schwingender und gleitender Masse dargestellt, macht die Phasenverschiebung zwischen beiden sichtbar.

7.2 Hysterese

Die Gleitbifurkation, die den Eintritt ins Nichtlineare Regime (NLR) der Resonanzkurve markiert, bewirkt nicht nur eine Änderung der Systemdynamik, sondern vor allem eine Änderung der Bewegungsgleichungen des Systems selbst. Rein mathematisch betrachtet liegen zwei ganz unterschiedliche dynamische Systeme vor, je nachdem, ob die Erregerfrequenz innerhalb oder außerhalb des Nichtlinearen Regimes liegend gewählt wird. Demzufolge sollte die Stelle, an der die Bifurkation stattfindet, nicht eindeutig sein. Die durch Gl. (6.9) gegebenen Grenzen beruhen auf der Annahme eines linearen Oszillators. Ein solcher ist aber nur

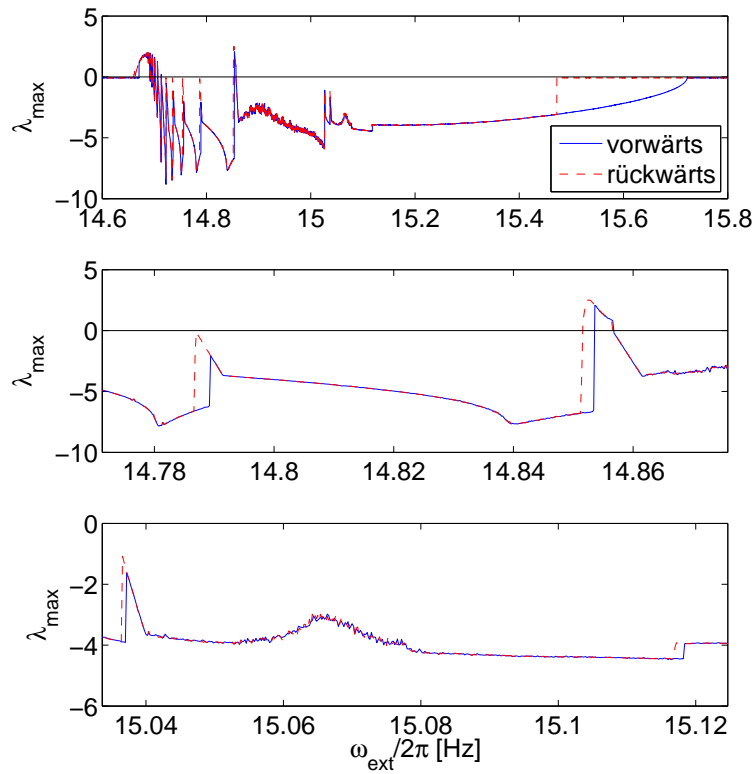


Abbildung 7.2: Ganz oben: Ljapunow-Exponent im Nichtlinearen Regime der in Abb. 6.9 gezeigten Resonanzkurve mit variablen, an den jeweiligen Vorgänger anschließenden Eingangswerten. Darunter zwei Ausschnittsvergrößerungen. An vielen Stellen einer Gleitbifurkation, die Ränder des Nichtlinearen Regimes einbezogen, ergibt sich je nach Variationsrichtung des Kontrollparameters ein unterschiedlicher Kurvenverlauf.

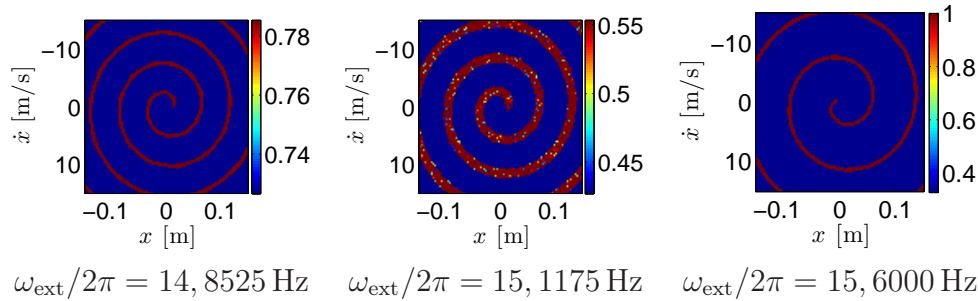


Abbildung 7.3: Relative Haftzeit der eingeschwungenen Oszillation in Abhängigkeit der Eingangswerte für drei verschiedene Erregeramplituden aus Abb. 7.2, bei denen aufgrund von Hysterese mindestens zwei Attraktoren koexistieren. Für alle drei Diagramme gilt $v_D^{\text{init}} = \Phi^{\text{init}} = 0$.

außerhalb des NLRs gegeben. Nähert man sich der Grenze von innen heraus an, so gibt es keinen Grund, warum diese mit der durch Gl. (6.9) gegebenen identisch sein sollte. Ebenso wenig darf für die innerhalb des NLRs stattfindenden Gleitbifurkationen Eindeutigkeit vorausgesetzt werden.

Tatsächlich kommt es, zusätzlich zu den bei Asymmetrie auftretenden Partnerattraktoren, in der Nähe von Gleitbifurkationen zur Koexistenz zweier Attraktoren. Sie lässt sich sichtbar machen, indem man wie in Kap. 6.3 eine Kenngröße des Attraktors über die Erregerfrequenz aufträgt. Wird dann bei der Integration der Bewegungsgleichungen nach jeder Änderung des Kontrollparameters ω_{ext} an den Orbit des Vorgängerwertes angeschlossen, statt auf einen im Vorfeld festgelegten Startpunkt im Phasenraum zurückzusetzen, kommt es zur Hysterese. Auf diese Weise startet die Integration nämlich mit hoher Wahrscheinlichkeit im Einzugsgebiet des Attraktors, auf dem sie sich schon im vorigen Variationsschritt befand. Formiert sich ein neuer Attraktor zusätzlich zu dem bereits existierenden, so wird es ihm erst relativ spät gelingen, die Trajektorie einzufangen. Bei welchem Wert des Kontrollparameters es zum Wechsel kommt, hängt also davon ab, von welcher Seite aus die Annäherung geschieht. Ermittelt man zum Beispiel die in Abb. 6.9 gezeigte Kurve von λ_{max} zwei mal nach der eben beschriebenen Methode, einmal vorwärts und einmal rückwärts, und vergleicht die beiden Kurven (Abb. 7.2), so zeigt sich Hysterese an beiden Rändern des NLRs sowie – sichtbar in den Detailvergrößerungen – an vielen Stellen einer Gleitbifurkation.

7.3 Phasenraumabtastung

Mittels einer systematischen Abtastung des Phasenraums lässt sich überprüfen, ob neben den koexistierenden Attraktoren, die sich durch Hysterese und Asymmetrie ergeben, noch weitere existieren. Dazu legt man ein Raster über den Phasenraum, benutzt nacheinander jeden Gitterpunkt als Eingangsbedingung und er-

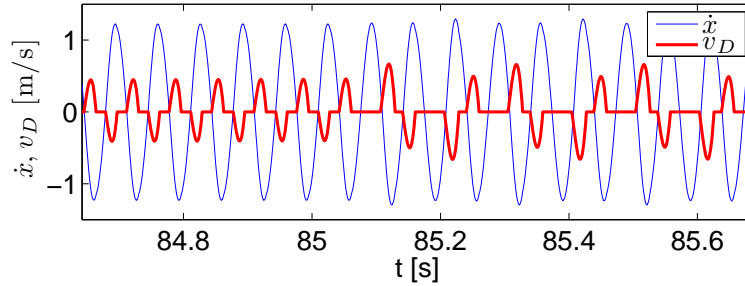


Abbildung 7.4: Beispiel für einen spontanen Wechsel zwischen zwei koexistierenden Attraktoren durch numerisches Rauschen.

mittelt jeweils eine charakteristische Größe des Attraktors, gegen den die Schwingung konvergiert. Auf diese Weise ergibt sich eine Karte der Einzugsgebiete aller existierenden Attraktoren.

Abb. 7.3 zeigt eine solche Auftragung für drei verschiedene Erregerfrequenzen an denen laut Abb. 7.2 Hysterese vorliegt. Charakteristische Größe ist die relative Haftzeit, die als Farbskala kodiert über die Eingangswerte von Auslenkung und Geschwindigkeit, x^{init} und \dot{x}^{init} , aufgetragen ist. Asymmetrische Partnerattraktoren im Sinne des Kap. 7.1 lassen sich auf diese Weise nicht unterscheiden. Die Eingangswerte v_D^{init} und Φ^{init} sind bei allen Auftragungen gleich null. Auf keiner der drei beispielhaft gezeigten Auftragungen ist die Existenz eines dritten Attraktors erkennbar. Selbiges gilt für alle anderen Stellen, an denen eine Abtastung durchgeführt wurde. Die Punkte, die die rote Fläche der mittleren Auftragung überziehen, sind nur Artefakte. Sie entstehen, wenn eine eigentlich eingeschlungene Trajektorie aufgrund numerischer Ungenauigkeiten aus dem Einzugsgebiet eines Attraktors herausgeschubst wird. Abb. 7.4 zeigt ein Beispiel. Wenn das geschieht, ändert sich mitten in der Integration die Schwingungsform, und für die relative Haftzeit ergibt sich ein willkürlicher Zwischenwert.

Die reine Existenz derartiger Artefakte beweist natürlich nicht, dass es sich bei den abweichenden Werten in Abb. 7.3 auch um solche handelt. Ebenso gut könnte es sich tatsächlich um weitere Attraktoren handeln, deren Einzugsgebiete aber so klein und fein strukturiert sind, dass die erst bei geringerer Abtastschrittweite als solche erkennbar werden. Dagegen spricht aber nicht nur die hohe Zahl an Werten, die sie annehmen, sondern auch die Unmöglichkeit, sie zu vergrößern. Selbst bei extremer Reduzierung der Abtastschrittweite um sieben bzw. fünf Größenordnungen (Abb. 7.5) wird keine Struktur erkennbar. Die Abweichungen bleiben immer auf einzelne Rasterpunkte beschränkt.

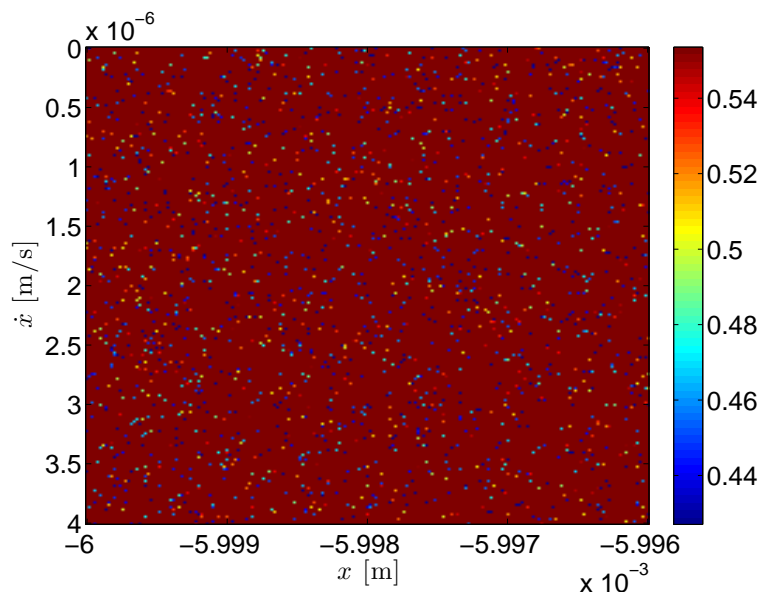


Abbildung 7.5: Sehr starke Vergrößerung der mittleren Auftragung in Abb. 7.3.

Kapitel 8

Parameterstudien

8.1 Auswirkung der Reibelementenmasse

Im Abschnitt 6.3 wurden elementare Eigenschaften der Dynamik des Oszillators vorgestellt. Ihre Veranschaulichung geschah im wesentlichen anhand eines einzigen, beispielhaften Satzes von Parametern, gegeben durch $m_D = 0,3 \text{ kg}$ und $G = 300 \text{ m/s}^2$. Eine andere Wahl der Reibelementenmasse führt zu keiner grundlegenden Änderung besagter Charakteristika. Insbesondere eine Erhöhung von m_D (Abb. 8.1) ändert die Dynamik im Nichtlinearen Regime nur qualitativ. Ihre Grundeigenschaften – viele Gleitbifurkationen mit Wechseln zwischen Chaos und Grenzzyklen verschiedener Periodizität links, Periode-1-Dynamik rechts – bleiben erhalten. Auch eine Erniedrigung von m_D (Abb. 8.2 und 8.3) führt nur insofern zu einer wesentlichen Änderung, dass innerhalb eines begrenzten Bereiches keine Haftreibung mehr stattfindet. Der Übergang in diesen Zustand stellt im Sinne des Kapitels 5 eine Durchstoßbifurkation dar, die sich aber auf die Periodizität nicht auswirkt (Abb. 8.4). Davon abgesehen ist der in Kap. 6.3 vorgestellte Aufbau des NLRs auch hier gegeben.

8.2 Dynamik bei hoher Normalbeschleunigung

Neben der Reibelementenmasse ist die konstante Normalbeschleunigung G ein wichtiger Parameter. Im folgenden soll untersucht werden, welche Auswirkungen auf die Systemdynamik ihre Änderung hat, und zwar zunächst anhand einer Erhöhung von $G = 300 \text{ m/s}^2$ auf 2000 m/s^2 . Die Reibelementenmasse soll dabei wie in Kap. 6.3 konstant bei $m_D = 0,3 \text{ kg}$ gehalten werden.

Was bei dieser hohen Normalbeschleunigung zunächst auffällt, ist das Auftreten von Mehrfachgleitbifurkationen über die gesamte Breite des Nichtlinearen Regimes (Abb. 8.5 und 8.6). Das ist ein Unterschied gegenüber Abb. 6.9, wo sich eine Unterteilbarkeit des NLRs in zwei Bereiche beobachten lässt. Nur innerhalb eines begrenzten Bereichs auf der linken Seite treten dort Mehrfachgleitbifurka-

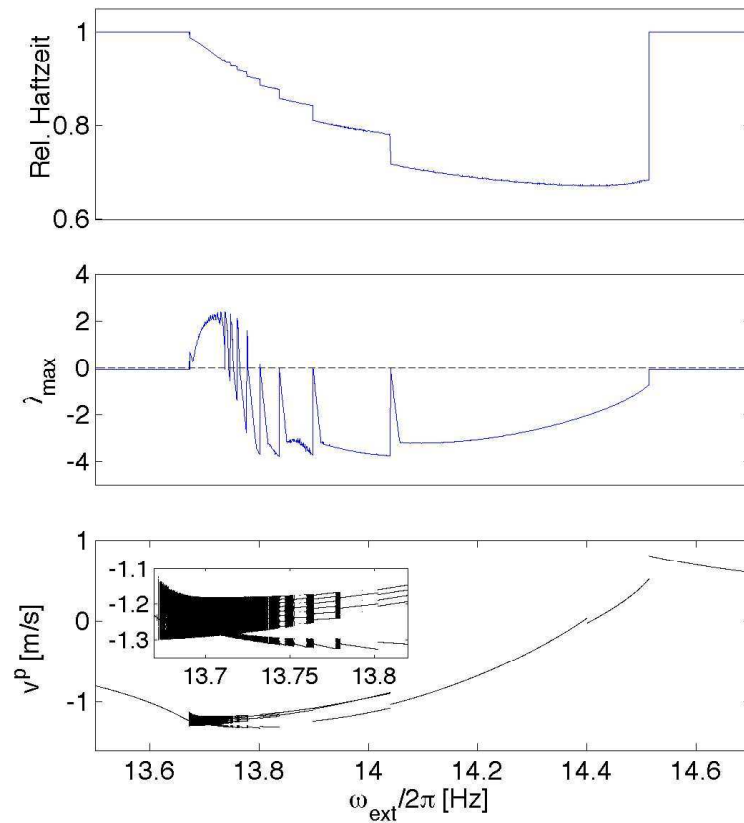


Abbildung 8.1: Systemdynamik im Nichtlinearen Regime für $m_D = 0,50$ kg. Der kleine Kasten im Bifurkationsdiagramm zeigt eine Detailvergrößerung des linken Randes des NLRs.

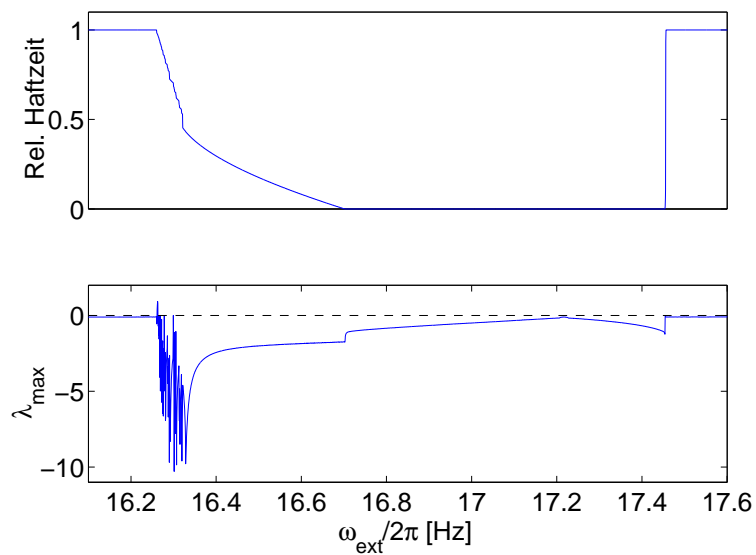


Abbildung 8.2: $m_D = 0,05$ kg.

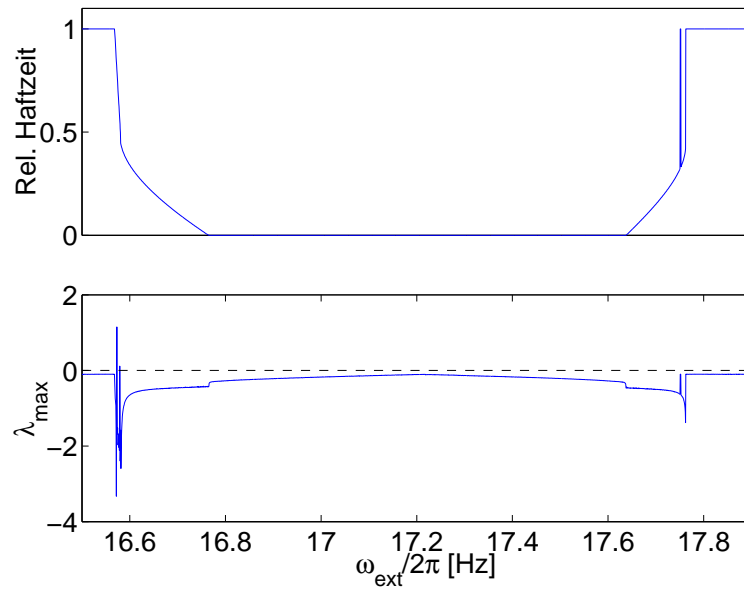


Abbildung 8.3: $m_D = 0,01$ kg.

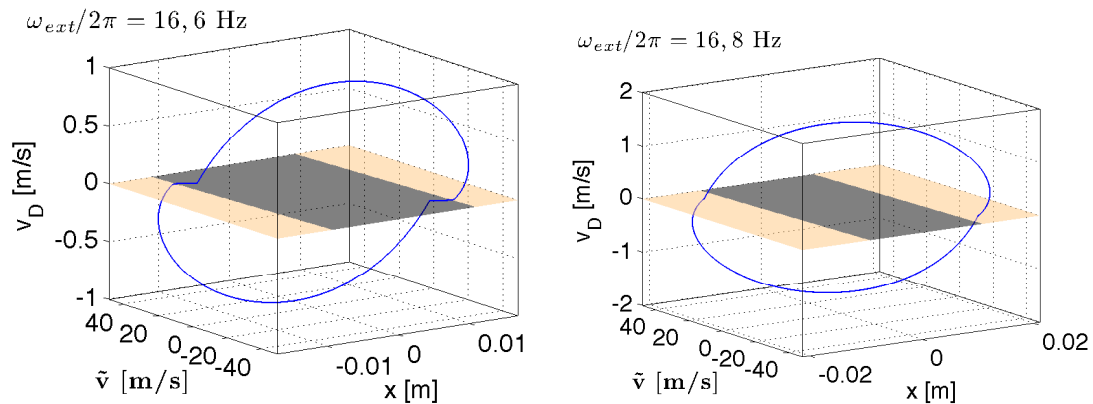


Abbildung 8.4: Die in Abb. 8.2 sichtbare Durchstoßbifurkation bleibt ohne Auswirkung auf die Systemdynamik.

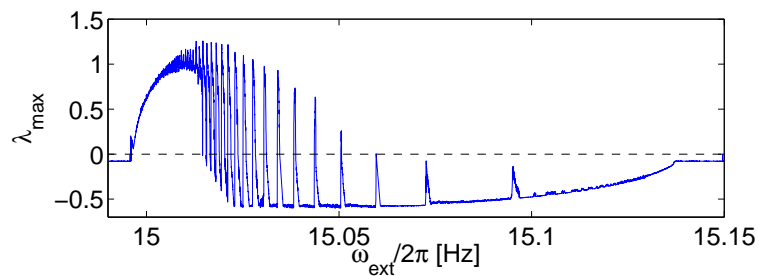


Abbildung 8.5: Größter Ljapunow-Exponent im Nichtlinearen Regime für $G = 2000$ m/s², $m_D = 0,3$ kg und $\omega_{ext}/2\pi = 15,06$ Hz.

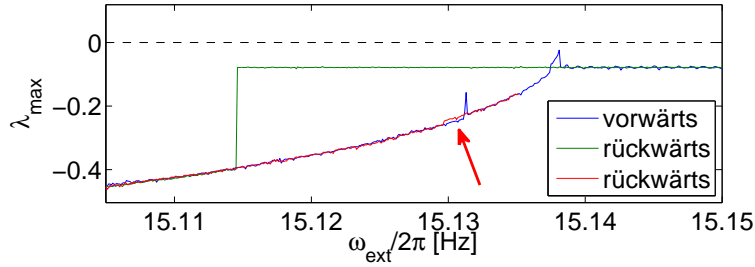


Abbildung 8.6: Größter Ljapunow-Exponent mit anschließenden Eingangswerten für verschiedene Variationsrichtungen und Startwerte des Kontrollparameters. Der Pfeil markiert eine Stelle mit drei koexistierenden, nichtsymmetrischen Attraktoren.

tionen auf, während der rechte Teilbereich durchgehend und unabhängig von der Erregerfrequenz durch einen Periode-1-Grenzzyklus charakterisiert ist.

Erklärt wurde dieser Umstand bereits anhand der Erkenntnis aus Kap. 6.2, dass jedem Übergang vom Haft- in den Rutschzustand ein vorübergehender effektiver Massenverlust folgt, was gleichbedeutend mit einer Verschiebung der Resonanzfrequenz hin zu höheren Werten ist. Durch diesen Effekt werden hohe Erregerfrequenzen dichter an die Resonanzfrequenz gerückt, sodass das Reibelement keinesfalls als Dämpfer, sondern im Gegenteil als Verstärker wirkt. Die dämpfende Wirkung der Bewegung des Reibelements ist aber, wie in Kap. 6.3 gezeigt wird, elementar für die Erzeugung einer Kaskade von Mehrfachgleitbifurkationen, wie sie auf der linken Seite von Abb. 6.9 zu beobachten ist. Auf der rechten Seite fehlt die Dämpferwirkung, und deshalb ist die Dynamik dort stabil.

Eben dieses Argument ist aber im vorliegenden Fall nicht gültig. Abb. 8.7 zeigt eine Zeitreihe mit simultan aufgetragener effektiver Reibelementenmasse für den Fall einer starken Erhöhung der Normalbeschleunigung auf $G = 2000 \text{ m/s}^2$. Gemäß den Erkenntnissen aus Kap. 6.2 führt jeder Eintritt in eine Rutschphase zunächst zu einer Absenkung von m_D^{eff} – bei der vorliegenden Konfiguration, wie in der Abbildung zu sehen, auf grob die Hälfte des Ursprungswertes. Bei $m_D = 0,3 \text{ kg}$ entspricht das einem effektiven Absinken der Gesamtmasse von 1,275 auf 1,125 kg und somit einer Verschiebung der momentanen Resonanzfrequenz von 15,06 auf 16,03 Hz. Das ist eine deutlich stärkere Verschiebung, als sie bei $G = 300 \text{ m/s}^2$ auftritt, dem Wert, der für die Beispielkurven in Kap. 6.3 verwendet wurde. Eine analoge Auftragung wie Abb. 8.7 zeigt dort einen effektiven Massenverlust von nur etwa 10 % der Reibelementenmasse. Gleichzeitig führt eine Erhöhung von G laut Gl. (6.9) zu einer Verkleinerung des Nichtlinearen Regimes. Die kurzzeitige Verschiebung der Resonanzfrequenz, die jede neue Rutschphase einleitet, reicht weit über die rechte Grenze des NLRs hinaus, die hier an der Stelle $\hat{\omega}_2/2\pi = 15,116 \text{ Hz}$ liegt. Weit genug, um auf der gesamten Breite des NLRs einen Dämpfungseffekt wirken zu lassen und somit Mehrfachgleitbifurka-

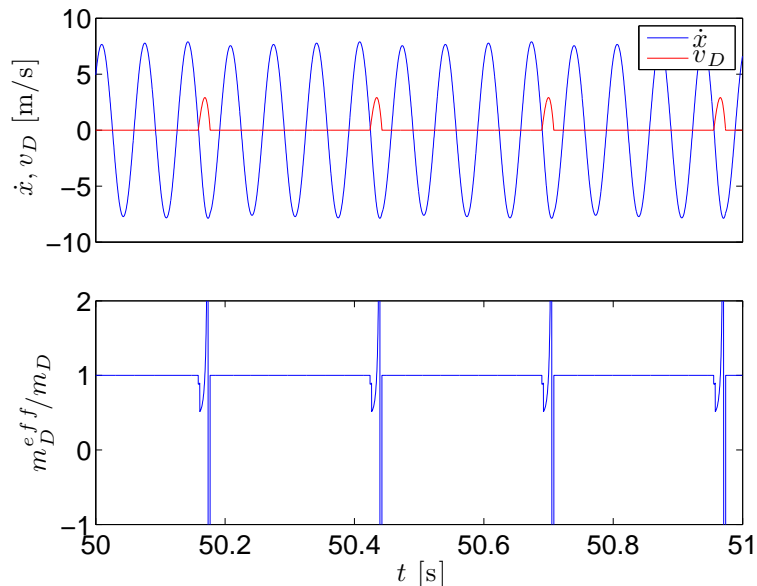


Abbildung 8.7: Zeitreihe mit effektiver Reibelementenmasse für $G = 2000 \text{ m/s}^2$, $m_D = 0,3 \text{ kg}$ und $\omega_{\text{ext}}/2\pi = 15,06 \text{ Hz}$.

tionen zu ermöglichen. Die in Kap. 6.3 festgestellte Unterteilbarkeit des NLRs ist also kein allgemeines Gesetz, sondern gilt nur für den Fall kleiner oder moderater Schwankungen der Resonanzfrequenz, die die Abmessungen des NLRs nicht deutlich überschreiten.

Infolge der Existenz von Mehrfachgleitbifurkationen auf der ganzen Breite des NLRs gibt es Erregerfrequenzen, an denen drei nichtsymmetrische Attraktoren koexistieren, und zwar innerhalb jenes kleinen Bereichs jenseits von $\hat{\omega}_2$, in dem sowohl lineare als auch nichtlineare Dynamik möglich ist. In Abb. 8.6 ist eine solche Stelle zu sehen, markiert durch einen roten Pfeil. Die Abbildung zeigt ein Hysterese-Diagramm analog zu Abb. 7.2 mit dem Unterschied, dass zwei rückwärts variierte Kurven aufgetragen sind, die aber aufgrund verschiedener Startwerte unterschiedlich verlaufen. Wo es zu einer Mehrfachgleitbifurkation kommt, tritt die typische Hysterese auf, allerdings zusätzlich zu der linearen Lösung, die an dieser Stelle existiert. Eine Abtastung des Phasenraums (Abb. 8.8) an dieser Stelle macht auch hier außer den drei durch die Hysterese gegebenen Attraktoren keine weiteren sichtbar.

8.3 Dynamik unter Erdbeschleunigung

Bislang wurde bei allen numerischen Untersuchungen davon ausgegangen, dass die auf das Reibelement wirkende Fallbeschleunigung G weitaus größer ist als die auf der Erde wirkende Schwerebeschleunigung. In Kap. 6.3 wurden anhand des

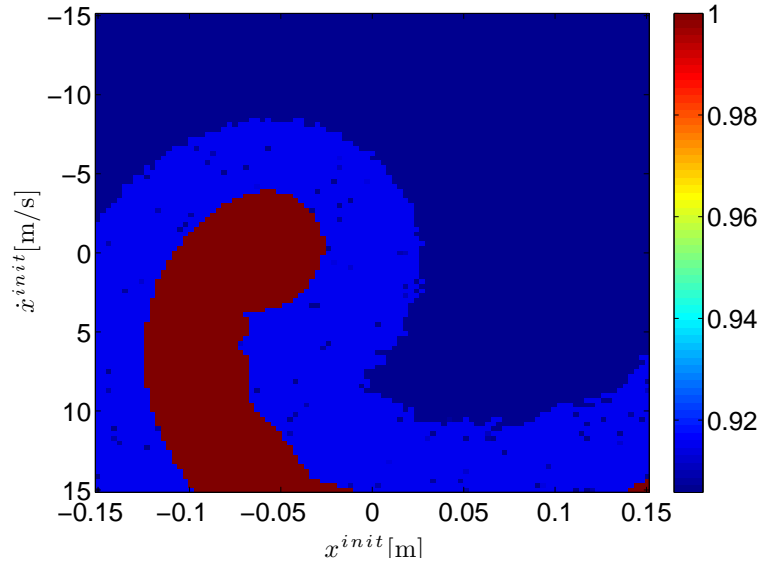


Abbildung 8.8: Relative Haftzeit der eingeschwungenen Oszillation in Abhängigkeit der Eingangswerte für $v_D^{\text{init}} = \Phi^{\text{init}} = 0$. Parameter wie in Abb. 8.6 an der Stelle $\omega_{\text{ext}}/2\pi = 15, 13$ Hz.

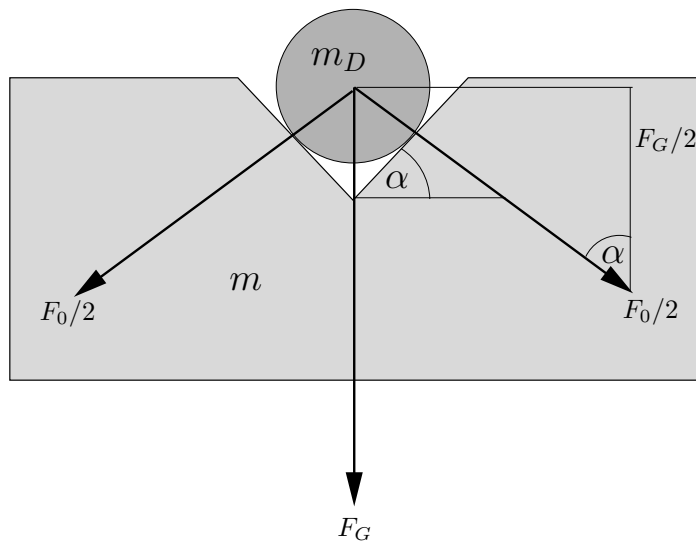


Abbildung 8.9: Auflagekraft eines zylindrischen Reibelements mit runder Grundfläche, das in einer keilförmigen Schiene geführt wird.

repräsentativen Beispiels $G = 300 \text{ m/s}^2$ grundlegende dynamische Eigenschaften des Oszillators vorgestellt, und in Kap. 8.2 wurde dieser Wert auf 2000 m/s^2 erhöht. Das ist statthaft, sofern man nicht davon ausgeht, dass es sich bei G um die Erdbeschleunigung handelt. Eingeführt wurde der in Kap. 3 vorgestellte Oszillator als einfachstmögliches Beispiel für eine spezielle Art der Schwingungsdämpfung, wie sie, wenn auch in wesentlich komplizierterer Form, vor allem in Turbinen zur Anwendung kommt. Dort handelt es sich bei G nicht um eine Gravitation, sondern um eine Zentrifugalbeschleunigung, die, abhängig von der Drehzahl, theoretisch beliebige Werte annehmen kann. Eine experimentelle Umsetzung des Oszillators, wie er in Abb. 3.1 dargestellt ist, würde aber eine Erhöhung von G nicht ohne weiteres zulassen. Eine gewisse Erhöhung ließe sich durch Lagerung des Reiblements in einer keilförmigen Schiene realisieren, was hinsichtlich der Forderung nach nur einem Freiheitsgrad pro beteiligter Masse ohnehin zweckdienlich wäre. Aus dem Kräfte diagramm in Abb. 8.9 lässt sich für einen Neigungswinkel α der Schienenwände und einer Gewichtskraft F_G unmittelbar eine Auflagekraft in Höhe von

$$F_0 = \frac{F_G}{\cos \alpha} \quad (8.1)$$

herauslesen. Theoretisch lässt sich auf diese Weise ein beliebig hoher Wert verwirklichen, aber in Hinblick auf eine sichere Führung des Reiblements hält sich der Spielraum bezüglich der Wahl von α in Grenzen. Um wirklich große Werte von G zu verwirklichen, müsste der Versuch schon wesentlich erweitert werden, etwa durch Einbettung des gesamten Aufbaus in ein rotierendes System oder durch Behängung des Reiblements mit Gewichten (siehe dazu die Experimente von SANLITURK et al. [50]).

Wurde im letzten Kapitel der Fall einer sehr hohen normalen Beschleunigung untersucht, so wird im Folgenden der umgekehrten Weg eingeschlagen. Betrachtet wird der Fall $G = 10 \text{ m/s}^2$ bei einer Reiblementenmasse von $m_D = 0,2 \text{ kg}$, eine Konfiguration, die nicht nur aus prinzipiellen Gründen interessant ist, weil sie den Oszillator unter realistischen Laborbedingungen beschreibt, sondern auch, weil sie zu einer starken Änderung seiner dynamischen Eigenschaften gegenüber den Erkenntnissen aus Kap. 6.3 führt.

Laut Gl. (6.9) ist $\hat{\omega}_2$ bei einem so niedrigen Wert von G nicht definiert, das NLR also auf der rechten Seite unbegrenzt. Die relative Haftzeit, über die Erregerfrequenz aufgetragen, fällt nach der ersten Ablösung an der Stelle $\hat{\omega}_1$ sehr rasch und noch deutlich vor Erreichen des Maximums der Resonanzkurve auf 0 und behält diesen Wert von dort an bei. Wesentliche Änderungen der Dynamik treten ab diesem Punkt nicht mehr auf (Abb. 8.10 und 8.11). Die Trajektorie bildet einen 1-periodischen Orbit um das NLR, ähnlich der Lösung, wie sie in Abb. 6.16 links zu sehen ist. Die interessante Dynamik konzentriert sich auf jenes schmale Frequenzband, innerhalb dessen Haft-Rutsch-Verhalten auftritt, die relative Haftzeit also einen Wert zwischen 0 und 1 aufweist. Abb. 8.11 zeigt diesen Bereich im Detail. An den Stellen $\omega_{\text{ext}}/2\pi = 10,8 \text{ Hz}$ und $11,1 \text{ Hz}$ tritt je-

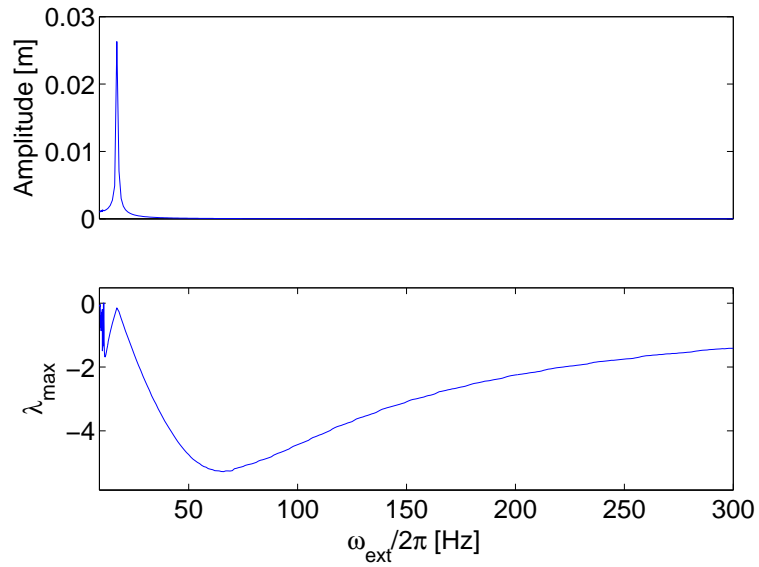


Abbildung 8.10: Resonanzkurve mit größtem Ljapunow-Exponenten für $G = 10 \text{ m/s}^2$ und $m_D = 0,2 \text{ kg}$.

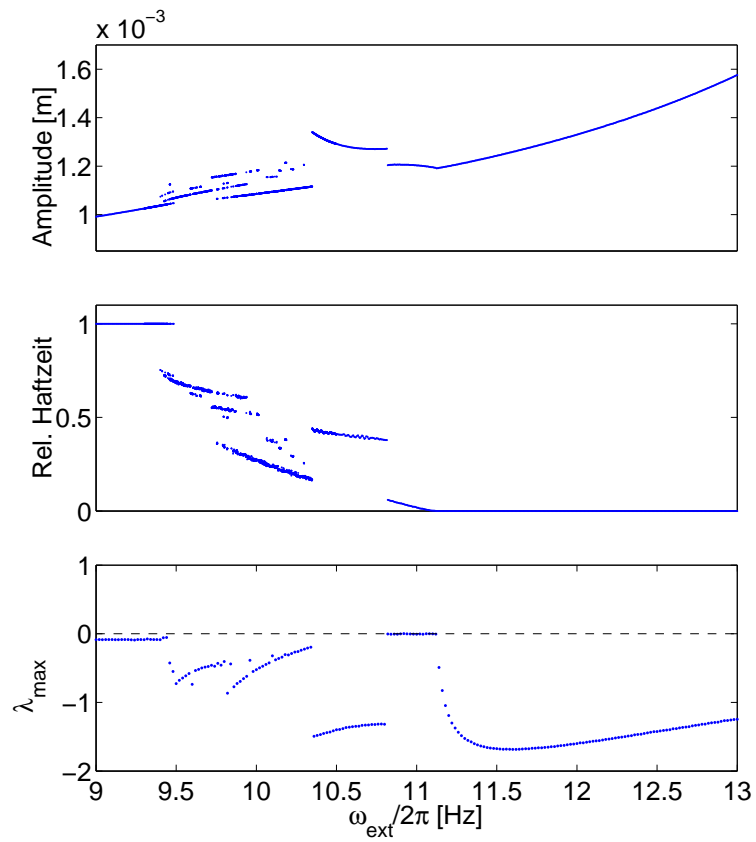


Abbildung 8.11: Detail der Resonanzkurve in Abb. 8.10 mit Systemdynamik.

weils eine Hopf-Bifurkation auf. Der Wert von λ_{\max} ist innerhalb dieses Bereichs konstant gleich 0, die Dynamik demnach quasiperiodisch. Auslöser ist auf beiden Seiten eine Gleitbifurkation, die aber interessanterweise auf beiden Seiten unterschiedlichen Typs ist. Abb. 8.12 zeigt eine Annäherung von der linken Seite. Der Übergang zu einer quasiperiodischen Schwingung findet statt, wenn ein Zweig der Trajektorie eines recht komplizierten periodischen Orbits die Grenze der Gleitebene berührt. Besagter Ausschnitt liegt vor der Bifurkation komplett auf der Gleitebene. Es handelt sich also um eine Mehrfachgleitbifurkation, wie wir sie bislang standardmäßig beobachtet haben. Ein gänzlich anderes Bild ergibt sich aber bei einer Annäherung von der anderen Seite (Abb. 8.13). Rechts des quasiperiodischen Fensters findet zunächst gar keine Haftdynamik statt. Die Trajektorie umkreist die Gleitebene zyklisch, ohne mit ihr in Berührung zu kommen. Eine Verringerung der Erregerfrequenz führt aber zu einem zunehmend engeren Bahnradius und schließlich zur Kollision mit dem Rand der Gleitebene. Gemäß der Definition in Abb. 5.4 stellt dieser Ablauf eine Durchstoßbifurkation dar. Der periodische Orbit wird durch diese zerstört und in einen quasiperiodischen überführt. In der Phasenraumdarstellung ist letzterer von einem chaotischen Orbit nicht unterscheidbar. Ein geeigneter Poincaré-Schnitt (Abb. 8.14) gewährt einen Einblick in die innere Struktur des Orbits und macht so den Unterschied offenbar. Die Durchstoßpunkte liegen auf der Poincaré-Ebene auf einer geschlossenen Linie, bewegen sich im Phasenraum also auf einem 2-Torus. Wie in Abb. 8.12 und 8.13 zu erkennen ist, liegt der Torus teilweise auf der Gleitebene, wo seine Ausdehnung in v_D -Richtung naturgemäß auf null komprimiert ist. Das ist möglich, weil in der Phasenraumdarstellung eine Koordinate unterschlagen wird, nämlich die Erregerphase Φ . In der vierdimensionalen Darstellung (5.8) ist die Gleitebene eine dreidimensionale Hyperfläche, die Dynamik auf einem Torus ermöglicht. Die Information über die Schlauchstruktur des Attraktors bleibt deshalb erhalten.

Das geschilderte Szenario ist gleich in doppelter Hinsicht ein Novum. Zum einen traten in den zurückliegenden Kapiteln quasiperiodische Lösungen nur als isolierte Grenzfälle auf, wo durch eine Mehrfachgleitbifurkation ein Wechsel zwischen zwei periodischen Orbits stattfand, zum anderen handelt es sich, bezogen auf den untersuchten Oszillator, beim vorliegenden Fall um das erste Beispiel der Zerstörung eines Attraktors durch eine Durchstoßbifurkation.

Auch in weiteren Punkten weicht das Systemverhalten von dem ab, was wir bei hohen Werten von G beobachtet haben. Es treten bei der aktuellen Konfiguration erstmals klassische Bifurkationen auf, die nicht durch Grenzkollisionen verursacht werden. So handelt es sich bei dem Umschlag, der in Abb. 8.11 an der Stelle 10,34 Hz zu sehen ist, um eine Sattel-Knoten-Bifurkation. An dieser Stelle koexistieren zwei Attraktoren (Abb. 8.15), deren Einzugsgebiete im Phasenraum sich bei Verschiebung des Kontrollparameters zugunsten bzw. -ungunsten des jeweils anderen verändern (Abb. 8.16). Sowie der aktuelle Attraktor zuviel an Dominanz einbüßt, wechselt das System zum anderen. Das ist der Auslöser der genannten Bifurkation, eine Grenzkollision findet an der betreffenden Stelle nicht statt. Da-

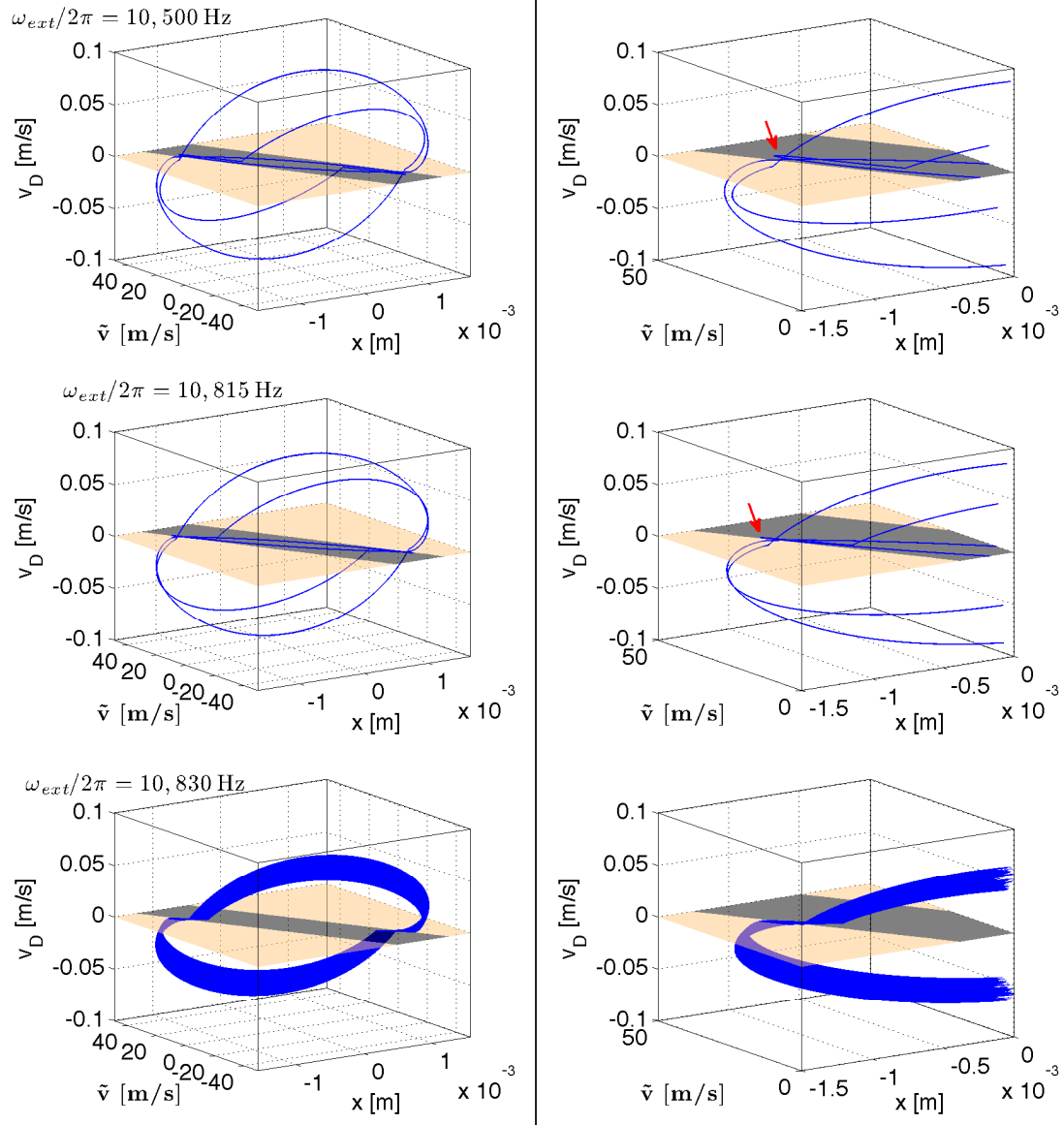


Abbildung 8.12: Hopf-Bifurkation aus Abb. 8.11, von der linken Seite aus angenähert. Rechts: Vergrößerte Darstellungen. Der rote Pfeil markiert den Abschnitt der Trajektorie, der durch eine Grenzkollision die Bifurkation auslöst. In der Vergrößerung ist zu erkennen, dass es sich um eine Mehrfachleitbifurkation handelt.

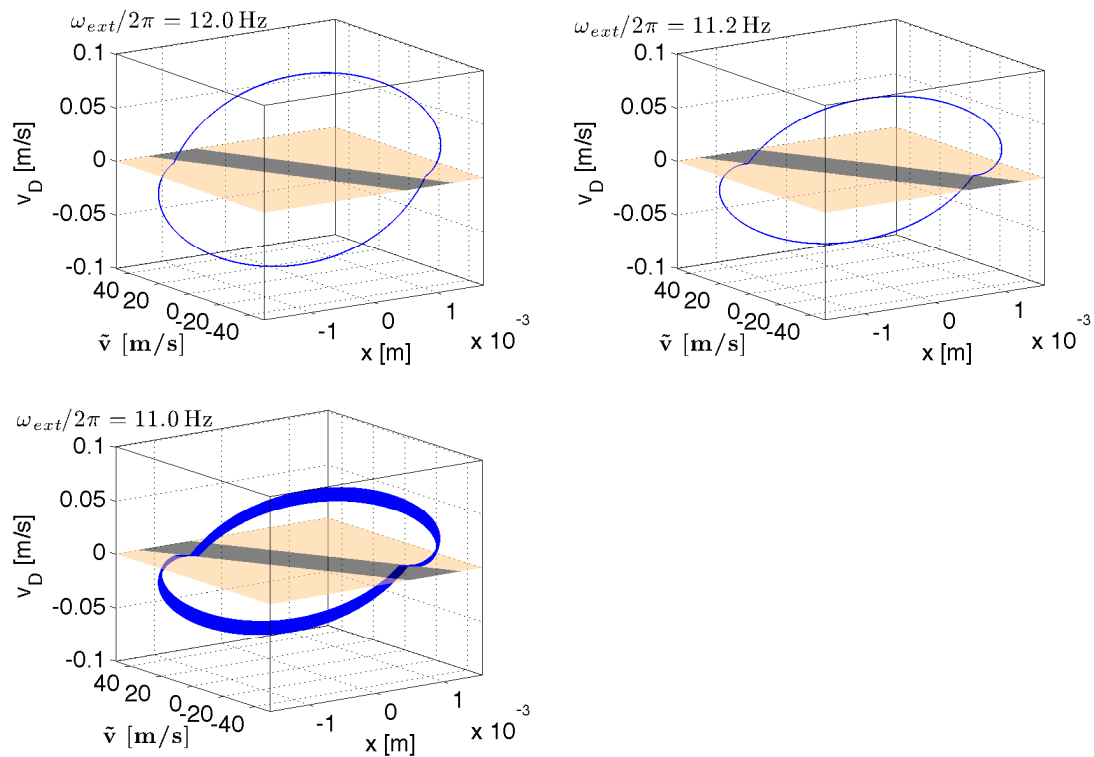


Abbildung 8.13: Hopf-Bifurkation aus Abb. 8.11, von der rechten Seite aus angenähert. Auslöser ist ebenfalls eine Grenzkollision, wobei es sich in diesem Fall aber um eine Durchstoßbifurkation handelt.

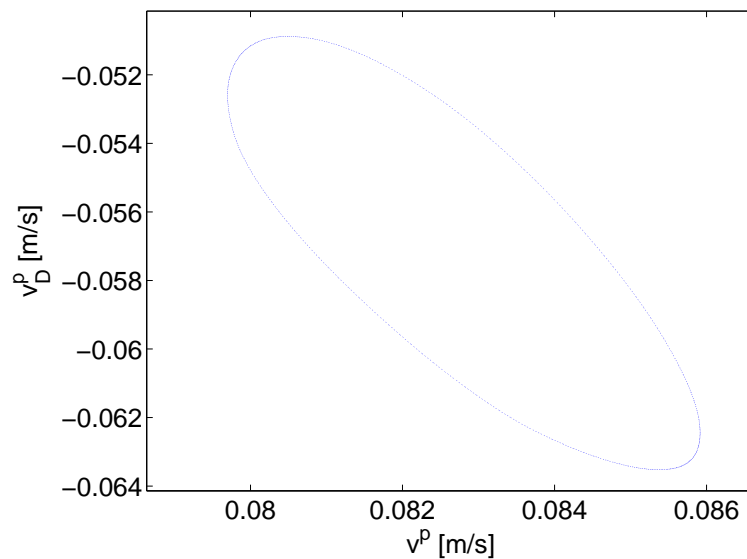


Abbildung 8.14: Poincaré-Schnitt des in Abb. 8.13 für $\omega_{ext} = 11,0$ Hz gezeigten Orbits. Poincaré-Ebene definiert durch $x = 0, \dot{x} > 0$.

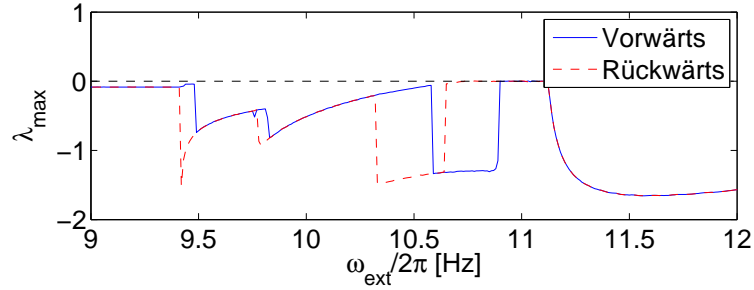


Abbildung 8.15: Größter Ljapunow-Exponent bei anschließenden Eingangswerten für vorwärts und rückwärts variierten Kontrollparameter.

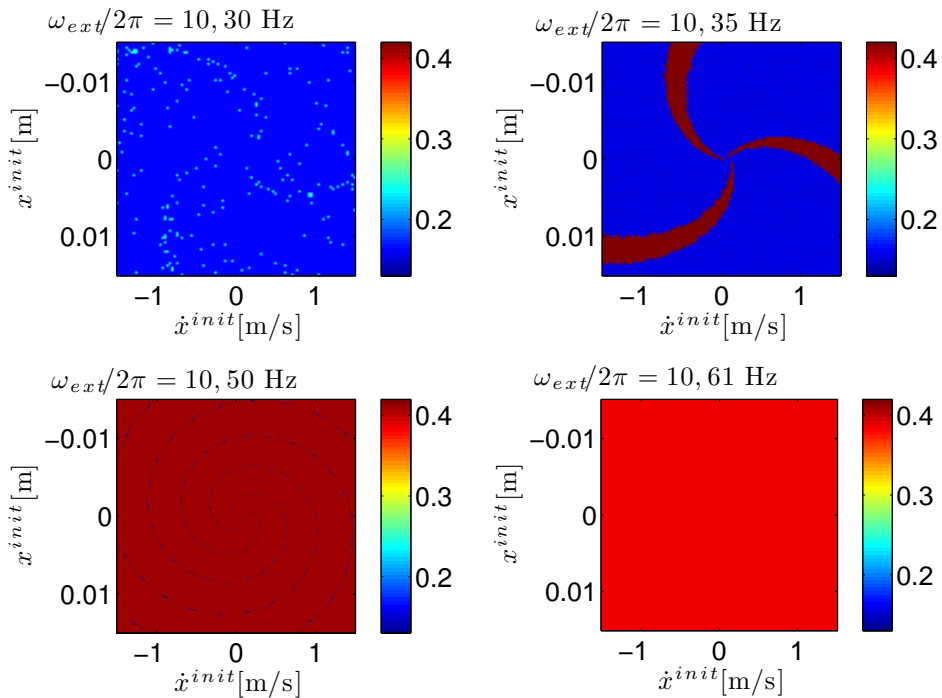


Abbildung 8.16: Phasenraumabtastungen in der Nähe der in Abb. 8.11 und 8.15 gezeigten Sattel-Knoten-Bifurkation. Aufgetragen ist die farblich kodierte relative Haftzeit der eingeschwingenen Oszillation über ihre Eingangswerte, wobei $v_D^{\text{init}} = \Phi^{\text{init}} = 0$. Die Abtastungen zeigen die quantitative Änderung der Einzugsgebiete beider koexistierender Attraktoren durch Änderung der Erregerfrequenz.

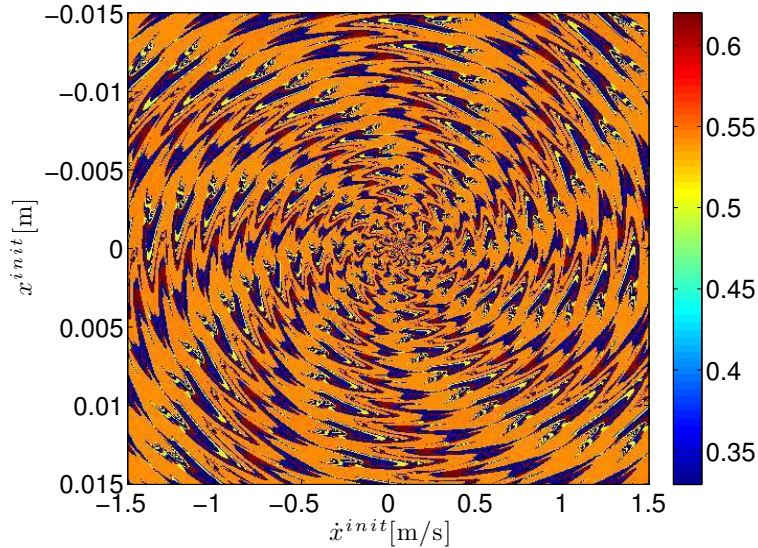


Abbildung 8.17: Phasenraumabtastung an der Stelle $\omega_{ext}/2\pi = 9,81675$ Hz.

neben kommt es auch zur Koexistenz von Attraktoren, die sich, im Gegensatz zu den bisherigen Beobachtungen, weder aus den Symmetrieeigenschaften des Systems ergibt noch sich durch Hysterese an Stellen einer Gleitbifurkation erklären lässt. Ein Abtastung des Phasenraums mit geschickt gewählter Erregerfrequenz zeigt eine unabhängige Koexistenz von bis zu vier Attraktoren, und zwar ebenfalls an Stellen, wo keine Grenzkollisionen durch Änderungen des Kontrollparameters stattfinden. (Abb. 8.17).

Da die in Kap. 6.2 beschriebene Anschmiegung der Resonanzkurve an eine Grenzfunktion umso deutlicher ausfällt, je stärker schwingende und rutschende Masse gekoppelt sind, können Bifurkationen bei einem kleinen Wert von G mit deutlichen Änderungen der Schwingungsamplitude einhergehen. So erkennt man zum Beispiel in Abb. 8.11, wie die eben besprochene Sattel-Knoten-Bifurkation eine Steigerung der Amplitude von 1,12 auf 1,34 mm bewirkt, was einer Zunahme von fast 20 % entspricht. Diese Schwankungen treten zwar auch bei starker Kopplung auf, siehe z. B. Abb. 6.9, sind dann aber quantitativ eher unbedeutend. Sind die auftretenden Reibungskräfte hingegen relativ klein, ist das nicht unbedingt der Fall.

Abb. 8.18 zeigt drei weitere Resonanzkurven für jeweils unterschiedliche Reibelementenmassen bei Erdbeschleunigung, ergänzt um den größten Ljapunow-Exponenten. Eine Erniedrigung von m_D (oberes und mittleres Diagramm) wirkt sich wesentlich auf die Dynamik innerhalb des NLRs aus. Der Verlauf ist dem in Abb. 8.11 sehr ähnlich: Viele koexistierende Lösungen am linken Rand und ein quasiperiodischer Bereich, dessen rechte Grenze den Übergang zur reinen Rutschdynamik markiert. Eine Erhöhung von m_D auf 0,5 kg (unteres Diagramm) hingegen führt in dynamischer Hinsicht zu einem anderen Verlauf. Der quasipe-

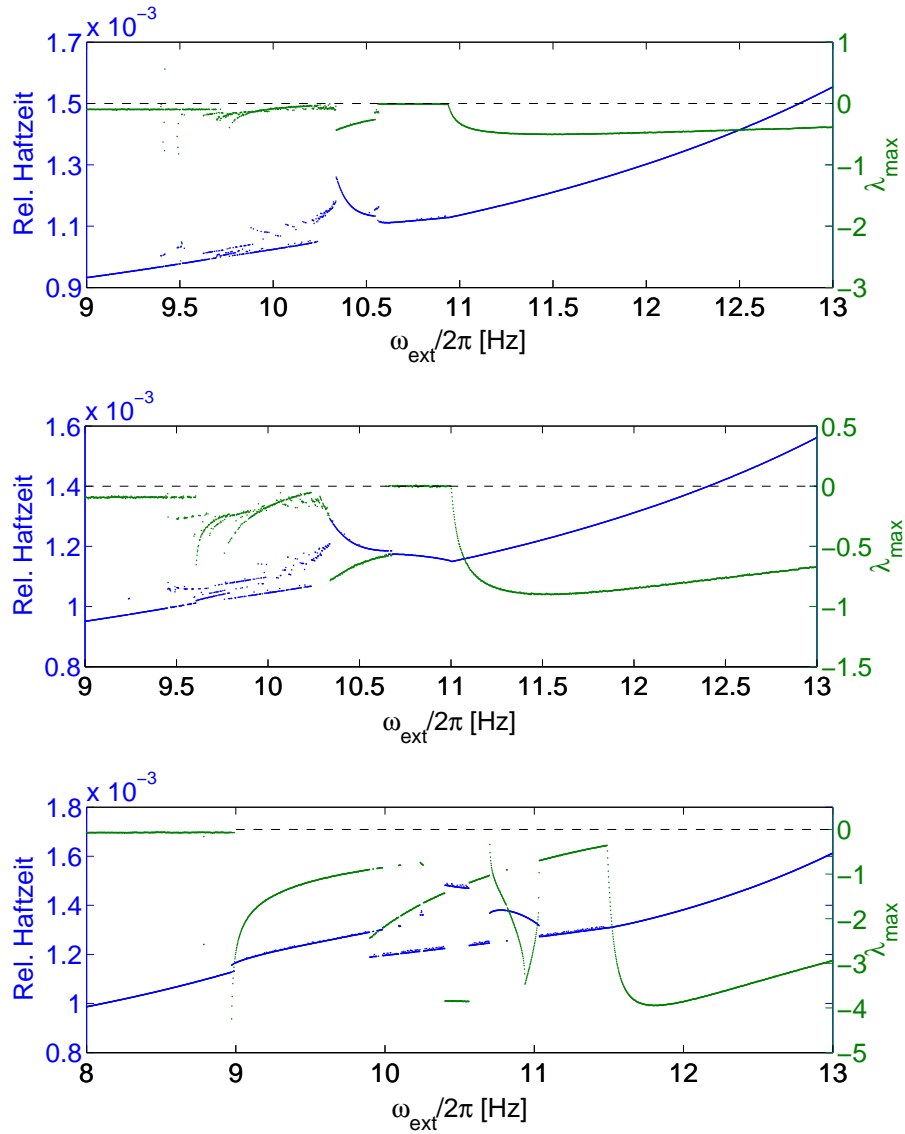


Abbildung 8.18: Resonanzkurven mit maximalen Ljapunow-Exponenten für verschiedene Reibelementmassen bei $G = 10 \text{ m/s}^2$. Von oben nach unten: $m_D = 0,05 \text{ kg}$; $0,10 \text{ kg}$; $0,50 \text{ kg}$.

riodische Bereich fällt weg, und die Kurve erscheint insgesamt geordneter. Bei allen drei Diagrammen treten erneut signifikante Sprünge der Amplitude infolge von Bifurkationen auf.

Eine Absenkung der konstanten Normalbeschleunigung G , wie sie in diesem Kapitel durchgeführt wurde, bedeutet immer auch eine leichtere Ablösbarkeit des Reiblements. Die daraus resultierende Aufweitung des Nichtlinearen Regimes lässt sich ausgleichen durch eine gleichzeitige Absenkung der Erregeramplitude. Entsprechende Resonanzkurven für verschiedene Reiblementmassen mit größtem Ljapunow-Exponenten zeigt Abb. 8.19. Für die Berechnung der Kurven wurde die Normalbeschleunigung bei $G = 10 \text{ m/s}^2$ belassen, zusätzlich aber auch die Erregeramplitude auf $B = 0,5 \text{ N}$ reduziert. Von den besonderen Verhaltensweisen der Systemdynamik, die in diesem Kapitel für geringe Werte von G beobachtet wurden, treten in der Folge keine mehr auf. Stattdessen entspricht der Aufbau des NLRs wieder exakt den Befunden aus Kap. 6.3. Welche von beiden Verhaltensweisen auftritt, ist offenbar eine Frage des Verhältnisses zwischen Normalbeschleunigung G und Erregeramplitude B . Ist es ausgewogen, so dass das NLR sich auf ein relativ schmales Band um die Resonanzfrequenz beschränkt, tritt das typische, in Kap. 6.3 hergeleitete Bifurkationsverhalten auf. Je stärker aber die Anregung im Vergleich zur Reibungskopplung wird, desto unvorhersagbarer wird die Systemdynamik.

8.4 Dynamik unter Triebwerksbedingungen

Nach der Untersuchung des Oszillators erst unter Wahl willkürlicher Beispielparаметer und dann unter realistischen Laborbedingungen, erfolgt in diesem Abschnitt eine Betrachtung des Systems unter extremeren Bedingungen, wie sie ein Reibungsdämpfer in einem Triebwerk erfährt. Turbinenschaufeln weisen eine hohe Resonanzfrequenz auf, ihr Ausschlag im laufenden Betrieb liegt im Bereich weniger Millimeter, und das Gewicht eines Reibungsdämpfers wie in Abb. 2.5 gezeigt beträgt für gewöhnlich zwischen drei und zehn Gramm. Desweiteren ist es wenig sinnvoll, wie in den vergangenen Kapiteln Erregeramplitude ω_{ext} und Normalbeschleunigung G als unabhängige Parameter zu betrachten. In einem Triebwerk sind beide durch die Drehzahl bestimmt. Im folgenden ist deshalb die Normalbeschleunigung gegeben durch

$$G = \left(\frac{\omega_{\text{ext}}}{N} \right)^2 \cdot r. \quad (8.2)$$

N ist die Anzahl der Schaufelblätter der Turbine und r der Bahnradius der Reibungsdämpfer. Eine Übersicht über die neuen Werte aller Parameter gibt Tab. 8.1. Sie orientieren sich an den von PANNING [37] in seiner Dissertation verwendeten. Die Resonanzfrequenz der schwingenden Masse liegt für diese Konfiguration bei $\omega_{\text{res}}/2\pi = 137,83 \text{ Hz}$.

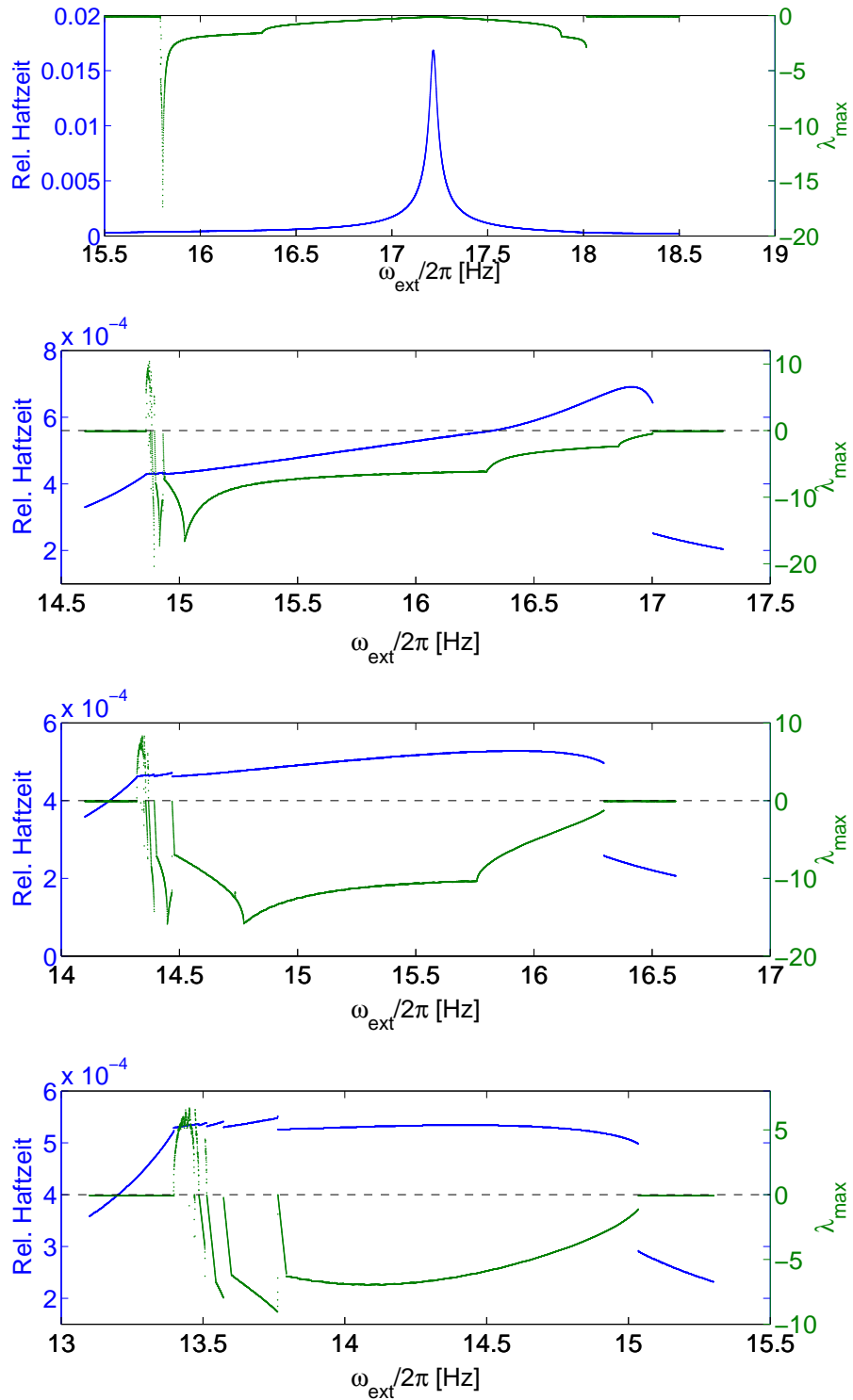


Abbildung 8.19: Resonanzkurven mit größtem Ljapunow-Exponenten unter Laborbedingungen bei schwacher Anregung ($G = 10 \text{ m/s}^2$, $B = 0,5 \text{ N}$). Von oben nach unten: $m_D = 0,05 \text{ kg}$; $0,20 \text{ kg}$; $0,30 \text{ kg}$; $0,50 \text{ kg}$.

m	Schwingende Masse	1,0 kg
m_D	Reibelementenmasse	nicht festgelegt
k	Federkonstante	$0,75 \cdot 10^6$ N/m
d	Viskose Dämpfung	0,2 Ns/m
N	Anzahl der Schaufelblätter	nicht festgelegt
r	Bahnradius der Reibungsdämpfer	nicht festgelegt
f_1		0,160
f_2	Reibungsparameter	931,715 s/m
f_3		0,213
B	Erregeramplitude	70 N
ω_{ext}	Erregerkreisfrequenz	nicht festgelegt

Tabelle 8.1: Parameterwerte des Oszillators unter Turbinenbedingungen.

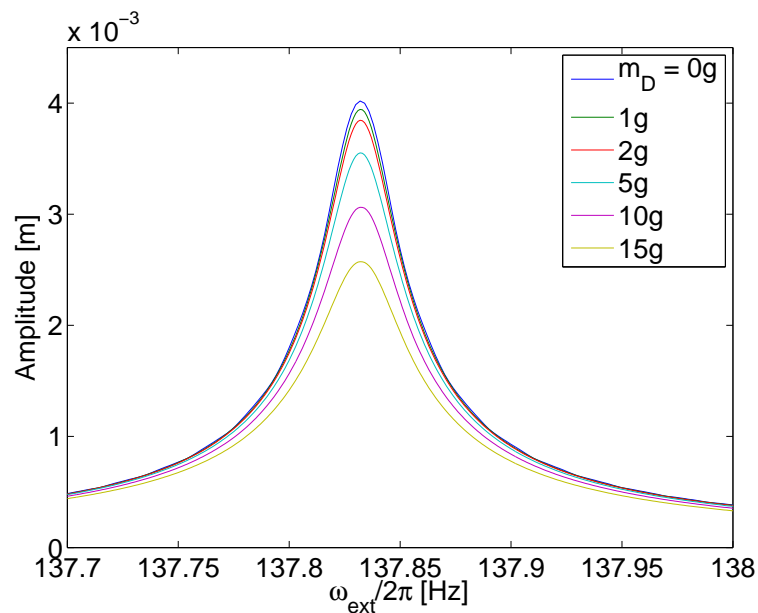


Abbildung 8.20: Resonanzkurven für verschiedene Reibelementmassen bei $N = 60$, $r = 0,3$ m.

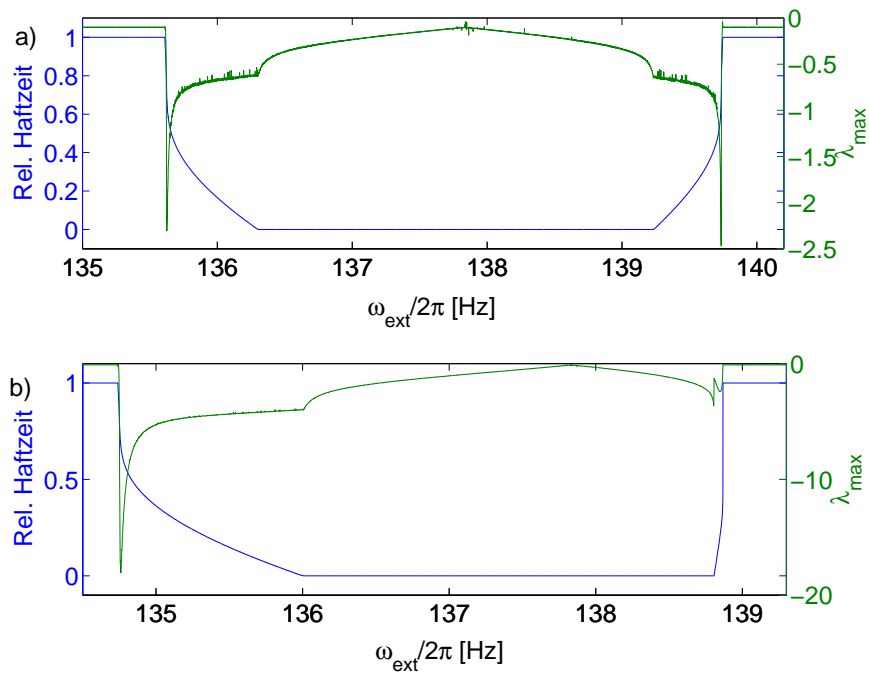


Abbildung 8.21: Relative Haftzeit und größter Ljapunow-Exponent für $N = 60$ und $r = 0,3 \text{ m}$. a) $m_D = 0,002 \text{ kg}$. b) $m_D = 0,015 \text{ kg}$.

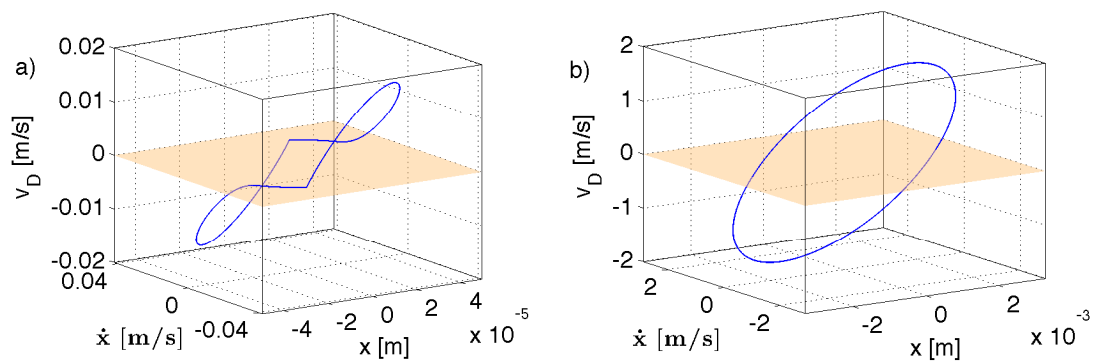


Abbildung 8.22: Phasenraumauftragungen für $N = 60$, $r = 0,3 \text{ m}$, $m_D = 0,015 \text{ kg}$. a) $\omega_{\text{ext}}/2\pi = 135,50 \text{ Hz}$. b) $\omega_{\text{ext}}/2\pi = 137,83 \text{ Hz}$.

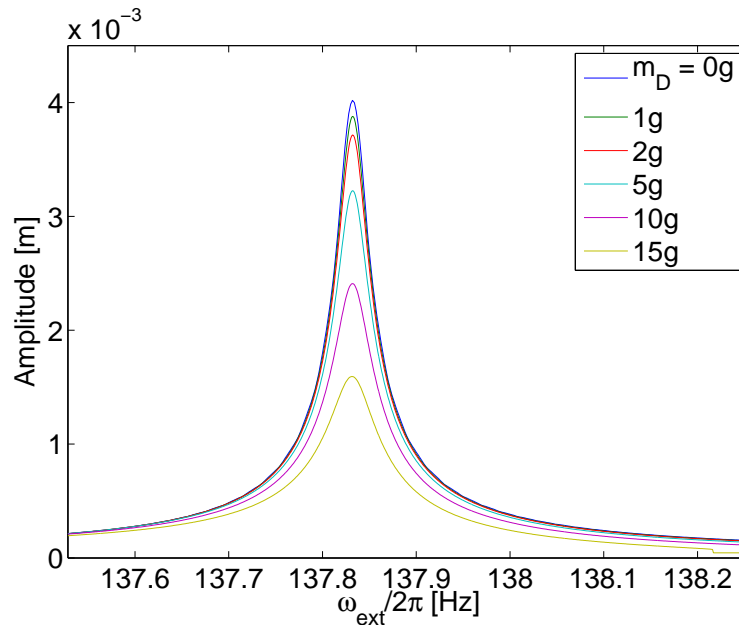


Abbildung 8.23: Resonanzkurven für verschiedene Reibelementmassen bei $N = 60$, $r = 0,5$ m.

Abb. 8.20 zeigt Resonanzkurven für verschiedene Reibelementmassen bei $N = 60$ und $r = 0,3$ m. Bei dieser Konfiguration liegt die Normalbeschleunigung im Resonanzfall bei $G = 62,5 \text{ m/s}^2$, ist also nicht sonderlich hoch. Da auch die eingesetzten Dämfermassen klein sind, ist der Dämpfungseffekt eher gering. Zwar bewirkt das Reibelement eine deutliche Abnahme der Resonanzamplitude, eine Plateaubildung wie in Abb. 6.5 oder 6.6 ist aber nicht zu erkennen. Die Dynamik, in Abb. 8.21 für zwei Reibelementmassen beispielhaft aufgetragen, ist unspektakulär. Gleitbifurkationen kommen nicht vor, der Oszillator beschreibt über das gesamte Spektrum von Erregerfrequenzen eine einfach-periodische Schwingung (Abb. 8.22). Eine Erhöhung des Bahnradius auf $r = 0,5 \text{ m/s}$ bewirkt zwar eine quantitative Verbesserung der Dämpferwirkung infolge der höheren Zentrifugalbeschleunigung, wirkt sich aber auf die Systemdynamik nicht aus (Abb. 8.23 und 8.24).

Bei einer Absenkung der Schaufelanzahl von 60 auf $N = 20$ wird die Resonanzfrequenz der schwingenden Masse erst bei der dreifachen Drehzahl der Turbine erreicht. Auf das Reibelement wirkt deshalb eine bedeutend höhere Zentrifugalkraft. Bei einem Bahnradius von $r = 0,3 \text{ m/s}$ wirkt im Resonanzfall eine Normalbeschleunigung von $G = 562,5 \text{ m/s}^2$. Bei diesem Wert bilden die Resonanzkurven wieder jene Plateauform aus, die aus Kap. 6.2 für hinreichend hohe Reibelementmassen bekannt ist (Abb. 8.25). Auch die Systemdynamik folgt wieder vertrauten Mustern. Das Nichtlineare Regime wird linksseitig durch eine dichte Kaskade von Mehrfachgleitbifurkationen eröffnet, während oberhalb einer

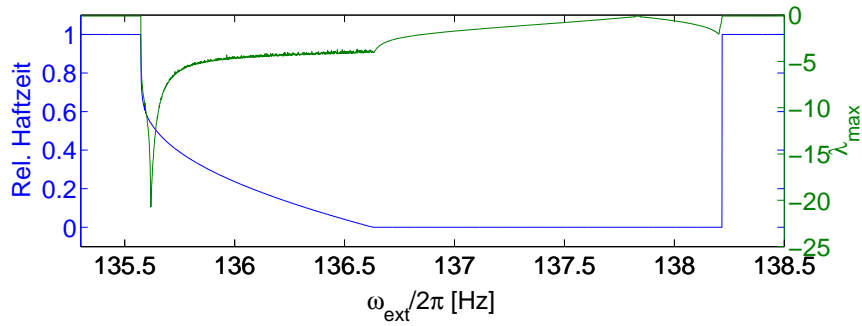


Abbildung 8.24: Relative Haftzeit und größter Ljapunow-Exponent für $N = 60$, $r = 0,3 \text{ m}$, $m_D = 0,015 \text{ kg}$.

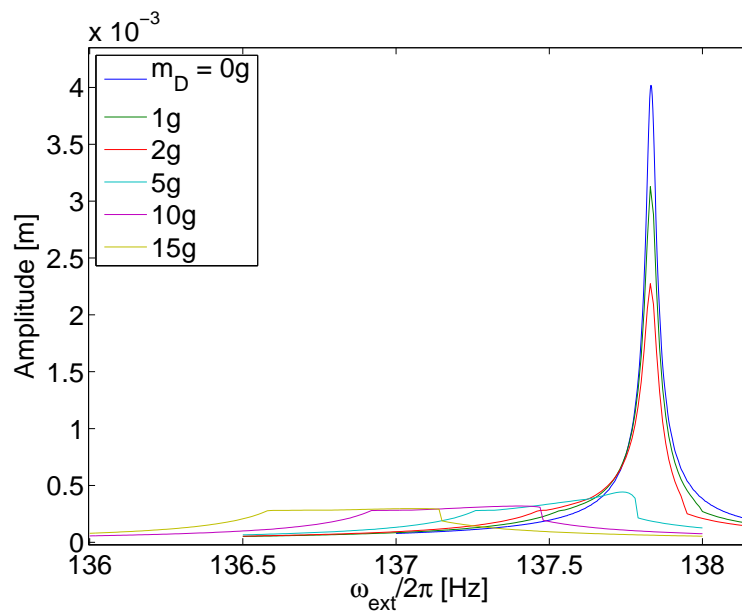


Abbildung 8.25: Resonanzkurven für verschiedene Reibelementmassen bei $N = 20$, $r = 0,3 \text{ m}$.

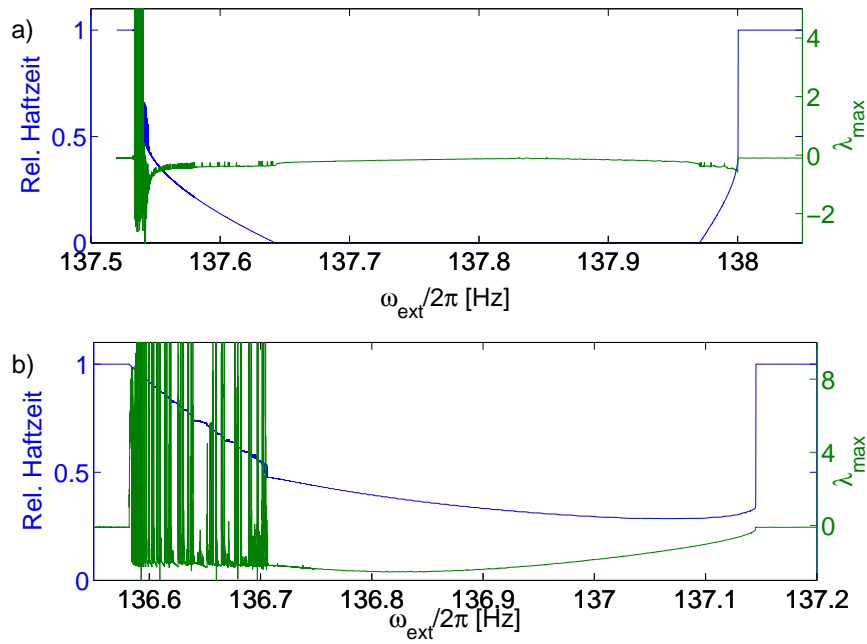


Abbildung 8.26: Relative Haftzeit und größter Ljapunow-Exponent für $N = 20$ und $r = 0,3$ m. a) $m_D = 0,001$ kg. b) $m_D = 0,015$ kg.

gewissen Erregerfrequenz keine Bifurkationen mehr auftreten und die Dynamik periodisch verläuft. Ganz so, wie es bereits in Kap. 6.3 beobachtet und anhand der Phasenraumtopologie erklärt wurde.

Kapitel 9

Messergebnisse

9.1 Versuchsaufbau

Ergänzend zu den in den vergangenen Kapiteln durchgeführten numerischen Untersuchungen wurden auch einige Messreihen an einem Versuchsstand durchgeführt, einer experimentellen Umsetzung des in Abb. 3.1 dargestellten Oszillators durchgeführt. Die schwingende Masse m des Versuchsstandes ist eine 33 cm lange und 2 kg schwere Führungsschiene aus rostfreiem Edelstahl, deren Grundfläche schematisch der in Abb. 8.9 gezeigten entspricht. Sie ist schwebend eingespannt zwischen zwei Blattfedern und wird erregt durch eine Feldspule, an die eine Wechselspannung angelegt ist. Als Reibelemente dienen fünf Edelstahlzylinder der Massen 50 g, 100 g, 250 g, 500 g und 1 000 g. Bei guter Lagejustierung des Aufbaus kann ein Reibelement mehrere Minuten lang in der Schiene gleiten, ohne an ihren Rand zu stoßen. Die Annahme einer unendlich ausgedehnten Auflagefläche, auf der das in Kap. 3.1 hergeleitete Modell basiert, ist damit gerechtfertigt.

Zur Messung der Auslenkung dient ein an einer der Blattfedern angebrachter Dehnungsmessstreifen. Der Ausdruck bezeichnet einen dünnen Streifen aus einem Material, das unter Zugspannung seinen elektrischen Widerstand ändert. Wird an diesen eine elektrische Spannung angelegt, ist die resultierende Stromstärke ein Maß für die Auslenkung der Blattfeder. Zur Verbesserung der Messgenauigkeit ist der Streifen in eine Wheatstonesche Messbrücke integriert. Darunter versteht man eine Schaltung wie in Abb. 9.1 gezeigt. Sind die beteiligten Widerstände so gewählt, dass $R_1/R_2 = R_3/R_4$, dann ist $U_5 = 0$. Die Änderung eines einzelnen Widerstandes, in diesem Fall des Dehnungsmessstreifens, stört dieses Gleichgewicht, und durch den Widerstand R_5 fließt ein Strom. Wird dieser konstant gehalten, dann ist die angelegte Spannung ein Maß für die Auslenkung der schwingenden Masse. Die Anwendung einer Wheatstoneschen Brücke optimiert also den Kontrast des Messsignals, indem sie den Gleichanteil herausfiltert.

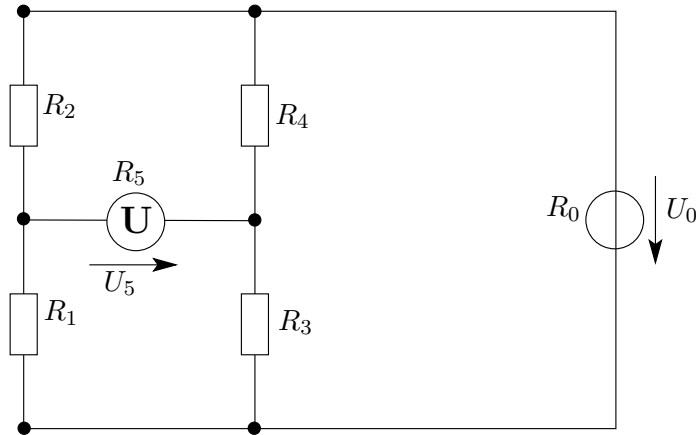


Abbildung 9.1: Wheatstonesche Messbrücke.

9.2 Umrechnung des Messsignals

Die Messelektronik der Versuchsstands liefert eine zur Auslenkung der schwingenden Masse proportionale elektrische Spannung. Die Ermittlung des Proportionalitätsfaktors geschah durch Vergleich mit dem Signal eines Beschleunigungsaufnehmers, einer kleinen Sonde, die an der schwingenden Masse angebracht eine zur Beschleunigung proportionale Spannung liefert. Bei Anregung einer harmonischen Schwingung mit $\omega_{\text{ext}}/2\pi = 10,45$ Hz lieferte der Aufnehmer ein Signal der Amplitude $\hat{B} = 0,227$ V (Abb. 9.2). Bei einer Empfindlichkeit von $s = 9,99 \cdot 10^{-3} \text{ Vs}^2/\text{m}$ laut Werk entspricht das einer Schwingungsamplitude von

$$\hat{x} = \frac{\hat{B}/s}{\omega_{\text{ext}}^2} = 5,27 \text{ mm}. \quad (9.1)$$

Gleichzeitig lieferte der Dehnungsmessstreifen ein Signal der Amplitude $\hat{D} = 0,901$ V. Der Umrechnungsfaktor beträgt also

$$\frac{\hat{x}}{\hat{D}} = 5,85 \frac{\text{mm}}{\text{V}}. \quad (9.2)$$

9.3 Resonanzkurven

Abb. 9.3 zeigt die gemessenen Resonanzkurven für alle verfügbaren Reibelemenmassen, Abb. 9.4 das gleiche bei reduzierter Federkonstante. Tatsächlich ergibt sich ein Bild wie in Abb. 6.6 oder 8.25. Deutlich erkennbar ist die Abflachung der Kurven innerhalb des Nichtlinearen Regimes für große Werte von m_D sowie die Verlagerung der Ablösefrequenzen hin zu kleineren Werten.

Eine zweifache Messung für $m_D = 0,250$ kg zeigt Abb. 9.5, wobei das Reibelement bei einer Messreihe fest auf der schwingenden Masse fixiert war, bei der

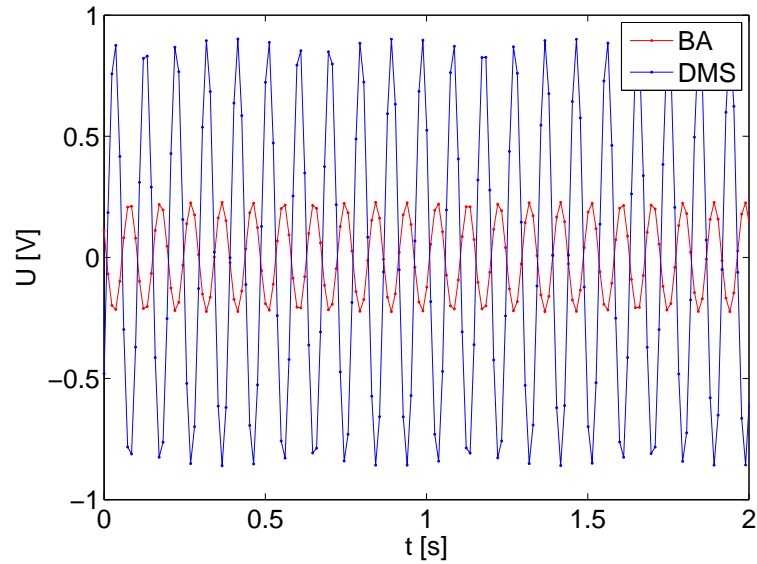


Abbildung 9.2: Messsignale von Beschleunigungsaufnehmer (BA) und Dehnungsmessstreifen (DMS).

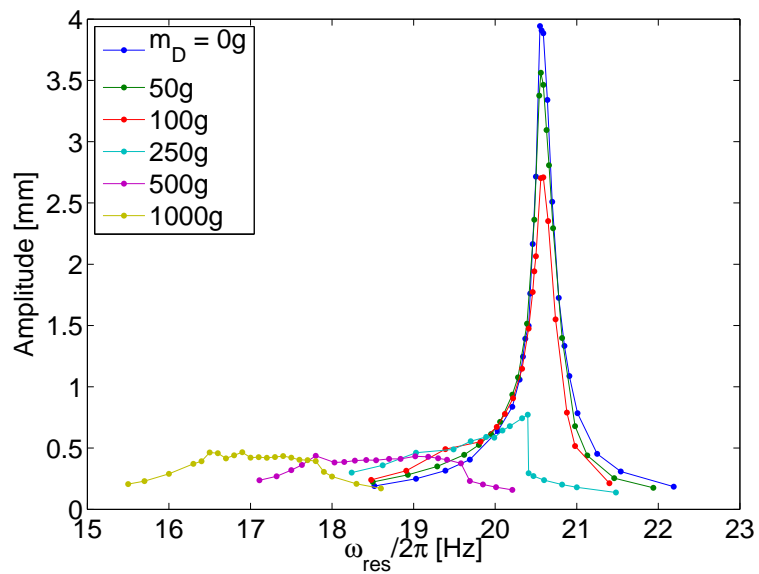


Abbildung 9.3: Gemessene Resonanzkurven bei verschiedenen Reibelementenmassen.

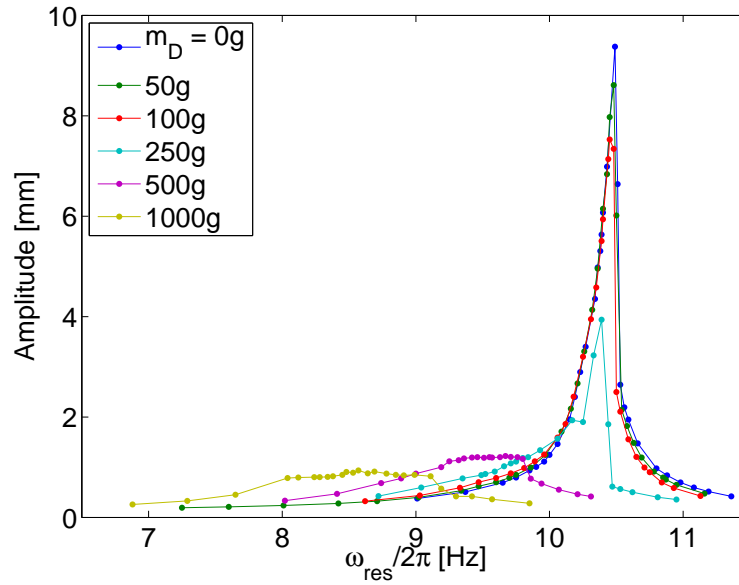


Abbildung 9.4: Gemessene Resonanzkurven bei kleinerer Federkonstante.

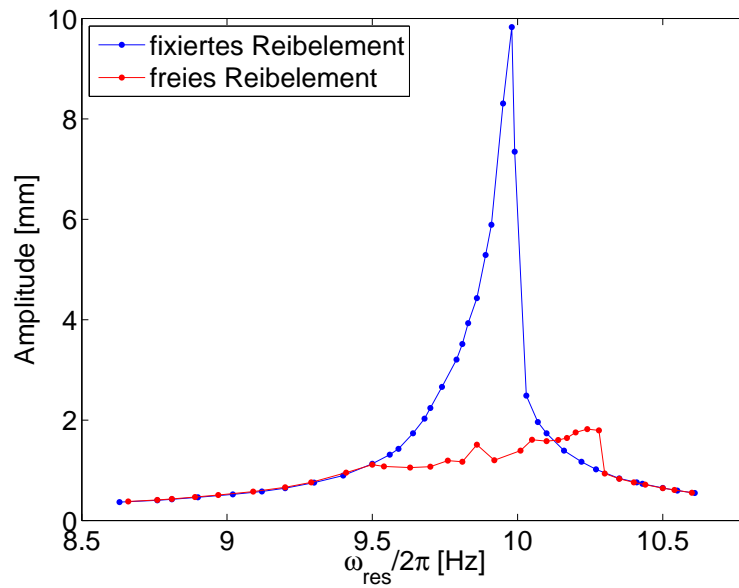


Abbildung 9.5: Zweifache Messung der Kurve zu $m_D = 0,250$ kg in Abb. 9.4 mit fixiertem und freiem Reibelement.

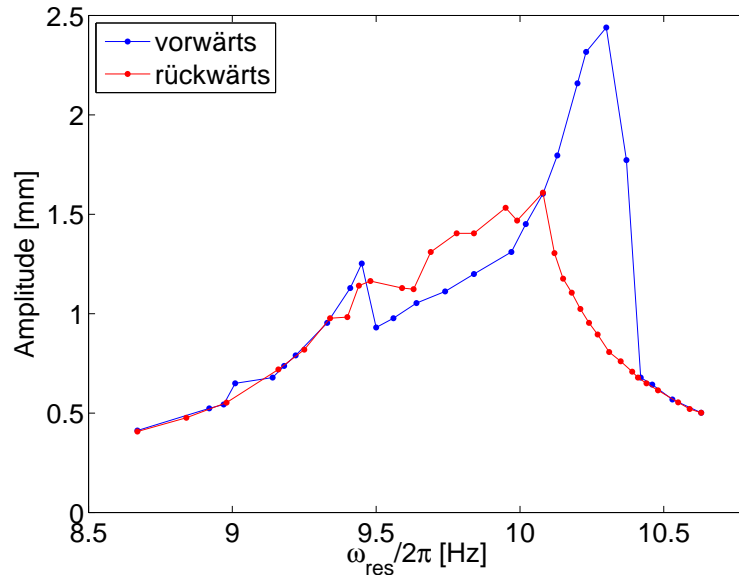


Abbildung 9.6: Resonanz am rechten Rand des Nichtlinearen Regimes: Zweifache Messung der Kurve zu $m_D = 0,250$ kg in Abb. 9.4.

anderen hingegen frei beweglich. Die Messung bestätigt den negativen Dämpfungseffekt des Reibkontakts am rechten Rand des Nichtlinearen Regimes, der bereits in Abb. 6.2 zu erkennen ist und bei der Erklärung der Systemdynamik in Kap. 6.3 eine wesentliche Rolle spielt. Wird die Resonanzkurve bei der Messung zwei mal in unterschiedliche Richtung durchlaufen, kommt es zur Hysterese (Abb. 9.6). Am rechten Rand des Nichtlinearen Regimes existiert dadurch ein breites Intervall mit zwei verschiedenen Lösungen. Eine davon ist eine reine Haftlösung, die andere eine nichtlineare Haft-Rutsch-Lösung. Auch das entspricht den Vorhersagen des Modells, siehe zum Beispiel Abb. 7.2.

Auch im übrigen Teil des Nichtlinearen Regimes verlaufen die beiden Kurven in Abb. 9.6 nicht deckungsgleich. Ob dies aber auf Koexistenz von Attraktoren zurückzuführen ist, ist ungewiss. Möglicherweise liegt auch eine Ortsabhängigkeit des Gleitreibungskoeffizienten vor, die je nach Position des Reibelements auf der Führungsschiene einen unterschiedlichen Dämpfungseffekt bewirkt.

Kapitel 10

Schlussbetrachtung

Gegenstand dieser Arbeit war ein Reibungszosillator, aufgebaut aus einem getriebenen eindimensionalen Masseschwinger, auf dem eine frei bewegliche Dämpfermasse aufliegt. Der Oszillator repräsentiert die denkbar einfachste Umsetzung eines Dämpfungsprinzips, wie es vor allem bei der Konstruktion von Strahltriebwerken zur Anwendung kommt, um durch Luftkräfte angeregten Schwingungen von Turbinenschaufeln entgegenzuwirken. Auf die Entstehung dieser Schwingungen wurde in Kapitel 2 eingegangen, um den Hintergrund der Arbeit zu verdeutlichen.

In Kapitel 3 wurde der Oszillator vorgestellt und anhand einer Kräftebilanz ein mathematisches Modell hergeleitet, das eine numerische Untersuchung seiner Dynamik ermöglicht. Die dazu notwendige Implementierung der Gleichungen war Gegenstand des Kapitels 4. Insbesondere wurde hier auf die Schwierigkeiten eingegangen, die sich im Zusammenhang mit der Unstetigkeit der Bewegungsgleichungen ergeben, sowie auf die Routinen, mit denen diesen Schwierigkeiten zu begegnen ist. Eine detaillierte Auseinandersetzung mit besagten Unstetigkeiten fand in Kapitel 5 statt. Dabei wurde das Modell des untersuchten Oszillators in einen größeren wissenschaftlichen Zusammenhang gestellt und seine Phasenraumtopologie hergeleitet. Das Oszillatormodell gehört einer als *Filippov-Systeme* bekannten Klasse dynamischer Systeme an, die sich durch Diskontinuitäten im Phasenraum auszeichnen. Dazu gehören auch *sliding sections* genannte Untermannigfaltigkeiten – in dieser Arbeit Gleitebenen genannt –, die auf den Fluss in ihrer Umgebung attraktiv wirken und dem System vorübergehend oder dauerhaft einen Freiheitsgrad entziehen. Bei der Beschreibung von Systemen mit trockener Reibung repräsentieren sie physikalisch den Zustand der Haftreibung zwischen zwei Kontaktflächen.

Die Dynamik des Oszillators und ihre Erklärung anhand seiner besonderen Phasenraumtopologie war Thema der Kapitel 6 bis 8. Die Untersuchungen, durchgeführt unter massivem Einsatz numerischer Simulation anhand des Modells aus Kapitel 3, konzentrierten sich vor allem auf die Resonanzkurve und deren Beeinflussung durch die aufliegende Dämpfermasse. Die Abweichungen von der Re-

sonanzkurve des linearen Oszillators beschränken sich auf ein im Allgemeinen begrenztes Intervall um die Resonanzfrequenz. Außerhalb dieses als *Nichtlineares Regime* (NLR) bezeichneten Intervalls treten keine hinreichend großen Beschleunigungen auf, um die aufliegende Dämpfermasse ins Rutschen zu versetzen.

In der Nähe der Resonanzfrequenz des reinen Haftfalls hingegen, wo das Reibelement durch die auftretenden Trägheitskräfte in Bewegung gehalten wird, beschreibt die Resonanzkurve infolge der Dämpfungswirkung einen abgeflachten Verlauf. Die Dynamik ist in diesem Bereich stark geprägt durch sogenannte *sliding bifurcations*, hier Gleitbifurkationen genannt. Diese spezielle Klasse von Bifurkationen ist typisch für Filippov-Systeme. Sie treten auf, wenn die Trajektorie mit dem Rand der Gleitebene in Wechselwirkung tritt und sind bekannt dafür, mitunter chaotische Fenster einzuleiten, wo sie nach klassischer Bifurkationstheorie nicht zu erwarten wären. Ein Verhalten, das auch in dieser Arbeit nachgewiesen wurde, im Fall des hier untersuchten Systems aber anhand der Phasenraumtopologie nachvollziehbar ist. Vergangene Arbeiten konzentrierten sich dabei größtenteils auf eine als *grazing sliding* bekannte Unterart von Gleitbifurkationen, die in der Dynamik des in dieser Arbeit untersuchten Oszillators allerdings nicht vorkommt. Stattdessen dominiert hier ein als *adding sliding* bekanntes Szenario, hier Mehrfachgleitbifurkation genannt. Damit wird, nach bestem Wissen des Autors, in der vorliegenden Arbeit erstmals nachgewiesen, dass neben dem *grazing sliding* auch die *adding sliding*-Bifurkation in der Lage ist, periodische Orbits zu zerstören und chaotische Fenster einzuleiten.

Jede Gleitbifurkation wirkt sich auch auf die Schwingungsamplitude aus. Bei hinreichend starker Kopplung der beiden Massen sind die auftretenden Amplitudensprünge aber quantitativ vernachlässigbar. Zu beobachten ist eine Annäherung der Resonanzkurve an eine flach verlaufende Grenzfunktion für hinreichend große Reibelementmassen.

Kapitel 9 schließlich stellte einige Messreihen vor, die an einer experimentellen Umsetzung des in Kapitel 3 vorgestellten Oszillators vorgenommen wurden. Auf einen direkten Vergleich von gemessenen mit errechneten Resonanzkurven wurde verzichtet. Dazu hätte es einer genauen Ermittlung der Reibungscharakteristik des Versuchsaufbaus bedurft. Ein Aufwand, der im Rahmen dieser Arbeit nicht vertretbar gewesen wäre. Wohl aber gelang es, anhand der Messungen einige Voraussagen des verwendeten Modells zu bestätigen.

Insgesamt verblieb für den Versuchsaufbau am Ende nur noch wenig Zeit. Sein Potential ist mit den in dieser Arbeit vorgestellten Messreihen sicher noch nicht ausgeschöpft. Hauptaufgabe eventueller Nachfolgearbeiten sollte aber der schrittweise Ausbau des Oszillatormodells sein, um es nach und nach dem Kernproblem anzunähern, das den Hintergrund dieser Arbeit darstellt: Der Dämpfung eines Kranzes schwingender Turbinenschaufeln. Logische Schritte wären die räumliche Begrenzung der Auflagefläche, die Erweiterung der Schwingung in drei Raumrichtungen und die Betrachtung mehrerer gekoppelter Masseschwinger, von denen sich jeweils zwei ein Reibelement teilen. Ein entsprechender Versuchsstand, der

alle genannten Punkte verwirklicht, wurde am DLR in Göttingen von MARCEL RÖSSLING im Rahmen einer Masterarbeit bereits entworfen [49].

Danksagung

Die vorliegende Dissertation stellte in der Arbeit des Instituts für Aeroelastik am DLR in Göttingen eine Art experimentelles Seitenprojekt dar, das in die laufende Arbeit des Instituts nur wenig eingebunden war. Ein dementsprechender Dank gebührt der Institutsleitung unter Prof. Lorenz Tichy für das in mich gesetzte Vertrauen und die Möglichkeit, diese Arbeit zu verwirklichen. Ebenso zu danken habe ich Prof. Andreas Dillmann, Leiter des Instituts für Aerodynamik und Strömungstechnik, für die Betreuung dieser Dissertation als Doktorvater und dafür, dass er sich trotz eines vollen Terminplans Zeit genommen hat, wann immer ich Hilfe benötigte. Der gleiche Dank gilt auch Dr. Robert Mettin vom Dritten Physikalischen Institut (DPI) der Universität Göttingen. Auch er gehört meinem Betreuungsausschuss an und hat diese Arbeit mehr als einmal mit Rat und Ideen bereichert.

Eine unentbehrliche Hilfe war mir Prof. Ulrich Parlitz von der *Biomedical Physics Group* des Göttinger MPIs für Dynamik und Selbstorganisation. Mit seinem Wissen und seiner reichen Erfahrung im Bereich nichtlinearer Dynamik und komplexer Systeme stand er mir stets mit Rat und Tat zur Seite und zeigte mir die Richtung, wenn ich manchmal nicht mehr weiter wusste. Dafür sei auch ihm an dieser Stelle mein herzlichster Dank ausgesprochen. Wo es um Fragen der Aeroelastik oder der Triebwerkstechnik ging, konnte ich mich stets an Dr. Holger Hennings oder an Dr. Joachim Belz, beide Institut für Aeroelastik des DLRs, wenden. Für ihr Interesse an meiner Arbeit und häufige Hilfe und Beratung sei auch ihnen herzlich gedankt.

Ebenfalls ein Dank für ihre Hilfsbereitschaft gebührt den Angehörigen des Elektroniklabors meines Instituts, ganz besonders Herrn Heiko Böhlken für die Installation der Messelektronik.

Nicht unerwähnt bleiben soll auch meine liebe Frau Melanie. Ihr gilt mein Dank für ihr Vertrauen und ihre Geduld in den zurückliegenden Jahren, vor allem aber für die letzten Wochen, für ihr Bemühen, mir trotz starker Einspannung im eigenen Beruf den Rücken freizuhalten und für ihr Verständnis, wenn ich lange Abende statt mit ihr lieber mit meinem Rechner verbrachte, um diese Arbeit zu Papier zu bringen. Bei allen Schwierigkeiten, die auch sie betrafen, ließ sie mich

meinen eingeschlagenen Weg zu Ende gehen. Deshalb sei auch ihr an dieser Stelle mein Dank ausgesprochen.

Göttingen, im März 2011

Alexander Többens

Literaturverzeichnis

- [1] *The Jet Engine*, 2. überarbeitete Auflage, Rolls-Royce plc (1996)
- [2] K. Aainsqatsi, Wikimedia Commons, freigegeben unter der GNU Free Documentation Licence. (http://commons.wikimedia.org/wiki/Image:Turbofan_operation_%28lbp%29.png)
- [3] B. Armstrong-Hélouvry, P. Dupont, C. Canudas de Wit: *A survey of models, analysis tools and compensation methods for the control of machines with friction*, Automatica **30**, 1083 (1994)
- [4] M. Di Bernardo, C. J. Budd, A. R. Champneys, P. Kowalczyk: *Piecewise-Smooth Dynamical Systems: Theory and Applications*, Springer, New York (2008)
- [5] M. di Bernardo, M. I. Feigin, S. J. Hogan, M. E. Homer: *Local Analysis of C-Bifurcations in n-Dimensional Piecewise-Smooth Dynamical Systems*, Chaos, Solitons & Fractals **10**(11), 1881 (1999)
- [6] Di Bernardo, M.; Kowalczyk, P.; Nordmark A.: *Bifurcations of Dynamical Systems with Sliding: derivation of normal form mappings*, Physica D **170** (2002)
- [7] M. di Bernardo, P. Kowalczyk, A. Nordmark: *Sliding bifurcations: a novel mechanism for the sudden onset of chaos in dry-friction oscillators*, IJBC, **13**(10), 2935 (2003)
- [8] T. Berruti, C. M. Furrone, M. Pizzolante, M. M. Gola: *Fatigue Damage Prevention on Turbine Blades: Study of Underplatform Damper Shape*, Key Engineering Materials **374**, 159 (2007)
- [9] L. C. Bo, D. Pavelescu: *The friction-speed relation and its influence on the critical velocity of stick-slip motion*, Wear **82**, 277 (1982)
- [10] M. Bobo: *Vibration Damping of Gas Turbine Engine Buckets*, U.S. Patent No. 5,156,528 (1992)

- [11] A. R. Champneys, M. di Bernardo: *Piecewise smooth dynamical systems*, Scholarpedia 3(9):4041 (2008)
- [12] H. Dankowicz, A. B. Nordmark: *On the origin an bifuractions of stick-slip oscillation*, PhysicaD **136**, 280 (2000)
- [13] A. G. Dodd, E. Pateman: *Aerofoil Blade Damping*, U.S. Patent No. 4,914,574 (1990)
- [14] S. J. Dokos, Trans. A.S.M.E. J. appl. Mech. **68A** (1946), 146
- [15] Enright, W. H.; Jackson, K. R.; Norsett, S. P.; Thomsen, P. G.: *Interpolants for Runge-Kutta formulas*, ACM Transactions on Mathematical Software **12**, 193 (1986)
- [16] M. I. Feigin: *Doubling of the oscillation period with C-bifurcations in piecewise continuous systems*, Prikladnaya Matematika i Mekhanika **43**, 961 (1970) (auf russisch)
- [17] M. I. Feigin: *Forced oscillations in systems with discontinuous nonlinearities* (1994) (auf russisch)
- [18] M. I. Feigin: *The increasingly complex structure of the bifurcation tree of a piecewise-smooth system*, J. Appl. Maths. Mechs. **59**, 853 (1995)
- [19] U. Galvanetto: *Bifurcations and chaos in a four-dimensional mechanical system with dry friction*, Journal of Sound and Vibration **204**(4), 690 (1997)
- [20] U. Galvanetto, S. R. Bishop: *Dynamics of a Simple Damped Oscillator Undergoing Stick-Slip Vibrations*, Meccanica **34**, 337 (1999)
- [21] U. Galvanetto: *Numerical computation of Lyapunov exponents in discontinuous maps implicitly defined*, Computer Physics Communications **131**, 1 (2000)
- [22] D. P. Hess, A. Soom: *Friction at a lubricated line contact operating at oscillating sliding velocities*, J. Tribol. **112**, 147 (1990)
- [23] N. Hinrichs; M. Oestreich; K. Popp: *Dynamics of Oscillators with Impact and Friction*, Chaos, Solitons & Fractals **8**(4), 535 (1997)
- [24] E. A. Jackson: *Perspectives of nonlinear dynamics 2*, Cambridge University Press (1990)
- [25] M. R. Jeffrey, A. R. Champneys, M. di Bernardo, S. W. Shaw: *Catastrophic sliding bifurcations and onset of oscillations in a superconducting resonator*, PRE **81**(1) (2010)

- [26] M. J. Kruse, C. Pierre: *Localization in Blades Disks, Part II: Forced Response*, ASME Paper 97-GT-502, Int. Gas Turbine & Aeroeng. Congress & Exh., Orlando (1997)
- [27] Kowalczyk, P.; di Bernardo, M.: *On a novel class of bifurcations in hybrid dynamical systems – the case of relay feedback systems*, Proceedings of Hybrid Systems Computation and Control, Springer-Verlag, 361 (2001)
- [28] L. Lamba: *Chaotic, regular and unbounded behaviour in the elastic impact oscillator*, Physica D **82**, 117 (1995)
- [29] S. C. Lim, M. F. Ashby, J. H. Brunton: *The effects of sliding conditions on the dry friction of metals*, Acta Metall. **37**(3), 767 (1989)
- [30] I. López, J. M. Busturia, H. Nijmeijer: *Energy dissipation of a friction damper*, Journal of Sound and Vibration **278**, 539 (2004)
- [31] Meijaard, J. P.: *Efficient Numerical Integration of the Equations of Motion of Non-Smooth Mechanical Systems*, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, **77**(6), 419 (1997)
- [32] P. W. Mueller, J. T. Stevenson, J. Panovsky, C. C. Glynn, S. Y. Park, D. E. Wines: *Blade Damper*, U.S. Patent No. 5,226,784 (1993)
- [33] P. C. Müller: *Calculation of Lyapunov Exponents for Dynamic Systems with Discontinuities*, Chaos, Solitons & Fractals **5**(9), 1671 (1995)
- [34] C. J. Nelson: *Turbine Blade Damper*, U.S. Patent No. 4,182,598 (1980)
- [35] A. B. Nordmark: *Non-periodic motion caused by grazing incidence in an impact oscillator*, Journal of Sound and Vibration **145**(2), 279 (1991)
- [36] L. Panning, W. Sextro, K. Popp: *Spatial Dynamics of Tuned and Mistuned Bladed Disks with Cylindrical and Wedge-Shaped Friction Dampers*, IJRM **9**(3), 219 (2003)
- [37] L. Panning: *Auslegung von Reibelementen zur Schwingungsdämpfung von Turbomaschinenschaufeln*, Dissertation an der Fakultät für Maschinenbau der Universität Hannover, Hannover (2005)
- [38] U. Parlitz, W. Lauterborn: *Superstructure in the bifurcation set of the Duffing equation $\ddot{x} + d\dot{x} + x + x^3 = f \cos(\omega t)$* , Physics Letters **107A**(8), 351 (1985)
- [39] U. Parlitz: *Common dynamical features of periodically driven strictly dissipative oscillators*, IJBC **3**(3), 703 (1993)

- [40] U. Parlitz, A. Hornstein, D. Engster, F. Al-Bender, V. Lampaert, T. Tjahjowidodo, S. D. Fassois, D. Rizos, C. X. Wong, K. Worden, G. Manson: *Identification of pre-sliding friction dynamics*, Chaos **14**(2), 420 (2004)
- [41] E. P. Petrov, D. J. Ewins: *Analytical Formulation of Friction Interface Elements for Analysis of Nonlinear Multi-Harmonic Vibrations of Bladed Disks*, J. Turbomach. **125**, 364 (2003)
- [42] E. P. Petrov, D. J. Ewins: *Effects of Damping and Varying Contact Area at Blade-Disk Joints in Forced Response Analysis of Bladed Disk Assemblies*, J. Turbomach. **128**, 403 (2006)
- [43] E. P. Petrov, D. J. Ewins: *Advanced Modeling of Underplatform Friction Dampers for Analysis of Bladed Disk Vibration*, J. Turbomach. **129**, 143 (2007)
- [44] F. Pfeiffer, M. Hajek: *Stick-slip motion of turbine blade dampers*, Philosophical Transactions R. Soc. Lond. A **338**, 503 (1992)
- [45] S. Philippon, G. Sutter, A. Molinari: *An experimental study of friction at high sliding velocities*, Wear **257**, 777 (2004)
- [46] K. Popp, P. Stelzer: *Non-linear oscillations of structures induced by dry friction*, Nonlinear dynamics in engineering systems (ed. W. Schiehlen), Springer, New York (1990)
- [47] K. Popp, L. Panning, W. Sestro: *Vibration Damping by Friction Forces: Theory and Applications*, Journal of Vibration and Control **9**, 419 (2003)
- [48] W. H. Press: *Numerical Recipes, Third Edition*, Cambridge University Press (2007)
- [49] M. Rößling: *VIGOR – Entwicklung eines Versuchsstandes für irreguläre gedämpfte Oszillationen mit Reibung*, Masterarbeit an der Hochschule für angewandte Wissenschaft und Kunst (HAWK), Göttingen (2009)
- [50] K. Y. Sanliturk, D. J. Ewins, A. B. Stanbridge: *Underplatform Dampers for Turbine Blades: Theoretical Modeling, Analysis, and Comparison With Experimental Data*, Journal of Engineering for Gas Turbines and Power **123**, 919 (2001)
- [51] S. W. Shaw: *On the dynamic response of a system with dry friction*, Journal of Sound and Vibration **108**(2), 305 (1992)
- [52] G. J. Stein, R. Zahoranský, P. Můčka: *On dry friction modelling and simulation in kinematically excited systems*, Journal of Sound and Vibration **311**, 74 (2008)

- [53] J. Stoiber, W. Elsner: *Reparatur von Gasturbinenschaufeln: Technische Machbarkeit versus Wirtschaftlichkeit*, Allianz-Report für Risiko und Sicherheit **72**(2), 108 (1999)
- [54] N. B. Tuffilaro: *Symbolic Dynamics in Mathematics, Physics, and Engineering*, Manuskript eines Vortrags am *Institute for Mathematics and its Applications* auf dem *Industrial Problems Seminar*, Universität Minnesota (1998)
- [55] N. B. Tuffilaro, P. Wyckoff, R. Brown, T. Schreiber, T. Molteno: *Topological time-series analysis of a string experiment and its synchronized model*, Physical Review E **51**(1), 164 (1995)
- [56] A. Tustin: *The effects of backlash and of speed-dependent friction on the stability of closed-cycle control systems*, J. Inst. Electr. Eng. **94**, 143 (1947)
- [57] V. I. Utkin: *Sliding Modes in Control Optimisation*, Springer-Verlag, Berlin (1992)
- [58] S. T. Wei, C. Pierre: *Localization Phenomena in Mistuned Assemblies with Cyclic Symmetry. Part I: Free Vibrations*, Trans. ASME, Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design **110**, 429 (1988)
- [59] S. T. Wei, C. Pierre: *Localization Phenomena in Mistuned Assemblies with Cyclic Symmetry. Part II: Forced Vibrations*, Trans. ASME, Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design **110**, S. 439–449 (1988)
- [60] J. Wojewoda, A. Stefanski, M. Wiercigroch, T. Kapitaniak: *Hysteretic effects of dry friction: modelling and experimental studies*, Phil. Trans. R. Soc. A **366**, 747 (2008)
- [61] A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney, J. A. Vastano: *Determining Lyapunov Exponents from a Time Series*, Physica D **16**(3), 285 (1985)
- [62] K. Worden, C. X. Wong, U. Parlitz, A. Hornstein, D. Engster, T. Tjahjowidodo, F. Al-Bender, D. Rizos, S. D. Fassois: *Identification of pre-sliding and sliding friction dynamics: Grey box and black-box models*, Mechanical Systems and Signal Processing **21**, 414 (2007)
- [63] Y. Yoshitake, A. Sueoka: *Forced Self-Excited Vibration with Dry Friction*, Applied nonlinear dynamics and chaos of mechanical systems with discontinuities, World Scientific (2000)

Lebenslauf

Zur Person

Name: Alexander Maria Többens
Geburtsdatum: 26. April 1981
Geburtsort: Nordhorn
Staatsangehörigkeit: deutsch
Familienstand: verheiratet

Ausbildung

06/2001 Abitur am Gymnasium Nordhorn
10/2001 Beginn des Grundstudiums Physik an der Georg-August-Universität Göttingen
10/2003 Vordiplom
08/2006 Beginn der Diplomarbeit am Dritten Physikalischen Institut (DPI): *Chaosunterdrückung im Halbleiterlaser mit mehrfacher optischer Rückkopplung*
06/2007 Diplom
10/2007 Beginn der Dissertation am Institut für Aeroelastik des Deutschen Zentrums für Luft- und Raumfahrt (DLR) in Göttingen
05/2011 Promotion

Lehrerfahrung

10/2005 – 12/2006 Studentische Hilfskraft am *DLR_School_Lab* Göttingen
04/2008 – 07/2008 Betreuung des Strömungsmechanischen Praktikums am DLR in Göttingen
10/2008 – 02/2010 Betreuung des Fortgeschrittenenpraktikums am Dritten Physikalischen Institut in Göttingen

Auslandsaufenthalte

08/2004 – 06/2005 Universität i Bergen, Norwegen