

STRUKTURBILDUNG UND TURBULENZ.
EINE NUMERISCHE STUDIE ZUR TURBULENTEN
RAYLEIGH-BÉNARD KONVEKTION

STRUKTURBILDUNG UND TURBULENZ.
EINE NUMERISCHE STUDIE ZUR TURBULENTEN
RAYLEIGH-BÉNARD KONVEKTION

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultäten
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von
THOMAS HARTLEP
aus Weimar

Göttingen 2004

D7

Referent: Prof. Dr. A. Tilgner

Korreferent: Prof. Dr. D. Ronneberger

Tag der mündlichen Prüfung: 12. Juli 2004

Inhalt

<i>Notation</i>	viii
1 Einleitung	1
2 Modellsystem	5
2.1 Geometrie	5
2.2 Problemgleichungen	6
2.3 Boussinesq-Näherung	10
3 Numerische Simulation	15
3.1 Beschreibung des numerischen Verfahrens	16
3.1.1 Zerlegung der Geschwindigkeit	16
3.1.2 Fourier-Zerlegung	18
3.1.3 Behandlung der Temperatur- und Toroidalfelder	19
3.1.4 Verfahren für das Poloidalfeld	25
3.2 Umsetzung des Verfahrens	26
3.3 Parallelisierung	31
3.4 Numerische Auflösung	33
3.5 Zeitschrittsteuerung und Simulationsdauer	34
3.6 Variationen des Verfahrens	38
3.6.1 Verkippen der Fluidschicht	39
3.6.2 Einbeziehung von Seitenwänden	40

3.6.3	Unendliche Prandtl-Zahl	42
4	Strömungsstrukturen	45
4.1	Konvektionsmuster	46
4.1.1	Prandtl-Zahl 0.7	46
4.1.2	Mittlere bis große Prandtl-Zahlen	52
4.2	Horizontale Längenskalen	58
4.2.1	Spektralanalyse	59
4.2.2	Wellenlängen der großskaligen Strukturen	66
4.3	Einfluss des Aspektverhältnisses	69
4.3.1	Große Aspektverhältnisse bis $\Gamma = 20$	69
4.3.2	Kleine Aspektverhältnisse	72
4.4	Asymmetrie in den Auf- und Abströmen	77
5	Erzeugung von „Mean Flows“	81
5.1	Motivation	81
5.2	Mechanismen in laminarer Konvektion	84
5.3	Turbulente Mean Flows	89
5.4	Weitere Erklärungsversuche der Experimente	92
5.4.1	Kippen der Fluidschicht	92
5.4.2	Seitenwände	94
5.5	Vergleich mit Simulationen ohne Mean Flow	96
6	Nusselt- und Reynolds-Zahlen	99
6.1	Die Nusselt-Zahl	99
6.2	Die Reynolds-Zahl	104
6.3	Grenzschichten	105
7	Zusammenfassung	117
A	Tabellen der wichtigsten Simulationsergebnisse	121
B	Bedienungsanleitung für die Simulationssoftware MPPLCONV	127
B.1	Einstellungen	128

B.2	Kompilierung	131
B.3	Programmstart	132
B.4	Ausgabeformate	134
<i>Literatur</i>		141
<i>Abbildungen</i>		147
<i>Tabellen</i>		149
<i>Lebenslauf</i>		151

Notation

t	Zeit
x, y, z	Kartesische Koordinaten
\hat{x}, \hat{y}	Einheitsvektoren in horizontalen Richtungen
\hat{z}	Einheitsvektor in vertikaler Richtung
\vec{r}	Ortsvektor
\vec{k}	Horizontaler Wellenvektor
d	Dicke der Fluidschicht
l_x, l_y	Periodizitätslänge der Schicht in x - bzw. y -Richtung
Γ_x, Γ_y	Aspektverhältnis in x - bzw. y -Richtung
\vec{g}	Gravitationsbeschleunigung
α	Thermischer Volumenausdehnungskoeffizient
κ	Temperaturleitfähigkeit (thermische Diffusivität)
K	Wärmeleitfähigkeit
ν	Kinematische Viskosität
μ	Dynamische Viskosität
C_p	Wärmekapazität bei konstantem Druck
ρ	Dichte
p	Druck
π	Abweichung des Druckes vom statischen Druckprofil
\vec{v}	Geschwindigkeitsfeld

\vec{U}	Geschwindigkeit der mittleren Strömung (Mean Flow)
\vec{U}_{symm}	symmetrischer Anteil des Mean Flows
\vec{U}_{asymm}	antisymmetrischer Anteil des Mean Flows
ϕ	Poloidalfeld
ψ	Toroidalfeld
T	Temperaturfeld
θ	Abweichung der Temperatur vom statischen Profil
∂_t	partielle Ableitung nach der Zeit
$\partial_x, \partial_y, \partial_z$	partielle Ableitung nach den Raumrichtungen x, y, z
∇	Nabla Operator
Pr	Prandtl-Zahl
Ra	Rayleigh-Zahl
Gr	Grashof-Zahl
Nu	Nusselt-Zahl
E_{kin}	gesamte kinetische Energie pro Volumen
E_ϕ	kinetische Energie pro Volumen im Poloidalfeld
E_ψ	kinetische Energie pro Volumen im Toroidalfeld
E_{mf}	kinetische Energie pro Volumen im Mean Flow
E_{symm}	Energie im symmetrischen Mean Flow Anteil
E_{asymm}	Energie im antisymmetrischen Anteil des Mean Flow

1

Einleitung

Das wissenschaftliche Interesse an thermischen Konvektionströmungen beginnt im Wesentlichen vor über 100 Jahren mit den Experimenten von Bénard [9], der dünne Flüssigkeitsschichten von unten beheizte und dabei im Fluid die Ausbildung einer Strömung beobachten konnte. Auch wenn man mehrere Jahrzehnte später festgestellt hat, dass in diesen Experimenten hauptsächlich die Temperaturabhängigkeit der Oberflächenspannung des Fluid für die beobachteten Strömungen verantwortlich war [10, 51, 28] und nicht etwa die thermische Instabilität, so waren dieses Experimente doch Anstoß für ein bis heute ungebrochenes Interesse an thermischen Konvektionsströmungen.

Tatsächlich ist thermische Konvektion eine in der Natur sehr häufig vertretene Strömungsform. So spielen Konvektionsvorgänge in der Atmosphäre, den Ozeanen und selbst im Erdmantel eine wichtige Rolle. Das Prinzip der thermischen Instabilität, das hinter diesen Konvektionsströmungen steht ist dabei sehr einfach. Befindet sich nämlich warmes und damit leichtes Fluid unter kälterem, schwerem Fluid, so erfährt es im Gravitationsfeld einen Auftrieb. Aufgrund dieser Kräfte setzen dann Strömungen ein, sobald die Temperaturunterschiede groß genug sind.

In dieser Arbeit wurde sich mit der so genannten Rayleigh-Bénard Konvektion beschäftigt, wie die Konvektion in einer horizontalen, von unten gleichmäßig beheizten Fluidschicht genannt wird. Das Verhalten dieses Systems ist für kleine Temperaturunterschiede bzw. kleine Rayleigh-Zahlen¹

¹Die Rayleigh-Zahl stellt ein dimensionsloses Maß für den Temperaturunterschied dar.

analytisch bekannt [21, 28]. Konvektionsrollen und Konvektionszellen sind dabei auftretende, regelmäßige Strömungsmuster. Wird die Rayleigh-Zahl erhöht, so werden die Strömungen immer komplexer und schließlich turbulent. Turbulente Strömungen, die durch chaotische, nicht-periodische Vorgänge gekennzeichnet sind, sind in der Natur der Regelfall. Trotzdem kann dabei auf großen Skalen eine gewisse Struktur und Ordnung in den Strömungen erhalten bleiben, wie das Beispiel der Wolkenstraßen² in der Atmosphäre zeigt.

Das Verhalten solcher großskaligen Strukturen in turbulenten Strömungen ist jedoch kaum verstanden. Dies liegt unter anderen daran, dass das Studium dieser Strukturen Experimente oder numerische Simulationen bei hohen Rayleigh-Zahlen erfordert, die aber auch groß genug sind, um den Strukturen Platz zu bieten. Aus praktischen Gründen waren bisher jedoch sowohl die Experimente als auch die Simulationen bei hohen Rayleigh-Zahlen auf kleine Aspektverhältnisse³ beschränkt. Viele Experimente verwenden Werte von $\Gamma = 1$ oder $\Gamma = 0.5$ (zum Beispiel [56, 67, 22, 49, 66, 58, 36]), können dabei aber extreme Rayleigh-Zahlen erreichen. Tatsächlich gibt es nur sehr wenige Experimente bei großen Aspektverhältnissen und Rayleigh-Zahlen größer als 10^6 , dies sind im Wesentlichen die folgenden drei [30, 45, 16]. Bei den meisten Simulationen werden bisher auch nur eher kleine Γ verwendet ($\Gamma = 4$ bei [43], $\Gamma = 1/2$ bei [63] oder $\Gamma = 2$ bei [13]).

Durch den Einsatz von Parallelrechnern war es in dieser Arbeit möglich, auch bei einem verhältnismäßig großen Aspektverhältnis von $\Gamma = 10$ immerhin Rayleigh-Zahlen von 10^7 zu erreichen und damit einen Beitrag zum Verständnis großskaliger Strukturen in turbulenten Konvektionsströmungen zu leisten.

Gliederung der Arbeit

Die vorliegende Dissertationsschrift ist wie folgt aufgebaut: Nach dieser kurzen Einleitung wird das Rayleigh-Bénard Problem in Kapitel 2 genau definiert. Dabei werden die relevanten Gleichungen, Randbedingungen und

²In bestimmten Wetterlagen können sich Konvektionswolken in parallelen Bändern anordnen, die als Wolkenstraßen bezeichnet werden.

³Das Aspektverhältnis Γ gibt das Verhältnis zwischen der Breite und der Höhe der Fluidschicht an.

die verwendeten Näherungen eingeführt. Die Bedingungen für die Anwendbarkeit der Näherungen, die unter dem Begriff Boussinesq-Näherung bekannt sind, werden dabei ebenso diskutiert.

Dem schließt sich in Kapitel 3 eine ausführliche Vorstellung des Simulationprogramms an. Hierbei wird neben der detaillierten Beschreibung des numerischen Verfahren auch auf eher technische Einzelheiten der Implementierung und der Parallelisierung eingegangen. Zudem werden die Zeitschrittsteuerung und Bedingungen an die numerische Auflösung des Verfahrens diskutiert.

Das darauf folgende Kapitel 4 ist eines der zentralen Kapitel dieser Arbeit. Hier werden die durchgeführten Simulationen mit großem Aspektverhältnis anhand von verschiedenen Strömungsvisualisierungen vorgestellt und die in ihnen beobachteten groß- und kleinskaligen Strukturen analysiert. So wird deren jeweilige Beitrag zum Wärmetransport und deren typische Größe vorgestellt. Ein Abschnitt widmet sich dabei auch dem Einfluss des Aspektverhältnisses auf die Strömungsstrukturen.

Kapitel 5 stellt die Frage, inwieweit turbulente Konvektionsströmungen in der Lage sind, so genannte Mean Flows⁴ zu erzeugen.

Selbstverständlich kann in einer Arbeit über thermische Konvektion nicht die Frage nach der Nusselt-Zahl Nu , dem dimensionslosen Maß für den Wärmetransport durch die Fluidschicht, und deren Abhängigkeit von den Problemparametern ausgespart werden. Ergebnisse dazu und zu den beobachteten Reynolds-Zahlen Re finden sich in Kapitel 6. Nu und Re sind jeweils eng mit den in den Strömungen auftretenden Grenzschichten verknüpft, so dass die Temperatur- und Geschwindigkeitgrenzschichten ebenfalls in diesem Kapitel diskutiert werden.

Eine Zusammenfassung der Arbeit wird schließlich in Kapitel 7 gegeben. Dem folgen noch zwei Anhangskapitel, die zum einen viele der zentralen Ergebnisse dieser Arbeit in Tabellenform enthalten (Anhang A) und zum anderen eine kurze Anleitung zur Bedienung des hier entwickelten Simulationsprogramms geben (Anhang B).

⁴Als Mean Flow wird in diesem Kontext eine horizontal gemittelte Strömung genannt.

Bereits veröffentlichte Ergebnisse

Aus den in dieser Arbeit vorgestellten Ergebnisse sind bereits einige Veröffentlichungen entstanden, die an dieser Stelle aufgelistet werden sollen. So befinden sich die wesentlichen Teile der Strukturgrößenanalyse aus Kapitel 4 in [41]. Eine Beschreibung des numerischen Verfahren in etwas knapperer, aber sonst sehr ähnlicher Form wie in Kapitel 3 ist, zusammen mit einigen Strömungsvisualisierungen und anderen Resultaten in [38] erschienen. Teile der Untersuchungen zum Mean Flow finden außerdem in [39]. Eine weitere Veröffentlichung [40] ist zur Zeit in Vorbereitung, in der viele der noch nicht publizierten Ergebnisse dargestellt werden.

2

Modellsystem

Dieses Kapitel widmet sich der Definition des behandelten physikalischen Modells und stellt die notwendigen Gleichungen für dessen Beschreibung vor. Insbesondere wird genauer auf die verwendete Boussinesq-Näherung eingegangen. Sie ist Grundlage nahezu aller theoretischen und numerischen Arbeiten zur thermischen Konvektion.

2.1 Geometrie

Beim so genannten Rayleigh-Bénard System betrachtet man eine Gas- oder Flüssigkeitsschicht zwischen zwei festen, horizontalen Platten, die von unten beheizt und von oben gekühlt wird. Die Gravitation wirkt dabei senkrecht zu den Platten in negativer z -Richtung (Abbildung 2.1). Die Temperatur an den unteren und oberen Rändern wird als konstant angenommen, die Platten sind also ideale thermische Leiter¹, die an unendlich große Wärmereservoirs angeschlossen sind. Wie schon in Kapitel 1 erwähnt, hat man meist, insbesondere im geophysikalischen Kontext, mit horizontal ausgedehnten Schichten zu tun. An den Wechselwirkungen mit etwaigen Seitenwänden sind wir daher weniger interessiert. Periodische Randbedingungen in den horizontalen Richtungen x und y bieten sich somit an, zu-

¹In einer experimentellen Realisierung verlangt man zumindest, dass die thermische Leitfähigkeit der Platten deutlich größer ist als die des Fluides. Dabei gilt es zu beachten, dass das konvektierende Fluid weitaus mehr Wärme transportieren kann als das ruhendes Fluid. Wegen ihrer hohen Leitfähigkeit werden im Allgemeinen Platten aus Aluminium [30] oder Kupfer [49] verwendet.

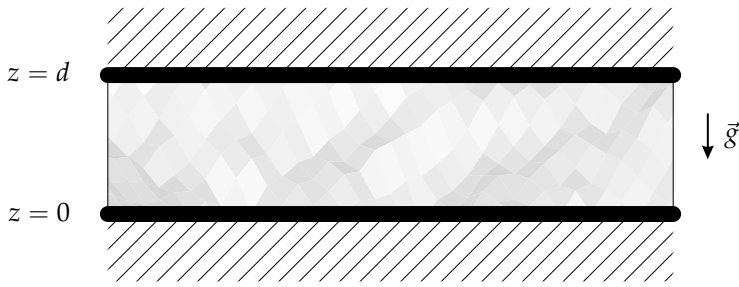


Abbildung 2.1: Vertikaler Schnitt durch die Fluid-Schicht.

dem sind sie numerisch leicht zu realisieren². Mit den geometrischen Abmessungen der Schicht lässt sich das so genannte Aspektverhältnis Γ definieren. Es gibt das Verhältnis zwischen der horizontalen Ausdehnung der Schicht, also der Periodizitätslänge l_x (x -Richtung) bzw. l_y (y -Richtung), und der Schichtdicke d an. In den meisten Fällen ist in dieser Arbeit $l_x = l_y$ und somit:

$$\Gamma = \Gamma_x = \Gamma_y \quad \text{mit} \quad \Gamma_x = \frac{l_x}{d}, \quad \Gamma_y = \frac{l_y}{d}. \quad (2.1)$$

2.2 Problemgleichungen

Bei der theoretischen Behandlung von thermischer Konvektion ist man im Allgemeinen auf Vereinfachungen der zugrundeliegenden Gleichungen angewiesen. Die so genannten Boussinesq-Gleichungen haben sich hier als sehr erfolgreiche, d.h. realitätsnahe Näherung herausgestellt. In diesem Abschnitt soll eine sehr einfache Ableitung der relevanten Gleichungen vorgestellt werden. Auf die wichtigsten Vereinfachungen dieser Gleichungen wird dann in Kapitel 2.3 genauer eingegangen, und deren Anwendbarkeit in realen Problemstellungen geprüft.

Ausgehend von einer einfachen, inkompressiblen, newtonschen Flüssigkeit betrachte man deren Grundgleichungen, die Navier-Stokes-Bewegungsgleichungen, die Transportgleichung für die Temperatur und die Conti-

²In Laborexperimenten sind selbstverständlich Seitenwände notwendig. Bei entsprechend großen Aspektverhältnissen sind die Einflüsse auf die Strömung im Inneren jedoch gering.

nuitätsgleichung [4]:

$$\rho \partial_t \vec{v} + \rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\nabla p + \nu \rho \nabla^2 \vec{v} + \rho \vec{g} \quad (2.2)$$

$$\partial_t T + (\vec{v} \cdot \nabla) T = \kappa \nabla^2 T, \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0. \quad (2.4)$$

Das Schwerfeld ist dabei als Volumenkraft $\rho \vec{g} = -\rho g \hat{z}$ in den Navier-Stokes-Gleichungen berücksichtigt. Terme, wie die Produktion von Wärme durch viskose Dissipation werden hier nicht berücksichtigt. Wie allgemein üblich bezeichnen \vec{v} , T , ρ und p die Geschwindigkeit, die Temperatur, die Dichte und den Druck des Fluides, und sind im Allgemeinen Funktionen des Ortes $\vec{r} = (x, y, z)^\top$ und der Zeit t . g und \hat{z} stehen für den Betrag der Gravitationsbeschleunigung und den Einheitsvektor in vertikaler Richtung. Die vertikalen Randbedingungen:

$$\begin{aligned} T(z=0) &= T_1, & T(z=d) &= T_2, \\ \vec{v}(z=0) &= 0, & \vec{v}(z=d) &= 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

ergeben sich aus den vorherigen Ausführungen, wobei T_1 und T_2 die konstanten Plattentemperaturen sind.

Näherungen

Da Inkompressibilität angenommen wurde, die Dichte also nicht direkt abhängig vom Druck ist, wird zusätzlich nur noch eine Zustandsgleichung benötigt, die Temperatur und Dichte miteinander verknüpft. Sind die auftretenden Temperaturdifferenzen klein, ist die lineare Näherung:

$$\rho - \rho_0 = -\rho_0 \alpha (T - T_0) \quad (2.6)$$

ausreichend, wobei T_0 und ρ_0 eine Bezugstemperatur, zum Beispiel die mittlere Temperatur in der Schicht, und die zugehörige Dichte symbolisieren. α wird als linearer Volumenausdehnungskoeffizient bezeichnet. Ist α

zudem klein, so sind die Dichteveränderungen für kleine Temperaturänderungen selbst klein, und können in den meisten Termen der Navier-Stokes-Gleichungen (Gl. 2.2) vernachlässigt werden. Lediglich im Gravitationsterm $\rho \vec{g}$ müssen diese Variationen berücksichtigt werden. Ohne sie gäbe es keinen Auftrieb und somit keine Konvektion. Eine genauere Rechtfertigung, warum man die Dichteänderung in einem Term beibehalten muss und in den anderen vernachlässigen kann, wird in Kapitel 2.3 gegeben.

Die letzte Näherung besteht darin, alle auftretenden Materialparameter, also den Ausdehnungskoeffizient α , die Temperaturleitfähigkeit κ und die kinematische Viskosität ν als Konstanten zu betrachten. Selbstverständlich wird auch \vec{g} als konstant angenommen.

Nützliche Umformungen

Für die weitere Behandlung der Gleichungen ist es hilfreich, statt direkt mit der Temperatur T und dem Druck p , nur noch mit den Abweichungen von ihrem statischen Profil zu arbeiten. Im statischen Fall, also bei ruhendem Fluid, stellt sich aufgrund thermischer Diffusion ein lineares Temperaturprofil ein:

$$T_s(z) = T_1 - \Delta T \frac{z}{d}. \quad (2.7)$$

T_1 bezeichnet dabei die Temperatur an der unteren Wand und $\Delta T = T_1 - T_2$ die angelegte Temperaturdifferenz zwischen den beiden Platten. Der statische Druck folgt aus der Gleichung $0 = -\nabla p_s + \rho_s \vec{g}$. Die Störungen von diesen Profilen werden im Folgenden mit $\theta = T - T_s$ und $\pi = p - p_s$ bezeichnet. Damit ergeben sich die Boussinesq-Gleichungen in der Form:

$$\partial_t \vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla \pi + \nu \nabla^2 \vec{v} - \vec{g} \alpha \theta, \quad (2.8)$$

$$\partial_t \theta + (\vec{v} \cdot \nabla) \theta = \kappa \nabla^2 \theta + \Delta T \vec{v} \cdot \hat{z}, \quad (2.9)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (2.10)$$

mit den Randbedingungen:

$$\begin{aligned}\theta(z=0) &= 0, & \theta(z=d) &= 0, \\ \vec{v}(z=0) &= 0, & \vec{v}(z=d) &= 0.\end{aligned}\tag{2.11}$$

Dimensionslose Einheiten

In der Fluidodynamik, wie auch in anderen Disziplinen, ist es oft zweckmäßig zu dimensionslosen Variablen überzugehen. Bei Verwendung der Schichtdicke d als Längenskala, der thermischen Diffusionszeit d^2/κ als Zeitskala und der Temperaturdifferenz ΔT als Temperaturskala ergeben sich als dimensionslose Variablen³ (gestrichene Größen):

$$\begin{aligned}t' &= (\kappa/d^2)t, \\ \theta' &= (1/\Delta T)\theta, \\ \vec{v}' &= (d/\kappa)\vec{v}, \\ \pi' &= (d^2/\rho_0\kappa^2)\pi.\end{aligned}\tag{2.12}$$

Die Boussinesq-Gleichungen (Gl. 2.8–2.10) können damit in dimensionsloser Form geschrieben werden:

$$\partial_\mu \vec{v}' + (\vec{v}' \cdot \nabla') \vec{v}' = -\nabla' \pi' + Pr \nabla'^2 \vec{v}' + Ra Pr \theta' \hat{z},\tag{2.13}$$

$$\partial_\mu \theta' + (\vec{v}' \cdot \nabla') \theta' = \nabla'^2 \theta' + \vec{v}' \cdot \hat{z},\tag{2.14}$$

$$\nabla' \cdot \vec{v}' = 0,\tag{2.15}$$

mit Randbedingungen

$$\begin{aligned}\theta'(z'=0) &= 0, & \theta'(z'=1) &= 0, \\ \vec{v}'(z'=0) &= 0, & \vec{v}'(z'=1) &= 0.\end{aligned}\tag{2.16}$$

³Selbstverständlich ist es auch möglich andere Größen als Bezugsskalen zu verwenden, zum Beispiel die Periodizitätslänge l_x als Längenskala, oder die Diffusionszeit d^2/ν als Zeitskala. Die verwendete Entdimensionalisierung ist jedoch eine sehr übliche und praktische Wahl.

Außerhalb dieses Kapitels wird auf das Mitschreiben der Striche an den Variablen verzichtet, es wird sich jedoch, falls nicht speziell auf das Gegenteil hingewiesen wird, immer um die in dieser Weise entdimensionalisierten Größen handeln.

In den obigen Gleichungen treten zwei dimensionslose Parameter auf. Sie werden Rayleigh-Zahl Ra und Prandtl-Zahl Pr genannt:

$$Ra = \frac{g\alpha\Delta T d^3}{\kappa\nu}, \quad Pr = \frac{\nu}{\kappa}. \quad (2.17)$$

Die Prandtl-Zahl beinhaltet lediglich die Stoffkonstanten κ und ν , ist also ein reiner Materialparameter. So kennzeichnet Flüssigmetalle eine sehr kleine Prandtl-Zahl (z.B. $Pr \approx 0.025$ für Quecksilber), Gase besitzen im Allgemeinen $Pr \approx 1$, und Flüssigkeiten wie Wasser oder Öle weisen etwas größere Prandtl-Zahlen auf (z.B. $Pr \approx 7$ für Wasser bei Raumtemperatur). Die Rayleigh-Zahl enthält hingegen auch die Parameter der Versuchsanordnung, also Temperaturdifferenz ΔT und Schichtdicke d , und stellt damit ein dimensionsloses Maß für den angelegten Temperaturunterschied dar. Sobald Ra einen kritischen Wert überschreitet, setzt Konvektion ein. Diese kritische Rayleigh-Zahl Ra_c ist dabei unabhängig von Pr . Gelegentlich wird in der Literatur auch der Begriff Grashof-Zahl Gr verwendet, der den Quotienten aus Rayleigh- und Prandtl-Zahl beschreibt. Gr kann als ein Maß für das Verhältnis zwischen Auftriebskräften und viskosen Kräften interpretiert werden. Aufgrund der dimensionslosen Darstellung können verschiedene Experimente, wie auch numerische Simulationen und theoretische Ergebnisse leicht miteinander verglichen werden, solange Rayleigh-Zahl, Prandtl-Zahl und Aspektverhältnis übereinstimmen.

2.3 Boussinesq-Näherung

Wie angekündigt, soll die Boussinesq-Näherung⁴ etwas genauer beleuchtet werden. Als Argumente für die verwendeten Näherungen werden in der Literatur zum Teil lediglich Plausibilitätsargumente [21] herangeführt.

⁴Obwohl die Näherung nach Joseph Boussinesq [12] benannt wurde, ist sie schon früher von Oberbeck [50] verwendet worden. Die Gleichungen werden daher gelegentlich auch als Oberbeck-Boussinesq Gleichungen bezeichnet.

Es gibt jedoch auch einige Arbeiten [60, 47, 29, 32, 62] die sich mit einer systematischen Ableitung der Boussinesq-Gleichungen und den Bedingungen für ihre Anwendbarkeit beschäftigen haben.

Eine sehr elegante und systematische Ableitung wird von Gray und Giorgini [32] gegeben. Die einzelnen Gleichungen ihrer Arbeit sind trotzdem recht lang, so dass hier das Vorgehen lediglich am Beispiel der Vernachlässigung temperaturbedingter Dichteveränderungen nachvollzogen werden soll. Dies ist sicher auch eine der wichtigsten Näherungen. Die ursprüngliche Veröffentlichung deckt jedoch sämtliche Näherungen ab, die in die Boussinesq-Gleichungen eingehen.

Wie in Kapitel 2.2 wird eine lineare Abhängigkeit der Dichte von der Temperatur angenommen⁵. Wird die Zustandsgleichung 2.6 in die Navier-Stokes-Gleichungen 2.2 eingesetzt erhält man:

$$\begin{aligned} & [1 - \alpha(T - T_0)] [\partial_t \vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}] = \\ & - \frac{1}{\rho_0} \nabla \pi + [1 - \alpha(T - T_0)] \nu \nabla^2 \vec{v} + \alpha(T - T_s) g \hat{z}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Auch hier ist der Druck durch die Abweichung von seinem statischen Profil ersetzt worden.

Um später die Größenordnung der einzelnen Terme vergleichen zu können, wählt man eine dimensionslose Darstellung, in der sämtliche Variablen (T, \vec{v} und π) und deren Ableitungen von der Größenordnung eins oder kleiner ist. Damit entscheiden die jeweiligen Vorfaktoren, ob ein Term gegenüber einem anderen vernachlässigt werden kann. Die in Kapitel 2.2 eingeführten und sonst überall in dieser Arbeit verwendeten Skalen sind für diesen Zweck weniger geeignet. Insbesondere ist die molekulare Diffusionsgeschwindigkeit κ/d keine angemessene Größe zur Skalierung der auftretenden Geschwindigkeiten. Bei Konvektion werden die Geschwindigkeiten nämlich deutlich größer sein. Eine adäquate Wahl ist die so genannte „free fall“ Geschwindigkeit, also ein Maß für die Geschwindigkeit die ein Fluidpaket mit einer Temperaturdifferenz ΔT gegenüber seiner Umgebung im „freien Fall“ erreichen kann (ohne Beachtung von viskosen Kräften). Die

⁵Es stellt im Allgemeinen kein Problem dar ρ und auch andere Materialgrößen in eine Taylorreihe nach der Temperatur zu entwickeln. Die erste Näherung ist dann die lineare. Die Anomalie des Wassers ist jedoch eine zu beachtende Ausnahme.

Beschleunigung des Fluidteilchen durch Auf- bzw. Abtrieb ist $g\alpha\Delta T$. Als eine typische Geschwindigkeit ergibt sich damit $q = (\alpha g \Delta T d)^{1/2}$. Die einzige Kombination der relevanten Skalen die einen Druck ergibt und die Geschwindigkeit q enthält, liefert dann noch eine angemessene Skala für den dynamischen Druck $\pi = p - p_s$. Die Temperaturdifferenzen und Längen werden weiterhin mit ΔT und d skaliert, da sie die Realität gut repräsentieren. Die Zeitskala wird aus der Geschwindigkeit q und der Länge d gebildet. Damit ergeben sich die Ersetzungen:

$$\begin{aligned}
 \nabla'' &= d\nabla, \\
 \partial_{t''} &= (q/d)\partial_t = (\alpha\Delta T g/d)^{1/2}\partial_t, \\
 \vec{v}'' &= (1/q)\vec{v} = (\alpha g \Delta T d)^{-1/2}\vec{v}, \\
 T'' - T_0'' &= (1/\Delta T)(T - T_0), \\
 T'' - T_s'' &= (1/\Delta T)(T - T_s), \\
 \pi'' &= (1/\rho_0 q^2)\pi = (\rho_0 \alpha g \Delta T d)^{-1/2}\pi,
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

wobei die zweifach gestrichenen Größen dimensionslos sind. Gleichung 2.18 schreibt sich in diesen Einheiten als:

$$\begin{aligned}
 &[1 - \alpha\Delta T(T'' - T_0'')] [\partial_{t''}\vec{v}'' + (\vec{v}'' \cdot \nabla'')\vec{v}''] = \\
 &-\nabla''\pi'' + [1 - \alpha\Delta T(T'' - T_0'')] (Pr/Ra)^{1/2}\nabla''^2\vec{v}'' + (T'' - T_s'')\hat{z}.
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Mit dem Wissen, dass die Variablen $T'' - T_0''$, $T'' - T_s''$, \vec{v}'' und π'' , und deren Ableitungen von der gleichen Größenordnung sind, ist leicht einzusehen, welche Terme unter welchen Bedingungen vernachlässigt werden können. Sind die Bedingungen:

$$\alpha\Delta T \ll 1, \tag{2.21}$$

$$\alpha\Delta T (Pr/Ra)^{1/2} \ll 1, \tag{2.22}$$

$$\alpha\Delta T (Pr/Ra)^{-1/2} \ll 1 \tag{2.23}$$

erfüllt, können die Terme, die $\alpha\Delta T$ enthalten, gestrichen werden. In der Praxis kann man zum Beispiel verlangen, dass die Größen kleiner als 0.1 sind. Der Fehler, den man durch Vernachlässigung der Terme macht, ist dann

kleiner als 10 Prozent. Die Rücktransformation der genäherten Gleichung zu dimensionsbehafteten Variablen ergibt dann tatsächlich die Impulsgleichung in Boussinesq-Näherung (vgl. Gl. 2.8):

$$\partial_t \vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla \pi + \nu \nabla^2 \vec{v} + \alpha (T - T_s) g \hat{z}. \quad (2.24)$$

Wie man sieht, sind die Temperaturabhängigkeiten in allen Termen, bis auf den Auftriebsterm eliminiert worden. Dieser ist trotz des kleinen Faktors α nicht klein gegenüber den anderen Termen der Gleichung, und kann daher auch nicht vernachlässigt werden.

Nach dem selben Prinzip gehen Gray und Giorgini [32] vor, jedoch beginnen sie mit viel allgemeineren Gleichungen für ein newtonschen Fluid mit variablen Materialeigenschaften (vgl. zum Beispiel [8]):

$$[\partial_t + (\vec{v} \cdot \nabla)] \rho = -\rho \partial_j v_j \quad (2.25)$$

$$\rho [\partial_t + (\vec{v} \cdot \nabla)] v_i = -\partial_i p - \rho g \delta_{ij} + \mu \partial_j \Gamma_{ij} + \Gamma_{ij} \partial_j \mu \quad (2.26)$$

$$\rho c_p [\partial_t + (\vec{v} \cdot \nabla)] T = K \partial_j \partial_j T + (\partial_j K) (\partial_j T) + \alpha T [\partial_t + (\vec{v} \cdot \nabla)] p + \mu \Phi \quad (2.27)$$

mit

$$\Gamma_{ij} = \partial_j v_i + \partial_i v_j - \frac{2}{3} \delta_{ij} \partial_k v_k \quad \text{und} \quad \Phi = \frac{1}{2} \Gamma_{ij} (\partial_j v_i + \partial_i v_j). \quad (2.28)$$

Wärmeleitfähigkeit, dynamische Viskosität und Wärmekapazität bei konstantem Druck sind in den Gleichungen durch die Symbole K , μ und c_p dargestellt. Die Abhängigkeit sämtlicher Fluideigenschaften von Temperatur und Druck wird berücksichtigt. Am Ende ergeben sich 11 verschiedene Parameter, deren Größe über die Anwendbarkeit der Boussinesq-Näherung entscheidet. Das Ergebnis der vollen Analyse für Prandtl-Zahl $Pr = 0.72$ (Luft) ist in Abbildung 2.2 dargestellt. Dabei ist man von Normaldruck und einer mittleren Temperatur von 15°C ausgegangen. Als die schwerwiegendsten Einschränkungen erweisen sind in diesem Fall die Variationen der Dichte mit der Temperatur und dem Druck. Damit die Boussinesq-

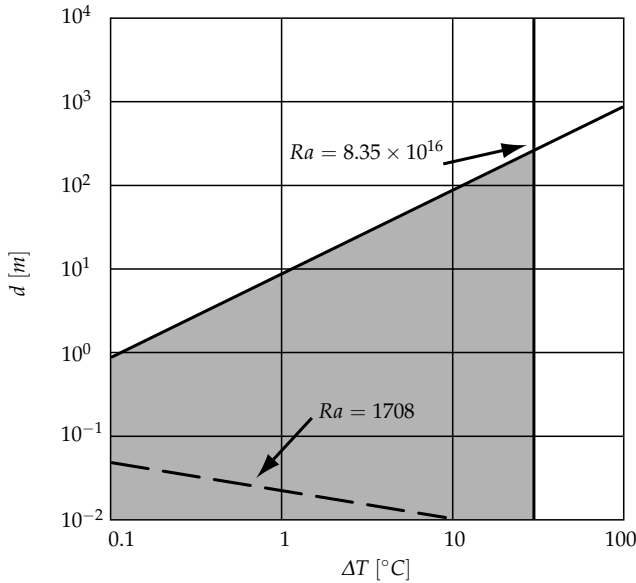


Abbildung 2.2: Gültigkeitsbereich der Boussinesq-Gleichungen für Luft ($Pr = 0.72$, $T_o = 15^\circ\text{C}$, $p_0 = 1\text{atm}$), nach [32]. Die gestrichelte Linie stellt die kritische Rayleigh-Zahl dar, ab der Konvektionsströmungen einsetzen.

Näherung noch anwendbar ist, müssen für die Schichthöhe d und die Temperaturdifferenz ΔT die Bedingungen:

$$\Delta T \leq 28.6^\circ\text{C}, \quad \frac{d}{\Delta T} < 10.2\text{m}/^\circ\text{C} \quad (2.29)$$

erfüllt sein. Die maximal erreichbare Rayleigh-Zahl ist damit $Ra = 8.35 \times 10^{16}$. Bei Wasser ergibt sich nach gleicher Analyse ein Wert von $Ra = 2.35 \times 10^{19}$ (wieder bei Normaldruck und einer mittleren Temperatur von 15°C). Die Boussinesq-Gleichungen stellen somit in einem extrem großen Parameterbereich eine sinnvolle Näherung dar.

3

Numerische Simulation

Die direkte numerische Simulation (DNS) von turbulenten Strömungen ist im Allgemeinen sehr rechen- und speicherintensiv. Ein dem Problem angepasstes numerisches Verfahren und dessen effektive Umsetzung in einem Computerprogramm sind daher extrem wichtig.

Das hier verwendete Simulationsprogramm basiert in den Grundzügen auf einem während meiner Diplomarbeit [37] geschriebenen Programm, daß im Laufe der Doktorarbeit deutlich verändert und erweitert wurde. Wichtigste Erweiterung ist die völlige Parallelisierung des Verfahrens. Damit konnte das Programm auf massiv-parallelen Rechnerarchitekturen eingesetzt werden. Zudem wurde eine Vielzahl von Routinen geschrieben, mit denen verschiedenste statistische Analysen der Daten noch während der Simulation möglich sind. Auch das numerische Verfahren wurde ausgebaut. So ist es jetzt zum Beispiel möglich die Fluidschicht aus der Horizontalen um einen Winkel zu verkippen, Seitenwände einzuschalten oder auch eine unendliche Prandtl-Zahl zu verwenden. Die Validierung des Programms erfolgte durch Vergleich mit Simulationsdaten aus einer völlig anderen Methode [23, 24]. Einige Vergleiche sind in [37] dargestellt.

Im Folgenden werden das verwendete numerische Verfahren (Kapitel 3.1) und die verschiedenen Abwandlungen, wie gekippte Fluidschicht, unendliche Prandtl-Zahl und Seitenwände (Kapitel 3.6) beschrieben. Außerdem sollen einige Details der Implementierung (Kapitel 3.2) vorgestellt werden, insbesondere auch die Parallelisierung (Kapitel 3.3). Die wichtige Frage nach der erforderlichen Auflösung einer Simulation wird ebenso angesprochen (Kapitel 3.4).

3.1 Beschreibung des numerischen Verfahrens

Die eingesetzte Methode zur numerischen Behandlung der dimensionslosen Boussinesq-Gleichungen (Gl. 2.13–2.15) wird im Folgenden vorgestellt. Die Darstellung folgt im Wesentlichen den bereits veröffentlichten Ausführungen in [37, 38].

Bei der verwendeten Methode handelt es sich um ein spektrales Verfahren. Die unbekannt Funktionen der Temperatur und Geschwindigkeit werden dabei nach orthogonalen Funktionen entwickelt. Die Reihen werden nach einer gewissen Anzahl an Spektralkomponenten abgebrochen, die Funktionen damit diskretisiert. Nach Diskretisierung der Zeit können für die verschiedenen Spektralkoeffizienten Gleichungssysteme für deren Zeitentwicklung hergeleitet werden, die man dann durch geeignete numerische Verfahren löst.

3.1.1 Zerlegung der Geschwindigkeit

Zuvor soll jedoch ein Variablenwechsel vorgenommen werden. Aufgrund der angenommenen Inkompressibilität lautet die Kontinuitätsgleichung:

$$\nabla \cdot \vec{v}(\vec{r}, t) = 0, \quad (3.1)$$

das Geschwindigkeitsfeld ist also solenoidal oder quellenfrei. \vec{v} kann daher eindeutig durch ein skalares Toroidalfeld ψ , ein skalares Poloidalfeld ϕ und eine so genannte „Mean Flow“ Geschwindigkeit \vec{U} dargestellt werden [57]:

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \nabla \times [\psi(\vec{r}, t)\hat{z}] + \nabla \times \nabla \times [\phi(\vec{r}, t)\hat{z}] + \vec{U}(z, t). \quad (3.2)$$

Bei Verwendung dieser neuen Funktionen ist die Kontinuitätsgleichung automatisch erfüllt. ψ und ϕ sind periodische Funktionen mit verschwindenden Mittelwerten über horizontalen Ebenen¹. Wie die Bezeichnung Mean Flow nahelegt, repräsentiert \vec{U} den horizontalen Mittelwert der Geschwin-

¹Genau genommen könnte die Mean Flow Komponente auch im Toroidalfeld berücksichtigt werden. Dies würde jedoch zu einem linear in x bzw. y an- oder abfallenden Anteil in ψ führen. Das Toroidalfeld wäre dann nicht mehr periodisch.

digkeit \vec{v} , d.h.:

$$\vec{U}(z, t) = \langle \vec{v}(\vec{r}, t) \rangle_{x,y}. \quad (3.3)$$

Aufgrund der Inkompressibilität (Gl. 3.1) muss dabei die z-Komponente von \vec{U} verschwinden. Für die neuen Felder ergeben sich aus 2.16 die Randbedingungen:

$$\begin{aligned} \psi(z=0) &= 0 = \psi(z=1), \\ \phi(z=0) &= 0 = \phi(z=1), \\ \partial_z \phi(z=0) &= 0 = \partial_z \phi(z=1), \\ U_x(z=0) &= 0 = U_x(z=1), \\ U_y(z=0) &= 0 = U_y(z=1). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Außerdem sind die Felder in den horizontalen Richtungen x und y periodisch, wie auch die Temperatur.

Statt der Bewegungsgleichung für \vec{v} (Gl. 2.13) benötigt man jetzt die entsprechenden Gleichungen für die einzelnen Komponenten ψ , ϕ und \vec{U} . Die z-Komponente der Rotation von Gleichung 2.13 und die z-Komponente der Rotation der Rotation dieser Gleichung ergeben die Differentialgleichungen für ψ und ϕ :

$$-(\partial_x^2 + \partial_y^2)[\partial_t - Pr\nabla^2]\psi = -\hat{z} \cdot \left[\nabla \times [(\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v}] \right], \quad (3.5)$$

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2)\nabla^2[\partial_t - Pr\nabla^2]\phi = -\hat{z} \cdot \left[\nabla \times \nabla \times [(\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v}] \right] - RaPr(\partial_x^2 + \partial_y^2)\theta. \quad (3.6)$$

Die Gleichung für den Mean Flow erhält man aus 2.13 durch Mittelwertbildung:

$$[\partial_t - Pr\partial_z^2] \begin{pmatrix} U_x \\ U_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\hat{x} \cdot \langle (\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v} \rangle_{x,y} \\ -\hat{y} \cdot \langle (\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v} \rangle_{x,y} \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Ein weiterer Effekt der Geschwindigkeitszerlegung ist, dass in den neuen Gleichungen der Druck π nicht mehr vorkommt. Dies liegt daran, dass der Druck in die Navier-Stokes-Gleichungen als reines Gradientenfeld eingeht und daher beim Bilden der Rotation und des Ebenenmittelwertes verschwindet.

3.1.2 Fourier-Zerlegung

Aufgrund der periodischen Randbedingungen in den horizontalen Richtungen liegt es nahe, die x - und y -Abhängigkeit der Felder θ , ψ und ϕ durch Fourier-Komponenten darzustellen:

$$f(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \hat{f}_{\vec{k}}(z, t) e^{-i(k_x x + k_y y)}, \quad f = \theta, \psi, \phi. \quad (3.8)$$

$\vec{k} = k_x \hat{x} + k_y \hat{y}$ ist dabei der zweidimensionale Wellenvektor in der horizontalen Ebene. Die Wellenzahlen k_x und k_y sind wegen des endlichen Aspektverhältnisses Vielfache von $2\pi/\Gamma_x$ bzw. $2\pi/\Gamma_y$. Für die numerische Behandlung des Problems bricht man die Summe ab und betrachtet nur eine endliche Anzahl an Wellenzahlen:

$$k_i \in \left[0, \pm \left(\frac{2\pi}{\Gamma_i} \right), \pm 2 \left(\frac{2\pi}{\Gamma_i} \right), \dots, \pm \frac{N_i}{2} \left(\frac{2\pi}{\Gamma_i} \right) \right], \quad i = x, y. \quad (3.9)$$

N_x und N_y werden so gewählt, dass sie Potenzen von zwei sind, d.h. $N_x = 2^{n_x}$, $N_y = 2^{n_y}$, $n_x, n_y \in \mathbb{N}$. Die bekannte „Fast-Fourier-Transformation“ [53] kann dann als Transformation zwischen Ortsraum (x, y) und Spektralraum (k_x, k_y) verwendet werden. Da die Temperatur- und Geschwindigkeitsfelder im Ortsraum reell sind, genügen ihre Fourier-Koeffizienten der Bedingung:

$$\hat{f}(-\vec{k}) = \hat{f}(\vec{k})^*. \quad (3.10)$$

Man muss daher nur die Hälfte der Komponenten berechnen.

Für die t - und z -abhängigen Koeffizienten ergeben sich aus 2.14, 3.5 und 3.6 die Gleichungen:

$$[\partial_z^2 - k^2] \left[\partial_t - Pr[\partial_z^2 - k^2] \right] \hat{\phi}_{\vec{k}}(z, t) = \mathcal{R}_{\hat{\phi}_{\vec{k}}}(z, t), \quad (3.11)$$

$$\left[\partial_t - Pr[\partial_z^2 - k^2] \right] \hat{\psi}_{\vec{k}}(z, t) = \mathcal{R}_{\hat{\psi}_{\vec{k}}}(z, t), \quad (3.12)$$

$$\left[\partial_t - [\partial_z^2 - k^2] \right] \hat{\theta}_{\vec{k}}(z, t) = \mathcal{R}_{\hat{\theta}_{\vec{k}}}(z, t), \quad (3.13)$$

$$[\partial_t - Pr\partial_z^2] \begin{pmatrix} U_x(z, t) \\ U_y(z, t) \end{pmatrix} = \vec{\mathcal{R}}_{\vec{U}}(z, t). \quad (3.14)$$

Die Gleichung für den Mean Flow ist aus Gründen der Vollständigkeit mit aufgeführt. Die zugehörigen rechten Seiten \mathcal{R} sind:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\hat{\phi}_{\vec{k}}} &= \frac{1}{k^2} \left\{ \hat{z} \cdot \left[\nabla \times \nabla \times [(\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v}] \right] \right\}_{\vec{k}} - RaPr\hat{\theta}_{\vec{k}}, \\ \mathcal{R}_{\hat{\psi}_{\vec{k}}} &= -\frac{1}{k^2} \left\{ \hat{z} \cdot \left[\nabla \times [(\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v}] \right] \right\}_{\vec{k}'}, \\ \mathcal{R}_{\hat{\theta}_{\vec{k}}} &= k^2\hat{\phi}_{\vec{k}} - \left\{ \nabla \cdot (\vec{v}\theta) \right\}_{\vec{k}'}, \\ \vec{\mathcal{R}}_{\vec{U}} &= \begin{pmatrix} -\hat{x} \cdot \langle (\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v} \rangle_{x,y} \\ -\hat{y} \cdot \langle (\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v} \rangle_{x,y} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

wobei $\{\dots\}_{\vec{k}}$ und $\langle \dots \rangle_{x,y}$ den Fourier-Koeffizient zum Wellenvektor \vec{k} und den Mittelwert über x und y kennzeichnen.

3.1.3 Behandlung der Temperatur- und Toroidalfelder

Als erstes soll das numerische Verfahren für die Gleichungen von $\hat{\psi}_{\vec{k}}$, $\hat{\theta}_{\vec{k}}$ und \vec{U} (3.12–3.14) behandelt werden. Die Gleichungen sind von sehr ähnlicher Form und können daher zusammen betrachtet werden. In allgemeiner Form lassen sie sich als:

$$[\partial_t + C_0 - C_2\partial_z^2]f(z, t) = \mathcal{R}_f(z, t), \quad f = \hat{\psi}_{\vec{k}}, \hat{\theta}_{\vec{k}}, \vec{U} \quad (3.16)$$

schreiben. C_0 und C_2 sind Konstanten und \mathcal{R}_f die entsprechenden rechten Seiten (siehe Gl. 3.15). Die Randbedingungen lauten:

$$f(z=0) = 0, \quad f(z=1) = 0. \quad (3.17)$$

Chebyshev-Methode

Der z -abhängige Anteil von f wird durch eine Linearkombination von Chebyshev-Polynomen dargestellt:

$$f(z, t) = \sum_{j=0}^{N_z-1} c_j(t) T_j(\tilde{z}), \quad \tilde{z} \equiv 2z - 1. \quad (3.18)$$

T_j bezeichnet das Chebyshev-Polynom [31, 53] der Ordnung j . Mittels Kosinus-Transformation kann einfach und schnell zwischen Spektralkomponenten und Ortsraum transformiert werden². Die Berechnung von z -Ableitungen ist in dieser Darstellung ebenfalls sehr einfach. Aufgrund dieser Vorteile wird eine Entwicklung der Form 3.18 in den meisten Teilen des Simulationsprogramms verwendet. Lediglich für den eigentlichen Zeitschritt wird eine andere, den Randbedingungen angepasste Darstellung benutzt [48, 42]:

$$f(z, t) = \sum_{i=0}^{N_z-3} a_i(t) F_i(\tilde{z}). \quad (3.19)$$

Die Funktionen:

$$F_i(\tilde{z}) = (1 - \tilde{z}^2) T_i(\tilde{z}) \quad (3.20)$$

erfüllen die Randbedingungen (Gl. 3.17) automatisch, und können mittels der Rekursionsformel $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$ ($n \geq 1$) als Linearkombination von Chebyshev-Polynomen geschrieben werden:

$$\begin{aligned} F_0 &= \frac{1}{2}T_0 - \frac{1}{2}T_2, \\ F_1 &= \frac{1}{4}T_1 - \frac{1}{4}T_3, \\ &\vdots \\ F_i &= -\frac{1}{4}T_{i-2} + \frac{1}{2}T_i - \frac{1}{4}T_{i+2} \quad i \geq 2. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Die Entwicklungen 3.18 und 3.19 sind daher für alle Funktionen $f(z, t)$, die die Randbedingungen erfüllen äquivalent.

Die rechten Seiten der Gleichung 3.16 werden in Form von Chebyshev-Koeffizienten berechnet:

$$\mathcal{R}_f(z, t) = \sum_{j=0}^{N_z-1} b_j(t) T_j(\tilde{z}). \quad (3.22)$$

Damit ergibt sich für die diskrete Form der Differentialgleichung 3.16 der

²Die Chebyshev-Polynome lassen sich nämlich in der Form $T_j(\tilde{z}) = \cos(j \arccos \tilde{z})$, $\tilde{z} \in [-1, 1]$ schreiben. Um eine schnelle Kosinustransformation verwenden zu können, wird ein $N_z = 2^n + 1$, $n \in \mathbb{N}$ gewählt.

Ausdruck:

$$\sum_{i=0}^{N_z-3} [\partial_t + C_0 - C_2 \partial_z^2] a_i(t) F_i(\tilde{z}) = \sum_{j=0}^{N_z-1} b_j(t) T_j(\tilde{z}). \quad (3.23)$$

Diskretisierung der Zeit

Als nächster Schritt muss die Zeit t diskretisiert werden. Dazu wird ein angemessen kleiner Zeitschritt h gewählt, so dass:

$$t_n = t_{n-1} + h. \quad (3.24)$$

Mittels einem Courant-Friedrich-Levy (CFL) Kriterium [31, 42] wird h automatisch den Strömungsverhältnissen angepasst (siehe Kapitel 3.5). Für die linke Seite der Gleichung 3.23 wird das implizite Crank-Nicolson Verfahren [61] verwendet:

$$[C_0 - C_2 \partial_z^2] a_i(t) \rightarrow [C_0 - C_2 \partial_z^2] \frac{a_{i,t_n} + a_{i,t_{n-1}}}{2}, \quad (3.25)$$

$$\partial_t a_i(t) \rightarrow \frac{a_{i,t_n} - a_{i,t_{n-1}}}{h}, \quad (3.26)$$

wobei a_{i,t_n} und $a_{i,t_{n-1}}$ die Koeffizienten zum neuen Zeitpunkt t_n und dem vorhergehenden Zeitpunkt t_{n-1} sind. Das Verfahren wird implizit genannt, da der noch unbekannte Wert a_{i,t_n} verwendet wird. Die rechte Seite der Gleichung enthält die nichtlinearen Terme, hier kann daher kein implizites Verfahren verwendet werden. Stattdessen wurde das explizite Adams-Bashforth Verfahren zweiter Ordnung [61] gewählt, womit sich die folgende Ersetzung ergibt:

$$b_j(t) \rightarrow \frac{1}{2}(3b_{j,t_{n-1}} - b_{j,t_{n-2}}). \quad (3.27)$$

Damit ergibt sich für die verallgemeinerte Differentialgleichung für $\hat{\psi}_{\vec{k}}$, $\hat{\theta}_{\vec{k}}$ und \vec{U} (Gl. 3.16) die vollständig diskrete Form:

$$\sum_{i=0}^{N_z-3} \left[\left(1 + \frac{h}{2} C_0\right) F_j(\tilde{z}) - \frac{h}{2} C_2 \partial_z^2 F_j(\tilde{z}) \right] a_{i,t_n} =$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{N_z-3} \left[\left(1 - \frac{h}{2}C_0\right)F_j(\tilde{z}) + \frac{h}{2}C_2\partial_{\tilde{z}}^2F_j(\tilde{z}) \right] a_{i,t_{n-1}} + \\ & \sum_{j=0}^{N_z-1} \frac{h}{2}(3b_{j,t_{n-1}} - b_{j,t_{n-2}})T_j(\tilde{z}). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Diese Summengleichung genügt jedoch nicht, um die Koeffizienten zum aktuellen Zeitpunkt aus ihren Werten an vorherigen Zeitpunkten zu bestimmen. Man benötigt ein lineares Gleichungssystem für die unbekanntenen Koeffizienten a_{i,t_n} , welches man aus Gleichung 3.28 durch geeignete Projektion erhalten kann. Analog dem Verfahren von Moser et. al. [48] werden hier die Projektionsfunktionen:

$$P_i(\tilde{z}) = \frac{T_{i-1}(\tilde{z}) - T_{i+1}(\tilde{z})}{2i\sqrt{1-\tilde{z}^2}} \quad i = 1, \dots, N_z - 2 \quad (3.29)$$

verwendet. Multiplikation von 3.28 mit diesen Funktionen und Integration über \tilde{z} ergibt unter Verwendung der Orthogonalitätsrelation der Chebyshev-Polynome³ das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} & \left[\left(1 + \frac{h}{2}C_0\right)\mathcal{M}_1 - \frac{h}{2}C_2\mathcal{M}_2 \right] \vec{a}_{t_n} = \\ & \left[\left(1 - \frac{h}{2}C_0\right)\mathcal{M}_1 + \frac{h}{2}C_2\mathcal{M}_2 \right] \vec{a}_{t_{n-1}} + \\ & \frac{h}{2}\mathcal{M}_3(3\vec{b}_{t_{n-1}} - \vec{b}_{t_{n-2}}). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Die Koeffizienten a_{i,t_n} und b_{j,t_n} sind aus Gründen der Übersichtlichkeit in der Vektorform:

$$\vec{a}_{t_n} = (a_{0,t_n}, \dots, a_{N_z-3,t_n})^\top \quad \text{und} \quad \vec{b}_{t_n} = (b_{0,t_n}, \dots, b_{N_z-1,t_n})^\top \quad (3.31)$$

geschrieben.

Die in 3.30 auftretenden Matrizen:

$$\left(\mathcal{M}_1 \right)_{i=0, \dots, N_z-3}^{j=0, \dots, N_z-3} = \int_{-1}^1 d\tilde{z} P_{i+1}(\tilde{z}) F_j(\tilde{z}),$$

$${}^3 \int_{-1}^1 \frac{T_i(x)T_j(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \pi/2 & i = j \neq 0 \\ \pi & i = j = 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\left(\mathcal{M}_2 \right)_{\substack{j=0,\dots,N_z-3 \\ i=0,\dots,N_z-3}} &= \int_{-1}^1 d\tilde{z} P_{i+1}(\tilde{z}) \partial_{\tilde{z}}^2 F_j(\tilde{z}), \\
\left(\mathcal{M}_3 \right)_{\substack{j=0,\dots,N_z-1 \\ i=0,\dots,N_z-3}} &= \int_{-1}^1 d\tilde{z} P_{i+1}(\tilde{z}) T_j(\tilde{z})
\end{aligned} \tag{3.32}$$

sind leicht analytisch berechenbar. Aufgrund der speziellen Projektionsfunktionen 3.29 besitzen die Matrizen eine relativ dünn besetzte Bandstruktur. Als Beispiel sei ein Ausschnitt der Matrix \mathcal{M}_1 gezeigt:

$$\pi \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{16} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{16} & 0 & -\frac{3}{32} & 0 & \frac{1}{32} & 0 & 0 & \\ -\frac{1}{24} & 0 & \frac{1}{16} & 0 & -\frac{3}{48} & 0 & \frac{1}{48} & 0 & \\ 0 & -\frac{1}{64} & 0 & \frac{3}{64} & 0 & -\frac{3}{64} & 0 & \frac{1}{64} & \\ 0 & 0 & -\frac{1}{80} & 0 & \frac{3}{80} & 0 & -\frac{3}{80} & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{96} & 0 & \frac{3}{96} & 0 & -\frac{3}{96} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{112} & 0 & \frac{3}{112} & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{128} & 0 & \frac{3}{128} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{144} & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{160} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \vdots & & & & & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

\mathcal{M}_2 ist von ähnlicher Struktur, besitzt jedoch noch weniger von null verschiedene Einträge. So sind bis auf die Diagonale und die zweite Superdiagonale sämtliche Elemente null.

Zur Lösung von Gleichung 3.30 muss nun lediglich die kombinierte Matrix:

$$\mathcal{M} = \left(1 + \frac{h}{2} C_0\right) \mathcal{M}_1 - \frac{h}{2} C_2 \mathcal{M}_2 \tag{3.33}$$

invertiert werden. Da C_0 und C_2 für die verschiedenen Variablen $\hat{\psi}_{\vec{k}}$, $\hat{\theta}_{\vec{k}}$ und \vec{U} unterschiedlich sind, und im Allgemeinen auch noch vom Betrag des Wellenvektor \vec{k} abhängen (vgl. Gl. 3.12–3.14) sind tatsächlich nicht nur eine, sondern im Allgemeinen viele tausend Matrizen zu invertieren. So müssen bei typisch verwendeten Auflösungen von 512 Fourier-Moden in jeder der horizontalen Richtungen (also $N_x = N_y = 512$) insgesamt meh-

rere 100000 Matrizen invertiert werden. Prinzipiell könnte man die Matrizen am Anfang des Simulationsprogramms invertieren und im Hauptspeicher ablegen. Bei jedem Zeitschritt könnte dann einfach auf die Inversen aus dem Speicher zurückgegriffen werden. Aufgrund des begrenzten Hauptspeicher ist dieses Vorgehen auf viele Rechenanlagen jedoch nicht durchführbar, zumindest für sehr große Simulationen. Alle Matrizen sind jedoch sehr dünn besetzt und weisen eine banddiagonale Struktur auf. Diese können mit vergleichsweise geringem Rechenaufwand invertiert werden, so dass es praktikabel ist die Matrizen zu jedem Zeitschritt neu zu invertieren und nicht abzuspeichern. Im Programm wird eine speziell für banddiagonale Matrizen geschriebene LU-Zerlegung [53] verwendet. Die komplette Inversion, LU-Zerlegung und die entsprechende Rücksubstitution, benötigt für alle Variablen zusammen nicht mehr als 8 Prozent der gesamten Rechenzeit, selbst bei der höchsten verwendeten Auflösung von $N_x \times N_y \times N_z = 512 \times 256 \times 257^4$.

In der tatsächlichen Implementierung des vorgestellten Verfahrens ist es sinnvoll noch eine kleine Änderung an der Gleichung 3.30 vorzunehmen. Wie weiter oben erwähnt, werden sämtliche Felder in Form von Chebyshev-Polynomen gespeichert. Die Entwicklung nach den Funktionen F_i (Gl. 3.19) wird hingegen nur für den Zeitschritt verwendet, um die Randbedingungen 3.17 zu erfüllen. Die Daten vom vorhergehenden Zeitpunkt t_{n-1} liegen also als Chebyshev-Koeffizienten vor. Anstatt diese in Koeffizienten einer Entwicklung nach den F_i 's umzurechnen und dann in Gleichung 3.30 einzusetzen, kann man 3.30 auch entsprechend umschreiben:

$$\left[\left(1 - \frac{h}{2}C_0\right)\mathcal{M}_1 + \frac{h}{2}C_2\mathcal{M}_2 \right] \vec{a}_{t_{n-1}} = \mathcal{M}_3 \left[\left(1 - \frac{h}{2}C_0\right)\vec{a}_{t_{n-1}} + \frac{h}{2}C_2\vec{a}_{t_{n-1}}'' \right], \quad (3.34)$$

wobei $\vec{a}_{t_{n-1}}$ und $\vec{a}_{t_{n-1}}''$ die Chebyshev-Koeffizienten zum Zeitpunkt $t = t_{n-1}$ der Funktion f und ihre zweite Ableitung $\partial_z^2 f$ sind. Diese Ersetzung erspart uns eine Matrix-Multiplikation, wie man an der folgenden Endgleichung erkennen kann:

$$\mathcal{M}\vec{a}_{t_n} = \mathcal{M}_3 \left[\left(1 - \frac{h}{2}C_0\right)\vec{a}_{t_{n-1}} + \frac{h}{2}C_2\vec{a}_{t_{n-1}}'' + \frac{h}{2}(3\vec{b}_{t_{n-1}} - \vec{b}_{t_{n-2}}) \right]. \quad (3.35)$$

⁴Die entsprechende Simulation wurde auf der CRAY T3E am Höchstleistungsrechenzentrum Stuttgart unter Verwendung von bis zu 256 Prozessoren durchgeführt.

3.1.4 Verfahren für das Poloidalfeld

Das Vorgehen zur Lösung der Poloidalgleichung 3.11 ist analog dem gerade vorgestellten Verfahren für Temperatur, Toroidalfeld und Mean Flow. Aufgrund der anderen Randbedingungen:

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_{\vec{k}}(z=0) &= 0 \quad , \quad \hat{\phi}_{\vec{k}}(z=1) = 0, \\ \partial_z \hat{\phi}_{\vec{k}}(z=0) &= 0 \quad , \quad \partial_z \hat{\phi}_{\vec{k}}(z=1) = 0 \end{aligned} \quad (3.36)$$

ist es jedoch sinnvoll andere, diesen Bedingungen angepasste Entwicklungsfunktionen, und dementsprechend andere Projektionsfunktionen zu verwenden. Die Funktionen

$$G_i(\tilde{z}) = (1 - \tilde{z}^2)^2 T_i(\tilde{z}) \quad (3.37)$$

werden benutzt, da sie offensichtlich die Randbedingungen erfüllen. $\hat{\phi}_{\vec{k}}$ wird also als Linearkombination dieser Funktionen dargestellt:

$$\hat{\phi}_{\vec{k}}(z, t) = \sum_{i=0}^{N_z-5} c_i(t) G_i(\tilde{z}). \quad (3.38)$$

Als Zeitschrittverfahren wird wie oben eine Kombination aus impliziten Crank-Nicolson Verfahren und expliziten Adams-Bashforth Verfahren benutzt. Damit die Matrizen des Gleichungssystems der Koeffizienten ebenfalls eine dünn besetzte Banddiagonalstruktur ausweisen, werden die Funktionen [48]:

$$Q_i(\tilde{z}) = \frac{1}{4\sqrt{1-\tilde{z}^2}} \left[\frac{T_{i-2}(\tilde{z})}{i(i-1)} - \frac{2T_i(\tilde{z})}{(i+1)(i-1)} + \frac{T_{i+1}(\tilde{z})}{i(i+2)} \right] \quad (3.39)$$

zur Projektion verwendet. Am Ende erhält man die Gleichung:

$$\begin{aligned} \mathcal{N} \vec{c}_{t_n} &= \mathcal{N}_4 \left[(-k^2 + \frac{h}{2} Pr k^4) \vec{\gamma}_{t_{n-1}} + \right. \\ &\left. (1 - h Pr k^2) \vec{\gamma}_{t_{n-1}}'' + \frac{h}{2} Pr \vec{\gamma}_{t_{n-1}}^{(4)} + \frac{h}{2} (3\vec{d}_{t_{n-1}} - \vec{d}_{t_{n-2}}) \right]. \end{aligned} \quad (3.40)$$

$\vec{\gamma}_{t_{n-1}}$, $\vec{\gamma}_{t_{n-1}}''$ und $\vec{\gamma}_{t_{n-1}}^{(4)}$ sind hierbei die Chebyshev-Koeffizienten des Poloidalfeldes, und deren zweite und vierte Ableitung nach z . $\vec{d}_{t_{n-1}}$ und $\vec{d}_{t_{n-2}}$

bezeichnen wieder die Koeffizienten der rechten Seiten. Die auftretenden Matrizen sind etwas komplizierter als im vorhergehenden Fall:

$$\mathcal{N} = \left[(-k^2 - \frac{h}{2}Prk^4)\mathcal{N}_1 + (1 + hPrk^2)\mathcal{N}_2 - \frac{h}{2}Pr\mathcal{N}_3 \right] \quad (3.41)$$

und

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathcal{N}_1 \\ \mathcal{N}_2 \\ \mathcal{N}_3 \\ \mathcal{N}_4 \end{pmatrix} &= \begin{matrix} j=0,\dots,N_z-5 \\ i=0,\dots,N_z-5 \\ j=0,\dots,N_z-5 \\ i=0,\dots,N_z-5 \\ j=0,\dots,N_z-1 \\ i=0,\dots,N_z-5 \end{matrix} \\ &= \begin{matrix} \int_{-1}^1 d\tilde{z} Q_{i+2}(\tilde{z}) G_j(\tilde{z}), \\ \int_{-1}^1 d\tilde{z} Q_{i+2}(\tilde{z}) \partial_z^2 G_j(\tilde{z}), \\ \int_{-1}^1 d\tilde{z} Q_{i+2}(\tilde{z}) \partial_z^4 G_j(\tilde{z}), \\ \int_{-1}^1 d\tilde{z} Q_{i+2}(\tilde{z}) T_j(\tilde{z}). \end{matrix} \end{aligned} \quad (3.42)$$

Zudem enthalten sie mehr nichtverschwindende Elemente, sind jedoch immer noch relativ dünn besetzt. So müssen bei \mathcal{N}_1 , \mathcal{N}_2 , \mathcal{N}_3 und \mathcal{N}_4 jeweils 13, 9, 5 und 5 Haupt- und Nebendiagonalen betrachtet werden. \mathcal{N} ist daher, insbesondere bei hohen Auflösungen (z.B. $N_z = 257$), numerisch deutlich günstiger zu invertieren als eine vollbesetzte Matrix.

3.2 Umsetzung des Verfahrens

Nach der mathematischen Beschreibung des Verfahrens sollen noch einige Anmerkungen zur Implementierung der Methode im Simulationsprogramm gegeben werden.

Überblick

Abbildung 3.1 zeigt einen sehr groben Überblick über das Programm. Nach dem Initialisieren von Kommunikationsroutinen, falls im Parallelbetrieb gearbeitet wird (siehe Kapitel 3.3), werden die Simulationsparameter und eventuelle Anfangswerte geladen. Genauere Informationen, wie die Parameter an das Programm übergeben werden finden sich in einer kurzen An-

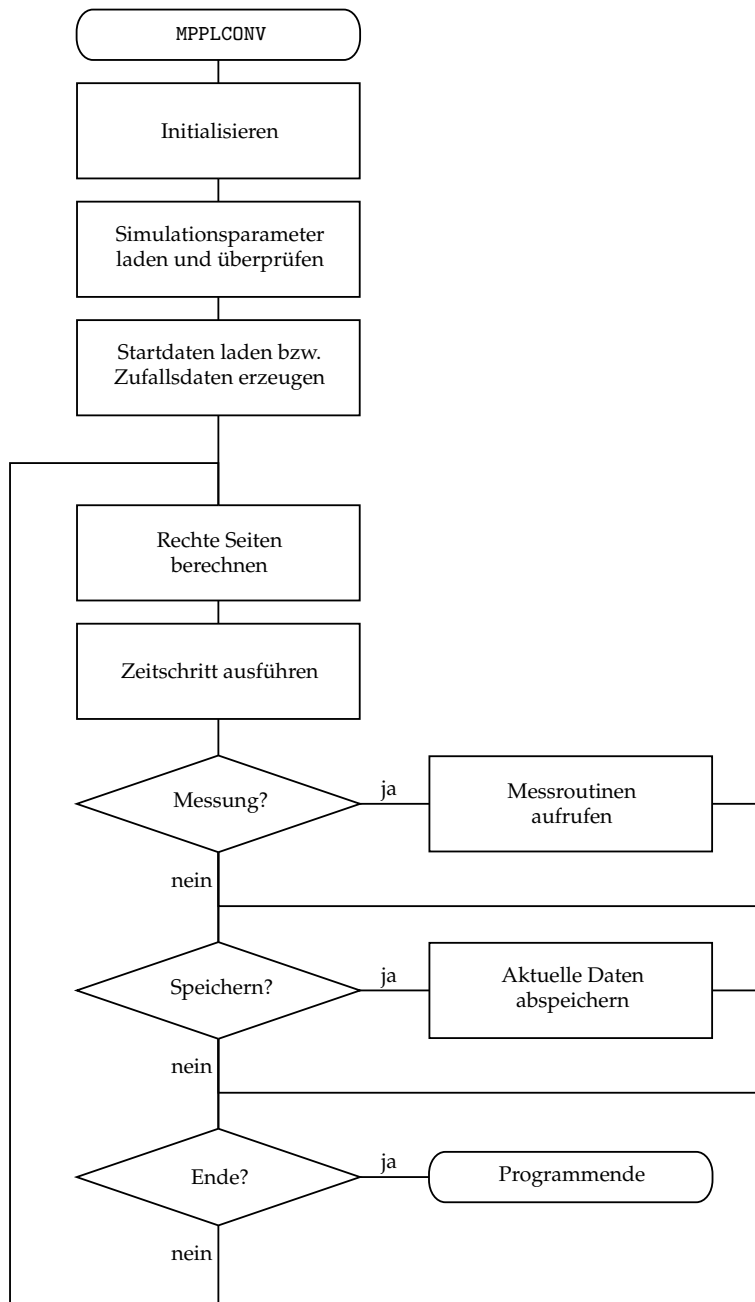


Abbildung 3.1: Sehr vereinfachter Überblick über das Simulationsprogramm.

leitung in Anhang B.

In der Hauptschleife des Programms werden zu jedem Zeitschritt die rechten Seiten der Matrixgleichungen 3.35 und 3.40 berechnet und dann die Gleichungen durch Inversion der Matrizen \mathcal{M} und \mathcal{N} gelöst. Danach folgen verschiedene Routinen zur Analyse der Simulationsdaten. Eine Auflistung der verfügbaren Messroutinen findet sich ebenfalls in Anhang B. Selbstverständlich können in regelmäßigen Abständen auch die gesamten Felddaten abgespeichert werden.

In der Praxis ist es aufgrund der enormen Datenmengen, die bei Simulationen mit hohen Auflösungen anfallen nicht praktikabel, die vollen dreidimensionalen Temperatur- und Geschwindigkeitsfelder in sehr engen Zeitabständen abzuspeichern. Beispielsweise benötigt ein einzelner Datensatz bei einer Auflösung von $N_x \times N_y \times N_z = 512 \times 256 \times 257$ etwa 300 MB (in komprimierter Form). Wegen der relativ geringen Anzahl an gespeicherten Datensätzen sind statistische Analysen im nachhinein nur noch sehr begrenzt möglich. Die Auswerteroutinen sind aus diesem Grund direkt in das Simulationsprogramm integriert worden.

Berechnung der rechten Seiten

Die Berechnung der rechten Seiten wird nun etwas genauer vorgestellt. Die Rechnung wird pseudo-spektral durchgeführt, d.h. ein Teil der Berechnung erfolgt im Spektralraum, ein anderer Teil im Ortsraum. Der Wechsel zwischen diesen beiden Räumen erfolgt mittels zweidimensionaler Fast-Fourier-Transformation (für die Horizontalabhängigkeit) und mittels schneller Kosinustransformation (für die Vertikalabhängigkeit). Der Ablauf der einzelnen Berechnungen, und im welchem Raum sie ausgeführt werden, sowie die dabei notwendigen Transformationen sind in der folgenden Übersicht dargestellt:

 im Spektralraum

im Ortsraum

- ϕ, ψ, \vec{U} und θ sind vom vorhergehenden Zeitschritt im Spektralraum gegeben

- berechne die z -Ableitungen $\partial_z \psi, \partial_z \phi, \partial_z \theta, \partial_z^2 \psi, \partial_z^2 \phi, \partial_z^2 \theta, \partial_z^2 \vec{U}$ und $\partial_z^4 \phi$ mittels der Eigenschaften der Chebyshev-Polynome

- berechne \vec{v} und $\nabla \times \vec{v}$, die dabei noch nötigen x - und y -Ableitungen erhält man durch Multiplikation jeder Fourier-Komponente mit ik_x bzw. ik_y

transformiere $\vec{v}, \nabla \times \vec{v}$ und θ in den Ortsraum \implies

- berechne $(\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v}$
und $\vec{v}\theta$ punktweise

\Leftarrow transformiere $(\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v}$ und $\vec{v}\theta$ in den Spektralraum

- berechne $\nabla \times ((\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v}),$
 $\hat{z} \cdot \nabla \times (\nabla \times ((\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v}))$ und
 $\nabla \cdot (\vec{v}\theta)$

- zusammen mit den Werten vom vorhergehenden Zeitschritt werden damit die rechten Seiten der linearen Gleichungssysteme 3.35 und 3.40 berechnet

Die Berechnung von Ableitungen erfolgt wie gesehen im Spektralraum, da sowohl für Fourier-Moden als auch für Chebyshev-Polynome Ableitungen sehr leicht berechnet werden können. Im Gegensatz dazu ist die Multiplikation zweier ortsabhängiger Funktionen im Spektralraum sehr aufwendig, dies entspricht einer Faltung. Die Berechnungen erfolgen daher im Ortsraum. Einen Nachteil hat diese Vorgehensweise jedoch, es kann so genanntes Aliasing auftreten. Das Produkt zweier Funktionen enthält nämlich Anteile mit höheren Wellenzahlen als die ursprünglichen Funktionen. Diese werden jedoch vom Gitter im Ortsraum nicht aufgelöst und verursachen damit Aliasing-Fehler im Spektrum. Die Fehler können vermieden werden, indem die Multiplikation im Ortsraum bei im Vergleich zum Spektralraum höherer Auflösung durchgeführt wird. Nach Rücktransformation des Produktes in den Spektralraum werden die hohen Wellenzahlen dann lediglich abgeschnitten und verfälschen nicht das gesamte Spektrum. Es zeigt sich, dass eine um den Faktor $2/3$ kleinere Auflösung im Spektralraum das Problem behebt. Dieses De-Aliasing wird in der Simulation angewendet. Die im Späteren angegebenen Werte N_x und N_y für die Auflösung der Simulationen geben immer die Werte im Ortsraum an. Für die Berechnungen im Spektralraum werden dann nur $2/3$ dieser Auflösung verwendet.

Matrix Inversion

Wie schon erwähnt, werden die linearen Gleichungssysteme 3.35 und 3.40 durch Inversion der Matrizen \mathcal{M} und \mathcal{N} mittels LU-Zerlegung und der entsprechenden Auswertung der rechten Seiten gelöst. Damit erhält man die Temperatur- und Geschwindigkeitsvariablen zum neuen Zeitpunkt. Sie liegen jedoch noch nicht als Chebyshev-Koeffizienten vor, sondern in Form von Entwicklungskoeffizienten nach den Funktionen F_i bzw. G_i (siehe Gleichungen 3.20 und 3.37). Mittels der Gleichung 3.21 und einer ähnlichen Gleichung für die Funktionen G_i müssen ϕ , ψ und θ dann noch in Chebyshev-Koeffizienten umgerechnet werden.

3.3 Parallelisierung

Der hohe Rechenaufwand, der bei der Simulation von turbulenten Strömungen anfällt, erfordert in vielen Fällen den Einsatz von Parallelrechnern. Das Simulationsprogramm wurde daher vollständig parallelisiert und ist damit auf Rechenanlagen mit verteiltem Hauptspeicher einsetzbar. Während einer Simulation ist ein Datenaustausch zwischen den einzelnen Prozessoren notwendig, welcher explizit programmiert wurde. Das Programm verwendet dabei je nach Rechnertyp verschiedene Kommunikationsschnittstellen. Dazu gehört zum einen das so genannte „message passing interface“ (MPI) [1, 2], das auf nahezu allen parallelen Architekturen verfügbar ist. MPI wurde auf den Parallelrechnern von Typ IBM RS/6000 SP und IBM p690 der Gesellschaft für wissenschaftliche Datenverarbeitung Göttingen (GWDG) eingesetzt. Auf der außerdem verwendeten Cray T3E des Höchstleistungsrechenzentrums Stuttgart (HLRS) kamen stattdessen die Cray spezifischen Routinen „SHMEM“ zu Einsatz. Damit konnten im Vergleich zu MPI höhere Datenraten und geringere Latenzzeiten erreicht werden.

Speicheraufteilung

Die Simulationsdaten sind auf die Speicherbereiche der einzelnen Prozessoren verteilt, wobei zwei verschiedene Speicheraufteilungen verwendet werden, eine für die spektralen Daten und eine für die Werte im Ortsraum. In Abbildung 3.2 sind die beiden Speicheranordnungen und der bei der Transformation zwischen den Räumen notwendige Datenaustausch schematisch dargestellt.

Es zeigt sich, dass bei vielen Berechnungen im Spektralraum gleichzeitig auf sämtliche Chebyshev-Indizes zugegriffen werden muss. Dazu gehören unter anderen die Berechnung von z -Ableitungen als auch die Ausführung des Zeitschritts durch Lösen der Gleichungen 3.35 und 3.40. Die Spektraldaten sind daher so gespeichert, dass jeder Prozessor auf einen Block Daten Zugriff hat, der alle Chebyshev-Indizes und alle Wellenzahlen k_x , aber nur einen Teil der Wellenzahlen k_y umfasst. Die k_y -Richtung ist also über die Prozessoren verteilt. Dabei muss sowohl für die Anzahl der Fourier-Moden N_y als auch für die Anzahl der verwendeten Prozessoren N_{proc}

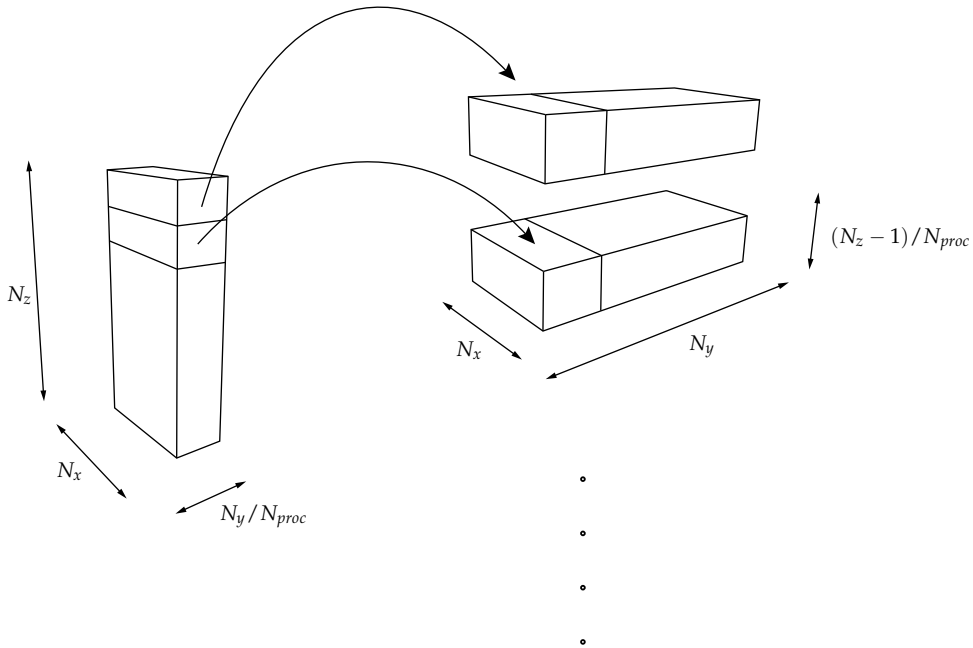


Abbildung 3.2: Schematische Darstellung eines Datenblocks in spektraler Speicheranordnung (links) und wie die Daten neu verteilt werden, um zur Datenaufteilung im Ortsraum zu gelangen (rechts).

eine Potenz von zwei gewählt werden, um eine gleichmäßige Verteilung der Daten zu erreichen.

Bei der Transformation in den Ortsraum wird dann folgendermaßen vorgegangen. Zuerst erfolgt in der spektralen Speicheranordnung die Transformation der z -Richtung mittels Kosinustransformation. Die noch notwendige Fourier-Transformation kann allerdings in dieser Anordnung nicht ausgeführt werden, da hierfür gleichzeitig auf alle Wellenzahlen k_x und k_y zugegriffen werden muss. Die Daten werden daher, wie in Abbildung 3.2 gezeigt, neu verteilt⁵. Jeder Prozessor erhält damit einen Block Daten, der sämtliche horizontale Wellenzahlen beinhaltet, jedoch nur einen Teil der z -

⁵Die Anzahl der verschiedenen z -Koordinaten ist wie zuvor erwähnt eine Potenz von zwei plus ein, also $N_z = 2^n + 1$, $n \in \mathbb{N}$. Damit die Daten aber gleichmäßig auf $N_{proc} = 2^m$, $m \in \mathbb{N}$ Prozessoren verteilt werden können, werden die Daten eines z -Wertes, nämlich $z = 0$ nicht mit übertragen. Für diesen z -Wert sind die Geschwindigkeitsfelder und die Temperatur θ sowieso gleich null, $z = 0$ ist schließlich direkt an der unteren Wand.

Koordinaten. Die zweidimensionale FFT kann nun durchgeführt werden. Die Rücktransformation erfolgt entsprechend in umgekehrter Reihenfolge.

Noch ein Wort zur Effektivität der Parallelisierung: Trotz des hohen Kommunikationsbedarfes, bei jedem Zeitschritt müssen schließlich die gesamten Temperatur- und Geschwindigkeitsdaten ausgetauscht werden, skaliert das Programm recht gut mit der Anzahl der Prozessoren. Bei Testrechnungen⁶ auf der Cray T3E konnte beispielsweise festgestellt werden, dass sich bei einer Erhöhung der Prozessoranzahl von 16 auf 128, was einer Verachtfachung entspricht, die Rechenzeit um den Faktor 6.9 reduzierte⁷.

3.4 Numerische Auflösung

Aufgrund der endlichen Speicher- und Rechenkapazität von Computern kann bei numerischen Simulationen nur eine endliche Anzahl an Moden, in diesem Fall also der Fourier- und Chebyshev-Komponenten, berücksichtigt werden. Es stellt sich daher die Frage, welche und wieviele Moden notwendig sind, um eine Strömung angemessen repräsentieren zu können.

Als Erstes sollte das Aspektverhältnis, und damit die größte zur Verfügung stehende Wellenlänge, angemessen gewählt werden, um allen relevanten, großskaligen Strukturen genügend Raum zu geben. Diese Problematik wird später in Kapitel 4 anhand von Beispielen genauer behandelt.

In diesem Abschnitt soll es jedoch mehr um die adäquate Auflösung der kleinsten Strukturen gehen. Dabei haben sich zwei Anforderungen als wichtig herausgestellt [34]. Zum Einen sollte die Ortsauflösung gut genug sein, um die kleinsten, relevanten Turbulenzelemente zu berücksichtigen. Als Maß für diese Strukturen wird oft die Kolmogorov Länge⁸ $\eta = (Pr^3/\epsilon)^{1/4}$ herangezogen, da die Erfahrung zeigt, dass Energie- und Dissipationsspektren für Wellenzahlen größer als $1/\eta$ nur noch unbedeutende Anteile aufweisen [27, 34]. Man verlangt daher, dass die Ortsauflösungen

⁶Jeweils bei einer Auflösung von $N_x = 128, N_y = 128, N_z = 129$.

⁷Dabei sind jeweils die Zeiten zum Einlesen der Startdaten am Anfang der Rechnungen und das Abspeichern der Endergebnisse nicht mit berücksichtigt worden.

⁸In dimensionsbehafteten Einheiten lautet die Größe $\eta = (\nu^3/\epsilon)^{1/4}$. Sie ist die Längenskala auf der in turbulenten Strömungen Dissipation von kinetischer Energie erfolgt. η ergibt sich aus einer Dimensionsanalyse, sie ist die einzige Länge, die sich aus den für die Dissipation relevanten Größen Viskosität ν und Dissipationsrate ϵ bilden lässt.

Δx , Δy und Δz kleiner als $\pi\eta$ sind. Für das Temperaturfeld gibt es eine entsprechenden Größe, nämlich $\eta_T = (1/\epsilon)^{1/4}$.

Die vertikale Auflösung muss noch eine weitere Bedingung erfüllen. An den Wänden bilden sich nämlich Grenzschichten aus, die durch starke Gradienten in der Temperatur und Geschwindigkeit gekennzeichnet sind. Hier spielen die verwendeten Chebyshev-Polynome ihren größten Vorteil aus. Der vertikale Abstand der Stützstellen der Chebyshev-Entwicklung ist nämlich am Rand der Schicht deutlich kleiner als in der Mitte. Dies ist ideal, um die sehr dünnen Grenzschichten aufzulösen. Als Maß für die Dicke der Temperaturgrenzschicht kann $1/(2Nu)$ angegeben werden⁹. Im Allgemeinen ist die Auflösung so gewählt worden, dass mindestens 7 bis 10 Stützstellen in der Grenzschicht liegen.

In Tabelle 3.1 sind für einen Teil der durchgeführten Simulationen die verwendeten Auflösungen^{10/11} und die verschiedenen Maße für die kleinsten Skalen aufgelistet.

3.5 Zeitschrittsteuerung und Simulationsdauer

Ein wichtiger Punkt in den numerischen Simulationen ist die richtige Wahl des Zeitschrittes h . Dieser darf nicht zu groß gewählt werden, da das Verfahren sonst instabil wird. Andererseits führt ein unnötig kleiner Zeitschritt zu einem erhöhten Rechenaufwand. Eine dynamische Anpassung von h ist hierbei von großem Vorteil. Besonders am Anfang einer Simulation verändern sich die Strömungsverhältnisse sehr stark. Bis auf wenige Ausnahmen ist als Anfangsbedingung nämlich ein ruhendes Fluid ($\vec{v} = 0$) mit kleinen, zufälligen Temperaturfluktuationen θ gewählt worden. Der Zeitschritt kann hier relativ groß gewählt werden. Mit dem Anwachsen der Geschwindigkeiten muss der Zeitschritt dann schrittweise reduziert wer-

⁹ Nu bezeichnet die Nusselt-Zahl, ein dimensionsloses Maß für der Wärmetransport durch die Schicht (siehe Kapitel 6).

¹⁰Die angegebenen Werte N_x und N_y sind die in der Fourier-Transformation verwendeten Modenzahlen. Aufgelöst werden im Verfahren davon nur jeweils 2/3 um Aliasing-Fehler (siehe Kapitel 3.2) zu vermeiden. Bei zum Beispiel $N_x = 512$ werden im Spektralraum nur 340 Moden verwendet, die effektive Ortsauflösung ist somit $\Delta x = \Gamma_x/340$.

¹¹Zum Teil wurden die Simulationen mit kleineren Auflösungen gestartet bis sich physikalisch sinnvolle Temperatur- und Geschwindigkeitsprofile, sowie Nusselt Zahlen einstellen, und dann bei hoher Auflösung fortgesetzt, ähnlich wie bei [42]

Pr	Ra	Γ_x	Γ_y	N_x	N_y	N_z	Δx	Δy	Δz_{w0}	Δz_m	$\pi\eta$	$\pi\eta_T$	$1/(2Nu)$
0.1	1.0×10^7	2	1	256	128	129	0.012	0.012	0.00015	0.0123	0.009	0.051	0.035
0.7	1.6×10^4	10	10	128	128	17	0.119	0.119	0.0096	0.0975	0.184	0.240	0.192
0.7	1.0×10^5	10	10	256	256	33	0.059	0.059	0.0024	0.0490	0.103	0.134	0.117
0.7	5.0×10^5	10	10	256	256	33	0.059	0.059	0.0024	0.0490	0.061	0.080	0.074
0.7	1.0×10^6	10	10	512	512	65	0.029	0.029	0.0006	0.0245	0.049	0.064	0.061
0.7	1.0×10^7	10	10	512	512	65	0.029	0.029	0.0006	0.0245	0.024	0.031	0.032
0.7	1.0×10^7	2	1	256	128	129	0.012	0.012	0.00015	0.0123	0.023	0.030	0.031
0.7	1.0×10^8	2	1	512	256	257	0.006	0.006	0.00004	0.0061	0.011	0.015	0.016
7	3.2×10^4	20	20	256	256	33	0.118	0.118	0.0024	0.0490	0.472	0.110	0.166
7	1.0×10^5	10	10	256	256	33	0.059	0.059	0.0024	0.0490	0.327	0.076	0.119
7	1.0×10^6	10	10	512	512	65	0.029	0.029	0.0006	0.0245	0.154	0.036	0.059
7	2.5×10^6	10	10	512	512	65	0.029	0.029	0.0006	0.0245	0.115	0.027	0.045
7	1.0×10^7	10	10	512	512	65	0.029	0.029	0.0006	0.0245	0.074	0.017	0.031
7	1.0×10^7	2	1	256	128	129	0.012	0.012	0.00015	0.0123	0.073	0.017	0.029
7	1.0×10^8	2	1	512	256	257	0.006	0.006	0.00004	0.0061	0.035	0.008	0.015
30	1.0×10^5	10	10	256	256	33	0.059	0.059	0.0024	0.0490	0.667	0.052	0.113
30	1.0×10^6	10	10	512	512	65	0.029	0.029	0.0006	0.0245	0.318	0.025	0.058
30	1.0×10^7	10	10	512	512	65	0.029	0.029	0.0006	0.0245	0.152	0.012	0.030
60	1.0×10^5	10	10	256	256	33	0.059	0.059	0.0024	0.0490	0.936	0.043	0.110
60	1.0×10^6	10	10	512	512	65	0.029	0.029	0.0006	0.0245	0.449	0.021	0.058

Tabelle 3.1: Verwendete Auflösungen für einen Teil der Simulationen. Aufgelistet sind die horizontalen Auflösungen Δx und Δy , die vertikalen Abstände der Stützstellen an der Wand (Δz_{w0}) und in der Mitte der Schicht (Δz_m). Die Längen η und η_T sind mittels der Abschätzungen $\eta = (Pr^2/(RaNu))^{1/4}$ und $\eta_T = (1/(RaPrNu))^{1/4}$ [34] berechnet worden. Die Nusselt-Zahl Nu stammt jeweils direkt aus den Simulationsdaten.

den. Aber auch nachdem ein statistisch stationärer Zustand¹² erreicht ist, sind insbesondere bei den höchsten Rayleigh-Zahlen immer wieder Anpassungen nötig, um die von Zeit zu Zeit auftretenden, extremen turbulenten Ereignisse, wie die Emission besonders starker thermischer Plumes (vgl. Kapitel 4), angemessen zu simulieren.

Zur automatischen Steuerung des Zeitschrittes wird, wie bereit in Kapitel 3.1.3 erwähnt, das so genannten CFL (Courant-Friedrich-Levy) Kriterium verwendet. Dazu wird in der Simulation in regelmäßigen Abständen, typischerweise alle 20 Zeitschritte, die Größe:

$$t_{CFL} = \min \left\{ \min_{x,y,z} |\Delta x / v_x|, \min_{x,y,z} |\Delta y / v_y|, \min_{x,y,z} |\Delta z / v_z| \right\} \quad (3.43)$$

berechnet. t_{CFL} ist die Zeit, die ein Fluidteilchen minimal benötigt, um von einem Gitterpunkt zu einem benachbarten Punkt zu gelangen, wobei Δx , Δy und Δz die Abstände in x -, y - und z -Richtung zwischen den Stützstellen des Verfahrens bezeichnen. Die Schrittweite h muss nun so gewählt werden, dass sie klein gegenüber t_{CFL} ist. Im Allgemeinen wurde $h = 0.25t_{CFL}$ verwendet. Um jedoch ein ständiges Ändern der Schrittweite bei nur minimalen Schwankungen von t_{CFL} zu vermeiden, wurde h nur dann angepasst, wenn es außerhalb des Intervalls $[0.1t_{CFL}, 0.33t_{CFL}]$ lag. Die verwendeten Schrittweiten in den bereits im vorangegangenen Abschnitt vorgestellten Simulationen sind in Tabelle 3.5 aufgelistet. Bei den angegebenen Werten handelt es sich um Mittelwerte von h im statistisch stationären Zustand der jeweiligen Simulation.

Es stellt sich noch die Frage, wie lange man eine Simulation laufen lassen muss, um realistische Ergebnisse zu erhalten. Man muss der Strömung schließlich genügend Zeit lassen, um sich ausgehend von den Anfangsbedingungen zu entwickeln. Die Gesamtlänge einer Simulation sollte daher deutlich größer sein, als die typischen Zeitskalen, die in der Strömung vorkommen. Aus den auftretenden Geschwindigkeiten kann eine konvektive

¹²Ein im statistischen Sinne stationärer Zustand ist erreicht, wenn sich die statistischen Eigenschaften der Strömung nicht mehr mit der Zeit ändern.

Zeitskale definiert werden:

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{\langle v^2 \rangle_{x,y,z,t}}}, \quad (3.44)$$

wobei $\langle \dots \rangle_{x,y,z,t}$ den Mittelwert über Raum und Zeit bezeichnet. Idealerweise sollte man auch die horizontale Größe der auftretenden Strömungsstrukturen berücksichtigen, da das Fluid schließlich nicht direkt von der einen Platte zur anderen fließt. Ein sinnvolle Zeitskale ist zum Beispiel:

$$\tau_r = (\lambda_{max} + 2)\tau. \quad (3.45)$$

λ_{max} bezeichnet dabei die horizontale Wellenlänge der großskaligen Strukturen der Strömung (vgl. Kapitel 4.2.2). τ_r ist damit die Zeit, die ein Fluidteilchen typischerweise benötigt, um einmal in einer Konvektionsrolle bzw. -zelle umherzuwandern. Sowohl die Gesamtlänge T_{sim} , als auch der Quotient aus T_{sim} und den zwei beschriebenen Zeitskalen τ und τ_r sind in Tabelle 3.2 für einige Simulationen aufgelistet. Die Erfahrung zeigt, dass globale Größen wie die kinetische Energie der Fluides oder die Nusselt-Zahl, ein dimensionsloses Maß für den Wärmetransport durch die Schicht, im Allgemeinen bereits nach weniger als einem τ_r zu realistischen Werten konvergieren (vgl. [42]). Die Entwicklung von großskaligen Strömungsstrukturen, die Mittelpunkt dieser Arbeit ist, benötigt jedoch weitaus mehr Zeit. Dies gilt insbesondere für die weniger turbulenten Fälle bei mittleren Rayleigh-Zahlen, in denen Transienten langwierig sein können. Die Simulationen sind daher über sehr viele Zeiten τ_r ausgeführt worden.

Zum Schluss sollen noch ein paar Anmerkungen zum Zeitaufwand der durchgeführten Simulationen gemacht werden. Kleinere, laminare Probleme können im Allgemeinen innerhalb von Minuten oder wenigen Stunden auf einfachen Personalcomputern gerechnet werden. Die aufwendigsten Rechnungen erforderten jedoch selbst auf größeren Parallelrechnern lange Rechenzeiten. Beispielsweise benötigte die Simulation bei Aspektverhältnis 10, Rayleigh-Zahl 10^7 und Prandtl-Zahl 7 fast 400 Stunden auf der IBM p690¹³ der GWDG bei Verwendung aller 32 Prozessoren. Dabei wurden

¹³Ein relativ neuer Parallelrechner, der Anfang 2002 installiert wurden.

Pr	Ra	Γ_x	Γ_y	h	T_{sim}	T_{sim}/τ	T_{sim}/τ_r
0.1	1.0×10^7	2	1	1×10^{-6}	0.165	59	15
0.7	1.6×10^4	10	10	5×10^{-4}	40.2	980	177
0.7	1.0×10^5	10	10	8×10^{-5}	25.8	1680	260
0.7	5.0×10^5	10	10	3×10^{-5}	6.29	920	142
0.7	1.0×10^6	10	10	9×10^{-6}	1.92	393	56
0.7	1.0×10^7	10	10	1×10^{-6}	0.151	92	14
0.7	1.0×10^7	2	1	8×10^{-7}	0.178	115	29
0.7	1.0×10^8	2	1	3×10^{-7}	0.029	53	13
7	3.2×10^4	20	20	1×10^{-4}	25.1	955	136
7	1.0×10^5	10	10	4×10^{-5}	15.9	1209	173
7	1.0×10^6	10	10	5×10^{-6}	3.14	867	124
7	2.5×10^6	10	10	3×10^{-6}	1.44	650	81
7	1.0×10^7	10	10	1×10^{-6}	0.089	83	13
7	1.0×10^7	2	1	4×10^{-7}	0.049	52	13
7	1.0×10^8	2	1	6×10^{-8}	0.013	42	11
30	1.0×10^5	10	10	4×10^{-5}	10.8	864	134
30	1.0×10^6	10	10	5×10^{-6}	1.43	414	46
30	1.0×10^7	10	10	1×10^{-6}	0.104	108	12
60	1.0×10^5	10	10	3×10^{-5}	10.8	884	137
60	1.0×10^6	10	10	4×10^{-6}	0.974	200	31

Tabelle 3.2: Zeitschritt h und Gesamtlänge T_{sim} für die Simulationen aus Tabelle 3.1.

fast 10^5 Zeitschritte ausgeführt. Ein anderes Beispiel ist die Simulation bei $\Gamma_x = 2$, $\Gamma_y = 1$, $Ra = 10^8$ und $Pr = 7$, die auf der am Höchstleistungsrechenzentrum Stuttgart installierten Cray T3E¹⁴ trotz gleichzeitiger Verwendung von 128 Prozessoren noch über 100 Stunden¹⁵ Rechenzeit erforderte.

3.6 Variationen des Verfahrens

Für verschiedene Untersuchungen wurden Änderungen am mathematische Modell und damit auch am numerischen Verfahren vorgenommen. Diese sollen hier diskutiert werden.

¹⁴Aufgrund der fortgeschrittenen Alter ist diese Maschine inzwischen abgeschaltet und durch eine neue ersetzt worden.

¹⁵Diese Simulation wurde mit einer kleineren Auflösung gestartet und erst später auf die für exaktere Ergebnisse notwendige Auflösung von $N_x = 512$, $N_y = 256$, $N_z = 257$ umgeschaltet. Die benötigte Rechenzeit wäre sonst noch deutlich länger gewesen.

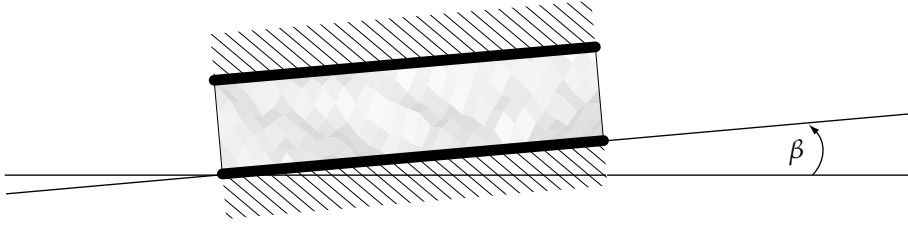


Abbildung 3.3: Skizze einer aus der Horizontalen verkippten Fluidschicht.

3.6.1 Verkippen der Fluidschicht

Bei der Untersuchung von Mean Flows (Kapitel 5) erschien es lohnenswert den Einfluss einer leichten Verkipfung der Fluidschicht zu betrachten. Solch eine Verkipfung aus der Horizontalen ist leicht zu realisieren. Dreht man das kartesische Koordinatensystem mit, so dass die x - und y -Richtungen immer parallel zu den beiden Kühl- und Heizplatten bleiben, so ändert sich bis auf die Richtung der Erdbeschleunigung nichts an der bisheriger Beschreibung. Die Gravitation zeigt dann nicht mehr nur in negative z -Richtung, sondern es kommt noch eine Komponente in Kipprichtung dazu. Der Vektor der Gravitationsbeschleunigung im mitgedrehten Koordinatensystem ist dann:

$$\vec{g} = -g(\hat{z} \cos \beta + \hat{x} \sin \beta). \quad (3.46)$$

β ist dabei der Kippwinkel, so wie in Abbildung 3.3 skizziert. Mit \vec{g} ändert sich auch der Auftriebsterm in den Boussinesq-Gleichungen. Die vollständige Gleichung für die Geschwindigkeit \vec{v} lautet dann:

$$\partial_t \vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\nabla \pi + Pr \nabla^2 \vec{v} + RaPr \theta (\cos \beta \hat{z} + \sin \beta \hat{x}). \quad (3.47)$$

Das numerische Verfahren kann fast unverändert bleiben, da sich nur die rechten Seiten in den Gleichungen für die Geschwindigkeitsanteile ϕ , ψ und \vec{U} verändern:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\hat{\phi}_{\vec{k}}} &= \frac{1}{k^2} \left\{ \hat{z} \cdot \left[\nabla \times \nabla \times [(\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v}] \right] \right\}_{\vec{k}} - RaPr \left[\cos \beta - \frac{ik_x}{k^2} \sin \beta \partial_z \right] \hat{\theta}_{\vec{k}}, \\ \mathcal{R}_{\hat{\psi}_{\vec{k}}} &= -\frac{1}{k^2} \left\{ \hat{z} \cdot \left[\nabla \times [(\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v}] \right] \right\}_{\vec{k}} + \frac{ik_y}{k^2} RaPr \sin \beta \hat{\theta}_{\vec{k}}, \end{aligned}$$

$$\vec{\mathcal{R}}_{\bar{u}} = \begin{pmatrix} -\hat{x} \cdot \langle (\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v} \rangle_{x,y} + RaPr \sin \beta \langle \theta \rangle_{x,y} \\ -\hat{y} \cdot \langle (\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v} \rangle_{x,y} \end{pmatrix}. \quad (3.48)$$

Einer der Terme wurde abgewandelt, einige wenige sind hinzugekommen (vgl. 3.15). Eine wichtige Erkenntnis kann schon aus den obigen Gleichungen gewonnen werden. Der Mean Flow in x -Richtung hat nämlich durch das Kippen der Schicht einen weiteren Produktionsterm erhalten, welcher mit der Größe des Kippwinkels anwächst. Es ist damit die Möglichkeit gegeben, dass das Temperaturfeld, dessen Ebenenmittelwert in diesen Term eingeht, bei genügend großen Winkeln direkt einen Mean Flow in Kipprichtung hervorrufen kann. Die durchgeführten Untersuchungen zu Erzeugung von Mean Flows in ebenen, aber auch gekippten Fluidschichten sind in Kapitel 5 dokumentiert.

3.6.2 Einbeziehung von Seitenwänden

Das bisherige Verfahren verwendet periodische Randbedingungen in den zwei Horizontalrichtungen x und y . Seitenwände sind nicht vorhanden. Im Gegensatz dazu kommen reale Laborexperimente im Allgemeinen jedoch nicht ohne horizontalen Begrenzungen aus. Bei genügend großem Aspektverhältnis ist deren Einfluss jedoch vernachlässigbar klein, zumindest für den Innenraum weit weg von den Wänden. Wie groß das Aspektverhältnis dabei sein soll, ist a priori nicht unbedingt klar. Daher wurden auch einige Simulationen durchgeführt, die Seitenwände beinhalten (siehe Kapitel 5.4.2).

Die Realisierung von richtigen, festen Seitenwänden, an denen sämtliche Geschwindigkeitskomponenten verschwinden, würde für das vorliegende Simulationsprogramm sehr aufwendige Änderungen nach sich ziehen. Man kann jedoch sehr leicht eine einfachere Variante von Wänden einbauen, so genannte spannungsfreie Ränder. Hier verlangt man nur, dass die Wand für das Fluid undurchlässig ist, die Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur Wand also verschwindet. Reibung an der Wand wird aber vernachlässigt, so dass die parallelen Anteile der Geschwindigkeit an den Seitenwänden nicht auf null absinken müssen. Realistische Grenzschichten können sich daher nicht ausbilden. Die Strömung des Fluid wird durch die

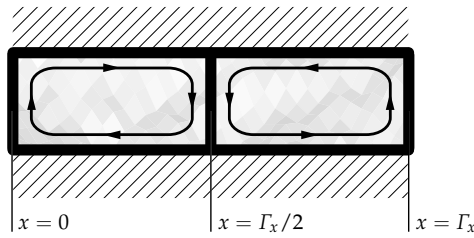


Abbildung 3.4: Realisierung von undurchlässigen Seitenwänden mittels Einführung einer Spiegelsymmetrie.

Wände lediglich horizontal begrenzt.

Wie kann dies in der Simulation realisiert werden? Man teile das Fluidvolumen zum Beispiel in x -Richtung in zwei Teile, so wie in Abbildung 3.4, und verlange das Geschwindigkeit und Temperatur an den Flächen $x = 0$, $x = \Gamma_x/2$ und $x = \Gamma_x$ Spiegelsymmetrie erfüllen. Man hat damit rechts und links die gleiche Strömung, bis auf eine Spiegelung. Die Geschwindigkeitskomponente v_x , die senkrecht zu den Spiegelebenen steht, wechselt dabei an den Ebenen ihr Vorzeichen. Da das Geschwindigkeitsfeld eine glatte Funktion bleiben soll, muss v_x an den Grenzflächen verschwinden. Die Spiegelebenen sind somit für das Fluid undurchdringliche Wände. Auf den ersten Blick mag es zwar so aussehen, als würde bei dieser Methode viel Rechenzeit verschwendet. Schließlich simuliert man zweimal die gleiche Strömung. Man wird aber sehen, dass man wegen dieser Symmetrie nicht mehr alle Spektralkomponenten der Temperatur- und Geschwindigkeitsfelder durch aufwendiges Lösen der Differentialgleichungen bestimmen muss. Die Hälfte der Koeffizienten ist nämlich durch die im Folgenden hergeleiteten Symmetriegleichungen (Gl. 3.51 und 3.52) gegeben.

Aufgrund der Spiegelsymmetrie kann v_x in Form von Sinus-Funktionen geschrieben werden:

$$v_x = \sum_j c_j \sin\left(j \frac{2\pi x}{\Gamma_x}\right), \quad (3.49)$$

wobei die c_j von den Koordinaten y , z und der Zeit t abhängige Koeffizienten sind. Der Mittelwert von v_x , also der Mean Flow in x -Richtung ist damit null. Anders verhält es sich für die Vektorkomponenten parallel zur Spiegelebene, also v_y und v_z , sowie das skalare Feld θ . Sie behalten ihr Vorzeichen bei Spiegelung bei und sind daher als Summe von Kosinusfunktionen dar-

stellbar:

$$f = \sum_j c_j^f \cos\left(j \frac{2\pi x}{\Gamma_x}\right), \quad f = v_y, v_z. \quad (3.50)$$

Mit Gleichung 3.2, der Zerlegung der Geschwindigkeit in Poloidal-, Toroidal- und Mean Flow Anteile folgt, dass dann ψ lediglich aus Sinus-Funktionen und ϕ aus Kosinus-Funktionen bestehen muss.

Dies kann leicht in das zuvor vorgestellte Simulationsprogramm eingebaut werden. Man muss verlangen, dass die Fourier-Koeffizienten (siehe Gleichung 3.8) entsprechende Bedingungen erfüllen. Für die Koeffizienten des Toroidalfeldes ψ ergibt sich:

$$\hat{\psi}_{k_x, k_y} = -\hat{\psi}_{-k_x, k_y}^*. \quad (3.51)$$

$\hat{\psi}_{k_x, k_y}$ bezeichnet den Fourier-Koeffizienten zum Wellenvektor $\vec{k} = \hat{x}k_x + \hat{y}k_y$. Damit besteht die x -Abhängigkeit von ψ lediglich aus Sinus-Anteilen. Für die restlichen Variablen erhält man:

$$\hat{f}_{k_x, k_y} = \hat{f}_{-k_x, k_y}^*, \quad f = \phi, \theta \quad (3.52)$$

und damit nur Kosinus-Funktionen.

3.6.3 Unendliche Prandtl-Zahl

In der Physik ist man oft am asymptotischen Verhalten von Systemen interessiert. So bildet die Suche nach dem so genannten „ultimativen Regime“, d.h. dem Verhalten von turbulenter Konvektion bei asymptotisch großen Rayleigh-Zahlen einen Schwerpunkt in der Forschung (siehe zum Beispiel [44, 22]). Zur Zeit sind direkte numerische Simulationen hierfür jedoch von geringerer Bedeutung, da die erreichbaren Rayleigh-Zahlen noch deutlich zu klein sind. Einen anderen Grenzübergang kann man allerdings direkt durchführen, den zu unendlicher Prandtl-Zahl. Dies ist zum Beispiel für die Konvektion im Erdmantel relevant, die durch eine extrem große Prandtl-Zahl charakterisiert ist. Die Änderungen am numerischen Verfahren, die sich für den Fall unendlicher Prandtl-Zahl ergeben, sollen hier hergeleitet werden.

Beginnen wir mit den Differentialgleichungen für die Fourier-Koeffizi-

enten der Geschwindigkeits- und Temperaturfelder (Gleichungen 3.11–3.14 und den zugehörigen rechten Seiten 3.15). Führt man den Grenzübergang zu $Pr \rightarrow \infty$ durch, natürlich unter der Voraussetzung, dass Temperatur und Geschwindigkeit dabei endlich bleiben, so erhält man die Gleichungen:

$$[\partial_z^2 - k^2]^2 \hat{\phi}_{\vec{k}}(z, t) = Ra \hat{\theta}_{\vec{k}}, \quad (3.53)$$

$$[\partial_z^2 - k^2] \hat{\psi}_{\vec{k}}(z, t) = 0, \quad (3.54)$$

$$\left[\partial_t - [\partial_z^2 - k^2] \right] \hat{\theta}_{\vec{k}}(z, t) = k^2 \hat{\phi}_{\vec{k}} - \left\{ \nabla \cdot (\vec{v}\theta) \right\}_{\vec{k}}, \quad (3.55)$$

$$\partial_z^2 \vec{U}(z, t) = 0. \quad (3.56)$$

Die Gleichung für die Temperatur ist dabei gänzlich unverändert geblieben, da sie die Prandtl-Zahl nicht enthielt. Das numerische Verfahren bleibt somit so wie in Kapitel 3.1 dargestellt. Im Gegensatz dazu haben sich die restlichen Gleichungen deutlich verändert. Die Geschwindigkeit wird nicht mehr durch Integration in der Zeit bestimmt, sondern wird zu jedem Zeitpunkt direkt aus dem Temperaturfeld berechnet.

Beginnen wir mit den Gleichungen für den Mean Flow \vec{U} und das Toroidalfeld $\hat{\psi}_{\vec{k}}$, diese können nämlich analytisch behandelt werden, sie sind unabhängig von der Temperatur. Der Mean Flow ist besonders einfach: da die zweite Ableitung nach z verschwinden soll, muss \vec{U} linear in z sein. Die Randbedingungen fordern jedoch, dass die Geschwindigkeit am oberen ($z = 1$) und unteren Rand ($z = 0$) verschwindet. \vec{U} ist daher identisch null. Die Toroidalfeldgleichung kann mittels eines Fourier-Ansatzes gelöst werden. Man setze:

$$\hat{\psi}_{\vec{k}}(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\lambda, t) e^{-i\lambda z} d\lambda. \quad (3.57)$$

Einsetzen des Ansatzes in Gleichung 3.54 und Projektion mit $e^{i\tilde{\lambda}z}$ liefert dann:

$$(\tilde{\lambda}^2 + k^2)a(\tilde{\lambda}, t) = 0 \quad \forall \tilde{\lambda}, t. \quad (3.58)$$

Da die horizontalen und vertikalen Wellenzahlen k und $\tilde{\lambda}$ reell sind, kann

dies nur für $a = 0$ erfüllt sein. Das toroidale Geschwindigkeitsfeld verschwindet somit auch.

Als letztes muss noch das Poloidalfeld behandelt werden. Dazu diskretisieren wir die z -Richtung wie bisher, d.h. $\hat{\phi}_{\vec{k}}$ wird nach den Funktionen G_i (vgl. Gleichung 3.37) und die rechte Seite der Gleichung nach reinen Chebyshev-Polynomen F_i entwickelt:

$$\hat{\phi}_{\vec{k}}(z, t) = \sum_{i=0}^{N_z-5} c_i(t) G_i(\tilde{z}), \quad \hat{\theta}_{\vec{k}}(z, t) = \sum_{j=0}^{N_z-1} d_j(t) T_j(\tilde{z}). \quad (3.59)$$

In vektorieller Schreibweise erhält man damit:

$$\mathcal{N}_{\infty} \vec{c}_t = Ra \mathcal{N}_4 \vec{d}_t \quad (3.60)$$

mit

$$\mathcal{N}_{\infty} = \mathcal{N}_3 - k^2 \mathcal{N}_2 + k^4 \mathcal{N}_1. \quad (3.61)$$

Die banddiagonalen Matrizen \mathcal{N}_1 , \mathcal{N}_2 und \mathcal{N}_3 sind bereits aus Kapitel 3.1 bekannt und wurden in Gleichung 3.42 definiert. Die Gleichung 3.60 wird wieder durch Invertieren der dünn besetzten Matrix \mathcal{N}_{∞} gelöst.

4

Strömungsstrukturen

Einer der faszinierendsten Aspekte von Konvektionsströmungen ist die in ihnen auftretende Vielfalt an Strömungsstrukturen. Zu den wohl bekanntesten Formen gehören dabei die so genannten Konvektionsrollen und Konvektionszellen. Insbesondere bei höheren Rayleigh-Zahlen treten aber noch komplexere Strukturen auf. Neben diesen großskaligen Mustern, Rollen und Zellen sind typischerweise deutlich breiter als die Dicke der Fluidschicht, entwickeln sich dann noch weitere, kleinskalige Strukturen, die gelegentlich auch als kohärente Strukturen bezeichnet werden. Dazu gehören unter anderen die so genannten „Plumes“.

Im Mittelpunkt dieser Arbeit stehen jedoch im Besonderen die großskaligen Strömungsmuster. Ihre Entstehung und Entwicklung bei kleinen Rayleigh-Zahlen, bei denen die Strömungen im Wesentlichen stationär oder periodisch in der Zeit sind, ist in den vergangenen Jahrzehnten mittels analytischer Methoden wie linearen Stabilitätsanalysen, Experimenten und numerischen Rechnungen ausführlich untersucht worden und ist gut verstanden. Was allerdings mit diesen großskaligen Strukturen passiert, sobald die Strömung sehr turbulent wird, ist weniger klar. Beispiele aus dem geo- und astrophysikalischen Kontext, wie die Mesoskalen-Konvektion in unserer Atmosphäre oder die Sonnengranulen, deuten jedoch darauf hin, dass selbst bei extrem hohen Rayleigh-Zahlen, bei denen die Strömungen dementsprechend turbulent sind, noch rollenartige und zellenartige Strukturen eine Rolle spielen.

Die meisten Experimente und Simulationen bei hohen Rayleigh-Zahlen verwenden allerdings aus praktischen Gründen relativ kleine Aspekt-

verhältnisse. Für viele Untersuchungen geht dies in Ordnung, zum Beispiel falls man sich hauptsächlich für die Grenzschichten oder kohärente Strukturen wie die Plumes interessiert. Um jedoch den großskaligen Strukturen genügend Platz zu bieten, müssen auch entsprechend große Aspektverhältnisse verwendet werden. In dieser Arbeit sind daher im Allgemeinen Simulationen mit einem Aspektverhältnis von $\Gamma = 10$ durchgeführt worden. Der numerische Aufwand ist damit natürlich deutlich größer als bei kleinen Γ . Trotzdem konnten hierbei Rayleigh-Zahlen von bis zu 10^7 erreicht werden. Dies ist zwar noch weit von in der Natur relevanten Rayleigh-Zahlen entfernt, bei Mesoskalen-Konvektion in der Atmosphäre sind beispielsweise Werte von $Ra = 10^{18}$ und mehr üblich, nichtsdestotrotz sind die Strömungen bei diesen Rayleigh-Zahlen schon sehr turbulent¹.

In den Folgenden Abschnitten dieses Kapitels werden die in den Simulationen beobachteten Konvektionsmuster und deren Veränderungen mit Rayleigh- und Prandtl-Zahl anhand von Strömungsvisualisierungen vorgestellt (Kapitel 4.1), die horizontale Größe der verschiedenen Strukturen mittels einer spektralen Analyse bestimmt (Kapitel 4.2) und der Einfluss des Aspektverhältnisses auf die Strömungen untersucht (Kapitel 4.3). Zum Ende wird noch interessanter Unterschied zwischen der Konvektion bei kleinen und großen Prandtl-Zahlen vorgestellt (Kapitel 4.4).

4.1 Konvektionsmuster

4.1.1 Prandtl-Zahl 0.7

In diesem Abschnitt sollen die typischen Strömungsstrukturen bei Prandtl-Zahlen der Größenordnung eins am Beispiel von $Pr = 0.7$ vorgestellt werden. Diese Prandtl-Zahl ist von besonderer praktischer Relevanz, da unter Normalbedingungen die meisten Gase, insbesondere auch Luft, in diese Kategorie fallen.

Aus einer einfachen, linearen Stabilitätsanalyse kann man erfahren, dass Konvektionsbewegungen erst oberhalb einer kritischen Rayleigh-Zahl von

¹Beispielsweise erfolgt der Übergang zu turbulenten Strömungen bei $Pr = 0.7$ und dem hier verwendeten, großen Aspektverhältnis bei Rayleigh-Zahlen um 10^4 . Bei größeren Prandtl-Zahlen und besonders bei kleineren Aspektverhältnissen sind jedoch zum Teil deutlich höhere Rayleigh-Zahlen erforderlich.

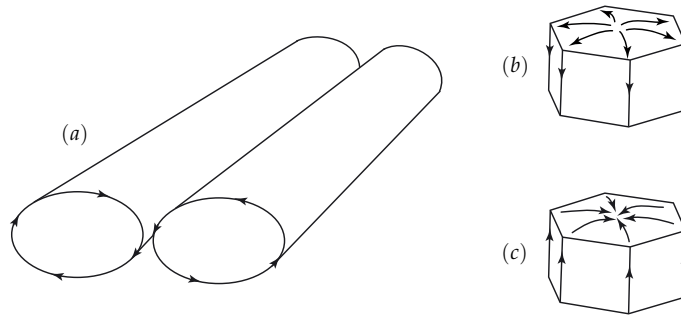


Abbildung 4.1: Schematische Darstellung der Strömung in Konvektionsrollen (a) und den zwei verschiedenen Typen von hexagonalen Zellen, entweder mit einem Aufstrom (b) oder einem Abstrom (c) im Zentrum der Zelle.

$Ra_c \approx 1708$ einsetzen (siehe zum Beispiel [21, 28]), und zwar zunächst in Form von geraden, stationären Konvektionsrollen, so wie sie in Abbildung 4.1(a) schematisch dargestellt sind. Ra_c ist dabei unabhängig von der Prandtl-Zahl. Die zugehörige kritische Wellenzahl der Rollen beträgt $k_c \approx 3.116$. Dementsprechend sollten sich in der Nähe von Ra_c , zumindest wenn wie hier von zufälligen Anfangsbedingungen gestartet wird, Rollenstrukturen mit einer Wellenlänge (= doppelte Breite der Konvektionsrollen) von $\lambda = 2\pi/k_c \approx 2.016$ bilden. Aufgrund des endlichen Aspektverhältnisses kann λ in den hier durchgeführten Simulationen jedoch nur diskrete Werte annehmen. So ergaben sich bei einer Simulation mit $Ra = 1710$ Rollen mit einer Wellenlänge von $\lambda = 2$.

Mit zunehmender Rayleigh-Zahl kann dann ein schrittweiser Übergang zu zeitabhängigen (erst periodischen und später chaotischen) Strömungen beobachtet werden. In Abbildung 4.2 sind einige prägnante Stationen hin zu turbulenter Konvektion dargestellt. Die Abbildung zeigt Momentaufnahmen der Temperaturverteilung in der Mitte der Fluidschicht. Konvektionsrollen sind hier durch parallel verlaufende, rote und blaue Bänder gekennzeichnet. Warme Bereiche (rot dargestellt) sind dabei mit den Aufströmen und kalte Bereiche (blau dargestellt) mit den abwärts strömenden Anteilen der Rollenstruktur verbunden. Bei höheren Rayleigh-Zahlen ist diese Korrelation zwischen Temperatur- und Geschwindigkeitsfeld allerdings nicht mehr exakt. So kann es dann durchaus passieren, dass kleinere kalte/warme Fluidpakete entgegen dem Auftrieb mit der Strömung mit

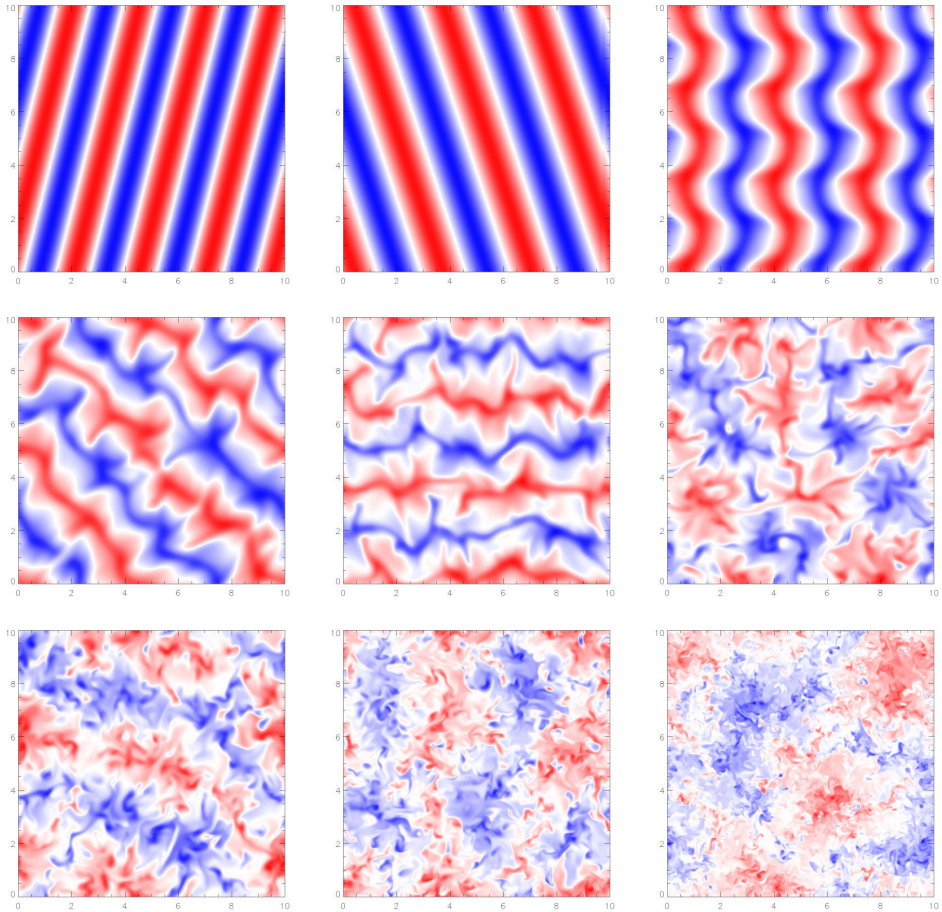


Abbildung 4.2: Momentaufnahmen der Temperaturverteilung in der Mittelebene ($z = 0.5$) für $Pr = 0.7$ und $Ra = 2000, 4000, 8000, 16000, 32000, 10^5, 2.5 \times 10^5, 10^6$ und 10^7 (von links nach rechts, oben nach unten). In allen Fällen wurde ein Aspektverhältnis von $\Gamma = 10$ verwendet. Die Farbskala reicht von blau (tiefste Temperatur in der Ebene) über weiß nach rot (höchste Temperatur in der Ebene).

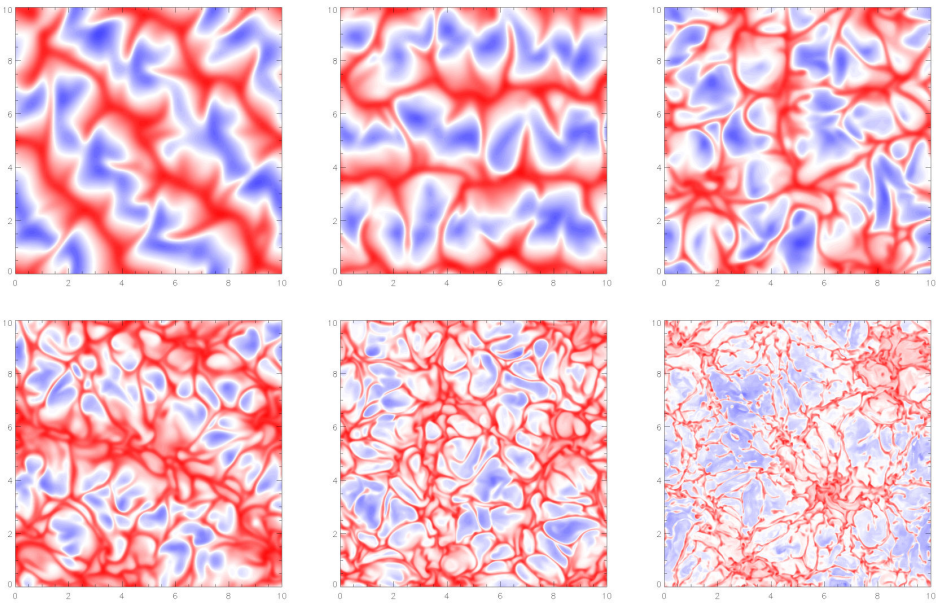


Abbildung 4.3: Temperaturverteilung am Rand der unteren Temperaturschicht, dort wo die Temperaturfluktuationen ein Maximum annehmen (vgl. Kapitel 6), für die Fälle $Ra = 16000, 32000, 10^5, 2.5 \times 10^5, 10^6$ und 10^7 (von links nach rechts, oben nach unten) aus Abbildung 4.2. Die weiteren in Abbildung 4.2 dargestellten Simulationen bei $Ra = 2000, 4000$ und 8000 sind hier nicht mit gezeigt, da sich in diesen Fällen noch keine Grenzschichten ausbilden.

nach oben/unten transportiert werden. Zumindest auf größeren Längenskalen (und erst recht im zeitlichen Mittel) steigt aber auch hier warmes Fluid auf und kaltes Fluid sinkt ab, wie ein Vergleich der Temperaturverteilungen (Abbildung 4.2) mit der Darstellung der Geschwindigkeitsfelder in einer Vertikalebene (Abbildung 4.4) zeigt.

Wie in den Beispielen in Abbildung 4.2 zu erkennen ist, nimmt die Wellenlänge der Rollen mit zunehmender Rayleigh-Zahl anfänglich rasch zu. Dies ist zumindest dann der Fall, wenn die Simulationen mit zufälligen Anfangsbedingungen² gestartet werden. Werden stattdessen als Anfangsbedingung die Ergebnisse aus einer Simulation mit einer anderen Rayleigh-Zahl verwendet, so kann man durchaus andere Ergebnisse erhalten. Hier können dann verschiedene Instabilitätsmechanismen eine Rolle spielen, wie

²Als Anfangsbedingung wurde ein ruhendes Fluid mit kleinen, zufälligen Abweichungen der Temperatur vom linearen Profil verwendet.

zum Beispiel die „skewed varicose“ Instabilität [17]. In den turbulenten Fällen bei höheren Rayleigh-Zahlen sind die Anfangsbedingungen jedoch kaum von Bedeutung. Eine genaue Analyse beobachteten Strukturgrößen wird später in Kapitel 4.2 vorgestellt.

Ab einer gewissen Rayleigh-Zahl, die von der Wellenzahl bzw. Wellenlänge der Rollen abhängig ist, werden einfache, stationäre Konvektionsrollen dann instabil gegenüber einer oszillatorischen Instabilität [23]. Dies führt zu so genannter „traveling wave“ Konvektion (vgl. auch Kapitel 5.2), die durch wellenförmige, entlang der primären Konvektionsrollen wandernde Verzerrungen gekennzeichnet ist. Bei $Ra = 8000$ sind diese Verzerrungen noch nahezu symmetrisch (siehe rechtes, oberes Bild in Abbildung 4.2). Bei wieder höheren Rayleigh-Zahlen werden sie dann stark asymmetrisch. Die Verzerrungen links und rechts der ursprünglichen Rollen sind dann nicht mehr identisch. Nach und nach kommen zudem mehr Oszillationsfrequenzen hinzu. Bei $Ra = 16000$ wird dann bereits eine chaotische Zeitabhängigkeit der Strömung beobachtet. Neben den großskaligen Strukturen treten mehr und mehr kleinskalige, stark fluktuierende Strukturen auf, insbesondere in der Nähe der Grenzschichten. Die Temperaturverteilung am Rand der unteren Grenzschicht ist für einige Beispiele in Abbildung 4.3 dargestellt. Trotz dieser turbulenten Fluktuationen waren die Strömungen im Allgemeinen noch durch rollenartige Strukturen gekennzeichnet, und zwar selbst bei den höchsten, der hier erreichten Rayleigh-Zahlen. Abbildung 4.2 gibt hiervon einen gewissen Eindruck. In Animationen der auftretenden Strömungen können die Rollenstrukturen allerdings noch besser beobachtet werden. Dabei ist noch anzumerken, dass die Strukturen bei Rayleigh-Zahlen ab etwa 10^6 auf Grund der sehr starken Fluktuationen nicht immer ihre anfängliche Richtung beibehalten. Im Laufe der Zeit können die Rollenstrukturen aufbrechen und sich zum Beispiel mit einer anderen Orientierung neu bilden.

An dieser Stelle sei ein bereits erwähntes Beispiel für thermische Konvektion in der Natur angesprochen, nämlich die Konvektionserscheinungen in den untersten Schichten der Erdatmosphäre. Die in gewissen Wet-

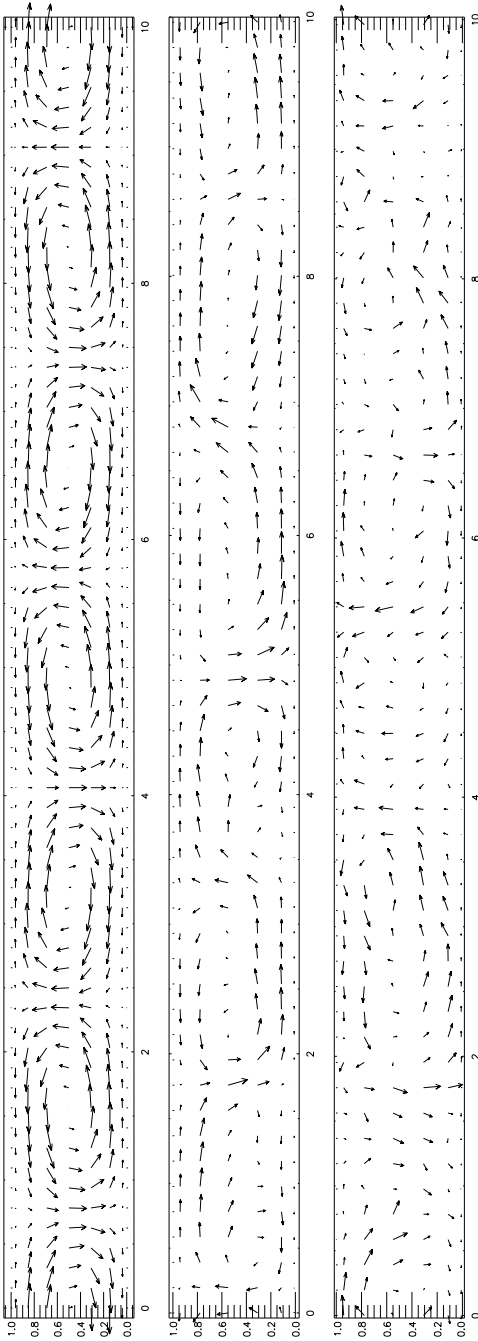


Abbildung 4.4: Vertikalschnitte der Geschwindigkeit in Ebenen quer zu den Rollenstrukturen für drei Beispiele aus der vorangegangenen Abbildung 4.2. Dargestellt sind die Geschwindigkeitsfelder in der xz -Ebene ($y = 5$) für den Fall $Ra = 4000$ (oberes Bild), in der yz -Ebene ($x = 5$) für $Ra = 32000$ (mittleres Bild) und in der xz -Ebene ($y = 7$) für $Ra = 10^6$ (unteres Bild). In allen drei Fällen handelt es sich um Momentaufnahmen zu den selben Zeitpunkten, wie in den entsprechenden Darstellungen in Abbildung 4.2. Zur Verbesserung der Übersichtlichkeit sind in den obigen als auch allen folgenden Abbildungen von Vektorfeldern nur an einem kleinen Teil der Gitterpunkte des numerischen Verfahrens Geschwindigkeitsvektoren eingezeichnet. Die verwendeten Auflösungen sind tatsächlich höher, als es hier den Anschein hat (vgl. Kapitel 3.4).

terlagen³ zu beobachtenden, regelmäßigen Konvektionsströmungen sind in der Literatur als „mesoscale shallow convection“ (MSC) bekannt [7]. Prominentestes Beispiel für die auftretenden Strömungen sind die so genannten Wolkenstraßen, also parallele Bänder von Wolken, die mit Rollenstrukturen verbunden sind. In den aufströmenden Bereichen der Rollen wird dabei warme und feuchte Luft nach oben transportiert, die dabei abkühlt. Dabei kann es zur Kondensation der Luftfeuchtigkeit und damit zur Bildung von Wolken kommen. Diese Rollenstrukturen haben eine gewisse Ähnlichkeit mit den obigen Simulationen. Allerdings ist die Situation in der Atmosphäre auf Grund der Luftfeuchtigkeit und der anderen Randbedingungen deutlich komplizierter als in einer einfachen Rayleigh-Bénard Schicht. Die relevanten Rayleigh-Zahlen sind zudem weitaus höher als in den Simulationen. Rayleigh-Zahlen von 10^{18} und mehr sind durchaus typisch. Zu erwähnen ist noch, dass neben diesen Wolkenstraßen auch Zellstrukturen beobachtet werden. In den hier durchgeführten Simulationen wurden diese auch gefunden, allerdings nur bei größeren Prandtl-Zahlen (siehe Kapitel 4.1.2).

4.1.2 Mittlere bis große Prandtl-Zahlen

Neben den Simulationen bei $Pr = 0.7$ wurden weitere Rechnungen bei größeren Prandtl-Zahlen durchgeführt. Die bei Werten von $Pr = 7, 15, 30$ und 60 beobachteten Strömungen sollen im Folgenden vorgestellt werden. Sie sind repräsentativ für die Konvektion in typischen Flüssigkeiten wie Wasser, Alkoholen und Ölen. So besitzt Wasser bei einer Temperatur von 20°C ziemlich genau eine Prandtl-Zahl von $Pr = 7$. Bei höheren Temperaturen nimmt diese dann auf Grund einer kleiner werdenden Viskosität etwas ab, und bei niedrigen Temperaturen entsprechend zu. So ist zum Beispiel $Pr \approx 5.42$ bei 30°C und $Pr \approx 9.45$ bei 10°C (aus [3]).

Wie bei allen anderen Prandtl-Zahlen setzt auch hier Konvektion in Form von stationären Konvektionsrollen ein. Dies ist auch in den bei kleinen Rayleigh-Zahlen durchgeführten Simulationen gefunden worden. In-

³Insbesondere muss eine Inversionsschicht vorhanden sein, die quasi als oberer Abschluss der Konvektionsschicht dient. In typischen Situationen befindet sich diese in Höhen von einigen hundert Metern bis etwa 2 Kilometern.

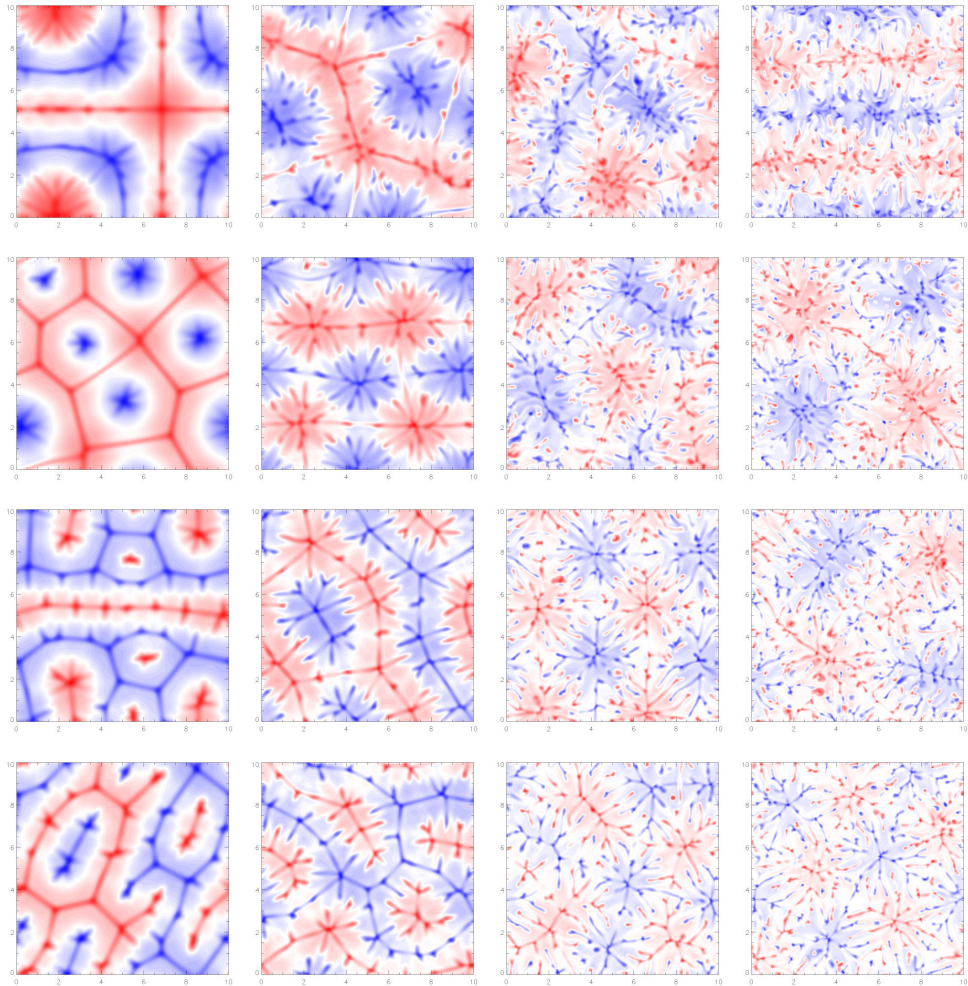


Abbildung 4.5: Darstellung der Temperaturverteilung (Momentaufnahmen) in der Mitte der Fluidschicht ($z = 0.5$) bei Prandtl-Zahlen von 7, 15, 30 und 60 (von oben nach unten) und Rayleigh-Zahlen von 3.2×10^4 , 10^5 , 5×10^5 und 10^6 (von links nach rechts). Das Aspektverhältnis beträgt in allen Fällen $\Gamma = 10$.

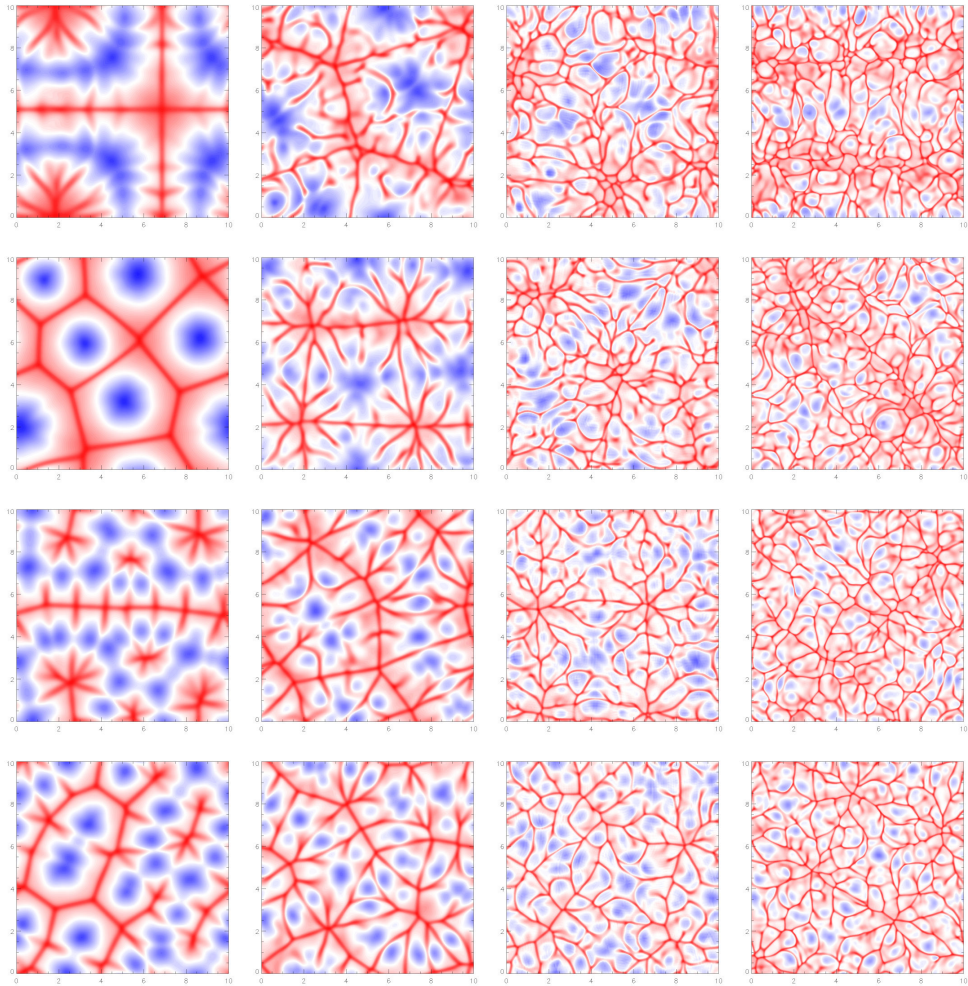


Abbildung 4.6: Temperaturverteilung am Rand der Temperaturgrenzschicht für die Fälle aus Abbildung 4.5, d.h. $Pr = 7, 15, 30$ und 60 (von oben nach unten) und $Ra = 3.2 \times 10^4, 10^5, 5 \times 10^5$ und 10^6 (von links nach rechts).

interessanter sind die Strukturen, die bei deutlich größeren Rayleigh-Zahlen zu beobachten sind. Abbildung 4.5 zeigt einige Beispiele bei Rayleigh-Zahlen weit oberhalb des kritischen Wertes Ra_c .

Bei den in der linken Spalte dargestellten Simulationen ($Ra = 3.2 \times 10^4$) sind die Strömungen bis auf den Fall $Pr = 7$ zwar noch stationär, die räumlichen Strukturen sind jedoch schon relativ komplex. Typisch ist hier das Auftreten polygonaler Strukturen, wobei meist quadratische [18] oder hexagonale [26] Zellen zu beobachten sind. Eine schematische Darstellung der Struktur von Konvektionszellen ist in Abbildung 4.1 am Beispiel hexagonaler Zellen gegeben. Es können dabei jeweils zwei verschiedene Formen auftreten. So kann sich im Zentrum einer Zelle entweder ein Aufstrom oder ein Abstrom befinden. An den Seitenwänden der Zellen strömt das Fluid dann entsprechend in entgegengesetzter Richtung. Ist wie hier die Boussinesq-Näherung erfüllt, so sind beide Formen mathematisch völlig äquivalent. Sie können sogar zusammen auftreten und sind dann im Allgemeinen durch eine Rollenstruktur voneinander getrennt [6]. Ein Beispiel für solch eine Konfiguration ist weiter hinten in diesem Kapitel in Abbildung 4.17 gegeben. Für den Fall, dass die Viskosität, abweichend von der Boussinesq-Näherung, von der Temperatur abhängt, so wird die vertikale Symmetrie der Gleichungen und damit die Äquivalenz der beiden Zelltypen gebrochen. Je nach Vorzeichen der Temperaturabhängigkeit wird dann eine der Formen bevorzugt. So sind Zellen, in denen das Fluid im Zentrum nach oben strömt, begünstigt, falls die Viskosität mit zunehmender Temperatur abnimmt. Da dies typischerweise für Flüssigkeiten der Fall ist, werden die Zellen auch als l-Zellen („l“ für „liquid“) bezeichnet. Bei Gasen ist das Verhalten genau umgekehrt, so dass die Zellen, in denen das Fluid in der Mitte abwärts strömt, als g-Zellen („g“ für „gas“) bezeichnet werden [14]. Ist die Temperaturabhängigkeit der Viskosität zudem sehr groß, treten solche Zellen anstatt der sonst üblichen Konvektionsrollen bereits beim Einsetzen von Konvektion, d.h. bei $Ra = Ra_c$, auf [14].

Die beschriebenen Zellen sind den von Bénard [9] beobachteten und folglich Bénard-Zellen genannten Strukturen sehr ähnlich. Allerdings wurden diese Experimente unter etwas anderen, als den hier verwendeten Randbedingungen durchgeführt, nämlich ohne eine feste, obere Platte. Die Flüssig-

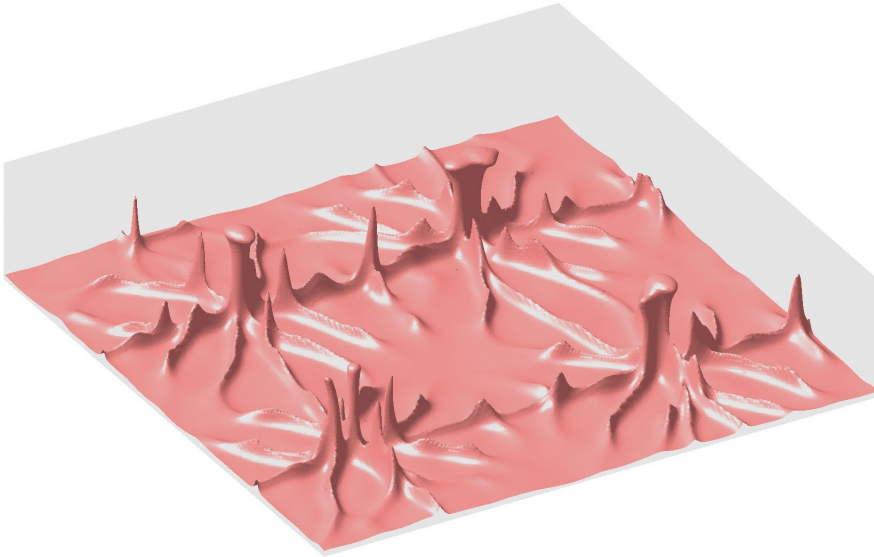


Abbildung 4.7: Momentaufnahme der Fläche konstanter Temperatur $T = T_1 + 0.25\Delta T$ in der Simulation $Ra = 10^5$, $Pr = 15$ bei $\Gamma = 10$, wobei T_1 und ΔT wie bisher die Temperatur der unteren Platte und die Temperaturdifferenz zwischen Kühl- und Heizplatte sind. Der grau dargestellte Bereich kennzeichnet das gesamte Simulationsvolumen.

keit war an der oberen Seite also direkt mit der kälteren Umgebungsluft in Kontakt. Aus diesem Grund spielte die Temperaturabhängigkeit der Oberflächenspannung der Fluids eine wichtige Rolle. Bei sehr dünnen Schichten, so wie sie von Bénard verwendet wurden, dominieren diese Effekt sogar [10, 51, 28]. Die bei Rayleigh-Bénard Konvektion entscheidende thermische Instabilität spielt in solchen Experimenten nur eine untergeordnete Rolle, so dass diese Art von Konvektion einen eigenen Namen erhalten hat. Sie ist unter dem Begriff Bénard-Marangoni Konvektion bekannt.

Zurück zu den Strömungsmustern in Abbildung 4.5: Bei $Ra = 3.2 \times 10^4$ waren die Strömungen abgesehen von $Pr = 7$ noch stationär, aber bereits bei $Ra = 10^5$ ist der Übergang zu turbulenten Strömungen vollzogen. Der Übergang erfolgt damit im Vergleich zu den Strömungen bei $Pr = 0.7$ erst bei deutlich größeren Rayleigh-Zahlen. Wie in Abbildung 4.5 zu sehen ist, sind mit der weiteren Erhöhung der Rayleigh-Zahl auch Verände-

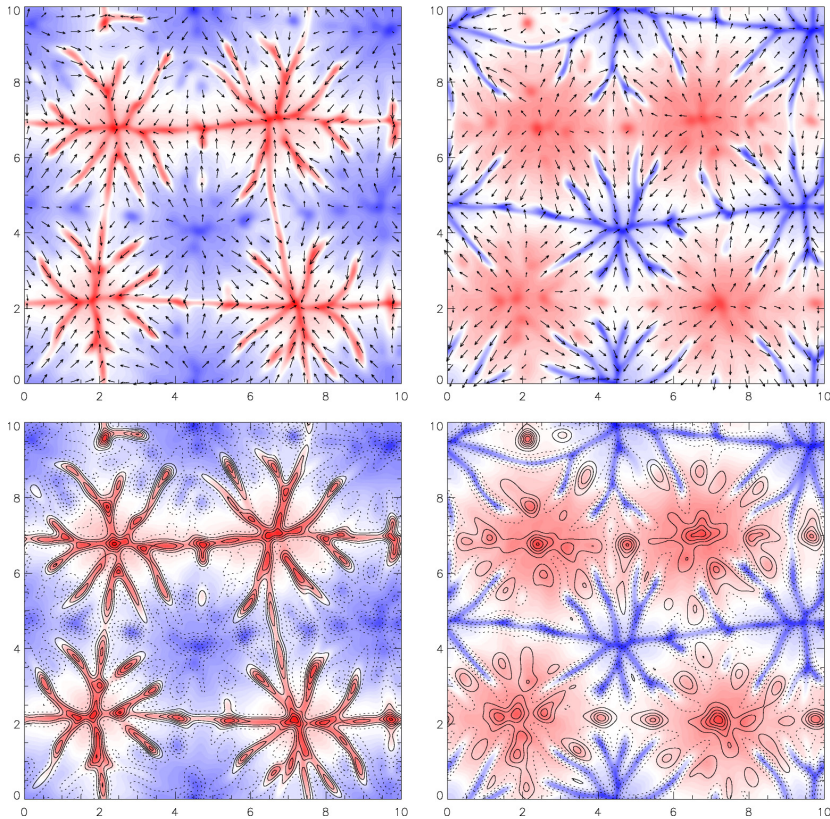


Abbildung 4.8: Momentaufnahmen der Horizontalgeschwindigkeit (Pfeile in der oberen Bildreihe) und der Vertikalgeschwindigkeit (Konturlinien in der unteren Bildreihe; durchgezogene/gestrichelte Linien kennzeichnen positive/negative Werte) in den Horizontalebenen $z = 0.264$ (linke Spalte) und $z = 0.736$ (rechte Spalte) für den Fall $Pr = 15$, $Ra = 10^5$, $\Gamma = 10$. Zusätzlich ist in jedem der Bilder auch die Temperaturverteilung in Farbe dargestellt, um die Korrelation von Geschwindigkeits- und Temperaturfeld zu verdeutlichen. In den Darstellungen ist zu erkennen, dass die vertikalen Geschwindigkeitsanteile sehr lokalisiert sind und im Wesentlichen auf die schmalen Plumes und Spokes begrenzt sind. Die Horizontalkomponenten sind dagegen deutlich großflächiger.

rungen in den großskaligen Strukturen verbunden. Zwar sind die starken Auf- und Abströme gelegentlich noch in mehr oder weniger regelmäßigen, meist quadratischen Mustern angeordnet, die bei niedrigeren Ra beobachtet, zusammenhängenden Wände der Konvektionszellen sind in der Mittelebene jedoch immer weniger vorhanden. An ihre Stelle treten mehr und mehr lokalisierte Strukturen, die sich in Abbildung 4.5 als blaue und rote Punkte darstellen. Dabei handelt es sich um so genannte „Plumes“, schlanke, vertikal verlaufende Strukturen von heißem, nach oben strömendem bzw. kaltem, nach unten strömendem Fluids. Sie entwickeln sich aus den thermischen Grenzschichten heraus, die an der oberen und unteren Platte zu finden sind. Obwohl die Plumes bei den hohen Rayleigh-Zahlen eine sehr chaotische Zeitabhängigkeit aufweisen, treten diese nicht völlig unabhängig voneinander auf. In der Nähe der Platten sind sie durch längliche Verdickungen der Grenzschichten miteinander verbunden, wie dies sehr gut in Abbildung 4.7 zu erkennen ist. Wie im gezeigten Fall laufen diese Erhöhungen der Grenzschicht im Allgemeinen auf zentrale, zeitlich relativ stabile Plumes zu, wie eine Darstellung des Geschwindigkeitsfeldes in Abbildung 4.8 zeigt. Da die Strukturen in Grenzschichtnähe wie die Speichen (engl. „spokes“) ein Rades aussehen, wird diese Form von Konvektion auch als „spoke pattern“ Konvektion bezeichnet [19]. Einige experimentelle Visualisierungen, in denen sehr ähnliche Strukturen wie hier beobachtet wurden, sind zum Beispiel in [16] zu finden.

Zugegebenermaßen ist die Anordnung der zentralen Plumes in den meisten Simulationen bei hohen Rayleigh-Zahlen nicht so regelmäßig, wie das bei dem Beispiel aus den Abbildungen 4.7 und 4.8 der Fall ist. Nichtsdestotrotz sind aber auch die anderen Fälle durch solche, vergleichsweise stationären Auf- und Abströme gekennzeichnet, die in Grenzschichtnähe durch ein kompliziertes und zeitlich stark veränderliches Netzwerk von Spokes miteinander verbunden sind (vgl. Abbildung 4.6).

4.2 Horizontale Längenskalen

Nach der Beschreibung der verschiedenen Strömungsstrukturen anhand von Visualisierungen werden im Folgenden einige quantitative Analysen vorgestellt. Unter anderem wird die horizontale Größe der großskaligen

Muster, also der Rollen und Zellen, und der kleinskaligen Strukturen, wie Spokes und Plumes, und deren jeweilige Beitrag zum Wärmetransport untersucht.

4.2.1 Spektralanalyse

Für die Bestimmung von typischen Längenskalen liegt es nahe, Ortsspektren von den Simulationsdaten zu berechnen. Dies ist in den Simulationen ohne großen Aufwand möglich, da die dreidimensionalen Temperatur- und Geschwindigkeitsfelder bereits in Form von Spektralkomponenten vorliegen. Welche Größen man dabei betrachtet ist zumindest für die Wellenlängen der großskaligen Strukturen zweitrangig, da Temperatur und Geschwindigkeit miteinander verknüpft sind. Im Mittel steigt warmes Fluid schließlich auf und kaltes sinkt ab.

Der vertikale Wärmefluss durch die Fluidschicht bzw. die Nusselt-Zahl, ein dimensionsloses Maß für diesen Transport (vgl. Kapitel 6.1), ist sicher einer der wichtigsten Messgrößen in Konvektionsströmungen und spielt eine wichtige Rolle in technischen Anwendungen oder auch in der Atmosphärenphysik. Daher wollen wir uns genauer mit der spektralen Verteilung des Wärmetransportes beschäftigen. Bei der folgenden Analyse werden wir uns auf den advektiven Anteil der Nusselt-Zahl, der durch das Mittragen von Wärme mit dem strömenden Fluid hervorgerufen wird, beschränken. Der Anteil der Wärmeleitung ist nämlich außerhalb der Grenzschichten, dort wo großskalige Strukturen anzutreffen sind, sehr gering (siehe Kapitel 6). Der advektive Anteil ist gegeben durch⁴:

$$H(z) = \langle v_z(x, y, z)\theta(x, y, z) \rangle_{x,y}, \quad (4.1)$$

⁴In Kapitel 6.1 wird man sehen, dass sich die Nusselt-Zahl, das dimensionslose Maß für den vertikalen Wärmetransport, mittels

$$Nu(z) = \langle v_z T \rangle_{x,y} - \partial_z \langle T \rangle_{x,y} \quad (\text{vgl. Gleichung 6.2})$$

berechnet. Die beiden Terme stehen für den advektiven und den diffusiven Anteil. Der advektive Term kann in folgender Weise umgeschrieben werden:

$$\langle v_z T \rangle_{x,y} = \langle v_z (\theta + T_s) \rangle_{x,y} = \langle v_z \theta \rangle_{x,y},$$

da das statische Temperaturprofil T_s nicht von x oder y abhängt (vgl. Kapitel 2) und der horizontale Mittelwert von v_z verschwindet.

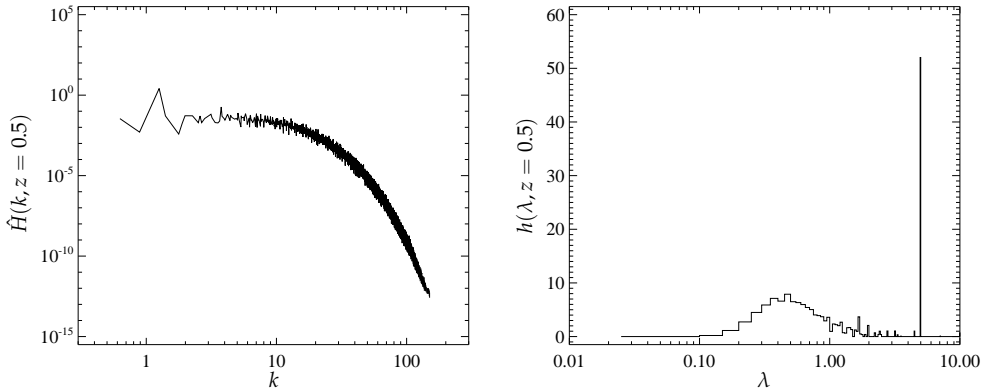


Abbildung 4.9: Zwei verschiedene Darstellungsweisen der spektralen Verteilung des advektiven Wärmetransports in der Mittelebene ($z = 0.5$) für die Simulation $Ra = 10^6$, $Pr = 7$, $\Gamma = 10$.

wobei $\langle \dots \rangle_{x,y}$ wie bisher für den Mittelwert über x und y steht. v_z bezeichnet die Vertikalkomponente der Geschwindigkeit und θ die Abweichung der Temperatur von ihrem statischen Profil T_s (siehe Kapitel 2). H ist eine Funktion der Höhe z , und nimmt zur oberen und unteren Wand hin ab. Dort wird Wärme mehr durch Diffusion transportiert. Mittels der Fourier-Transformierten von Vertikalgeschwindigkeit und Temperaturabweichung, $\mathcal{F}_{v_z}(\vec{k}, z)$ und $\mathcal{F}_\theta(\vec{k}, z)$, lässt sich der Wärmetransport schreiben als:

$$H(z) = \sum_{\vec{k}} c \operatorname{Re} \{ \mathcal{F}_{v_z}^*(\vec{k}, z) \mathcal{F}_\theta(\vec{k}, z) \}, \quad (4.2)$$

mit einer Normalisierungskonstante c . $\vec{k} = k_x \hat{x} + k_y \hat{y}$ bezeichnet dabei den zweidimensionalen Wellenvektor in der horizontalen Ebene und $\operatorname{Re}\{\dots\}$ den Realteil.

Verschiedene Darstellungsweisen

Den Beitrag der einzelnen Wellenzahlen

$$\hat{H}(k, z) = \sum_{\vec{k} \text{ mit } |\vec{k}|=k} c \operatorname{Re} \{ \mathcal{F}_{v_z}^*(\vec{k}, z) \mathcal{F}_\theta(\vec{k}, z) \} \quad (4.3)$$

kann man nun als Funktion der Wellenzahl k auftragen. Ein Beispiel ist im

linken Teil von Abbildung 4.9 gegeben. Aufgrund des endlichen Aspektverhältnisses Γ nehmen die Wellenvektoren und damit auch deren Beträge nur diskrete Werte an. Zwar sind die x - und y -Komponenten von \vec{k} äquidistant verteilt, jedoch nicht sein Betrag, die Wellenzahl $k = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}$. Daher kann man in der obigen Darstellung nur sehr schlecht feststellen, welche Wellenzahlbereiche viel oder wenig zum Transport beitragen. Es kommt schließlich nicht nur auf die Werte von $\hat{H}(k, z)$, sondern auch auf die Anzahl der diskreten Wellenzahlen k in einem Wellenzahlbereich an. Besser ist es eine spektrale Dichte zu berechnen und diese aufzutragen. Dazu ist im Folgenden der gesamte zur Verfügung stehenden Wellenlängenbereich (von $\lambda = 0$ bis $\lambda = \Gamma$) in äquidistante Intervalle der Größe $\Delta\lambda$ aufgeteilt und der Beitrag jedes einzelnen Intervalls $(\lambda_i, \lambda_i + \Delta\lambda]$ zum Wärmetransport berechnet worden. Dividiert durch die Intervallbreite $\Delta\lambda$ ergibt dies eine innerhalb des Intervalls als konstant angenommene spektrale Dichte von:

$$h(\lambda, z) = \sum_{\vec{k} \text{ mit } \lambda_i < \frac{2\pi}{|\vec{k}|} \leq \lambda_i + \Delta\lambda} \frac{c \operatorname{Re}\{\mathcal{F}_{v_z}^*(\vec{k}, z) \mathcal{F}_\theta(\vec{k}, z)\}}{\Delta\lambda} \quad \text{für } \lambda \in [\lambda_i, \lambda_i + \Delta\lambda). \quad (4.4)$$

Das Integral von $h(\lambda, z)$ über alle Wellenlängen ergibt, so wie es sein soll, den Gesamtwert des advektiven Transports $H(z)$. Abbildung 4.9 zeigt ein Beispiel für solch ein Spektrum. Die Zweiteilung des Spektrums in großskalige und kleinskalige Beiträge, die man schon beim Betrachten der Visualisierungen in Kapitel 4.1 vermutet hat, ist in der Auftragung von $h(\lambda, z)$ sofort zu erkennen. In der Darstellung von $\hat{H}(k, z)$ ist das jedoch nicht so klar.

Simulationsergebnisse

In den Abbildungen 4.10, 4.11 und 4.12 sind einige der so berechneten und zeitgemittelten⁵ Spektren für verschiedene Rayleigh- und Prandtl-Zahlen,

⁵Aufgrund der Zeitabhängigkeit der Strömungen ist es unerlässlich Messgrößen zeitlich zu mitteln. Im Allgemeinen sind für die Mittelwertbildung Zeiträume von mindestens einigen zehn konvektiven Zeitskalen $\tau = (2E_{kin})^{-1/2}$, $E_{kin} = \langle v^2/2 \rangle_{x,y,z,t}$ verwendet worden. Bei den höchsten Rayleigh-Zahlen musste sich aufgrund der sehr langen Rechenzeiten mit etwas kürzeren Mittelungsintervallen zufrieden gegeben werden. Selbst bei $Ra = 10^7$ sind aber noch etwa 15τ verwendet worden.

und verschiedenen Positionen innerhalb der Fluidschicht dargestellt.

Allen gemeinsam ist die schon erwähnte Zweiteilung der Spektren mit einer spektralen Lücke, die es erlaubt groß- und kleinskalige Strukturen zu unterscheiden. Der langwellige Anteil kann mit den in Kapitel 4.1 vorgestellten Rollen- und Zellstrukturen identifiziert werden. Hingegen fallen die erwähnten Oszillationen (bei $Pr = 0.7$) und die Spokes und Plumes (bei größeren Prandtl-Zahlen) in den kleinskaligen Bereich. Einige Erkenntnisse können aus den Abbildungen gezogen werden: Bei Erhöhung der Rayleigh-Zahl verbreitert sich der kleinskalige Anteil des Spektrums und die Wellenlänge des Maximums bei kleinen Wellenlängen verschiebt sich zu kleineren Skalen. Die Plumes und Spokes werden also immer schlanker und der Abstand zwischen ihnen sinkt. Der prozentuale Beitrag der kleinskaligen Strukturen zum Wärmetransport ist dabei sowohl von Ra und Pr , als auch von der Position in der Schicht abhängig. In Abbildung 4.13 sind Ergebnisse für Rayleigh-Zahlen zwischen 10^5 und 10^6 und verschiedenen Prandtl-Zahlen dargestellt. Es zeigt sich, dass der Anteil stark mit Pr wächst. Die großen Strukturen spielen daher bei großen Prandtl-Zahlen nur noch eine geringe Rolle, die Strömung ist dann durch Spokes und die aus ihnen herauswachsenden Plumes dominiert. In allen Fällen ist der Anteil der Kleinstrukturen in der Nähe der Grenzschichten deutlich höher als in der Mitte der Fluidschicht. Die Abhängigkeit von der Rayleigh-Zahl ist etwas komplizierter. Für kleine Ra wächst der Beitrag zunächst von Null⁶ beginnend stark an. Zumindest bei den beiden kleineren Prandtl-Zahlen von 0.7 und 7 sinkt der Anteil bei hohen Rayleigh-Zahlen jedoch wieder leicht. Bei welcher Rayleigh-Zahl das Maximum erreicht wird hängt dabei von Pr ab. Sollte dieser Trend Bestand haben, so heißt das, dass in diesen Fällen selbst bei noch höheren Rayleigh-Zahlen großskalige Strukturen wie Rollen und Zellen wichtig bleiben. Beispiele wie die mesoskalige Konvektion in der Atmosphäre [7] oder granulare Konvektion auf der Sonne unterstützen diese Vermutung, auch wenn beide Fälle deutlich kompliziertere Systeme sind als das hier betrachtete Rayleigh-Bénard Problem.

⁶In der Nähe des Einsetzens von Konvektion wird die Wärme komplett von den Konvektionsrollen transportiert. Der kleinskalige Anteil ist hier null.

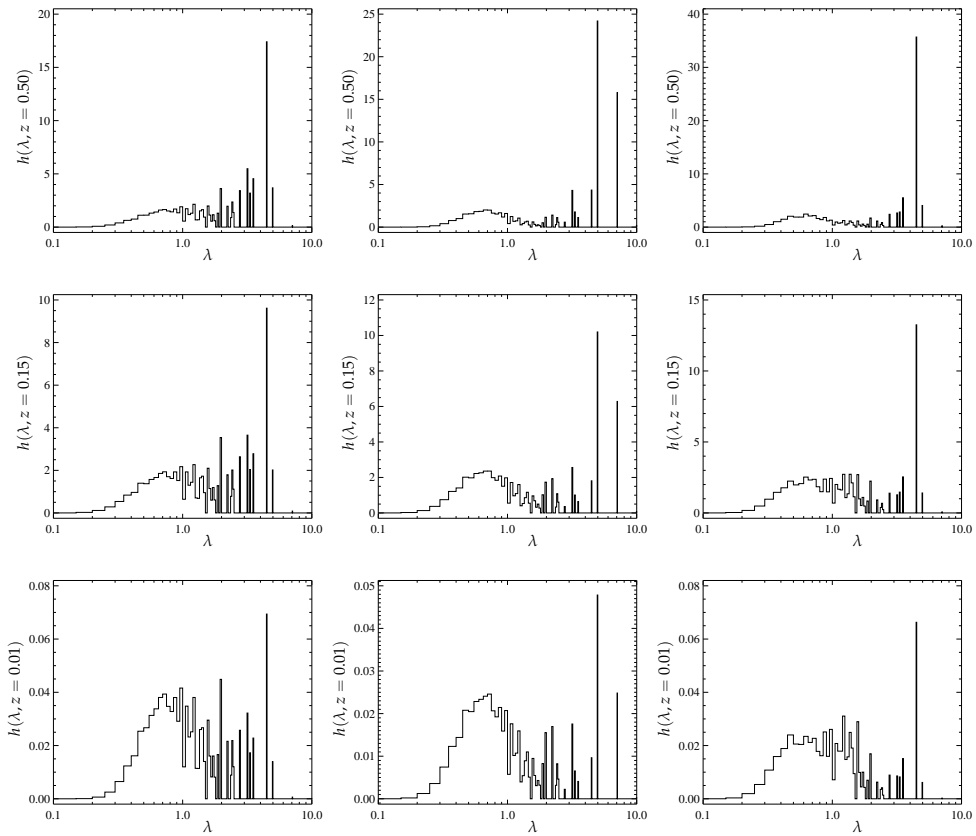


Abbildung 4.10: Spektrale Verteilung des advektiven Wärmetransports, dargestellt durch die im Text definierte spektrale Dichte $h(\lambda)$, bei $Ra = 10^5$, $\Gamma = 10$ und $Pr = 0.7$ (linke Spalte), $Pr = 7$ (mittlere Spalte) und $Pr = 30$ (rechte Spalte). Die einzelnen Zeilen unterscheidet, in welcher Höhe z das Spektrum berechnet wurde: $z = 0.5$ (obere Zeile), $z = 0.15$ (mittlere Zeile) und $z = 0.01$ (untere Zeile).

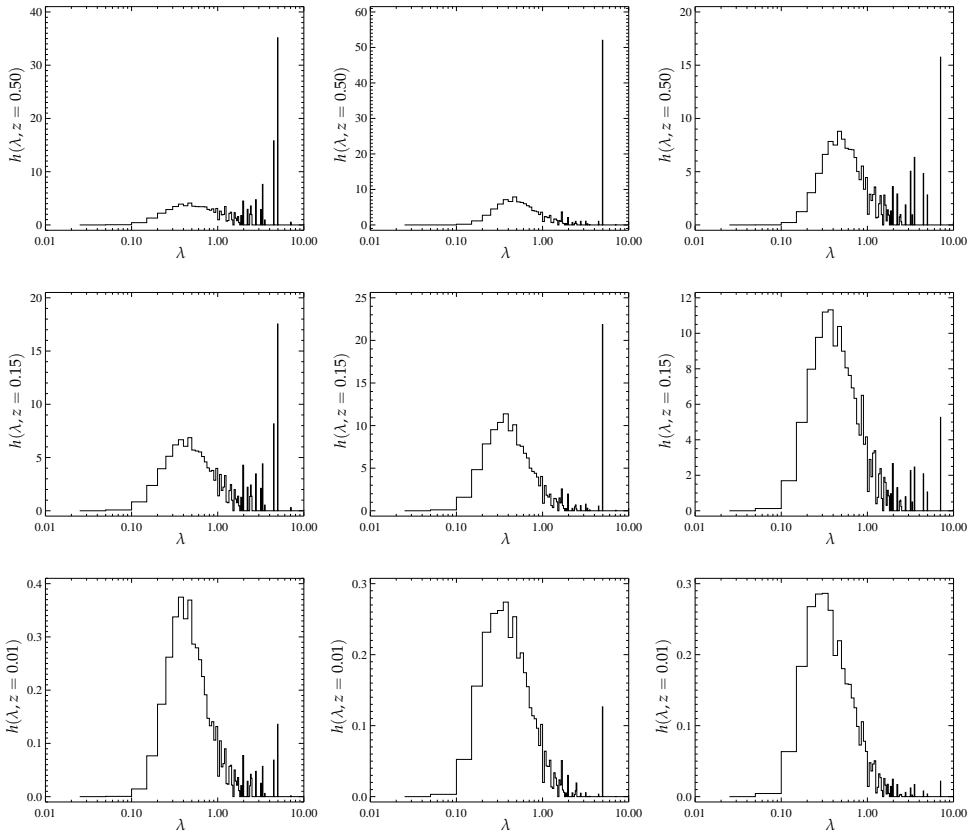
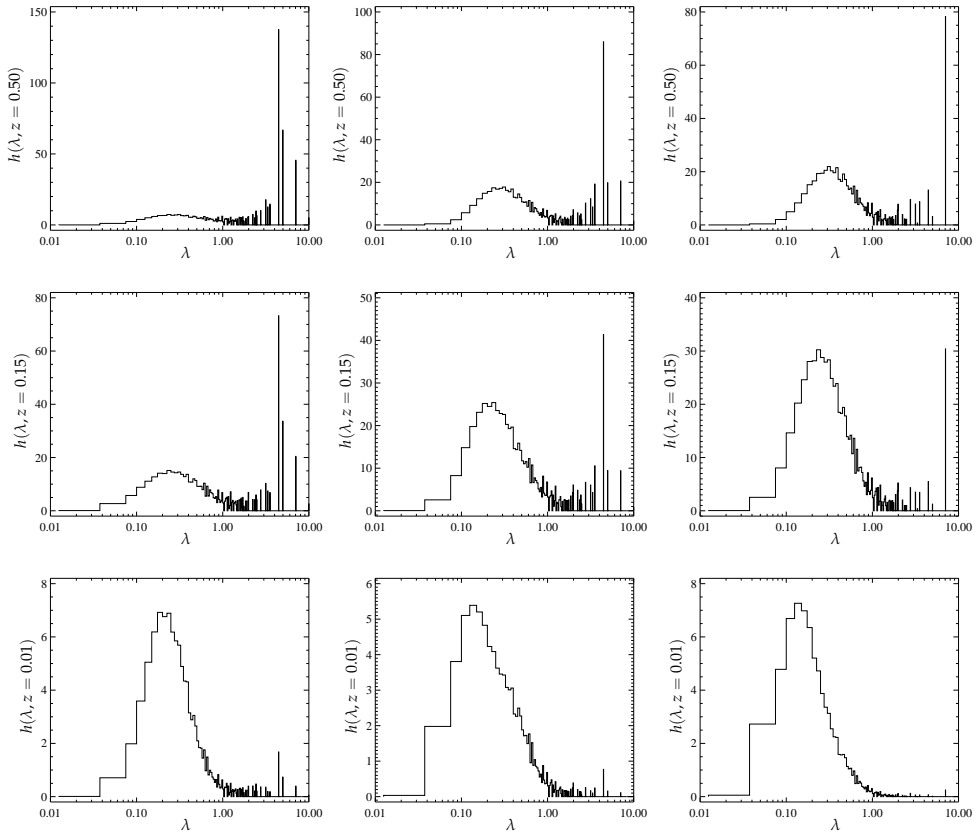


Abbildung 4.11: Wie Abbildung 4.10, jedoch bei $Ra = 10^6$.

Abbildung 4.12: Wie Abbildung 4.10, jedoch bei $Ra = 10^7$.

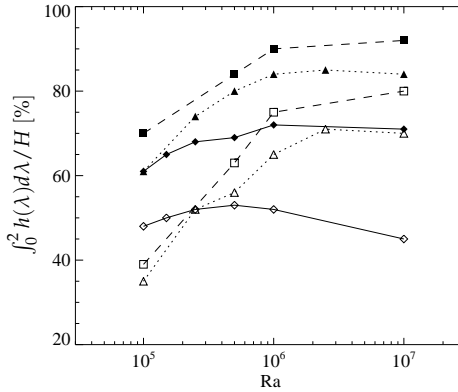


Abbildung 4.13: Prozentualer Anteil der kleinskaligen Strömungsbeiträge mit Wellenlängen $\lambda \leq 2$ zum advektiven Wärmetransport in der Mitte der Schicht ($z = 0.5$, offene Symbole) und oberhalb der unteren Grenzschicht ($z = 0.15$, gefüllte Symbole). Die verschiedenen Symbole bezeichnen $Pr = 0.7$ (Diamanten), $Pr = 7$ (Dreiecke) und $Pr = 30$ (Quadrate).

4.2.2 Wellenlängen der großskaligen Strukturen

Sowohl in den Abbildungen in Kapitel 4.1, als auch in den Spektren im vorangegangenen Abschnitt konnte man feststellen, dass sich die horizontale Ausdehnung der großskaligen Strukturen mit Rayleigh- und Prandtl-Zahl verändert. Als Maß für die Größe kann die Wellenlänge λ_{max} betrachtet werden, bei der der advektive Wärmetransport in der Mitte der Schicht ($z = 0.5$) sein Maximum im langwelligen Bereich annimmt. Da das Aspektverhältnis endlich ist, kann diese Wellenlänge nur diskrete Werte annehmen. Die größten zur Verfügung stehenden Werte von λ_{max}/Γ sind 1 , $1/\sqrt{2}$, $1/2$, $1/\sqrt{5}$, $1/\sqrt{8}$, $1/\sqrt{10}$ und so weiter. In Abbildung 4.14 ist λ_{max} als Funktion von Ra für den Fall $Pr = 0.7$ dargestellt. Im Allgemeinen tragen mehrere Wellenlängen zu den großskaligen Strukturen bei, so dass die Berechnung einer gemittelten Wellenlänge, wie

$$\bar{\lambda} = \frac{\sum' \frac{2\pi}{|\vec{k}|} \operatorname{Re}\{\mathcal{F}_{v_z}^*(\vec{k}, z)\mathcal{F}_\theta(\vec{k}, z)\}}{\sum' \operatorname{Re}\{\mathcal{F}_{v_z}^*(\vec{k}, z)\mathcal{F}_\theta(\vec{k}, z)\}} \quad (4.5)$$

sinnvoll ist. \sum' bezeichnet dabei die Summe über alle Wellenvektoren mit Wellenlängen zwischen $\lambda_{max}/\sqrt{2}$ und $\lambda_{max}\sqrt{2}$. λ_{max} und $\bar{\lambda}$ unterscheiden

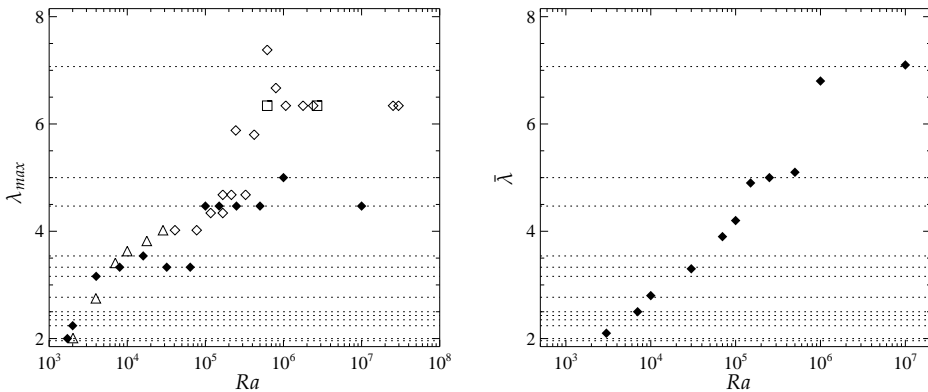


Abbildung 4.14: λ_{max} als Funktion von Ra bei $Pr = 0.7$, $\Gamma = 10$ (linkes Bild) und $\bar{\lambda}$ bei $Pr = 30$, $\Gamma = 10$ (rechtes Bild). Gefüllte Symbole kennzeichnen die Simulationsergebnisse dieser Studie. Zusätzlich sind im linken Diagramm experimentelle Daten (offene Symbole) eingetragen, die in [30] für verschiedene Aspektverhältnisse zusammengestellt wurden. In beiden Abbildungen kennzeichnen waagerechte Linien die Wellenlängen, die aufgrund des endlichen Aspektverhältnisses von $\Gamma = 10$ zur Verfügung stehen.

sich meist nur um weniger als 10 Prozent. $\bar{\lambda}$ ist für $Pr = 30$ in Abbildung 4.14 gezeigt⁷. In beiden Fällen, $Pr = 0.7$ und $Pr = 30$ ist ein Ansteigen der Wellenlänge mit der Rayleigh-Zahl zu beobachten. Im ersten Fall scheint λ_{max} bei Werten um 5 zu sättigen⁸, und zwar schon ab $Ra \approx 10^5$.

Bei Prandtl-Zahl $Pr = 7$ war es zum Teil nicht möglich verlässliche Wellenlängen der großskaligen Strukturen zu ermitteln. Im Gegensatz zu den anderen Prandtl-Zahlen veränderte sich hier bei einigen Simulationen oberhalb von $Ra = 10^5$ die Wellenlänge λ_{max} im Laufe der Zeit, typischerweise zwischen etwa 4 und 7. In dieser Problematik spielt sicher der Umstand eine Rolle, dass man sich bei Prandtl-Zahlen dieser Größenordnung an der Grenze zwischen den zwei Regimen, der Dominanz von Rollen-

⁷Die Werte für $Pr = 30$ stammen aus Rechnungen ohne Einbeziehung der Mean Flow Komponente (vgl. Gleichung 3.2 und Kapitel 5). Ein Teil der Simulationen wurde dann mit Berücksichtigung des Mean Flow wiederholt (vgl. Tabelle A.3), wobei jedoch keine signifikanten Unterschiede festzustellen waren (siehe auch Kapitel 5.5).

⁸Zum Vergleich sei hier nochmals auf die Beobachtungen von Konvektionströmungen in den unteren Atmosphärenschichten hingewiesen, in denen man sowohl Wolkenstraßen (Rollenstrukturen) als auch polygonale Zellen findet. Die typischen Rayleigh-Zahlen sind hier zwar deutlich höher, etwa um 10^{18} , die Größe der Rollen ist jedoch ähnlich und liegt meist zwischen 2 und 10 [7].

strukturen bei kleinen Prandtl-Zahlen (zum Beispiel $Pr = 0.7$) und polygonaler Zellen bei höheren Pr , befindet. Hier können beide Formen auftreten [26], die durchaus unterschiedliche Größen besitzen können (siehe Beispiel in Kapitel 4.3). Zudem sprechen Experimente dafür, dass bei dieser Prandtl-Zahl vergleichsweise große Strukturen auftreten können, [16] berichtet zum Beispiel von einer Wellenlänge von 9.2. Wünschenswert wären in diesem Fall größere Aspektverhältnisse als $\Gamma = 10$ gewesen⁹, um den verschiedenen Strukturformen gleichzeitig genügend Platz bieten zu können.

Wie in Abbildung 4.14 zu sehen ist, liegen die Simulationsergebnisse bei $Pr = 0.7$ im Durchschnitt etwas unterhalb der experimentellen Werte aus [30]. Ein Umstand der zu dieser Diskrepanz beiträgt ist der Folgende: Die Wellenlängen in [30] wurden zwar ebenfalls aus der spektralen Verteilung des advektiven Wärmetransports bestimmt, jedoch wurde nicht in der ganzen Ebene, sondern nur entlang einer Geraden gemessen. Liegen die Rollenstrukturen, die bei dieser Prandtl-Zahl dominierend sind, nun aber schräg zu der Messgerade, wird eine um den Faktor $1/\sin\gamma$ zu große Wellenlänge gemessen. γ ist dabei der Winkel zwischen Rollenachse und Messgerade. Nur wenn die Gerade und die Achse der Rollen zufällig senkrecht zueinander stehen, wird die Größe der Rollen richtig bestimmt. Bei allen anderen Winkeln erhält man dann zu große Werte.

Als letztes soll noch die Variation der typischen Längenskale mit Pr vorgestellt werden. In Abbildung 4.15 sind die Werte für Prandtl-Zahlen von $Pr = 0.3$ bis $Pr = 120$ gezeigt¹⁰. Für beide der dargestellten Rayleigh-Zahlen geht $\bar{\lambda}(Pr)$ bei mittleren Prandtl-Zahlen durch ein Maximum. Die eingezeichneten Werte aus verschiedenen Experimenten weisen diese Eigenschaft ebenfalls auf, auch wenn man dazu anmerken muss, dass die experimentellen Ergebnisse doch bei sehr unterschiedlichen Rayleigh-Zahlen und Aspektverhältnissen erhalten wurden. Für noch größere, als den hier untersuchten Prandtl-Zahlen scheint keine weitere Veränderung der Strukturgröße stattzufinden. Beispielsweise berichten [35] von einer Wellenlänge von $\bar{\lambda} = 3.3$ in ihren numerischen Simulationen bei unendlicher

⁹Aufgrund des hohen Rechenaufwandes wurden nur wenige Simulationen bei einem Aspektverhältnis von $\Gamma = 20$ durchgeführt, einige davon werden in Kapitel 4.3 vorgestellt.

¹⁰Die Simulationsdaten stammen aus Rechnungen ohne Mean Flow.

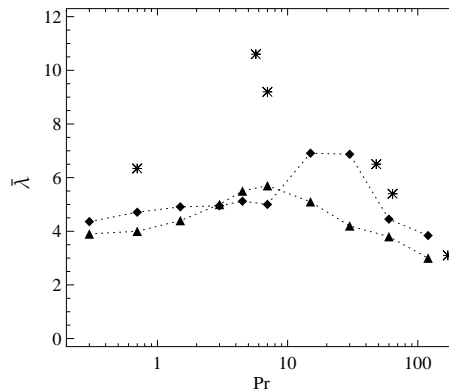


Abbildung 4.15: $\bar{\lambda}$, die gemittelte Wellenlänge der großskaligen Strukturen, als Funktion der Prandtl-Zahl für $Ra = 10^5$ (Dreiecke) und $Ra = 10^6$ (Diamanten), jeweils bei $\Gamma = 10$. Die Sterne kennzeichnen experimentelle Daten aus [30, 16] bei verschiedenen Rayleigh-Zahlen und verschiedenen Aspektverhältnissen.

Prandtl-Zahl, was den bereits bei $Pr = 120$ beobachteten Werten (siehe Abbildung 4.15) sehr ähnlich ist.

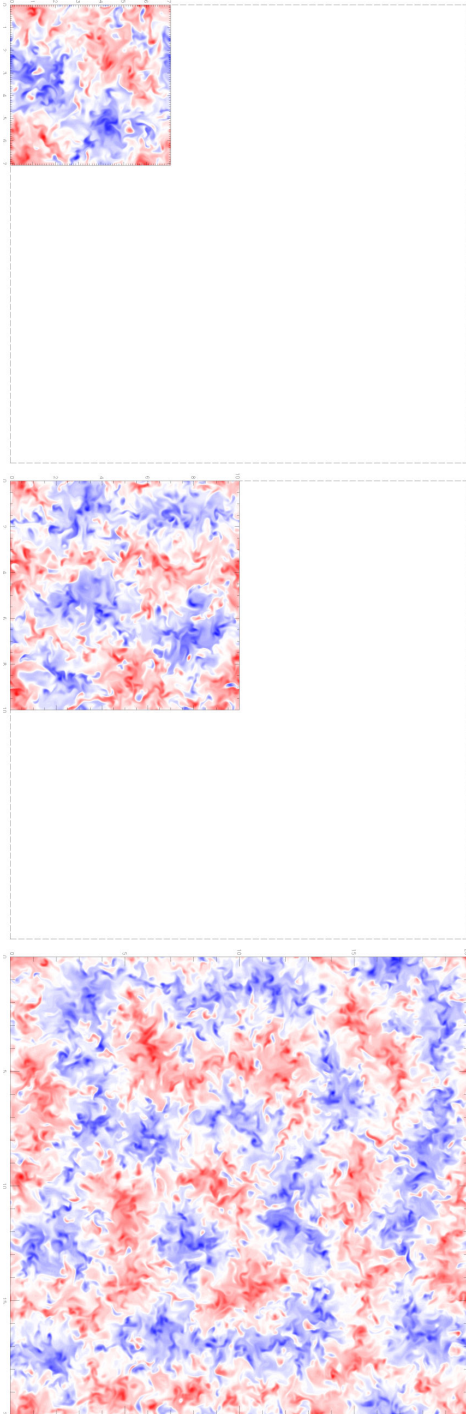
4.3 Einfluss des Aspektverhältnisses

Die vorangegangenen Ergebnisse zur Größe und Form der beobachteten Strukturen sind nur dann von allgemeiner Bedeutung für die Konvektion in weit ausgedehnten Fluidschichten, falls sie nicht hauptsächlich durch das verwendete Aspektverhältnis bestimmt waren. A priori ist es allerdings nicht klar, wie groß Γ sein muss, um realistische Ergebnisse zu erhalten. Man kommt daher nicht umher, Simulationen mit verschiedenen Aspektverhältnissen durchzuführen und diese miteinander zu vergleichen.

4.3.1 Große Aspektverhältnisse bis $\Gamma = 20$

Abbildung 4.16 zeigt einen Vergleich von Simulationen bei $Ra = 10^6$, $Pr = 0.7$. Neben dem bisher verwendeten Aspektverhältnis von $\Gamma = 10$, bei dem im Wesentlichen rollenartige Strukturen mit einer Wellenlänge $\lambda_{max} = 5$ beobachtet wurden, sind zwei weitere Rechnungen mit $\Gamma = 7.07$ und $\Gamma =$

Abbildung 4.16: Temperaturverteilung in der Mitte der Fluidschicht ($z=0.5$) für drei Rechnungen bei $Ra = 10^6$, $Pr = 0.7$. Die Simulationen unterscheiden sich lediglich im verwendeten Aspektverhältnis: $\Gamma = 7.07$ (links), $\Gamma = 10$ (Mitte) und $\Gamma = 20$ (rechts).



20 durchgeführt worden^{11,12}. Die auftretenden Strukturen sind sehr ähnlich und auch die Wellenlänge λ_{max} ist in allen drei Fällen gleich. Einzig die Orientierung der Strukturen zeigt Unterschiede. Aufgrund der endlichen Aspektverhältnisse und der damit diskreten Wellenvektoren steht die Wellenlänge 5 lediglich in bestimmten Richtungen zur Verfügung. Im Fall $\Gamma = 7.07$ ist dies zum Beispiel die Diagonalrichtung, bei $\Gamma = 10$ gibt es schon zwei Möglichkeiten: entlang der x - oder der y -Achse. Auch andere Größen wie die Nusselt-Zahl oder die kinetischen Energien in den einzelnen Geschwindigkeitskomponenten weisen keine signifikanten Unterschieden zwischen den drei Fällen auf. Sie liegen innerhalb von Bruchteilen eines Prozentes beieinander¹³. In diesem Fall, als auch bei den anderen Rayleigh-Zahlen bei $Pr = 0.7$, bei denen schließlich nur kleinere Strukturen als $\lambda_{max} = 5$ beobachtet wurden (vgl. Abbildung 4.14), ist ein Aspektverhältnis von $\Gamma = 10$ also völlig ausreichend.

Wenden wir uns kurz noch den mittleren Prandtl-Zahlen, insbesondere $Pr = 7$ zu. Wie bereits in Kapitel 4.2 geschildert, war hier die Bestimmung der typischen Wellenlängen der großskaligen Strukturen problematisch. Die Strömungen zeigen eine größere Vielfalt an Strukturen, wie in Abbildung 4.17 zu sehen ist. So kann man im Fall $\Gamma = 20$ neben Rollen, auch beiden Typen von Zellen, die mit einem Aufstrom in der Mitte oder einem Abstrom im Zentrum, beobachten. Die Zelltypen sind durch Rollenstrukturen voneinander getrennt, so wie dies auch in Experimenten beobachtet wird [6]. Offensichtlich ist ein Aspektverhältnis von $\Gamma = 10$ hier nicht ausreichend, um allen verschiedenen Strukturen gleichzeitig genügend Platz zu bieten¹⁴. Unterschiede zeigten sich ebenso in den kinetischen Energien der beiden Fälle, die Gesamtenergien liegen um ca. 2.5% auseinander. Noch frappierender ist die Diskrepanz in der Energie des Toroidalfeldes.

¹¹Wie sonst auch, wurden die einzelnen Simulationen völlig unabhängig voneinander durchgeführt und nicht etwa der Endzustand einer Simulation als Anfangsbedingung für die anderen verwendet. In jedem der Fälle wurde als Anfangsbedingung ein ruhendes Fluid mit zufälligen, kleinen Temperaturfluktuationen gewählt.

¹²Die Simulation bei $\Gamma = 20$ wurde ohne Mean Flow Komponente durchgeführt.

¹³Die einzelnen Ergebnisse der Energien, Nusselt-Zahl und anderer Größen sind in den Tabellen in Anhang A aufgelistet.

¹⁴Idealerweise würde man daher bei allen $Pr = 7$ Simulationen Aspektverhältnisse von $\Gamma \geq 20$ verwenden wollen. Aufgrund des deutlich höheren Rechenaufwandes war dies jedoch nicht möglich.

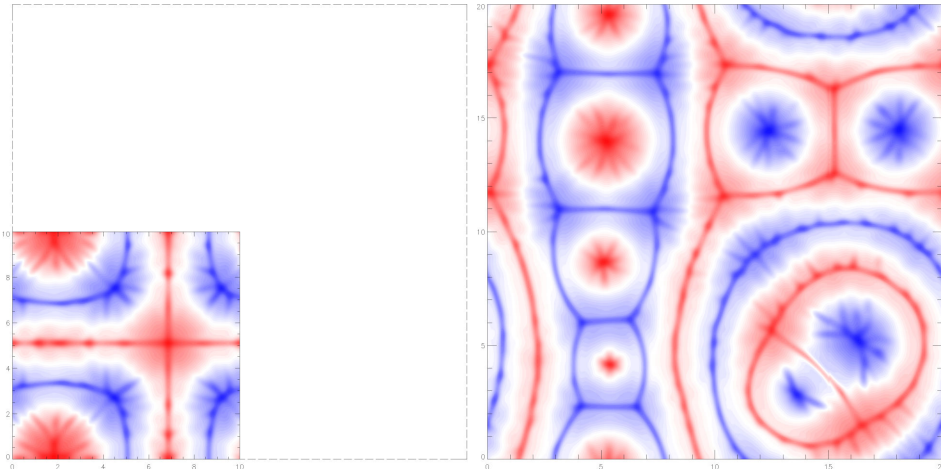


Abbildung 4.17: Momentaufnahmen der Temperaturverteilung in der Mittelebene ($z = 0.5$) in Simulationen bei $Ra = 3.2 \times 10^4$, $Pr = 7$ und Aspectverhältnissen von $\Gamma = 10$ (links) und $\Gamma = 20$ (rechts). Die dominanten Wellenlängen bei großen Skalen sind: $\lambda_{max} = 5$ im Fall $\Gamma = 10$ und $\lambda_{max} = 4.85$ für $\Gamma = 20$.

Bei $\Gamma = 10$ macht diese noch 1.6% der Gesamtenergie aus, bei $\Gamma = 20$ nur noch 0.8%. Auf den Wärmetransport hatte dies alles jedoch keinen Einfluss, er war mit $Nu = 3.00$ ($\Gamma = 10$) und $Nu = 3.01$ ($\Gamma = 20$) quasi identisch.

4.3.2 Kleine Aspectverhältnisse

Im Gegensatz zu den bisher vorgestellten Simulationen werden viele aktuelle Experimente bei sehr kleinen Aspectverhältnissen durchgeführt. So wird meist $\Gamma = 1$ (beispielsweise in [58, 36]), manchmal sogar nur $\Gamma = 1/2$ (z.B. [49]) verwendet. Der Grund dafür ist meist, dass man möglichst hohe Rayleigh-Zahlen erreichen will, gleichzeitig aber den technischen Aufwand gering halten muss. In die Rayleigh-Zahl geht nämlich nur die Höhe der Fluidschicht ein, und zwar mit der dritten Potenz (vgl. Gleichung 2.17). Große Γ bedeuten dann jedoch einen höheren Aufwand in Bezug auf die benötigte Heiz- und Kühlleistung und die Anforderungen an Parallelität und Ebenheit der Platten. Bei kleinem Aspectverhältnis sind so zum Beispiel bei [5] Rayleigh-Zahlen von 5×10^{14} erreicht worden. Großskalige Strukturen wie die hier vorgestellten Rollen- und Zellstrukturen können dann jedoch nicht studiert werden, da diese horizontal deutlich mehr Platz benötigen. Man konzentriert sich hier eher auf Untersuchungen des Wärme-

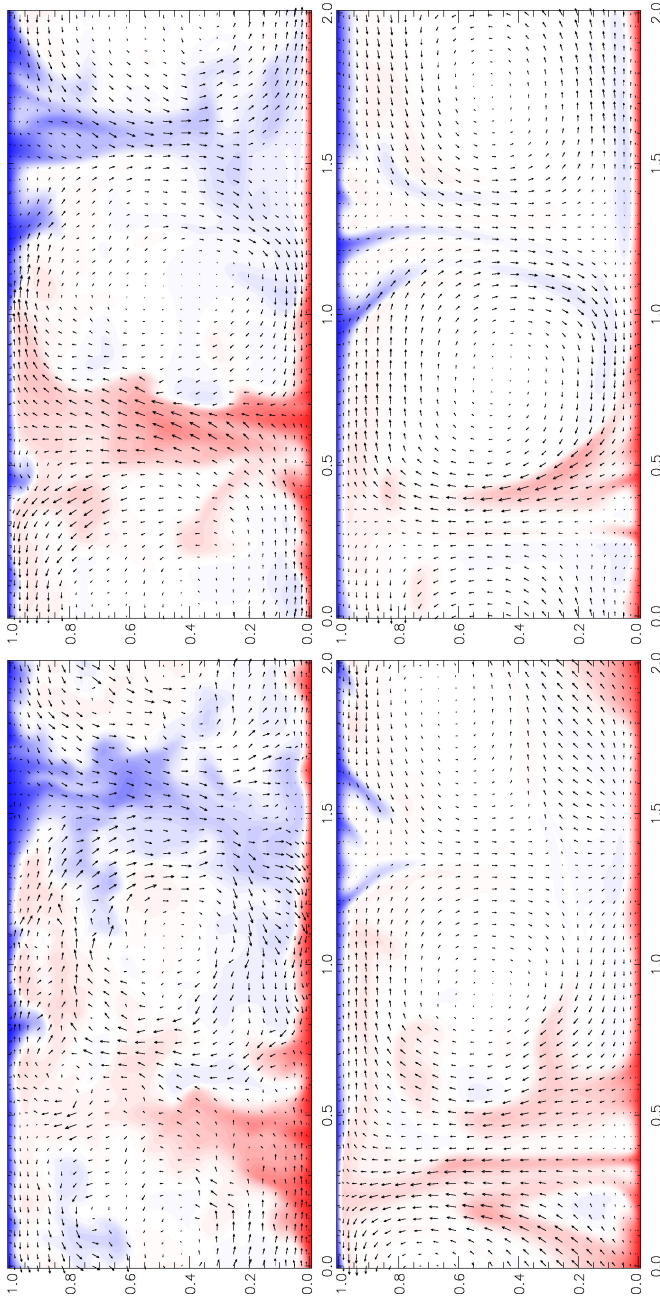


Abbildung 4.18: Darstellung von Temperatur (Farbe) und Geschwindigkeit (Pfeile) in der xz -Ebene ($y = 0$) bei Simulationen mit kleinem Aspektverhältnis von $\Gamma_x = 2, \Gamma_y = 1$ bei $Ra = 10^7$. Die vier Fälle unterscheiden sich durch ihre Prandtl-Zahl: $Pr = 0.1$ (links oben), $Pr = 0.7$ (rechts oben), $Pr = 7$ (links unten) und $Pr = 15$ (rechts unten). Wie in allen Darstellungen von Vektorfeldern sind aus Gründen der Übersichtlichkeit nur an einem Teil der Gitterpunkte Geschwindigkeitsvektoren eingezeichnet. In den obigen Fällen ist lediglich alle 5 Gitterpunkte ein Vektor eingezeichnet.

transports bzw. der Nusselt-Zahl, und der Dynamik der Plumes.

In dieser Arbeit wurden auch einige Simulationen bei kleinen Aspektverhältnissen durchgeführt, wobei Rayleigh-Zahlen bis 10^8 erreicht wurden^{15,16}. In den Simulationen sollte hauptsächlich die Erzeugung von Mean Flows untersucht werden (siehe Kapitel 5). Weitere Ergebnisse dieser Rechnungen, wie Nusselt-Zahlen und Grenzschichtdicken können zudem in Kapitel 6 gefunden werden. Als Aspektverhältnis wurden hierbei in x - und y -Richtung unterschiedliche Werte verwendet, um zum einen Rechenzeit zu sparen und zum anderen der Strömung eine Vorzugsrichtung zu geben. Gewählt wurden $\Gamma_x = 2$ und $\Gamma_y = 1$. In allen Fällen wurden Rollenstrukturen beobachtet, die sich mit der Rollenachse in y -Richtung legten, um die größtmögliche Wellenlänge von 2 (in x -Richtung) einnehmen zu können. Die entstehenden Rollen sind also so breit wie hoch. Die Situation ist daher sehr gut mit den Experimenten bei Aspektverhältnis $\Gamma = 1$ vergleichbar. Hier wird im Allgemeinen eine einzelne, den Behälter ausfüllende Zirkulationsströmung, also eine Rolle der Breite eins, beobachtet.

An dieser Stelle sollen nur einige Visualisierungen vorgestellt werden, um einen Eindruck von den Strömungen zu geben, die hier beobachtet wurden. So sind in Abbildung 4.18 Momentaufnahmen der Temperatur- und Geschwindigkeitsfelder bei $Ra = 10^7$ und verschiedenen Werten von Pr gezeigt. Wie in den Simulationen bei $\Gamma = 10$ werden bei Prandtl-Zahlen $Pr > 1$ sehr schlanke Plumes beobachtet, bei kleineren Prandtl-Zahlen $Pr < 1$ sind die Temperaturanomalien dagegen deutlich großflächiger. Zudem ist zu erkennen, dass mit zunehmender Prandtl-Zahl, und dementsprechend höherer Viskosität, das Geschwindigkeitsfeld immer glatter wird. In Abbildung 4.19 ist außerdem eine dreidimensionale Darstellung der Strömung bei $Ra = 10^8$, $Pr = 7$ gezeigt. Hier kann man besonders gut die Form der Plumes beobachten, die in diesem Fall durch einen schlanken Schaft und

¹⁵Wegen des kleineren Aspektverhältnisses werden in den Horizontalrichtungen entsprechend weniger Wellenvektoren benötigt als bei den $\Gamma = 10$ Simulationen. Bei insgesamt gleichem Rechenaufwand können daher mehr Moden pro Simulationsvolumen verwendet und somit höhere Rayleigh-Zahlen erreicht werden.

¹⁶Abweichend vom Vorgehen bei den größeren Aspektverhältnissen wurde hier für die Simulationen bei $Ra = 10^8$ der Endzustand der jeweiligen Simulation bei $Ra = 10^7$ als Startwert verwendet. Dies war möglich, da die Fälle hoch turbulent sind und die Strömung ihre Anfangsbedingung somit schnell „vergisst“.

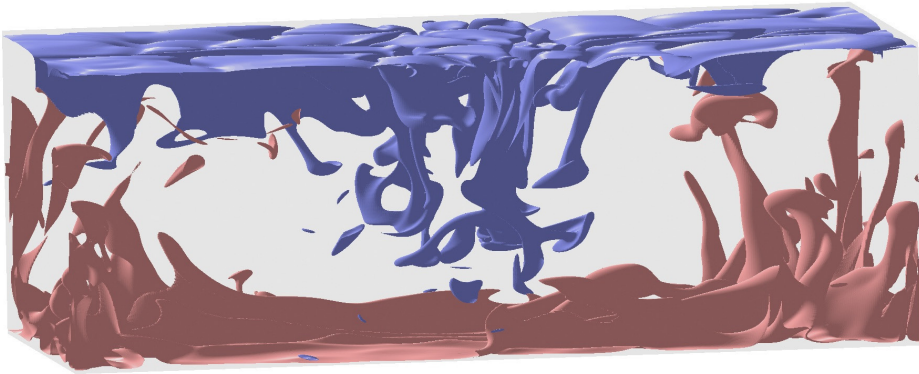


Abbildung 4.19: Dreidimensionale Darstellung von Flächen konstanter Temperatur $T_0 + 0.07\Delta T$ (rot) und $T_0 - 0.07\Delta T$ (blau) in der Simulation $Ra = 10^8$, $Pr = 7$, $\Gamma_x = 2$ und $\Gamma_y = 1$. T_0 und ΔT bezeichnen wieder die mittlere Temperatur in der Fluidschicht und die Temperaturdifferenz zwischen der unteren Heizplatte und der oberen Kühlplatte.

einen pilzförmigen und vergleichsweise breiten Kopf gekennzeichnet sind. Beides ist typisch für thermische Plumes bei mittleren bis großen Prandtl-Zahlen. Trifft ein solcher Plume auf der gegenüberliegenden Grenzschicht auf, kann er darauf Wellen erzeugen, wie in Abbildung 4.20 zu sehen ist. Der mit (a) gekennzeichnete Pfeil markiert in diesem Beispiel die Position, bei der kalte Plumes die untere Grenzschicht eindrücken und dabei rundherum zu einem Anschwellen der Grenzschicht führen. Experimentell sind solche Wellen zum Beispiel von [67] beobachtet wurden. In den Abbildungen 4.19 und 4.20 sind außerdem längliche, mit der Hauptströmungsrichtung ausgerichtete Verdickungen der Grenzschicht zu erkennen, wobei in Abbildung 4.20 zwei Beispiele dieser Strukturen durch die mit (b) gekennzeichneten Pfeile markiert sind. Abbildung 4.21 zeigt zudem einen Querschnitt durch die Schicht. Die länglichen Strukturen sind vermutlich mit den bereits bei großen Aspektverhältnissen beobachteten Spokes zu identifizieren. Ähnliche Strukturen wurden auch in einem aktuellen Experiment gefunden [36]¹⁷ Der horizontale Abstand der Strukturen ist dort jedoch deutlich kleiner, etwa ein Zwanzigstel der Schichthöhe. Daher ist es nicht ganz klar, ob es sich dort um das gleiche Phänomen handelt.

¹⁷Die Rayleigh-Zahlen in diesem Experiment bei $\Gamma = 1$ sind jedoch etwas größer als in den hier vorgestellten Simulationen, nämlich zwischen 5×10^8 und 2×10^9 .

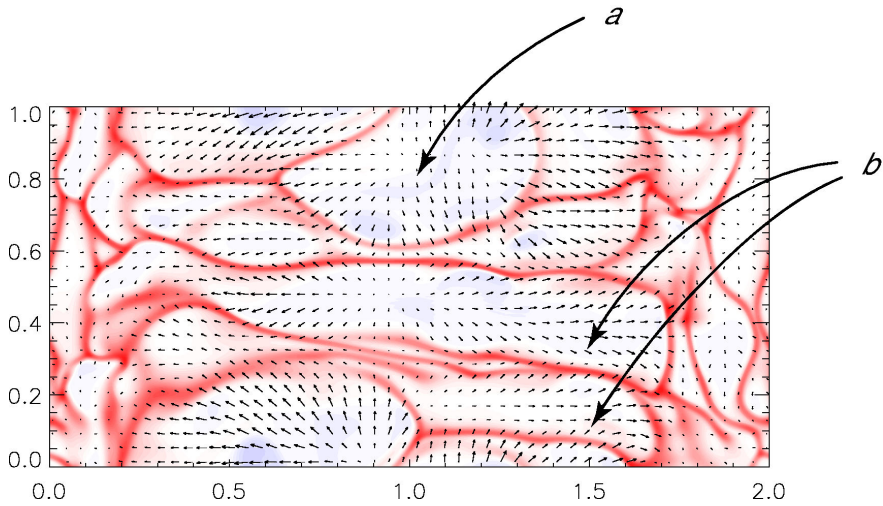


Abbildung 4.20: Darstellung von Temperatur- (Farbe) und Geschwindigkeitsfeld (Pfeile) der Simulation $Ra = 10^8$, $Pr = 7$, $\Gamma_x = 2$, $\Gamma_y = 1$ am Rand der unteren Temperaturgrenzschicht ($z = 0.02$). In der Mitte ($x \approx 1$) liegt der abwärts gerichtete Teil der primären Rollenstruktur, und bei $x \approx 0$ bzw. $x \approx 2$ der aufwärts gerichtete (vgl. Abbildung 4.19). Die eingezeichneten dicken Pfeile kennzeichnen verschiedenen Phänomene auf der Grenzschicht, die im Text näher beschrieben sind.

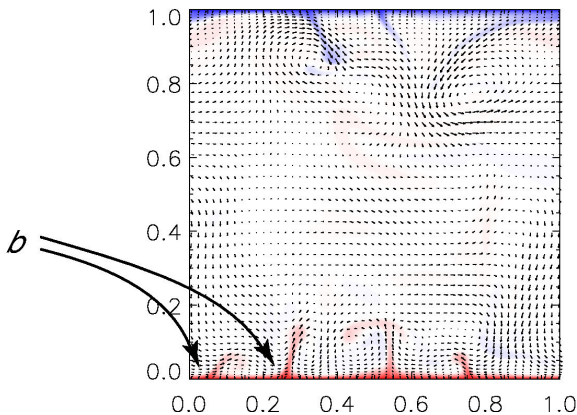


Abbildung 4.21: Temperatur und Geschwindigkeit in der Vertikalebene $x = 1.5$ für die Simulation aus Abbildung 4.20. Die Pfeile markieren die selben Strukturen wie in der vorangegangenen Abbildung.

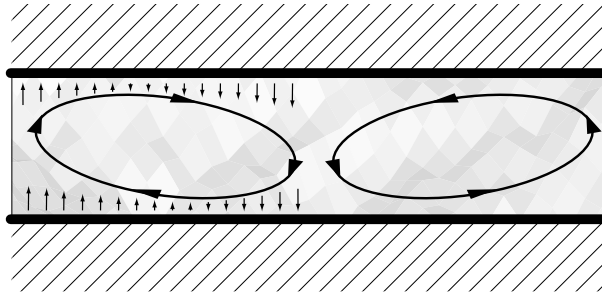


Abbildung 4.22: Schematische Darstellung von Konvektionsrollen bei $Pr \lesssim 1$. Die Pfeile deuten an, in welchen Bereichen die Strömung nach oben bzw. nach unten gerichtet ist.

4.4 Asymmetrie in den Auf- und Abströmen

Zum Ende dieses Kapitels soll der Unterschied zwischen Konvektion bei kleinen Prandtl-Zahlen ($Pr \lesssim 1$) und großen Prandtl-Zahlen ($Pr \gg 1$) noch etwas genauer beleuchtet werden. Bereits in der Nähe des Einsetzens von Konvektion, d.h. knapp oberhalb der kritischen Rayleigh-Zahl Ra_c , gibt es schon Unterschiede. In beiden Fällen werden zwar gerade Konvektionsrollen beobachtet, diese sind jedoch leicht gekippt, so wie in Abbildung 4.22 schematisch dargestellt. Bei kleinen Prandtl-Zahlen ist die Kippung in Rotationsrichtung der Konvektionsrolle (auch in Abbildung 4.4 bei $Ra = 4000$ zu sehen), bei $Pr \gg 1$ jedoch entgegen der Drehrichtung [15]. Diesen Unterschied kann man in Zahlen fassen. Zum Beispiel kann man in einer horizontalen Ebene das Verhältnis der Flächen, in denen die Strömung aufwärts ($v_z > 0$) oder abwärts ($v_z < 0$) gerichtet ist bestimmen. Im Fall der in Strömungsrichtung gekippten Rolle ist in der Nähe der unteren Platte die Fläche $A_{v_z > 0}$ der Aufströme größer als die Fläche $A_{v_z < 0}$ der Abströme, wie man leicht in Abbildung 4.22 sehen kann. Bei $Pr \gg 1$ ist dies dann genau umgekehrt. Als Maß für das Verhältnis der Flächen kann zum Beispiel die Größe $\langle v_z / |v_z| \rangle_{x,y}$ berechnet werden. Sie ist folgenderweise mit $A_{v_z > 0}$ und $A_{v_z < 0}$ verknüpft:

$$\left\langle \frac{v_z}{|v_z|} \right\rangle_{x,y} = \frac{A_{v_z > 0} - A_{v_z < 0}}{A_{ges}}, \quad (4.6)$$

wobei A_{ges} für die Gesamtfläche in der Horizontalebene steht, also $A_{ges} = A_{v_z > 0} + A_{v_z < 0} = \Gamma_x \Gamma_y$. Ein Wert von 0.3 für $\langle v_z / |v_z| \rangle_{x,y}$ bedeutet zum Bei-

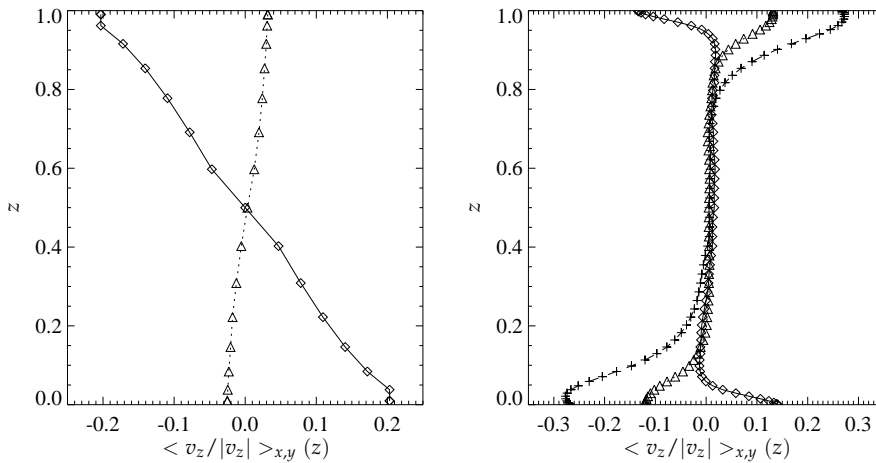


Abbildung 4.23: Vertikale Profile der Größe $\langle v_z/|v_z| \rangle_{x,y}$ bei $Ra = 4000$ (links) und $Ra = 10^7$ (rechts). Die Werte direkt an der Wand ($z = 0$ und $z = 1$) sind nicht dargestellt, da dort die Geschwindigkeit \vec{v} verschwindet. Die verschiedenen Symbole kennzeichnen $Pr = 0.7$ (Diamanten), $Pr = 7$ (Dreiecke) und $Pr = 30$ (Plus-Zeichen). Das Aspektverhältnis ist in allen Fällen $\Gamma = 10$.

spiel, dass die Aufströme 65% und die Abströme 35% der Fläche ausmachen. Vertikale Profile dieses Flächenmaßes sind für zwei laminare Fälle bei $Pr = 0.7$ und $Pr = 7$ im linken Teil von Abbildung 4.23 dargestellt. Die Profile sind nahezu linear, was die Anschauung bestätigt, dass die gesamte Konvektionsrolle gekippt ist. Erstaunlicherweise bleibt die Asymmetrie zwischen den Auf- und Abströmen auch bei hohen Rayleigh-Zahlen erhalten, wie die Darstellung der Rayleigh-Zahl Abhängigkeit von $\langle v_z/|v_z| \rangle_{x,y}$ in Abbildung 4.24 zeigt. In den turbulenten Fällen ist das Verhalten jedoch dahingehend anders, dass die unterschiedliche Verteilung von Auf- und Abströmen nur noch im Bereich der Grenzschichten zu finden ist. Drei Beispiele bei $Ra = 10^7$ sind im rechten Teil von Abbildung 4.23 gezeigt. Große und kleine Prandtl-Zahlen unterscheiden sich jedoch weiterhin durch das Vorzeichen von $\langle v_z/|v_z| \rangle_{x,y}$. Die verbleibenden Rollen bzw. Zellstrukturen sind selbst nicht mehr verkippt (siehe zum Beispiel Abbildung 4.18), im Inneren der Schicht ist die Asymmetrie schließlich verschwunden. Vielmehr sind die auftretenden thermischen Plumes für das Verhalten verantwortlich. Im Fall $Pr \lesssim 1$ sind diese sehr großflächig (vgl. zum Bei-

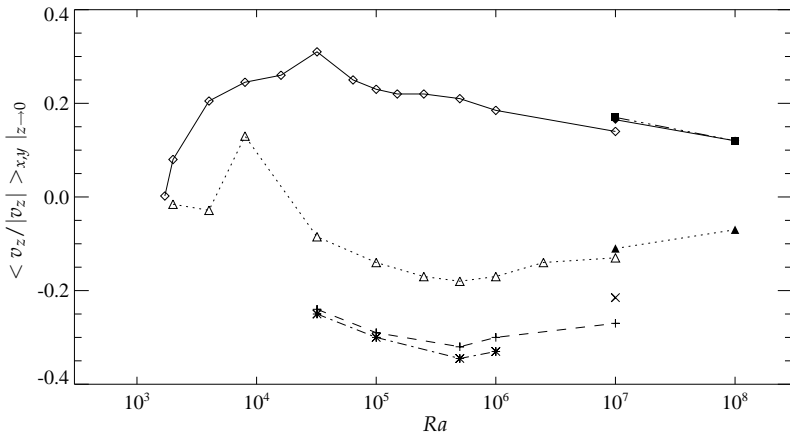


Abbildung 4.24: Zeitlicher Mittelwert von $\langle v_z/|v_z| \rangle_{x,y}$ knapp oberhalb der unteren Wand als Funktion von Ra . Die Symbole kennzeichnen Simulationen mit $Pr = 0.7$ (\diamond), $Pr = 7$ (\triangle), $Pr = 30$ ($+$) und $Pr = 60$ ($*$), jeweils bei Aspektverhältnis $\Gamma = 10$, und $Pr = 0.1$ (\blacksquare), $Pr = 0.7$ (\blacklozenge), $Pr = 7$ (\blacktriangle) und $Pr = 15$ (\times) bei $\Gamma_x = 2$, $\Gamma_y = 1$. Da die Geschwindigkeit direkt an der Wand verschwindet, macht es keinen Sinn $\langle v_z/|v_z| \rangle_{x,y}$ dort zu bestimmen. Die gezeigten Werte sind stattdessen an der ersten Stützstelle des Chebyshev-Verfahrens (siehe Kapitel 3) über der unteren Platte berechnet worden. Zur Verbesserung der Mittelwerte sind außerdem auch die Werte an der gegenüberliegenden Wand mit einbezogen worden. Die Profile sind im Allgemeinen schließlich antisymmetrisch bezüglich der Mittelebene, wie Abbildung 4.23 zeigt. Lediglich bei einer der untersuchten Simulationen, nämlich bei $Ra = 1.6 \times 10^4$, $Pr = 7$, $\Gamma = 10$, war das vertikale Profil nicht antisymmetrisch, daher ist für diesen Fall auch kein Wert im obigen Diagramm eingezeichnet.

spiel Abbildung 4.18), so dass in der unteren Grenzschicht $A_{v_z > 0} > A_{v_z < 0}$ und damit $\langle v_z/|v_z| \rangle_{x,y} > 0$ ist. Dementsprechend erhält man an der oberen Platte $\langle v_z/|v_z| \rangle_{x,y} < 0$. Bei mittleren bis großen Prandtl-Zahlen ist die Strömung in Grenzschichtnähe durch sehr schlanke Spokes, auf denen die Plumes vorrangig entstehen, dominiert. Der Abstand der Spokes voneinander ist dabei deutlich größer als ihre eigene Breite. Dies liegt zum Teil daran, dass ständig von der gegenüberliegenden Grenzschicht kommende Plumes mit den typischen, breiten und pilzförmigen Kopf auf die Grenzschicht auftreffen und die Spokes auseinander treiben (siehe zum Beispiel Abbildung 4.20). Die Fläche aufströmenden Fluides ist daher in der unteren Grenzschicht vergleichsweise klein und $\langle v_z/|v_z| \rangle_{x,y}$ somit negativ.

5

Erzeugung von „Mean Flows“

Eines der Ziele dieser Arbeit war eine genauere Untersuchung von so genannten Mean Flows in turbulenter Konvektion. Dabei sollte unter anderem herausgefunden werden, inwieweit Instabilitäten, die Mean Flows erzeugen für einige experimentelle Befunde, insbesondere die Experimente von Krishnamurti und Howard [45], verantwortlich sein könnten.

5.1 Motivation

Der Begriff Mean Flow beschreibt in diesem Zusammenhang eine mittlere Strömung in Horizontalrichtung. Hierbei ist jedoch kein zeitliches Mittel, sondern der Mittelwert über horizontale Ebenen gemeint. Die Mean Flow Geschwindigkeit \vec{U} wurde bereits in Kapitel 3.1.1 bei der Zerlegung der Geschwindigkeit in Poloidal- und Toroidalanteile eingeführt. Ihre Definition lautet:

$$\vec{U}(z, t) = \langle \vec{v}(x, y, z, t) \rangle_{x,y}. \quad (5.1)$$

\vec{U} ist diejenige Strömungskomponente mit unendlich großer horizontaler Wellenlänge.

Symmetrische und antisymmetrische Mean Flows

Für die folgende Diskussion ist es sinnvoll das vertikale Profil des Mean Flows in zwei Komponenten, einen bezüglich der Mittelebene $z = 0.5$ symmetrischen Anteil \vec{U}_{symm} und einen antisymmetrische Anteil \vec{U}_{asymm} , auf-

zuteilen. Dabei ist:

$$\vec{U}_{\text{symm}}(z, t) = 1/2(\vec{U}(z, t) + \vec{U}(1 - z, t)), \quad (5.2)$$

$$\vec{U}_{\text{asymm}}(z, t) = 1/2(\vec{U}(z, t) - \vec{U}(1 - z, t)). \quad (5.3)$$

Im symmetrischen Fall erhält man eine Strömung in eine Richtung, was einen effektiven Materialtransport in Horizontalrichtung bedeutet. In Experimenten, in denen Seitenwände vorhanden sind¹, ist solch eine Strömung überhaupt nicht möglich.

Bei antisymmetrischen Mean Flows können verschiedene Szenarios betrachten betrachtet. Zwei prägnante Beispiele sind in Abbildung 5.1 skizziert. Beide Fälle kennzeichnet eine rein antisymmetrische Mean Flow Geschwindigkeit: im oberen Bereich der Schicht ist die Strömung im Mittel nach rechts, im unteren nach links. Im ersten Fall ist \vec{U} klein im Vergleich zu den toroidalen und poloidalen Geschwindigkeitskomponenten, die die gezeigten Konvektionsrollen bzw. -zellen bilden. Der Mean Flow ist hier lediglich ein Resultat der verschiedenen Größe und Stärke der einzelnen Rollen bzw. Zellstrukturen. Bei Einbeziehung von Seitenwänden, so wie es in den meisten Experimenten nun einmal notwendig ist, wird sich für diesen Fall nicht allzu viel verändern. Die Strömung ist schon von vornherein räumlich begrenzt. Im zweiten Fall, dem dominierenden antisymmetrischen Mean Flow, ist die Strömung jedoch nicht horizontal begrenzt. Dies ist zwar, wie bei symmetrischen Mean Flows, nicht möglich, wenn seitlich Begrenzungen vorhanden sind. Man kann sich hier aber leicht vorstellen, das der Mean Flow durch Einführung von Seitenwänden in eine geschlossene, die gesamte Schicht ausfüllende Zirkulationsströmung umgewandelt werden kann (siehe Abbildung 5.2).

¹Es sind aber auch Experimente denkbar, in denen, zumindest in einer der Horizontalrichtungen, keine Seitenwände nötig sind. Zum Beispiel erfüllt eine Fluidschicht in einem Zylinderspalt in Umfangsrichtung periodische Randbedingungen. Hier könnten theoretisch auch symmetrische Mean Flows auftreten. Solange der Radius des Zylinders deutlich größer ist als die Spaltbreite, kann auch die Krümmung der verbleibenden Seitenwände vernachlässigt werden.

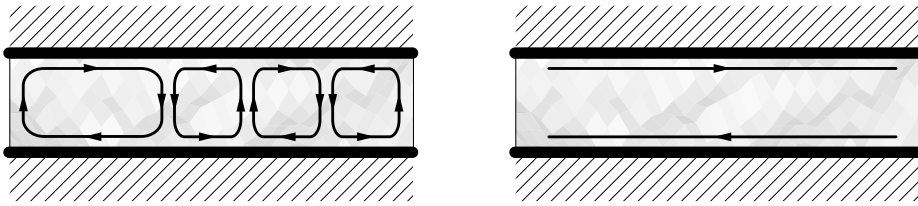


Abbildung 5.1: Schematische Darstellung von zwei Strömungen mit antisymmetrischem Mean Flow. Im ersten Fall ist die Mean Flow Komponente klein gegenüber den anderen Strömungsanteilen (links), im zweiten dominiert sie die Strömung (rechts).

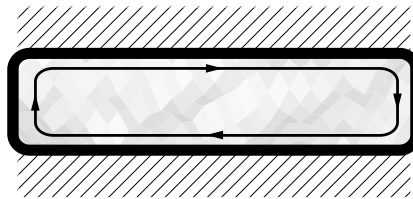


Abbildung 5.2: Skizze einer geschlossenen Zirkulationsströmung bei Vorhandensein von Seitenwänden.

Experimentelle Beobachtungen

Solche Zirkulationsströmungen werden tatsächlich in Experimenten beobachtet, es handelt sich in den meisten Fällen allerdings um Konvektionsexperimente mit kleinen Aspektverhältnissen² (zum Beispiel [49, 58]). Dort ist eher anzunehmen, dass es sich bei der Strömung um eine einzelne Konvektionsrolle bzw. -zelle handelt, die aufgrund des kleinen Aspektverhältnisses das gesamte Volumen des Experiments ausfüllt. Ist genügend Platz vorhanden, nehmen die Strukturen schließlich mehr Raum ein (vgl. Kapitel 4). Mit starken Mean Flows haben diese Strömungen wohl weniger zu tun.

Auf der anderen Seite gibt es aber auch Experimente mit relativ großen Aspektverhältnissen ($\Gamma \geq 10$), bei denen Zirkulationsströmungen beobachtet wurden, die den gesamten Experimentierapparat ausfüllten. Hier fällt die Deutung als eine einzelne, riesige Konvektionsrolle eher schwer. Die betreffenden Experimente wurden von Krishnamurti und Howard [45]

²Wie bereits in Kapitel 4.3 erwähnt, werden in vielen aktuellen Experimenten Aspektverhältnisse von $\Gamma = 1/2$ oder $\Gamma = 1$ verwendet, um möglichst hohe Rayleigh-Zahlen zu erreichen und gleichzeitig den technischen Aufwand so klein wie möglich zu halten.

durchgeführt. Sie beschäftigten sich mit Rayleigh-Bénard Konvektion bei Prandtl-Zahl $Pr = 7$ und verschiedenen Rayleigh-Zahlen, und arbeiteten mit quadratischen Behältern mit Seitenlängen, die dem 10 bis 20-fachen der Schichtdicke entsprachen. Also mit genügend Platz um mehrere der bekannten zellularen und rollenartigen Strukturen aufzunehmen. Unterhalb von $Ra \approx 10^6$ wurden diese Strömungsstrukturen auch beobachtet, so wie in den in Kapitel 4 vorgestellten Simulationen. Die Rollen oder Zellen hatten dabei eine horizontale Ausdehnung in der Größenordnung der Schichtdicke. Bei weiterer Erhöhung der Rayleigh-Zahl verschwanden die Zellen jedoch völlig und wurden ab $Ra \approx 2.4 \times 10^6$ durch eine einzelne, großräumige Zirkulationsströmung ersetzt. Bisher gibt es keine überzeugende Erklärung für diesen experimentellen Befund. Die im Folgenden vorgestellte Untersuchung sollte unter anderem zeigen, ob ein starker antisymmetrischer Mean Flow für die Erzeugung dieser großskaligen Zirkulation verantwortlich sein könnte oder nicht.

5.2 Mechanismen in laminarer Konvektion

Um den Ursprung von Mean Flows in turbulenten Konvektionsströmungen besser verstehen zu können ist es angebracht, sich zunächst mit den einfacheren und kontrollierteren Gegebenheiten laminarer Strömungen zu befassen. In der Literatur sind für diese Fälle bereits verschiedenen Mechanismen zur Erzeugung von Mean Flows bekannt. Beginnend mit geraden Konvektionsrollen ohne Mean Flow bei niedrigen Rayleigh-Zahlen greifen abhängig von der Prandtl-Zahl verschiedene Instabilitätsmechanismen, sobald Ra über gewisse Werte erhöht wird.

Prandtl-Zahlen um eins

Bei Prandtl-Zahlen von $Pr \approx 1$ ist hier im Besonderen die oszillatorische Instabilität zu nennen. Sie verursacht periodische, wellenartige Verzerrungen, die entlang der ursprünglichen Konvektionsrollen wandern [23]. Man spricht daher auch von so genannter „traveling wave“ Konvektion. Dabei wird ein zeitlich konstanter, rein symmetrischer Mean Flow entlang der primären Rollen erzeugt. Die Abbildungen 5.3 und 5.4 zeigen ein Beispiel

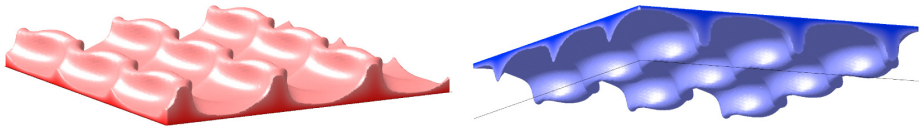


Abbildung 5.3: Perspektivische Darstellung einer Schar von Konturflächen hoher Temperatur $T \in [T_1 - 0.25\Delta T, T_1]$ (links) und niedriger Temperatur $T \in [T_2, T_2 + 0.25\Delta T]$ (rechts) für die Simulation $Ra = 8000$, $Pr = 0.7$ und $\Gamma = 10$. T_1 , T_2 und ΔT bezeichnen wie bisher die Temperaturen der unteren Platte, der oberen Platte und deren Temperaturdifferenz.

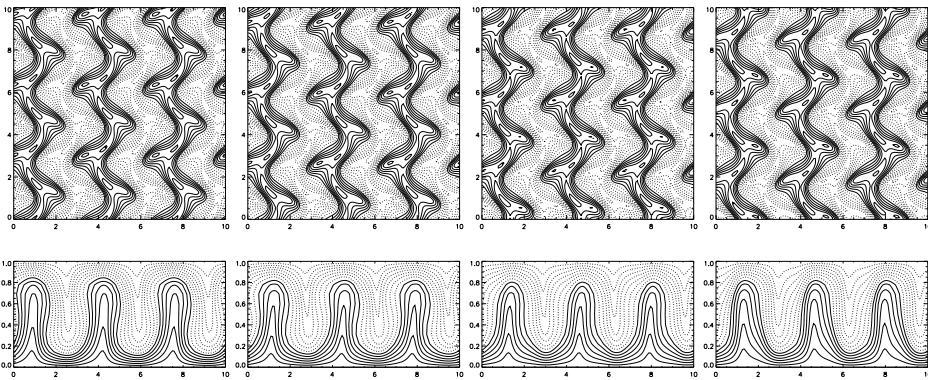


Abbildung 5.4: Konturlinien der Vertikalgeschwindigkeit in der xy -Ebene bei $z = 0.5$ (obere Reihe) und der Temperatur in der xz -Ebene bei $y = 0$ (untere Reihe) zu verschiedenen Zeiten für die Simulation aus Abbildung 5.3. Durchgezogene und gestrichelte Konturlinien kennzeichnen dabei positive und negative Geschwindigkeiten, bzw. im Fall der Temperatur positive und negative Abweichungen von der mittleren Temperatur $T_0 = (T_1 + T_2)/2$. Die Abbildungen zeigen von links nach rechts vier verschiedene Zeitpunkte, die in der Zeitserie der Mean Flow Komponenten (Abbildung 5.5) durch Pfeile gekennzeichnet sind.

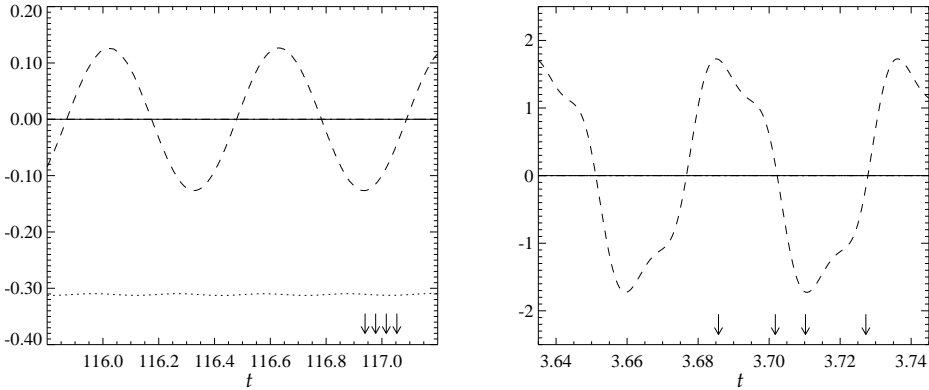


Abbildung 5.5: Zeitreihen der symmetrischen Mean Flow Anteile f_x^{symm} (durchgezogene Linie) und f_y^{symm} (gepunktete Linie) und der antisymmetrischen Anteile f_x^{asymm} (gestrichelte Linie) und f_y^{asymm} (punkt-gestrichelte Linie). Die Parameter der Simulationen sind $Ra = 8000$, $Pr = 0.7$, $\Gamma = \Gamma_x = \Gamma_y = 10$ (linkes Diagramm) und $Ra = 64000$, $Pr = 7$, $\Gamma_x = 2$, $\Gamma_y = 3$ (rechts Bild). Im linken Fall Die in den Diagrammen eingetragenen Pfeile markieren die Zeitpunkte, die in den Abbildungen 5.4 und 5.7 verwendet wurden.

dieser Strömung bei $Pr = 0.7$. Die zeitliche Entwicklung der dabei auftretenden Mean Flow Komponenten ist in Abbildung 5.5 dargestellt, wobei als Maß für die symmetrischen und antisymmetrischen Anteile folgende Integrale über das vertikale Profil des Mean Flows verwendet wurden:

$$f_x^{symm}(t) = \int_0^1 \hat{x} \cdot \vec{U}_{symm}(z, t) dz, \quad (5.4)$$

$$f_y^{symm}(t) = \int_0^1 \hat{y} \cdot \vec{U}_{symm}(z, t) dz, \quad (5.5)$$

$$f_x^{asymm}(t) = \int_0^1 \hat{x} \cdot \vec{U}_{asymm}(z, t) 2(1 - 2z) dz, \quad (5.6)$$

$$f_y^{asymm}(t) = \int_0^1 \hat{y} \cdot \vec{U}_{asymm}(z, t) 2(1 - 2z) dz. \quad (5.7)$$

Die Rayleigh-Zahl in diesem Beispiel ist mit $Ra = 8000$ etwas oberhalb des kritischen Wertes, bei der die oszillatorische Instabilität einsetzt. Die führt dazu, dass die Wellen nicht mehr exakt symmetrisch sind. Die Verzerrungen rechts und links von der primären Rollenstruktur sind nicht mehr identisch. Ein antisymmetrischer Mean Flow, der senkrecht zu den Kon-

vektionsrollen steht, ist damit verknüpft. Er oszilliert zusammen mit den wellenförmigen Verzerrungen. Die Periode der antisymmetrischen Komponente ist mit $\tau_w \approx 0.61$ dabei gerade doppelt so groß, wie die Periodendauer der Verzerrungswelle. Die Verzerrungen wandern im gezeigten Fall mit einer Geschwindigkeit von zirka 11 (in dimensionslose Einheiten) in negative y -Richtung. Der dabei hervorgerufene symmetrischer Mean Flow, der einen effektiven horizontalen Materialtransport bedeutet, ist deutlich langsamer. Das Maximum liegt in der Mitte der Schicht bei nur etwa 0.8. Zum Vergleich sei das Maximum der RMS Geschwindigkeit in Horizontalrichtung (vgl. Kapitel 6), das als Maß für die Geschwindigkeiten in der Konvektionsrolle herangezogen werden kann, angegeben: $\max\{v_{h,rms}\} \approx 26$. Der Mean Flow beträgt somit nur wenige Prozent der typischen Geschwindigkeiten in der Strömung.

Bereich größerer Prandtl-Zahlen

Auch bei höheren Prandtl-Zahlen, bei denen die oben beschriebene oszillatorische Instabilität keine Rolle mehr spielt, besteht die Möglichkeit stationäre, symmetrische Mean Flows zu finden. Die so genannte „traveling blob“ Instabilität³ erzeugt zum Beispiel solch einen zeitlich konstanten Mean Flow [25]. Diese Form der Konvektion wird jedoch kaum in Experimenten beobachtet. Auch in numerischen Simulationen findet man die Instabilität nur bei sehr spezieller Wahl der Parameter Ra , Pr , Γ_x und Γ_y . Von größerer Relevanz scheint jedoch eine Instabilität der bimodalen Konvektion⁴, die „wavy oscillatory“ Instabilität, zu sein. Von ihr wird ein bezüglich der Mittelebene $z = 0.5$ antisymmetrischer Mean Flow generiert [24]. Ein Beispiel für diese Strömung ist in den Abbildungen 5.6 und 5.7 dargestellt. Die senkrecht zu den primären Konvektionsrollen angeordneten Rollen kippen hierbei periodisch hin und her, und erzeugen eine Reynolds-Spannung mit gleicher Frequenz. Der entstehende Mean Flow entlang der Richtung der primären Rollen ist ebenfalls in Abbildung 5.5 gezeigt.

³Wie der Begriff „traveling blob“ nahelegt, wandern bei diese Strömung warme und kalte Fluidpakete in periodischer Weise in der Konvektionsschicht umher.

⁴Bei bimodaler Konvektion sind senkrecht zu den primären Konvektionsrollen weitere Rollen mit kleinerer Wellenlänge überlagert.

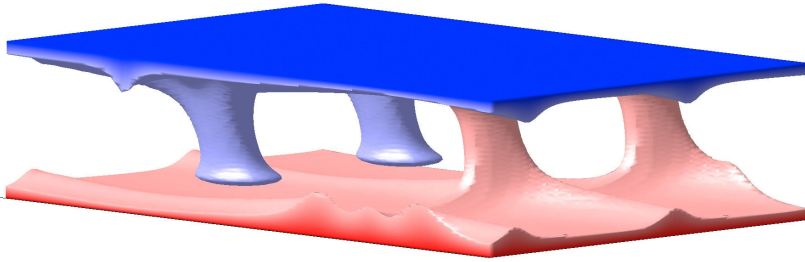


Abbildung 5.6: Darstellung der Temperaturverteilung einer Simulation mit $Ra = 64000$, $Pr = 7$, $\Gamma_x = 2$ und $\Gamma_y = 3$ zum Zeitpunkt $t = 3.685742$. Gezeigt sind ein Schar von Konturflächen hoher Temperatur $T \in [T_1 - 0.3\Delta T, T_1]$ und niedriger Temperatur von $T \in [T_2, T_2 + 0.3\Delta T]$. Die Farbskala reicht wie bisher von blau (kalt) über weiß nach rot (warm).

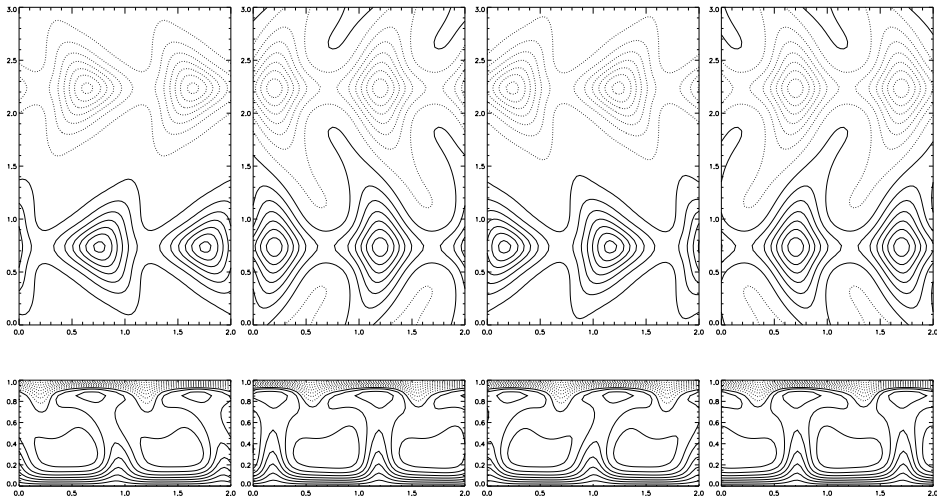


Abbildung 5.7: Linien konstanter Vertikalgeschwindigkeit in der xy -Ebene bei $z = 0.5$ (obere Reihe) und der Temperatur in der xz -Ebene bei $y = 0.98$ (untere Reihe) für die Simulation aus Abbildung 5.3. Die verschiedenen Zeitpunkte sind wieder in Abbildung 5.5 durch Pfeile gekennzeichnet.

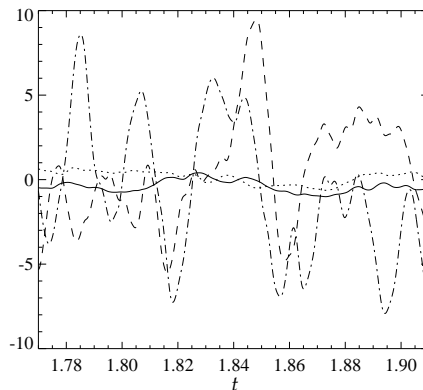


Abbildung 5.8: Zeitliche Entwicklung der Mean Flow Anteile im turbulenten Fall bei $Ra = 10^6$, $Pr = 0.7$ und $\Gamma = 10$. Die Darstellung ist analog zu Abbildung 5.5.

5.3 Turbulente Mean Flows

Wenden wir uns nun den chaotischen und turbulenten Strömungen zu. Wie gesehen, findet man bei Prandtl-Zahlen um eins und niedrigen Rayleigh-Zahlen im Wesentlichen zeitunabhängige, symmetrische Mean Flows. Selbst bei $Ra = 8000$ sind jedoch auch schon antisymmetrische Anteile vorhanden. Bei weiterer Erhöhung von Ra , hin zu turbulenten Strömungen, wächst diese antisymmetrische Komponente im Verhältnis zum symmetrischen Anteil schneller an. Wie in Abbildung 5.8 zu sehen ist, dominiert sie dann sogar den Mean Flow. Beide Anteile sind dann stark zeitabhängig und wechseln im Laufe der Zeit ihre Richtung. Der zeitliche Mittelwert von \vec{U} verschwindet daher für lange Zeitintervalle.

Bei mittleren Prandtl-Zahlen, so zeigt es zumindest des Fall $Pr = 7$, ist von Anfang an der antisymmetrische Anteil der größere und dominiert den Mean Flow über den gesamten untersuchten Rayleigh-Zahl Bereich. Auch hier sind beide Anteile durch starke Oszillationen gekennzeichnet. Beispielsweise ist die Strömung bei $Ra = 3.2 \times 10^4$ und $\Gamma = 20$ (siehe Abbildung 4.5) auf den großen Längenskalen der Rollen und Konvektionszellen nahezu stationär. Die Spokes (vgl. Kapitel 4) als auch der Mean Flow zeigen jedoch eine starke Zeitabhängigkeit. Der Mean Flow scheint somit eng mit den kleinskaligen Strömungsanteilen verknüpft zu sein.

Eine Zusammenfassung von Simulationsergebnissen bei Aspektverhält-

nis $\Gamma = 10$ ist in Abbildung 5.9 gegeben. Hier ist die Rayleigh-Zahl Abhängigkeit der Energie des Mean Flows und der anderen Geschwindigkeitskomponenten für $Pr = 0.7$ und $Pr = 7$ dargestellt. Im Fall von $Pr = 0.7$ ist dabei besonders auffallend, dass sich bereits ab Rayleigh-Zahlen von weniger als 10^5 die Energieverteilung kaum noch verändert. Der Mean Flow erreicht mit etwa einem Tausendstel der Gesamtenergie sein Maximum. Bei der höheren Prandtl-Zahl von $Pr = 7$ sind zu Anfang die Werte für Mean Flow und Toroidalfeld sehr viel kleiner. Nach einem starken Anstieg erreichen sie jedoch bei hohen Ra ähnliche Werte wie im Fall $Pr = 0.7$. Wird die Prandtl-Zahl weiter erhöht, so sollten Mean Flows noch weniger eine Rolle spielen, denn zumindest für $Pr \rightarrow \infty$ muss der Mean Flow völlig verschwinden (vgl. Kapitel 3.6.3). Bei $Pr = 30$ erreicht er selbst bei $Ra = 10^7$ nur noch zirka $3.5 \times 10^{-4} E_{kin}$, also deutlich weniger als in den beiden anderen Fällen.

Einfluss des Aspektverhältnisses

Es ist wichtig zu erwähnen, dass der beobachtete Mean Flow stark vom Aspektverhältnis Γ abhängt. Einige Ergebnisse für Aspektverhältnisse zwischen 2 und 10 sind in Abbildung 5.10 dargestellt und zeigen ein Absinken der Mean Flow Energie mit wachsendem Γ . Wie zuvor gesehen, spielen bei der Erzeugung des Mean Flows offensichtlich die kleinskaligen Komponenten der Strömung, also die zuvor beschriebenen Oszillationen innerhalb der Konvektionsrollen oder -zellen, eine entscheidende Rolle. Je größer nun das Aspektverhältnis ist, desto mehr dieser Strukturen liegen in der Schicht vor, und zwar durchaus in verschiedenen Orientierungen, wie man zum Beispiel in Abbildung 4.16 sehen kann. Die einzelnen Beiträge zum Mean Flow werden sich dann herausmitteln. Es ist somit zu erwarten, dass der Mean Flow für $\Gamma \rightarrow \infty$ sogar ganz verschwindet.

Qualitativ ist die Rayleigh-Zahl Abhängigkeit für die verschiedenen Aspektverhältnisse jedoch gleich. Abbildung 5.11 zeigt die Variation der Mean Flow Energie mit der Rayleigh-Zahl für den Fall $\Gamma_x = 2, \Gamma_y = 1$. Auch hier steigt der Energieanteil des Mean Flow zunächst stark an und scheint bei hohen Rayleigh-Zahlen zu sättigen, allerdings bei einem im Vergleich zu $\Gamma = 10$ höheren Wert von zirka 0.01. Selbst bei diesem kleinen Aspekt-

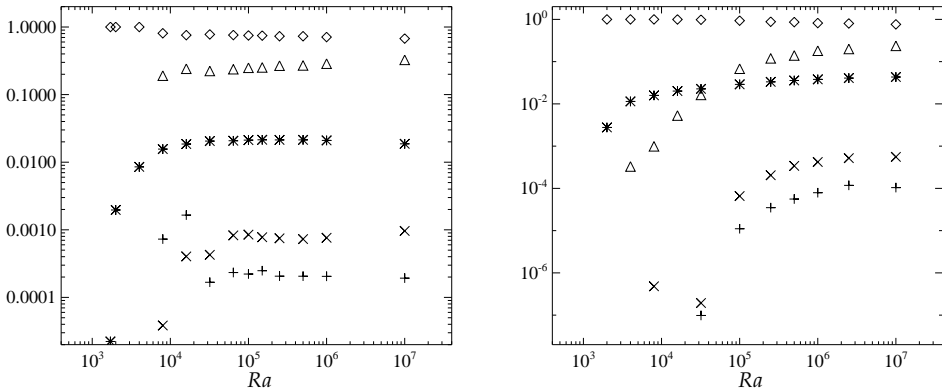


Abbildung 5.9: Darstellung der relativen Anteile der verschiedenen Geschwindigkeitskomponenten zur kinetischen Energie des Fluides in Abhängigkeit von der Rayleigh-Zahl. Die Simulationsparameter sind $Pr = 0.7, \Gamma = 10$ für das linke und $Pr = 7, \Gamma = 10$ für das rechte Diagramm. Die einzelnen Symbole kennzeichnen die zeitlichen und räumlichen Mittelwerte der Energien im Poloidalfeld ϕ (Diamanten), im Toroidalfeld ψ (Dreiecke), in der symmetrischen Mean Flow Geschwindigkeit \bar{U}_{symm} (Plus-Zeichen) und in der antisymmetrischen Mean Flow Komponente \bar{U}_{asymm} (Kreuze), jeweils dividiert durch die gesamte kinetische Energie E_{kin} . Zusätzlich ist die Größe E_{kin}/Ra (Sterne) eingezeichnet. Für einige kleine Rayleigh-Zahlen sind keine Werte für das Toroidalfeld oder den Mean Flow eingetragen, das sie numerisch gesehen null ergaben.

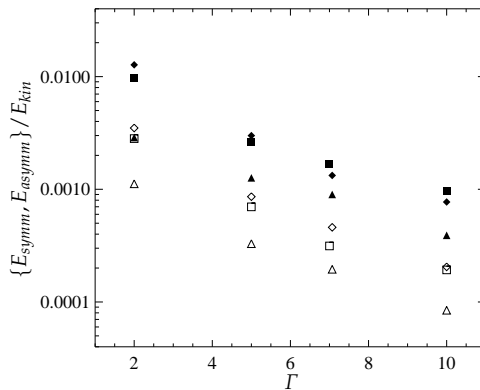


Abbildung 5.10: Abhängigkeit der Energie der symmetrischen (gefüllte Symbole) und antisymmetrischen Mean Flow Anteile (offene Symbole) vom Aspektverhältnis Γ . Die Energieanteile sind wieder bezüglich der Gesamtenergie aufgetragen. Die Parameter der Rechnungen sind $Ra = 10^6, Pr = 0.7$ (Diamanten), $Ra = 10^6, Pr = 7$ (Dreiecke) bzw. $Ra = 10^7, Pr = 0.7$ (Quadrate).

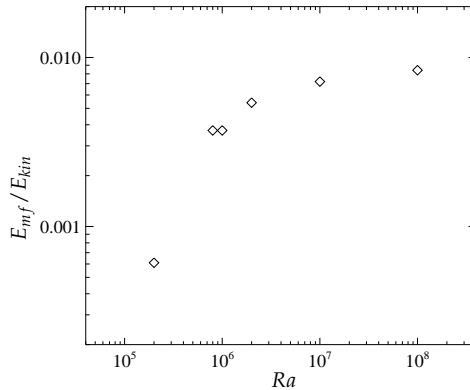


Abbildung 5.11: Anteil der Mean Flow Energie an der gesamten kinetischen Energie in Abhängigkeit von Ra bei Simulationen mit nicht-quadratischem Aspektverhältnis von $\Gamma_x = 2$, $\Gamma_y = 1$ und einer Prandtl-Zahl von $Pr = 7$. Unterhalb von $Ra = 2 \times 10^5$ wurde in diesem Fall kein Mean Flow beobachtet.

verhältnis und einer Rayleigh-Zahl von bis zu 10^8 ist die Strömung durch Konvektionsrollen dominiert und die Bedeutung des Mean Flow ist weiterhin gering (die bei diesem Aspektverhältnis auftretenden Strömungen sind in Abbildung 4.18 dargestellt).

5.4 Weitere Erklärungsversuche der Experimente

In allen bisher vorgestellten Simulationen spielten Mean Flows eine eher untergeordnete Rolle. In keiner der Fälle waren sie stark genug, um als Erklärung für den von Krishnamurti und Howard [45] berichteten Übergang von zellulärer Konvektion zu großskaliger Zirkulation herangezogen zu werden. Es wurden daher noch einige andere Versuche unternommen, um die Experimente zu reproduzieren. Diese werden im Folgenden vorgestellt. Um es gleich vorwegzunehmen, auch keines dieser Versuche konnte die Beobachtungen von Krishnamurti und Howard [45] bestätigen.

5.4.1 Kippen der Fluidschicht

Man hat in Kapitel 3.6.1 gesehen, dass bei einer Verkippung der Fluidschicht aus der Horizontalen möglicherweise stärkere Mean Flows erzeugt werden können.

β	E_{kin}	E_{pol}	E_{tor}	E_{mf}	Nu
0	1.02×10^5	8.17×10^4	2.03×10^4	6.4×10^1	11.0
10^{-4}	1.02×10^5	8.13×10^4	2.07×10^4	5.4×10^1	11.1

Tabelle 5.1: Vergleich der Simulationsergebnisse für $Ra = 2.5 \times 10^6$, $Pr = 7$, $\Gamma = 10$ ohne Verkippung und mit einem Kippwinkel von $\beta = 10^{-4}$. Aufgeführt sind die Gesamtenergie pro Volumen ($E_{kin} = \langle v^2/2 \rangle_{x,y,z,t}$) und deren Poloidal-, Toroidal- und Mean Flow Anteile (E_{pol} , E_{tor} , E_{mf}), sowie als Maß für den Wärmetransport die Nusselt-Zahl Nu , die in Kapitel 6 definiert ist.

Theoretische Überlegungen

Betrachten wir die Komponente des Mean Flows in die die Schicht geneigt ist. Nur sie erhält durch das Kippen einen zusätzlichen, mit dem Neigungswinkel anwachsenden Produktionsterm. Unter der Annahme, dass dieser temperaturabhängige Term hauptsächlich für die Erzeugung und Aufrechterhaltung des Mean Flows verantwortlich ist, ergibt sich aus 3.14 und 3.48:

$$[\partial_t - Pr\partial_z^2]U_x \approx RaPr \sin \beta \langle \theta \rangle_{x,y}. \quad (5.8)$$

Der dabei eingehende Ebenenmittelwert von θ , der Abweichung der Temperatur von ihrem statischen Profil (vgl. Kapitel 2.2), ist im Normalfall in der Nähe der oberen Platte positiv und im unteren Teil der Schicht negativ (siehe Kapitel 6). Damit wäre die Erzeugung eines antisymmetrischen Mean Flow zu erwarten. Die Stärke des erzeugten Mean Flows hängt dabei entscheidend vom Kippwinkel ab.

Experimente und Simulationsergebnisse

Bei den Experimenten von Krishnamurti und Howard [45] wurde extrem auf die waagerechten Ausrichtung der Fluidschicht geachtet. Sie selbst geben den maximalen Höhenunterschied mit $0.0006cm$ bei einer Länge des Experiments von $30cm$ an. Dies ergibt einer maximalen Kippwinkel von $\beta \leq 2 \times 10^{-5}$ (rad), also einen sehr kleiner Wert.

Tabelle 5.1 zeigt die Ergebnisse von zwei Simulationen bei $Ra = 2.5 \times 10^6$, also oberhalb der Rayleigh-Zahl, bei der Krishnamurti und Howard [45] den beschriebenen Übergang beobachtet haben. Nach der Simulation der ebenen Schicht wurde, mit der vorangegangenen Simulation als Anfangs-

bedingung, die Schicht um einen Winkel von $\beta = 10^{-4}$ gekippt. Obwohl β um den Faktor 20 größer gewählt wurde als im Experiment, konnte selbst nach einer Zeit von 30τ ($\tau = (2E_{kin})^{-1/2}$) keine Veränderung des Mean Flows festgestellt werden. Dieser unterliegt weiterhin starken Schwankungen und wechselt seine Richtung im Laufe der Zeit. Die in der Tabelle dargestellten Werte wurden durch Mittelung über die letzten 20 konvektiven Zeitskalen τ erhalten. Das bei der gekippten Zelle sogar ein etwas kleinerer Wert für den Mean Flow herauskommt soll nicht verwirren. Die Variationen des Mean Flows sind nämlich relativ langsam, zumindest im Vergleich mit der Nusselt-Zahl. Der Wert der Mean Flow Energie könnte bei Verwendung eines noch längeren Zeitintervalls genauer bestimmt werden. Um Entscheiden zu können, ob ein starker Mean Flow anspringt oder nicht, ist die verwendete Zeitdauer jedoch völlig ausreichend⁵.

Das das Verkippen um solch einen Winkel keinen Effekt zeigt, ist nicht verwunderlich. Eine Abschätzung der Größe der einzelnen Terme in der Mean Flow Gleichung (vgl. 3.48) ergibt für den obigen Fall ($Ra = 2.5 \times 10^6$, $Pr = 7$, $\beta = 10^{-4}$, $E_{kin} \approx 10^5$):

$$\begin{aligned} |\hat{x} \cdot \langle (\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v} \rangle_{x,y}| &\sim \langle v^2 \rangle_{x,y} \approx 2E_{kin} \approx 2 \times 10^5. \\ |RaPr \sin \beta \langle \theta \rangle_{x,y}| &\sim RaPr \sin \beta \cdot 0.5 \approx 9 \times 10^2. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Damit ist anzunehmen, dass der durch die Verkippung hervorgerufenen Term keine große Rolle spielt. Wohl erst deutlich größere Winkel können hier einen Effekt haben.

5.4.2 Seitenwände

Als letztes wurde noch untersucht, inwieweit der Einfluss von seitlichen Wänden für den experimentell beschriebenen Übergang zu einer einzelnen Zirkulationsströmung entscheidend ist. Man nimmt zwar an, dass seitliche Begrenzungen bei den hier verwendeten, relativ großen Aspektverhältnis-

⁵Im Normalfall wurden tatsächlich deutlich längere Mittelungsintervalle verwendet, um verlässlichere Mittelwerte zu erhalten. Typischerweise wurde über 50 bis 100 konvektive Zeitskalen τ gemittelt. Lediglich bei den höchsten Rayleigh-Zahlen, die in dieser Arbeit erreicht wurden, musste sich aufgrund der langen Rechenzeiten auf zirka 15 bis 30 konvektive Zeitskalen beschränkt werden.

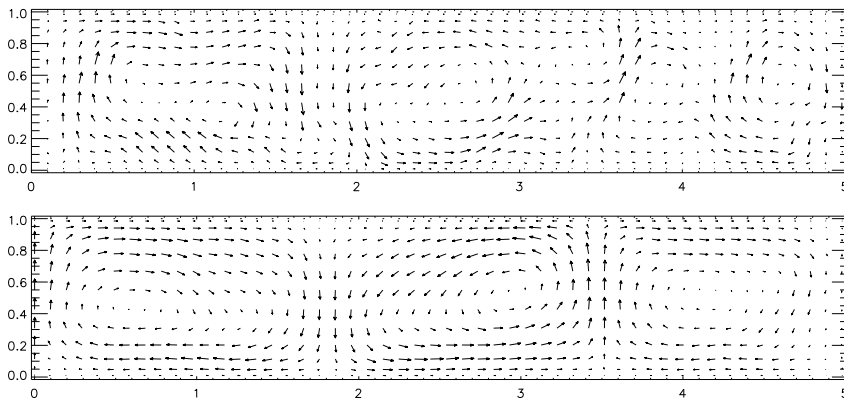


Abbildung 5.12: Darstellung der Geschwindigkeitsvektoren in der yz -Ebene ($x = 0$) für den Fall $Ra = 4 \times 10^6$, $Pr = 7$, $\Gamma_x = 10$, und $\Gamma_y = 5$. Gezeigt sind sowohl der Momentanzustand zu einem Zeitpunkt (oberes Bild) als auch die über 100 Zeitpunkte gemittelten Größen (unteres Bild). Aufgrund der verwendeten Spiegelsymmetrie ist nur eine Hälfte des Simulationsgebietes, nämlich von $x = 0$ bis $x = \Gamma_x/2$ dargestellt. Der zweite Teil ist bis auf eine Spiegelung identisch mit der gezeigten. Aus Gründen der Übersichtlichkeit ist nur an jedem fünften Gitterpunkt des Verfahrens ein Geschwindigkeitsvektor dargestellt.

sen keine allzu wichtige Rolle spielen, trotzdem kann es nicht schaden, einige Tests dazu durchzuführen. In Kapitel 3.6.2 ist erklärt, wie man im verwendeten Spektralverfahren Seitenwände durch Einführung einer Spiegelsymmetrie realisieren kann. Damit erhält man allerdings keine sehr realistischen Wände, da nur die Geschwindigkeitskomponente senkrecht auf der Wand verschwindet. Die wichtigste Eigenschaft von Seitenwänden erfüllen sie aber, sie sind undurchlässig für das Fluid und begrenzen damit die Strömung horizontal.

Bei den hierzu durchgeführten Simulationen wurde eine Prandtl-Zahl von $Pr = 7$ und Aspektverhältnisse von $\Gamma_x = 10$, $\Gamma_y = 5$ verwendet. Es konnte in keinem Fall ein Übergang hin zu einer einzelnen Zirkulationsströmung beobachtet werden. Abbildung 5.12 zeigt es Beispiel für $Ra = 4 \times 10^6$. Die Rayleigh-Zahl ist hier deutlich höher als der Wert, bei dem Krishnamurti und Howard [45] den beschriebenen Übergang beobachtet haben. Trotzdem sind keine Anzeichen für eine Schwächung oder gar Auflösung der Rollenstruktur zu erkennen. Tatsächlich werden die Rollen sogar durch die Wände stabilisiert, da sie ihre Beweglichkeit einschränken.

Die Rollen können zum Beispiel nicht schräg zu den Wänden stehen. In gezeigten Fall ordnen sie sich entlang der Seitenwände an.⁶

5.5 Vergleich mit Simulationen ohne Mean Flow

In allen durchgeführten Simulationen von laminarer und turbulenter Konvektion spielten Mean Flows eine eher untergeordnete Rolle, dies hat die vorangegangene Diskussion gezeigt. Bei sehr großen Aspektverhältnissen ist zudem zu erwarten, dass der Mean Flow ganz verschwindet. Auch in Experimenten spielt er im Allgemeinen keine Rolle (vgl. Diskussion in Kapitel 5.1). Es ist daher nur legitim zu fragen, ob die Mean Flow Komponente in einer Simulation auch komplett vernachlässigt werden darf, beziehungsweise welche Unterschiede sich durch deren Vernachlässigung ergeben. Einige Vergleiche von Simulationen mit und ohne Berücksichtigung des Mean Flows werden im Folgenden vorgestellt.

Einfluss auf integrale Größen – kinetische Energie, Nusselt-Zahl

In Tabelle 5.2 sind Ergebnisse von Simulationen bei drei verschiedenen Parameter-Kombinationen aufgelistet. Die Beispiele wurden relativ zufällig ausgewählt und sich repräsentativ für alle durchgeführten Simulationen, wie die in Anhang A dokumentierten Ergebnisse zeigen.

Der ersten Fall ist $Ra = 8000$, $Pr = 0.7$, $\Gamma = 10$, bei dem so genannte „traveling wave“ Konvektion zu beobachten war. Die beiden Simulationen, einmal ohne und einmal mit Mean Flow, wurden dabei völlig unabhängig voneinander durchgeführt. Die Simulationen wurden jeweils mit einem ruhenden Fluid mit kleinen, zufälligen Temperaturfluktuationen als Anfangsbedingung gestartet. Das Ergebnis war in beiden Fällen eine kaum zu unterscheidende Strömung, was sich auch in den nahezu identischen Werten für die kinetischen Energien und die Nusselt-Zahl widerspiegelt. Eine Größe, nämlich die Periodendauer τ_w der auftretenden Welle, zeigt jedoch einen signifikanten Unterschied. Im Fall ohne Mean Flow ist τ_w um etwa 10 Prozent größer. Diese Diskrepanz ist jedoch leicht zu verstehen.

⁶In Experimenten mit realen Seitenwänden würde man erwarten, dass die Rollenstrukturen sich eher orthogonal zur Wand ausrichten, um die Reibung an der Wand, die in diesen Simulationen nicht berücksichtigt ist, zu reduzieren.

$$Ra = 8000, Pr = 0.7, \Gamma = 10; E_{mf}/E_{kin} \approx 7.7 \times 10^{-4}$$

	E_{kin}	E_{pol}	E_{tor}	Nu	τ_w
mit Mean Flow	125.1	101.2	23.74	2.1728	0.3044
ohne Mean Flow	125.5	101.7	23.80	2.1756	0.3342

$$Ra = 10^6, Pr = 7, \Gamma = 10; E_{mf}/E_{kin} \approx 5 \times 10^{-4}$$

	E_{kin}	E_{pol}	E_{tor}	Nu
mit Mean Flow	3.80×10^4	3.11×10^4	6.87×10^3	8.43
ohne Mean Flow	3.78×10^4	3.11×10^4	6.75×10^3	8.43

$$Ra = 10^7, Pr = 30, \Gamma = 10; E_{mf}/E_{kin} \approx 3.5 \times 10^{-4}$$

	E_{kin}	E_{pol}	E_{tor}	Nu
mit Mean Flow	5.43×10^5	4.64×10^5	7.93×10^4	16.46
ohne Mean Flow	5.46×10^5	4.70×10^5	7.60×10^4	16.45

Tabelle 5.2: Einige Ergebnisse von Simulationen mit und ohne Einbeziehung der Mean Flow Komponente. Die Größen E_{kin} , E_{pol} und E_{tor} bezeichnen dabei die kinetische Energie der Strömung und deren Poloidal- und Toroidalanteile, jeweils gemittelt über Ort und Zeit. Nu ist die Nusselt-Zahl (vgl. Kapitel 6). Die Periodendauer τ_w wird im Text näher erläutert. Für jeden Fall ist auch das Verhältnis zwischen der Energie im Mean Flow E_{mf} und der Gesamtenergie E_{kin} angegeben.

Wie in Kapitel 5.2 zu sehen war, schreitet die Welle bei der Simulation mit Mean Flow mit einer Geschwindigkeit von zirka 11 (in dimensionslosen Einheiten) voran, wobei der Mean Flow davon etwa 0.8, d.h. nicht ganz 10 Prozent, ausmacht. Durch Wegfall des Mean Flows wird die Welle etwa um diesen Faktor langsamer.

Bei den beiden turbulente Beispielen in Tabelle 5.2 wurden die Rechnungen aufgrund der relativ langen Rechenzeiten anders durchgeführt. Dabei erfolgte zuerst die Simulation ohne Berücksichtigung der Mean Flow Komponente. Deren Endzustand wurde dann als Anfangsbedingung für die Simulation mit Mean Flow verwendet, wobei entsprechend auftretende Transienten abgewartet werden mussten. Die Ergebnisse zeigen nur kleine Unterschiede. Insbesondere der Wärmetransport durch die Schicht, ausgedrückt durch die Nusselt-Zahl Nu (siehe Kapitel 6), bleibt unverändert, schließlich ist der Mean Flow eine rein horizontale Strömungskomponente und kann daher keine Wärme in Vertikalrichtung transportieren.

Einfluss auf großskalige Strukturen

In Kapitel 4 wurde die Organisation der Strömung auf den größten horizontalen Längenskalen vorgestellt. Dabei konnten meist rollen- oder zellenartige Strukturen identifiziert werden. Ein Vergleich mit Simulationen ohne Mean Flow zeigte hier keine signifikanten Unterschiede, weder in der mittleren Wellenlänge dieser Strukturen noch in deren Dynamik in der Zeit.

Fazit

Sämtliche Vergleiche, nicht nur die hier vorgestellten, haben ergeben, dass es durchaus legitim ist, insbesondere bei in turbulenten Fällen, Simulationen auch ohne Berücksichtigung der Mean Flow Komponente durchzuführen. Bis auf kleinere Unterschiede bei laminaren Strömungen waren keine signifikanten Veränderungen feststellbar.

6

Nusselt- und Reynolds-Zahlen

6.1 Die Nusselt-Zahl

Eine Studie über turbulente Konvektionsströmungen wäre nicht vollständig ohne eine Untersuchung des Wärmetransports durch die Fluidschicht. Aufgrund der Konvektionsbewegungen kann das Fluid nämlich deutlich mehr Wärme von der unteren Heizplatte zur oberen Kühlplatte transportieren, als durch Wärmeleitung allein. Die Nusselt-Zahl Nu , ein dimensionsloses Maß für den diesen vertikalen Wärmetransport, ist eines der zentralen Kenngrößen einer Konvektionsströmung. Die Messung von Nu und insbesondere die Bestimmung ihrer Abhängigkeit von der Rayleigh-Zahl steht daher auch im Mittelpunkt vieler Experimente. Entsprechend gibt es dazu auch eine Vielzahl an theoretischen Abhandlungen, die mehr oder weniger erfolgreich das Skalierungsverhalten von Nu als Funktion von Ra und Pr beschreiben.

Definition

Bevor nun einige Ergebnisse vorgestellt werden, soll die Nusselt-Zahl explizit definiert werden. Dazu betrachten wir den horizontalen Mittelwert der Temperaturgleichung 2.3 in dimensionsloser Schreibweise:

$$\partial_t \langle T(x, y, z) \rangle_{x,y} = -\partial_z \left\{ \langle v_z(x, y, z) T(x, y, z) \rangle_{x,y} - \partial_z \langle T(x, y, z) \rangle_{x,y} \right\}, \quad (6.1)$$

wobei wie bisher mit $\langle \dots \rangle_{x,y}$ der Mittelwert über horizontale Ebenen gekennzeichnet ist. Bis auf die Wärmekapazität des Fluides entspricht der

in geschweiften Klammern stehende Ausdruck der horizontal gemittelten, vertikalen Wärmestromdichte. Für den statischen Fall ohne Konvektionsbewegungen ergibt dieser Ausdruck gerade eins, da \vec{v} dann null und $\partial_z T_s = -1$ ist. Das Verhältnis zwischen den Wärmestromdichten für ein konvektierendes und ein ruhendes Fluid ist daher nichts anderes als:

$$Nu(z) = \langle v_z(x, y, z)T(x, y, z) \rangle_{x,y} - \partial_z \langle T(x, y, z) \rangle_{x,y}. \quad (6.2)$$

Zu jedem Zeitpunkt kann $Nu(z)$ für verschiedene Höhen z unterschiedlich sein. Im zeitlichen Mittel wird jedoch durch jede Horizontalebene gleich viel Wärme transportiert. Es kann schließlich keine Wärme zu den Seiten verloren gehen. Es ist also:

$$Nu = \langle Nu(z) \rangle_t \neq f(z). \quad (6.3)$$

Betrachtet man Zeitreihen der Nusselt-Zahl, so stellt man fest, dass die Fluktuationen von Nu mit der Zeit in den verschiedenen Ebenen unterschiedlich ist. In der Nähe der Wand, wo Wärme im Wesentlichen durch Wärmeleitung transportiert wird, sind die zeitlichen Variationen am geringsten. Im Inneren erfolgt der Transport zum größten Teil durch turbulente Plumes (vgl. Kapitel 4.2.1). In der Mittelebene zeigt Nu daher besonders starke Schwankungen in der Zeit. Bei den im Späteren vorgestellten Ergebnissen handelt es sich immer um zeitliche Mittelwerte der Nusselt-Zahl, die wie alle statistischen Größen durch Mittelwertbildung über viele konvektive Zeitskalen τ_r (vgl. Kapitel 3.5) bestimmt worden sind.

Experimente und Theorie

Die Experimentelle Untersuchung von Konvektionsströmungen hat eine sehr lange Tradition und dementsprechend auch die Messungen von Nu . Für einen recht umfangreichen Überblick über verschiedene Experimente und Theorien, von vor über 80 Jahren bis in die nahe Vergangenheit, sei auf [33] verwiesen. Hier sollen nur kurz einige typische Ergebnisse aus Experimenten und einige Theorien erwähnt werden.

Es zeigte sich, dass bei den meisten Experimenten in turbulenter Konvektion die Rayleigh-Zahl Abhängigkeit mehr oder weniger gut durch Po-

tenzgesetze beschrieben werden kann, d.h.:

$$Nu \sim Ra^\gamma, \quad (6.4)$$

mit einem gewissen Exponent γ . Die berichteten Exponenten variieren allerdings, je nachdem welche Prandtl-Zahl und welcher Rayleigh-Zahl Bereich untersucht wurde. So sind Werte von $\gamma = 1/4$ bis hoch zu $\gamma = 1/3$ gemessen worden. Sehr typisch sind jedoch Werte um $2/7$. Die Modelle von [20] und [59] haben gerade diesen Exponenten als Ergebnis. Die zur Zeit erfolgreichste Theorie ist wohl die von Grossmann und Lohse [33]. In ihr werden verschiedene Regime identifiziert, die verschiedene Skalierungseigenschaften besitzen, je nachdem, ob die Temperatur- oder die Geschwindigkeitsgrenzschicht dicker ist, und ob die thermische und kinetische Dissipation hauptsächlich im Inneren der Fluidschicht oder in den Grenzschichten stattfindet.

Ergebnisse dieser Arbeit

In Abbildung 6.1 sind die Ergebnisse aus den durchgeführten Simulationen bei großem Aspektverhältnis $\Gamma = 10$ und den $\Gamma_x = 2, \Gamma_y = 1$ Simulationen dargestellt. Es ergibt sich, dass die beobachteten Exponenten recht nah bei $2/7$ liegen. Fits¹ ergeben die folgenden Abhängigkeiten:

$$\begin{aligned} Pr = 0.7, \Gamma = 10 : & \quad Nu \approx 0.175 Ra^{0.278}, \\ Pr = 7, \Gamma_x = 2, \Gamma_y = 1 : & \quad Nu \approx 0.205 Ra^{0.275}, \\ Pr = 7, \Gamma = 10 : & \quad Nu \approx 0.152 Ra^{0.290}, \\ Pr = 30, \Gamma = 10 : & \quad Nu \approx 0.172 Ra^{0.283}, \\ Pr = 60, \Gamma = 10 : & \quad Nu \approx 0.188 Ra^{0.277}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

¹Hierbei sind jeweils nur die Werte bei den höchsten Rayleigh-Zahlen einbezogen worden, bei deren die Strömung auch chaotisch/turbulent ist. Dabei war ein beachtenswerter Unterschied zwischen den Aspektverhältnissen zu beobachten. Bei den Simulationen mit $\Gamma_x = 2, \Gamma_y = 1$ waren im Vergleich zu $\Gamma = 10$ deutlich höhere Rayleigh-Zahlen notwendig, damit sich turbulente Strömungen ausbildeten. So sind bei $Pr = 7$ und dem kleinen Aspektverhältnis bis einschließlich $Ra = 3.2 \times 10^4$ nur rein stationäre Strömungen beobachtet worden. Die Simulation bei $\Gamma = 10$ und $Ra = 3.2 \times 10^4$ zeigte jedoch schon eine chaotische Zeitabhängigkeit. Die Nusselt-Zahl folgt dementsprechend bei kleinen Aspektverhältnissen erst bei etwas höheren Rayleigh-Zahlen näherungsweise einem Potenzgesetz [64, 42].

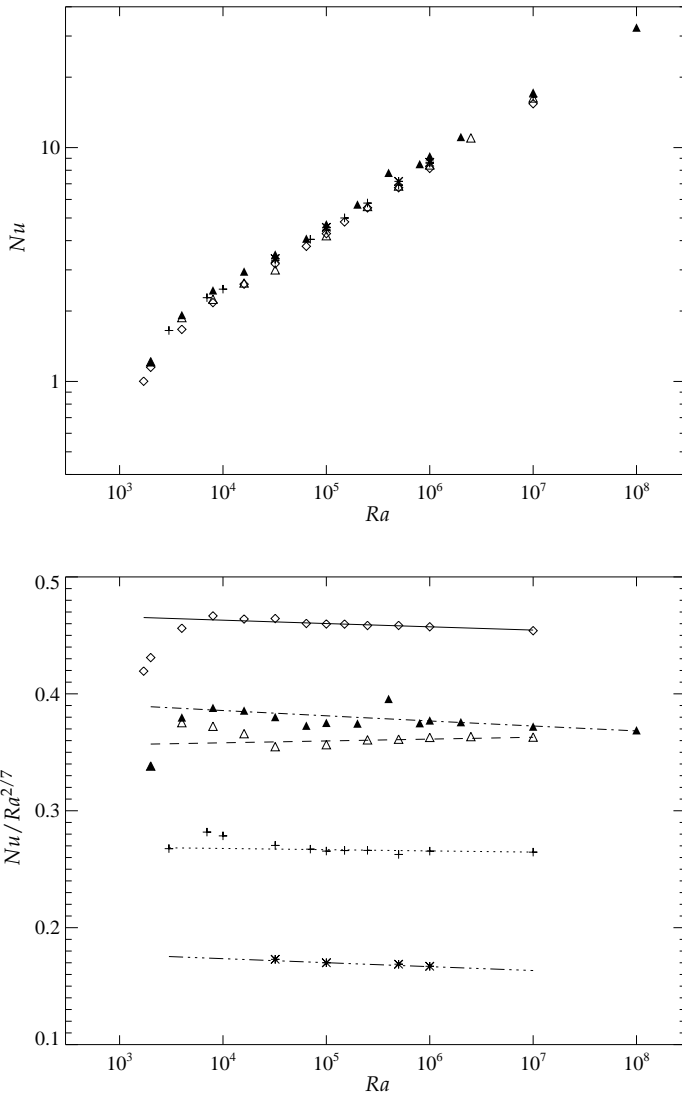


Abbildung 6.1: Variation der Nusselt-Zahl Nu mit der Rayleigh-Zahl Ra bei Prandtl-Zahlen von $Pr = 0.7$ (\diamond), $Pr = 7$ (Δ), $Pr = 30$ (+) und $Pr = 60$ (*) jeweils bei Aspektverhältnis $\Gamma = 10$ und bei $Pr = 7$ und kleinem Aspektverhältnis $\Gamma_x = 2$, $\Gamma_y = 1$ (\blacktriangle) in einer log/log-Darstellung (oben) und einer mit $Ra^{2/7}$ kompensierten Darstellung (unten). Um die Daten bei verschiedenen Prandtl-Zahlen besser unterscheiden zu können, wurden im unteren Diagramm die Werte einiger Prandtl-Zahlen nach oben verschoben: bei $Pr = 0.7$ um 0.3, bei $Pr = 7$ um 0.2 und bei $Pr = 30$ um 0.1.

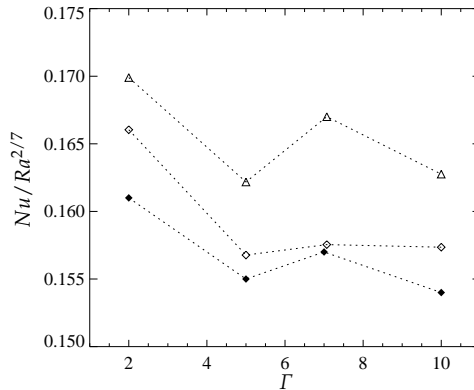


Abbildung 6.2: Variation der Nusselt-Zahl mit dem Aspektverhältnis bei $Pr = 0.7$ und $Ra = 10^6$ (◇) bzw. $Ra = 10^7$ (◆) und bei $Pr = 7$, $Ra = 10^6$ (△).

Da der durch die direkten numerischen Simulationen zugängliche Rayleigh-Zahl Bereich noch relativ klein, zumindest im Vergleich zu aktuelleren Experimenten², sollte man jedoch nicht allzu viel in die recht kleinen Unterschiede in den Exponenten hineindeuten. Das die obigen Resultate mit anderen Arbeiten kompatibel ist, zeigt das Ergebnis der Simulationen von [42] für $Pr = 0.7$ und einem ähnlichen Ra -Bereich: $Nu \approx 0.186 Ra^{0.276}$. Die kleine Diskrepanz im Vorfaktor ist vermutlich auf das unterschiedliche Aspektverhältnis zurückzuführen (hier: $\Gamma = 10$, dort: $\Gamma = 6$).

Noch zu erwähnen ist die in Abbildung 6.1 erkennbare Differenz in den Nusselt-Zahlen zwischen den zwei Simulationsreihen bei Prandtl-Zahl 7, die sich lediglich durch das verwendete Aspektverhältnis unterscheiden ($\Gamma = 10$ bzw. $\Gamma_x = 2$, $\Gamma_y = 1$). Der relativ große Unterschied in den Exponenten (vgl. Gl. 6.5) ist etwas erstaunlich. Dass die Nusselt-Zahl beim kleineren Aspektverhältnis etwas größer ist, ist jedoch bekannt und erwartet [64, 33]. Man kann sich das so vorstellen, dass bei kleinerem Γ die Auf- und Abströme näher beieinander liegen und daher tendenziell pro Fläche mehr Wärme konvektiert werden kann. Die Abhängigkeit von Γ ist jedoch nicht unbedingt immer monoton, wie Abbildung 6.2 zeigt.

²In Experimenten können inzwischen beeindruckend große Rayleigh-Zahlen erreicht werden. Beispiele sind $Ra = 10^{14}$ bei [5] oder gar $Ra = 10^{17}$ bei [49].

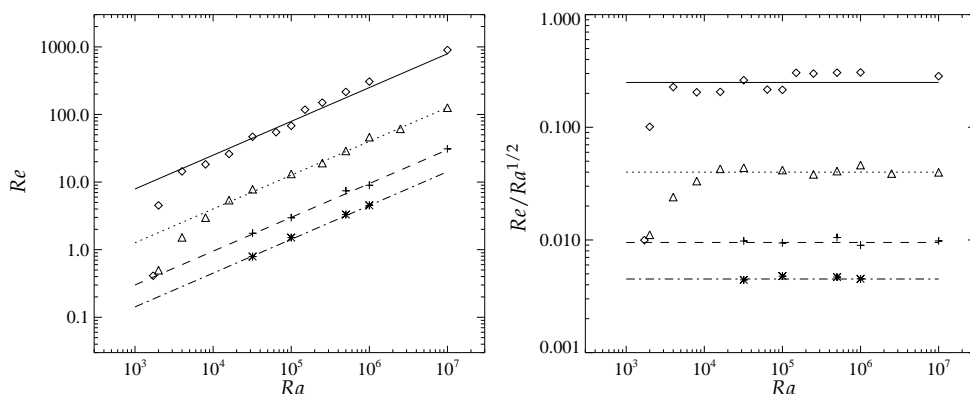


Abbildung 6.3: Ra -Abhängigkeit der Reynolds-Zahl Re bei Aspektverhältnis $\Gamma = 10$ und verschiedenen Prandtl-Zahlen. Die Symbole kennzeichnen $Pr = 0.7$ (\diamond), $Pr = 7$ (\triangle), $Pr = 30$ ($+$) und $Pr = 60$ ($*$). Die Geraden stellen Fitfunktionen dar: $2.5 \times 10^{-1} Ra^{1/2}$ (durchgezogene Linie), $4 \times 10^{-2} Ra^{1/2}$ (gepunktete Linie), $9.5 \times 10^{-3} Ra^{1/2}$ (gestrichelte Linie) und $4.5 \times 10^{-3} Ra^{1/2}$ (punkt-gestrichelte Linie).

6.2 Die Reynolds-Zahl

Neben der Nusselt-Zahl ist man an einer weiteren dimensionslosen Größe interessiert, der Reynolds-Zahl Re . Sie ist bekannterweise ein Maß für das Verhältnis der Trägheitskräfte zu den viskosen Kräften, so dass im Allgemeinen laminare Strömungen durch kleine und turbulente Strömungen durch große Reynolds-Zahlen gekennzeichnet sind. Die Definition von Re ist³:

$$Re = \frac{UL}{Pr}, \quad (6.6)$$

wobei U eine charakteristische Geschwindigkeit und L eine charakteristische Längenskala des Systems ist. Im Folgenden ist als typische Länge die Dicke der Fluidschicht verwendet worden, d.h. $L = 1$. Als eine charakteristische Geschwindigkeit der Roll- bzw. Zellstrukturen in der Konvektion kann zum Beispiel das Maximum der Quadratwurzel der zeit- und ebenengemittelten Schwankungsquadrate der Horizontalgeschwindigkeit

³ U und L sind hierbei in dimensionslosen Einheiten (vgl. Kapitel 2) gegeben. Mit dimensionsbehafteten Geschwindigkeits- und Längenskalen u und l lautet die Reynolds-Zahl dann: $Re = ul/\nu$.

$v_h = (v_x^2 + v_y^2)^{1/2}$ benutzt werden [13], also:

$$U = \max_z \{v_{h,rms}(z)\} \quad (6.7)$$

mit

$$v_{h,rms}(z) = \sqrt{\langle (v_h - \langle v_h \rangle_{x,y,t})^2 \rangle_{x,y,t}} \quad (6.8)$$

Die so berechneten Reynolds-Zahlen sind für die Simulationen bei $\Gamma = 10$ in Abbildung 6.3 dargestellt. Die Werte befinden sich auch in den Tabellen im Anhang A. In allen gezeigten Fällen kann die Rayleigh-Zahl Abhängigkeit von Re näherungsweise durch ein Potenzgesetz mit einem Exponenten von 0.5 beschrieben werden, zumindest für Rayleigh-Zahlen oberhalb von zirka 10^4 . Verschiedene Experimente kamen auf sehr ähnliche Ergebnisse: zum Beispiel ein Exponent von 0.49 bei $Pr \approx 1$ [20], oder 0.50 bei $Pr \approx 7$ [65]. Die Vorhersage der Theorie [33] für den betrachteten Parameterbereich ist ebenfalls $Re \sim Ra^{1/2}$.

6.3 Grenzschichten

Wie dies schon öfter in dieser Arbeit erwähnt wurde, bilden sich an den oberen und unteren Wänden Grenzschichten aus. Der Grund dafür ist, dass die Temperatur- und die Geschwindigkeitsfelder an den Wänden die festen Randbedingungen erfüllen müssen. So muss das Fluid an den Heiz- und Kühlplatten die vorgegebenen Plattentemperaturen T_1 und T_2 annehmen und die Geschwindigkeit zu null absinken (vgl. Gl. 2.5). Der Übergang von den im Inneren der Schicht vorherrschenden Temperaturen und Geschwindigkeiten kann aufgrund der endlichen Diffusivitäten aber nicht abrupt, sondern nur auf einer endlichen Strecke erfolgen. Die Dicke der Grenzschichten von Temperaturfeld und Geschwindigkeitsfeld kann dabei durchaus unterschiedlich sein. Es ist klar, dass sie außerdem eng mit den Größen Nusselt-Zahl (im Fall des Temperaturfeldes) und Reynolds-Zahl (im Fall des Geschwindigkeitsfeld), die die auftretenden Temperaturen und Geschwindigkeiten charakterisieren, verknüpft sind.

Temperatur- und Geschwindigkeitsprofile

Im Folgenden werden einige vertikale Profile von Temperatur und Geschwindigkeit vorgestellt, in der die Veränderung der Grenzschichten mit Rayleigh- und Prandtl-Zahl beobachtet werden kann. Abbildungen 6.4 bis 6.6 zeigen für verschiedene Rayleigh- und Prandtl-Zahlen Zeitmittelwerte der horizontal gemittelte Temperatur ($\langle T \rangle_{x,y}$) der gemittelten Quadratwurzel aus den Schwankungsquadraten von Temperatur (T_{rms}), Vertikalgeschwindigkeit ($v_{z,rms}$) und Horizontalgeschwindigkeit ($v_{h,rms}$). Die RMS-Werte sind analog zu Gleichung 6.8 definiert. Bei allen gezeigten Fällen handelt es sich um turbulente Strömungen, so dass bereits ausgeprägte Temperatur- und Geschwindigkeitsgrenzschichten vorhanden sind.

Grenzschichtdicken

Beim Temperaturfeld ist zu beobachten, dass $\langle T \rangle_{x,y}$ im Inneren der Schicht über weite Bereiche nahezu konstant ist. Aufgrund der guten Durchmischung nimmt die Temperatur dort im Mittel den Wert $T_1 + T_2$, den Mittelwert der Plattentemperaturen an. Der Übergang zu den durch die Randbedingungen vorgegebenen Werten erfolgt in der Temperaturgrenzschicht, die mit zunehmender Rayleigh-Zahlen immer dünner wird. Deren Dicke kann auf verschiedene Weise definiert werden. Zum einen kann man an der Wandposition eine Tangente an das vertikale Profil der gemittelten Temperatur $\langle T \rangle_{x,y}$ legen. Der Abstand von der Wand bis zum Schnittpunkt der Tangente mit der Gerade $T = T_1 + T_2$ ist dann ein Maß für die Grenzschichtdicke. Da die Geschwindigkeit an der Wand verschwindet, ist die Steigung der Tangente durch die Nusselt-Zahl gegeben (vgl. Gl. 6.2), womit die in dieser Weise definierte Dicke der Temperaturgrenzschicht lautet:

$$\delta_T = \frac{1}{2Nu}. \quad (6.9)$$

Eine alternative Definition kann aus den RMS-Werten der Temperatur gewonnen werden, da am Rand der Grenzschicht die Variationen der Temperatur am größten sind (siehe Darstellung von T_{rms} in den Abbildungen 6.4 bis 6.6). Die Position des Maximums kann somit auch als Maß für Dicke der Grenzschicht verwendet werden. Es zeigt sich, da beide Definitionen

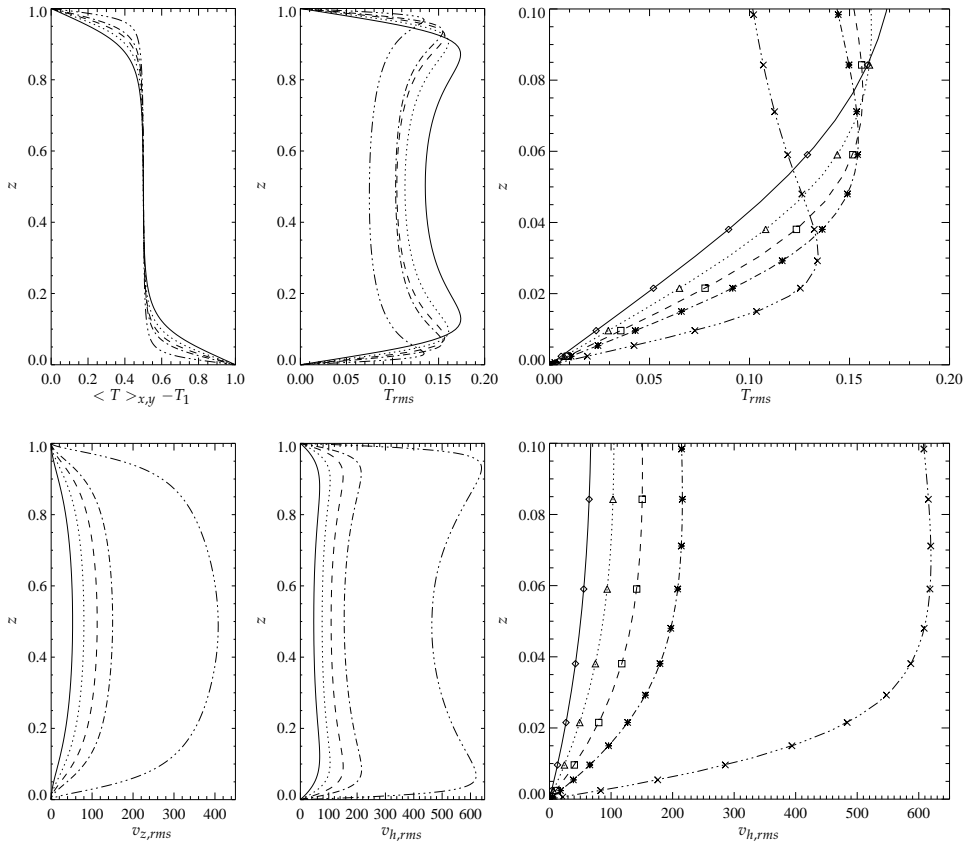


Abbildung 6.4: Vertikale Profile verschiedener im Text definierter Größen aus den Simulationen mit $Pr = 0.7$, $\Gamma = 10$. Die jeweiligen Rayleigh-Zahlen sind durch unterschiedliche Linien gekennzeichnet: $Ra = 10^5$ (durchgezogen), 2.5×10^5 (gepunktet), 5×10^5 (gestrichelt), 10^6 (punkt-gestrichelt) und 10^7 (punkt-punkt-gestrichelt). In den Vergrößerung des Randbereichs (rechte Spalte) sind durch verschiedenen Symbole jeweils die Stützstellen der Simulationen gekennzeichnet, um die adäquate Auflösung der Grenzschichten zu demonstrieren.

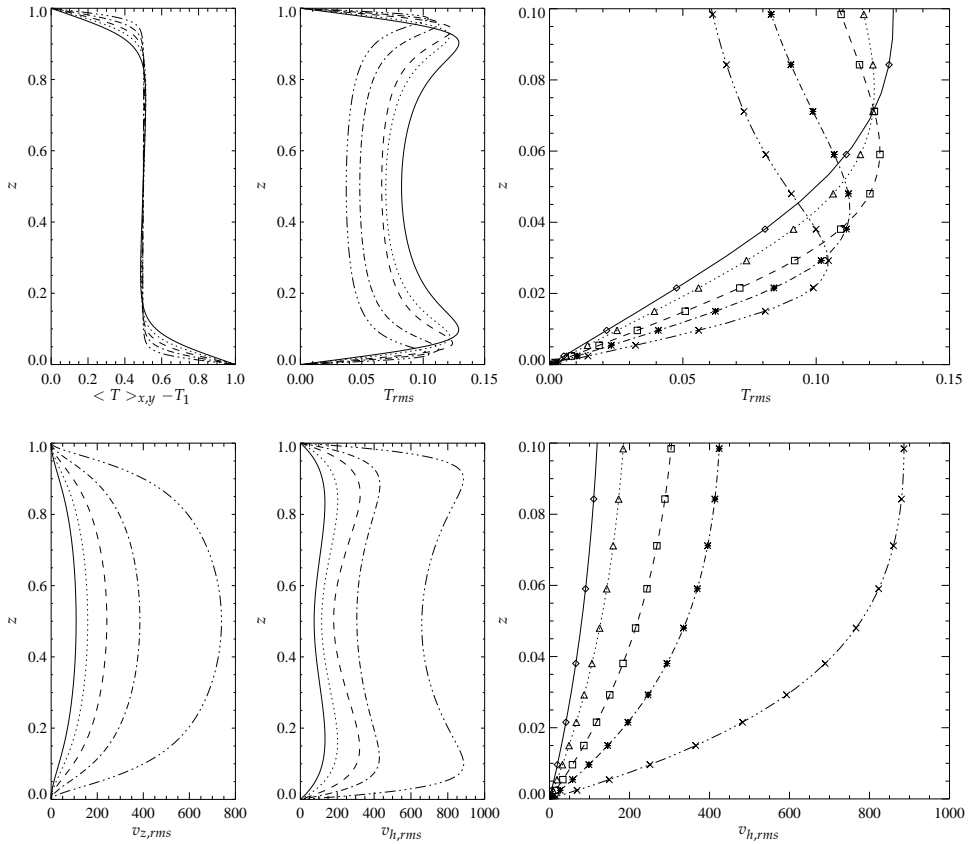


Abbildung 6.5: Analog zu Abbildung 6.4, jedoch für $Pr = 7$. Die einzelnen Linien bezeichnen $Ra = 2.5 \times 10^5$ (durchgezogen), 5×10^5 (gepunktet), 10^6 (gestrichelt), 2.5×10^6 (punkt-gestrichelt) und 10^7 (punkt-punkt-punkt-gestrichelt).

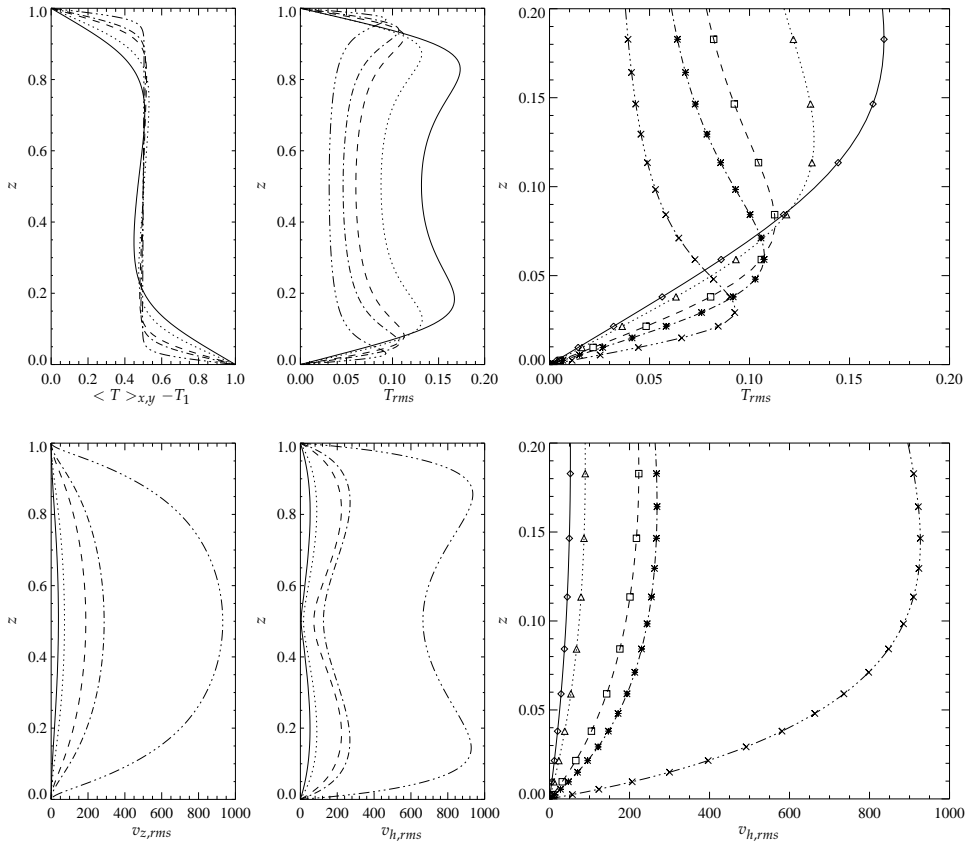


Abbildung 6.6: Analog zu Abbildung 6.4, jedoch für $Pr = 30$. Die Linien bezeichnen $Ra = 3.2 \times 10^4$ (durchgezogen), 10^5 (gepunktet), 5×10^5 (gestrichelt), 10^6 (punkt-gestrichelt) und 10^7 (punkt-punkt-punkt-gestrichelt).

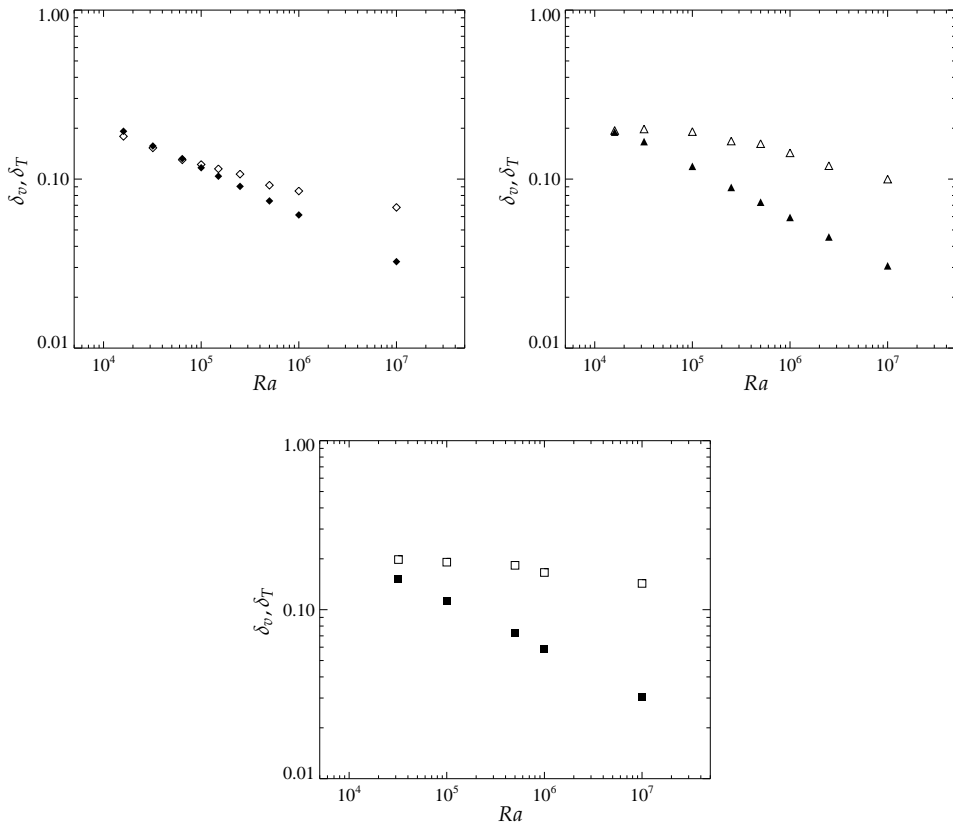


Abbildung 6.7: Veränderung der Dicke der thermischen Grenzschicht (gefüllte Symbole) und der Geschwindigkeitsgrenzschicht (offene Symbole) mit der Rayleigh-Zahl für drei verschiedene Prandtl-Zahlen: $Pr = 0.7$ (oben links), $Pr = 7$ (oben rechts) und $Pr = 30$ (unten). Das Aspektverhältnis beträgt in allen Fällen $\Gamma = 10$. Es sind nur Werte für Rayleigh-Zahlen ab 10^4 dargestellt, weil darunter Grenzschichten kaum ausgeprägt sind.

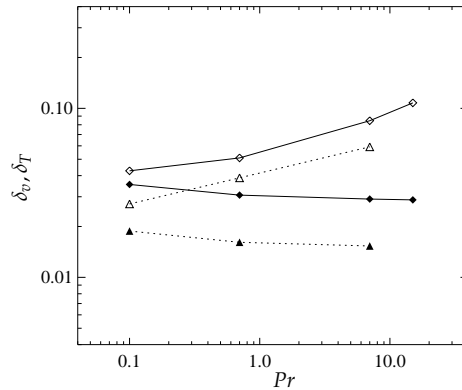


Abbildung 6.8: Grenzschichtdicken bei $Ra = 10^7$ (Diamanten) und $Ra = 10^8$ (Dreiecke) in den Simulationen mit kleinem Aspektverhältnis $\Gamma_x = 2$, $\Gamma_y = 1$. Die Werte für die Geschwindigkeitsgrenzschicht und die Temperaturgrenzschicht sind wieder durch offene bzw. gefüllte Symbole dargestellt.

für nicht zu kleine Rayleigh-Zahlen sehr ähnliche Ergebnisse liefern [37].

In Abbildung 6.7 sind die beobachteten Grenzschichtdicken für verschiedene Parameter aufgetragen, wobei für die Temperatur die Definition 6.9 verwendet wurde. Als Maß für die Geschwindigkeitsgrenzschicht (δ_v) wurde die Position des Maximums der Schwankungsquadrate der Horizontalgeschwindigkeit benutzt. Eine starke Abnahme der Grenzschichtdicken ist mit zunehmender Rayleigh-Zahl zu beobachten. In nahezu allen gezeigten Fällen bei den Prandtl-Zahlen von 0.7, 7 und 30 ist dabei $\delta_T < \delta_v$. Naiv hätte man angenommen, dass bei $Pr = 1$ beide Grenzschichten gleich groß sind, da dann die Diffusivitäten κ und ν identisch sind. Bei Prandtl-Zahlen kleiner als eins, d.h. $\kappa > \nu$, sollte man dann erwarten, dass die thermische Grenzschicht dicker als die Geschwindigkeitgrenzschicht ist. Wie Abbildung 6.8 zeigt, ist dies jedoch nicht exakt der Fall, die Tendenz stimmt allerdings.

Nach den obigen Ausführungen (vgl. Gl. 6.9) skaliert die Dicke der thermischen Grenzschicht mit der Nusselt-Zahl. Wie sieht es aber mit δ_v der Geschwindigkeitsgrenzschicht aus? Unter der einfachsten Annahme, dass die Rollen und Zellstrukturen die Platten so anströmen, dass eine Blasius-artige laminare Grenzschicht entsteht [33], so wäre eine Abhängigkeit der

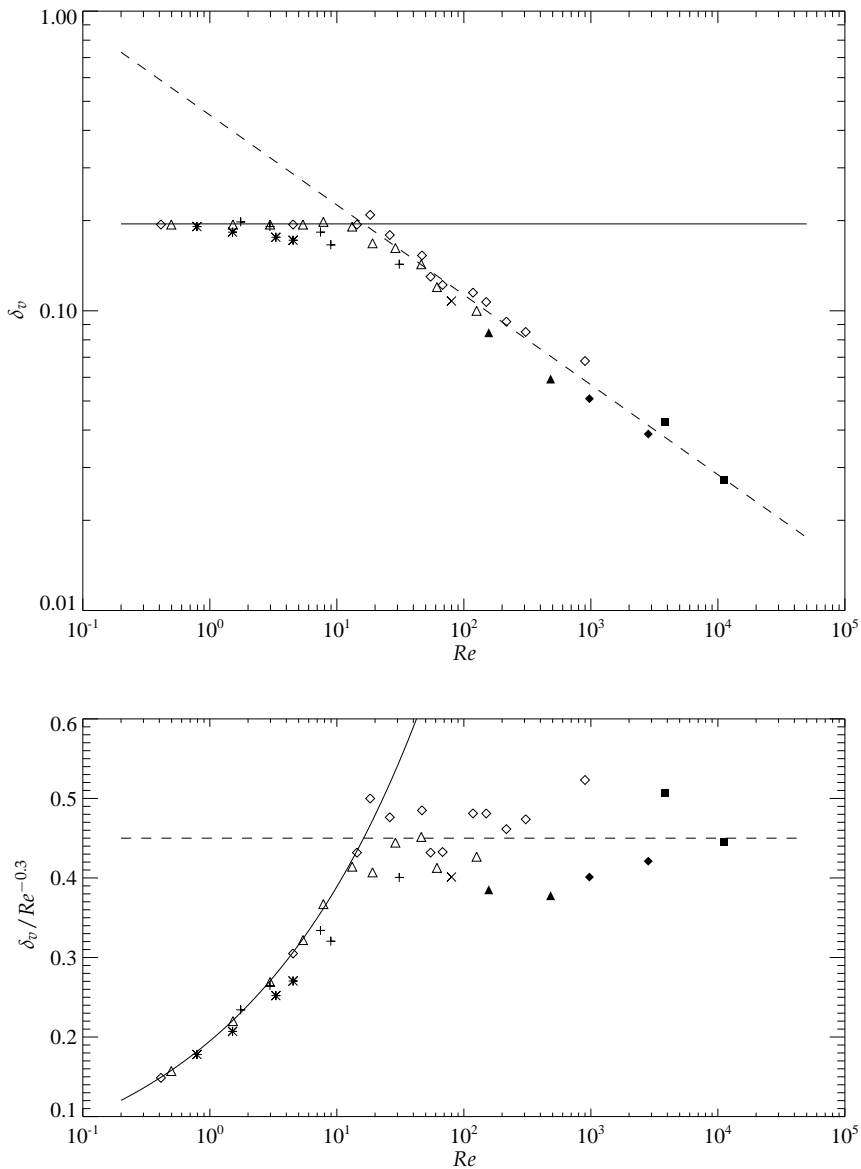


Abbildung 6.9: Dicke der Geschwindigkeitsgrenzschicht als Funktion der Reynolds-Zahl in einer log/log und einer mit $Re^{-0.3}$ kompensierten Darstellung. Die Symbole kennzeichnen Simulationen mit $Pr = 0.7$ (\diamond), $Pr = 7$ (\triangle), $Pr = 30$ (+) und $Pr = 60$ (*), jeweils bei Aspektverhältnis $\Gamma = 10$ und verschiedenen Rayleigh-Zahlen. Die restlichen Daten sind aus Simulationen mit $\Gamma_x = 2$, $\Gamma_y = 1$ und $Pr = 0.1$ (\blacksquare), $Pr = 0.7$ (\blacklozenge), $Pr = 7$ (\blacktriangle) und $Pr = 15$ (\times), jeweils bei $Ra = 10^7$ und $Ra = 10^8$. Die eingetragenen Kurven sind Fits zu den Daten: $\delta_v \approx 0.195$ (durchgezogene Linie) für kleine Re und $\delta_v \approx 0.45 Re^{-0.3}$ (gestrichelte Linie) für große Re .

Form

$$\delta_v \sim LRe^{-1/2} \quad (6.10)$$

zu erwarten [46, 33]. Abbildung 6.9 zeigt jedoch, dass die Grenzschichtdicke deutlich langsamer abnimmt und zwar etwa mit $\delta_v \approx 0.45Re^{-0.3}$. In einer anderen Arbeit ist sogar ein betragsmäßig noch kleinerer Exponent von -0.231 beobachtet worden [13]. Bei sehr kleinen Reynolds-Zahlen nimmt δ_v dagegen ein Maximum an, da die Grenzschicht wegen der endlichen Dicke der Fluidschicht nicht beliebig wachsen kann. Damit Gleichung 6.10 für eine laminare Grenzschicht Gültigkeit hat, müsste man korrekterweise in der Definition der Reynolds-Zahl (Gl. 6.6) wie auch in Gleichung 6.10 selbst für L ein Maß für die horizontale Ausdehnung der Anströmung verwenden (z.B. λ_{max} aus Kapitel 4.2.2) und nicht einfach die Schichthöhe. Die horizontale Längenskala ändert sich mit der Erhöhung von Ra jedoch nur gering, nicht mehr als um einen Faktor von zwei oder drei über den gesamten untersuchten Ra -Bereich (vgl. Kapitel 4), so dass sich am Skalenverhalten der Grenzschichtdicke mit Re kaum etwas ändert. Die Annahme einer laminar angeströmten Wand scheint daher etwas zu einfach zu sein.

Dissipation in den Grenzschichten

Eine Re -Abhängigkeit der Grenzschichtdicke nach Gleichung 6.10 ist eine der wichtigen Annahmen in der bereits erwähnten Theorie von Grossmann und Lohse [33]. Die Theorie ist in weiten Bereichen sehr erfolgreich in der Beschreibung von Reynolds- und Nusselt-Zahlen, obwohl diese Annahme zumindest im untersuchten Parameterbereich nicht sehr realitätsnah scheint. Wie ist das möglich? Um etwas Licht in die Sache zu bringen, soll hier kurz die Grundidee der Arbeit von Grossmann und Lohse vorgestellt werden. Zentral Größen in der Theorie sind die Dissipationsraten

$$\epsilon_v(\vec{r}, t) = Pr(\partial_i v_j(\vec{r}, t))^2 \quad (6.11)$$

und

$$\epsilon_\theta(\vec{r}, t) = (\partial_i \theta(\vec{r}, t))^2 \quad (6.12)$$

von Geschwindigkeits- und Temperaturfeld. Die Raum- und Zeitmittelwerte $\bar{\epsilon}_v = \langle \epsilon_v(\vec{r}, t) \rangle_{\vec{r}, t}$ und $\bar{\epsilon}_\theta = \langle \epsilon_\theta(\vec{r}, t) \rangle_{\vec{r}, t}$ erfüllen dabei die exakten Relationen

$$\bar{\epsilon}_v = PrRa(Nu - 1) \quad (6.13)$$

und

$$\bar{\epsilon}_\theta = Nu \quad (6.14)$$

(siehe zum Beispiel [59]). Kann man die Ra - und Pr -Abhängigkeit der Dissipationsraten auf irgendeine Weise abschätzen, so erhält man mit den Gleichungen 6.13 und 6.14 das Skalierungsverhalten von Nusselt-Zahl Nu und Reynolds-Zahl Re . Die Idee ist nun, die Dissipation in zwei Anteile, den der Grenzschichten und des Inneren der Fluidschicht, zu zerlegen. Das Skalierungsverhalten der einzelnen Anteile ist nämlich leichter abschätzbar. In gewissen Parameterbereichen wird die Dissipation entweder vom Beitrag der Grenzschichten oder dem Hauptteil des Fluids dominiert und kann dann durch den einzelnen Anteil approximiert werden. Für Details der verschiedenen Annahmen und der Ergebnisse sei auf Veröffentlichung [33] verwiesen. Hier soll nur die Abschätzung der kinetischen Dissipation in der Grenzschicht ($\bar{\epsilon}_{v,bl}$) betrachtet werden. Dabei wird nämlich von Grossmann und Lohse [33] die Gleichung 6.10 für die Dicke der Grenzschicht verwendet. Sie setzen analog zu [22] folgende Relation an:

$$\bar{\epsilon}_{v,bl} = \left\langle Pr (\partial_i v_j(\vec{r}, t))^2 \right\rangle_{\vec{r}, t} \sim Pr \left(\frac{U}{\delta_v} \right)^2 \frac{\delta_v}{L}. \quad (6.15)$$

U/δ_v steht für die Größe der Geschwindigkeitsgradienten in der Grenzschicht und δ_v/L für den Anteil der Grenzschichten am Gesamtvolumen des Fluids. Mit Gleichung 6.10 für die Grenzschichtdicke δ_v ergibt sich dann

$$\bar{\epsilon}_{v,bl} \sim Re^{5/2} Pr^3. \quad (6.16)$$

Die Überprüfung dieser Relation ist in Experimenten eher schwierig. In numerischen Simulationen, in denen man schließlich Kenntnis über das gesamte Geschwindigkeitsfeld hat, kann die Dissipation dagegen leicht bestimmt werden. Der Anteil der Grenzschichten $\bar{\epsilon}_{v,bl}$ ergibt sich dann einfach durch Integration der Dissipationsrate ϵ_v über die Grenzschichten und Mit-

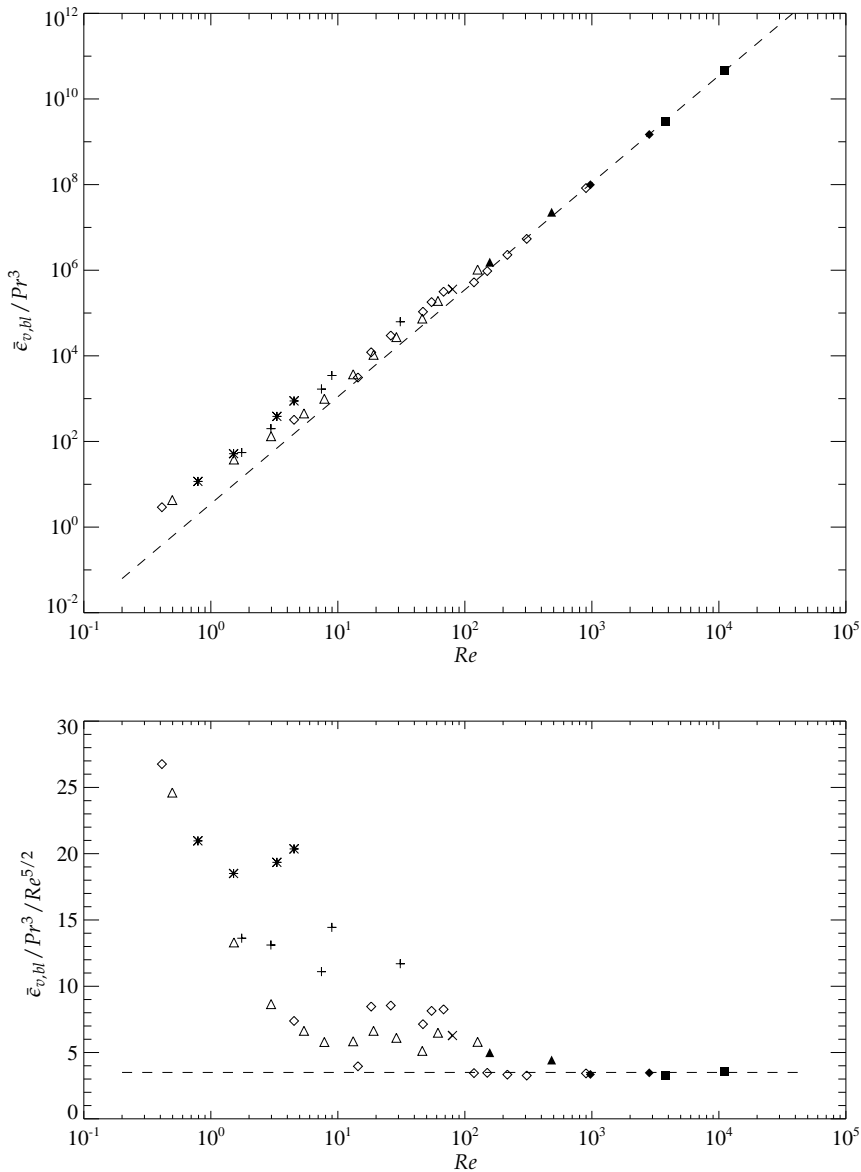


Abbildung 6.10: Re -Abhängigkeit der Dissipation in der Grenzschicht für alle auch in Abbildung 6.9 dargestellten Simulationen. Die Werte sind jeweils durch Pr^3 dividiert worden, um die nach Gleichung 6.16 zu erwartende Pr -Abhängigkeit zu kompensieren. Die Symbole kennzeichnen wie in Abbildung 6.9 Simulationen mit $Pr = 0.7$ (\diamond), $Pr = 7$ (\triangle), $Pr = 30$ ($+$) und $Pr = 60$ ($*$), bei Aspektverhältnis $\Gamma = 10$ und verschiedenen Rayleigh-Zahlen, sowie Simulationen mit $\Gamma_x = 2$, $\Gamma_y = 1$ und $Pr = 0.1$ (\blacksquare), $Pr = 0.7$ (\blacklozenge), $Pr = 7$ (\blacktriangle) und $Pr = 15$ (\times), jeweils bei $Ra = 10^7$ und $Ra = 10^8$. Die gestrichelte Linie steht für die Funktion $3.5 Re^{5/2}$.

telung über die restlichen Koordinaten x und y und die Zeit:

$$\bar{\epsilon}_{v,bl} = \left\langle \int_0^{\delta_v} \epsilon_v(\vec{r}, t) dz + \int_{1-\delta_v}^1 \epsilon_v(\vec{r}, t) dz \right\rangle_{x,y,t}. \quad (6.17)$$

Die Ergebnisse sind in Abbildung 6.10 dargestellt. Es zeigt sich, dass bei kleinen Re die Abweichungen von Gleichung 6.16 recht groß sind, die Dissipation nimmt hier deutlich langsamer zu als mit $Re^{5/2}$. Bei größeren Werten von Re , etwa ab $Re = 10^2$, ist das Potenzgesetz 6.16 jedoch erstaunlich gut erfüllt. Vor dem Hintergrund, dass die beobachtete Grenzschichtdicke für keine der untersuchten Reynolds-Zahlen wie $Re^{-1/2}$ skaliert, ist dieses Ergebnis relativ bemerkenswert.

7

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde sich mit thermischen Konvektionsströmungen beschäftigt, die in vielen geo- und astrophysikalischen Problemen, aber auch in technischen Anwendungen eine wichtige Rolle spielen. Da man im Allgemeinen mit turbulenten Strömungen konfrontiert ist, ist man im Besonderen auf Experimente und wie hier durchgeführt auf numerische Simulationen angewiesen.

Um die grundlegenden Eigenschaften dieser turbulenten Strömungen zu studieren, wurde sich in der vorliegenden Arbeit mit der direkten numerischen Simulation von Konvektion in einer sehr einfachen Geometrie, einer ebenen, unendlich ausgedehnten und von unten beheizten Fluidschicht zwischen zwei festen Platten, befasst. Aufbauend auf den Vorarbeiten in der Diplomarbeit [37] wurde ein vollständig parallelisiertes Simulationprogramm zur numerischen Lösung der Boussinesq-Gleichungen erstellt, das sehr effektiv auf verschiedenen Parallelrechnern eingesetzt werden konnte. Darin wurde ein pseudo-spektrales Verfahren implementiert, bei dem die Ortsdiskretisierung mittels Fourier-Moden in den Horizontalrichtungen und einem Chebyshev-Verfahren für die Vertikalrichtung erfolgt.

Mit diesem Verfahren war es möglich, Simulationen mit großen Aspektverhältnissen von typischerweise $\Gamma = 10$ durchzuführen und dabei gleichzeitig auch große Rayleigh-Zahlen von bis zu $Ra = 10^7$ zu erreichen. Im Gegensatz dazu waren bisherige Simulationen entweder auf zum Teil deutlich kleinere Aspektverhältnisse beschränkt¹, oder, falls große Γ verwen-

¹Einige aktuelle Beispiele sind [43] mit $\Gamma = 4$ und Rayleigh-Zahlen bis $Ra = 10^7$, $\Gamma = 2$ und $Ra = 10^6$ bei [13] oder $\Gamma = 1/2$ und Rayleigh-Zahlen bis $Ra = 2 \times 10^{11}$ bei [63].

det wurden, auf deutlich kleinere Rayleigh-Zahlen (siehe zum Beispiel [52, 11]). Groß ist ein Aspektverhältnis in diesem Zusammenhang dann, wenn es den in der Strömung auftretenden großskaligen, meist rollen- oder zellenartigen Strukturen genügend Raum bietet und damit eine weitere Erhöhung von Γ keine signifikanten Veränderungen mehr mitsichbringt. Wie die vorliegenden Simulationen zeigen, ist dies in den meisten Fällen beim Aspektverhältnis $\Gamma = 10$ der Fall. Lediglich bei mittleren Prandtl-Zahlen, im Speziellen $Pr = 7$, musste man feststellen, dass hier noch größere Aspektverhältnisse wünschenswert wären.

Eines der zentralen Ergebnisse dieser Arbeit ist die Tatsache, das in allen turbulenten Fällen eine Skalentrennung von kleinskaligen, sehr turbulenten Strukturen und den vergleichsweise langsam zeitabhängigen Strukturen bei großen Wellenlängen festzustellen war. Diese Separation zeigte sich insbesondere in Ortsspektren des advektiven Wärmetransportes durch eine spektrale Lücke. Mit wachsender Rayleigh-Zahl tritt die Trennung immer mehr hervor, da sich die Größe der Kleinstrukturen, wie zum Beispiel der Plumes, verringert, die Wellenlänge der Strukturen auf großen Skalen jedoch eher steigt. Großskalige, im Allgemeinen rollen- und zellenartige Strukturen konnten dabei kontinuierlich bis zu den höchsten Rayleigh-Zahlen von $Ra = 10^7$ beobachtet werden, also in einem Parameter-Bereich, der gemeinhin als turbulent angesehen wird und in dem bereits auch einige Eigenschaften von so genannter „harter“ Turbulenz aufzutreffen sind [42]. Die Strukturen sind als Fortführung der in laminaren Strömungen bekannten Konvektionsrollen und Konvektionszellen zu interpretieren. Dieses Resultat steht im starken Kontrast zu einem oft zitierten Experiment von Krishnamurti und Howard [45], die berichteten, dass zellulare Konvektion bei $Pr = 7$ ab einer Rayleigh-Zahl von $Ra \approx 10^6$ verschwindet². Die Ergebnisse der hier vorgestellten Simulationen lassen vermuten, dass auch in turbulenten Situationen noch die gleichen Mechanismen, die zur Bildung von Rollen und Zellen im laminaren Bereich führten, relevant bleiben.

Die typischerweise beobachteten Strukturen seien hier nochmals kurz

²Bekannt sind nur zwei weitere Experimente, die bei großen Aspektverhältnissen auch ähnliche Rayleigh-Zahlen erreicht haben. Dies sind [30] in Luft ($Pr = 0.7$) und [16] bei Prandtl-Zahlen zwischen 5.7 und 170. In beiden Fällen ist allerdings nicht von einem solchen Übergang berichtet worden.

erwähnt. Konvektion bei Prandtl-Zahl $Pr = 0.7$ war im Wesentlichen durch rollenartige Strukturen gekennzeichnet. Bei den höchsten Rayleigh-Zahlen war dabei zu beobachten, dass die Rollen im Laufe der Zeit auf Grund der starken, kleinskaligen Fluktuationen auch aufbrechen und sich dann wieder neu bilden konnten. Größeren Prandtl-Zahlen zeigten im Vergleich zu $Pr = 0.7$ etwas komplexere Strukturen, da neben Rollen auch Konvektionszellen zu beobachten waren. Auf kleinen Längenskalen waren die Strömungen ab Rayleigh-Zahlen der Größenordnung 10^4 - 10^5 zudem durch so genannte Spokes und den aus ihnen herauswachsenden, turbulenten Plumes gekennzeichnet.

Ein weiterer Teil dieser Arbeit beschäftigte sich mit der Frage, ob turbulente Konvektionsströmungen in der Lage sind, so genannte Mean Flows zu erzeugen. Tatsächlich wurden Mean Flows generiert, die in den meisten Fällen antisymmetrisch bezüglich der Mittelebene waren. Es zeigte sich jedoch, dass die in ihnen enthaltene Energie im Vergleich zur kinetischen Energie der Rollen- und Zellstrukturen sehr gering ist und Mean Flows somit nur eine sehr untergeordnete Rolle spielen. Die Zirkulationsströmungen, die in den heute üblichen, bei Aspektverhältnis $\Gamma = 1$ durchgeführten Experimenten beobachtet werden, sind daher eher als Ausprägung einer Konvektionsrolle anstatt eines Mean Flows zu interpretieren.

Die wesentliche Erkenntnis, dass auch in turbulente Strömungen noch großskalige Strukturen existieren, macht klar, dass zwischen der Konvektion in den typischen Experimenten bei $\Gamma = 1$ und weit ausgedehnten Schichten, die in der Praxis eher anzutreffen sind, zum Teil deutliche Unterschiede vorhanden sein können. Wie in Kapitel 6 gezeigt, weist zum Beispiel schon die Nusselt-Zahl signifikante Unterschiede auf. Sehr wünschenswert wären daher neue Experimente nicht nur bei großen Rayleigh-Zahlen sondern von allem bei großen Aspektverhältnissen³.

³Inzwischen gibt es auch ein in dieser Beziehung sehr interessantes, neues Experiment. Es handelt sich hierbei um das so genannte „Ilmenauer Fass“ [54, 55], einem mit Luft gefüllten, von unten beheizten und von oben gekühlten Zylinder von etwa 7 Metern Durchmesser und einer verstellbaren Höhe von maximal 7 Metern. Bisher ist das „Fass“ zwar auch hauptsächlich bei hochgestellter Platte und damit bei kleinem Aspektverhältnis betrieben worden, große Aspektverhältnisse sind jedoch möglich. Bei $\Gamma = 10$ könnten dann Rayleigh-Zahlen von 10^9 und mehr erreicht werden.

Anhang A

Tabellen der wichtigsten Simulationsergebnisse

Im Folgenden sind einige der wichtigsten Ergebnisse aus den Simulationen aufgelistet. Die Daten beinhalten neben den Mittelwerten der Nusselt-Zahl Nu die verschiedenen Anteile der kinetischen Energie. Dabei bezeichnen E_{kin} , E_{pol} , E_{tor} und E_{mf} die Gesamtenergie und deren poloidal, toroidal und Mean Flow Anteile, jeweils pro Volumen. Die Mean Flow Energie ist dabei noch in ihren symmetrischen Anteil E_{symm} und den antisymmetrischen Anteil E_{asymm} aufgeteilt. Für viele der Rechnungen ist außerdem die Reynolds-Zahl Re bestimmt und mit aufgelistet worden. In allen Fällen handelt es sich um zeitliche Mittelwerte im statistisch stationären Zustand der Simulation. Lediglich wenn Messwerte ein mehr oder weniger exponentielles Abklingen mit der Zeit zeigten und einen Wert von 10^{-10} unterschritten ist kein Mittelwert berechnet worden. Die Größe wurde dann als null gewertet.

Pr	Ra	T	E_{kin}	E_{pol}	E_{tor}	E_{mf}	E_{symm}	E_{asymm}	Nu	Re
0.7	1.6×10^4	2	3.60×10^2	3.29×10^2	3.00×10^1	7.0×10^{-1}	7.0×10^{-1}	0	3.01	3.8×10^1
0.7	1.0×10^6	2	2.2×10^4	1.8×10^4	3.8×10^3	3.6×10^2	7.7×10^1	2.8×10^2	8.6	3.4×10^2
0.7	1.0×10^7	2	1.9×10^5	1.5×10^5	4.1×10^4	2.4×10^3	5.3×10^2	1.8×10^3	16.1	1.0×10^3
0.7	1.6×10^4	5	3.03×10^2	2.35×10^2	6.72×10^1	8.3×10^{-1}	5.1×10^{-1}	3.1×10^{-1}	2.61	3.8×10^1
0.7	1.0×10^6	5	2.07×10^4	1.45×10^4	6.0×10^3	8.0×10^1	1.8×10^1	6.2×10^1	8.12	3.1×10^2
0.7	1.0×10^7	5	1.89×10^5	1.25×10^5	6.3×10^4	6.2×10^2	1.3×10^2	5.0×10^2	15.5	9.2×10^2
0.7	1.6×10^4	7.07	3.15×10^2	2.62×10^2	5.32×10^1	4.4×10^{-1}	5.4×10^{-2}	3.9×10^{-1}	2.61	3.9×10^1
0.7	1.0×10^6	7.07	2.09×10^4	1.49×10^4	6.0×10^3	3.7×10^1	9.7×10^0	2.8×10^1	8.16	3.0×10^2
0.7	1.0×10^7	7	1.91×10^5	1.28×10^5	6.2×10^4	3.8×10^2	6.0×10^1	3.2×10^2	15.7	9.0×10^2
0.7	1.71×10^3	10	3.81×10^{-2}	3.81×10^{-2}	0	0	0	0	1.0017	4.1×10^{-1}
0.7	2.0×10^3	10	3.93×10^0	3.93×10^0	0	0	0	0	1.1493	4.5×10^0
0.7	4.0×10^3	10	3.41×10^1	3.41×10^1	0	0	0	0	1.6692	1.4×10^1
0.7	8.0×10^3	10	1.25×10^2	1.01×10^2	2.38×10^1	9.6×10^{-2}	9.1×10^{-2}	4.8×10^{-3}	2.1727	1.8×10^1
0.7	1.6×10^4	10	2.97×10^2	2.25×10^2	7.16×10^1	6.0×10^{-1}	4.9×10^{-1}	1.2×10^{-1}	2.6059	2.6×10^1
0.7	3.2×10^4	10	6.57×10^2	5.10×10^2	1.47×10^2	3.9×10^{-1}	1.1×10^{-1}	2.8×10^{-1}	3.1852	4.7×10^1
0.7	6.4×10^4	10	1.33×10^3	1.01×10^3	3.16×10^2	1.4×10^0	3.1×10^{-1}	1.1×10^0	3.783	5.5×10^1
0.7	1.0×10^5	10	2.12×10^3	1.59×10^3	5.28×10^2	2.2×10^0	4.7×10^{-1}	1.8×10^0	4.285	6.8×10^1
0.7	1.5×10^5	10	3.22×10^3	2.50×10^3	8.12×10^2	3.3×10^0	8.0×10^{-1}	2.5×10^0	4.809	1.2×10^2
0.7	2.5×10^5	10	5.34×10^3	3.90×10^3	1.43×10^3	5.2×10^0	1.1×10^0	4.0×10^0	5.523	1.5×10^2
0.7	5.0×10^5	10	1.07×10^4	7.82×10^3	2.89×10^3	9.9×10^0	2.2×10^0	7.8×10^0	6.735	2.2×10^2
0.7	1.0×10^6	10	2.10×10^4	1.49×10^4	6.02×10^3	2.1×10^1	4.3×10^0	1.6×10^1	8.15	3.1×10^2
0.7	1.0×10^7	10	1.87×10^5	1.26×10^5	6.10×10^4	2.2×10^2	3.6×10^1	1.8×10^2	15.4	9.0×10^2

Tabelle A.1.: Ergebnisse der Simulationen mit Prandtl-Zahl $Pr = 0.7$ und verschiedenen quadratischen Aspektverhältnissen $T = T_x = T_y$.

Pr	Ra	Γ	E_{kin}	E_{pol}	E_{tor}	E_{mf}	E_{symm}	E_{asymm}	Nu	Re
7	1.0×10^6	2	4.2×10^4	4.0×10^4	2.1×10^3	1.7×10^2	4.7×10^1	1.2×10^2	8.8	4.7×10^1
7	1.0×10^6	5	3.8×10^4	3.1×10^4	6.8×10^3	6.1×10^1	1.2×10^1	4.8×10^1	8.4	4.1×10^1
7	1.0×10^6	7.07	4.0×10^4	3.3×10^4	6.4×10^3	4.4×10^1	7.8×10^0	3.6×10^1	8.65	4.1×10^1
7	2.0×10^3	10	5.53×10^0	5.53×10^0	0	0	0	0	1.2129	5.0×10^{-1}
7	4.0×10^3	10	4.56×10^1	4.56×10^1	1.50×10^{-2}	0	0	0	1.8756	1.5×10^0
7	8.0×10^3	10	1.27×10^2	1.27×10^2	1.25×10^{-1}	6.1×10^{-5}	0	6.1×10^{-5}	2.246	3.0×10^0
7	1.6×10^4	10	3.21×10^2	3.19×10^2	1.70×10^0	0	0	0	2.637	5.4×10^0
7	3.2×10^4	10	7.24×10^2	7.11×10^2	1.18×10^1	2.1×10^{-4}	7.1×10^{-5}	1.4×10^{-4}	3.00	7.8×10^0
7	1.0×10^5	10	2.89×10^3	2.69×10^3	1.96×10^2	2.2×10^{-1}	3.2×10^{-2}	1.9×10^{-1}	4.20	1.3×10^1
7	2.5×10^5	10	8.3×10^3	7.3×10^3	9.9×10^2	1.9×10^0	2.9×10^{-1}	1.7×10^0	5.60	1.9×10^1
7	5.0×10^5	10	1.79×10^4	1.54×10^4	2.50×10^3	7.0×10^0	1.0×10^0	6.1×10^0	6.86	2.9×10^1
7	1.0×10^6	10	3.80×10^4	3.11×10^4	6.87×10^3	1.9×10^1	3.0×10^0	1.6×10^1	8.43	4.6×10^1
7	2.5×10^6	10	1.02×10^5	8.17×10^4	2.03×10^4	6.4×10^1	1.2×10^1	5.3×10^1	11.0	6.1×10^1
7	1.0×10^7	10	4.32×10^5	3.29×10^5	1.02×10^5	2.8×10^2	4.5×10^1	2.4×10^2	16.3	1.3×10^2
7	3.2×10^4	20	7.42×10^2	7.36×10^2	5.63×10^0	6.8×10^{-5}	1.8×10^{-5}	5.0×10^{-5}	3.01	6.8×10^0

Tabelle A.2: Überblick über die wichtigsten Ergebnisse der Simulationen mit Prandtl-Zahl $Pr = 7$ bei verschiedenen quadratischen Aspektverhältnissen $\Gamma = \Gamma_x = \Gamma_y$.

Pr	Ra	T	E_{kin}	E_{pol}	E_{tor}	E_{mf}	E_{symm}	E_{asymm}	Nu	Re
30	3.2×10^4	10	8.40×10^2	8.39×10^2	1.21×10^0	5.1×10^{-6}	1.1×10^{-7}	5.0×10^{-6}	3.30	1.75×10^0
30	1.0×10^5	10	3.22×10^3	3.19×10^3	3.35×10^1	3.8×10^{-3}	5.7×10^{-4}	3.2×10^{-3}	4.44	2.97×10^0
30	5.0×10^5	10	1.91×10^4	1.84×10^4	6.49×10^2	4.1×10^{-1}	5.3×10^{-2}	3.5×10^{-1}	6.91	7.43×10^0
30	1.0×10^6	10	4.21×10^4	4.00×10^4	2.09×10^3	2.5×10^0	3.4×10^{-1}	2.1×10^0	8.57	8.96×10^0
30	1.0×10^7	10	5.43×10^5	4.64×10^5	7.93×10^4	1.9×10^2	2.6×10^1	1.6×10^2	16.46	3.10×10^1
60	1.0×10^5	10	3.34×10^3	3.33×10^3	8.50×10^0	3.3×10^{-4}	1.3×10^{-4}	2.0×10^{-4}	4.56	1.51×10^0
60	5.0×10^5	10	2.10×10^4	2.08×10^4	2.61×10^2	8.3×10^{-2}	1.4×10^{-2}	6.9×10^{-2}	7.17	3.31×10^0

Tabella A.3: Ergebnisse der Simulationen mit größeren Prandtl-Zahlen, jeweils bei einem quadratischen Aspektverhältnis von $T = T_x = T_y = 10$.

Pr	Ra	Γ_x	Γ_y	E_{kin}	E_{pol}	E_{tor}	E_{mf}	E_{symm}	E_{asymm}	Nu
0.1	1.0×10^7	2	1	6.37×10^4	5.21×10^4	1.11×10^4	4.0×10^2	1.4×10^2	2.6×10^2	14.1
0.1	1.0×10^8	2	1	5.0×10^5	4.1×10^5	8.1×10^4	6.8×10^3	1.0×10^3	5.8×10^3	26.6
0.7	1.0×10^7	2	1	2.08×10^5	1.74×10^5	3.12×10^4	2.7×10^3	5.9×10^2	2.1×10^3	16.3
0.7	1.0×10^8	2	1	1.66×10^6	1.32×10^6	3.01×10^5	3.4×10^4	3.7×10^3	3.1×10^4	31.0
7	2.0×10^3	2	1	5.53×10^0	5.53×10^0	0	0	0	0	1.2129
7	4.0×10^3	2	1	4.76×10^1	4.76×10^1	0	0	0	0	1.9231
7	8.0×10^3	2	1	1.47×10^2	1.47×10^2	0	0	0	0	2.4514
7	1.6×10^4	2	1	3.76×10^2	3.76×10^2	0	0	0	0	2.9510
7	3.2×10^4	2	1	8.92×10^2	8.92×10^2	0	0	0	0	3.4902
7	6.4×10^4	2	1	2.06×10^3	2.06×10^3	0	0	0	0	4.08
7	1.0×10^5	2	1	3.56×10^3	3.54×10^3	1.41×10^1	0	0	0	4.70
7	2.0×10^5	2	1	7.48×10^3	7.40×10^3	7.07×10^1	4.4×10^0	2.8×10^0	1.6×10^0	5.71
7	4.0×10^5	2	1	1.70×10^4	1.70×10^4	6.48×10^1	0	0	0	7.80
7	8.0×10^5	2	1	3.52×10^4	3.43×10^4	7.27×10^2	1.3×10^2	7.5×10^1	5.2×10^1	8.59
7	1.0×10^6	2	1	4.56×10^4	4.44×10^4	9.90×10^2	1.6×10^2	9.4×10^1	6.7×10^1	9.18
7	2.0×10^6	2	1	1.00×10^5	9.72×10^4	2.81×10^3	5.3×10^2	3.2×10^2	2.0×10^2	11.1
7	1.0×10^7	2	1	5.61×10^5	5.23×10^5	3.42×10^4	3.4×10^3	1.1×10^3	2.2×10^3	17.2
7	1.0×10^8	2	1	5.2×10^6	4.5×10^6	6.0×10^5	5.2×10^4	1.0×10^4	4.2×10^4	32.6
15	1.0×10^7	2	1	7.19×10^5	7.00×10^5	1.78×10^4	1.4×10^3	4.1×10^2	9.5×10^2	17.4

Tabelle A.4: Ergebnisse von Simulationen mit nicht-quadratischen Aspektverhältnissen $\Gamma_x \neq \Gamma_y$.

Pr	Ra	Γ	E_{kin}	E_{pol}	E_{tor}	Nu
0.3	1.0×10^5	10	1.53×10^3	1.10×10^3	4.29×10^2	4.01
0.3	1.0×10^6	10	1.38×10^4	9.43×10^3	4.35×10^3	7.60
0.7	1.0×10^5	10	2.13×10^3	1.62×10^3	5.17×10^2	4.31
0.7	1.0×10^6	10	2.08×10^4	1.47×10^4	6.03×10^3	8.17
0.7	1.0×10^6	20	2.08×10^4	1.48×10^4	6.01×10^3	8.14
1.5	1.0×10^5	10	2.55×10^3	1.97×10^3	5.80×10^2	4.32
1.5	1.0×10^6	10	2.73×10^4	2.05×10^4	6.97×10^3	8.46
3	1.0×10^5	10	2.76×10^3	2.32×10^3	4.44×10^2	4.20
3	1.0×10^6	10	3.30×10^4	2.56×10^4	7.36×10^3	8.55
4.5	1.0×10^5	10	2.87×10^3	2.56×10^3	3.13×10^2	4.19
4.5	1.0×10^6	10	3.61×10^4	2.90×10^4	7.12×10^3	8.54
7	1.0×10^5	10	2.91×10^3	2.71×10^3	3.13×10^2	4.20
7	2.5×10^5	20	8.26×10^3	7.27×10^3	9.90×10^2	5.60
7	1.0×10^6	10	3.78×10^4	3.11×10^4	6.75×10^3	8.43
15	3.2×10^4	10	7.76×10^2	7.73×10^2	3.21×10^0	3.08
15	1.0×10^5	10	3.02×10^3	2.94×10^3	8.36×10^1	4.26
15	5.0×10^5	10	6.81×10^4	1.64×10^4	1.85×10^4	6.81
15	1.0×10^6	10	4.01×10^4	3.59×10^4	4.23×10^3	8.46
30	3.0×10^3	10	2.53×10^1	2.53×10^1	2.11×10^{-4}	1.651
30	7.0×10^3	10	1.15×10^2	1.15×10^2	1.25×10^{-2}	2.280
30	1.0×10^4	10	1.86×10^2	1.86×10^2	2.59×10^{-2}	2.480
30	3.0×10^4	10	7.70×10^2	7.68×10^2	1.50×10^0	3.23
30	7.0×10^4	10	2.14×10^3	2.13×10^3	1.35×10^1	4.06
30	1.0×10^5	10	3.22×10^3	3.19×10^3	3.00×10^1	4.45
30	1.5×10^5	10	5.17×10^3	5.08×10^3	9.11×10^1	5.01
30	2.5×10^5	10	9.16×10^3	8.94×10^3	2.16×10^2	5.79
30	5.0×10^5	10	1.91×10^4	1.85×10^4	6.48×10^2	6.92
30	1.0×10^6	10	4.19×10^4	3.98×10^4	2.12×10^3	8.56
30	1.0×10^7	10	5.46×10^5	4.70×10^5	7.60×10^4	16.45
60	3.2×10^4	10	8.62×10^2	8.62×10^2	4.35×10^{-1}	3.37
60	1.0×10^5	10	3.33×10^3	3.32×10^3	8.43×10^0	4.54
60	5.0×10^5	10	2.17×10^4	2.15×10^4	2.04×10^2	7.24
60	1.0×10^6	10	4.37×10^4	4.29×10^4	8.27×10^2	8.65
120	1.0×10^5	10	3.42×10^3	3.42×10^3	1.42×10^0	4.61
120	1.0×10^6	10	4.88×10^4	4.85×10^4	2.64×10^2	8.94

Tabelle A.5: Ergebnisse von Simulationen ohne Berücksichtigung der Mean Flow Komponente.

Anhang B

Bedienungsanleitung für die Simulationssoftware MPPLCONV

Dieses Anhangskapitel beinhaltet eine kurze Dokumentation des entwickelten Simulationsprogramms MPPLCONV zur direkten numerischen Simulation (DNS) von thermischer Konvektion in ebenen Schichten. Die Software basiert auf dem für meine Diplomarbeit [37] geschriebenen Programm PLCONV¹ und ist in FORTRAN geschrieben.

Während der Doktorarbeit wurde es von Grund auf umgeschrieben und erweitert, um das Programm auch auf massiv-parallelen Rechnerarchitekturen effektiv einsetzen zu können. Das Programm wurde zudem um eine Vielzahl von Routinen für die statistische Analyse der Simulation erweitert. Hinzugekommen sind auch verschiedene Optionen für das numerische Verfahren. Die Fluidschicht kann nun aus der Horizontalen um einen Winkel verkippt werden. Außerdem können Seitenwände eingeschaltet oder auch eine unendliche Prandtl-Zahl verwendet werden. Das numerische Verfahren wird in Kapitel 3 genauer erläutert.

Auf den folgenden Seiten dieser kurzen Anleitung sind einige Informationen und Hinweise aufgelistet, die bei der Kompilierung und Benutzung des Programms zu beachten sind. Damit sollte es möglich sein, dass das Simulationsprogramm auch von anderen verwendet werden kann, ohne dass sie sich gleich mit sämtlichen Details des Quellcodes vertraut machen müssen.

¹Der Name PLCONV ist von „PLane CONvection“ (ebene Konvektion) abgeleitet.

B.1 Einstellungen

Der Quellcode des Programms umfasst inzwischen mehr als 10000 Zeilen, die sich auf die folgenden drei Dateien verteilen:

<code>mpplconv.F</code>	beinhaltet das Hauptprogramm mit der Implementierung des in Kapitel 3 beschriebenen Verfahrens, sowie die Mess -und Kommunikationsroutinen,
<code>mpplconv_defs.h</code>	enthält Präprozessor-Direktiven mit denen Einstellungen für die Kompilierung des Programms vorgenommen werden,
<code>lib_double.f</code>	ist eine Bibliothek mit numerischen Routinen, wie der schnellen Kosinus- und Fouriertransformation und der LU-Zerlegung, alles in doppelter Genauigkeit („double precision“).

Als Benutzer muss man sich meist nur mit der Datei `mpplconv_defs.h` beschäftigen. Hier werden alle größeren Einstellungen vorgenommen, die ein Neukompilieren des Programms erforderlich machen. Die möglichen Optionen lassen sich grob in vier Kategorien einteilen. Dies sind speicherrelevante Einstellungen, wie numerische Auflösung oder Prozessoranzahl, platformspezifische Einstellungen, das Ein- bzw. Ausschalten von Messroutinen und Optionen des numerischen Verfahrens.

Auflösung und zu verwendende Anzahl von Prozessoren werden mit Direktiven vom Typ:

```
#define NAME VALUE
```

eingestellt. Solch eine Präprozessor-Direktive definiert ein Makro mit den Namen `NAME` und dem Wert `VALUE`. An allen Stellen an denen in der Datei `mpplconv.F` der Name des Makros vorkommt wird dieser vom so genannten Präprozessor durch den definierten Wert ersetzt. Die jeweiligen Makros heißen:

NPROC	Prozessoranzahl ($NPROC = 2^n, n \in \mathbb{N}$),
NXP	Anzahl der Fouriermoden in x -Richtung + 2 ($NXP = 2^n + 2, n \in \mathbb{N}$),
NYP	Anzahl der Fouriermoden in y -Richtung ($NYP = 2^n, n \in \mathbb{N}$),
NCOSP	Anzahl der Chebyshev-Polynome in z -Richtung ($NCOSP = 2^n + 1, n \in \mathbb{N}$),
NMAX	Maximum von NXP, NYP, NCOSP.

Die Software kann auf verschiedenen Rechnertypen eingesetzt werden, von der Workstation mit einem Prozessor bis zu massiv-parallelen Rechnern wie der Cray T3E. Es ist dabei unerlässlich für die einzelnen Architekturen abgestimmte Einstellungen, insbesondere für die Kommunikation zu verwenden. Mit der Direktive `#define MACRONAME` wird dazu eines folgenden Makros ausgewählt:

<code>onIBMXL</code>	aktiviert Einstellungen für den IBM XL FORTRAN Compiler auf Multiprozessorrechnern wie IBM p690 (verwendet MPI Kommunikation),
<code>onIBMXLnomp</code>	wählt die Einstellungen für den IBM XL FORTRAN Compiler ohne explizite Kommunikation (zum Beispiel für den Einsatz auf Workstations von IBM oder Apple Computer),
<code>onCRAYT3E</code>	wählt optimierte Einstellungen für den Einsatz auf Cray T3E oder ähnlichen Rechnertypen (verwendet SHMEM Kommunikation).

Zudem können mittels `#define` Anweisungen folgende Messroutinen eingeschaltet werden:

MOVIES	speichert 2-D Schnitte (xy -, xz - oder yz -Ebene) von Temperatur oder Geschwindigkeit zu jedem Messzeitpunkt für die spätere Verarbeitung zu einer Animation (welche Schnitte gespeichert werden sollen, muss direkt in der Routine <code>make_movies_comm</code> der Quelldatei <code>mpp1conv.F</code> eingestellt werden),
NMOVIES	falls MOVIES aktiviert ist, muss mit der Direktive <code>#define NMOVIES N</code> die Anzahl N der verschiedenen Movies gesetzt werden,
SPECTRA	aktiviert die Berechnung der zeitlich gemittelten Kospektren von Temperatur und Vertikalgeschwindigkeit an drei verschiedenen Höhen z ,
PTTSPECTRA	schaltet die Berechnung der Zeitmittelwerte der Spektren von Poloidal-, Toroidal- und Temperaturfeld ein (SPECTRA muss dann auch aktiviert sein),
STATISTICS	aktiviert die Berechnung weiterer statistischer Größen (siehe Kapitel B.4),
XTPLOT	speichert Daten für einen xt -Plot der Temperatur ab.

Die meisten dieser Messroutinen benötigen weitere Optionen, zum Beispiel in welcher Höhe z die Spektren berechnet werden sollen oder wie oft die Messroutinen aufgerufen werden sollen. Diese Optionen werden beim Start des Programms in einer Parameterdatei übergeben (siehe Kapitel B.3).

Über die Datei `mpp1conv_defs.h` können außerdem Einstellungen vorgenommen werden, die das numerische Verfahren betreffen. Mit den Makros `FINITEPRANDTL` und `INFINITEPRANDTL` kann zwischen dem Verfahren für endliche bzw. unendlich große Prandtl-Zahlen gewählt werden. Im Fall endlicher Prandtl-Zahlen ist es außerdem möglich die Fluidschicht zu kippen (Makro `TILTED`) und die „Mean Flow“ Komponente der Geschwindigkeit

keit ein- bzw. auszuschalten (Makro MEANFLOW). Für Testzwecke können zudem die nichtlinearen Terme in den Boussinesq-Gleichungen ausgeschaltet werden. Dazu muss man die Direktive `#define NONLIN` durch `#define NONONLIN` ersetzen.

B.2 Kompilierung

Nachdem alle Einstellungen in der Datei `mpplconv_def.h` vorgenommen wurden, muss das Programm neu kompiliert werden. Typische Compileraufrufe für die verwendeten Rechnerarchitekturen sind:

Rechner: Cray T3E

Compiler: Cray CF90 FORTRAN

```
cpp -N -C mpplconv.F mpplconv.prepro.F
f90 -X128 -dp -O pipeline1 -O unroll2 -O vector3
& -o mpplconv mpplconv.prepro.F lib_double.f
```

Hinweis: Da der Compiler den Präprozessor nicht selbsttätig startet, muss dieser vor dem Kompilervorgang mit dem Befehl `cpp` aufgerufen werden. Mit der Compileroption `-X` muss außerdem die Anzahl der zu verwendenden Prozessoren explizit angegeben werden.

Rechner: IBM pSeries 690

Compiler: IBM FORTRAN XL (mit MPI)

```
mpxlf_r mpplconv.F lib_double.f -qtune=auto -qnosave
& -O3 -qstrict -qfixed=100 -q64 -lmass -o mpplconv
```

Rechner: IBM RS6000 Workstation; Apple Macintosh G4, G5

Compiler: IBM FORTRAN XL (ohne MPI)

```
xlf_r mpplconv.F lib_double.f -qtune=auto -qnosave
& -O3 -qstrict -qfixed=100 -o mpplconv
```

In allen drei Fällen erhält man eine ausführbare Datei mit dem Namen `mpplconv`.

B.3 Programmstart

Nachdem die Software kompiliert wurde, kann eine Simulation gestartet werden. Dazu benötigt man noch eine Textdatei, in der sämtliche Simulationsparameter gespeichert sind. Ein typisches Beispiel für solch eine Parameterdatei ist (mit Erläuterungen zu den einzelnen Punkten rechts daneben):

<SIMULATION>	Beginn: Parameterdatei
<Name> NAME </Name>	Simulationsname
<Ra> 1e+7 </Ra>	Rayleigh-Zahl
<Pr> 0.7 </Pr>	Prandtl-Zahl
<MeanFlow> Yes </MeanFlow>	„Mean Flow“ (Yes oder No)
<Walls> No </Walls>	Seitenwände (Yes oder No)
<Dealiasing> Yes </Dealiasing>	Dealiasing (Yes oder No)
<Tilted> 0 </Tilted>	Kippwinkel der Fluidschicht
<AspectRatios>	Beginn: Aspektverhältnisdefinition
<ax> 10 </ax>	Aspektverhältnis in <i>x</i> -Richtung
<ay> 10 </ay>	Aspektverhältnis in <i>y</i> -Richtung
<\AspectRatios>	Ende: Aspektverhältnisdefinition
<Resolution>	Beginn: Definition der Auflösung
<Nx> 512 </Nx>	Auflösung in <i>x</i> -Richtung
<Ny> 512 </Ny>	Auflösung in <i>y</i> -Richtung
<Nz> 65 </Nz>	Auflösung in <i>z</i> -Richtung
<\Resolution>	Ende: Definition der Auflösung
<TimeStepping>	Beginn: Zeitschrittsteuerung
<TimeStep> 8e-7 </TimeStep>	anfängliche Größe des Zeitschritts
<Dynamic> Yes </Dynamic>	dynamische Schrittsteuerung (Yes oder No)
<NumberOfSteps> 10000 </NumberOfSteps>	Anzahl der Zeitschritte
<\TimeStepping>	Ende: Zeitschrittsteuerung
<Measurements>	Beginn: Messparameter
<SamplingRate> 20 </SamplingRate>	Messung alle 20 Zeitschritte
<Transient> 1000 </Transient>	keine Messung während der ersten 1000 Zeitschritte
<DumpRate> 450 </DumpRate>	kompletten Datensatz nach 450 Messungen speichern

<Spectra>	Beginn: Einstellungen für Spektrenberechnung
<z1> 0.01 </z1>	Spektrum bei $z = 0.01$ berechnen
<z2> 0.15 </z2>	weiteres Spektrum bei $z = 0.15$ berechnen
<z3> 0.50 </z3>	noch ein Spektrum bei $z = 0.50$ berechnen
<\Spectra>	Ende: Einstellungen für Spektrenberechnung
<xtPlot>	Beginn: Einstellungen für xt -Plot
<y> 0.0 </y>	y -Wert auf 0.0 setzen
<z> 0.55 </z>	z -Wert auf 0.5 setzen
<\xtPlot>	Ende: Einstellungen für xt -Plot
<\Measurements>	Ende: Messparameter
<InitialConditions>	Beginn: Startdatensatz
<Name> STARTDATA </Name>	Name des Startdatensatzes
<Resolution>	Beginn: Auflösung der Startwerte
<Nx> 512 </Nx>	Auflösung in x -Richtung
<Ny> 512 </Ny>	Auflösung in y -Richtung
<Nz> 65 </Nz>	Auflösung in z -Richtung
<\Resolution>	Ende: Auflösung der Startwerte
<MeanFlow> Yes </MeanFlow>	Startdatensatz enthält Mean Flow Daten (Yes oder No)
<Noise> 0.0 </Noise>	bei Werten größer null wird etwas Rauschen auf die Startdaten gegeben
<\InitialConditions>	Ende: Startdatensatz
<\SIMULATION>	Ende: Parameterdatei

Auf die genaue Reihenfolge der einzelnen Anweisungen kommt es hier nicht an. Überflüssige Parameter können auch weggelassen werden. Ist zum Beispiel das Programm ohne die Messroutinen für die Spektrenberechnung kompiliert worden, müssen die entsprechenden Parameter auch nicht angegeben werden. Soll eine Simulation nicht mit einem bestehenden Datensatz als Anfangswert gestartet werden, so muss lediglich die Anweisung für den Namen des Startdatensatzes weggelassen werden. Die Simulation beginnt dann mit einem ruhenden Fluid mit zufälligem Temperaturfeld. Der Rauschlevel sollte dann auf einen Wert größer als null gesetzt sein (Parameter <Noise>).

Nach dem Erstellen der Parameterdatei kann eine Simulation gestartet werden. Der Name dieser Datei wird dem Programm beim Start als Parameter übergeben, also zum Beispiel:

```
./moplconv PARAMETERFILE
```

B.4 Ausgabeformate

Im letzten Abschnitt dieser kurzen Software-Dokumentation sollen die verschiedenen Dateien vorgestellt werden, die vom Programm während der Simulation erzeugt werden. In ihnen werden im Wesentlichen Messwerte gespeichert. Sämtliche Daten werden in ASCII Dateien geschrieben, und sind somit leicht mit jedem Visualisierungsprogramm, wie `gnuplot`, `xmgrace` oder `idl`, zu verarbeiten.

Zwei der erzeugten Dateien, nämlich `NAME.data` und `NAME.vel`, enthalten instantane Messwerte. Zu jedem Messzeitpunkt (definiert durch den Eintrag `<SamplingRate>` in der Parameterdatei; siehe Kapitel B.3) werden diese Dateien mit den neuen Werten ergänzt. Die Daten sind hier spaltenweise abgespeichert, in der ersten Spalte steht jeweils die Zeit. Beispielsweise könnte die Datei `NAME.data` (`NAME` bezeichnet dabei den Simulationsnamen; vgl. Kapitel B.3) so aussehen:

```
# time          ekin          ekin pol      ekin tor      ekin mf      epot          nu
3.68174200E+00  1.95953190E+03  1.93795381E+03  2.01545922E+01  1.42349804E+00  1.32075095E+04  4.09092383E+00
3.68224200E+00  1.94211798E+03  1.92147613E+03  1.90761032E+01  1.56574245E+00  1.32432734E+04  4.05873346E+00
3.68274200E+00  1.92493230E+03  1.90528868E+03  1.79588861E+01  1.68473401E+00  1.32834877E+04  4.02845014E+00
.              .              .              .              .              .              .
.              .              .              .              .              .              .
.              .              .              .              .              .              .
```

Der genaue Inhalt der einzelnen Spalten ist:

<code>NAME.data</code>	Zeit, räumlich gemittelte kinetische Energie pro Einheitsvolumen, Poloidalanteil dieser kinetische Energie, Toroidalanteil der Energie, Mean Flow Anteil der Energie, gemittelte potentielle Energie pro Volumen, Mittelwert der Nusselt-Zahl in der Mittelebene,
------------------------	---

NAME.vel Zeit, maximale Vertikalgeschwindigkeit, Maximum der Horizontalgeschwindigkeit, Höhe an der Horizontalgeschwindigkeit maximal ist, maximale Mean Flow Geschwindigkeit in x -Richtung, maximale Mean Flow Geschwindigkeit in y -Richtung, maximaler Betrag der Mean Flow Geschwindigkeit, Höhe an der maximaler Mean Flow erreicht wird.

Soweit die entsprechenden Routinen mit kompiliert wurden, werden auch die folgenden Dateien erzeugt:

NAME.xtplot Hier wird die zeitliche Entwicklung der Temperatur entlang einer Geraden in x -Richtung abgespeichert. Die y - und z -Position der Gerade wird im Parameterfile festgelegt (siehe Kapitel B.3). In der ersten Zeile der Datei stehen die Anzahl der Messpunkte in x -Richtung (1. Spalte) und die Anzahl der Messzeitpunkte (2. Spalte). Danach wird die Datei bei jeder Messung um die Temperaturdaten entlang der Geraden ergänzt. In den geschriebene drei Spalten stehen dann die x -Koordinate, die Zeit und die Temperatur an diesem Ort und zu dieser Zeit.

NAME.mf Enthält vertikale Profile des Mean Flows. Zu jedem Messzeitpunkt wird die Zeit in der Form

time = X.XXXXXE+XX

gespeichert, dahinter folgt das momentane Profil von \vec{U} in Spaltenform (1. Spalte: z -Werte der Stützstellen des Chebyshev-Verfahrens, 2. und 3. Spalte: x - und y -Komponenten von $\vec{U}(z)$).

`NAME.movieX` Enthält Daten von 2D-Schnitten der Temperatur oder der Geschwindigkeit für alle Messzeitpunkte zur späteren Verarbeitung. Das X im Dateiname steht für eine laufende Nummer, da mehr als eine „Movie“-Datendatei angelegt werden kann (siehe Kapitel B.1). Am Anfang dieser Datei(en) stehen 3 Zeilen Kommentare, gefolgt von einer Zeile mit Informationen zu den Daten (1. Spalte: Typ der Daten, wobei t für Temperatur und ux, uy und uz für die Geschwindigkeitskomponenten stehen; 2. Spalte: Bezeichnung für die Schnittebene, also xy, xz oder yz; 3. Spalte: Position der Schnittebene, also z.B. die Höhe z im Fall eines Schnitts in der xy-Ebene). Danach folgt eine Zeilen mit Dimensionen (1. und 2. Spalte: Anzahl der Datenpunkte in den beiden Richtungen der Schnittebene; 3. Spalte: Anzahl der Messzeitpunkte). Nach der Kommentarzeile `---AXES---` sind die Koordinaten der Messpunkte abgespeichert. Die eigentliche Messdaten werden dann zu jedem Messzeitpunkt an die Datei angehängt. Nach den Kommentarzeilen `---NEW-FRAME---` und `---TIME---` steht jeweils die Messzeit, danach die Zeile `---DATA---` und dann schließlich die Messdaten an den zuvor abgespeicherten Koordinaten.

Weitere Dateien sind `NAME.nu` und `NAME.stat`. Sie werden am Simulationsende erzeugt, und beinhalten vertikale Profile von zeit- und ebenenmittelte Größen. `NAME.stat` wird nur berechnet, falls die Statistik-Routine beim Kompilieren eingeschaltet wurde (siehe Kapitel B.1). Die einzelnen Spalten der Dateien enthalten:

`NAME.nu` Höhe, Nusselt-Zahl, konvektiver Anteil an der Nusselt-Zahl,

NAME.stat Höhe, mittlere Geschwindigkeit in x -Richtung, RMS („root mean square“) der Geschwindigkeit in x -Richtung, mittlere Geschwindigkeit in y -Richtung, RMS-Geschwindigkeit in y -Richtung, mittlere Geschwindigkeit in z -Richtung, RMS-Geschwindigkeit in z -Richtung, mittlere Temperatur, RMS der Temperatur, turbulente kinetische Energie, konvektiver Anteil an der Nusselt-Zahl, Dissipationsrate der turbulenten kinetischen Energie, thermische Dissipationsrate.

Wurden beim Kompilieren außerdem die Routinen zur Spektrenberechnung eingeschaltet, werden zusätzlich Dateien mit den zeitgemittelten Spektren angelegt. Spaltenweise sind darin jeweils die Wellenzahl, die entsprechende Wellenlänge, die Komponenten des Spektrums in der Ebene $z = z_1$, in der Ebene $z = z_2$ und bei $z = z_3$ abgespeichert (die Positionen z_1 , z_2 und z_3 werden in der Parameterdatei festgelegt; vgl. Kapitel B.3). Folgende Dateien werden geschrieben:

NAME.spectra Kospektren von Vertikalgeschwindigkeit und Temperatur,
 NAME.polspectra Energiespektren der poloidalen Geschwindigkeit,
 NAME.torspectra Energiespektren der toroidalen Geschwindigkeit,
 NAME.tempspectra Energiespektren der Temperatur.

In gewissen Abständen möchte man selbstverständlich auch die kompletten Geschwindigkeits- und Temperaturfelder abspeichern. Dies wird mit dem Parameter <DumpRate> in der Parameterdatei festgelegt. Ein Wert von zum Beispiel 450 bedeutet, dass nach 450 Messungen die vollen 3D-

Daten abgespeichert werden. Man kann den Parameter so einstellen, dass nur am Simulationende, oder auch öfter Daten geschrieben werden. In jedem Fall wird zuerst eine Datei `NAME.info` angelegt, deren Zeilen die Auflösungen in x -, y - und z -Richtung, sowie die Aspektverhältnisse in x - und y -Richtung enthalten. Beim Speichern der gesamten Felder werden dann jeweils fünf verschiedene Dateien erzeugt (`NAME` bezeichnet dabei wieder den Namen der Simulation, X ist eine laufende Nummer):

<code>NAME_X.time</code>	Zeit,
<code>NAME_X.pol</code>	Poloidalfeld,
<code>NAME_X.tor</code>	Toroidalfeld,
<code>NAME_X.temp</code>	Temperaturfeld,
<code>NAME_X.meanu</code>	Mean Flow Profil in Form von Chebyshev-Komponenten (Spalte 1: x -Komponente, Spalte 2: y -Komponente).

Die dreidimensionalen Temperatur-, Poloidal- und Toroidalfelder sind in Form ihrer komplexen Spektralkomponenten zeilenweise abgespeichert. Zuerst steht der Realteil, gefolgt vom jeweiligen Imaginäranteil. Die Indizes der Komponenten werden dabei am schnellsten über den Index der Chebyshev-Polynome, dann den Index der y -Richtung und am langsamsten über den Index in x -Richtung durchlaufen. Dabei werden beginnend mit Wellenzahl null nur positive Wellenzahlen in x -Richtung gespeichert². Die Wellenzahlen in y -Richtung werden in der so genannten „wrap-around“

²Da die Felder im Ortsraum reell sind, gilt für ihre Spektren die Symmetrie:

$$\hat{f}(-\vec{k}) = \hat{f}(\vec{k})^*,$$

wobei \hat{f} die Spektralkomponente zum Wellenvektor \vec{k} bezeichnet. Daher ist es ausreichend mit nur einem Teil der Wellenvektoren zu rechnen und auch diese nur abzuspeichern. Die restlichen Komponenten ergeben sich aus der Symmetrie.

Anordnung durchlaufen. Beginnend mit null werden aufsteigend erst alle positiven und dann alle negativen Wellenzahlen gespeichert.

Literatur

- [1] *MPI – The complete reference*, Band 1. MIT Press, 1998.
- [2] *MPI – The complete reference*, Band 2. MIT Press, 1998.
- [3] *CRC Handbook of chemistry and physics*. CRC Press, 2000.
- [4] D. J. Acheson. *Elementary Fluid Dynamics*. Clarendon Press, 1990.
- [5] S. Ashkenazi und V. Steinberg. High Rayleigh number turbulent convection in a gas near the gas-liquid critical point. *Phys. Rev. Lett.*, 83, 3641–3644, 1999.
- [6] M. Assenheimer und V. Steinberg. Observation of coexisting upflow and downflow hexagons in Boussinesq Rayleigh-Bénard convection. *Phys. Rev. Lett.*, 76, 756–759, 1996.
- [7] B. W. Atkinson und J. W. Zhang. Mesoscale shallow convection in the atmosphere. *Rev. Geophys.*, 34, 4, 403–431, 1996.
- [8] G. K. Batchelor. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, 1967.
- [9] H. Bénard. Les tourbillons cellulaires dans un nappe liquide transportant de la chaleur par convection en régime permanent. *Ann. Chim. Phys.*, 23, 62–144, 1901.
- [10] M. J. Block. Surface tension as the cause of Bénard cells and surface deformation in a liquid film. *Nature*, 178, 650–651, 1956.

- [11] E. Bodenschatz, W. Pesch, und G. Ahlers. Recent developments in Rayleigh-Bénard convection. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 32, 709–778, 2000.
- [12] J. Boussinesq. *Theorie Analytique de la Chaleur*, Band 2. Gauthier-Villars, Paris, 1903.
- [13] M. Breuer, S. Wessling, J. Schmalzl, und U. Hansen. Effect of inertia in Rayleigh-Bénard convection. *Phys. Rev. E*, 69, 026302, 2004.
- [14] F. H. Busse. The optimum theory of turbulence. *Adv. Appl. Mech.*, 18, 77–121, 1978.
- [15] F. H. Busse. Fundamentals of thermal convection. In *Mantle convection, plate tectonics and global dynamics*. Gordon and Breach, New York, 1989.
- [16] F. H. Busse. Spoke pattern convection. *Acta Mechanica*, 4, 11–17, 1994.
- [17] F. H. Busse und R. M. Clever. Instabilities of convection rolls in a fluid of moderate Prandtl number. *J. Fluid Mech.*, 91, 319–335, 1979.
- [18] F. H. Busse und R. M. Clever. Asymmetric squares as an attracting set in Rayleigh-Bénard convection. *Phys. Rev. E*, 81, 341–344, 1998.
- [19] F. H. Busse und J. A. Whitehead. Oscillatory and collective instabilities in large Prandtl number convection. *J. Fluid Mech.*, 66, 67–79, 1974.
- [20] B. Castaing, G. Gunaratne, F. Heslot, L. Kadanoff, A. Libchaber, S. Thomee, X. Z. Wu, S. Zaleski, und G. Zanetti. Scaling of hard thermal turbulence in Rayleigh-Bénard convection. *J. Fluid Mech.*, 204, 1–30, 1989.
- [21] S. Chandrasekhar. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Clarendon Press, 1961.
- [22] X. Chavanne, F. Chilla, B. Castaing, B. Hébral, B. Chabaud, und J. Chaussy. Observation of the ultimate regime in Rayleigh-Bénard convection. *Phys. Rev. Lett.*, 79, 3684–3651, 1997.
- [23] R. M. Clever und F. H. Busse. Nonlinear oscillatory convection. *J. Fluid Mech.*, 176, 403–417, 1987.

- [24] R. M. Clever und F. H. Busse. Steady and oscillatory bimodal convection. *J. Fluid Mech.*, 271, 103–118, 1994.
- [25] R. M. Clever und F. H. Busse. Standing and travelling oscillatory blob convection. *J. Fluid Mech.*, 297, 255–273, 1995.
- [26] R. M. Clever und F. H. Busse. Hexagonal convection cells under condition of vertical symmetry. *Phys. Rev. E*, 53, R2037–R2040, 1996.
- [27] J. W. Deardorff und G. E. Willis. Investigation of turbulent thermal convection between horizontal plates. *J. Fluid Mech.*, 28, 675–704, 1967.
- [28] P. G. Drazin und W. H. Reid. *Hydrodynamic Stability*. Cambridge University Press, 1981.
- [29] P. C. Fife. The Bénard problem for general fluid dynamical equations and remarks on the Boussinesq approximation. *Indiana U. Math. J.*, 20(4), 303–326, 1970.
- [30] D. E. Fitzjarrald. An experimental study of turbulent convection in air. *J. Fluid Mech.*, 73, 693–719, 1976.
- [31] D. Gottlieb und S. A. Orszag. *Numerical analysis of spectral methods: Theory and applications*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1977.
- [32] D. D. Gray und A. Giorgini. The validity of the Boussinesq approximation for liquids and gases. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 19, 545–551, 1976.
- [33] S. Grossmann und D. Lohse. Scaling in thermal convection: a unifying theory. *J. Fluid Mech.*, 407, 27–56, 2000.
- [34] G. Grötzbach. Spatial resolution requirements for direct numerical simulations of the Rayleigh-Bénard convection. *J. Comp. Phys.*, 49, 241–264, 1983.
- [35] U. Hansen, D. A. Yuen, und S. E. Kroening. Transition to hard turbulence in thermal convection at infinite Prandtl number. *Phys. Fluids A*, 2, 2157–2163, 1990.

- [36] T. Haramina und A. Tilgner. Experimental visualization of streamwise streaks in the boundary layer of Rayleigh-Bénard convection. In *Progress in Turbulence, Proc. ITI Conference on Turbulence, Bad Zwischenahn, 2003*. Springer, noch nicht erschienen.
- [37] T. Hartlep. *Numerische Simulation von turbulenter Rayleigh-Bénard Konvektion*. Diplomarbeit, Physikalisches Institut, Universität Bayreuth, 2001.
- [38] T. Hartlep und A. Tilgner. Rayleigh-Bénard convection at large aspect ratios. In *High Performance Computing in Science and Engineering '03*, 343–357. Springer, 2003.
- [39] T. Hartlep und A. Tilgner. Generation of mean flows in turbulent convection. In *Progress in Turbulence, Proc. ITI Conference on Turbulence, Bad Zwischenahn, 2003*. Springer, noch nicht erschienen.
- [40] T. Hartlep, A. Tilgner, und F. H. Busse. Transition to turbulent convection in a fluid layer heated from below at moderate aspect ratio. (In Vorbereitung).
- [41] T. Hartlep, A. Tilgner, und F. H. Busse. Large scale structures in Rayleigh-Bénard convection at high Rayleigh numbers. *Phys. Rev. Lett.*, 91, 064501, 2003.
- [42] R. M. Kerr. Rayleigh number scaling in numerical convection. *J. Fluid Mech.*, 310, 139–179, 1996.
- [43] R. M. Kerr und J. R. Herring. Prandtl number dependence of Nusselt number in direct numerical simulations. *J. Fluid Mech.*, 419, 325–344, 2000.
- [44] R. H. Kraichnan. Turbulent thermal convection at arbitrary Prandtl number. *Phys. Fluids*, 5, 1374–1389, 1962.
- [45] R. Krishnamurti und L. N. Howard. Large scale flow generation in turbulent convection. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 78, 1981–1985, 1981.
- [46] L. D. Landau und E. M. Lifshitz. *Fluid Mechanics*. Pergamon Press, 1987.

- [47] J. M. Mihaljan. A rigorous exposition of the Boussinesq approximations applicable to a thin layer of fluid. *Astrophys. J.*, 136, 1126–1133, 1962.
- [48] R. D. Moser, P. Moin, und A. Leonard. A spectral numerical method for the Navier Stokes equations with application to Taylor Couette flow. *J. Comp. Phys.*, 54, 524–544, 1983.
- [49] J. J. Niemela, L. Skrbek, K. R. Sreenivasan, und R. J. Donnelly. Turbulent convection at very high Rayleigh numbers. *Nature*, 404, 837–840, 2000.
- [50] A. Oberbeck. Über die Wärmeleitung der Flüssigkeiten bei Berücksichtigung der Strömungen infolge von Temperaturdifferenzen. *Ann. Phys. Chem.*, 7, 271–292, 1879.
- [51] J. R. A. Pearson. On convection cells induced by surface tension. *J. Fluid Mech.*, 4, 489–500, 1958.
- [52] W. Pesch. Complex spatiotemporal convection patterns. *Chaos*, 6(3), 348–357, 1996.
- [53] W. H. Press. *Numerical Recipes in Fortran 77*. Cambridge University Press, 1989.
- [54] C. Resagk, F. H. Busse, R. du Puits, A. Thess, und A. Tilgner. The Barrel of Ilmenau: a novel facility for experiments on high Rayleigh number convection. In *Advances in Turbulence IX, Proc. 9th European Turbulence Conference, Southampton, 2002*. CIMNE, Barcelona, 2002.
- [55] C. Resagk, R. du Puits, F. H. Busse, A. Thess, und A. Tilgner. Temperature and velocity measurements in a large-scale Rayleigh-Bnard-experiment. In *Progress in Turbulence, Proc. ITI Conference on Turbulence, Bad Zwischenahn, 2003*. Springer, noch nicht erschienen.
- [56] M. Sano, X. Wu, und A. Libchaber. Turbulence in helium-gas free convection. *Phys. Rev. A*, 40, 6421–6430, 1989.

- [57] B. J. Schmitt und W. von Wahl. Decomposition into poloidal fields, toroidal fields, and mean flow. *Differential and Integral Equations*, 5, 1275–1306, 1992.
- [58] X. D. Shang, X. L. Qiu, P. Tong, und K. Q. Xia. Measured local heat transport in turbulent Rayleigh-Bénard convection. *Phys. Rev. Lett.*, 90, 074501, 2003.
- [59] B. Shraiman und S. Siggia. Heat transport in high Rayleigh number convection. *Phys. Rev. A*, 42, 3650–3653, 1990.
- [60] E. A. Spiegel und G. Veronis. On the Boussinesq approximation for a compressible fluid. *Astrophys. J.*, 131, 442–447, 1960.
- [61] A. Tilgner. Spectral methods for the simulation of incompressible flows in spherical shells. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 30, 713–724, 1999.
- [62] M. G. Velarde und R. P. Cordon. On the (nonlinear) foundations of Boussinesq approximation applicable to a thin layer of fluid. *J. Phys. (Paris)*, 37, 177–182, 1976.
- [63] R. Verzicco und R. Camussi. Numerical experiments on strongly turbulent thermal convection in a slender cylindrical cell. *J. Fluid Mech.*, 477, 19–49, 2003.
- [64] X. Wu und A. Libchaber. Scaling relations in thermal turbulence: the aspect ratio dependence. *Phys. Rev. A*, 45, 842–845, 1992.
- [65] Y. B. Xin und K. Q. Tong. Measured velocity boundary layers in turbulent convection. *Phys. Rev. Lett.*, 77, 1266–1269, 1996.
- [66] X. Xu, K. M. S. Bajaj, und G. Ahlers. Heat transport in turbulent Rayleigh-Bénard convection. *Phys. Rev. Lett.*, 84, 4357–4360, 2000.
- [67] G. Zocchi, E. Moses, und A. Libchaber. Coherent structures in turbulent convection, an experimental study. *Physica A*, 166, 387–407, 1990.

Abbildungen

2.1	Vertikaler Schnitt durch die Fluid-Schicht.	6
2.2	Gültigkeitsbereich der Boussinesq-Gleichungen für Luft.	14
3.1	Flussdiagramm des Simulationsprogramms.	27
3.2	Darstellung der Speicheranordnung.	32
3.3	Skizze einer aus der Horizontalen verkippten Fluidschicht.	39
3.4	Realisierung von undurchlässigen Seitenwänden.	41
4.1	Schematische Darstellung von Konvektionsrollen und -zellen.	47
4.2	Temperaturverteilung in der Mitte der Fluidschicht bei $Pr = 0.7$.	48
4.3	Wie Abbildung 4.2, jedoch am Rand der Grenzschicht.	49
4.4	Vertikalschnitte der Geschwindigkeit bei $Pr = 0.7$.	51
4.5	Temperaturverteilung in der Mitte der Fluidschicht bei $Pr \geq 7$.	53
4.6	Wie Abbildung 4.5, jedoch am Rand der Grenzschicht.	54
4.7	3D-Isosfläche der Temperatur bei $Pr = 15, Ra = 3.4 \times 10^4, \Gamma = 10$.	56
4.8	Geschwindigkeitsfeld im Fall $Pr = 15, Ra = 10^5, \Gamma = 10$.	57
4.9	Verschiedene Darstellungsweisen von Spektren.	60
4.10	Spektrale Verteilung des Wärmetransports bei $Ra = 10^5$.	63
4.11	Spektrale Verteilung des Wärmetransports bei $Ra = 10^6$.	64
4.12	Spektrale Verteilung des Wärmetransports bei $Ra = 10^7$.	65
4.13	Anteil der kleinskaligen Strukturen am Wärmetransport.	66
4.14	Horizontale Strukturgröße bei $Pr = 0.7$ und $Pr = 30$.	67
4.15	Pr -Abhängigkeit der Rollen- bzw. Zellgröße.	69
4.16	Einfluss von Γ bei $Ra = 10^6, Pr = 0.7$.	70

4.17	Einfluss von Γ bei $Ra = 3.2 \times 10^4$, $Pr = 7$.	72
4.18	Seitenansicht von 4 Simulationen bei $Ra = 10^7$, $\Gamma_x = 2$, $\Gamma_y = 1$.	73
4.19	Visualisierung von Plumes bei $Ra = 10^8$, $Pr = 7$, $\Gamma_x = 2$, $\Gamma_y = 1$.	75
4.20	Grenzschicht bei $Ra = 10^8$, $Pr = 7$, $\Gamma_x = 2$, $\Gamma_y = 1$.	76
4.21	Vertikalschnitt, $Ra = 10^8$, $Pr = 7$, $\Gamma_x = 2$, $\Gamma_y = 1$.	76
4.22	Konvektionsrollen bei kleinen Prandtl-Zahlen (schematisch).	77
4.23	Profile des Asymmetrieverhältnisses $\langle v_z / v_z \rangle_{x,y}$.	78
4.24	Variation des Asymmetrieverhältnisses mit Ra .	79
5.1	Schematische Darstellung antisymmetrischer Mean Flows.	83
5.2	Schematische Darstellung einer Zirkulationsströmung.	83
5.3	Perspektivische Darstellung, $Ra = 8000$, $Pr = 0.7$ und $\Gamma = 10$.	85
5.4	Geschwindigkeits- und Temperaturplots, $Ra = 8000$, $Pr = 0.7$.	85
5.5	Mean Flows in zwei laminaren Beispielen.	86
5.6	Perspektivische Darstellung, $Ra = 64000$, $Pr = 7$, $\Gamma_x = 2$, $\Gamma_y = 3$.	88
5.7	Geschwindigkeits- und Temperaturplots, $Ra = 64000$, $Pr = 7$.	88
5.8	Mean Flow bei $Ra = 10^6$, $Pr = 0.7$ und $\Gamma = 10$.	89
5.9	Rayleigh-Zahl Abhängigkeit verschiedener Energieanteile.	91
5.10	Abhängigkeit des Mean Flows vom Aspektverhältnis.	91
5.11	Ra -Abhängigkeit des Means Flows bei $\Gamma_x = 2$, $\Gamma_y = 1$.	92
5.12	Vertikalschnitt von \vec{v} für eine Simulation mit Seitenwänden.	95
6.1	Rayleigh-Zahl Abhängigkeit der Nusselt-Zahl.	102
6.2	Γ -Abhängigkeit der Nusselt-Zahl Nu .	103
6.3	Ra -Abhängigkeit der Reynolds-Zahl Re .	104
6.4	Vertikale Profile einiger Größen bei $Pr = 0.7$.	107
6.5	Vertikale Profile einiger Größen bei $Pr = 7$.	108
6.6	Vertikale Profile einiger Größen bei $Pr = 30$.	109
6.7	Ra -Abhängigkeit der Grenzschichtdicken.	110
6.8	Pr -Abhängigkeit der Grenzschichtdicken.	111
6.9	Re -Abhängigkeit der Grenzschichtdicke λ_u .	112
6.10	Re -Abhängigkeit der Dissipation in der Grenzschicht.	115

Tabellen

3.1	Verwendete Auflösungen einiger Simulation.	35
3.2	Zeitschritt und Simulationsdauer einiger Simulation.	38
5.1	Vergleich zwischen ebener und gekippter Fluidschicht.	93
5.2	Vergleich von Simulationen mit und ohne Mean Flow.	97
A.1	Simulationsergebnisse für $Pr = 0.7$ und $\Gamma = \Gamma_x = \Gamma_y$.	122
A.2	Simulationsergebnisse für $Pr = 7$ und $\Gamma = \Gamma_x = \Gamma_y$.	123
A.3	Simulationsergebnisse für $Pr = 30, Pr = 60$ und $\Gamma = 10$.	124
A.4	Ergebnisse der Simulationen mit $\Gamma_x \neq \Gamma_y$.	125
A.5	Ergebnisse von Simulationen ohne Mean Flow.	126

Lebenslauf

Thomas Hartlep wird am 12. November 1976 in Weimar als erstes Kind der Eltern Helga und Jürgen Hartlep geboren und ist deutscher Staatsbürger. Nach dem Besuch des Heinrich-Hertz-Gymnasiums in Erfurt beginnt er im Jahre 1995 das Studium der Physik an der Universität Bayreuth. Ein Austauschprogramm führt ihn in den Jahren 1998/99 an die Universität von Delaware in Newark, Delaware, United States. Neben dem Besuch verschiedener Vorlesungen arbeitet er an einem Forschungsprojekt zur Turbulenz im Sonnenwind. Nach der Rückkehr nach Deutschland legt er im Jahre 2000 die Diplomprüfungen ab, und wendet sich der numerischen Strömungssimulation zu. Der Titel seiner Diplomarbeit lautet „Numerische Simulation von turbulenter Rayleigh-Bénard Konvektion“ [37]. Seit 2001 ist er als Doktorand am Institut für Geophysik der Georg-August Universität in Göttingen tätig. Der Titel seiner Dissertation lautet: „Strukturbildung und Turbulenz. Eine numerische Studie zur turbulenten Rayleigh-Bénard Konvektion.“