

Zeit- und Volatilitätsstruktur von Zinssätzen –
Modellierung, Implementierung, Kalibrierung

Dissertation
zur Erlangung des wissenschaftlichen Doktorgrades
des Fachbereichs Wirtschaftswissenschaften der Universität Göttingen

vorgelegt von
Lyudmil Zyapkov
aus Plovdiv, Bulgarien

Göttingen 2007

Zusammenfassung

Die vorliegende Dissertation folgt der Entwicklung der Zinsstrukturmodellierung seit den Anfängen in den späten 70ern des vorigen Jahrhunderts bis hin zu den heutigen multifaktoriellen, währungsübergreifenden Libor-Marktmodellen mit stochastischer Volatilität. Der Aufbau der Arbeit orientiert sich an der vorgenommenen Klassifizierung in die Gattung der klassischen Zinsstrukturmodelle, die das Gleichgewichtsmodell von Vasicek und das arbitragefreie Modell von Hull/White als entscheidende Entwicklungsstufen hervorhebt, und in die modernen Ansätze der marktkonformen Modellierungstechnik, deren namhafteste Beispiele der Heath/Jarrow/Morton-Modellrahmen (HJM) und das Libor-Marktmodell (LMM) sind.

Ungeachtet der Herleitung einer allgemeinen partiellen Differentialgleichung für beliebige Payoff-Funktionen, die wesentlich für die Bewertung von Zinsderivaten ist, werden die klassischen Zinsstrukturerklärungsansätze unter Abstraktion von dieser Technik grundlegend umgestaltet, indem sie in die Gussform der Martingal-Preistheorie hineinmodelliert werden. In einem weitergehenden Schritt wird ein Optionspreismodell mit funktionaler Abhängigkeit der Volatilität vom Zinssatz entwickelt. Des Weiteren wird die Äquivalenz des HJM-Konstrukts und des Hull/White-Zinsmodells für eine spezifische Volatilitätsfunktion nachgewiesen und argumentiert, dass der moderne Ansatz keine universale, in sich geschlossene Konstruktion definiert, sondern lediglich ein flexibleres Parametrisierungsvokabular zur Charakterisierung der Merkmale eines aus der Vielfalt von Modellierungsmethoden ausgewählten, klassischen Zinsstrukturmodells darstellt.

Im zweiten Teil der Arbeit wird das LMM mit deterministischer Volatilitätsstruktur implementiert und unter dem Aspekt der perfekten Reproduktion der marktbeobachtbaren Black-Volatilitäten und der Implikationen für den benachbarten Swaptionmarkt kalibriert. Aus dem Versuch, eine simultane Kalibrierung sowohl an Caplets als auch an Swaptions zu erzwingen, resultiert die Feststellung einer eventuellen Inkongruenz zwischen den beiden Märkten.

Im abschließenden Teil der Dissertation wird auf die Entwicklung eines Cross Currency LMM mit stochastischer Volatilität hingewiesen, das durch seine Parametrisierung den Skew (das Vanna-Risiko) und den Smile (das Volga-Risiko) der impliziten Volatilitätsstruktur steuern kann.

Abstract

The thesis traces the modelling developments of the term structure of interest rates from the beginnings in the early seventies of the last century up to the multifactorial cross-currency stochastic volatility Libor Market Models in modern times. We follow the general classification in traditional approaches, which emphasise the equilibrium model by Vasicek and the no arbitrage model by Hull/White (HW) as crucial cornerstones of interest rate modelling, and in modern market approaches, of which the most prominent examples include the Heath/Jarrow/Morton (HJM) framework and the Libor Market Model (LMM).

In spite of deriving a general partial differential equation (PDE) for arbitrary payoffs, the thesis casts the traditional models in the mould of the martingale pricing theory and steers clear from the application of PDE techniques. Furthermore, an option pricing model based on a functional dependence of the volatility structure on the interest rate is developed. The equivalence between the HJM family and the HW is shown for a specific volatility function and it is argued that the modern approach defines no universal, self-contained modelling technique. The modern approach rather provides a more flexible vocabulary to describe the characteristics of an already existing traditional model.

The second part of the thesis implements the LMM based on a deterministic volatility function and stages a full-blown calibration procedure under the aspect of perfect reproduction of the market observable Black volatilities and the implications for the neighbouring swaption markets. The results from the attempt at a simultaneous calibration to both caplets and swaptions at the same time indicate the possible lack of congruence between both markets.

The concluding chapter of the thesis is concerned with stochastic volatility models. It proposes a cross-currency LMM based on a separate variance process for the exchange rate. The model is capable of controlling the skew (vanna risk) and the smile (volga risk) of the implied volatility surface. In addition, suggestions are made how to extend the model in order to incorporate as much market information as possible.

Inhaltsübersicht

| | |
|---|----|
| Abbildungsverzeichnis | IX |
| Abkürzungsverzeichnis | X |
| 1 Einleitung..... | 1 |
| 11 Meilensteine in der Evolution der Zinsstrukturmodelle und Ausblick auf die Zukunft | 1 |
| 12 Struktur der Forschungsarbeit | 7 |
| 2 Der klassische Ansatz zur Modellierung der Zinsstrukturkurve | 9 |
| 21 Die historische Entwicklung der Zinsstrukturmodelle im Kontext der marktkonsistenten Bewertung von Zinsderivaten | 9 |
| 22 Die fundamentale Gleichung zur Bestimmung der Zinsstruktur..... | 10 |
| 23 Das Zinsmodell von Vasicek mit zeitunabhängiger Volatilitätsstruktur und konstanter <i>mean-reverting</i> Driftfunktion..... | 21 |
| 24 Arbitragefreie Modellierung der Zinsstruktur und modellinhärente Konsistenz der zu kalibrierenden Parameter mit Marktpreisen | 26 |
| 25 Optionspreismodell mit funktionaler Abhängigkeit der Volatilität vom Zinssatz | 35 |
| 26 Zur Tauglichkeit, Relevanz und zu den Grenzen der <i>Short Rate</i> -basierten Zinsstrukturmodelle..... | 55 |
| 3 Der moderne Ansatz zur Modellierung der Zinsstruktur und Bewertung von komplexen Libor-Instrumenten | 57 |
| 31 Einführung..... | 57 |
| 32 Die Aussichtslosigkeit einer effektiven Kalibrierungsprozedur im Rahmen des erweiterten <i>Short Rate</i> -Zinsmodells mit zustandsabhängiger Volatilitätsstruktur als Grund für den Übergang zur Modellierung der gesamten Zinsstruktur im Gegensatz zur Gestaltung der Dynamik der instantanen <i>Spot Rate</i> | 59 |
| 33 Der allgemeine Heath-Jarrow-Morton Modellrahmen zur Entwicklung der ganzheitlichen Zinsstrukturdynamik | 65 |
| 34 Das Libor-Marktmodell. Zeitkontinuierliche Deskription der linearer Zinsberechnungskonvention unterliegenden Forward Rates an diskreten, preissensitiven Stützstellen auf der Zinsstrukturkurve..... | 77 |

| | |
|---|-----|
| 4 Weiterentwicklungen und zukünftige Forschungsarbeit | 115 |
| Anlagenverzeichnis | 126 |
| Literaturverzeichnis..... | 151 |

Inhaltsverzeichnis

| | |
|--|----|
| Abbildungsverzeichnis | IX |
| Abkürzungsverzeichnis | X |
| 1 Einleitung..... | 1 |
| 11 Meilensteine in der Evolution der Zinsstrukturmodelle und Ausblick auf die Zukunft | 1 |
| 12 Struktur der Forschungsarbeit | 7 |
| 2 Der klassische Ansatz zur Modellierung der Zinsstrukturkurve | 9 |
| 21 Die historische Entwicklung der Zinsstrukturmodelle im Kontext der marktkonsistenten Bewertung von Zinsderivaten | 9 |
| 22 Die fundamentale Gleichung zur Bestimmung der Zinsstruktur..... | 10 |
| 221 Einführung und Fragestellung..... | 10 |
| 222 Herleitung der PDE mit Hilfe eines risikolosen Portfolios aus zwei Zerobonds..... | 12 |
| 223 Die fundamentale PDE für beliebige Payoff-Funktionen im Licht der Diffusionstheorie..... | 15 |
| 23 Das Zinsmodell von Vasicek mit zeitunabhängiger Volatilitätsstruktur und konstanter <i>mean-reverting</i> Driftfunktion..... | 21 |
| 24 Arbitragefreie Modellierung der Zinsstruktur und modellinhärente Konsistenz der zu kalibrierenden Parameter mit Marktpreisen | 26 |
| 241 Die Dynamik der <i>Short Rate</i> und des Bondpreises..... | 26 |
| 242 Die Option auf den Bond | 29 |
| 2421 Bewertung in der risikoneutralen Welt | 29 |
| 2422 Bewertung unter dem <i>Forward</i> -Wahrscheinlichkeitsmaß | 30 |
| 243 Kalibrierung der Modellparameter an Marktdaten | 31 |
| 25 Optionspreismodell mit funktionaler Abhängigkeit der Volatilität vom Zinssatz | 35 |
| 251 Die <i>Short Rate</i> im Rahmen des erweiterten Zinsmodells | 36 |
| 252 Die Dynamik des Bondpreises..... | 38 |
| 253 Die Option auf den Bond mit stochastischer instantaner Volatilität..... | 43 |
| 254 Analytische Bestimmung der <i>Transition Density</i> | 51 |
| 2541 Der <i>PDE</i> -Ansatz..... | 51 |

| | | |
|------|---|----|
| 2542 | Der numerische Ansatz mittels einer <i>Runge-Kutta</i> -ähnlichen Approximation der Portfoliovarianz | 53 |
| 26 | Zur Tauglichkeit, Relevanz und zu den Grenzen der <i>Short Rate</i> -basierten Zinsstrukturmodelle..... | 55 |
| 3 | Der moderne Ansatz zur Modellierung der Zinsstruktur und Bewertung von komplexen Libor-Instrumenten | 57 |
| 31 | Einführung..... | 57 |
| 32 | Die Aussichtslosigkeit einer effektiven Kalibrierungsprozedur im Rahmen des erweiterten <i>Short Rate</i> -Zinsmodells mit zustandsabhängiger Volatilitätsstruktur als Grund für den Übergang zur Modellierung der gesamten Zinsstruktur im Gegensatz zur Gestaltung der Dynamik der instantanen <i>Spot Rate</i> | 59 |
| 33 | Der allgemeine Heath-Jarrow-Morton Modellrahmen zur Entwicklung der ganzheitlichen Zinsstrukturdynamik | 65 |
| 331 | Die separierbare funktionelle Form der instantanen Volatilitätsstruktur | 69 |
| 332 | Die Verbindung zwischen dem <i>Forward Rate</i> -basierten <i>HJM</i> -Konstrukt und dem Hull/White- <i>Short Rate</i> -Zinsmodell..... | 74 |
| 34 | Das Libor-Marktmodell. Zeitkontinuierliche Deskription der linearer Zinsberechnungskonvention unterliegenden Forward Rates an diskreten, preissensitiven Stützstellen auf der Zinsstrukturkurve..... | 77 |
| 341 | Die Genesis der marktkonformen Modellierungstechnik | 77 |
| 342 | Das Grundgerüst des Libor-Marktmodells in einer multifaktoriellen Konstruktionsumgebung | 83 |
| 3421 | Drei äquivalente Deskriptionen der Forward Rate-Dynamik | 84 |
| 3422 | Die Spezifizierung der arbitragefreien Driftfunktion unter dem terminalen Forward-Wahrscheinlichkeitsmaß | 87 |
| 343 | Die Approximation der Driftfunktion | 90 |
| 3431 | Überblicksartige Darstellung existierender Approximationsverfahren..... | 90 |
| 3432 | Stochastische Driftapproximation mit Hilfe der Brownschen Brücke | 91 |
| 344 | Die generellen Inputfaktoren für das Grundgerüst des Libor-Marktmodells | 94 |
| 3441 | Die Konstruktion der instantanen Volatilitätsfunktion | 95 |
| 3442 | Die Spezifikation der instantanen Korrelationsfunktion..... | 98 |

| | | |
|------|---|-----|
| 345 | Die Kalibrierung der modelltheoretischen Inputfunktionen an marktbeobachtbare Strukturen | 100 |
| 3451 | Das Fitting der instantanen Volatilitätsfunktion | 100 |
| 3452 | Das Fitting der instantanen Korrelationsfunktion. Optimales Verfahren zur bestmöglichen Reproduktion der exogenen Marktkorrelationsmatrix | 102 |
| 346 | Die Kongruenz zwischen Caplet- und Swaptionmärkten | 106 |
| 3461 | Die Implikationen einer Forward Rate-basierten Modellimplementierung und -kalibrierung für die Swap Rate-Kovarianzmatrix | 106 |
| 3462 | Joint-Kalibrierung an Caplet- und Swaptionmärkte | 111 |
| 4 | Weiterentwicklungen und zukünftige Forschungsarbeit | 115 |
| | Anlagenverzeichnis | 126 |
| | Literaturverzeichnis | 151 |

Abbildungsverzeichnis

| | | |
|----------|---|-----|
| Abb. 4-1 | Die Volatilität der Forward Rate als Funktion der Restlaufzeit..... | 73 |
| Abb. 4-2 | Die Forward Rate als Funktion der Laufzeit..... | 93 |
| Abb. 4-3 | Die instantane Korrelationsfunktion basierend auf einer Zwei- bzw. Drei-Faktoren-Implementierung..... | 104 |
| Abb. 4-4 | Die instantane Korrelationsfunktion basierend auf einer Vier-Faktoren-Implementierung..... | 104 |
| Abb. 4-5 | Die instantane Korrelationsfunktion basierend auf einer Vier-Faktoren-Implementierung mit variablen Gewichtungsfaktoren..... | 105 |
| Abb. 4-6 | Forward Rate- und implizite Swap Rate-Modellkorrelationsfunktionen in einem Fünf-Faktoren-Setting | 110 |
| Abb. 4-7 | Forward Rate- und implizite Swap Rate-Modellkorrelationsfunktionen in einem Drei-Faktoren-Setting..... | 110 |
| Abb. 4-8 | Forward Rate- und Swap Rate-Modellkorrelationsfunktionen in einem Drei-Faktoren-Setting bei simultaner geringfügig übergewichtiger Kalibrierung, $w_{cap}=0.59$, an Caplet- als an Swaptionmärkte..... | 112 |
| Abb. 4-9 | Forward Rate- und Swap Rate-Modellkorrelationsfunktionen in einem Fünf-Faktoren-Setting bei simultaner gleichgewichtiger Kalibrierung, $w_{cap}=0.5$, an Caplet- und Swaptionmärkte..... | 114 |
| Abb. A-1 | Die Approximation der Short Rate-Volatilität als Fourierreihe mit einer begrenzten Anzahl von Frequenzen | 149 |

Abkürzungsverzeichnis

| | |
|----------|--|
| a. s. | almost surely |
| CAPM | Capital Asset Pricing Model |
| CCLMM | Cross-Currency Libor Market Model |
| CEV | Constant Elasticity of Variance |
| CBOE | Chicago Board Options Exchange |
| CF | Characteristic Function |
| CIR SRP | Cox/Ingersoll/Ross Square Root Process |
| et al. | et alteri, et alii |
| FFT | Fast Fourier Transformation |
| FRA | Forward Rate Agreement |
| FT | Fourier Transformation |
| HJM | Heath-Jarrow-Morton |
| i. d. R. | in der Regel |
| IFT | Inverse Fourier Transformation |
| KBE | Kolmogorov Backward Equation |
| KFE | Kolmogorov Forward Equation |
| M | Marktindex |
| MGF | Moment Generating Function |
| LMM | Libor Market Model |
| LSA | Least-Squares Approach |
| ODE | Ordinary Differential Equation |
| OPT | Option Pricing Theory |
| PDE | Partial Differential Equation |
| RND | Radon-Nikodym-Derivative |
| SDE | Stochastic Differential Equation |
| SML | Security Market Line |
| TD | Transition Density |

1 Einleitung

11 Meilensteine in der Evolution der Zinsstrukturmodelle und Ausblick auf die Zukunft

Seit dem zögerlichen Anfang in den späten 70ern des vorigen Jahrhunderts hat die Entwicklung der Zinsstrukturmodelle einen immensen Fortschritt erfahren. Die Einzelschritt-Beschreibung jeder innovativen Änderung von Anbeginn bis zum aktuellen Status der Modellierung würde den Rahmen dieses einführenden Abschnitts sprengen. In Anbetracht der mäandrischen Route, die das Engineering von Zinsderivaten bislang zurückgelegt hat, gilt es stattdessen, die wichtigsten Themen im übergeordneten Kontext der fortwährend evolvierenden theoretischen Konzeptionen auf der langen Reise von Vasiceks gleichgewichtiger Charakterisierung einer Ansammlung von Zinsstrukturkurven, die lediglich einer parallelen Verschiebung unterlagen, bis hin zu den heutigen multifaktoriellen, währungsübergreifenden *Stochastic Volatility* Jump-Diffusion Libor-Marktmodellen mit stochastischer Sprungintensität, die jegliche denkbaren Formen der impliziten Volatilitätsstruktur reproduzieren können, zu akzentuieren.

Trotz ihrer scheinbaren Simplizität waren die Modelle der ersten Generation in gewisser Hinsicht sehr sophistiziert, da sie beim Pricing von Derivaten den ambitionierten Versuch unternahmten, die reale Welt der Zinsprodukte in ihrer Gesamtheit zusammen mit der Risikoaversion des Investors zu beschreiben. Die Kernidee der Bewertung mittels perfekter Duplikation und der risikoneutralen Preistheorie noch in ihrem frühen Kindesalter, war die zentrale Erkenntnis, dass derivative Instrumente - charakterisiert durch ihr eigenes äquivalentes Martingalmaß - eine spezielle Teilwelt bilden. Dieses Konzept war noch nicht fest in der Denkweise des Produktstrukturierers verwurzelt. Folglich drängte sich das reelle, objektive Wahrscheinlichkeitsmaß als natürlicher Startpunkt der Modellierung auf, wobei die Bemühung der Forscher in diesem epochalen Stadiums der Erklärung der wirklichen Welt (irgendwo da draußen) galt, anstatt nur einer kleinen, der bewertungsrelevanten Portion von ihr - eine Sisyphos-Arbeit. Aus diesem Grund - und nicht bloß aus einer Laune heraus - nimmt sich ein bedeutender Teil des Kapitels 2 der Aufgabe an, die erste Generation der Zinsstrukturklärungsansätze grundlegend umzugestalten, indem sie in die Gussform der Martingal-Preistheorie hineinmodelliert werden.

Die anhaltende Vorstellung, dass Modelle zur Zinsstruktur von Natur aus unvollkommen, annähernd und manchmal sogar sehr grob approximativ sind, genießt nach wie vor breite Akzeptanz. Allerdings war auf dieser ersten Entwicklungsstufe der Maßstab, an-

hand dessen die Güte eines Modells gemessen wurde, nicht die Fähigkeit, gewisse Eigenschaften der Marktrealität - wie z. B. die implizite Volatilität - um jeden Preis präzise zu reproduzieren, wenn das auf Kosten anderer makroökonomischer Aspekte geschah. Das ausgewogene Verhältnis zwischen der relativen Genauigkeit und der Notwendigkeit zusätzlicher finanzwirtschaftlicher Einflussfaktoren zu berücksichtigen, die es schließlich zu erklären versuchte, war das Gütesiegel eines jeden Modells in diesen frühen Jahren. Die erste Gattung der Modelle mag außerstande gewesen sein, die Marktzensstruktur exakt wiederzugeben, aber diese Konstrukte versuchten sie wenigstens zu erklären. Sie legten alle erdenklichen Formen fest, wie die Zinsstruktur auf der Grundlage der als wahr angenommenen treibenden Faktoren auszusehen hätte. Für jeden Modellgläubigen indizierte die Diskrepanz zwischen modelltheoretischen und Markt-Bondpreisen eine Arbitragemöglichkeit, wohingegen die Unfähigkeit des Modells, Marktbondpreise zu reproduzieren, für den Händler von Libor-Optionen einfach die Fehlbewertung des *Underlying* bedeutete.

Sobald die zweite Generation von Erklärungsansätzen über die Zinsstruktur mit deutlich stärker ausgeprägtem deskriptivem Charakter unter der treffenden Bezeichnung *No Arbitrage*-Modelle erschien, konnte praktisch jede Renditekurve, sei sie noch so deformiert, modellinhärent rekonstruiert werden. Das gleiche Schicksal ereilte die Modellierung in diesem fortgeschrittenen Stadium wie jede andere Theorie, die von Natur aus mehr zu beschreiben versucht: sie büßte ihre Erklärungsstärke ein. Dieser Verlust fiel jedoch nicht so gravierend aus, außer vielleicht für den Bond-Arbitrageur, der sein Werkzeug zur Formulierung von persönlichen Ansichten über die Form der aktuellen Zinsstruktur aus der Hand gab. Diese Besonderheit erleichterte gleichzeitig das Leben des Optionshändlers, der die ersten Caplets und Swaptions bewertete, da er sich nun beruhigt zurücklehnen konnte - das *Underlying* (das relevante Segment der Renditekurve) wurde implizit korrekt gepreist. Darüber hinaus befand er sich in der attraktiven Position, die modellgenerierten Delta-Hedgetransaktionen (Kaufen/Verkaufen von Bonds) zu Marktpreisen durchführen zu können.

Ohne diesen zweifellos wichtigen Abschnitt aus der Geschichte der Zinsstrukturmodellierung exzessiv zu glorifizieren, schenkt die vorliegende Arbeit diesem Entwicklungsstadium die gebührende Beachtung, indem sie das Hull/White-Modell gänzlich unter Verzicht auf *PDEs* theoretisch neu fundiert und bei maximaler Parameterflexibilität rekaliibriert. Zusätzlich wird für die Optionsbewertung ein neues Zinsmodell mit *Short*

Rate-abhängiger Reaktion auf die *Brownschen* Schocks im Gegensatz zur damals üblichen Annahme konstanter - bzw. im Rahmen der vorgeschlagenen Erweiterung des Hull/White-Konstrukts zeitdeterministischer - Volatilität entwickelt.

So glücklich wie einerseits der Trader von *Plain Vanilla* Instrumenten gewesen sein mag, so war die Position eines Händlers exotischer Produkte andererseits in der damaligen Finanzszene keineswegs beneidenswert. Die neue Modellfamilie konnte zwar jede erdenkliche Zinskurve nachbilden, die automatische Reproduktion der Preise aller Standardoptionen (Caplets und Swaptions) war jedoch mit diesen Modellen nicht möglich. Der Fokus der Modellierungsbemühung verschob sich folglich von der Erklärung der Form der Renditestrukturkurve auf die Einschätzung der Markt-Volatilitätsstruktur. Als Konsequenz ergaben sich die ersten modellgestützten Möglichkeiten zur optionsbasierten Arbitrage, da unter der Voraussetzung einer adäquat gewählten Volatilitätsfunktion Diskrepanzen in den Marktpreisen von Caplets aufgedeckt und ausgenutzt werden konnten. Allerdings war die größte Anforderung, die der Trader exotischer Produkte an das Modell stellen konnte, dass seine mit Hilfe von Caplets und Swaptions aufgestellten Option-Hedges wenigstens für jeden separaten Deal mit dem *Plain Vanilla* Markt im Einklang waren. Der neue Maßstab zur Beurteilung der Güte des Zinsstrukturmodells verlagerte sich auf die Erklärung der Volatilität von Caplets und Swaptions auf der Basis einer exogen durch die Erwartungen, die Risikoaversion der Investoren und die Annahmen über die treibenden Faktoren der Dynamik produzierten Renditestrukturkurve.

Die nächste Entwicklungsstufe in der Zinsstrukturmodellierung markierte die Gattung der Marktmodelle, angekündigt durch die Fokussierung auf ein neues *Underlying* im Rahmen des Heath-Jarrow-Morton (*HJM*) Modells und Libor-Marktmodells. Der entscheidende Unterschied zu den bisherigen Ansätzen bestand in der Fähigkeit der neuen Verfahren, diese sowohl an beliebige Renditestrukturen zu kalibrieren als auch die exogene *At-the-Money (ATM)* Volatilitätsstruktur exakt und mit alarmierender Leichtigkeit implizit wiederzugeben. Der perfekte Fit an eine Größe, die bis jetzt bestenfalls nur unpräzise reproduziert werden konnte, ermöglichte es, das Risikomanagement durch die bessere Kontrolle über das Niveau des Volatilitätsrisikos zu optimieren, verkomplizierte allerdings erneut das Leben eines Händlers exotischer Optionen, der seine nächste Marge aus dem Residualrisiko (dem nicht diversifizierbaren und damit einzigen vom Markt entgoltenen Risiko) erwirtschaften musste. Viel versprechende Spielwiesen für die Exoten dieser frühen Zeit waren die Struktur des Volatilitätssmile, die *Vanna*- und *Volga*-

Risiken, solange sich noch kein Modellierungskonsens über die beste Methode, diese feineren Aspekte des Risikomanagements von komplexen Derivaten adäquat zu steuern, herausgebildet hatte.

So erstrebenswert, wie die Konformität des Modells mit dem Markt gewesen sein mag, war diese automatisierte Kalibrierung, so schwer sie mit der vorherigen Generation von Zinsstrukturmodellen erreichbar war, mittlerweile beunruhigend geworden. In Abhängigkeit von der gewählten Parametrisierung existierten nahezu unendlich viele Möglichkeiten (unzählige Freiheitsgrade), diesen “perfekten” Fit mit erstaunlicher Einfachheit herbeizuführen. Ohne die lauern den Gefahren einer solchen einseitigen Ausrichtung auf die erfolgreiche Kalibrierung bis auf die fünfte Nachkommastelle erkennen zu wollen, galt die höchste Priorität bei der Konstruktion des Modells der genauesten Reproduktion der aktuellen Marktdaten.

Einige unerwünschte Nebenwirkungen ergaben sich als Konsequenz aus der obsessiven Fokussierung auf die Anpassung an eine immer weiter steigende Anzahl von marktbeobachtbaren Inputgrößen, ohne die Austauschbeziehung zwischen der Güte des Fits und der finanzwirtschaftlichen Plausibilität der Modellfunktionen zu berücksichtigen. Jede mögliche Wahl der modelldeterminierenden Parameter (zeitabhängige Integrale von instantanen Kovarianztermen) resultierte in unterschiedlichen Preisen für die zu bewertenden exotischen Produkte. Viel gravierender war jedoch die Inhomogenität, entweder *Forward Rate*-spezifisch, zeitabhängig oder sogar beides gleichzeitig, als unausweichliche Begleiterin der Modellierungsbemühungen in der Entstehungsphase des modernen Ansatzes, die ein zukünftiges Modellverhalten - erzwungen durch eine Überkalibrierung und nicht als Ausdruck der Händlererwartungen - unterschiedlich von der bekannten Vergangenheit voraussagte. Obwohl die Präzision der Kalibrierung an den aktuellen Markt sehr wichtig ist, da der perfekte Fit die instantan anfallenden Hedgekosten genau widerspiegelt, können die Kosten der durch die zeitinhomogene Evolution der modellbestimmenden Funktionen verursachten Notwendigkeit einer Rekalibrierung auf kontinuierlicher Basis verheerend ausfallen, vor allem bei langfristigen Kontrakten, die genau aus diesem Grund alle - unabhängig davon wie *Plain Vanilla* sie aussehen mögen - als Hybride Strukturen zu bezeichnen sind.

Diesem fundamentalen *Trade-off* in seinen vielfältigen Ausprägungen, charakteristisch für den modernen Modellierungsansatz, wird ein erheblicher Teil der vorliegenden Arbeit gewidmet (Kapitel 34), indem die Auswirkungen einer Libor-basierten Modellimp-

lementierung und -kalibrierung auf die Reproduktion des komplementären Swaption-Marktes detailliert analysiert werden. Zusätzlich dazu wird die Kongruenz der beiden (Caplet- und Swaption-) Märkte auf der Basis einer forcierten Joint-Kalibrierung im Hinblick auf die Modelleigenschaften, die zu diesem Zweck aufgeopfert werden müssen, untersucht und es wird argumentiert, inwieweit und - wenn überhaupt - wann es sinnvoll erscheint, diese simultane Kalibrierung an beide *Plain Vanilla* Optionsmärkte zu erzwingen.

Ausschlaggebend ist jedoch die Entscheidungsfreiheit, die dem Trader sowohl bei der Implementierung als auch bei der Kalibrierung der Marktmodelle gewährt wird. Es ist äußerst wichtig zu realisieren, dass der Modellanwender allein die unzähligen Freiheitsgrade reduzieren kann, sogar muss, indem er selbst strenge strukturelle Nebenbedingungen bezüglich der funktionalen Form und der Zeit- bzw. Zustandsabhängigkeit der Modellparameter einführt. Diese Auferlegung einer bestimmten instantanen Volatilitäts- und Korrelationsstruktur stellt de facto das Bindeglied zwischen dem modernen Ansatz und den konventionellen, arbitragefreien *Short Rate*-Modellen dar. In diesem Sinne repräsentiert die Familie der Marktmodelle keine selbständigen Modelle an sich, sondern ein neues, anpassungsfähiges Parametrisierungsvokabular für ein "altes", traditionelles *Short Rate*-Modell. Um diese intrinsische Verbindung aufzudecken, leitet die vorliegende Arbeit eine spezifische instantane Volatilitätsfunktion her und demonstriert wie auf deren Basis das *HJM*-Konstrukt auf das Hull/White-Zinsmodell zurückgeführt werden kann.

Die State-of-the-Art Modellierungstechniken müssen allerdings weit vollkommener sein, um den komplexen Eigenschaften des heutigen Marktes - unter anderem nicht ausreichende Liquidität bzw. fehlende Handelbarkeit des *Underlying* und *Skew/Smile* der impliziten Volatilitätsstruktur - gerecht zu werden. Die wahrgenommene Abweichung des *Underlying* vom lognormalen Verhalten konnte anfangs durch den Mangel an Proportionalität in der *Forward Rate*-Änderung zum aktuellen Zinslevel erklärt werden. Modelltheoretisch wurde dieser Effekt mit Hilfe der *Displaced Diffusion*-Dynamik, einer Mischung aus proportionalen (lognormalen) und unabhängigen (normalen) Reaktionen auf *Brownsche* Schocks, bzw. des eng damit zusammenhängenden *CEV*-Prozesses als Spezialfälle des *Local Volatility*-Ansatzes eingefangen. Die später (historisch betrachtet während und unmittelbar nach der russischen Krise) erschienenen asymmetrischen Formen der impliziten Volatilität erforderten den Einsatz sophistizierterer Metho-

den auf der ewigen Suche nach der “richtigen” Dynamik für das *Underlying*. Immerhin kann jedes Modell, das genügend Freiheitsgrade (z. B. in der Gestalt zeitabhängiger Parameter) aufweist, zwangsweise zur perfekten Reproduktion der aktuellen Marktpreise erzogen werden. Wenn jedoch die Dynamik nicht korrekt postuliert worden ist, wird dieses Modell falsche Risikosensitivitäten ermitteln und irreführende Hedges empfehlen, wie es bei dem *Local Volatility*-Ansatz in der Umgebung eines stark ausgeprägten *Smile* der Fall ist.

Zusätzlich zum *Vanna*-Risiko, gesteuert durch *Skew*-generierende Modellierungstechniken, erfährt die Volatilität vollkommen zufällige Änderungen unabhängig von der stochastischen Entwicklung des *Underlying* - das *Volga*-Risiko. Praktische Überlegungen im Hinblick auf das Risikomanagement erfordern, diesen Exposure von strukturierten Produkten über diverse Assetklassen hinweg einzuschätzen. Als Folge daraus ergibt sich die Unerlässlichkeit der Anwendung von *Smile*-nachbildenden *Stochastic Volatility*-Methoden, gegebenenfalls in Kombination mit dem *Local Volatility*-Ansatz. Sobald man jedoch die Welt lognormaler *Forward Rates* und deterministischer Volatilitäten verlässt, geht die Vollständigkeit des Marktes verloren mit der Konsequenz, dass die Risikopräferenzen der Investoren für den Preisprozess nicht länger irrelevant sind.

Mathematisch betrachtet resultieren aus dem Erfordernis einer arbitragefreien Modellierung grundsätzlich drei mögliche Situationen¹: (i) Es existiert ein eindeutiges bewertungsrelevantes Wahrscheinlichkeitsmaß, wodurch das Modell und dessen Parameter unmissverständlich festgelegt werden. Der Markt ist vollständig und unter der Annahme kontinuierlichen Handels sind alle derivativen Strukturen gemäß dem *Martingale Representation Theorem* perfekt replizierbar; (ii) Es existiert kein Pricingmaß, folglich lässt das Modell Arbitrage zu; (iii) Es gibt mehrere Lösungen für den Marktpreis des Risikos, es existieren unendlich viele äquivalente Wahrscheinlichkeitsmaße, das Pricingmaß ist nicht eindeutig. Arbitragemöglichkeiten sind ausgeschlossen, der Markt ist allerdings unvollständig. Der Payoff von individuellen komplexen Produkten kann nicht repliziert werden, so dass sie unhedgebaren Residualrisiken ausgesetzt sind.

Wenn der Markt unvollständig ist, spiegeln die risikoadjustierten Modellparameter das Ausmaß der momentan vorherrschenden Risikoaversion wider und sind mit einem der

¹ Vgl. (1) J. M. Harrison, S. R. Pliska, “Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading”, *Stochastic Processes and Their Applications* 11 (1981), S. 215-260; (2) J. M. Harrison, S. R. Pliska, “A Stochastic Calculus Model of Continuous Trading: Complete Markets”, *Stochastic Processes and Their Applications* 15 (1983), S. 313-316.

vielen Wahrscheinlichkeitsmaße assoziiert, die mit den aktuellen Preisen kompatibel sind. Es existiert jedoch keine Garantie, dass der Markt in Zukunft die gleiche Prämie für unhedgebare Risikofaktoren erheben bzw. dasselbe Pricingmaß präferieren wird. Der moderne Trader von heute, der seinen Hedge sowohl gegen die Änderungen im *Underlying* (*Delta*-Hedge) und die mögliche Misspezifikation der Modellparameter (*Vega*-Hedge) als auch gegen die Residualrisiken (*Vanna*- und *Volga*-Risiko) aufgestellt hat, ist mit einem deutlich subtileren und komplexeren Unsicherheitsfaktor in der Gestalt eines “wankelmütigen” Marktes hinsichtlich seiner nicht länger irrelevanten Risikopräferenz konfrontiert.

Realistisch betrachtet kann niemand die Zukunft der Zinsstrukturmodellierung voraussehen. Sicher ist lediglich, dass die Trading Community ihre Bemühungen intensivieren wird, um ingeniose Lösungsmethoden für bestehende Probleme zu finden und besser auf die Eventualitäten, die sie noch nicht erkannt hat, vorbereitet zu sein. Vielleicht steht die Geburt der nächsten revolutionären Generation von Zinsstrukturmodellen unmittelbar bevor, wenn nicht in einem plötzlichen Anfall von Genialität, dann sicherlich erzwungen durch die Bedürfnisse eines immer komplexer werdenden Marktes. Im Prinzip wird die Kernidee des modernen Ansatzes, implizit die globale Kalibrierung an alle liquiden Märkte anzustreben und so viel Marktinformationen wie nur möglich in das Modell einfließen zu lassen, aufrechterhalten. Lediglich die Palette der Kalibrierungsinstrumente wird mit der Zeit reichhaltiger werden, von den *Plain Vanilla* Optionsmärkten (Caplets and Swaptions) heute bis zu *First/Second Flow* exotischen Produkten in Zukunft.

12 Struktur der Forschungsarbeit

Auf einer übergeordneten Ebene ist die vorliegende Arbeit in klassische und moderne Methoden zur Modellierung der Zinsstrukturkurve gegliedert, wobei dem modernen Marktansatz ein größeres Gewicht beigemessen wird. Diese hierarchische Anordnung vertritt die Ansicht des Autors, dass in der heutigen Finanzszene die moderne Modellierungsphilosophie die klassischen Verfahren überwiegt, wenn der Maßstab der Bedeutung und Macht angelegt wird. Allerdings repräsentieren nur diese klassischen Methoden einzig wahrhaftige Modelle, im Gegensatz zu den modernen, die lediglich einen flexibleren und mächtigeren mathematischen Ausdruck eines klassischen Modells darstellen. Zum Zweck des besseren Verständnisses des Ursprungs und der Macht des modernen Ansatzes, ist die Konfrontation mit dem klassischen Konzept unvermeidlich.

Bevor in Kapitel 2 bestimmte *Short Rate*-Modelle behandelt werden, wird zunächst die fundamentale *PDE* für beliebige Payoff-Funktion von Derivaten auf den Zinssatz hergeleitet und demonstriert, wie sie auf die bekannte Bondpreis-*PDE* zur Determinierung der *Bond Curve* zurückgeführt werden kann. Anschließend wird das *Short Rate*-Modell von Vasicek in Abgrenzung zur im Originalpaper verwendeten *PDE*-Technik neu aufgestellt. Aus dessen Schwächen bezüglich der Anpassungsfähigkeit heraus geht der nächste Abschnitt auf das Hull/White-Zinsmodell ein und demonstriert, wie das Konstrukt unter maximaler Parameterflexibilität (zusätzlich mit einer zeitabhängigen instantanen Volatilitätsfunktion) kalibriert werden kann. Das Kapitel kulminiert in der Entwicklung einer Optionspreisformel auf der Basis eines *Short Rate*-Modells mit stochastischer Volatilität und schließt mit einem Fazit über die Brauchbarkeit und Grenzen der *Short Rate*-Modelle ab.

Kapitel 3 beginnt mit einer Demonstration der Aussichtslosigkeit einer effektiven Kalibrierungsprozedur im Rahmen des erweiterten *Short Rate*-Modells mit zustandsabhängiger Volatilitätsfunktion und sieht darin den Richtungswechsel der Modellierungsbemühungen hin zur Entwicklung der ganzheitlichen Zinsstrukturdynamik im Gegensatz zur Bestimmung der Evolution der instantanen Spot Rate begründet. Anschließend wird eine spezifische instantane Volatilitätsstruktur hergeleitet, mit deren Hilfe die intrinsische Beziehung zwischen dem modernen Ansatz (in der Gestalt eines *HJM*-Modells) und der klassischen Methode (Hull/White-Zinsmodell) aufgedeckt wird. Der größere Teil dieses dritten Kapitels wird jedoch der Implementierung des Libor-Marktmodells gewidmet, in dem unter anderem eine innovative Driftapproximation entwickelt und eine neue instantane Volatilitätsfunktion hergeleitet werden. Im Rahmen der darauf folgenden Erstellung vielseitiger Kalibrierungsroutinen wird die Kongruenz zwischen den beiden Hauptmärkten für *Plain Vanilla* Zinsoptionen eingehend analysiert.

Kapitel 4 befasst sich - als Schlusswort und Ausblick zugleich - mit den fortgeschrittenen Techniken zur möglichst genauen Reproduktion vom *Skew/Smile* der impliziten Volatilitätsstruktur und der Kalibrierung an die komplette Marktinformation im Sinne von Optionspreisen über alle verfügbaren Strikes und Fälligkeiten hinweg.

Wichtige mathematische Herleitungen, die das Verständnis stützen sollen, jedoch für die Transparenz der Darstellung als nicht besonders förderlich erachtet werden, sind in die Anhänge ausgelagert.

2 Der klassische Ansatz zur Modellierung der Zinsstrukturkurve

21 Die historische Entwicklung der Zinsstrukturmodelle im Kontext der marktkonsistenten Bewertung von Zinsderivaten

Mit der Modellierung der Zinsstrukturkurve wird stets das Ziel verfolgt, die Dynamik der Zinsstruktur mathematisch möglichst treffend zu beschreiben. Dieses theoretische Konstrukt soll die Entwicklung der *Yield to Maturity* in Abhängigkeit von der Zeit abbilden. Graphisch findet die Beziehung zwischen den *Yields to Maturity* von Zerobonds, die einer bestimmten Risikoklasse angehören, und deren entsprechender Fälligkeit ihren Niederschlag in der *Yield Curve*. Im Zusammenhang mit der marktkonsistenten Bewertung von Zinsderivaten liegt das Hauptproblem darin, einen arbitragefreien Prozess für den zu modellierenden Parameter aus der zugrunde gelegten Dynamik abzuleiten.

Erste Lösungsansätze fokussierten, ausgehend von bestimmten Annahmen über die ökonomischen Variablen, auf das Verhalten der instantanen *Short Rate*, des Zinssatzes von heute für eine infinitesimal kleine Zeitperiode. Dieser frühen Phase der Bewertung von Zinsderivaten sind die ersten Gleichgewichtsmodelle² entsprungen. Verantwortlich für die Dynamik der *Yield Curve* war ausschließlich die instantane *Short Rate*, deren Entwicklung durch eine stochastische Differentialgleichung, zusammengesetzt aus einer deterministischen *mean-reverting* Drift und einer stochastischen Komponente mit einem konstanten oder zur Quadratwurzel der *Short Rate* proportionalen Diffusionskoeffizienten, beschrieben wurde. Die große Schwäche dieser Gleichgewichtsmodelle bestand darin, dass sie nicht kalibriert werden konnten, um automatisch die vorherrschende Zinsstruktur exakt widerzuspiegeln.

Aus dieser Unzulänglichkeit heraus entstand die nächste Generation von Zinsstrukturmodellen. Die *No Arbitrage*-Modelle wurden so konzipiert, dass sie zwangsläufig konsistent mit der aktuellen Zinsstruktur waren, die im Unterschied zu den Gleichgewichtsmodellen als Inputparameter eingesetzt wurde.³ In der Regel erreichte man diesen Effekt, indem die Drift und/oder die Diffusion der *Short Rate* im Gegensatz zu den Modellen der vorhergehenden Phase als eine deterministische Funktion der Zeit gestaltet wurden. Gravierende Einschränkungen der Modelle auf dieser Stufe der Entwicklung ergaben sich einerseits wegen der Abhängigkeit von nur einem einzigen Unsicherheitsfaktor, einer eindimensiona-

² Vgl. (1) O.A.Vasicek, "An Equilibrium Characterization of the Term Structure", *Journal of Financial Economics*, 5 (1977), S.177-188. (2) J.C.Cox, J.E.Ingersoll, S.A.Ross, "A Theory of the Term Structure of Interest Rates", *Econometrica*, 53 (1985), S. 385-407.

³ Vgl. (1) T.S.Y.Ho, S.B.Lee, "Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims", *Journal of Finance*, 41 (1986), S. 1011-1129. (2) J.Hull, A.White, "Pricing Interest Rate Derivative Securities", *Review of Financial Studies*, 3, 4 (1990), S. 573-592.

len *Brownschen* Bewegung (Ein-Faktor-Modell), andererseits wegen der Unmöglichkeit einer vollständigen Kontrolle über die zukünftige Volatilitätsstruktur. Daraus folgt unmittelbar, dass diese Konstruktionen zum einen nur eine parallele Verschiebung der *Yield Curve* rechtfertigen und zum anderen, obwohl sie den zum Zeitpunkt der Bewertung auf dem Markt vorherrschenden instantanen Volatilitäten angepasst werden können, eine nichtstationäre Volatilitätsstruktur aufweisen, die das Pricing von nichtstandardisierten Zinsinstrumenten in einer volatilen Umgebung zusätzlich erschwert. Als nachteilig erwies sich auch das modelltheoretisch begründete Auftreten von negativen Zinssätzen mit positiver Wahrscheinlichkeit und damit einhergehend von Preisen für Zero Bonds größer als 1, was der Grundidee der Arbitragefreiheit widerspricht⁴.

Alle bisher erwähnten Modelle können als klassische Ansätze zur Bewertung von Zinsderivaten bezeichnet werden, da sie sich die Beziehung zwischen einem Zero Bond und der *Short Rate* zunutze machen, um die Zinsstruktur nachzubilden. Im Rahmen des modernen Ansatzes verlagert sich das Augenmerk auf die Modellierung der *Forward Rates*, basierend auf der einfachen Relation zwischen - bis auf ihre Fälligkeit - identischen Zero Bonds und den entsprechenden zukünftigen Zinssätzen. Zusätzlich wird der mehrdimensionalen Unsicherheitsquelle mit Hilfe von Multi-Faktor-Modellen Rechnung getragen. Derartige Modelle zeichnen sich einerseits durch höhere Komplexität aus, andererseits gewähren sie mehr Flexibilität bei der Spezifikation der Volatilitätsstruktur und zwar sowohl der momentan vorherrschenden als auch der zukünftig zu erwartenden. Sie erweisen sich somit als ein geeignetes Instrument zur Bewertung von komplexen exotischen Zinsprodukten.

22 Die fundamentale Gleichung zur Bestimmung der Zinsstruktur

221 Einführung und Fragestellung

Aus der Theorie der Optionsbewertung ist die partielle Differentialgleichung (*PDE*) von Black-Scholes bekannt, der der Preis einer Option unter einer bestimmten terminalen Bedingung genügen muss. Daher ist es nahe liegend, die Frage zu stellen, ob sich eine *PDE* in ähnlicher Form für zinssensitive Derivate herleiten lässt

Die Frage ist zweifach affirmativ zu beantworten. Der erste Weg wird im Wesentlichen den Gedankenschritten von Vasicek folgen. Ausgehend von der Grundidee, dass Bonds bis auf ihre Fälligkeit identische Instrumente darstellen und daher ähnlichen infinitesimalen Zufallsschwankungen im Sinne der gleichen *Brownschen* Bewegung unterliegen, wird es

⁴ Musiela und Rutkowski stellen zwei Anforderungen an eine Grundgesamtheit von Bonds $B(t, T)$. Der unerwünschte Effekt $B(t, T) \geq 1$ verstößt gegen die zweite, weiter gefasste *no-arbitrage condition*. Vgl. M. Musiela, M. Rutkowski, "Martingale Methods in Financial Modelling" (1997), S.330, Definition 14.1.3

gelingen, unter sorgfältiger Anpassung der Gewichtung ein risikoloses Portfolio aus zwei (oder mehreren) Bonds zusammenzustellen. Um Arbitragemöglichkeiten auszuschließen, muss die Rendite dieses Portfolios für ein infinitesimales Zeitintervall dem risikofreien Zinssatz entsprechen. Der zweite Weg wird sich der Theorie über Diffusionsprozesse bedienen. Unter der Annahme, dass die Spot Rate einem *Markov*-Prozess folgt, wird die Martingaleigenschaft benutzt und nach Anwendung von *Ito's* Lemma die Drift der resultierenden stochastischen Differentialgleichung (*SDE*) gleich Null gesetzt.

Die Spezifikation der F_t -messbaren *Yield to Maturity* $Y(t, T)$ mit $0 \leq t \leq T \leq T^{\max}$ ist identisch mit der Bestimmung des stochastischen Bondpreises $B(t, T)$:

$$\begin{aligned} B(t, T) &= e^{-(T-t)Y(t, T)} \\ Y(t, T) &= -\frac{\log B(t, T)}{T-t} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Bekanntlich gilt:

$$\begin{aligned} B(t, T) &= E \left(e^{-\int_t^T r(u) du} \mid F_t \right) \\ B(t, T) &= e^{-\int_t^T f(t, u) du} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Ferner kann eine Beziehung zwischen $Y(t, T)$ und der instantanen *Short Rate* $r(t)$ hergestellt werden:

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow t} Y(t, T) &= -\lim_{T \rightarrow t} \frac{\log B(t, T)}{T-t} = -\lim_{T \rightarrow t} \frac{1}{B(t, T)} \frac{\partial B(t, T)}{\partial T} \\ -\frac{\partial B(t, T)}{\partial T} \Big|_{T=t} &= -\frac{\partial E \left(e^{-\int_t^T r(u) du} \mid F_t \right)}{\partial T} \Big|_{T=t} \\ &= -E \left(-r(T) e^{-\int_t^T r(u) du} \mid F_t \right) = -E(-r(t) \mid F_t) = r(t) \end{aligned} \quad (2.3)^5$$

In Analogie zu (2.3):

⁵ Da die direkte Anwendung des Grenzwertoperators zu einer Unbestimmtheit in der Form 0/0 führt, wird auf die Regel von *L'Hospital* zurückgegriffen. Vgl. dazu M. Abramowitz, I. A. Stegun, "Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables" (1972), Abschnitt 3.4.1, S.13.

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow t} Y(t, T) &= -\frac{\partial B(t, T)}{\partial T} \Big|_{T=t} = -\frac{-\int_t^T f(t, u) du}{\partial e^{-t}} \Big|_{T=t} \\ &= f(t, T) e^{-t} = f(t, t) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Jedes mathematische Modell, das den stochastischen Bondpreis $B(t, T)$ determiniert, legt automatisch die gesamte Zinsstruktur⁶ im Zeitpunkt t für $T \in [t, T^{\max}]$ fest.

222 Herleitung der PDE mit Hilfe eines risikolosen Portfolios aus zwei Zerobonds

Der erste Schritt zur Herleitung der *PDE* besteht darin, die Dynamik der ausfallfreien Bonds mit Restlaufzeiten $T_1 - t$ bzw. $T_2 - t$ zu postulieren⁷:

$$\begin{aligned} dB(t, T_1) &= \mu(B(t, T_1), t)B(t, T_1)dt + \sigma_1(B(t, T_1), t)B(t, T_1)dW_t \\ dB(t, T_2) &= \mu(B(t, T_2), t)B(t, T_2)dt + \sigma_2(B(t, T_2), t)B(t, T_2)dW_t \end{aligned} \quad (2.5)^8$$

Ferner wird die instantane *Short Rate* $r(t)$ als ein Diffusionsprozess modelliert:

$$dr(t) = a(r(t), t)dt + b(r(t), t)dW_t \quad (2.6)^9$$

Der Bondpreis $B(t, T_{1,2})$ wird anhand der Entwicklung der instantanen *Short Rate* im Zeitintervall $(t, T_{1,2})$ bestimmt, folglich als eine Funktion der Spot Rate:

$$B(t, T_{1,2}, r(s)) = B(t, T_{1,2}, r(t)), \quad \text{mit } t \leq s \leq T_{1,2} \quad (2.7)$$

⁶ Durch die Beziehung (2.1) lassen sich Bondpreise und *Yields to Maturity* gegenseitig ineinander überführen. Mit Zinsstruktur ist in diesem Zusammenhang die *Yield Curve* gemeint oder die Zinsertragskurve. Vgl. L. Perridon, M. Steiner, "Finanzwirtschaft der Unternehmung" (2003), S.190-191. Aus (2.1) und (2.2) kann eine Beziehung zwischen der *Yield to Maturity* $Y(t, T)$ und der instantanen *Short Rate* $r(t)$, der

Spot Rate, hergeleitet werden: $e^{-Y(t, T)(T-t)} = E \left(e^{-\int_t^T r(s) ds} \mid F_t \right)$. Falls die *Short Rate* über die Laufzeit des

Bonds hinweg konstant bleibt, entspricht sie der *Yield to Maturity*.

⁷ Zu den Ausführungen in diesem Abschnitt Vgl. **(1)** O. A. Vasicek, "An Equilibrium Characterization of the Term Structure", Journal of Financial Economics 5 (1977), S. 177-184. **(2)** S. Neftci, "Mathematics of Financial Derivatives" (2000), S. 454-460.

⁸ Da die Drift nicht als konstant, sondern als eine Funktion der Zeit und des Bonds selbst gestaltet wird, folgt der Bondpreisprozess nicht notwendigerweise einer *Brownschen* Bewegung.

⁹ Die Drift $a(r(t), t)$ und die Diffusion $b(r(t), t)$ sind entweder anhand historischer Daten zu schätzen, oder mit Hilfe von Marktpreisen zu kalibrieren. Die *Short Rate* $r(t)$ weist die *Markov*-Eigenschaft auf. Für den Fall einer geometrischen *Brownschen* Bewegung gilt: $dr(t) = ar(t)dt + br(t)dW_t$,

$$E(r(t) \mid F_s) = r(s) e^{(a-\frac{1}{2}b^2)(t-s)} E(e^{b(W_t - W_s)} \mid F_s) = r(s) e^{(a-\frac{1}{2}b^2)(t-s)} e^{\frac{1}{2}b^2(t-s)} = r(s) e^{a(t-s)}$$

Der Erwartungswert von $r(t)$ bedingt auf F_s hängt lediglich von dem zuletzt beobachteten Wert $r(s)$ ab. Ökonomisch interpretiert bedeutet dieses Merkmal im Wesentlichen, dass die zukünftige Entfaltung des *Short Rate*-Prozesses, vorausgesetzt die heutige Ausprägung ist bekannt, unabhängig von der vergangenen Entwicklung ist, die zum heutigen Wert geführt hat. Für den Fall eines *mean-reverting*-Prozesses wird die *Markov*-Eigenschaft im Rahmen des Modells von Hull/White nachgewiesen. Siehe dazu Anlage 1.

Aus diesen zwei Bonds mit Gewichtungsfaktoren θ_1 bzw. θ_2 wird ein Portfolio zusammengestellt:

$$P = \theta_1 B(t, T_1, r(t)) - \theta_2 B(t, T_2, r(t)) \quad (2.8)$$

$$\theta_1 = \frac{\sigma_2}{B(t, T_1, r(t))(\sigma_2 - \sigma_1)} P, \theta_2 = \frac{\sigma_1}{B(t, T_2, r(t))(\sigma_2 - \sigma_1)} P \quad (2.9)$$

Die infinitesimale Änderung des Portfolios im Zeitablauf kann folgendermaßen ermittelt werden:

$$dP = \theta_1 dB(t, T_1, r(t)) - \theta_2 dB(t, T_2, r(t)) \quad (2.10)$$

Nachdem die *SDEs* (2.5), die die Dynamik der Bonds beschreiben, und die Gewichtungsfunktionen (2.9) eingesetzt worden sind, entfällt das *Wiener*-Inkrement:

$$dP = \frac{\sigma_2 \mu(B(t, T_1), t) - \sigma_1 \mu(B(t, T_2), t)}{\sigma_2 - \sigma_1} P dt \quad (2.11)$$

Die spezifische Wahl der Bondanteile in (2.9) erlaubt es, die stochastische Komponente vollständig zu eliminieren und das Portfolio risikolos zu gestalten. Folglich muss die deterministische Drift dem risikofreien Zinssatz äquivalent sein, um Arbitragemöglichkeiten auszuschließen:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_2 \mu(B(t, T_1), t) - \sigma_1 \mu(B(t, T_2), t)}{\sigma_2 - \sigma_1} P dt &= r(t) P dt \\ \sigma_2 (\mu(B(t, T_1), t) - r(t)) &= \sigma_1 (\mu(B(t, T_2), t) - r(t)) \quad | : \sigma_1 \sigma_2 \\ \frac{(\mu(B(t, T_1), t) - r(t))}{\sigma_1} &= \frac{(\mu(B(t, T_2), t) - r(t))}{\sigma_2} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Relativiert durch die entsprechende Volatilität sind Risikoprämien von Bonds mit unterschiedlichen Restlaufzeiten gleich. Diese Identität ist durch die einheitliche Unsicherheitsquelle im Sinne einer eindimensionalen *Brownschen* Bewegung begründet, die sich mittels einer umsichtigen Anpassung der Gewichtung ausschalten lässt. Demzufolge lassen sich solche Beziehungen für alle Bonds, die von dem gleichen stochastischen Faktor getrieben werden, analog herleiten und ergeben somit den Marktpreis des Risikos¹⁰, den Zuwachs an erwarteter Rendite bezogen auf eine zusätzliche Risikoeinheit¹¹:

¹⁰ Zur Bestimmung des Marktpreises des Risikos: **(1)** R. Merton, “An Intertemporal Capital Asset Pricing Model“, *Econometrica* 41 (1973), S. 867-886. **(2)** R. Merton, “An Analytic Derivation of the Efficient Portfolio Frontier“, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 7 (1972), S. 1851-1872. **(3)** R. Merton, “Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model“, *Journal of Economic The-*

$$\frac{(\mu(B(t, T_i), t) - r(t))}{\sigma_i} = \lambda(t, r(t)) \quad (2.13)$$

Da der Bondpreis eine Funktion der Spot Rate $r(t)$ und des Bewertungszeitpunkts t darstellt, erhält man nach Anwendung von *Ito's Lemma* und Einsetzen von (2.6):

$$dB(r(t), t) = (B_r a(r(t), t) + B_t + \frac{1}{2} B_{rr} b(r(t), t)^2) dt + B_r b(r(t), t) dW_t \quad (2.14)$$

Das Gleichsetzen der Drift- bzw. Diffusionsterme in (2.5) resp. (2.14) ergibt wegen deren zwingender Äquivalenz:

$$\begin{aligned} b(r(t), t) B_r &= \sigma(B, t) B \\ \mu(B, t) B &= B_r a(r(t), t) + B_t + \frac{1}{2} B_{rr} b(r(t), t)^2 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Die zweite Gleichung repräsentiert die *PDE* für den Bondpreis unter der Bedingung, dass sich die unbekannte Drift $\mu(B, t)$ bestimmen ließe. Bezugnehmend auf die Theorie von Black-Scholes liegt es nahe, den Übergang zur risikoneutralen Welt zu vollziehen und in (2.5) $\mu(B, t)$ durch $r(t)$ bzw. dW_t durch $dW_t^* - ((\mu(B, t) - r(t)) / \sigma(B, t)) dt$ zu ersetzen. Diese Umstellung erfordert gleichzeitig die Adjustierung der Drift der Spot Rate $a(r(t), t)$ zu ihrem risikoneutralen Äquivalent $a^*(r(t), t)$, indem auf die Gleichgewichtsbedingung der Arbitragefreiheit zurückgegriffen wird. Die Anpassung erfolgt mit Hilfe des Marktpreises des Risikos und der ersten Beziehung in (2.15) nach $\sigma(B, t)$ aufgelöst:

$$\begin{aligned} \frac{a(r(t), t) - a^*(r(t), t)}{b(r(t), t)} &= \lambda(t, r(t)) \Rightarrow a^*(r(t), t) = a(r(t), t) - b(r(t), t) \lambda(t, r(t)) \\ \frac{\mu(B, t) - r(t)}{\sigma(B, t)} &= \lambda(t, r(t)) \Rightarrow \mu(B, t) B = r(t) B + b(r(t), t) B_r \lambda(t, r(t)) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Nachdem die unbekannte Drift $\mu(B, t)$ determiniert worden ist, erlaubt ein erneuter Rückgriff auf (2.15) die Spezifikation der fundamentalen *PDE*:

$$\begin{aligned} B_r (a(r(t), t) - b(r(t), t) \lambda(r(t), t)) + B_t + \frac{1}{2} B_{rr} b(r(t), t)^2 - r(t) B &= 0 \\ B(T, T) &= 1 \end{aligned} \quad (2.17)$$

ory 3 (1971), S. 373-413. Vgl. bspw. Theorem 1 aus **(1)**, das in **(3)** in allgemeiner Form dargestellt und bewiesen wird (S. 384): $\mu_i - r = \beta_i (\mu_M - r)$, $\beta_i = \sigma_{i,M} / \sigma_M^2$. Daraus resultiert in Analogie zur *SML* aus dem *CAPM*: $(\mu_i - r) / \sigma_i \rho_{i,M} = (\mu_M - r) / \sigma_M$ bzw. $(\mu_i - r) / \sigma_i = (\mu_j - r) / \sigma_j$ mit $\rho_{i,j} = 1$.

¹¹ Vgl. S. Benninga/Z. Wiener, "Term Structure of Interest Rates", *Mathematica in Education and Research*, 7 2 (1998) zur weiterführenden Diskussion über den Marktpreis des Risikos in Verbindung mit Zinsstrukturmodellen, insb. S. 5 zur Bestimmung des Marktpreises des Risikos.

Wenn ein Zinsstrukturmodell im Sinne von (2.6) mit bekannten Parametern $a(r(t), t)$ und $b(r(t), t)$ definiert ist, erzwingt die praktische Anwendung der *PDE* gleichzeitig die Kenntnis über den Marktpreis des Risikos $\lambda(r(t), t)$ ¹².

223 Die fundamentale PDE für beliebige Payoff-Funktionen im Licht der Diffusionstheorie

Im Rahmen dieses Abschnitts wird eine alternative Herleitung der *PDE* vorgestellt, die im Gegensatz zur vorhergehenden – bis auf den Rückgriff auf den Marktpreis des Risikos, der für die Adjustierung der Driftfunktionen unter den verschiedenen Wahrscheinlichkeitsmaßen unverzichtbar ist – auf einer vollkommen anderen theoretischen Basis beruht. Die Vorgehensweise lässt beliebige Payoff-Funktionen zu, nicht ausschließlich Bondpreisprozesse. Demzufolge muss die Arbitragefreiheit nicht mittels eines risikolosen Portfolios aus Bonds und damit einhergehend mit Hilfe einer Gleichgewichtsbedingung für den Marktpreis des Risikos von Bonds hergestellt werden, sondern wird gemäß dem ersten *Fundamental Theorem of Asset Pricing*¹³ über die Existenz eines risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaßes und eines dazu äquivalenten *Forward*-Martingalmaßes¹⁴ herbeigeführt. Erschwerend zu den Nachteilen der Herleitung mittels eines risikolosen Portfolios kommt ein weiteres Argument hinzu: es kann nicht sichergestellt werden, dass dieses Portfolio per se selbstfinanzierend ist. Im Rahmen eines streng formellen und mathematisch korrekten Ansatzes muss das Portfolio als Element eines Marktmodells $M = (S, \phi)$ zusammengestellt werden, wobei S ein adaptierter stochastischer Prozess und ϕ die Klasse selbstfinanzierender Trading Strategien sind¹⁵. Unter Ausschaltung des Unsicherheitsfaktors bei gelungener Anpassung der Portfolioanteile schließt sich die Herstellung der Arbitragefreiheit mittels eines risikolosen Portfolios an. Mit Hilfe der zu präsentierenden Herleitung der fundamentalen *PDE* für beliebige Payoff-Funktionen von Zinsderivaten wird diese Problematik umgangen.

¹² Vgl. Fn.10, 11.

¹³ Vgl. **(1)** S. Shreve, “Stochastic Calculus for Finance II“ (2004), S. 231, Theorem 5.4.7. **(2)** J. M. Harrison, S. R. Pliska, “Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading“, *Stochastic Process and Applications* 11 (1981), S. 215-260.

¹⁴ Ein zu P^* äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß P^T , definiert auf einem messbaren Raum $(\Omega, F_{T^{\max}})$, wird gleichzeitig auch ein Martingalmaß genannt, wenn alle, durch das entsprechende *Numeraire* (unter P^T ist das *Numeraire* der Bondpreis $B(t, T)$), relativierten Preise für Derivate Martingalen bezüglich der Filtration $F = \{F_t\}_{0 \leq t \leq T^{\max}}$, $T^{\max} \in [0, \infty)$ folgen. Vgl. M. Musiela, M. Rutkowski, “Martingale Methods in Financial Modelling“ (1997), S.74.

¹⁵ Zu dieser Anmerkung vgl. S. Neftci, “Mathematics of Financial Derivatives” (2000), S. 279 und S. 453-454. Aus diesem Grund ist die Herleitung im vorigen Abschnitt rein heuristischer Natur, genauso wie die Herleitung der klassischen *PDE* von Black-Scholes zur Bestimmung des Optionspreises. Da das Portfolio einer kontinuierlichen Anpassung der Stockposition (des Deltas der Option) bedarf, sind stark restriktive Modellannahmen erforderlich: **(1)** zeitstetiger Handel, **(2)** keine Transaktionskosten. Vgl. F. Black, M. Scholes, “The Pricing of Options and Corporate Liabilities“, *Journal of Political Economy* 81 (1973), S.637-654, insb. S. 640-641, Annahmen **(b)** und **(e)**. Folglich kann die Eigenschaft des selbstfinanzierenden Duplikationsportfolios nur dann gewährleistet werden, wenn der Hedge zulasten enormer Transaktionskosten zeitkontinuierlich durchgeführt wird.

Für die folgende Darstellung wird aus Vereinfachungsgründen angenommen, dass der Übergang zum risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß¹⁶ bereits vollzogen worden ist. Mit Rückgriff auf (2.5) und (2.6) wird die Dynamik des Bondpreises bzw. der *Short Rate* transformiert¹⁷:

$$\begin{aligned} dB(t, T) &= r(t)Bdt + \sigma_B(t)BdW_t^* \\ dr(t) &= [a(r(t), t) - b(r(t), t)\lambda_t]dt + b(r(t), t)dW_t^* \end{aligned} \quad (2.18)$$

Betrachtet wird eine willkürliche, zu einem späteren Zeitpunkt zu spezifizierende, Payoff-Funktion eines Derivats auf den Zinssatz $h(r(T))$. Die Stochastik der *Short Rate* in (2.18) ist sehr allgemein gestaltet. Meistens wird ein konkretes Zinsmodell unterstellt, das eine spezifische Dynamik für die *Short Rate* vorschreibt. In einer vereinfachten Bewertungswelt kann postuliert werden, dass sich der Zinssatz ähnlich wie der Aktienkurs verhält und demzufolge einer geometrischen *Brownschen* Bewegung¹⁸ gehorcht. Unter dieser Annahme wird jedoch der entscheidende Unterschied zwischen dem Aktienkurs und dem Zinssatz nicht berücksichtigt, dass nämlich Zinssätze langfristig zu einem Durchschnittsniveau zurückkehren. Ein i. d. R. vorgetragener Grund für dieses Phänomen ist die inverse Beziehung zwischen dem Investitionsvolumen und der Zinshöhe. Bei niedrigen (hohen) Zinsen wird Kapital verstärkt (weniger stark) nachgefragt, die Zinsdynamik weist einen positiven (negativen) Trend auf und in der langen Sicht werden die Zinssätze zu einem mittleren *Reversion Level* zurückgedrängt¹⁹.

Für die weiterführenden Überlegungen zur Herleitung der *PDE* wird es unumgänglich sein, auf die *Markov*-Eigenschaft der *Short Rate*²⁰ zurückzugreifen:

$$E^{P^*}(h(r(T)) | \mathcal{F}(t)) = E^{P^*}(h(r(T)) | r(t)) = E_{t, r(t)}^{P^*}(h(r(T))) = g(t, r(t)) \quad (2.19)^{21}$$

¹⁶ Die mathematische Grundlage für diese Transformation wird durch das *Girsanov*-Theorem geliefert. Zur Anpassung der Drift und des Unsicherheitsfaktors vom Bond- bzw. Zinsprozess siehe vorigen Abschnitt, S. 14.

¹⁷ λ_t ist der Marktpreis des Risikos aus dem vorigen Abschnitt. Siehe (2.16).

¹⁸ Vgl. R. Rendleman/B. Bartter, "The Pricing of Options on Debt Securities", *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 15 (1980), S. 11-24.

¹⁹ Vgl. J. Hull, "Options, Futures, & Other Derivatives" (2000), S. 566-567.

²⁰ Die *Markov*-Eigenschaft des *Short Rate*-Prozesses im Fall einer geometrischen *Brownschen* Bewegung wurde in Fußnote 9 festgestellt. Jedoch werden aus zwingenden ökonomischen Gründen meistens *mean-reverting* Prozesse modelliert. In Anlage 1 wird die *Markov*-Eigenschaft im Rahmen des Hull/White Modells streng bewiesen. Mit $a(r(t), t) = a(t) - b(t)r(t)$ und $b(r(t), t) = \sigma(t)$ wird im Rahmen dieses Abschnitts das in (A1.9) hergeleitete Ergebnis genutzt.

²¹ Die *Markov*-Eigenschaft des *Short Rate*-Prozesses wird auf die Payoff-Funktion $h(r(T))$ direkt unter dem risikoneutralen Martingalmaß angewendet, obwohl sie in der Anlage streng genommen lediglich für ein willkürliches Wahrscheinlichkeitsmaß P nachgewiesen wurde. Da $b(r(t), t) = \sigma(t)$ offensichtlich von

Im Folgenden wird mit Hilfe der *Iterated Expectations*-Eigenschaft gezeigt, dass $g(t, r(t))$ ein Martingal darstellt:

$$\begin{aligned} E^{P^*}(g(t, r(t)) | \mathcal{F}(s)) &= E^{P^*}(E^{P^*}(h(r(T)) | \mathcal{F}(t)) | \mathcal{F}(s)) = E^{P^*}(h(r(T)) | \mathcal{F}(s)) \\ &= E^{P^*}(h(r(T)) | r(s)) = g(s, r(s)) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Infolgedessen muss die Drift nach Anwendung von *Ito's Lemma* verschwinden:

$$\begin{aligned} dg(t, r(t)) &= g_t dt + g_r dr + \frac{1}{2} g_{rr} dr dr = g_t dt + g_r [a(t) - b(t)r(t) - \sigma(t)\lambda_t] dt \\ &\quad + \frac{1}{2} g_{rr} \sigma(t)^2 dt + g_r \sigma(t) dW_t^* \quad \Rightarrow \\ g(t, r(t)) &= g(0, r(0)) + \int_0^t [g_t(u, r(u)) + [a(u) - b(u)r(u) - \sigma(u)\lambda_u] g_r(u, r(u)) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sigma(u)^2 g_{rr}(u, r(u))] du + \int_0^t \sigma(u) g_r(u, r(u)) dW_u^* \end{aligned} \quad (2.21)$$

Mit Hilfe des *Martingale Representation Theorems*²² und unter Berücksichtigung der Integralform von $g(t, r(t))$ kann gefolgert werden²³:

$$\begin{aligned} \int_0^t [g_t + [a(u) - b(u)r(u) - \sigma(u)\lambda_u] g_r + \frac{1}{2} \sigma(u)^2 g_{rr}] du &= 0 \\ g_t(t, r(t)) + [a(t) - b(t)r(t) - \sigma(t)\lambda_t] g_r(t, r(t)) + \frac{1}{2} \sigma(t)^2 g_{rr}(t, r(t)) &= 0 \quad (2.22)^{24} \\ g(T, r(T)) &= h(r(T)) \end{aligned}$$

Bei sorgfältiger Überprüfung von (2.19) stellte man fest, dass $g(t, r(t))$ lediglich den erwarteten Payoff des Derivats $h(r(T))$ wiedergibt. Um im Zeitpunkt t den Wert des Wert-

$r(t)$ unabhängig ist, werden sich allein der zweite und der dritte Summand in der dritten Zeile in (A1.4) marginal ändern und den grundsätzlichen Ansatz in seiner Kernidee nicht umwerfen. Der erste modifizierte Term $e^{-K(t)} \int_s^t [a(u) - \sigma(u)\lambda_u] e^{K(u)} du$ ist deterministisch und der andere $e^{-K(t)} \int_s^t \sigma(u) e^{K(u)} dW^*(u)$ ist $\mathcal{F}(s)$ -unabhängig.

²² Der Prozess $\sigma(t)g_r(t, r(t))$ ist zu der durch die *Brownsche* Bewegung erzeugten Filtration $\{\mathcal{F}_t^W\}$ adaptiert.

²³ Die gleiche *PDE* ergibt sich durch die direkte Anwendung der *Kolmogorov Backward Equation (KBE)* auf $g(t, r(t)) = E_{t, r(t)}^{P^*}(h(r(T))) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) p(t, T; r(t), x) dx$, wobei $p(t, T, r(t), x)$ die *Transition Density (TD)* darstellt, d. h. die Dichte über die *Forward-Variable* $r(T)$ bedingt auf die *Backward-Variable* $r(t)$. Partielles Ableiten nach den *Backward-Variablen* t und $r(t)$ führt unmittelbar zur in (2.22) mittels *Ito's* Differenzierungsregel hergeleiteten *PDE*.

²⁴ Der Übersichtlichkeit halber wurden die Argumente $r(u)$ und u der Funktion g im Integral ausgelassen. Die *PDE* erhält man, indem beide Seiten nach t abgeleitet werden.

papiers $h(t, r(t))$ zu bestimmen, muss dieser Payoff laufzeitadäquat angepasst werden, also zusätzlich abdiskontiert werden. In der risikoneutralen Welt lässt sich der Preis des zu bewertenden Finanzprodukts folgendermaßen ermitteln:

$$h(t, r(t)) = E^{P^*} \left(\frac{B_t}{B_T} h(r(T)) \mid \mathcal{F}(t) \right) \quad (2.23)$$

Zum Zweck der weiterführenden Untersuchung erweist sich die Bewertungsformel unter dem risikoneutralen Martingalmaß als ungeeignet, da wegen der impliziten Abhängigkeit des Erwartungswertes vom Abzinsungsfaktor nicht direkt auf die Martingaleigenschaft von $E^{P^*} (h(r(T)) \mid \mathcal{F}(t)) = g(t, r(t))$ zurückgegriffen werden kann. Mit Hilfe einer Wahrscheinlichkeitsmaßtransformation, indem auf das *Forward*-Martingalmaß gewechselt wird, ist diese unerwünschte Besonderheit eliminierbar:

$$h(t, r(t)) = B(t, T) E^{P^T} (h(r(T)) \mid \mathcal{F}(t)) \Rightarrow E^{P^T} (h(r(T)) \mid \mathcal{F}(t)) = \frac{h(t, r(t))}{B(t, T)} \quad (2.24)$$

Die Volatilitätsfunktion bleibt im Gegensatz zur Driftfunktion von der Änderung des Wahrscheinlichkeitsmaßes unberührt. So muss nur die Drift des Bondpreis- bzw. Short Rate-Prozesses dem neuen Wahrscheinlichkeitsmaß angepasst werden²⁵. Da P^T und P^* zueinander äquivalent sind, fordert das Arbitragefreiheitsprinzip, dass der abdiskontierte Erwartungswert der Payoff-Funktion $h(r(T))$ sowohl unter dem risikoneutralen Martingalmaß, als auch unter dem *Forward*-Martingalmaß, den gleichen Preis $h(t, r(t))$ für das Derivat im Zeitpunkt t ergibt:

$$\begin{aligned} h(t, r(t)) &= B(t, T) E^{P^T} \left(\frac{h(r(T))}{B(T, T)} \mid \mathcal{F}(t) \right) = B_t E^{P^*} \left(\frac{h(r(T))}{B_T} \mid \mathcal{F}(t) \right) \Rightarrow \\ E^{P^T} \left(\frac{h(r(T))}{B(T, T)} \mid \mathcal{F}(t) \right) &= E^{P^*} \left(\frac{h(r(T))}{B(T, T)} \underbrace{\frac{B(T, T) / B(t, T)}{B_T / B_t}}_{\text{Radon-Nikodym Derivative}} \mid \mathcal{F}(t) \right) \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\frac{dP^T}{dP^*} \Big|_{\mathcal{F}(t)} = \eta(t) = \frac{B(T, T) / B(t, T)}{B_T / B_t} = \frac{B_t}{B(t, T) B_T}$$

²⁵ An dieser Stelle wird erneut auf das *Girsanov*-Theorem zurückgegriffen. Die beiden Wahrscheinlichkeitsmaße P^* und P^T , definiert auf dem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{F}_{T, \max})$ sind absolut stetig, d. h. äquivalent zueinander: $P^T(A) = \int_A \eta(t) dP^* = 0, \forall A \in \mathcal{F}(t)$ falls $P^*(A) = 0$. Da $\eta(t) > 0$, kann die Beziehung umgekehrt werden: $P^*(A) = \int_A \frac{1}{\eta(t)} dP^T = 0, \forall A \in \mathcal{F}(t)$ falls $P^T(A) = 0$. Es gilt $P^T(A) = 0$ immer dann wenn $P^*(A) = 0$.

Aus der ersten Zeile in (2.25) erkennt man, dass unter P^T (P^*) der Bond $B(t, T)$ (das Geldmarktkonto B_t) das *Numeraire* darstellt. Unter Ausschluss von Arbitragemöglichkeiten folgt aus der Äquivalenz der Martingalmaße, dass alle durch das wahrscheinlichkeitsmaßinhärente *Numeraire* relativierten Derivate unter dem jeweiligen Wahrscheinlichkeitsmaß Martingalen folgen. Vielmehr ist der Marktpreis des Risikos durch die Volatilität des entsprechenden *Numeraire* definiert²⁶. Demnach kann die Adjustierung der Driftfunktionen und der *Brownschen* Bewegung für den jeweiligen Prozess folgendermaßen vollzogen werden²⁷:

$$\begin{aligned}
r(t) - \text{drift} : \quad & \frac{(a(t) - b(t)r(t) - \sigma(t)\lambda_r) - \mu_r^T}{\sigma(t)} = \sigma_B(t) \\
dW_t^* = dW_t^T - \left(\frac{(a(t) - b(t)r(t) - \sigma(t)\lambda_r) - \mu_r^T}{\sigma(t)} \right) dt & \quad (2.26) \\
B(t, T) - \text{drift} : \quad & \frac{r(t) - \mu_B^T}{\sigma_B(t)} = \sigma_B(t), \quad dW_t^* = dW_t^T - \left(\frac{r(t) - \mu_B^T}{\sigma_B(t)} \right) dt
\end{aligned}$$

Da $g^T(t, r(t)) = h(t, r(t)) / B(t, T)$ ein Martingal ist, muss die Drift nach Anwendung von *Ito's* Lemma verschwinden²⁸:

$$\begin{aligned}
d \left[\frac{h(t, r(t))}{B(t, T)} \right] &= \frac{-hdB(t, T)}{B(t, T)^2} + \frac{dh(t, r(t))}{B(t, T)} = \frac{-h(r(t) - \sigma_B(t)^2)Bdt - h\sigma_B(t)BdW_t^T}{B(t, T)^2} \\
&+ \frac{h_r dt + h_r[a(t) - b(t)r(t) - \sigma(t)\lambda_r - \sigma(t)\sigma_B(t)]dt + h_r\sigma(t)dW_t^T + \frac{1}{2}h_{rr}\sigma(t)^2 dt}{B(t, T)} =
\end{aligned}$$

²⁶ Zum Beweis dieser Aussage vgl. J. Hull, "Options, Futures, & Other Derivatives" (2000), S. 508-509. Der Marktpreis des Risikos wird lediglich als theoretisches Werkzeug zur Anpassung der Driftfunktionen benutzt. Für die Fortführung der Herleitung im Rahmen dieses Abschnitts ist es unerheblich, wie und warum er definiert wird. Der Marktpreis des Risikos ist hier nur ein Mittel zur Berechnung der Drift unter dem neuen Wahrscheinlichkeitsmaß. Zur Bestimmung des Marktpreises des Risikos vgl. Fn. 10.

²⁷ Folgende berechnete Frage drängt sich auf: Wird unter dem *Forward*-Martingalmaß die Martingaleigenschaft von $E^{P^*}(h(r(T)) | \mathcal{F}(t)) = g(t, r(t))$, gültig in der risikoneutralen Welt, beibehalten? Es wird analog wie in Fn. 21 argumentiert und der zweite bzw. dritte Summand in der dritten Zeile in (A1.4) werden marginal geändert und zu $e^{-K(t)} \int_s^t \underbrace{e^{K(u)} [a(u) - (\lambda_u + \sigma_B(u))\sigma(u)] du}_{\mathcal{F}(s)\text{-unabhängig, deterministisch}}$ bzw. $e^{-K(t)} \int_s^t \underbrace{\sigma(u)e^{K(u)} dW^T(u)}_{\mathcal{F}(s)\text{-unabhängig}}$

transformiert. Dementsprechend bleibt die *Markov*-Eigenschaft von $r(t)$ aufrecht erhalten und folglich gilt die Martingaleigenschaft auch unter dem neuen Wahrscheinlichkeitsmaß P^T , da sie auf der *Markov*-Eigenschaft des *Short Rate*-Prozesses beruht. Es gilt: $E^{P^*}(h(r(T)) | \mathcal{F}(t)) = g^T(t, r(t))$ folgt analog zu (2.20) einem Martingal und rechtfertigt die Bewertungsformel $B(t, T)E^{P^*}(h(r(T)) | \mathcal{F}(t)) = h(t, r(t))$.

²⁸ Streng genommen wird die *SDE* von $h(t, r(t))/B(t, T)$ zuerst in ihre Integralform überführt. Fortführend wird analog zu (2.22) argumentiert, um die allgemeine PDE in (2.27) herzuleiten.

$$\frac{\left[(\sigma_B(t)^2 - r(t))h + h_t + [a(t) - b(t)r(t) - \sigma(t)\lambda_t - \sigma(t)\sigma_B(t)]h_r + \frac{1}{2}\sigma(t)^2 h_{rr} \right] dt}{B(t, T)} + \frac{[h_r \sigma(t) - h \sigma_B(t)] dW_t^T}{B(t, T)} \Rightarrow \quad (2.27)$$

$$(\sigma_B(t)^2 - r(t))h + h_t + [a(t) - b(t)r(t) - \sigma(t)\lambda_t - \sigma(t)\sigma_B(t)]h_r + \frac{1}{2}\sigma(t)^2 h_{rr} = 0$$

Die letzte Gleichung in (2.27) stellt die allgemeine *PDE* dar, die die Bewertung von beliebigen Derivaten auf den Zinssatz ermöglicht. Um diese *PDE* zu lösen, bedarf es einer terminalen Bedingung, die sich aus der näheren Spezifikation des Derivats $h(r(T))$ ergibt. Es sei bspw. eine Call-Option mit einem Strike K und Ausübungszeitpunkt T auf einen Bond $B(T, T^{\max})$ mit Fälligkeit in T^{\max} zu bewerten. Folglich lautet die terminale Bedingung, unter welcher die oben hergeleitete *PDE* zu lösen ist, $h(r(T)) = \max(B(T, T^{\max}) - K, 0)$.

Um die Richtigkeit der aufgestellten *PDE* zu verifizieren, liegt es nahe, einen Bond $B(t, T)$ zu untersuchen, d. h. $h(t, r(t)) = B(t, r(t))$. Auf diese Weise gelingt es, auf die bereits bekannte *PDE* für den Bondpreis zurück zu schließen.

$$\begin{aligned} & \frac{-(r(t) - \sigma_B(t)^2)B \cdot B dt - B \cdot B \sigma_B(t) dW_t^T}{B(t, T)^2} + \frac{B_t dt + B_r dr(t) + \frac{1}{2} B_{rr} dr(t) dr(t)}{B(t, T)} = \\ & \frac{-(r(t) - \sigma_B(t)^2)B dt - B \sigma_B(t) dW_t^T}{B(t, T)} + \frac{B_t dt + \frac{1}{2} B_{rr} \sigma(t)^2 dt}{B(t, T)} + \quad (2.28) \\ & \frac{B_r (a(t) - b(t)r(t) - \sigma(t)\lambda_t - \sigma(t)\sigma_B(t)) dt + B_r \sigma(t) dW_t^T}{B(t, T)} \Rightarrow \\ & \frac{[B_r (a(t) - b(t)r(t) - \sigma(t)\lambda_t) + B_t + \frac{1}{2} B_{rr} \sigma(t)^2 - r(t)B] dt}{B(t, T)} + \\ & \frac{[B_r \sigma(t) - B \sigma_B(t)] dW_t^T}{B(t, T)} + \frac{[\sigma_B(t)^2 B - B_r \sigma(t) \sigma_B(t)] dt}{B(t, T)} \Rightarrow \quad (2.29) \\ & B_r (a(t) - b(t)r(t) - \sigma(t)\lambda_t) + B_t + \frac{1}{2} B_{rr} \sigma(t)^2 - r(t)B = 0 \text{ mit } B(T, T) = 1 \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung in (2.29) ist identisch mit der im vorigen Abschnitt hergeleiteten *PDE* (2.17). Da der Ausdruck ein Martingal ist, muss die Drift verschwinden²⁹. Bei sorgfältiger

²⁹ Zusätzlich verschwindet in diesem speziellen Fall auch der Koeffizient vor dem Unsicherheitsfaktor dW_t^T in Gleichung (2.29), da $B_r \sigma(t) = B \sigma_B(t)$ gilt. Diese Feststellung ist nicht besonders verwunderlich wenn in Betracht gezogen wird, dass letztendlich $\left[\frac{B(t, r(t), T)}{B(t, T)} \right]$ untersucht wird, dessen totales Differential null ergibt.

Betrachtung stellte man fest, dass (2.29) eine unerwünschte Korrektur zur Drift enthält, die sich im dritten Summanden niederschlägt. Es lässt sich zeigen, dass dieser dritte Summand gleich null ist, wenn man die unter dem *Forward*-Martingalmaß modifizierte *SDE* des Bondprozesses genauer untersucht:

$$(1) \quad dB = (r(t) - \sigma_B(t)^2)Bdt + \sigma_B(t)BdW_t^T$$

$$(2) \quad dB = \left[B_t + B_r[a(t) - b(t)r(t) - \sigma(t)\lambda_t - \sigma(t)\sigma_B(t)] + \frac{1}{2}B_{rr}\sigma(t)^2 \right] dt + B_r\sigma(t)dW_t^T \quad (2.30)$$

$$\Rightarrow \sigma_B(t)B = B_r\sigma(t) \Rightarrow \sigma(t) = \frac{\sigma_B(t)B}{B_r}$$

Das Einsetzen dieses Ausdrucks für die Volatilität der *Short Rate* in (2.29) lässt den dritten Summanden verschwinden und bestätigt die fundamentale *PDE* für den Bondpreis bzw. für ein beliebiges Derivat auf den Zinssatz [(2.27)].

23 Das Zinsmodell von Vasicek mit zeitunabhängiger Volatilitätsstruktur und konstanter *mean-reverting* Driftfunktion

In Anlehnung an Vasicek³⁰ wird im Weiteren mit dem Begriff der *Yield Curve* als einer graphischen Abbildung der *Yields to Maturity* in Abhängigkeit von der Fälligkeit der zugrunde liegenden Bonds argumentiert. Aus der Definition der *Yield to Maturity* in (2.1), modelliert im Zeitpunkt t als eine Funktion der Fälligkeit T , wird deutlich, dass sich die *Yield Curve* im Zeitpunkt t aus den Bondpreisen $B(t, T)$, $\forall T \in [0, T^{\max}]$, erschließen lässt. Bei genauer Untersuchung der allgemeinen *PDE* in (2.27) stellt man fest, dass die praktische Anwendung dieser Gleichung auf Bewertung von beliebigen Zinsderivaten wegen der expliziten Abhängigkeit von der Bondvolatilität $\sigma_B(t)$ die Kenntnis über den entsprechenden Bondpreis erzwingt. Diesen Gedanken fortführend müsste man, bevor die allgemeine *PDE* gelöst werden kann, mit Hilfe der speziellen *Bond-PDE* in (2.29) Bondpreise ermitteln und daraus Volatilitäten implizieren. In einem anderen Zusammenhang, nämlich Bestimmung der *Yield Curve*, hat Vasicek als erster eine Lösung für diese *Bond-PDE* entwickelt. Nachdem der erschwerende Umstand konstatiert worden ist, dass vor der eigentlichen Bewertung von beliebigen Zinsderivaten zuerst Bondpreise berechnet werden müssen, wird anhand des Zinsmodells von Vasicek verdeutlicht, dass die Notwendigkeit der Lösung der *Bond-PDE* nicht unerlässlich ist, da eine Lösung in geschlossener Form auf alternative Weise erreicht werden kann. Das auf den ersten Blick hinderliche Erfordernis der Ermittlung von Bondpreisen aus dem postulierten *Short Rate*-Modell wird sich an-

³⁰ O. A. Vasicek, "An Equilibrium Characterization of the Term Structure", Journal of Financial Economics, 5 (1977), S.177-188.

schließlich als hilfreich für die Anpassung der geschätzten Parameter des angenommenen Zinsmodells an die eines näherungsweise arbitragefreien *Short Rate*-Prozesses erweisen. Die *Short Rate* gehorcht folgender *SDE*³¹:

$$\begin{aligned} dr(t) &= \alpha(\mu - r(t))dt + \sigma dW(t) \\ dr(t) &= [\alpha(\mu - r(t)) - \sigma\lambda]dt + \sigma dW^*(t) \end{aligned} \quad (2.31)$$

Die zweite *SDE* beinhaltet die Transformation des Wahrscheinlichkeitsmaßes und die Anpassung der Drift beim Übergang zur risikoneutralen Welt unter der Annahme eines konstanten Marktpreises des Risikos λ ³². Die Lösung erfolgt über die Multiplikation der beiden Seiten der Gleichung mit $e^{\alpha t}$:

$$\begin{aligned} e^{\alpha t} dr(t) + e^{\alpha t} \alpha r(t) dt &= e^{\alpha t} (\alpha\mu - \sigma\lambda) dt + e^{\alpha t} \sigma dW^*(t) \Rightarrow \\ d[e^{\alpha t} r(t)] &= e^{\alpha t} (\alpha\mu - \sigma\lambda) dt + e^{\alpha t} \sigma dW^*(t) \Rightarrow \\ r(t) &= e^{-\alpha t} r(0) + e^{-\alpha t} (\alpha\mu - \sigma\lambda) \int_0^t e^{\alpha s} ds + e^{-\alpha t} \sigma \int_0^t e^{\alpha s} dW^*(s) \end{aligned} \quad (2.32)$$

Anstatt die *Bond-PDE* in (2.29) zwecks Ermittlung des Bondpreises zu lösen, wird direkt die Beziehung zwischen dem Bond und der *Short Rate* genutzt:

$$B(t, T) = E^{P^*} \left(e^{-\int_t^T r(u) du} \mid \mathcal{F}(t) \right) \text{ bzw. } B(0, t) = E^{P^*} \left(e^{-\int_0^t r(u) du} \right) \quad (2.33)$$

Es lässt sich zeigen, dass $\int_0^t r(u) du \square N(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2)$. Folglich kann der Bondpreis mit Hilfe der

*Moment Generating Function (MGF)*³³ mit einem Koeffizienten von -1 ermittelt werden:

³¹ Diese Modellgleichung für den *Short Rate*-Prozess entspricht der *SDE* im Modell von Hull/White mit konstanten Driftparametern und konstanter Volatilität wie folgt: $\alpha\mu = a(t)$, $\alpha = b(t)$ und $\sigma = \sigma(t)$. In Anlage 1 findet sich die detaillierte Lösung zu dieser *SDE* im allgemeinen Fall, wenn die Driftvariablen und die Volatilität nicht konstant, sondern als Funktion der Zeit modelliert werden. Daher wird die Lösung in diesem Abschnitt lediglich skizziert.

³² Mit Hilfe des Marktpreises des Risikos $(\mu^{Bond} - r(t)) / \sigma^{Bond} = \lambda$ lässt sich die neue Drift unter dem risikoneutralen Martingalmaß bestimmen: $drift^* = \alpha(\mu - r(t)) - \sigma\lambda$. $W^*(t)$ stellt eine *Brownsche* Bewegung in der risikoneutralen Welt dar: $dW^*(t) = dW(t) + \left(\frac{\alpha(\mu - r(t)) - drift^*}{\sigma} \right) dt$.

³³ Indem $\int_0^t r(u) du = x$ mit $x \sim N(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2)$ gesetzt wird, lässt sich die Formel (2.34) auf folgende Art und

$$\text{Weise herleiten: } E^{P^*} (e^{-x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{\sigma}^2}} e^{-x} e^{-\frac{(x-\bar{\mu})^2}{2\bar{\sigma}^2}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{\sigma}^2}} e^{-\frac{-x^2 + 2x(\bar{\mu} - \bar{\sigma}^2) - \bar{\mu}^2}{2\bar{\sigma}^2}} e^{-\frac{2\bar{\mu}\bar{\sigma}^2 - \bar{\sigma}^4}{2\bar{\sigma}^2}} e^{-\frac{-2\bar{\mu}\bar{\sigma}^2 + \bar{\sigma}^4}{2\bar{\sigma}^2}} dx =$$

$$B(0,t) = E^{P^*} \left(e^{-\int_0^t r(u) du} \right) = e^{-\bar{\mu}t - \frac{\bar{\sigma}^2}{2}t^2} \quad (2.34)$$

Aus dieser Beziehung wird ersichtlich, dass zum Zweck der Bondpreisbestimmung lediglich $\bar{\mu}$ und $\bar{\sigma}^2$ determiniert werden müssen. Der in (2.32) ermittelte Ausdruck für die *Short Rate* $r(t)$ als Lösung der *SDE* für den Zinsprozess wird über die Zeit t integriert:

$$\int_0^t r(u) du = \int_0^t r(0)e^{-\alpha u} du + \int_0^t \left(\frac{\alpha\mu - \sigma\lambda}{\alpha} \right) [1 - e^{-\alpha u}] du + \int_0^t \sigma e^{-\alpha u} \int_0^u e^{\alpha s} dW^*(s) du \quad (2.35)$$

Unter Anwendung des stochastischen *Fubini*-Theorems³⁴ wird (2.35) geeignet umgeformt:

$$\begin{aligned} \int_0^t r(u) du &= \int_0^t r(0)e^{-\alpha u} du + \int_0^t \left(\frac{\alpha\mu - \sigma\lambda}{\alpha} \right) [1 - e^{-\alpha u}] du + \int_0^t \int_s^t \sigma e^{\alpha(s-u)} du dW^*(s) \Rightarrow \\ \int_0^t r(u) du &= \frac{r(0)}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t}) + \left(\frac{\alpha\mu - \sigma\lambda}{\alpha} \right) t - \left(\frac{\alpha\mu - \sigma\lambda}{\alpha^2} \right) (1 - e^{-\alpha t}) + \int_0^t \frac{\sigma(1 - e^{\alpha(s-t)})}{\alpha} dW^*(s) \end{aligned} \quad (2.36)$$

Der vierte Summand auf der rechten Seite stellt ein *Ito*-Integral dar und weist somit einen Erwartungswert von null auf. Die restlichen Terme sind deterministischer Natur:

$$\begin{aligned} E^{P^*} \left(\int_0^t r(u) du \right) &= \frac{r(0)}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t}) + \left(\frac{\alpha\mu - \sigma\lambda}{\alpha} \right) t - \left(\frac{\alpha\mu - \sigma\lambda}{\alpha^2} \right) (1 - e^{-\alpha t}) + \\ E^{P^*} \left(\int_0^t \frac{\sigma(1 - e^{\alpha(s-t)})}{\alpha} dW^*(s) \right) &= \frac{r(0)}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t}) + \left(\frac{\alpha\mu - \sigma\lambda}{\alpha} \right) t - \left(\frac{\alpha\mu - \sigma\lambda}{\alpha^2} \right) (1 - e^{-\alpha t}) \end{aligned} \quad (2.37)$$

Die Varianz lässt sich folgendermaßen berechnen:

$$\text{Var} \left(\int_0^t r(u) du \right) = E^{P^*} \left(\left(\int_0^t \frac{\sigma(1 - e^{\alpha(s-t)})}{\alpha} dW^*(s) \right)^2 \right) - \left(E^{P^*} \left(\int_0^t \frac{\sigma(1 - e^{\alpha(s-t)})}{\alpha} dW^*(s) \right) \right)^2 \quad (2.38)$$

$$e^{-\bar{\mu}t - \frac{\bar{\sigma}^2}{2}t^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x - (\bar{\mu} - \frac{\bar{\sigma}^2}{2}))^2}{2\sigma^2}} dx = e^{-\bar{\mu}t - \frac{\bar{\sigma}^2}{2}t^2}.$$

Zur *Moment Generating Function* vgl. [J. F. Kenney, E. S. Keeping](#), “Mathematics of Statistics” (1951), Ch. 4.6-4.8, S. 72-77. In diesem Fall ist die Art der statistischen Verteilung bekannt, eine Normalverteilung mit $\int_0^t r(u) du \in \mathbb{R}_c^+$. Ansonsten wird jede Verteilung eindeutig durch ihre *Characteristic Function*

(*CF*) spezifiziert, vgl. [A. Papoulis](#), “Probability, Random Variables, and Stochastic Processes“ (1984), S. 153-162. Läge die Verteilung nicht vor, müsste man zunächst mittels der *Fourier Transformation (FT)* die *CF* bestimmen, um anschließend aus der *CF* mit Hilfe der *Inverse Fourier Transformation (IFT)* die Dichte der Verteilung zu berechnen. Da zum Zweck der Bondpreisbestimmung die ersten zwei Momente (die höheren Momente wie die Schiefe und die Excess Kurtosis sind gleich null) die Verteilung von $\int_0^t r(u) du$ hinlänglich beschreiben, lässt es sich zeigen, dass die Umkehrung der *CF* mittels der *IFT* die Dichte der Normalverteilung ergibt.

³⁴ Zum *Fubini*-Theorem vgl. [J. Borwein, D. Bailey, R. Girgensohn](#), “Experimentation in Mathematics: Computational Paths to Discovery.“ (2004), S. 18.

Der zweite Term auf der rechten Seite ergibt als ein *Ito*-Integral einen Wert von Null. Daher erhält man für die Varianz unter Anwendung der *Ito-Isometrie*³⁵ folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} \text{Var}\left(\int_0^t r(u)du\right) &= E^{P^*} \left(\left(\int_0^t \frac{\sigma(1-e^{\alpha(s-t)})}{\alpha} dW^*(s) \right)^2 \right) = E^{P^*} \left(\int_0^t \frac{\sigma^2(1-e^{\alpha(s-t)})^2}{\alpha^2} ds \right) = \\ &= \frac{\sigma^2}{\alpha^2} t - 2 \frac{\sigma^2}{\alpha^2} \int_0^t e^{\alpha(s-t)} ds + \frac{\sigma^2}{\alpha^2} \int_0^t e^{2\alpha(s-t)} ds = \frac{\sigma^2}{\alpha^2} t - 2 \frac{\sigma^2}{\alpha^3} (1-e^{-\alpha t}) + \frac{\sigma^2}{2\alpha^3} (1-e^{-2\alpha t}) \end{aligned} \quad (2.39)$$

Nachdem der Erwartungswert und die Varianz berechnet worden sind, werden sie in (2.34) anstelle von $\bar{\mu}$ und $\bar{\sigma}^2$ eingesetzt, um den Bondpreis zu ermitteln:

$$\begin{aligned} B(0,t) &= e^{-\frac{r(0)}{\alpha}(1-e^{-\alpha t}) - \left(\frac{\alpha\mu - \sigma\lambda}{\alpha}\right)t + \frac{\alpha\mu - \sigma\lambda}{\alpha^2}(1-e^{-\alpha t}) + \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}t - \frac{\sigma^2}{2\alpha^3}(1-e^{-\alpha t}) - \frac{\sigma^2}{2\alpha^3}(1-e^{-\alpha t}) + \frac{\sigma^2}{4\alpha^3}(1-e^{-2\alpha t})} \\ &= e^{\frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha} \left(\mu - \frac{\sigma\lambda}{\alpha} - \frac{\sigma^2}{2\alpha^2} - r(0)\right) - \left(\mu - \frac{\sigma\lambda}{\alpha} - \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}\right)t - \frac{\sigma^2}{2\alpha^3}(1-e^{-\alpha t}) + \frac{\sigma^2}{4\alpha^3}(1-e^{-2\alpha t})} \\ &= e^{\frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha} (R-r(0)) - Rt - \frac{\sigma^2}{4\alpha^3}(2-2e^{-\alpha t}-1+e^{-2\alpha t})} = e^{\frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha} (R-r(0)) - Rt - \frac{\sigma^2}{4\alpha^3}(1-e^{-\alpha t})^2} \quad \text{bzw.} \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$B(t,T) = e^{\frac{1-e^{-\alpha(T-t)}}{\alpha} (R-r(t)) - R(T-t) - \frac{\sigma^2}{4\alpha^3}(1-e^{-\alpha(T-t)})^2}$$

$$\text{mit } R = \mu - \frac{\sigma\lambda}{\alpha} - \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}$$

Als kennzeichnendes Merkmal der Gleichgewichtsmodelle drängt sich die mittels Annahmen über die relevanten ökonomischen Variablen erfolgende Parametrisierung des *Short Rate*-Prozesses in den Vordergrund.³⁶ Anschließend wird untersucht, welche Bond- und Optionspreise dadurch impliziert werden. Diesem Ansatz inhärent ist demzufolge die Unfähigkeit des Zinsmodells, automatisch die heutige Zinsstruktur exakt zu reproduzieren. Eine akkurate Beobachtung der *Discount Curve* $\{B(t, T_i), i \in [0, n], t < T_0, T_n = T^{\max}\}$ vorausgesetzt, ist das Gleichungssystem (2.33) unterbestimmt, und eine direkte Kalibrierung zur vorherrschenden *Yield Curve*, von starken Bond-Interdependenzen abgesehen, stellt sich als eine äußerst schwierige Aufgabe heraus.³⁷ Nachträglich kann jedoch der Versuch unternommen werden, die geschätzten Parameter des postulierten Zinsmodells unter Berücksichtigung der am Markt zu den diskreten Zeitpunkten T_i beobachtbaren *Discount*

³⁵ Zu dieser Eigenschaft des *Ito*-Integrals vgl. B. Oksendal, "Stochastic Differential Equations" (2000), S. 29.

³⁶ Im Rahmen des Zinsmodells in diesem Abschnitt wird davon ausgegangen, dass die Konstanten α , μ und σ aus historischen Daten geschätzt werden.

³⁷ Das Gleichungssystem besteht aus $n+1$ Gleichungen, da genauso viele Bondpreise $B(t, T_i)$, die die *Discount Curve* zu diesen diskreten Zeitpunkten determinieren, tatsächlich am Markt beobachtet werden. Auf der anderen Seite wird ein einziges theoretisches Modell über die Entwicklung der *Short Rate* mit lediglich vier Freiheitsgraden, nämlich den frei wählbaren Parametern α , μ , λ und σ , diesen $n+1$ Gleichungen gegenübergestellt.

Curve an die eines approximativ arbitragefreien *Short Rate*-Prozesses anzupassen. Zu diesem Zweck werden von den insgesamt vier freien Variablen α , μ , λ und σ drei wie gewohnt geschätzt und mit einem festen Wert versehen. Die vierte, z.B. λ , bleibt als Funktionsvariable in einem iterativen Prozess frei zu wählen. Mittels der *Methode der kleinsten Quadrate (LSA)* kann die Summe der quadrierten Differenzen³⁸ zwischen den aus dem Bondmarkt extrahierten Bondpreisen $B(t, T_i)$ und den durch das Zinsmodell implizierten Bondpreisen $B(t, T_i, \lambda)$ minimiert werden:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n [B(t, T_i) - B(r(t), T_i)]^2 \rightarrow \text{Min!} &\Rightarrow \text{Min}_{\lambda} \sum_{i=0}^n [B(t, T_i) - B(t, T_i, \lambda)]^2 \\ \frac{\partial \sum_{i=0}^n [B(t, T_i) - B(t, T_i, \lambda)]^2}{\partial \lambda} &= -2 \sum_{i=0}^n [B(t, T_i) - B(t, T_i, \lambda)] \frac{\partial B(t, T_i, \lambda)}{\partial \lambda} = \\ &= -2 \sum_{i=0}^n [B(t, T_i) - B(t, T_i, \lambda)] B(t, T_i, \lambda) \left(\frac{\sigma}{\alpha^2} (e^{-\alpha(T-t)} - 1) + \frac{\sigma}{\alpha} (T-t) \right) = 0 \Rightarrow \\ \sum_{i=0}^n B(t, T_i) B(t, T_i, \lambda) - \sum_{i=0}^n B(t, T_i, \lambda)^2 &= 0 \text{ bzw. } \sum_{i=0}^n [B(t, T_i) - B(t, T_i, \lambda)] B(t, T_i, \lambda) = 0 \end{aligned} \quad (2.41)$$

Numerisch kann in einem iterativen Auswahlprozess für λ sichergestellt werden, dass die Bedingung näherungsweise erfüllt ist. Dadurch wird die bestmögliche Anpassung der modellimplizierten Bondpreise an die Marktbondpreise am jeweiligen zeitdiskreten Anpassungstermin T_i in Abhängigkeit von λ erreicht.

Formeln in geschlossener Form für Optionen auf den Zerobond im Rahmen des Zinsmodells von Vasicek wurden von Jamshidian³⁹ entwickelt. Der heutige Preis einer europäischen Call- bzw. Put-Option mit Ausübungszeitpunkt t und Basispreis X auf einen Zerobond mit Fälligkeit in T und Nominalwert NW lässt sich folgendermaßen berechnen:

$$\begin{aligned} \text{Call}(0, t) &= NW \cdot B(0, T) N(h) - X \cdot B(0, t) N(h - \sigma_B) \\ \text{Put}(0, t) &= X \cdot B(0, t) N(-h + \sigma_B) - NW \cdot B(0, T) N(-h) \text{ mit} \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$h = \frac{1}{\sigma_B} \log \frac{NW \cdot B(0, T)}{X \cdot B(0, t)} + \frac{\sigma_B}{2}, \quad \sigma_B = \frac{\sigma}{\alpha} [1 - e^{-\alpha(T-t)}] \sqrt{\frac{1 - e^{-2\alpha t}}{2\alpha}}$$

Weiterhin beweist Jamshidian, dass Optionen auf kuponzahlende Bonds mit Kupon c_i zum Zeitpunkt s_i ein Portfolio von Optionen auf die zugrunde liegenden Zerobonds darstellen:

³⁸ Lediglich die Abstände zwischen der aus dem Markt hergeleiteten und der geschätzten *Discount Curve* sind von Interesse. Es ist durchaus möglich, dass an einer diskreten Stelle Bondpreise unterschätzt und an einer anderen umgekehrt überschätzt werden.

³⁹ Vgl. F. Jamshidian, "An Exact Bond Option Pricing Formula", Journal of Finance, 44 (1989), S. 205-209.

$$Call(0, t) = \sum_{i=1}^n c_i \max[B(t, s_i) - X_i] \quad (2.43)$$

24 Arbitragefreie Modellierung der Zinsstruktur und modellinhärente Konsistenz der zu kalibrierenden Parameter mit Marktpreisen

In der Bestrebung die dem Zinsmodell von Vasicek anhaftende Unfähigkeit zur Anpassung an annahmegemäß arbitragefreie Marktstrukturen und die von marktbeobachtbaren Variablen losgelöste Parametrisierung des *Short Rate*-Prozesses zu beseitigen, werden die Drift- und Volatilitätsfunktion umgestaltet. Die Erweiterung erfolgt im Rahmen des Hull/White-Modells⁴⁰ mit Funktionsparametern, die exakt die heutige Zinsstruktur widerspiegeln. Im Gegensatz zum ursprünglichen Ansatz von Hull/White werden die Bestimmung von Bondpreisen, die Kalibrierung zur marktinduzierten *Discount Curve* und die Bewertung von Optionen auf Bonds gänzlich unter Verzicht auf partielle Differentialgleichungen vollzogen. Außerdem wird eine analytische Lösung der linearen Differentialgleichung zur Anpassung des langfristigen Mittelwerts an verfügbare Marktdaten präsentiert. Darüber hinaus wird, abweichend von der herkömmlichen Annahme konstanter Volatilitäten, eine Kalibrierungsformel in geschlossener Form für die zeitabhängige Volatilitätsstruktur des *Short Rate*- und Bondpreisprozesses hergeleitet. Zum Zweck der Bestimmung des Optionspreises bedarf es erneut einer Wahrscheinlichkeitsmaßtransformation, da sich der heutige Optionswert in der risikoneutralen Welt mittels Abdiskontierung des erwarteten Payoffs bei Fälligkeit der Option determinieren lässt. Wegen des stochastischen Charakters des Abzinsungsfaktors ist der Optionspreis mit Hilfe der Dichtefunktion einer bivariaten Normalverteilung zu berechnen. Ein handlicher Ausdruck für die Korrelation in analytischer Form wird zwar hergeleitet, jedoch eignet sich der Wechsel auf das *Forward*-Wahrscheinlichkeitsmaß besser dazu, die Unerlässlichkeit des Rückgriffs auf die bivariate Normalverteilung zu umgehen.

241 Die Dynamik der *Short Rate* und des Bondpreises

Mit maximaler Modellflexibilität vor Augen werden alle Parameter der *mean-reverting* Driftfunktion und der Volatilitätsfunktion zeitabhängig gestaltet, um höchst mögliche Anpassungsfähigkeit zu gewährleisten. In der risikoneutralen Welt mit Marktpreis des Risikos $\lambda(t)$ gehorcht die *Short Rate* folgender *SDE*:

$$\begin{aligned} dr(t) &= [a^*(t) - b(t)r(t)] dt + \sigma(t)dW^*(t) \\ a^*(t) &= a(t) - \sigma(t)\lambda(t), \quad dW^*(t) = dW(t) - \lambda(t)dt \end{aligned} \quad (2.44)$$

⁴⁰ Vgl. (1) J. Hull, A. White, "Pricing Interest Rate Derivative Securities", *Review of Financial Studies*, 3, 4 (1990), S. 573-592. (2) J. Hull, "Options, Futures, & Other Derivatives" (2000), S. 574-578.

Mit $K(t) = \int_0^t b(u)du$ erhält man als Lösung dieser *SDE*⁴¹:

$$r(T_2) = e^{-K(T_2)} \left[e^{K(T_1)} r(T_1) + \int_{T_1}^{T_2} e^{K(u)} a^*(u) du + \int_{T_1}^{T_2} \sigma(u) e^{K(u)} dW^*(u) \right] \quad (2.45)$$

Demzufolge folgt $r(t)$ einem Gaußschen Prozess, der darüber hinaus die *Markov*-Eigenschaft besitzt, mit Erwartungswert und Varianz wie folgt⁴²:

$$E(r(T_2) | F(T_1)) = e^{-K(T_2)} \left[e^{K(T_1)} r(T_1) + \int_{T_1}^{T_2} e^{K(u)} a^*(u) du \right] \quad (2.46)$$

$$Var(r(T_2) | F(T_1)) = e^{-2K(T_2)} \int_{T_1}^{T_2} \sigma(u)^2 e^{2K(u)} du$$

Ausgehend von der Beziehung für die Bestimmung des Bondpreises in der risikoneutralen Welt (2.33) wird die *Short Rate* über die Zeit t integriert:

$$\int_{T_1}^{T_2} r(u) du = \int_{T_1}^{T_2} e^{K(T_1)} r(T_1) e^{-K(u)} du + \int_{T_1}^{T_2} e^{-K(u)} \int_{T_1}^u e^{K(s)} a^*(s) ds du +$$

$$\int_{T_1}^{T_2} e^{-K(u)} \int_{T_1}^u \sigma(s) e^{K(s)} dW^*(s) du \Rightarrow \int_{T_1}^{T_2} r(u) du = \int_{T_1}^{T_2} e^{K(T_1)} r(T_1) e^{-K(u)} du + \quad (2.47)$$

$$\int_{T_1}^{T_2} e^{-K(u)} \int_{T_1}^u e^{K(s)} a^*(s) ds du + \int_{T_1}^{T_2} \sigma(s) e^{K(s)} \int_s^{T_2} e^{-K(u)} du dW^*(s)$$

Der stochastische Abzinsungsfaktor stellt gleichfalls einen Gaußschen Prozess dar. Der Erwartungswert und die Varianz lassen sich folgendermaßen bestimmen:

$$E\left(\int_{T_1}^{T_2} r(u) du | F(T_1)\right) = \int_{T_1}^{T_2} e^{K(T_1)} r(T_1) e^{-K(u)} du + \int_{T_1}^{T_2} e^{-K(u)} \int_{T_1}^u e^{K(s)} a^*(s) ds du \quad (2.48)$$

$$Var\left(\int_{T_1}^{T_2} r(u) du | F(T_1)\right) = \int_{T_1}^{T_2} \sigma(s)^2 e^{2K(s)} \left(\int_s^{T_2} e^{-K(u)} du \right)^2 ds$$

Die Idee vom letzten Abschnitt aufgreifend, kann der Preis im Zeitpunkt T_1 eines Bonds mit Fälligkeit in T_2 bestimmt werden, indem man die *Moment Generating Function* (MGF) mit einem Koeffizienten von -1 ermittelt⁴³:

⁴¹ Der Lösungsweg wurde in einem anderen Zusammenhang bereits vorgeführt. Vgl. Anlage 1, (A1.1) – (A1.4).

⁴² Vgl. Anlage 1., (A1.5) und die Ausführung zum *Independence Lemma*.

$$\begin{aligned}
B(T_1, T_2) &= E\left(e^{-\int_{T_1}^{T_2} r(u) du} \mid \mathcal{F}(T_1)\right) = e^{-E\left(\int_{T_1}^{T_2} r(u) du \mid \mathcal{F}(T_1)\right) + \frac{1}{2} \text{Var}\left(\int_{T_1}^{T_2} r(u) du \mid \mathcal{F}(T_1)\right)} \Rightarrow \\
B(T_1, T_2) &= e^{-\int_{T_1}^{T_2} e^{K(T_1)} r(T_1) e^{-K(u)} du - \int_{T_1}^{T_2} e^{-K(u)} \int_{T_1}^u e^{K(s)} a^*(s) ds du + \frac{1}{2} \int_{T_1}^{T_2} \sigma(s)^2 e^{2K(s)} \left(\int_s^{T_2} e^{-K(u)} du\right)^2 ds} \\
&= e^{-\int_{T_1}^{T_2} e^{K(T_1)} r(T_1) e^{-K(u)} du - \int_{T_1}^{T_2} e^{K(s)} a^*(s) \int_s^{T_2} e^{-K(u)} du ds + \frac{1}{2} \int_{T_1}^{T_2} \sigma(s)^2 e^{2K(s)} \left(\int_s^{T_2} e^{-K(u)} du\right)^2 ds} \\
&= e^{-r(T_1)C(T_1, T_2) - A(T_1, T_2)} \quad \text{mit } C(T_1, T_2) = e^{K(T_1)} \int_{T_1}^{T_2} e^{-K(u)} du, \tag{2.49}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A(T_1, T_2) &= \int_{T_1}^{T_2} e^{K(s)} a^*(s) \int_s^{T_2} e^{-K(u)} du ds - \frac{1}{2} \int_{T_1}^{T_2} \sigma(s)^2 e^{2K(s)} \left(\int_s^{T_2} e^{-K(u)} du\right)^2 ds \\
&= \int_{T_1}^{T_2} \left(e^{K(s)} a^*(s) \int_s^{T_2} e^{-K(u)} du - \frac{1}{2} \sigma(s)^2 e^{2K(s)} \left(\int_s^{T_2} e^{-K(u)} du\right)^2 \right) ds
\end{aligned}$$

Mittels totalen Differenzierens nach *Ito* lässt sich die Dynamik des Bondpreises herleiten:

$$\begin{aligned}
\frac{dB(T_1, T_2)}{B(T_1, T_2)} &= \left(-C(T_1, T_2) dr(T_1) + \frac{1}{2} C(T_1, T_2)^2 dr(T_1)^2 - r(T_1) C_{T_1}(T_1, T_2) dT_1 - A_{T_1}(T_1, T_2) dT_1 \right) = \\
&\left(-C(T_1, T_2)(a^*(T_1) - b(T_1)r(T_1)) + \frac{1}{2} C(T_1, T_2)^2 \sigma(T_1)^2 - r(T_1) C_{T_1}(T_1, T_2) - A_{T_1}(T_1, T_2) \right) dT_1 - \\
&\sigma(T_1) C(T_1, T_2) dW^*(T_1) \Rightarrow \\
dB(T_1, T_2) &= r(T_1) B(T_1, T_2) dT_1 - \sigma(T_1) C(T_1, T_2) B(T_1, T_2) dW^*(T_1) \tag{2.50}^{44}
\end{aligned}$$

⁴³ Mit $\int_{T_1}^{T_2} r(u) du = \underbrace{r(T_1) e^{K(T_1)} \int_{T_1}^{T_2} e^{-K(u)} du}_{\mathcal{F}(T_1)\text{-messbar}} + \underbrace{\int_{T_1}^{T_2} a^*(s) e^{K(s)} \int_s^{T_2} e^{-K(u)} du}_{\text{det er min istisch}} + \underbrace{\int_{T_1}^{T_2} \sigma(s) e^{K(s)} \int_s^{T_2} e^{-K(u)} du}_{\mathcal{F}(T_1)\text{-unabhängig}} dW^*(s)$ und zusätzlich

(2.48) folgt, dass $\int_{T_1}^{T_2} r(u) du$ die *Markov*-Eigenschaft besitzt. Demnach kann die *MGF*, bedingt auf $\mathcal{F}(T_1)$,

mit Hilfe der *Transition Density (TD)* ermittelt werden: $E\left(e^{-\int_{T_1}^{T_2} r(u) du} \mid \mathcal{F}(T_1)\right) = E^{T_1}\left(e^{-\int_{T_1}^{T_2} r(u) du, T_1} \mid \mathcal{F}(T_1)\right) = \frac{E\left[e^{-\int_{T_1}^{T_2} r(u) du, T_1} \mid \mathcal{F}(T_1)\right]}{E\left[e^{-\int_{T_1}^{T_2} r(u) du, T_1}\right]} = \frac{E\left[e^{-\int_{T_1}^{T_2} r(u) du, T_1} \mid \mathcal{F}(T_1)\right]}{E\left[e^{-\int_{T_1}^{T_2} r(u) du, T_1}\right]}$

$$E^{0, T_1}\left(e^{-\int_{T_1}^{T_2} r(u) du}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x} p(T_1, T_2; 0, x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x} \frac{1}{\sqrt{2\pi \text{Var}\left(\int_{T_1}^{T_2} r(u) du \mid \mathcal{F}(T_1)\right)}} e^{-\frac{x - E\left(\int_{T_1}^{T_2} r(u) du \mid \mathcal{F}(T_1)\right)}{\sqrt{2\pi \text{Var}\left(\int_{T_1}^{T_2} r(u) du \mid \mathcal{F}(T_1)\right)}}} dx. \text{ Mit}$$

Rückgriff auf die in Fn. 33 angewendete Technik, erhält man für den letzten Integralausdruck

$$e^{-E\left(\int_{T_1}^{T_2} r(u) du \mid \mathcal{F}(T_1)\right) + \frac{1}{2} \text{Var}\left(\int_{T_1}^{T_2} r(u) du \mid \mathcal{F}(T_1)\right)}$$

⁴⁴ Nachdem die Kalibrierung vollzogen worden ist, d. h. erst nachdem die Funktionen $a^*(t)$, $b(t)$ und $\sigma(t)$ in Abhängigkeit von den verfügbaren Marktdaten Gestalt angenommen haben, wird demonstriert, dass der Ausdruck für die Drift dieser *SDE* tatsächlich $r(T_1)$ - der *Short Rate* im Zeitpunkt T_1 - entspricht

242 Die Option auf den Bond

2421 Bewertung in der risikoneutralen Welt

Betrachtet sei eine europäische Call-Option mit Ausübungszeitpunkt T_1 und Strike K auf einen Bond mit Fälligkeit in T_2 . Der heutige Wert des Call wird unter dem risikoneutralen Martingalmaß als der abdiskontierte erwartete Payoff am Verfalltag berechnet:

$$Call(0, T_1) = E^{P^*} \left(e^{-\int_0^{T_1} r(u) du} (B(T_1, T_2) - K)^+ \right) = E^{P^*} \left(e^{-\int_0^{T_1} r(u) du} (e^{-r(T_1)C(T_1, T_2) - A(T_1, T_2)} - K)^+ \right) \Rightarrow$$

$$Call(0, T_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x} (e^{-yC(T_1, T_2) - A(T_1, T_2)} - K)^+ p(x, y) dx dy \quad (2.51)$$

Um die bivariate Dichte der Normalverteilung $p(x, y)$ für den Zinssatz und den Abdiskontierungsfaktor bestimmen zu können, ist vorher die Ermittlung der Korrelation zwischen

$r(T_1)$ und $\int_0^{T_1} r(u) du$ erforderlich⁴⁵:

$$\begin{aligned} Cov\left(\int_0^{T_1} r(u) du, r(T_1)\right) &= E\left(\left[\int_0^{T_1} r(u) du - E\left(\int_0^{T_1} r(u) du\right)\right] \cdot [r(T_1) - E(r(T_1))]\right) = \\ &= \frac{E\left(\left[\int_0^{T_1} r(u) du - E\left(\int_0^{T_1} r(u) du\right)\right] \cdot [r(T_1) - E(r(T_1))]\right)}{\sqrt{Var(r(T_1))} \sqrt{Var\left(\int_0^{T_1} r(u) du\right)}} \Rightarrow \rho = \\ &= \frac{E\left(r(T_1) \cdot \int_0^{T_1} r(u) du\right) - [e^{-K(T_1)}(r(0) + \int_0^{T_1} e^{K(u)} a^*(u) du)] \cdot [e^{-K(T_1)}(r(0) + \int_0^{T_1} e^{K(s)} a^*(s) ds)]}{\sqrt{Var(r(T_1))} \sqrt{Var\left(\int_0^{T_1} r(u) du\right)}} \\ &= \frac{E\left([e^{-K(T_1)} \int_0^{T_1} \sigma(u) e^{K(u)} dW^*(u)] \cdot [\int_0^{T_1} \sigma(u) e^{K(u)} \int_u^{T_1} e^{-K(s)} ds dW^*(u)]\right)}{\sqrt{Var(r(T_1))} \sqrt{Var\left(\int_0^{T_1} r(u) du\right)}} \\ &= \frac{E\left(e^{-K(T_1)} \int_0^{T_1} \sigma(u)^2 e^{2K(u)} \int_u^{T_1} e^{-K(s)} ds du\right)}{\sqrt{e^{-2K(T_1)} \int_0^{T_1} \sigma(u)^2 e^{2K(u)} du} \sqrt{\int_0^{T_1} \sigma(u)^2 e^{2K(u)} \left(\int_u^{T_1} e^{-K(s)} ds\right)^2 du}} \Rightarrow \end{aligned}$$

bzw. $r(t)$ im allgemeinen Fall, falls es den Bondpreis $B(t, T_i)$ im Zeitpunkt t für beliebige Fälligkeiten T_i zu bestimmen gälte. Vgl. Anlage 2 (A2c).

⁴⁵ Es wurde bereits ausgeführt, dass der Zinssatz und der stochastische Abzinsungsfaktor separat Gaußsche Prozesse sind. Erwartungswerte und Varianzen wurden berechnet, vgl. (2.46) bzw. (2.48). Zur Kovarianz und Korrelation, vgl. D. Bertsekas, J. Tsitsiklis, "Introduction to Probability" (2002), S. 236-239.

$$\rho = \frac{e^{-K(T_1)} \int_0^{T_1} \sigma(u)^2 e^{2K(u)} \int_u^{T_1} e^{-K(s)} ds du}{\sqrt{e^{-2K(T_1)} \int_0^{T_1} \sigma(u)^2 e^{2K(u)} du} \sqrt{\int_0^{T_1} \sigma(u)^2 e^{2K(u)} \left(\int_u^{T_1} e^{-K(s)} ds \right)^2 du}} \quad (2.52)$$

Indem man von Hölder's Ungleichung⁴⁶ Gebrauch macht, lässt es sich zeigen, dass der Ausdruck für die Korrelation Werte streng kleiner als eins annimmt⁴⁷:

$$\begin{aligned} & \sqrt{e^{-2K(T_1)} \int_0^{T_1} \sigma(u)^2 e^{2K(u)} du} \sqrt{\int_0^{T_1} \sigma(u)^2 e^{2K(u)} \left(\int_u^{T_1} e^{-K(s)} ds \right)^2 du} = \\ & \left(\int_0^{T_1} (\sigma(u) e^{K(u-K(T_1))})^2 du \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{T_1} (\sigma(u) e^{K(u)} \int_u^{T_1} e^{-K(s)} ds)^2 du \right)^{\frac{1}{2}} > e^{-K(T_1)} \int_0^{T_1} \sigma(u)^2 e^{2K(u)} \int_u^{T_1} e^{-K(s)} ds du \end{aligned}$$

Mit zunehmender Laufzeit der Option sinkt die Korrelation zwischen dem Abzinsungsfaktor und der Ausprägung der *Short Rate* am Verfalltag. Am höchstens ist sie bei sehr kurzlebigen Optionen und nimmt mit einem sich erweiternden Ausübungszeithorizont stetig ab. Hinreichend lang laufende Kontrakte könnten zu dem Trugschluss verleiten, auch wenn nur approximativ, von Unabhängigkeit auszugehen⁴⁸. An dieser Stelle wird dieser Ansatz nicht weiter verfolgt, da sich der Wechsel auf das *Forward*-Wahrscheinlichkeitsmaß anbietet und zugleich dadurch ein deutlicher Vereinfachungseffekt erzielt wird.

2422 Bewertung unter dem *Forward*-Wahrscheinlichkeitsmaß

Da der Payoff der Option in T_1 erfolgt, kann man den heutigen Wert des Call bestimmen, indem das *Forwarding* bis zu diesem Zeitpunkt vollzogen wird. Jeder durch das *Numeraire* - einen Bond mit Fälligkeit in T_1 - relativierte Preisprozess eines Wertpapiers folgt dementsprechend unter dem *Forward*-Wahrscheinlichkeitsmaß einem Martingal:

⁴⁶ Zu Hölder's Ungleichungen vgl. I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, "Tables of Integrals, Series and Products" (2000), S. 1092 und S. 1099.

⁴⁷ Der Nenner in (2.52) ist streng größer als der Zähler. Gleichheit stellte sich ein, falls sich $\sigma(u) e^{K(u-K(T_1))}$ als ein Produkt aus $\sigma(u) e^{K(u)} \int_u^{T_1} e^{-K(s)} ds$ und einer Konstante darstellen ließe, d. h. nur dann wenn $e^{-K(T_1)} / \int_u^{T_1} e^{-K(s)} ds$ in Abhängigkeit von T_1 , dem Ausübungszeitpunkt der Option, unverändert bliebe.

⁴⁸ In Wirklichkeit kann die Korrelation zwischen dem Abzinsungsfaktor und der *Short Rate* niemals null werden. Eine mögliche Erklärung für den beobachteten Effekt wäre, dass der Zinssatz am Verfalltag bei langlebigen Optionen sehr schwach mit den zeitlich am weitesten entfernten Zinssätzen, die in den Abzinsungsfaktor einfließen, korreliert. Je näher man dem Ausübungszeitpunkt kommt, desto stärker wird die Korrelation. Je länger die Optionslaufzeit, umso mehr Zinssätze, die einen schwachen Zusammenhang mit der *Short Rate* bei Terminierung der Option aufweisen, werden in den Abzinsungsfaktor einbezogen und folglich desto geringer wird die Korrelation ausfallen.

$$\frac{Call(0, T_1)}{B(0, T_1)} = E^{P_{\mathbb{R}_1}} \left(\frac{Call(T_1, T_1)}{B(T_1, T_1)} \right) \Rightarrow Call(0, T_1) = B(0, T_1) E^{P_{\mathbb{R}_1}} \left((B(T_1, T_2) - K)^+ \right) \Rightarrow$$

$$Call(0, T_1) = B(0, T_1) \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-x C(T_1, T_2) - A(T_1, T_2)} - K)^+ f(x) dx, \quad f(x) - \text{Dichte von } r(T_1) \quad (2.53)$$

Der Bond-*SDE* unter dem risikoneutralen Martingalmaß in (2.50) ist eine Volatilität des Bondpreises und zugleich des *Numeraire* im allgemeinen Fall von $\sigma(t)C(t, T_1)$ zu entnehmen. Demnach kann die Dynamik der treibenden Prozesse mit Kenntnis über den Marktpreis des Risikos folgendermaßen an das neue Wahrscheinlichkeitsmaß angepasst werden:

$$dW^*(t) = dW^{T_1}(t) - \sigma(t)C(t, T_1)dt$$

$$dB(t, T_1) = (r(t) + \sigma(t)^2 C(t, T_1)^2) B(t, T_1)dt - \sigma(t)C(t, T_1)B(t, T_1)dW^{T_1}(t)$$

$$dB(t, T_2) = (r(t) + \sigma(t)^2 C(t, T_2)C(t, T_1)) B(t, T_2)dt - \sigma(t)C(t, T_2)B(t, T_2)dW^{T_1}(t)$$

$$r(T_1) = e^{-K(T_1)} \left[r(0) + \int_0^{T_1} e^{K(u)} [a^*(u) + \sigma(u)^2 C(u, T_1)] du + \int_0^{T_1} \sigma(u) e^{K(u)} dW^{T_1}(u) \right] \quad (2.54)$$

$$E(r(T_1)) = e^{-K(T_1)} \left[r(0) + \int_0^{T_1} e^{K(u)} [a^*(u) + \sigma(u)^2 C(u, T_1)] du \right]$$

$$Var(r(T_1)) = e^{-2K(T_1)} \int_0^{T_1} \sigma(u)^2 e^{2K(u)} du$$

$$B(T_1, T_2) = B(0, T_2) e^{\int_0^{T_1} \left[r(u) + \sigma(u)^2 C(u, T_1)C(u, T_2) - \frac{1}{2} \sigma(u)^2 C(u, T_2)^2 \right] du - \int_0^{T_1} \sigma(u) C(u, T_2) dW^{T_1}(u)} \quad (2.55)$$

Da mit (2.55) der Bondpreis im Ausübungszeitpunkt der Option und folglich der Payoff bekannt sind, lässt sich der Preis des Call direkt bestimmen⁴⁹:

$$Call(0, T_1) = B(0, T_1) \int_{-\infty}^h (e^{-x C(T_1, T_2) - A(T_1, T_2)} - K) f(x) dx$$

$$\text{mit } h = \frac{1}{\sigma_p} \ln \frac{B(0, T_2)}{B(0, T_1)K} - \frac{\sigma_p}{2} \quad \text{und} \quad \sigma_p^2 = \int_0^{T_1} \sigma(u)^2 [C(u, T_2) - C(u, T_1)]^2 du \Rightarrow (2.56)$$

$$Call(0, T_1) = B(0, T_2) N(h + \sigma_p) - B(0, T_1) K N(h)$$

243 Kalibrierung der Modellparameter an Marktdaten

Unter der Voraussetzung einer jederzeit aus beobachtbaren Marktdaten rekonstruierbaren *Discount Curve* $\{B(0, T_i), i \in [0, n], T_n = T^{\max}\}$ im heutigen Zeitpunkt, werden die zeitabhängigen Parameter des Zinsmodells so kalibriert, dass es exakt die aktuelle Zinsstruktur reproduziert. Auf diese Weise wird automatisch die Konsistenz mit Marktpreisen bei der

⁴⁹ Die mathematischen Einzelheiten zur Herleitung der Optionspreisformel sind anhand der Anlage 2 (A2a) nachzuvollziehen.

Bewertung von Derivaten auf den Bond⁵⁰ gewährleistet, da das Modell den Wert des *Underlying* implizit korrekt bestimmen wird. Folglich sind alle $B(0, T_i)$, $a^*(0)$, $r(0)$, $\sigma(0)$ und $\sigma(0)C(0, T_i)$ als auch die Volatilität im heutigen Zeitpunkt von Bonds jeglicher Laufzeit aus der vorherrschenden Zinsstruktur zu extrahieren. Das Ziel der Kalibrierungsprozedur besteht darin, die Modellparameter $b(t)$, $\sigma(t)$ und $a^*(t)$ in einem beliebigen zukünftigen Zeitpunkt $T < T^{\max}$ als Ausdruck dieser marktimplizierten Funktionen darzustellen.

Da man aus heutiger Sicht über die aktuelle Volatilitätsstruktur des Zinssatzes und Bondpreises $\sigma(0)$ bzw. $\sigma(0)C(0, T)$ verfügt, ist automatisch auch die Funktion $C(0, T)$ determiniert. Mit Hilfe der Definition dieser Funktion in (2.49) lässt sich $b(T)$ schnell kalibrieren:

$$C(0, T) = \int_0^T e^{-K(u)} du \Rightarrow \frac{\partial C(0, T)}{\partial T} = e^{-K(T)} = e^{-\int_0^T b(u) du}, \text{ weil } K(t) = \int_0^t b(u) du \Rightarrow \quad (2.57)$$

$$\int_0^T b(u) du = -\log \frac{\partial C(0, T)}{\partial T} \Rightarrow b(T) = -\frac{\partial \log \frac{\partial C(0, T)}{\partial T}}{\partial T} = -\frac{\partial^2 C(0, T) / \partial T^2}{\partial C(0, T) / \partial T}$$

Mit (2.49) kann man die Bondpreisformel, in der $r(0)$ und $B(0, T)$ als Inputparameter für die Kalibrierungsprozedur bekannt sind und $C(0, T)$ mit Hilfe der Volatilitätsfunktionen des Zinssatzes und Bondpreises bereits bestimmt wurde, nach $A(0, T)$ auflösen:

$$B(0, T) = e^{-r(0)C(0, T) - A(0, T)} \Rightarrow A(0, T) = -r(0)C(0, T) - \log B(0, T) \quad (2.58)$$

Mit Rückgriff auf die Definition von $A(0, T)$ in (2.49) gelingt es letztlich, $a(T)$ ⁵¹ als einen Ausdruck darzustellen, der aus bekannten Funktionen zusammengesetzt ist:

$$A(0, T) = \int_0^T \left(e^{K(s)} a(s) \int_s^T e^{-K(u)} du - \frac{1}{2} \sigma(s)^2 e^{2K(s)} \left(\int_s^T e^{-K(u)} du \right)^2 \right) ds \Rightarrow$$

$$\frac{\partial A(0, T)}{\partial T} = \int_0^T \left(e^{K(s)} a(s) e^{-K(T)} - \sigma(s)^2 e^{2K(s)} e^{-K(T)} \int_s^T e^{-K(u)} du \right) ds \Rightarrow$$

$$e^{K(T)} \frac{\partial A(0, T)}{\partial T} = \int_0^T \left(e^{K(s)} a(s) - \sigma(s)^2 e^{2K(s)} \int_s^T e^{-K(u)} du \right) ds \Rightarrow$$

⁵⁰ Da man zeigen kann, dass der Cap als ein Portfolio aus Put-Optionen mit Verfall den *Roll-Over*- Terminen auf Bonds mit Fälligkeiten den entsprechenden Auszahlungsterminen des jeweiligen Caplet dargestellt werden kann, ist das Modell außerdem dazu fähig, nicht nur einfache Optionen auf den Bond, sondern auch Zinsoptionen wie Caps und analog Floors marktkonform zu bewerten.

⁵¹ In Wirklichkeit wird $a^*(T) = a(T) - \sigma(T)\lambda(T)$, der risikoadjustierte langfristige Mittelwert der *Short Rate*, kalibriert. In der Bestrebung die Notation nicht unnötig zu belasten, wird einfach die übersichtlichere Schreibweise $a(T)$ anstelle von $a^*(T)$ benutzt.

$$\frac{\partial \left(e^{K(T)} \frac{\partial A(0, T)}{\partial T} \right)}{\partial T} = e^{K(T)} a(T) - \int_0^T \sigma(s)^2 e^{2K(s)} e^{-K(T)} ds \quad (2.59)$$

$$e^{K(T)} \frac{\partial \left(e^{K(T)} \frac{\partial A(0, T)}{\partial T} \right)}{\partial T} = e^{2K(T)} a(T) - \int_0^T \sigma(s)^2 e^{2K(s)} ds$$

Eine weitere Ableitung beider Seiten nach T führt zu einer linearen Differentialgleichung, deren Lösung⁵² aus den bereits ermittelten Funktion $C(0, T)$, $b(T)$ in (2.57), $A(0, T)$ in (2.58) und der noch zu kalibrierenden Volatilitätsfunktion der *Short Rate* $\sigma(T)$ besteht und schließlich die Kalibrierungsformel für $a(T)$ liefert:

$$\frac{\partial \left(e^{K(T)} \frac{\partial e^{K(T)} \frac{\partial A(0, T)}{\partial T}}{\partial T} \right)}{\frac{\partial T}{f(T)}} = 2e^{2K(T)} a(T) b(T) + e^{2K(T)} a'(T) - \sigma(T)^2 e^{2K(T)} \Rightarrow$$

$$e^{2K(T)} a'(T) + 2a(T) b(T) e^{2K(T)} - (\sigma(T)^2 e^{2K(T)} + f(T)) = 0 \Rightarrow \quad (2.60)$$

$$a(T) = b(T) \frac{\partial A(0, T)}{\partial T} + \frac{\partial^2 A(0, T)}{\partial T^2} + \left(\frac{\partial C(0, T)}{\partial T} \right)^2 \int_0^T \left(\frac{\sigma(s)}{\partial C(0, s) / \partial s} \right)^2 ds$$

Zuletzt wird der Versuch unternommen, den Volatilitätsparameter des zugrunde liegenden Zinsmodells zu bestimmen. In Übereinstimmung mit der Grundidee, die sich hinter der Kalibrierungsprozedur verbirgt, ist $\sigma(t)$ in einem beliebigen Zeitpunkt $T_i < T^{\max}$ als Ausdruck bestehend aus bekannten oder mittels verfügbarer Marktdaten kalibrierbaren Funktionen darzustellen. Als entscheidende Komponente bei der Ermittlung und zugleich Bestandteil der Kalibrierungsformel für $\sigma(t)$ im Zeitpunkt T_1 wird zuerst die „implizite“ Volatilität σ_p als Funktion des Optionsverfalltags T_1 , die aus den beobachtbaren heutigen Preisen von Optionen diverser Fälligkeiten zwischen 0 und T_1 auf einen Bond mit Fälligkeit in T_2 zu extrahieren ist, näher untersucht⁵³:

⁵² Der detaillierte Lösungsweg zu der Differentialgleichung, deren Ergebnis letztendlich $a(T)$ definiert, ist in der Anlage 2 (A2b) zu finden.

⁵³ Der Verfalltag der Option und die Fälligkeit des zugrunde liegenden Bonds sind bewusst im Einklang mit der bereits bewerteten Call-Option in (2.56) angenommen worden. Diese spezielle Wahl schmälert die Tauglichkeit der im Folgenden zu präsentierenden Kalibrierungstechnik nicht, da sie allgemein auf beliebige Zeitpunkte anwendbar ist, solange Optionspreise für das entsprechende Underlying zur Verfügung stehen. Mit einer perfekten Korrelation zwischen dem Underlying und dem Bond mit Fälligkeit dem Ausübungszeitpunkt der europäischen Option, erhält man Merton's Volatilität. Vgl. R. Merton, "Theory of Rational Option Pricing", Bell Journal of Economics and Management Science 4 (1973), S. 141-183.

$$\begin{aligned}
\sigma_p^2 &= \int_0^{T_1} \sigma(u)^2 [C(u, T_2) - C(u, T_1)]^2 du = \int_0^{T_1} \sigma(u)^2 [C(u, T_2)^2 + C(u, T_1)^2 - 2C(u, T_1)C(u, T_2)] du \\
\sigma_p^2 &= \int_0^{T_1} \left[\underbrace{\sigma(u)^2 C(u, T_2)^2}_{\sigma_{B_{T_2}}(u)^2} + \underbrace{\sigma(u)^2 C(u, T_1)^2}_{\sigma_{B_{T_1}}(u)^2} - 2 \underbrace{\sigma(u)^2 C(u, T_1)C(u, T_2)}_{\text{Cov}(B_{T_1}, B_{T_2}) \text{ mit } \rho_{B_{T_1}, B_{T_2}}=1} \right] du = \\
&\int_0^{T_1} \left[\underbrace{\sigma_{B_{T_2}}(u)^2 + \sigma_{B_{T_1}}(u)^2 + 2\text{Cov}(B_{T_1}(u), B_{T_2}(u))}_{\sigma(B(u, T_1) + B(u, T_2))^2} \right] du - 4 \int_0^{T_1} \text{Cov}(B_{T_1}(u), B_{T_2}(u)) du
\end{aligned}$$

Die „implizite“ Volatilität σ_p setzt sich aus dem Integral vom heutigen Zeitpunkt 0 bis zum Ausübungszeitpunkt der europäischen Call-Option T_1 über die Varianz des Portfolios aus zwei Bonds mit Fälligkeit in T_1 bzw. T_2 zusammen, korrigiert um das Integral von 0 bis T_1 über die vierfache Kovarianz⁵⁴ zwischen den beiden Bonds:

$$\sigma_p^2 = \int_0^{T_1} \sigma(B(u, T_1) + B(u, T_2))^2 du - 4 \int_0^{T_1} \text{Cov}(B_{T_1}(u), B_{T_2}(u)) du \quad (2.61)$$

Modelliert als Funktion des Optionsverfalls bei fixierter Laufzeit des zugrunde liegenden Bonds T_2 verschafft die Portfoliovarianz Aufschluss über die funktionelle Beziehung zwischen Optionen verschiedener Laufzeiten auf ein und dasselbe *Underlying*⁵⁵. Folglich erweist sie sich als ein durchaus geeigneter Ausgangspunkt für die Bestimmung des Volatilitätsparameters $\sigma(t)$ im Zeitpunkt T_1 :

$$\begin{aligned}
\sigma_p^2(T_1) &= \int_0^{T_1} \sigma(u)^2 [C(u, T_2) - C(u, T_1)]^2 du = \int_0^{T_1} \sigma(u)^2 \left[\frac{C(0, T_2) - C(0, u)}{\partial C(0, u) / \partial u} - \frac{C(0, T_1) - C(0, u)}{\partial C(0, u) / \partial u} \right]^2 du = \\
&\int_0^{T_1} \sigma(u)^2 \left[\frac{C(0, T_2) - C(0, u) - C(0, T_1) + C(0, u)}{\partial C(0, u) / \partial u} \right]^2 du = \int_0^{T_1} \frac{\sigma(u)^2}{[\partial C(0, u) / \partial u]^2} [C(0, T_2) - C(0, T_1)]^2 du \Rightarrow \\
\frac{\sigma_p(T_1)^2}{[C(0, T_2) - C(0, T_1)]^2} &= \int_0^{T_1} \frac{\sigma(u)^2}{[\partial C(0, u) / \partial u]^2} du \quad (2.62)
\end{aligned}$$

⁵⁴ Der Korrelationskoeffizient zwischen den beiden Bonds mit Fälligkeiten in T_1 bzw. T_2 beträgt eins, da im Rahmen des zugrunde liegenden Ein-Faktor-Modells ein und derselbe Unsicherheitsfaktor für die zufälligen Schocks, denen die Bondpreise unterliegen, verantwortlich ist.

⁵⁵ Im Ausübungszeitpunkt der Option wird der Wert der Portfoliovarianz allein durch die Varianz des zweiten Bonds bestimmt, da der erste bereits verfallen ist und demnach eine Varianz von null aufweist. Darüber hinaus beträgt die Portfoliovarianz bei Fälligkeit des Underlying null. Mit (2.61) und $T_1 = T_2$ wird

$$\text{diese Tatsache sofort ersichtlich: } \int_0^{T_1} \sigma(2B(u, T_2))^2 du - 4 \int_0^{T_1} \underbrace{\text{Cov}(B_{T_2}(u), B_{T_2}(u))}_{\sigma(B(u, T_2))^2} du = 0$$

Um die zu kalibrierende Volatilität der *Short Rate* $\sigma(T_1)$ oder damit gleichbedeutend die Volatilität des *Underlying* im Zeitpunkt T_1 aus der letzten Gleichung zu extrahieren, indem man das Integral eliminiert, werden beide Seiten nach T_1 differenziert:

$$\frac{2\sigma_p(T_1)[C(0, T_2) - C(0, T_1)]^2 \frac{\partial \sigma_p(T_1)}{\partial T_1} + 2\sigma_p(T_1)^2 [C(0, T_2) - C(0, T_1)] \frac{\partial C(0, T_1)}{\partial T_1}}{[C(0, T_2) - C(0, T_1)]^4} = \frac{\sigma(T_1)^2}{[\partial C(0, T_1) / \partial T_1]^2}$$

$$\Rightarrow \sigma(T_1)^2 = \frac{2\sigma_p(T_1) \frac{\partial \sigma_p(T_1)}{\partial T_1}}{\left[\frac{C(0, T_2) - C(0, T_1)}{\partial C(0, T_1) / \partial T_1} \right]^2} + \frac{2\sigma_p(T_1)^2}{\left[\frac{C(0, T_2) - C(0, T_1)}{\partial C(0, T_1) / \partial T_1} \right]^3} \Rightarrow \quad (2.63)$$

$$\sigma(T_1)^2 = \frac{2\sigma_p(T_1) \frac{\partial \sigma_p(T_1)}{\partial T_1}}{C(T_1, T_2)^2} + \frac{2\sigma_p(T_1)^2}{C(T_1, T_2)^3}$$

Da die Bondvolatilität mit der gerade kalibrierten Volatilität der *Short Rate* mittels der bereits determinierten Funktion $C(t, T)$ verknüpft ist, folgt unmittelbar:

$$\sigma_{B_{T_2}}(T_1) = \sigma(T_1)C(T_1, T_2) \Rightarrow \sigma_{B_{T_2}}(T_1)^2 = 2\sigma_p(T_1) \frac{\partial \sigma_p(T_1)}{\partial T_1} + \frac{2\sigma_p(T_1)^2}{C(T_1, T_2)} \quad (2.64)$$

$$\text{mit } C(T_1, T_2) = \left[\frac{C(0, T_2) - C(0, T_1)}{\partial C(0, T_1) / \partial T_1} \right]$$

25 Optionspreismodell mit funktionaler Abhängigkeit der Volatilität vom Zinssatz

Die Dynamik der *Short Rate* in (2.44) impliziert eine von der Höhe des Zinssatzes unabhängige Reaktion auf Informationsschocks in der Gestalt einer deterministischen Volatilitätsfunktion der Zeit $\sigma(t)$. Ökonometrische Ansätze und empirisches Beweismaterial⁵⁶ verdeutlichen jedoch die Abhängigkeit der infinitesimalen Änderung der *Short Rate* infolge des stochastischen Unsicherheitsfaktors von ihrem eigenen aktuellen Niveau. Uneinigkeit herrscht lediglich über den Grad dieser Dependenz⁵⁷. Folglich ist es zwecks Realitätsnähe und verlässlicher Bewertungsergebnisse erforderlich, das Zinsmodell in (2.44) unter Beibehaltung der als sinnvoll erachteten *mean-reverting* Eigenschaft des Zinssatzes zu erweitern, um zusätzlich diesem erschwerenden Umstand Rechnung zu tragen.

⁵⁶ Vgl. T. A. Marsh, E. R. Rosenfeld, "Stochastic Processes for Interest Rates and Equilibrium Bond Prices", *Journal of Finance* 38 (1983), S. 635-645.

⁵⁷ Zu einer komparativen Gegenüberstellung alternativer Strukturmodelle der *Short Rate* vgl. K. C. Chan, G. A. Karolyi, F. A. Longstaff, A. B. Sanders, "An Empirical Comparison of Alternative Models of the Short-Term Interest Rate", *Journal of Finance* 68 (1992), S. 1209-1227.

251 Die *Short Rate* im Rahmen des erweiterten Zinsmodells

Unter dem risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß gehorcht die *Short Rate* folgender *SDE* in allgemeiner Form, wobei β Werte zwischen 0 und 1 in Abhängigkeit von der Dependenzstärke annimmt⁵⁸:

$$dr(t) = (a^*(t) - b(t)r(t))dt + \sigma(t)r(t)^\beta dW^*(t) \quad (2.65)$$

Im letzten Abschnitt wurde der Grenzfall für $\beta=0$ gründlich erforscht. Dementsprechend ist es um der Folgerichtigkeit willen sinnvoll, den anderen Grenzfall zu betrachten. Daher wird das Zinsmodell in (2.65) im weiteren Verlauf der Überlegungen für $\beta=1$ im Hinblick auf die Implikationen für die Gestalt von Bondvolatilitäten und Optionsbewertungsformeln ausführlich untersucht⁵⁹:

$$dr(t) = (a^*(t) - b(t)r(t))dt + \sigma(t)r(t)dW^*(t) \quad (2.66)^{60}$$

Die Lösung dieser *SDE* erfolgt indem beide Seiten mit $M(t, w) = e^{-\int_0^t \sigma(s)dW^*(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma(s)^2 ds}$ multipliziert werden:

$$\begin{aligned} dr(t) &= (a^*(t) - b(t)r(t))dt + \sigma(t)r(t)dW^*(t) \cdot e^{-\int_0^t \sigma(s)dW^*(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma(s)^2 ds} \Rightarrow \\ \underbrace{M(t, w)dr(t) - \sigma(t)r(t)M(t, w)dW^*(t)}_{d[M(t, w)r(t)]} &= (a^*(t) - b(t)r(t))M(t, w)dt, \text{ weil} \\ d[M(t, w)r(t)] &= M(t, w)dr(t) - \sigma(t)M(t, w)r(t)dW^*(t) + \frac{1}{2}\sigma(t)^2 M(t, w)r(t) \underbrace{(dW^*(t))^2}_{dt} \\ -\frac{1}{2}\sigma(t)^2 M(t, w)r(t)dt &= M(t, w)dr(t) - \sigma(t)M(t, w)r(t)dW^*(t) \Rightarrow \\ d[M(t, w)r(t)] &= (a^*(t) - b(t)r(t))M(t, w)dt \end{aligned}$$

⁵⁸ Für $\beta=0$ erhält man das Modell in (2.44), $\beta=1/2$ führt direkt zum *CIR Square Root Process (SRP)*: Vgl. J. C. Cox, J. E. Ingersoll, S. A. Ross, "A Theory of the Term Structure of Interest Rates", *Econometrica* 53 (1985), S. 385-407. Chan et al. argumentieren, dass Zinsmodelle mit Werten für β größer oder gleich 1 besser in der Lage sind, die Dynamik der *Short Rate* einzufangen.

⁵⁹ Ein ähnliches Konstrukt wurde bereits in einem anderen Zusammenhang von Brennan und Schwartz benutzt, um ein numerisches Modell zur Bewertung von Wandelanleihen aufzustellen. Vgl. M. J. Brennan, E. S. Schwartz, "Analyzing Convertible Bonds", *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 15 (1980), S. 907-929.

⁶⁰ Das auf diese Weise konzipierte Zinsmodell gehört zur Gattung der *Constant Elasticity of Variance-Modelle (CEV-Modelle)*, die 1976 zuerst von Cox/Ross entwickelt wurden. Vgl. J. C. Cox, S. A. Ross, "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes", *Journal of Financial Economics* 3 (1976), S. 145-166. Die konstante *Short Rate*-Elastizität der Varianz gibt dem Modell seinen Namen:

$$\eta_{r, \sigma_r^2} = \frac{\partial \sigma_r^2}{\partial r} \cdot \frac{r(t)}{\sigma_r^2} = 2\sigma(t)^2 r(t) \cdot \frac{r(t)}{\sigma(t)^2 r(t)^2} = 2. \text{ Der Optionspreis wird im allgemeinen Fall als die Differenz zwischen zwei unendlichen Summen über das Produkt der Dichte- und der Verteilungsfunktion der Gammaverteilung multipliziert jeweils mit dem heutigen Kurs des Underlying bzw. dem abgezinsten Strike dargestellt.}$$

Folgende Substitutionen werden vorgenommen, um schließlich zu einer *ODE* zu gelangen:

$$M(t, w)r(t) = Y(t, w) \Rightarrow r(t) = \frac{Y(t, w)}{M(t, w)} \Rightarrow \frac{dY(t, w)}{dt} = \left(a^*(t) - b(t) \frac{Y(t, w)}{M(t, w)} \right) M(t, w)$$

$$\text{Mit } X : t \rightarrow Y(t, w), \quad \forall w \in \Omega \Rightarrow \frac{dX(t)}{dt} = a^*(t)M(t, w) - b(t)X(t)$$

Der letzte Ausdruck könnte so behandelt werden, als stellte er eine deterministische Differentialgleichung, mit w als Parameter, nach dem Realisationspfad des stochastischen Prozesses $Y(t, w)$ mit der Zeitentfaltung dar. Diese Differentialgleichung ist linear und lässt sich folgendermaßen lösen:

$$\text{Mit } X(t) = u(t)v(t) \Rightarrow X'(t) = u'(t)v(t) + u(t)v'(t) \Rightarrow \frac{dX(t)}{dt} + b(t)X(t) = a^*(t)M(t, w) \Rightarrow u'(t)v(t) + u(t)v'(t) + b(t)u(t)v(t) = a^*(t)M(t, w), \quad u'(t)v(t) + u(t)[v'(t) + b(t)v(t)] = a^*(t)M(t, w)$$

$$\text{Mit } v'(t) = -b(t)v(t) \Rightarrow \frac{dv(t)}{dt} = -b(t)dt, \ln v(T) = \ln v(t) - \int_t^T b(u)du \Rightarrow v(T) = v(t)e^{-\int_t^T b(u)du}$$

$$u'(t)v(t) = a^*(t)M(t, w) \Rightarrow \frac{du(t)}{dt} v(T)e^{\int_t^T b(u)du} = a^*(t)M(t, w) \Rightarrow du(t) = \frac{a^*(t)M(t, w)e^{-\int_t^T b(u)du}}{v(T)} dt$$

$$u(T) = u(t) + \frac{1}{v(T)} \int_t^T a^*(s)M(s, w)e^{-\int_t^s b(u)du} ds \Rightarrow X(T) = u(T)v(T) = u(t)v(t)e^{-\int_t^T b(u)du} +$$

$$\frac{v(t)}{v(T)} e^{-\int_t^T b(u)du} \int_t^T a^*(s)M(s, w)e^{-\int_t^s b(u)du} ds \Rightarrow \underbrace{Y(T, w)}_{r(T)M(T, w)} = \underbrace{Y(t, w)}_{r(t)M(t, w)} e^{-\int_t^T b(u)du} + \int_t^T a^*(s)M(s, w)e^{-\int_t^s b(u)du} ds$$

Infolgedessen lautet die Lösung für die *Short Rate* gemäß der *SDE* in (2.66):

$$r(T) = \frac{r(t)M(t, w)}{M(T, w)} e^{-\int_t^T b(u)du} + \int_t^T \frac{a^*(s)M(s, w)}{M(T, w)} e^{-\int_s^T b(u)du} ds \quad (2.67)$$

Im nächsten Schritt erfolgt die Herleitung der Bondpreisdynamik mittels Bondpreise gemäß der *No-Arbitrage*-Bewertungsformel unter dem risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß in (2.33). Zu diesem Zweck müssen der Erwartungswert und die Varianz von:

$$\int_t^T r(w)dw = \int_t^T \frac{r(t)M(t) e^{-\int_t^w b(u)du}}{M(w)} dw + \int_t^T \int_t^w \frac{a^*(s)M(s) e^{-\int_s^w b(u)du}}{M(w)} ds dw \quad (2.68)$$

bestimmt werden⁶¹. Der auf $F(t)$ bedingte Erwartungswert⁶² berechnet sich zu:

$$E\left(\int_t^T r(w)dw \mid F(t)\right) = \int_t^T r(t)e^{-\int_t^w b(u)du} dw + \int_t^T \int_t^w a^*(s)e^{-\int_s^w b(u)du} ds dw = r(t)e^{K(t)} \int_t^T e^{-K(w)} dw + \int_t^T a^*(s)e^{K(s)} \int_s^T e^{-K(w)} dw ds = r(t)C(t, T) + \int_t^T a^*(s)C(s, T) ds \quad (2.69)$$

In Anbetracht des enormen Aufwands bei der Berechnung des bedingten Erwartungswertes, verspricht die direkte Vorgehensweise in der Anlage 3 (A3a) keine Aussicht auf Erfolg bei der Bestimmung der fehlenden bewertungsrelevanten Komponente im Bondpreis, der bedingten Varianz. Aus diesem Grund werden im Folgenden zwei alternative Ansätze herausgearbeitet, um diese technische Schwierigkeit zu umgehen und schließlich das primäre Ziel zu erreichen, nämlich die Determinierung der Bondpreisdynamik.

252 Die Dynamik des Bondpreises

Die Bestimmung der bedingten Varianz auf implizitem Weg erfordert zuerst eine behelfsmäßige Definition allgemeiner Art als Funktion der Zeit t und der *Short Rate* $r(t)$ ⁶³:

$$Var\left(\int_t^T r(w)dw \mid F(t)\right) = V(t, r(t)) \quad (2.70)^{64}$$

⁶¹ w bezeichnet in diesem Fall lediglich die Integrationsvariable und steht in keiner Verbindung mit der Zustandsvariable $w \in \Omega$. Die Abhängigkeit des Prozesses M von der Zustandsvariablen wird im Folgenden zugunsten der Notationsübersichtlichkeit implizit unterdrückt.

⁶² Das Ergebnis folgt intuitiv aus der unmittelbaren Anwendung des bedingten Erwartungswertoperators auf (2.68), wenn zusätzlich in Betracht gezogen wird, dass der Prozess $M(t)$ ein exponentielles Martingal darstellt:

$$E(M(w) \mid F(t)) = E\left(e^{-\int_0^w \sigma(s)dW^*(s) - \frac{1}{2}\int_0^w \sigma(s)^2 ds} \mid F(t)\right) = e^{-\frac{1}{2}\int_0^w \sigma(s)^2 ds} e^{-\int_0^t \sigma(s)dW^*(s)} E\left(e^{-\int_t^w \sigma(s)dW^*(s)} \mid F(t)\right) =$$

$$e^{-\frac{1}{2}\int_0^w \sigma(s)^2 ds} e^{-\int_0^t \sigma(s)dW^*(s)} e^{\frac{1}{2}(-1)^2 \int_t^w \sigma(s)^2 ds} = e^{-\frac{1}{2}\int_0^w \sigma(s)^2 ds - \int_0^t \sigma(s)dW^*(s)} = M(t). \text{ Für einen streng mathematischen Beweis sei auf Anlage 3 (A3a) verwiesen.}$$

⁶³ Aus (2.68) wird ersichtlich, dass $\int_t^T r(w)dw$ einen Gaußschen Prozess darstellt. $M(t)/M(w)$ und $M(s)/M(w)$ sind normal verteilt mit auf $F(t)$ bedingtem Erwartungswert gleich eins und bedingter Varianz

$e^{-\int_t^w \sigma(u)^2 du} - 1$ resp. $e^{-\int_s^w \sigma(u)^2 du} - 1$. Darüber hinaus weist der Abzinsungsfaktor die *Markov*-Eigenschaft auf. Der bedingte Erwartungswert in (2.69) deutet auf die Independenz der zukünftigen Entwicklung des Prozesses von der Historie der *Short Rate* hin, da dieser Prognosewert allein von der heutigen Ausprägung $r(t)$ und nicht vom zurückgelegten Pfad abhängt. Infolgedessen wird der Bondpreis mit Rückgriff auf die in Fn. 43 angewendete Technik allein durch den bedingten Erwartungswert und die bedingte Varianz determiniert:

$$B(t, T) = E\left(e^{-\int_t^T r(w)dw} \mid F(t)\right) = e^{-E\left(\int_t^T r(w)dw \mid F(t)\right) + \frac{1}{2}Var\left(\int_t^T r(w)dw \mid F(t)\right)}$$

⁶⁴ Im weiteren Verlauf der Ausführungen wird die funktionelle Beziehung der bedingten Varianz zur *Short Rate* aufgedeckt und die alleinige Abhängigkeit von ihrer aktuellen Ausprägung nachgewiesen. An dieser Stelle sei der Leser gebeten, diese Tatsache zunächst als gegeben hinzunehmen.

Folglich lässt sich der Bondpreis in Abhängigkeit von dem bereits in (2.69) berechneten bedingten Erwartungswert und der Volatilitätsfunktion gemäß (2.70) bestimmen:

$$B(t, T) = E_t \left(e^{-\int_t^T r(w) dw} \right) = e^{-E_t \left(\int_t^T r(w) dw \mid F(t) \right) + \frac{1}{2} V_{ar} \left(\int_t^T r(w) dw \mid F(t) \right)} = e^{-r(t)C(t, T) - \int_t^T a^*(s)C(s, T) ds + \frac{1}{2} V(t, r(t))} \quad (2.71)$$

Mittels totalen Differenzierens nach *Ito* lässt sich die Dynamik des Bondpreises herleiten⁶⁵:

$$\begin{aligned} \frac{dB(t, r(t), T)}{B(t, r(t), T)} &= -r(t)C_t(t, T)dt + a^*(t)C(t, T)dt - C(t, T)dr(t) + \frac{1}{2}C(t, T)^2 dr(t)dr(t) \\ &\quad + \frac{1}{2}V_t(t, r(t))dt + \frac{1}{2}V_r(t, r(t))dr(t) + \frac{1}{4}V_{rr}(t, r(t))dr(t)dr(t) \Rightarrow \\ \frac{dB(t, r(t), T)}{B(t, r(t), T)} &= \left(\begin{aligned} &-r(t)C_t(t, T) + a^*(t)C(t, T) - C(t, T)a^*(t) + \frac{1}{4}V_{rr}\sigma(t)^2 r(t)^2 + \\ &C(t, T)b(t)r(t) + \frac{1}{2}V_t + \frac{1}{2}C(t, T)^2 \sigma(t)^2 r(t)^2 + \frac{1}{2}V_r [a^*(t) - b(t)r(t)] \end{aligned} \right) dt \\ &\quad + \left(-C(t, T)\sigma(t)r(t) + \frac{1}{2}V_r\sigma(t)r(t) \right) dW^*(t) \Rightarrow \\ \frac{dB(t, r(t), T)}{B(t, r(t), T)} &= \left(r(t) + \frac{1}{2}V_t + \frac{1}{2}C(t, T)^2 \sigma(t)^2 r(t)^2 + \frac{1}{2}V_r [a^*(t) - b(t)r(t)] + \frac{1}{4}V_{rr}\sigma(t)^2 r(t)^2 \right) dt \\ &\quad + \left(-C(t, T)\sigma(t)r(t) + \frac{1}{2}V_r\sigma(t)r(t) \right) dW^*(t) \quad (2.72) \end{aligned}$$

Da die Bondbewertung in der risikoneutralen Welt erfolgt, ist die Drift in der Dynamik des Bondpreises zwangsläufig durch den risikolosen Zinssatz determiniert⁶⁶. Demnach genügt die Volatilitätsfunktion $V(t, r(t))$ folgender *PDE* unter entsprechender Nebenbedingung:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}V_t + \frac{1}{2}V_r [a^*(t) - b(t)r(t)] + \frac{1}{4}V_{rr}\sigma(t)^2 r(t)^2 + \frac{1}{2}C(t, T)^2 \sigma(t)^2 r(t)^2 &= 0 \quad (2.73) \\ V(T, r(T)) &= 0 \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist mit Hilfe der *Finite Difference*-Methode⁶⁷ lösbar, jedoch nur unter der Voraussetzung, dass zwei weitere Randbedingungen formulierbar sind. Des Weiteren würde eine eventuelle Lösung nach diesem Ansatz lediglich einen numerischen Wert für die Volatilität ergeben, welcher dem primären Ziel der Bestimmung der Volatilitätsfunktion

⁶⁵ Gemäß (A2c.4) macht man sich die Gültigkeit folgender Beziehung zunutze: $C(t, T)b(t) - C_t(t, T) = 1$. Vgl. Anlage 2 (A2c).

⁶⁶ Es sei erneut auf Anlage 2 (A2c) verwiesen, in deren Rahmen streng mathematisch bewiesen wird, dass die Drift unter dem risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß der *Short Rate* $r(t)$ entspricht.

⁶⁷ Zur *Finite Difference*-Methode vgl. (1) J. Hull, A. White, "Valuing Derivative Securities Using the Explicit Finite Difference Method", Journal of Financial and Quantitative Analysis 25 (1990), S. 87-100. (2) M. J. Brennan, E. S. Schwartz, "The Valuation of American Put Options", Journal of Finance 32 (1977), S. 449-62.

gemäß (2.70) widerspricht. Die sorgfältige Untersuchung der Bondpreisdynamik in (2.72) verdeutlicht die Abhängigkeit der Bondvolatilität von der zu berechnenden Funktion. Infolgedessen erweist sich das totale Differential der Volatilitätsfunktion als ein geeigneter Ausgangspunkt zur Bestimmung deren partieller Ableitung, die ihrerseits schließlich die Bondvolatilität endgültig definieren wird:

$$\begin{aligned}
dVar\left(\int_t^T r(w)dw \mid F(t)\right) &= dE\left(\int_t^T r(w)dw \mid F(t)\right)^2 - d\left(E\left(\int_t^T r(w)dw \mid F(t)\right)\right)^2 = \\
dE\left(\int_t^T r(w)dw \mid F(t)\right)^2 &- 2E\left(\int_t^T r(w)dw \mid F(t)\right)dE\left(\int_t^T r(w)dw \mid F(t)\right) \text{ mit} \\
dE\left(\int_t^T r(w)dw \mid F(t)\right) &= d\left(r(t)C(t,T) + \int_t^T a^*(s)C(s,T)ds\right) = r(t)C_t(t,T)dt \\
&+ C(t,T)dr(t) - a^*(t)C(t,T)dt = r(t)C_t(t,T)dt + C(t,T)a^*(t)dt - b(t)r(t)C(t,T)dt \\
&+ \sigma(t)r(t)C(t,T)dW^*(t) - a^*(t)C(t,T)dt = -r(t)dt + \sigma(t)r(t)C(t,T)dW^*(t) \\
E\left(\int_t^T r(w)dw \mid F(t)\right) &= r(t)C(t,T) + \int_t^T a^*(s)C(s,T)ds
\end{aligned} \tag{2.74}$$

Mittels Einsetzens in die Dynamik des Bondpreises gemäß (2.72) erhält man:

$$\begin{aligned}
\frac{dB(t,r(t),T)}{B(t,r(t),T)} &= r(t)dt + \frac{1}{2}C(t,T)^2\sigma(t)^2r(t)^2dt - \sigma(t)r(t)C(t,T)dW^*(t) \\
&+ \frac{1}{2}dE\left(\int_t^T r(w)dw \mid F(t)\right)^2 + r(t)E\left(\int_t^T r(w)dw \mid F(t)\right)dt \\
&- \sigma(t)r(t)C(t,T)E\left(\int_t^T r(w)dw \mid F(t)\right)dW^*(t) = r(t)dt + r(t)^2C(t,T)dt \\
&+ \frac{1}{2}C(t,T)^2\sigma(t)^2r(t)^2dt + r(t)\int_t^T a^*(s)C(s,T)dsdt + \frac{1}{2}dE\left(\int_t^T r(w)dw \mid F(t)\right)^2 \\
&- \sigma(t)r(t)C(t,T)dW^*(t) - \sigma(t)r(t)C(t,T)E\left(\int_t^T r(w)dw \mid F(t)\right)dW^*(t) = \\
&r(t)dt + r(t)^2C(t,T)dt + \frac{1}{2}C(t,T)^2\sigma(t)^2r(t)^2dt + r(t)\int_t^T a^*(s)C(s,T)dsdt \\
&+ \frac{1}{2}E_t\left(\int_t^T r(w)dw \mid F(t)\right)^2dt + \frac{1}{2}E_r\left(\int_t^T r(w)dw \mid F(t)\right)\left[a^*(t) - b(t)r(t)\right]dt \\
&+ \frac{1}{4}E_{rr}\left(\int_t^T r(w)dw \mid F(t)\right)^2\sigma(t)^2r(t)^2dt + \frac{1}{2}E_r\left(\int_t^T r(w)dw \mid F(t)\right)^2\sigma(t)r(t)dW^*(t) \\
&- \sigma(t)r(t)C(t,T)dW^*(t) - \sigma(t)r(t)C(t,T)E\left(\int_t^T r(w)dw \mid F(t)\right)dW^*(t)
\end{aligned}$$

Mit erneuter Bezugnahme auf die Eigenschaft der Drift unter dem risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß⁶⁸ lässt sich die Dynamik des Bondpreises folgendermaßen formulieren:

$$\begin{aligned}
\frac{dB(T, r(t), T)}{B(t, r(t), T)} &= r(t)dt + \frac{1}{2} E_r \left(\int_t^T r(w)dw \mid F(t) \right)^2 \sigma(t)r(t)dW^*(t) - \sigma(t)r(t)C(t, T)dW^*(t) \\
&- \sigma(t)r(t)C(t, T)E \left(\int_t^T r(w)dw \mid F(t) \right) dW^*(t), \quad \text{mit } \frac{1}{2} E_t \left(\int_t^T r(w)dw \mid F(t) \right)^2 dt \\
&+ \frac{1}{2} E_r \left(\int_t^T r(w)dw \mid F(t) \right)^2 [a^*(t) - b(t)r(t)]dt + \frac{1}{4} E_{rr} \left(\int_t^T r(w)dw \mid F(t) \right)^2 \sigma(t)^2 r(t)^2 dt \\
&= -r(t)^2 C(t, T)dt - \frac{1}{2} C(t, T)^2 \sigma(t)^2 r(t)^2 dt - r(t) \int_t^T a^*(s)C(s, T)dsdt
\end{aligned}$$

Die Verbindung zwischen dieser durch das risikoneutrale Wahrscheinlichkeitsmaß erzwungenen Bedingung und (2.73) kann leicht wie folgt hergestellt werden⁶⁹:

$$\begin{aligned}
V_t dt + V_r [a^*(t) - b(t)r(t)] dt + \frac{1}{2} V_{rr} \sigma(t)^2 r(t)^2 dt &= \\
E_r \left(\int_t^T r(w)dw \mid F(t) \right)^2 [a^*(t) - b(t)r(t)] dt + \frac{1}{2} E_{rr} \left(\int_t^T r(w)dw \mid F(t) \right)^2 \sigma(t)^2 r(t)^2 dt & \\
+ E_t \left(\int_t^T r(w)dw \mid F(t) \right)^2 dt - 2E \left(\int_t^T r(w)dw \mid F(t) \right) \underbrace{\left(r(t)C_t(t, T)dt - a^*(t)C(t, T)dt \right)}_{E_t \left(\int_t^T r(w)dw \mid F(t) \right) dt} & \\
+ \underbrace{a^*(t)C(t, T)dt - b(t)r(t)C(t, T)dt}_{E_r \left(\int_t^T r(w)dw \mid F(t) \right) [a^*(t) - b(t)r(t)] dt} = -2r(t)^2 C(t, T)dt - C(t, T)^2 \sigma(t)^2 r(t)^2 dt & \\
- 2r(t) \int_t^T a^*(s)C(s, T)dsdt - 2 \left(r(t)C(t, T) + \int_t^T a^*(s)C(s, T)ds \right) (-r(t)dt) & \\
= -C(t, T)^2 \sigma(t)^2 r(t)^2 dt &
\end{aligned}$$

Daraus kann letztlich geschlossen werden, dass der Bondpreis folgender *SDE* gehorcht:

$$\begin{aligned}
\frac{dB(t, r(t), T)}{B(t, r(t), T)} &= r(t)dt - \left[-\frac{1}{2} E_r \left(\int_t^T r(w)dw \mid F(t) \right)^2 + C(t, T) \right. \\
&\quad \left. + r(t)C(t, T)^2 + C(t, T) \int_t^T a^*(s)C(s, T)ds \right] \sigma(t)r(t)dW^*(t)
\end{aligned} \tag{2.75}$$

und die Bondvolatilität nicht länger eine einfache deterministische Funktion der Zeit ist:

⁶⁸ Vgl. Fn. 66.

⁶⁹ Man berücksichtige, dass $E_{rr} \left(\int_t^T r(w)dw \mid F(t) \right) = 0$.

$$\left[-\frac{1}{2}E_r\left(\int_t^T r(w)dw \mid F(t)\right)\right]^2 + C(t,T) + r(t)C(t,T)^2 + C(t,T)\int_t^T a^*(s)C(s,T)ds]\sigma(t)r(t) \quad (2.76)$$

Die endgültige Gestalt der Bondvolatilität in geschlossener Form wird letztlich erst nach der Bestimmung der partiellen Ableitung des bedingten Erwartungswertes vom quadrierten Abzinsungsfaktor aufgedeckt⁷⁰:

$$\begin{aligned} & \left[C(t,T) + r(t)C(t,T)^2 + C(t,T)\int_t^T a^*(s)C(s,T)ds - r(t)\left(\int_t^T e^{-\frac{1}{2}\int_t^w \sigma(u)^2 du} e^{-\int_t^w b(u)du} dw\right)^2\right. \\ & \left.- \int_t^T a^*(s)e^{2K(s)}e^{\int_0^s \sigma(u)^2 du} e^{-\int_t^s b(u)du} \left(\int_s^T e^{-\frac{1}{2}\int_0^w \sigma(u)^2 du} e^{-K(w)} dw\right)^2 ds\right]\sigma(t)r(t) \end{aligned} \quad (2.77)$$

Demnach vervollständigt sich die Dynamik des Bondpreises zu einer *SDE* folgender Form:

$$\begin{aligned} \frac{dB(t,T)}{B(t,T)} &= r(t)dt - \left[C(t,T) + C(t,T)\int_t^T a^*(s)C(s,T)ds - r(t)\left(\int_t^T e^{-\frac{1}{2}\int_t^w \sigma(u)^2 du} e^{-\int_t^w b(u)du} dw\right)^2\right. \\ & \left.+ r(t)C(t,T)^2 - \int_t^T a^*(s)e^{2K(s)}e^{\int_0^s \sigma(u)^2 du} e^{-\int_t^s b(u)du} \left(\int_s^T e^{-\frac{1}{2}\int_0^w \sigma(u)^2 du} e^{-K(w)} dw\right)^2 ds\right]\sigma(t)r(t)dW^*(t) \end{aligned} \quad (2.78)$$

Der direkte Vergleich mit der Dynamik des Bondpreises gemäß (2.72) unter der Nebenbedingung in der Gestalt einer *PDE* in (2.73) gestattet den sofortigen Rückschluss auf die partielle Ableitung der bedingten Varianz des Abzinsungsfaktors:

$$\begin{aligned} V_r(t,r(t)) &= 2\int_t^T a^*(s)e^{2K(s)}e^{\int_0^s \sigma(u)^2 du} e^{-\int_t^s b(u)du} \left(\int_s^T e^{-\frac{1}{2}\int_0^w \sigma(u)^2 du} e^{-K(w)} dw\right)^2 ds \\ & + 2r(t)\left(\int_t^T e^{-\frac{1}{2}\int_t^w \sigma(u)^2 du} e^{-\int_t^w b(u)du} dw\right)^2 - 2r(t)C(t,T)^2 - 2C(t,T)\int_t^T a^*(s)C(s,T)ds \end{aligned} \quad (2.79)$$

Der Form der partiellen Ableitung nach der *Short Rate* ist die Abhängigkeit der bedingten Varianz, die einen unmittelbaren Eingang in die Bewertungsformel für den Bondpreis findet, allein von dem Zinssatz in t zu entnehmen⁷¹. Da sich der bedingte Erwartungswert

⁷⁰ Zur Berechnung vgl. Anlage 3 (A3b).

⁷¹ Vgl. nochmals Fn. 64, in der der Leser gebeten wurde, die angenommene allgemeine Form der bewertungsrelevanten bedingten Varianz zunächst ohne Beweis als gegeben zu akzeptieren. Gleichung (2.79) untermauert streng mathematisch diese Annahme.

selbst nur durch seine Dependenz von dem aktuellen Niveau der *Short Rate* auszeichnet⁷², jedoch nicht von dem in der Vergangenheit verfolgten Pfad, ist der Bondpreis gemäß der *No-Arbitrage* Definitionsgleichung (2.71) einzig durch seine Abhängigkeit von $r(t)$ stochastisch. In diesem besonderen Merkmal des Bondpreises spiegelt sich die *Markov*-Eigenschaft der *Short Rate* wider.

253 Die Option auf den Bond mit stochastischer instantaner Volatilität

Das Bewertungsproblem in der Welt stochastischer Volatilitäten im Rahmen eines Modellkonstrukts, das der Realität nicht entfremdet ist⁷³, ist für viele namhafte Wissenschaftler Objekt intensiver Forschung gewesen. Frühere Ansätze streben nach der Erklärung spezifischer Typen von stochastischen Volatilitäten bzw. nach Erkenntnissen über allgemeine stochastische Volatilitätsstrukturen, jedoch unter vereinfachenden Annahmen⁷⁴. Hull und

$${}^{72} E_t(r(T)) = E_t \left(\frac{r(t)M(t, w)}{M(T, w)} e^{-\int_t^T b(u) du} + \int_t^T \frac{a^*(s)M(s, w)}{M(T, w)} e^{-\int_s^T b(u) du} ds \right) = r(t)e^{-\int_t^T b(u) du} + \int_t^T a^*(s)e^{-\int_s^T b(u) du} ds. \quad \text{Vgl.}$$

auch (2.69).

⁷³ Rubinstein deckt systematische, statistisch signifikante Verzerrungseffekte bei der Optionspreisbestimmung nach Black-Scholes bezüglich der Restlaufzeit und des Strikepreises auf der Basis nichtparametrischer, verteilungsunabhängiger Tests auf. Als Grundlage für die Bestätigung oder Verwerfung der von ihm aufgestellten Null-Hypothese dienen Marktdatenberichte der *CBOE* vom 23.08.1976 bis einschließlich 31.08.1978. Vgl. M. Rubinstein, "Nonparametric Tests of Alternative Option Pricing Models Using All Reported Trades and Quotes on the 30 Most Active CBOE Option Classes from August 23, 1976 through August 31, 1978", *Journal of Finance* 40 (1985), S. 455-480. In der Absicht, die beobachteten Abweichungen in den Black-Scholes Optionswerten von tatsächlichen Marktpreisen theoretisch zu begründen und modellspezifisch einzuordnen, wird eine komparative Analyse zwischen fünf alternativen Optionspreismodellen durchgeführt: Die vergleichende Gegenüberstellung beinhaltet einerseits Geske's *Compound Option Diffusion* Model und Merton's *Mixed Diffusion-Jump* Model, vgl. Fn. 74 und andererseits Cox-Ross' *Pure Jump* Model von 1975, vgl. J. C. Cox, S. A. Ross, "The Pricing of Options for Jump Processes", Working Paper University of Pennsylvania (1975), deren *CEV Diffusion* Model von 1976, vgl. Fn. 60 und Rubinstein's *Displaced Diffusion Model*, vgl. M. Rubinstein, "Displaced Diffusion Option Pricing", *Journal of Finance* 38 (1983), S. 213-217.

⁷⁴ Geske untersucht eine sich in einer systematischen Weise ändernde Volatilität des Aktienkurses, die aus der Annahme einer konstanten Unternehmenswertvolatilität resultiert. Vgl. R. Geske, "The Valuation of Compound Options", *Journal of Financial Economics* 7 (1979), S. 63-81. Merton betrachtet den Fall eines gemischten *Jump-Diffusion*-Prozesses für den Aktienkurs. Vgl. R. Merton, "Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous", *Journal of Financial Economics* 3 (1976), S. 125-144. Johnson studiert zwar den allgemeinen Fall, wenn die instantane Volatilitätsfunktion des Aktienkurses einem separaten stochastischen Prozess folgt, unterstellt jedoch die Existenz eines *Asset*, dessen Preis mit der stochastischen Volatilität perfekt korreliert ist, um die *PDE* für den Optionspreis herleiten zu können. Vgl. H. Johnson, "Option Pricing when the Variance is Changing", Working Paper University of California LA (1979), S. 11-79. Simulationsverfahren zur Lösung dieser *PDE* lieferten erst später numerische Ergebnisse. Vgl. H. Johnson, D. Shanno, "Option Pricing when the Variance is Changing", Working Paper University of California Davis (1985), S. 85-107. Numerische Lösungsverfahren lagen auch den Forschungsarbeiten von Wiggins und Scott zugrunde. Vgl. L. Scott, "Option Pricing when the Variance Changes Randomly: Theory and an Application", *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 22 (1987), S. 419-438 und J. Wiggins, "Option Values under Stochastic Volatilities", *Journal of Financial Economics* 19 (1987), S. 351-372. Merton's Modell zur Aktienoptionspreisbestimmung mit stochastischen Zinsen wird später an die Bewertung von Bondoptionen angepasst. Die *Brownsche* Bewegung als treibender stochastischer Faktor des Aktienkurses wird durch eine *Brownsche* Brücke ersetzt, um den primären Unterschied zwischen Aktien und Bonds nachzubilden, nämlich die Kenntnis über den nominalen Rückzahlungsbetrag bei Fälligkeit des Bonds im Gegensatz zur Aktie, die keinen solchen Zielwert aufweist. Vgl. C. A. Ball, W. N. Torous, "Bond Price Dynamics and Options", *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 18 (1983), S. 517-531.

White generalisieren die methodische Vorgehensweise indem sie die stochastische Volatilität mittels eines separaten Prozesses modellieren, dessen treibender Faktor mit dem *Wiener* Prozess des *Underlying* unkorreliert ist, ohne explizit eine analytische Lösung in geschlossener Form zur Optionspreisbestimmung herzuleiten⁷⁵. Zu dieser Zeit zeichnet sich die Forschungsrichtung deutlich durch die restriktive Annahme der Unkorreliertheit der Volatilität mit dem Spotpreis des *Underlying* aus⁷⁶.

Aus der Unzulänglichkeit dieser zugegebenermaßen bequemen Prämisse heraus entwickelt Heston⁷⁷ eine neue Technik zur Herleitung von analytischen Bewertungsformeln in geschlossener Form für europäische Optionen. Die Anregung zur neuen Modellierungsmethode findet sich in der Unfähigkeit des altbewährten Ansatzes, den Effekt der *Volatility Skewness* einzufangen, der durch die Korrelation zwischen der Volatilität⁷⁸ und der Spotrendite des *Underlying* zustande kommt. Eine positive Korrelation resultiert in einer höheren Varianz wenn der Spotpreis steigt, bzw. in einer niedrigeren Varianz, wenn der Spotpreis sinkt, führt zu *fatter right tails* und *thinner left tails* in der bedingten Dichtefunktion. Damit erhöht sich signifikant der Preis der *deep-out-of-the-money* Call-Option relativ zu ihrem Black-Scholes Wert, da die Wahrscheinlichkeit, dass der Kurs des *Underlying* am Verfalltag über dem Strike liegt, im Fall eines *fat right tail* höher ist als im Fall der Standard-Log-Normalverteilung⁷⁹. Eine negative Korrelation wirkt sich folgerichtig gegensätzlich auf den Optionspreis aus. Steigende Spotpreise ziehen eine niedrigere Varianz nach

⁷⁵ Sie produzieren eine Lösung in der Form einer Taylorreihenentwicklung um den Erwartungswert des Optionspreises als Funktion der durchschnittlichen stochastischen Volatilität über die Optionslaufzeit. Zentrales Ergebnis ist, dass der Optionspreis kleiner für Optionen *at-the-money* und größer für Optionen tief *out-of-the-money* bzw. *in-the-money* als der entsprechende Black-Scholes Wert ausfällt. Vgl. J. Hull, A. White, "The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities", *Journal of Finance* 42 (1987), S. 281-300.

⁷⁶ In der Regel besteht die Lösung zum Problem der stochastischen Volatilität bei Optionspreisfindung in der Durchschnittsbildung über mehrere Black-Scholes Formelwerte entlang verschiedener Volatilitäts-pfade. Vgl. (1) L. Eisenberg, R. Jarrow, "Option Pricing with Random Volatilities in Complete Markets", Federal Reserve Bank of Atlanta Working Paper (1991), S. 91-116. (2) E. M. Stein, J. C. Stein, "Stock Price Distributions with Stochastic Volatility: An Analytic Approach", *Review of Financial Studies* 4 (1991), S. 727-752. Zur gleichen Zeit berichten Melino und Turnbull über die Eignung dieser Methode zur Erklärung von Währungsoptionspreisen. Vgl. (1) A. Melino, S. Turnbull, "The Pricing of Foreign Currency Options with Stochastic Volatility", *Journal of Econometrics* 45 (1990), S. 239-265. (2) A. Melino, S. Turnbull, "The Pricing of Foreign Currency Options", *Canadian Journal of Economics* 24 (1991), S. 251-281.

⁷⁷ Vgl. S. Heston, "A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options", *Review of Financial Studies* 6 2 (1993), S.327-343.

⁷⁸ Aus Normierungsgründen fokussiert Heston seine Aufmerksamkeit auf die Volatilität der Spotrendite des *Underlying*. Auf diese Weise stellt er den Effekt der stochastischen Volatilität auf den Preis einer Option relativ zu einer anderen in den Vordergrund. Die Argumentation auf der Basis von Spotpreisen erfolgt in ähnlicher Weise und ist sogar intuitiv nahe liegender.

⁷⁹ Intuitiv wird die *deep-out-of-the-money* Put-Option in der vorliegenden Situation gegenüber der vergleichbaren Put-Option in der Black-Scholes Welt benachteiligt, da bedingt durch die *thinner left tails* die Wahrscheinlichkeit, dass der Kurs des *Underlying* bei Fälligkeit doch unter dem Strike liegt, kleiner ist, als das bei der Standard-Log-Normalverteilung der Fall ist.

sich bzw. sinkende Spotpreise verursachen eine höhere Varianz, als das bei einer Korrelation von null der Fall wäre. Als Folge daraus bilden sich *thinner right tails* und *fatter left tails* mit der Konsequenz, dass sich höhere Preise für *deep-out-of-the-money* Put-Optionen bzw. niedrigere Preise für *deep-out-of-the-money* Call-Optionen relativ zur Black-Scholes Welt einstellen, da die Wahrscheinlichkeit, dass der Put zum Ende seiner Laufzeit *in-the-money* ist bzw. der Call bei Fälligkeit *out-of-the-money* bleibt, verhältnismäßig höher liegt. Neben der Erfassung der *Volatility Skewness* mittels expliziter Berücksichtigung der Korrelation zwischen der stochastischen Volatilität und der Spotrendite des *Underlying*, liefert Heston's Modell Preisformeln in geschlossener Form für europäische Optionen, deren Herleitung auf der Berechnung bedingter Wahrscheinlichkeiten für die Ausübung der Option mit Hilfe der Umkehrung deren charakteristischer Funktionen beruht. Unter der entsprechenden terminalen Bedingung ergeben sich die charakteristischen Funktionen selbst aus der Lösung zweier *PDEs*, die sich durch die Substitution der vorgeschlagenen Lösung des Optionspreisproblems in die zweidimensionale fundamentale *No-Arbitrage-PDE* aufstellen lassen. Darüber hinaus lässt Heston's Methode die Integrierung stochastischer Zinssätze zu und generalisiert somit das Modell als allgemein anwendbar auf Bond- und Fremdwährungsoptionen. Gleichwohl wird in der Literatur auch kritisch hervorgehoben, dass das Modell nur eine nichtsignifikante Verbesserung im Vergleich zu Black-Scholes Optionspreisen mit sich bringt⁸⁰. Die geringfügige Berichtigung der Black-Scholes Optionspreise werde schließlich durch eine höhere Anzahl an zu schätzenden Parametern teuer erkauf⁸¹.

Mit dem gemäß (2.66) entwickelten Zinsmodell und der daraus hergeleiteten Bondpreisdynamik gemäß (2.78) geht eine von der *Short Rate* abhängige Bondvolatilität einher:

$$\left[C(t,T) - \frac{1}{2} V_r(t, r(t)) \right] \sigma(t) r(t)$$

$$V_r(t, r(t)) = 2 \int_t^T a^*(s) e^{2K(s)} e^{\int_0^s \sigma(u)^2 du} e^{-\int_t^s b(u) du} \left(\int_s^T e^{-\frac{1}{2} \int_0^w \sigma(u)^2 du} e^{-K(w)} dw \right)^2 ds \quad (2.80)$$

$$+ 2r(t) \left(\int_t^T e^{-\frac{1}{2} \int_t^w \sigma(u)^2 du} e^{-\int_t^w b(u) du} dw \right)^2 - 2r(t) C(t,T)^2 - 2C(t,T) \int_t^T a^*(s) C(s,T) ds$$

⁸⁰ Vgl. C. von Campenhausen, "Optionsbewertung bei stochastischer Volatilität: Theorie und Empirie", Dissertation St. Gallen (1996), S. 43ff.

⁸¹ Vgl. P. Andres, "Von der Black/Scholes-Optionspreisformel zum GARCH-Optionsbewertungsmodell: Entwicklung und exemplarische Durchführung eines Ansatzes zur Überprüfung der Validität von Optionspreismodellen", Dissertation Göttingen (1997), S. 173ff.

Infolgedessen wird der zukünftige Bondpreis, bedingt auf den heutigen Wert, ungeachtet der *Markov*-Eigenschaft der *Short Rate* nicht mehr einer Log-Normalverteilung genügen, sondern von dem vollständigen Pfad abhängig sein, den die *Short Rate* zwischen den Betrachtungszeitpunkten zurückgelegt hat:

$$\ln\left(\frac{B(T_1, T_2)}{B(t, T_2)}\right) \square N(A, B) \text{ mit } B = \int_t^{T_1} \sigma(u)^2 r(u)^2 \left[C(u, T_2) - \frac{1}{2} V_r(r(u), T_2) \right]^2 du$$

$$A = \int_t^{T_1} r(u) + \sigma(u)^2 r(u)^2 \left[C(u, T_2) - \frac{1}{2} V_r(r(u), T_2) \right] \left[C(u, T_1) - \frac{1}{2} V_r(r(u), T_1) \right] du$$

$$- \frac{1}{2} \int_t^{T_1} \sigma(u)^2 r(u)^2 \left[C(u, T_2) - \frac{1}{2} V_r(r(u), T_2) \right]^2 du \Rightarrow$$

$$\ln\left(\frac{B(T_1, T_2)}{B(t, T_2)}\right) \square N\left(-\ln B(t, T_1) - \frac{1}{2} \sigma_p^2(T_1), \sigma_p^2(T_1)\right)$$

$$\text{mit } \sigma_p^2(T_1) = \int_t^{T_1} \sigma(u)^2 r(u)^2 \left[\left(C(u, T_2) - \frac{1}{2} V_r(r(u), T_2) \right) - \left(C(u, T_1) - \frac{1}{2} V_r(r(u), T_1) \right) \right]^2 du$$

$$V_r(r(t), T_i) = 2 \int_t^{T_i} a^*(s) e^{2K(s)} e^{\int_0^s \sigma(u)^2 du} e^{-\int_t^s b(u) du} \left(\int_s^{T_i} e^{-\frac{1}{2} \int_0^w \sigma(u)^2 du} e^{-K(w)} dw \right)^2 ds$$

$$+ 2r(t) \left(\int_t^{T_i} e^{-\frac{1}{2} \int_t^w \sigma(u)^2 du} e^{-\int_t^w b(u) du} dw \right)^2 - 2r(t) C(t, T_i)^2 - 2C(t, T_i) \int_t^{T_i} a^*(s) C(s, T_i) ds, \quad i = 1, 2$$

Diese Besonderheit unterstreicht aus praktischer und konzeptioneller Sicht den essentiellen Unterschied zwischen dem zentralen Untersuchungsobjekt dieses Abschnittes gemäß (2.66) und allen anderen in Grundzügen umrissenen Methoden, um das Problem der stochastischen Volatilität zu bewältigen. Die natürliche Filtration, die von dem *Short Rate*-Prozess selbst erzeugt wird, ist vollkommen ausreichend, um den Wert der stochastischen Volatilität gemäß (2.80) zu bestimmen, im Gegensatz zu allen anderen Modellen, bei denen die Realisation eines von der Diffusion der *Short Rate* unterschiedlichen stochastischen Prozesses notwendig ist, um die zukünftige Volatilität zu determinieren.

Betrachtet sei eine europäische Call-Option mit Ausübungszeitpunkt T_1 und Strike K auf einen Bond mit Fälligkeit in T_2 ⁸². Die Bewertung erfolgt unter dem *Forward*-Wahrscheinlichkeitsmaß und einem Bond mit Fälligkeit in T_1 als *Numeraire* auf der Grundlage von Überlegungen, deren Zweckmäßigkeit bereits früher diskutiert wurde⁸³. Da Gleichungen

⁸² Zum Zweck der besseren Vergleichbarkeit wurden die Ausstattungsmerkmale der zu bewertenden Option bewußt in Übereinstimmung mit denen des Call aus Abschnitt 242 gewählt.

⁸³ Vgl. Abschnitte 2421 und insb. 2422.

(2.66) und (2.78) die Dynamik der *Short Rate* bzw. des Bondpreises unter dem risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß zum Ausdruck bringen, muss zuerst die Anpassung an das bewertungsrelevante Wahrscheinlichkeitsmaß mit Hilfe des Wechsels zwischen äquivalenten Martingalmaßen gemäß dem *Girsanov*-Theorem vollzogen werden. Der $\{\mathcal{F}_t, 0 \leq t < \infty\}$ -adaptierte Driftadjustierungsprozess X_t ⁸⁴ ist durch die Volatilität des *Numeraire* definiert:

$$\begin{aligned}
X_t &= - \left[C(t, T_1) - \frac{1}{2} V_r(r(t), T_1) \right] \sigma(t) r(t) \\
V_r(r(t), T_1) &= 2 \int_t^{T_1} a^*(s) e^{2K(s)} e^{\int_0^s \sigma(u)^2 du} e^{-\int_t^s b(u) du} \left(\int_s^{T_1} e^{-\frac{1}{2} \int_0^w \sigma(u)^2 du} e^{-K(w)} dw \right)^2 ds \\
&\quad + 2r(t) \left(\int_t^{T_1} e^{-\frac{1}{2} \int_t^w \sigma(u)^2 du} e^{-\int_t^w b(u) du} dw \right)^2 - 2r(t) C(t, T_1)^2 - 2C(t, T_1) \int_t^{T_1} a^*(s) C(s, T_1) ds
\end{aligned} \tag{2.81}$$

Demnach lassen sich die *SDEs* für die *Short Rate* bzw. für die beiden bewertungsrelevanten Bonds nach dem Übergang vom risikoneutralen auf das *Forward*-Wahrscheinlichkeitsmaß folgendermaßen aufstellen:

$$\begin{aligned}
dW^*(t) &= dW^{T_1}(t) - \underbrace{\frac{(a^*(t) - b(t)r(t)) - \text{drift}_{r(t)}^{new}}{\sigma(t)r(t)}}_{X_t} dt \Rightarrow \\
dW^*(t) &= dW^{T_1}(t) + \left[C(t, T_1) - \frac{1}{2} V_r(r(t), T_1) \right] \sigma(t) r(t) dt \Rightarrow \\
dr(t) &= \left(a^*(t) - b(t)r(t) + \sigma(t)^2 r(t)^2 \left[C(t, T_1) - \frac{1}{2} V_r(r(t), T_1) \right] \right) dt + \sigma(t) r(t) dW^{T_1}(t)
\end{aligned} \tag{2.82}$$

resp. für das *Underlying*, den Bond mit Fälligkeit in T_2 :

$$\begin{aligned}
dW^*(t) &= dW^{T_1}(t) - \left(\frac{\text{drift}_{B(t, T_2)}^{new} - r(t)}{\left[C(t, T_2) - \frac{1}{2} V_r(r(t), T_2) \right] \sigma(t) r(t)} \right) dt \Rightarrow \\
\frac{dB(t, T_2)}{B(t, T_2)} &= \left(r(t) + \sigma(t)^2 r(t)^2 \left[C(t, T_1) - \frac{1}{2} V_r(r(t), T_1) \right] \left[C(t, T_2) - \frac{1}{2} V_r(r(t), T_2) \right] \right) dt \\
&\quad - \left[C(t, T_2) - \frac{1}{2} V_r(r(t), T_2) \right] \sigma(t) r(t) dW^{T_1}(t)
\end{aligned} \tag{2.83}$$

⁸⁴ Der stochastische Prozess X_t ist zu der Filtration $\{\mathcal{F}_t, 0 \leq t < \infty\}$ adaptiert, wenn für jedes $t \geq 0$ X_t eine \mathcal{F}_t -messbare Zufallsvariable ist. Vgl. auch Fn. 233.

und analog für das *Numeraire*, den Bond mit Fälligkeit in T_1 :

$$\begin{aligned}
 W^*(t) &= dW^{T_1}(t) - \underbrace{\left(\frac{\text{drift}_{B(t,T_1)}^{new} - r(t)}{\left[C(t, T_1) - \frac{1}{2} V_r(r(t), T_1) \right] \sigma(t) r(t)} \right)}_{\left[C(t, T_1) - \frac{1}{2} V_r(r(t), T_1) \right] \sigma(t) r(t)} dt \Rightarrow \\
 dB(t, T_1) &= \left(r(t) + \sigma(t)^2 r(t)^2 \left[C(t, T_1) - \frac{1}{2} V_r(r(t), T_1) \right]^2 \right) B(t, T_1) dt \\
 &\quad - \left[C(t, T_1) - \frac{1}{2} V_r(r(t), T_1) \right] \sigma(t) r(t) B(t, T_1) dW^{T_1}(t)
 \end{aligned} \tag{2.84}$$

Eine analytische Lösung für den Preis der Option im Zeitpunkt t kann unter Anwendung der Martingaleigenschaft jedes durch das *Numeraire* relativierten Preisprozesses hergeleitet werden. Unter Bezugnahme auf die bereits entwickelte Optionsbewertungstechnik⁸⁵ berechnet sich die Portfoliovarianz⁸⁶, deren Quadratwurzel als der Parameter „implizite“ Volatilität in die Optionspreisformel einfließt, wie folgt:

$$\begin{aligned}
 \sigma_p^2(T_1) &= \int_t^{T_1} \sigma(u)^2 r(u)^2 \left[\left(C(u, T_2) - \frac{1}{2} V_r(r(u), T_2) \right) - \left(C(u, T_1) - \frac{1}{2} V_r(r(u), T_1) \right) \right]^2 du \\
 V_r(r(t), T_i) &= 2 \int_t^{T_i} a^*(s) e^{2K(s)} e^{\int_0^s \sigma(u)^2 du} e^{-\int_t^s b(u) du} \left(\int_s^{T_i} e^{-\frac{1}{2} \int_0^w \sigma(u)^2 du} e^{-K(w)} dw \right)^2 ds \\
 &\quad + 2r(t) \left(\int_t^{T_i} e^{-\frac{1}{2} \int_t^w \sigma(u)^2 du} e^{-\int_t^w b(u) du} dw \right)^2 - 2r(t) C(t, T_i)^2 - 2C(t, T_i) \int_t^{T_i} a^*(s) C(s, T_i) ds, \quad i = 1, 2
 \end{aligned} \tag{2.85}$$

Im Gegensatz zu der Portfoliovarianz in einer deterministischen Umgebung als wertbestimmender Größe des Optionspreises gemäß (2.56) wird die Pfadabhängigkeit der mit dem letzten Ausdruck definierten Optionsvolatilität deutlich. Die implizite Dependenz von der *Short Rate* verwandelt $\sigma_p^2(T_1)$ bei Fälligkeit der Option in eine stochastische Variable, die eine bestimmte Verteilung besitzt. Jede erneute Simulation des *Short Rate*-Pfad von t bis T_1 wird einen anderen Wert für die Portfoliovarianz in T_1 und demzufolge über die Bewertungsformel gemäß (2.56) einen anderen Optionspreis ergeben. Den Gedankengang fortführend kann intuitiv geschlossen werden, dass der Optionspreis selbst in Abhängigkeit von dem zurückgelegten Pfad stochastisch ausfallen muss und somit eine Verteilung aufweist. Dieser diskursiven Überlegung entspringt die Vermutung, dass der Optionswert in t

⁸⁵ Vgl. Abschnitt 2422 und insb. Anlage 2 (A2a).

⁸⁶ Zur Angemessenheit dieser Bezeichnung im deterministischen Fall vgl. Abschnitt 243.

einen Erwartungswert über den Call als Funktion der Portfoliovarianz darstellt, also den auf eine spezifische Pfadausprägung von $\sigma_p^2(T_1)$ bedingten Optionspreis in t gemäß (2.56). Bevor diese Mutmaßung theoretisch untermauert und mathematisch bewiesen werden kann, wird als zweckdienlich erachtet, eine erläuternde Bemerkung zur bedingten Verteilung des Bondpreises zu machen, um die zentrale Bewertungs idee bei stochastischer Volatilität zu verdeutlichen. Im Rahmen des Zinsstrukturmodells mit deterministischer Volatilität gemäß (2.44) und der daraus resultierenden Bondpreisdynamik⁸⁷ gemäß (2.50) ist der T_1 -Preis des Bonds mit Fälligkeit in T_2 bedingt auf dessen Preis im Zeitpunkt t log-normal verteilt⁸⁸:

$$\ln\left(\frac{B(T_1, T_2)}{B(t, T_2)}\right) \square N\left(\int_t^{T_1}\left(r(u) + \sigma(u)^2 C(u, T_1)C(u, T_2) - \frac{1}{2}\sigma(u)^2 C(u, T_2)^2\right) du, \int_t^{T_1}\sigma(u)^2 C(u, T_2)^2 du\right)$$

$$\ln\left(\frac{B(T_1, T_2)}{B(t, T_2)}\right) \square N\left(-\ln B(t, T_1) - \frac{1}{2}\sigma_p^2(T_1), \sigma_p^2(T_1)\right) \quad (2.86)$$

mit $\sigma_p^2(T_1) = \int_t^{T_1}\sigma(u)^2 [C(u, T_2) - C(u, T_1)]^2 du$

Die Parameter der Log-Normalverteilung hängen lediglich vom Logarithmus des Abzinsungsfaktors⁸⁹ unter dem *Forward*-Wahrscheinlichkeitsmaß, dem heutigen Preis des *Underlying* und der deterministischen Portfoliovarianz ab. Unter der Abwandlung des Grundmodells zwecks Berücksichtigung stochastischer Volatilitäten gemäß (2.66)⁹⁰ ändert sich die Portfoliovarianz zu (2.85) und ist folglich pfadabhängig. Eine unendliche Anzahl von Pfaden, die die *Short Rate* zwischen den Zeitpunkten t und T_1 zurücklegt, führen aller-

⁸⁷ Zur Herleitung der Bondpreisdynamik vgl. insb. Anlage 2 (A2c).

⁸⁸ Vgl. insb. die Herleitung in Anlage 2 (A2a).

⁸⁹ Der Abzinsungsfaktor $B(t, T_1) = e^{-r(t)C(t, T_1) - A(t, T_1)}$ ist eine F_t -messbare Zufallsvariable.

⁹⁰ Natürlich ändert sich auch die Bondpreisformel im Rahmen des neuen Zinsstrukturmodells:

$$B(t, T_1) = e^{-r(t)C(t, T_1) - \int_t^{T_1} a^*(s)C(s, T_1) ds + \frac{1}{2} \text{Var}\left(\int_t^{T_1} r(w) dw \mid F_t\right)}, \quad \text{Var}\left(\int_t^{T_1} r(w) dw \mid F_t\right) = r(t)^2 \left(\int_t^{T_1} e^{-\frac{1}{2} \int_t^w \sigma(u)^2 du} e^{-\int_t^w b(u) du} dw \right)^2$$

$$+ 2r(t) \left(\int_t^{T_1} a^*(s) e^{2K(s)} e^{\int_0^s \sigma(u)^2 du} e^{-\int_t^s b(u) du} \left(\int_s^{T_1} e^{-\frac{1}{2} \int_0^w \sigma(u)^2 du} e^{-K(w)} dw \right)^2 ds \right) + \left(\int_t^{T_1} \int_t^w a^*(s) e^{-\frac{1}{2} \int_s^w \sigma(u)^2 du - \int_s^w b(u) du} ds dw \right)^2$$

$$- r(t)^2 C(t, T_1)^2 - 2r(t)C(t, T_1) \int_t^{T_1} a^*(s)C(s, T_1) ds - \left(\int_t^{T_1} a^*(s)C(s, T_1) ds \right)^2$$

Der Bondpreis ist zwar durch einen wesentlich komplizierten Ausdruck definiert, bleibt aber basierend auf der *Markov*-Eigenschaft der *Short Rate* eine F_t -messbare Zufallsvariable, weil er allein durch seine Dependenz von der heutigen Ausprägung $r(t)$ stochastisch ist. Lediglich die Pfadabhängigkeit der Portfoliovarianz $\sigma_p^2(T_1)$ zerstört die log-normale Eigenschaft von $\left(\frac{B(T_1, T_2)}{B(t, T_2)}\right)$.

dings zur gleichen Portfoliovarianz $\sigma_p^2(T_1)$ und resultieren infolgedessen in der gleichen terminalen Bondpreisverteilung mit der Konsequenz, dass ungeachtet des stochastischen Charakters der Optionsvolatilität die Log-Normalverteilung der Bondpreise bedingt auf eine spezifische Ausprägung von $\sigma_p^2(T_1)$ aufrecht erhalten bleibt⁹¹.

Der unter dem *Forward*-Wahrscheinlichkeitsmaß laufzeitadäquat angepasste erwartete Call-Payoff bei Fälligkeit in T_1 ergibt den gesuchten Optionswert⁹² im Zeitpunkt t ⁹³:

$$\begin{aligned}
f(t, B(t, T_2)) &= B(t, T_1) \int_{-\infty}^{\infty} f(T_1, B(T_1, T_2)) p(B(T_1, T_2) | B(t, T_2)) dB(T_1, T_2) \Rightarrow \\
& B(t, T_1) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(T_1, B(T_1, T_2)) g(B(T_1, T_2) | \sigma_p^2(T_1)) h(\sigma_p^2(T_1) | r(t)) dB(T_1, T_2) d\sigma_p^2(T_1) \\
& \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} B(t, T_1) \int_{-\infty}^{\infty} f(T_1, B(T_1, T_2)) g(B(T_1, T_2) | \sigma_p^2(T_1)) dB(T_1, T_2) h(\sigma_p^2(T_1) | r(t)) d\sigma_p^2(T_1)}_{Cl(B(t, T_2), \sigma_p^2(T_1)) = Call(\sigma_p^2(T_1))} \quad (2.87) \\
\Rightarrow f(t, B(t, T_2)) &= \int_{-\infty}^{\infty} Call(\sigma_p^2(T_1)) h(\sigma_p^2(T_1) | r(t)) d\sigma_p^2(T_1) \\
&= E_t(Cl(B(t, T_2), \sigma_p^2(T_1))) = E_t(Call(\sigma_p^2(T_1)))
\end{aligned}$$

Die Portfoliovarianz wird in die bereits hergeleitete Optionspreisformel (2.56) eingesetzt:

$$\begin{aligned}
Call(\sigma_p^2(T_1)) &= B(t, T_2) N(h + \sigma_p(T_1)) - B(t, T_1) KN(h) \\
h &= \frac{1}{\sigma_p(T_1)} \ln \frac{B(t, T_2)}{B(t, T_1) K} - \frac{\sigma_p(T_1)}{2} \\
\sigma_p^2(T_1) &= \int_t^{T_1} \sigma(u)^2 r(u)^2 \left[\left(C(u, T_2) - \frac{1}{2} V_r(r(u), T_2) \right) - \left(C(u, T_1) - \frac{1}{2} V_r(r(u), T_1) \right) \right]^2 du \\
V_r(r(t), T_i) &= 2 \int_t^{T_i} a^*(s) e^{2K(s)} e^{\int_0^s \sigma(u)^2 du} e^{-\int_t^s b(u) du} \left(\int_s^{T_i} e^{-\frac{1}{2} \int_0^w \sigma(u)^2 du} e^{-K(w)} dw \right)^2 ds \\
&+ 2r(t) \left(\int_t^{T_i} e^{-\frac{1}{2} \int_t^w \sigma(u)^2 du} e^{-\int_t^w b(u) du} dw \right)^2 - 2r(t) C(t, T_i)^2 - 2C(t, T_i) \int_t^{T_i} a^*(s) C(s, T_i) ds, \quad i = 1, 2
\end{aligned}$$

⁹¹ $\left(\frac{B(T_1, T_2)}{B(t, T_2)} | \sigma_p^2(T_1) \right)$ folgt einer Log-Normalverteilung im Gegensatz zu $\left(\frac{B(T_1, T_2)}{B(t, T_2)} \right)$, das nicht länger log-normal verteilt ist.

⁹² f ist die allgemeine Preisfunktion des Wertpapiers, die in Abhängigkeit von t und $B(t, T_2)$ den heutigen Wert des betrachteten Derivats ausdrückt.

⁹³ Die implizite Abhängigkeit der *Transition Densities* g und h vom heutigen Bondpreis $B(t, T_1)$ wird zur Notationsentlastung unterdrückt.

Der Optionspreis⁹⁴ lässt sich als der Erwartungswert des Call über alle möglichen *Short Rate*-Pfadausprägungen determinieren, die in einem spezifischen Wert für die Portfoliovarianz $\sigma_p^2(T_1)$ resultieren. Außerdem weist der so berechnete Optionspreis die unerwünschte Eigenschaft der Abhängigkeit vom Marktpreis des Zinsrisikos auf, da in der Optionsvolatilität der risikoadjustierte Langzeit-Mittelwert $a^*(t) = a(t) - \sigma(t)\lambda(t)$ enthalten ist. Diese Schwierigkeit ist zu umgehen, indem die *Short Rate* direkt in einer risikoneutralen Welt gemäß (2.66) modelliert wird, ohne dass die Ermittlung des aus nicht direkt beobachtbaren Investorpräferenzen hergeleiteten Marktpreises des Zinsrisikos notwendig ist. Die Berechtigung zu dieser Vorgehensweise ergibt sich aus der Grundannahme, dass die aktuelle Zinsstruktur die Risikoeinstellung des Anlegers und folglich den Marktpreis des Zinsrisikos bereits in sich eingeschlossen hat. Diese Prämisse stellt in keiner Weise eine Beeinträchtigung der Allgemeingültigkeit des Zinsmodells dar, da die höchstmögliche Flexibilität seiner Parameter eine generelle Adaptierbarkeit an die vorherrschende Zinsstruktur zulässt.

254 Analytische Bestimmung der *Transition Density*

Bevor man den Callpreis gemäß (2.87) mittels Erwartungswertbildung berechnen kann, muss die bedingte Dichte der Portfoliovarianz determiniert werden, für die leider kein direkter Ausdruck in geschlossener Form existiert. Im Folgenden werden zwei alternative Ansätze zur Bestimmung der *Transition Density* $h(\sigma_p^2(T_1) | r(t))$ präsentiert.

2541 Der *PDE*-Ansatz

Da die F_{T_1} -messbare Zufallsvariable $Call(\sigma_p^2(T_1))$ unabhängig vom Zeitpunkt t ist, impliziert die *Iterated Expectations*-Eigenschaft, dass $f(t, B(t, T_1))$ ein Martingal ist:

$$E_t \left(Call(\sigma_p^2(T_1)) \right) = \int_{-\infty}^{\infty} Call(\sigma_p^2(T_1)) h(\sigma_p^2(T_1) | r(t)) d\sigma_p^2(T_1) = f(t, B(t, T_2))$$

$$E_s \left(f(t, B(t, T_2)) \right) = E_s \left(E_t \left(Call(\sigma_p^2(T_1)) \right) \right) = E_s \left(Call(\sigma_p^2(T_1)) \right) = f(s, B(s, T_2)) \quad (2.88)$$

mit $s < t$

Folglich wird die Drift nach Anwendung der *Ito's* Differenzierungsregel eliminiert⁹⁵:

⁹⁴ Erneut kommt das *Independence Lemma* zur Anwendung, da $B(t, T_2)$ F_t -messbar ist und andererseits $\sigma_p^2(T_1)$ F_{T_1} -messbar sowie F_t -unabhängig ist $\Rightarrow E_t \left(Cl(B(t, T_2), \sigma_p^2(T_1)) \right) = f(t, B(t, T_2))$. Vgl. Anl. 1.

⁹⁵ $f(t, B(t, T_2))$ ist als eine Funktion von t und $r(t)$ über die Abhängigkeit vom Bondpreis $B(t, T_2)$ modelliert, der allein durch seine Dependenz von der aktuellen Ausprägung der *Short Rate* stochastisch ist - $C(t, r(t))$. Vgl. Fn. 90.

$$\begin{aligned}
dC(t, r(t)) &= \frac{\partial C(t, r(t))}{\partial t} dt + \frac{\partial C(t, r(t))}{\partial r} dr(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C(t, r(t))}{\partial r^2} (dr(t))^2 \\
\Rightarrow C_t(t, r(t)) &+ \left(a^*(t) - b(t)r(t) + \sigma(t)^2 r(t)^2 \left[C(t, T_1) - \frac{1}{2} V_r(r(t), T_1) \right] \right) C_r(t, r(t)) \\
&+ \frac{1}{2} \sigma(t)^2 r(t)^2 C_{rr}(t, r(t)) = 0 \tag{2.89}
\end{aligned}$$

Unter Anwendung dieser Technik auf die Integraldarstellung des Call erhält man:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} Call(\sigma_P^2(T_1)) \frac{\partial h(\sigma_P^2(T_1) | r(t))}{\partial t} d\sigma_P^2(T_1) + \int_{-\infty}^{\infty} Call(\sigma_P^2(T_1)) \left(\frac{\partial h(\sigma_P^2(T_1) | r(t))}{\partial \sigma_P^2(T_1)} \frac{d\sigma_P^2(T_1)}{dt} \right) d\sigma_P^2(T_1) \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} Call(\sigma_P^2(T_1)) \frac{\partial h(\sigma_P^2(T_1) | r(t))}{\partial r} \left(a^*(t) - b(t)r(t) + \sigma(t)^2 r(t)^2 \left[C(t, T_1) - \frac{1}{2} V_r(r(t), T_1) \right] \right) d\sigma_P^2(T_1) \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} Call(\sigma_P^2(T_1)) \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h(\sigma_P^2(T_1) | r(t))}{\partial r^2} (\sigma(t)^2 r(t)^2) d\sigma_P^2(T_1) = 0 \Rightarrow \\
&\int_{-\infty}^{\infty} Call(\sigma_P^2(T_1)) \left[h_t + \frac{\partial h}{\partial \sigma_P^2(T_1)} \frac{d\sigma_P^2(T_1)}{dt} + h_r \left(a^*(t) - b(t)r(t) + \sigma(t)^2 r(t)^2 \left[C(t, T_1) - \frac{1}{2} V_r(r(t), T_1) \right] \right) \right. \\
&\left. + \frac{1}{2} h_{rr} (\sigma(t)^2 r(t)^2) \right] d\sigma_P^2(T_1) = 0 \Rightarrow \\
&h_t + \frac{\partial h}{\partial \sigma_P^2(T_1)} \frac{d\sigma_P^2(T_1)}{dt} + h_r \left(a^*(t) - b(t)r(t) + \sigma(t)^2 r(t)^2 \left[C(t, T_1) - \frac{1}{2} V_r(r(t), T_1) \right] \right) \\
&+ \frac{1}{2} h_{rr} (\sigma(t)^2 r(t)^2) = 0 \Rightarrow \\
&\text{mit } \sigma_P^2(T_1) = \int_t^{T_1} \sigma(u)^2 r(u)^2 \left[\left(C(u, T_2) - \frac{1}{2} V_r(r(u), T_2) \right) - \left(C(u, T_1) - \frac{1}{2} V_r(r(u), T_1) \right) \right]^2 du, \\
&V_r(r(t), T_i) = 2 \int_t^{T_i} a^*(s) e^{2K(s)} e^{\int_0^s \sigma(u)^2 du} e^{-\int_t^s b(u) du} \left(\int_s^{T_i} e^{-\frac{1}{2} \int_0^w \sigma(u)^2 du} e^{-K(w)} dw \right)^2 ds \\
&+ 2r(t) \left(\int_t^{T_i} e^{-\frac{1}{2} \int_t^w \sigma(u)^2 du} e^{-\int_t^w b(u) du} dw \right)^2 - 2r(t) C(t, T_i)^2 - 2C(t, T_i) \int_t^{T_i} a^*(s) C(s, T_i) ds, \quad i=1, 2 \Rightarrow \\
&h_t - \frac{\partial h}{\partial \sigma_P^2(T_1)} \left(\sigma(t)^2 r(t)^2 \left[\left(C(t, T_2) - \frac{1}{2} V_r(r(t), T_2) \right) - \left(C(t, T_1) - \frac{1}{2} V_r(r(t), T_1) \right) \right]^2 \right) \\
&+ h_r \left(a^*(t) - b(t)r(t) + \sigma(t)^2 r(t)^2 \left[C(t, T_1) - \frac{1}{2} V_r(r(t), T_1) \right] \right) + \frac{1}{2} h_{rr} (\sigma(t)^2 r(t)^2) = 0 \tag{2.90}
\end{aligned}$$

Theoretisch liefert die Lösung dieser *PDE* die bedingte Dichtefunktion für die Portfoliovarianz und in Verbindung mit (2.87) und (2.56) den Optionspreis, der durch die Dynamik

der *Short Rate* gemäß (2.66) und die daraus folgende Dynamik des Bondpreises gemäß (2.78) in einer Welt stochastischer Volatilität erzwungen wird.

2542 Der numerische Ansatz mittels einer *Runge-Kutta*⁹⁶-ähnlichen Approximation der Portfoliovarianz

Das Kernproblem der Pfadabhängigkeit der Portfoliovarianz liegt in den Schwierigkeiten bei der Optionspreisberechnung, die auf der entwickelten Bewertungstechnik beruht; es wurde im Rahmen dieses Kapitels bereits mehrmals diskutiert. Aus theoretischer Sicht ist im Allgemeinen nicht bekannt, wie der Term unter dem Integralzeichen der „impliziten“ Volatilität über einen endlichen Zeitraum zu integrieren ist, da der Integrand nicht mehr eine deterministische Funktion der Zeit, sondern durch seine Abhängigkeit von der *Short Rate* stochastischer Natur ist:

$$\begin{aligned} \sigma_p^2(T_1) &= \int_t^{T_1} \sigma(u)^2 r(u)^2 \left[\left(C(u, T_2) - \frac{1}{2} V_r(r(u), T_2) \right) - \left(C(u, T_1) - \frac{1}{2} V_r(r(u), T_1) \right) \right]^2 du \\ V_r(r(t), T_i) &= 2 \int_t^{T_i} a^*(s) e^{2K(s)} e^{\int_0^s \sigma(u)^2 du} e^{-\int_t^s b(u) du} \left(\int_s^{T_i} e^{-\frac{1}{2} \int_0^w \sigma(u)^2 du} e^{-K(w)} dw \right)^2 ds \\ &+ 2r(t) \left(\int_t^{T_i} e^{-\frac{1}{2} \int_t^w \sigma(u)^2 du} e^{-\int_t^w b(u) du} dw \right)^2 - 2r(t) C(t, T_i)^2 - 2C(t, T_i) \int_t^{T_i} a^*(s) C(s, T_i) ds, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (2.91)$$

Die mathematische Hürde, der man sich gegenüber sieht, rührt von der Tatsache her, dass im Zeitpunkt t Unkenntnis über die Ausprägung des varianzbestimmenden Zinsprozesses r zu einem späteren Zeitpunkt $u > t$ herrscht. Um dieses technische Hindernis zu überwinden, kann man sich des altbewährten Approximationsverfahrens von Kloeden und Platen⁹⁷

⁹⁶ Zu *Runge-Kutta* Methoden numerischer Integration von *ODEs* vgl. J. D. Lambert, “Numerical Methods for Ordinary Differential Systems” (2000), Wiley Third Reprinting, S. 149-213.

⁹⁷ Im Gegensatz zu Taylorapproximationen zweiten und höheren Grades, die auf die Bestimmung der ersten und zweiten Ableitung der Drift und der Diffusion angewiesen sind, erfolgt die approximative Lösung der *SDE* mit zustandsabhängiger Drift und Diffusion nach Kloeden und Platen unter vollständigem Verzicht auf Differentiation:

$$dY(t) = \mu(Y, t)dt + \sigma(Y, t)dW(t) \Rightarrow \text{mit } \Delta W(t) = W(t + \Delta t) - W(t)$$

$$\begin{aligned} Y(t + \Delta t) \square Y(t) &+ \frac{1}{2} \left(\mu(Y, t) + \mu(\bar{Y}, t) \right) \Delta t + \frac{1}{4} \left(\sigma(\bar{Y}^+, t) + \sigma(\bar{Y}^-, t) + 2\sigma(Y, t) \right) \Delta W(t) \\ &+ \frac{1}{4} \left(\sigma(\bar{Y}^+, t) - \sigma(\bar{Y}^-, t) \right) \left([\Delta W(t)]^2 - \Delta t \right) / \sqrt{\Delta t} \end{aligned}$$

$$\bar{Y} = Y(t) + \mu(Y, t)\Delta t + \sigma(Y, t)\Delta W(t)$$

$$\bar{Y}^\pm = Y(t) + \mu(Y, t)\Delta t \pm \sigma(Y, t)\sqrt{\Delta t}$$

Vgl. P. E. Kloeden, E. Platen, H. Schurz, “Numerical Solution of SDE through Computer Experiments” (1997), Corrected Second Printing, S. 198-201 und P. E. Kloeden, E. Platen, “Numerical Solution of Stochastic Differential Equations”, Springer Applications of Mathematics Vol. 23 (1992), Gleichungen 15.5.14-15.5.15.

bedienen, das die Portfoliovarianz zu einem hohen Grad an Genauigkeit annähernd in eine bedingt deterministische Variable umwandeln wird.

Prinzipiell könnte die *Short Rate* unendlich vielen Pfaden zwischen t und T_1 folgen, ohne dass deren Ausprägungen innerhalb des Zeitintervalls bekannt wären. Eine nahe liegende Lösungsmöglichkeit wäre der Versuch, einen Durchschnittsschätzer für den Zinssatz entlang eines bestimmten Pfades zu ermitteln, in den der aktuelle und der am Ende der Betrachtungsperiode eingetretene Wert der *Short Rate* mit dem gleichen Gewichtsanteil einfließen. Da aus heutiger Sicht die *Short Rate* im Endpunkt unbekannt ist und lediglich eine Verteilung besitzt, wird sie zuerst entlang eines spezifischen Pfades bis zu T_1 mit Hilfe der beschriebenen *Runge-Kutta*-ähnlichen Approximation entwickelt:

$$\begin{aligned}
 dr(t) &= \left(a^*(t) - b(t)r(t) + \sigma(t)^2 r(t)^2 \left[C(t, T_1) - \frac{1}{2} V_r(r(t), T_1) \right] \right) dt + \sigma(t)r(t)dW^{T_1}(t) \Rightarrow \\
 \text{mit } \Delta t &= T_1 - t, \quad W^{T_1}(T_1) - W^{T_1}(t) = \Delta W^{T_1}(t) = \xi \sqrt{\Delta t} \quad \text{und} \quad \xi \square N(0,1) \\
 r(T_1) &\square r(t) + \frac{1}{2} \left(\underbrace{a^*(t) - b(t)r(t) + \sigma(t)^2 r(t)^2 \left[C(t, T_1) - \frac{1}{2} V_r(r(t), T_1) \right]}_{\mu(r(t))} + \mu(\hat{r}) \right) \Delta t \\
 &+ \frac{1}{4} \left(\sigma(t)\hat{r}^+ + \sigma(t)\hat{r}^- + 2\sigma(t)r(t) \right) \Delta W^{T_1}(t) + \frac{1}{4} \left(\sigma(t)\hat{r}^+ - \sigma(t)\hat{r}^- \right) \frac{([\Delta W^{T_1}(t)]^2 - \Delta t)}{\sqrt{\Delta t}} \\
 \hat{r} &= r(t) + \left(a^*(t) - b(t)r(t) + \sigma(t)^2 r(t)^2 \left[C(t, T_1) - \frac{1}{2} V_r(r(t), T_1) \right] \right) \Delta t + \sigma(t)r(t)\Delta W^{T_1}(t) \\
 \hat{r}^\pm &= r(t) + \left(a^*(t) - b(t)r(t) + \sigma(t)^2 r(t)^2 \left[C(t, T_1) - \frac{1}{2} V_r(r(t), T_1) \right] \right) \Delta t \pm \sigma(t)r(t)\sqrt{\Delta t}
 \end{aligned} \tag{2.92}$$

Das Einsetzen des Durchschnittsschätzers für den Zinssatz anstelle der zwischenzeitlichen Ausprägung der *Short Rate* in (2.91) erlaubt die Bestimmung der Portfoliovarianz, da jetzt der Ausdruck unter dem Integralzeichen nicht mehr stochastisch, sondern bedingt auf den spezifischen Pfad deterministisch⁹⁸ ist und folglich im herkömmlichen Sinne integriert werden kann:

$$\begin{aligned}
 \text{mit } X(r(t), r(T_1)) &= \frac{r(t) + r(T_1)}{2} \Rightarrow \\
 \sigma_p^2(T_1) &= \int_t^{T_1} \sigma(u)^2 (X)^2 \left[\left(C(u, T_2) - \frac{1}{2} V_r(X, T_2) \right) - \left(C(u, T_1) - \frac{1}{2} V_r(X, T_1) \right) \right]^2 du
 \end{aligned}$$

⁹⁸ Bedingt deterministisch in dem Sinne, dass die Portfoliovarianz von der spezifischen Gaußschen Variable abhängt, die exakt einmal gezogen wird, um die Drift der *Short Rate* bzw. den Durchschnittsschätzer zu berechnen, die *Short Rate* gemäß (2.92) zu entwickeln und $\sigma_p^2(T_1)$ als deterministisch zu ermitteln.

$$\begin{aligned}
\text{mit } V_r(X, T_i) &= 2 \int_t^{T_i} a^*(s) e^{2K(s)} e^{\int_0^s \sigma(u)^2 du} e^{-\int_t^s b(u) du} \left(\int_s^{T_i} e^{-\frac{1}{2} \int_0^w \sigma(u)^2 du} e^{-K(w)} dw \right)^2 ds \\
&+ 2X \left(\int_t^{T_i} e^{-\frac{1}{2} \int_t^w \sigma(u)^2 du} e^{-\int_t^w b(u) du} dw \right)^2 - 2XC(t, T_i)^2 - 2C(t, T_i) \int_t^{T_i} a^*(s) C(s, T_i) ds, \quad i = 1, 2
\end{aligned} \tag{2.93}$$

In dem Ausmaß, in dem mittels dieser Substitution Genauigkeit eingebüßt wird, spiegelt sich die Präzision der Approximation⁹⁹ wider, die mit Hilfe einer zeitintensiven *Monte Carlo*-Simulation mit infinitesimal gestalteten Zeitschritten überprüft werden kann.

26 Zur Tauglichkeit, Relevanz und zu den Grenzen der *Short Rate*-basierten Zinsstrukturmodelle

Vor dem Hintergrund der in jüngerer Zeit zu beobachtenden Vielfalt von Zinsprodukten sind die anfänglichen Bemühungen, die zugrunde liegende Zinsstruktur modelltheoretisch auf eine konsistente und zugleich unbefangene Art und Weise zu beschreiben, von Wissenschaftlern unter der einschneidenden Annahme unternommen worden, die Dynamik der *Yield Curve* sei weitestgehend durch die instantane *Short Rate* zu erklären. Die stochastische Darstellung erfolgt mittels einer *SDE*, die aus einer *mean-reverting* Drift mit zuerst konstanten und im Rahmen späterer Abwandlungen zeitabhängigen Parametern und einer zeitabhängigen oder im allgemeinen Fall zinsabhängigen Diffusion zusammengesetzt ist. Die Parametrisierungsfreiheit, die man durch die Umgestaltung der anfangs konstanten Drift- und Diffusionskomponenten gewonnen hat, verleiht der ihrer Aussagekraft nach sonst präskriptiven Zinsstrukturtheorie einen deskriptiven Nachdruck und eröffnet infolgedessen die Möglichkeit, eine weitere Modellierungsdimension zu erschließen, die ebenfalls dem Oberbegriff des klassischen Ansatzes zur Bewertung von Zinsderivaten subsumiert wird. Präziser ausgedrückt wird durch diese Theorie, ausgehend von ökonometrisch geschätzten Modellparametern (einschließlich des Marktpreises des Risikos), die Form der aktuellen Zinsstruktur vorgeschrieben. Diesen normativen Charakter besitzt das Zinsmodell von Vasicek mit konstanter *mean-reverting* Driftfunktion und zeitunabhängiger Volatilitätsstruktur, dessen alternative, auf die Diffusionstheorie gestützte Herleitung im Gegensatz zur ursprünglichen Vorgehensweise seines Erfinders unter Verzicht auf die unter den Finanztheoretikern dieser Zeit verbreitete *PDE*-Technik im Abschnitt 23 erfolgt.

⁹⁹ Mit Hilfe des numerischen Ansatzes kann die Notwendigkeit der mühsamen Lösung der *PDE* für die *Transition Density* aus dem vorhergehenden Abschnitt umgangen werden. Der Wert des Call berechnet sich als die Summe der Optionspreise in Abhängigkeit von der Portfoliovarianz gemäß (2.56) dividiert durch die Anzahl der $\sigma_p^2(T_1)$ -Simulationen: $\sum_{i=1}^n \frac{\text{Call}([\sigma_p^2(T_1)]_i)}{n}$.

Abweichend davon kann dank den durch eine flexiblere Parametrisierung zusätzlich gewonnenen Freiheitsgraden die Methodik in einer impliziten Weise angewendet werden, um die Modellvariablen so festzulegen, dass sie die vorherrschende *Yield Curve* möglichst genau reproduzieren. Die durch diesen indirekten Ansatz herbeigeführte Umkehrung der Kausalität definiert die positive Dimension der Theorie, die unter diesem Blickwinkel die explikativ-deskriptive Aufgabe übernimmt, die von der aktuellen Zinsstruktur induzierten Preise für Zinsprodukte zu erklären. Das Verfahren der Kalibrierung zu Marktdaten ist im Rahmen des Hull/White-Modells im Abschnitt 24¹⁰⁰ unter zusätzlicher Bestimmung der in der abgewandelten Form des Konstrukts zeitabhängigen Volatilitätsfunktion ausführlich diskutiert und mathematisch fundiert worden. Anschließend wendet sich Abschnitt 25 in der Absicht, eine adäquatere Nachbildung der Realität zu erreichen, der überaus gewichtigen Problematik stochastischer Volatilitäten zu. Zu diesem Zweck wird ein weiteres *mean-reverting* Zinsmodell der *CEV*-Familie mit maximaler Flexibilität der Driftparameter und einer *Short Rate*-basierten Volatilitätsfunktion entwickelt und im Hinblick auf Bond- und Optionspreisauswirkungen aufgrund der zustandsabhängigen Diffusion detailliert untersucht.

Short Rate-basierte Zinsstrukturmodelle, die die explikativ-deskriptive Eigenschaft einer positiven Theorie aufweisen, erfreuten sich unverkennbar gewissen praktischen Erfolgs unter den Tradern dieser Zeit (1977-90). Deren Fähigkeit, jede vorstellbare Form der zugrunde liegenden *Yield Curve* wiederzugeben, erlaubte einen modelltheoretisch begründeten *Delta Hedge* mit *Plain-Vanilla* Zinsinstrumenten durchzuführen, deren Preise marktkonsistent berechnet wurden. Bei der Bewertung von exotischen Zinsprodukten stoßen diese Modelle jedoch sehr schnell an ihre Grenzen. Die höchste Anforderung¹⁰¹ an ein *Short Rate*-basiertes Zinsstrukturmodell¹⁰², mit dem eine übermäßig fein gestaltete, von der instantanen *Short Rate* erzeugte Filtration einhergeht, wäre die im Einklang mit dem Markt korrekte Bewertung der komplexeren Zinsderivaten zugrunde liegenden *Underlyings*¹⁰³.

¹⁰⁰ Zur Kalibrierungstechnik vgl. insb. Abschnitt 243. Die Herleitung des Modells und die Bestimmung des Bondpreises bzw. der Optionspreisformel erfolgen erneut gänzlich unter Ausschluss von *PDEs*.

¹⁰¹ Zugleich die beste Erwartung bezüglich der Performance dieser Modelle.

¹⁰² Die Existenz eines kontinuierlichen Geldmarktkontos wird implizit unterstellt. Zur Bewertung von exotischen *Libor*-basierten Zinsprodukten bedarf es allerdings meistens einer wesentlich grobkörnigen, von den Zinssätzen zum Zeitpunkt der diskreten, preissensitiven Ereignisse generierten Filtration, zu der die einzelnen Payoffs adaptiert sind.

¹⁰³ Als wesentlicher Nachteil von gravierendem Ausmaß ist zu berücksichtigen, dass die Kalibrierung der Modellparameter gemäß Abschnitt 243 für beliebige, zukünftige Zeitpunkte $T < T^{\max}$ unter dem jeweiligen *Forward*-Wahrscheinlichkeitsmaß erfolgen sollte. Simultane, marktkonsistente Preisbestimmung von mehreren *Plain-Vanilla* Zinsinstrumenten (z. B. Reihe von Caplets oder Bonds) unter einem einheitlichen Wahrscheinlichkeitsmaß wird erst im Rahmen des modernen Ansatzes zur Bewertung von Zinsderivaten - des *Libor Market Model* - möglich sein.

3 Der moderne Ansatz zur Modellierung der Zinsstruktur und Bewertung von komplexen Libor-Instrumenten

31 Einführung

Die Zinsstrukturdynamik kann durch zwei distinkte Methoden zur Beschreibung von arbitragefreien Prozessen modellhaft erfasst werden. Als Untersuchungsobjekt des vorhergehenden Kapitels ist der klassische Ansatz, ausgehend von der ersten Beziehung in (2.2), auf die Modellierung der *Short Rate* als *Markov*-Prozesses ausgerichtet. Mit der Einführung einer deterministischen Zeitabhängigkeit der Drift- und Volatilitätsparameter wird eine allgemeine Adaptabilität an die gegenwärtige Zinsstruktur angestrebt. Zwecks Determinierung der *Yield* bzw. *Discount Curve*¹⁰⁴ zu einem späteren Zeitpunkt ist dann lediglich die Kenntnis der aktuellen Ausprägung eines einzelnen Zinssatzes erforderlich, ohne dass die Historie der Zinsentwicklung in Erfahrung gebracht werden müsste. Die Bondpreise, wie in (2.49) und Fn. 90 dargestellt, offenbaren ihre stochastische Natur allein durch die Abhängigkeit von der sich zum Bewertungszeitpunkt gegebenen *Short Rate* und zeichnen sich nicht nur durch eine instantane perfekte Korrelation untereinander aus, bedingt durch eine einzige Unsicherheitsquelle in der Gestalt einer *Brownschen* Bewegung im Rahmen eines Ein-Faktor-Modells, sondern hängen aufgrund der Pfadunabhängigkeit auch über finite Zeithorizonte hinweg perfekt miteinander zusammen. Diese vollkommene, intertemporale Relation wäre zerstört, falls man zur Bestimmung der zukünftigen Zinsstruktur bezüglich des heutigen Zeitpunkts die vollständige Information benötigte, so wie sich diese entlang eines spezifischen Pfades entfaltet.

Die Ausschaltung der Pfadabhängigkeit wird in der Regel dadurch erreicht, dass man der Volatilitätsfunktion eine konkrete, zeitdeterministische Form auferlegt, die eine perfekte Korrelation der *Forward Rates* über finite Zeithorizonte hinweg erzwingt und folglich die Charakterisierung der Zinsstruktur einzig und allein durch die *Short Rate* ermöglicht. Abweichend davon bleibt im Rahmen des neuen, *Short Rate*-basierten *CEV*-Modells¹⁰⁵ aus Abschnitt 25, trotz der Dependenz der Volatilitätsstruktur von der Zustandsvariable, die *Markov*-Eigenschaft ebenfalls aufrechterhalten¹⁰⁶. Folglich ist die Präservation dieses wünschenswerten Merkmals nicht so sehr an die deterministische Form, sondern viel mehr an die genaue Spezifizierung der Volatilitätsfunktion gebunden. Allerdings wird sich die Kalibrierung des Modells zur vorherrschenden Zinsstruktur als theoretisch schwer implemen-

¹⁰⁴ Zur Definition der *Yield Curve* bzw. der *Discount Curve* vgl. Abschnitt 221 bzw. Abschnitt 243.

¹⁰⁵ Die Motivation für die Aufstellung eines neuen Modells mit stochastischer Volatilitätsstruktur verbirgt sich hinter empirischem Beweismaterial, das die Unzulänglichkeiten einer deterministischen Volatilitätsfunktion aufgrund der signifikanten Sensitivität der *Short Rate*-Volatilität bezüglich ihres aktuellen Niveaus unwiderlegbar aufdeckt. Vgl. dazu Fn. 57.

¹⁰⁶ Vgl. S. 43 und Fn. 90.

tierbar und praktisch kaum umsetzbar erweisen, insbesondere im Hinblick auf die markt-konsistente Bewertung von Zinsderivaten und die Eliminierung des Marktpreises des Risikos. Dadurch wird die Notwendigkeit der Modellierung der ganzen Zinsstruktur und nicht nur der Dynamik der *Short Rate* bedingt.

Vor dem Hintergrund der dargestellten Überlegungen rückt - basierend auf der zweiten Beziehung in (2.2) - die Herleitung eines arbitragefreien Konstrukts in den Vordergrund, das die stochastische Struktur direkt der Entwicklung der *Forward Rate Curve* aufzwingt und das Fundament für eine vom klassischen Ansatz grundsätzlich verschiedene Bewertungskonzeption legt. Der kennzeichnende Unterschied, der diese moderne Methode letztendlich von der traditionellen Vorgehensweise abhebt, besteht in der direkten Integration der Arbitragefreiheitsbeziehung in die Dynamik der *Forward Rates* mit der Konsequenz, dass das Erfordernis einer unmittelbaren Modellierung der *Forward Rate*-Drift entfällt. Die risikoadjustierte Drift der instantanen *Forward Rate* ergibt sich als eine Funktion der Volatilitätsstruktur und ist demzufolge vom Marktpreis des Risikos unabhängig, der in ein äquivalentes, risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß absorbiert wird. Zwecks Pricing von Derivaten auf den Bond - ungeachtet nicht direkt beobachtbarer Investorpräferenzen - wird der Marktpreis des Risikos im Rahmen des klassischen Ansatzes entweder mit Hilfe der Inversion der *Discount Curve* als Ausdruck bekannter Funktionen determiniert und in die Bewertungsformel des jeweiligen Zinsprodukts eingesetzt, oder mittels der Anpassung der Parameter des *Short Rate*-Modells an die aktuelle Zinsstruktur, die die Vorstellung des Anlegers über die Vergütung des übernommenen Zinsrisikos bereits inkorporiert, implizit eliminiert. Dank der neuen Gestaltungsmethodik erübrigt sich diese, wie es in Grundzügen anhand des erweiterten *CEV*-Modells mit zustandsabhängiger Volatilitätsstruktur aus Abschnitt 25 im Folgenden noch zu zeigen gilt, rechnerisch anspruchsvolle Prozedur, da die Kalibrierung von zusätzlichen Driftparametern und die daraus folgende Risikoadjustierung nicht länger erforderlich sind. Die Frage nach der Modellierung der instantanen, exponentiell berechneten und später mit einem diskreten, finiten Laufzeithorizont ausgestatteten, linearer Zinsberechnungskonvention unterliegenden *Forward Rates*¹⁰⁷ wird schließlich auf das Problem der Auswahl und anschließender Kalibrierung der Volatilitätsfunktion zurückgeführt. Die umsichtige Selektion einer der möglichen und aus finanzwirtschaftlichen Aspekten als sinnvoll erachteten Funktionsformen für die Volatilitätsstruktur liefert das entscheidende Bindeglied zwischen dem modernen Ansatz und den traditionellen *Short*

¹⁰⁷ Die Unabwendbarkeit des Übergangs von instantanen zu diskreten *Forward Rates* wird im weiteren Verlauf der Ausführungen näher erläutert.

Rate-basierten Zinsstrukturmodellen, solange sie auf der Basis des Arbitragefreiheitsprinzips hergeleitet worden sind. Von diesem Standpunkt aus definiert der moderne Ansatz keine universale, in sich geschlossene Konstruktion, die ausschließlich einer neu geschaffenen Bewertungswelt vorbehalten bleibt, sondern stellt lediglich ein flexibleres Verfahren zur Charakterisierung der Merkmale eines aus der Vielfalt von Modellierungsmethoden ausgewählten, klassischen Zinsstrukturmodells dar.

Die Ähnlichkeit des oben skizzierten Vorgehens zur Black-Scholes-Methodologie ist unverkennbar. Die *PDE*, die unter der entsprechenden terminalen Bedingung zur Optionspreisformel führt, enthält die erwartete Rendite des *Underlying* nicht und ist demnach von dem Marktpreis des Risikos unabhängig – ein glücklicher Umstand, der die Bewertung in einer künstlich geschaffenen, risikoneutralen Welt zulässt und zugleich die Gültigkeit des Ergebnisses für jede denkbare Risikopräferenzfunktion sicherstellt. Unter diesem Blickwinkel betrachtet, stößt der moderne Ansatz zur Modellierung der Zinsstruktur nicht direkt in wissenschaftliches Neuland vor und stellt grundsätzlich keine neue Bewertungskonzeption dar, sondern ist im eigentlichen Sinne lediglich eine Erweiterung der Grenzen der Black-Scholes-Welt auf den Bereich der Bewertung von zinssensitiven Derivaten.

32 Die Aussichtslosigkeit einer effektiven Kalibrierungsprozedur im Rahmen des erweiterten *Short Rate*-Zinsmodells mit zustandsabhängiger Volatilitätsstruktur als Grund für den Übergang zur Modellierung der gesamten Zinsstruktur im Gegensatz zur Gestaltung der Dynamik der instantanen *Spot Rate*

Unter der Voraussetzung einer jederzeit aus beobachtbaren Marktdaten rekonstruierbaren *Discount Curve* $\{B(0, T_i), i \in [0, n], T_n = T^{\max}\}$ im heutigen Zeitpunkt wird durch die exakte Anpassung der zeitabhängigen Modellparameter an die aktuelle Zinsstruktur implizit die marktkonsistente Bewertung von komplexeren, derivativen Zinsprodukten zugrunde liegenden Bonds sichergestellt. Durch die Inversion der *Discount Curve* wird beispielsweise die explizite Abhängigkeit des Optionspreises in (2.56), mit Volatilität definiert in (2.85), vom Marktpreis des Risikos eliminiert. Allerdings kann sich die Technik der Umkehrung, wie es im Folgenden noch zu zeigen gilt, sogar bei Existenz analytischer Kalibrierungsformeln als schwer implementierbar entpuppen, woraus automatisch der Zwang erwächst, ihr eine relativ geringe praktische Relevanz beizumessen.

Folglich besteht das Ziel der Kalibrierungsprozedur darin, aus den zum heutigen Zeitpunkt bekannten Marktdaten – der gegenwärtigen Ausprägung der *Short Rate* $r(0)$, ihrer Volatilität $\sigma(0)r(0)$ und damit einhergehend $\sigma(0)$, und nicht zuletzt dem aktuellen Bondpreis $B(0, T)$ bzw. der Volatilität des Bondpreises:

$$\begin{aligned}
& [C(0,T) + C(0,T) \int_0^T a^*(s)C(s,T)ds - r(0) \left(\int_0^T e^{-\frac{1}{2} \int_0^w \sigma(u)^2 du} e^{-\int_0^w b(u)du} dw \right)^2 + r(0)C(0,T)^2 \\
& - \int_0^T a^*(s) e^{2K(s)} e^{\int_0^s \sigma(u)^2 du} e^{-\int_0^s b(u)du} \left(\int_s^T e^{-\frac{1}{2} \int_0^w \sigma(u)^2 du} e^{-K(w)} dw \right)^2 ds] \sigma(0)r(0) \quad (3.1)
\end{aligned}$$

die Modellparameter $b(t)$, $\sigma(t)$ und $a^*(t)$ in einem beliebigen zukünftigen Zeitpunkt $T < T^{\max}$ als Ausdruck dieser marktinduzierten Funktionen zu determinieren. Die Bestimmung von $a^*(T)$ in der Gestalt bekannter, aus der aktuellen Zinsstruktur extrahierter Funktionen, die annahmegemäß die Risikopräferenzen der Investoren und deren Vorstellung über die Prämie für die Übernahme des Zinsrisikos bereits beinhaltet, erlaubt die Ausschaltung des Marktpreises des Risikos aus den Bewertungsformeln für Zinsderivate¹⁰⁸. Demzufolge ist das Augenmerk dieses Abschnitts auf die Herleitung einer solchen Kalibrierungsfunktion gerichtet, unter der Voraussetzung, dass das Verfahren auf alle anderen Modellparameter bereits erfolgreich angewendet worden ist¹⁰⁹.

Als Ausgangspunkt der Überlegungen bediene man sich des aktuellen Bondpreises mit Verfallsdatum T , dem Kalibrierungszeitpunkt von $a^*(t)$:

$$\begin{aligned}
B(0,T) &= e^{-r(0)C(0,T) - \int_0^T a^*(s)C(s,T)ds + \frac{1}{2}Var\left(\int_0^T r(w)dw\right)} \\
Var\left(\int_0^T r(w)dw\right) &= r(0)^2 \left(\int_0^T e^{-\frac{1}{2} \int_0^w \sigma(u)^2 du} e^{-\int_0^w b(u)du} dw \right)^2 + \left(\int_0^T \int_0^w a^*(s) e^{-\frac{1}{2} \int_s^w \sigma(u)^2 du} e^{-\int_s^w b(u)du} ds dw \right)^2 \\
&+ 2r(0) \left(\int_0^T a^*(s) e^{2K(s)} e^{\int_0^s \sigma(u)^2 du} e^{-\int_0^s b(u)du} \left(\int_s^T e^{-\frac{1}{2} \int_0^w \sigma(u)^2 du} e^{-K(w)} dw \right)^2 ds \right) \\
&- r(0)^2 C(0,T)^2 - 2r(0)C(0,T) \int_0^T a^*(s)C(s,T)ds - \left(\int_0^T a^*(s)C(s,T)ds \right)^2 \quad (3.2)
\end{aligned}$$

Beiderseitige Logarithmierung, Addition umsichtig gewählter Hilfsterte zwecks der Komplettierung zu bereits bekannten Funktionen und schließlich das Umstellen nach $a^*(t)$ liefern eine Integralgleichung nach der gesuchten Modellkomponente:

¹⁰⁸ An dieser Stelle sei als einfachstes Beispiel erneut auf die Bewertungsformel für die Option auf den Bond verwiesen, die durch eine pfadabhängige Volatilität und die Dependenz von $a^*(t)$ - und daraus resultierend implizit vom Marktpreis des Risikos - gekennzeichnet ist.

¹⁰⁹ $b(t)$ kann beispielsweise nach Maßgabe von (2.57) festgelegt werden.

$$\begin{aligned}
& -\ln B(0, T) = r(0)C(0, T) + \int_0^T a^*(s)C(s, T)ds - \frac{1}{2}r(0)^2 \left(\int_0^T e^{-\frac{1}{2}\int_0^w \sigma(u)^2 du} e^{-\int_0^w b(u)du} dw \right)^2 \\
& -r(0) \left(\int_0^T a^*(s) e^{2K(s)} e^{\int_0^s \sigma(u)^2 du} e^{-\int_0^s b(u)du} \left(\int_s^T e^{-\frac{1}{2}\int_0^w \sigma(u)^2 du} e^{-K(w)} dw \right)^2 ds \right) + \frac{1}{2} \left(\int_0^T a^*(s)C(s, T)ds \right)^2 \\
& - \frac{1}{2} \left(\int_0^T \int_0^w a^*(s) e^{-\frac{1}{2}\int_s^w \sigma(u)^2 du - \int_s^w b(u)du} dsdw \right)^2 + r(0)C(0, T) \int_0^T a^*(s)C(s, T)ds + \frac{1}{2}r(0)^2 C(0, T)^2 \Rightarrow \\
& -\ln B(0, T) - \frac{1}{2}r(0)^2 \left(\int_0^T e^{-\frac{1}{2}\int_0^w \sigma(u)^2 du} e^{-\int_0^w b(u)du} dw \right)^2 + \frac{1}{2}r(0)^2 C(0, T)^2 = \int_0^T a^*(s)C(s, T)ds \\
& - \frac{1}{2} \left(\int_0^T \int_0^w a^*(s) e^{-\frac{1}{2}\int_s^w \sigma(u)^2 du - \int_s^w b(u)du} dsdw \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\int_0^T a^*(s)C(s, T)ds \right)^2 + \frac{\text{Bond Vola}}{\sigma(0)} \\
& \text{mit } \frac{\text{Bond Vola}}{\sigma(0)} = r(0)^2 C(0, T)^2 + r(0)C(0, T) - r(0)^2 \left(\int_0^T e^{-\frac{1}{2}\int_0^w \sigma(u)^2 du} e^{-\int_0^w b(u)du} dw \right)^2 \\
& + r(0)C(0, T) \int_0^T a^*(s)C(s, T)ds - r(0) \left(\int_0^T a^*(s) e^{2K(s)} e^{\int_0^s \sigma(u)^2 du} e^{-\int_0^s b(u)du} \left(\int_s^T e^{-\frac{1}{2}\int_0^w \sigma(u)^2 du} e^{-K(w)} dw \right)^2 ds \right) \\
& \int_0^T a^*(s)C(s, T)ds - \frac{1}{2} \left(\int_0^T \int_0^w a^*(s) e^{-\frac{1}{2}\int_s^w \sigma(u)^2 du - \int_s^w b(u)du} dsdw \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\int_0^T a^*(s)C(s, T)ds \right)^2 = \\
& \underbrace{-\ln B(0, T) - \frac{1}{2}r(0)^2 \left(\int_0^T e^{-\frac{1}{2}\int_0^w \sigma(u)^2 du} e^{-\int_0^w b(u)du} dw \right)^2 + \frac{1}{2}r(0)^2 C(0, T)^2 - \frac{\text{Bond Vola}}{\sigma(0)}}_{A(0, T)} \tag{3.3}
\end{aligned}$$

Gemäß Gleichung (3.3) wird einem Integralausdruck über den zu ermittelnden Parameter $a^*(t)$ eine aus heutiger Sicht bekannte Funktion des Kalibrierungszeitpunkts, allgemein als $A(0, T)$ bezeichnet, gegenübergestellt¹¹⁰. Durch einmalige Ableitung nach T erhält man:

¹¹⁰ Falls der Term $e^{-\frac{1}{2}\int_s^w \sigma(u)^2 du}$ unter dem Integralzeichen nicht existierte, wäre (3.3) mühelos auf folgende einfache Integralgleichung zurückzuführen, die durch zweifache Differentiation nach T gelöst werden könnte:

$$\int_0^T a^*(s)C(s, T)ds = A(0, T) \Rightarrow a^*(T)C(T, T) + \int_0^T a^*(s) \frac{\partial \left[e^{K(s)} \int_s^T e^{-K(u)} du \right]}{\partial T} ds = \frac{\partial A(0, T)}{\partial T} \Rightarrow \frac{\partial A(0, T)}{\partial T} =$$

$$\begin{aligned}
& e^{-K(T)} \int_0^T a^*(s) e^{K(s)} ds - e^{-K(T)} \int_0^T \int_0^w a^*(s) e^{-\frac{1}{2} \int_s^w \sigma(u)^2 du - \int_s^w b(u) du} ds dw \int_0^T a^*(s) e^{-\frac{1}{2} \int_s^T \sigma(u)^2 du} e^{K(s)} ds + \\
& e^{-K(T)} \int_0^T a^*(s) e^{K(s)} ds \int_0^T a^*(s) C(s, T) ds = \frac{\partial A(0, T)}{\partial T} \Rightarrow \int_0^T a^*(s) e^{K(s)} ds \int_0^T a^*(s) C(s, T) ds + \quad (3.4)^{111} \\
& \int_0^T a^*(s) e^{K(s)} ds - \int_0^T \int_0^w a^*(s) e^{-\frac{1}{2} \int_s^w \sigma(u)^2 du - \int_s^w b(u) du} ds dw \int_0^T a^*(s) e^{-\frac{1}{2} \int_s^T \sigma(u)^2 du} e^{K(s)} ds = e^{K(T)} \frac{\partial A(0, T)}{\partial T}
\end{aligned}$$

Eine weitere Ableitung nach T und geringfügige Umformungen erlauben es, nach dem gesuchten Modellparameter $a^*(T)$ umzustellen:

$$\begin{aligned}
& - \int_0^T \int_0^w a^*(s) e^{-\frac{1}{2} \int_s^w \sigma(u)^2 du - \int_s^w b(u) du} ds dw \left(a^*(T) e^{K(T)} - \frac{1}{2} \sigma(T)^2 \int_0^T a^*(s) e^{-\frac{1}{2} \int_s^T \sigma(u)^2 du} e^{K(s)} ds \right) \\
& + a^*(T) e^{K(T)} \int_0^T a^*(s) C(s, T) ds + e^{-K(T)} \left(\int_0^T a^*(s) e^{K(s)} ds \right)^2 \\
& - e^{-K(T)} \left(\int_0^T a^*(s) e^{-\frac{1}{2} \int_s^T \sigma(u)^2 du} e^{K(s)} ds \right)^2 + a^*(T) e^{K(T)} = \frac{\partial \left[e^{K(T)} \frac{\partial A(0, T)}{\partial T} \right]}{\partial T} \Rightarrow \\
& a^*(T) + a^*(T) \int_0^T a^*(s) C(s, T) ds - e^{-2K(T)} \left(\int_0^T a^*(s) e^{-\frac{1}{2} \int_s^T \sigma(u)^2 du} e^{K(s)} ds \right)^2 \\
& + e^{-2K(T)} \left(\int_0^T a^*(s) e^{K(s)} ds \right)^2 - a^*(T) \int_0^T \int_0^w a^*(s) e^{-\frac{1}{2} \int_s^w \sigma(u)^2 du - \int_s^w b(u) du} ds dw \\
& + \frac{1}{2} \sigma(T)^2 e^{-K(T)} \int_0^T \int_0^w a^*(s) e^{-\frac{1}{2} \int_s^w \sigma(u)^2 du - \int_s^w b(u) du} ds dw \int_0^T a^*(s) e^{-\frac{1}{2} \int_s^T \sigma(u)^2 du} e^{K(s)} ds = e^{-K(T)} \frac{\partial \left[e^{K(T)} \frac{\partial A(0, T)}{\partial T} \right]}{\partial T}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^T a^*(s) e^{K(s)} e^{-K(T)} ds \Rightarrow \int_0^T a^*(s) e^{K(s)} ds = \frac{\partial A(0, T)}{\partial T} e^{K(T)} \Rightarrow a^*(T) = e^{-K(T)} \frac{\partial \left[\frac{\partial A(0, T)}{\partial T} e^{K(T)} \right]}{\partial T} = \frac{\partial^2 A(0, T)}{\partial T^2} \\
& + \frac{\partial A(0, T)}{\partial T} b(T), \text{ mit } A(0, T) = -\ln B(0, T) - \frac{\text{Bond Vola}}{\sigma(0)}.
\end{aligned}$$

¹¹¹ Bei Nichtexistenz des Terms $e^{-\frac{1}{2} \int_s^w \sigma(u)^2 du}$ gälte $\int_0^T \int_0^w a^*(s) e^{-\frac{1}{2} \int_s^w \sigma(u)^2 du - \int_s^w b(u) du} ds dw \int_0^T a^*(s) e^{-\frac{1}{2} \int_s^T \sigma(u)^2 du} e^{K(s)} ds = \int_0^T a^*(s) e^{K(s)} ds \int_0^T a^*(s) C(s, T) ds$. Als Konsequenz ergäbe sich die Integralgleichung aus der vorhergehenden Fußnote: $\int_0^T a^*(s) e^{K(s)} ds = \frac{\partial A(0, T)}{\partial T} e^{K(T)}$.

$$\begin{aligned}
a^*(T) \left(1 + \int_0^T a^*(s) C(s, T) ds - \int_0^T \int_0^w a^*(s) e^{-\frac{1}{2} \int_s^w \sigma(u)^2 du - \int_s^w b(u) du} ds dw \right) &= e^{-K(T)} \frac{\partial \left[e^{K(T)} \frac{\partial A(0, T)}{\partial T} \right]}{\partial T} \\
-\frac{1}{2} \sigma(T)^2 e^{-K(T)} \int_0^T \int_0^w a^*(s) e^{-\frac{1}{2} \int_s^w \sigma(u)^2 du - \int_s^w b(u) du} ds dw \int_0^T a^*(s) e^{-\frac{1}{2} \int_s^T \sigma(u)^2 du} e^{K(s)} ds & \\
+ e^{-2K(T)} \left(\int_0^T a^*(s) e^{-\frac{1}{2} \int_s^T \sigma(u)^2 du} e^{K(s)} ds \right)^2 - e^{-2K(T)} \left(\int_0^T a^*(s) e^{K(s)} ds \right)^2 & \quad (3.5)
\end{aligned}$$

Weitere Vereinfachungen kann man durch die Ablösung des Doppelintegrals erreichen¹¹²:

$$\text{Mit } \int_0^T \int_0^w a^*(s) e^{-\frac{1}{2} \int_s^w \sigma(u)^2 du - \int_s^w b(u) du} ds dw \int_0^T a^*(s) e^{-\frac{1}{2} \int_s^T \sigma(u)^2 du} e^{K(s)} ds = -e^{K(T)} \frac{\partial A(0, T)}{\partial T} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned}
&+ \int_0^T a^*(s) e^{K(s)} ds + \int_0^T a^*(s) e^{K(s)} ds \int_0^T a^*(s) C(s, T) ds \Rightarrow \\
&a^*(T) + a^*(T) \frac{e^{K(T)} \frac{\partial A(0, T)}{\partial T} - \int_0^T a^*(s) e^{K(s)} ds \int_0^T a^*(s) C(s, T) ds - \int_0^T a^*(s) e^{K(s)} ds}{\int_0^T a^*(s) e^{-\frac{1}{2} \int_s^T \sigma(u)^2 du} e^{K(s)} ds} \\
&+ a^*(T) \int_0^T a^*(s) C(s, T) ds = e^{-2K(T)} \left(\int_0^T a^*(s) e^{-\frac{1}{2} \int_s^T \sigma(u)^2 du} e^{K(s)} ds \right)^2 - e^{-2K(T)} \left(\int_0^T a^*(s) e^{K(s)} ds \right)^2 \\
&+ e^{-K(T)} \frac{\partial \left[e^{K(T)} \frac{\partial A(0, T)}{\partial T} \right]}{\partial T} - \frac{1}{2} \sigma(T)^2 e^{-K(T)} \int_0^T a^*(s) e^{K(s)} ds \int_0^T a^*(s) C(s, T) ds \\
&+ \frac{1}{2} \sigma(T)^2 \frac{\partial A(0, T)}{\partial T} - \frac{1}{2} \sigma(T)^2 e^{-K(T)} \int_0^T a^*(s) e^{K(s)} ds
\end{aligned}$$

An dieser Darstellungsform lässt sich die Gestalt einer *Volterra*-Integralgleichung¹¹³ zweiter Art erkennen. Versimplifiziert kann sie folgendermaßen geschrieben werden¹¹⁴:

¹¹² Falls vom Störterm $e^{-\frac{1}{2} \int_s^w \sigma(u)^2 du}$ abstrahiert werden könnte, stelte dieser Ausdruck die Lösung der Integralgleichung aus Fn. 110 dar: $a^*(T) = e^{-K(T)} \frac{\partial \left[\frac{\partial A(0, T)}{\partial T} e^{K(T)} \right]}{\partial T} = \frac{\partial^2 A(0, T)}{\partial T^2} + \frac{\partial A(0, T)}{\partial T} b(T)$.

¹¹³ Zu *Volterra*-Integralgleichungen vgl. (1) G. Arfken, "Mathematical Methods for Physicists" (1985), 3rd Edition, S. 865ff, (2) W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, "Numerical Recipes in FORTRAN: The Art of Scientific Computing" (1992), 2nd Edition, S. 786-788.

¹¹⁴ Wie die behelfsmäßigen Funktionen $f(T)$, $y(T)$, $K(t, T)$, $e(T)$ und $L(t, T)$ im Einzelnen auszusehen haben, ist für die Veranschaulichung der Ineffektivität der Kalibrierungsprozedur nicht von Belang.

$$\begin{aligned}
a^*(T) &= \frac{f(T) + A}{1 + \int_0^T a^*(s)C(s, T)ds + B}, \quad f(T) = e^{-K(T)} \frac{\partial \left[e^{K(T)} \frac{\partial A(0, T)}{\partial T} \right]}{\partial T} + \frac{1}{2} \sigma(T)^2 \frac{\partial A(0, T)}{\partial T} \\
A &= -b(T) \int_0^T a^*(s)Y(s)ds \left(\int_0^T a^*(s)C(s, T)ds + 1 \right) + c(T) \left(\left(\int_0^T a^*(s)Z(s, T)ds \right)^2 - \left(\int_0^T a^*(s)Y(s)ds \right)^2 \right) \\
B &= d(T) \left(\int_0^T a^*(s)Z(s, T)ds \right)^{-1} - \int_0^T a^*(s)Y(s)ds \left(\int_0^T a^*(s)C(s, T)ds + 1 \right) \left(\int_0^T a^*(s)Z(s, T)ds \right)^{-1} \Rightarrow \\
a^*(T) &= \frac{f(T) + y(T) \int_0^T a^*(s)K(s, T)ds}{1 + e(T) \int_0^T a^*(s)L(s, T)ds} \tag{3.7}
\end{aligned}$$

Diese Integralgleichung kann mittels sukzessiven Ersetzens des zu kalibrierenden Parameters unter dem Integralzeichen durch den auf der rechten Seite vorgegebenen Ausdruck gelöst werden:

$$\text{Mit } a^*(s) = \frac{f(s) + y(s) \int_0^s a^*(u)K(u, s)du}{1 + e(s) \int_0^s a^*(u)L(u, s)du} \tag{3.8}$$

$$\Rightarrow a^*(T) =$$

$$\frac{f(T) + y(T) \int_0^T \frac{f(s)K(s, T)}{1 + e(s) \int_0^s a^*(u)L(u, s)du} ds + y(T) \int_0^T \frac{y(s) \int_0^s a^*(u)K(u, s)du}{1 + e(s) \int_0^s a^*(u)L(u, s)du} K(s, T) ds}{1 + e(T) \int_0^T \frac{f(s)L(s, T)}{1 + e(s) \int_0^s a^*(u)L(u, s)du} ds + e(T) \int_0^T \frac{y(s) \int_0^s a^*(u)K(u, s)du}{1 + e(s) \int_0^s a^*(u)L(u, s)du} L(s, T) ds} \tag{3.9}$$

Eine weitere Substitution dieser Modellkomponente nach Maßgabe von (3.8) wie folgt:

$$a^*(u) = \frac{f(u) + y(u) \int_0^u a^*(v)K(v, u)dv}{1 + e(u) \int_0^u a^*(v)L(v, u)dv}, \quad T > s > u > \dots > 0 \tag{3.10}$$

und das erneute Einsetzen in (3.9) erhöhen lediglich die Dimensionalität der Integralrechnung und die Anzahl der Summanden¹¹⁵. Unter dem Blickwinkel praktischer Umsetzbarkeit wird die Behauptung über die Ineffektivität der Kalibrierungsprozedur durch den exponentiell ansteigenden Rechenaufwand untermauert, woraus sich die natürliche Bestrebung nach einem grundlegend unterschiedlichen Modellierungsverfahren ergibt, das die Unerlässlichkeit der Determinierung zusätzlicher Driftparameter eliminiert.

33 Der allgemeine Heath-Jarrow-Morton Modellrahmen zur Entwicklung der ganzheitlichen Zinsstrukturdynamik

Vor dem Hintergrund des unbefriedigenden Befunds aus dem letzten Abschnitt richtet sich die Aufmerksamkeit auf die Charakterisierung der zeitlichen Entfaltung der gesamten *Forward Rate Curve* mit Hilfe eines generalisierten, zeitkontinuierlichen, stochastischen Prozesses und die Aufdeckung der intertemporalen Verknüpfungen, die zwischen durch endliche Zeiträume getrennten Zinsstrukturen existieren. Basierend auf der nahezu unbegrenzten Flexibilität des allgemeinen Konstruktionsgerüsts bei der Spezifikation der Volatilitätsform und der Korrelationsstruktur zwischen *Forward Rates* über finite Zeithorizonte hinweg, ergibt sich als diesem Ansatz immanente Modellierungsschwierigkeit die Notwendigkeit der Kenntnis der vollständigen Pfadinformation innerhalb des betrachteten Zeitintervalls. In der Regel wird es nicht länger ausreichen, lediglich eine einzige Ausprägung des Zinssatzes am Ende der Beobachtungsperiode zusammen mit der aktuellen *Forward Rate Curve* in Erfahrung zu bringen, um die Zinsstruktur in diesem Zeitpunkt eindeutig zu beschreiben. Als Ausgangspunkt des Ein-Faktor-*HJM* Zinsstrukturmodells¹¹⁶, das die stochastische Struktur direkt den instantanen, exponentiell berechneten *Forward Rates* $f(t, T_i)$ mit $T_i < T^{\max}$ auferlegt, dienen folgende Integralgleichung und *SDE*:

¹¹⁵ Der Zeitraum $[0, T]$ wird sehr fein gestaltet und in unendlich viele, infinitesimal kleine Subintervalle zerlegt: mit $n \rightarrow \infty \Rightarrow T/n = \Delta t = T - s = s - u = \dots \rightarrow 0$. Wenn z.B. $[0, T]$ so klein ist, dass bereits $u \rightarrow 0 \Rightarrow a^*(u) = f(u)$, ergibt sich die Lösung der Integralgleichung einfach aus (3.9) zu:

$$a^*(T) = \frac{f(T) + y(T) \int_0^T \frac{f(s)K(s, T)}{1 + e(s) \int_0^s f(u)L(u, s) du} ds + y(T) \int_0^T \frac{y(s) \int_0^s f(u)K(u, s) du}{1 + e(s) \int_0^s f(u)L(u, s) du} K(s, T) ds}{1 + e(T) \int_0^T \frac{f(s)L(s, T)}{1 + e(s) \int_0^s f(u)L(u, s) du} ds + e(T) \int_0^T \frac{y(s) \int_0^s f(u)K(u, s) du}{1 + e(s) \int_0^s f(u)L(u, s) du} L(s, T) ds}$$

Generell wird jedoch eine Lösung in ähnlicher Form erst nach unendlich vielen Iterationsschritten erreicht werden, wobei die Anzahl der Summanden im Zähler und Nenner exponentiell ansteigen wird.

¹¹⁶ Vgl. (1) D. Heath, R. Jarrow, A. Morton, "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation", *Econometrica* 60 (1992), S. 77-105, (2) D. Heath, R. Jarrow, A. Morton, "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A Discrete Time Approximation", *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 25 (1990), S. 419-440.

$$f(t, T) = f(0, T) + \int_0^t \alpha_f(u, T) du + \int_0^t \sigma_f(u, T) dW(u) \quad (3.11)^{117}$$

$$df(t, T) = \alpha_f(t, T) dt + \sigma_f(t, T) dW(t), \quad T \in (0, T^{\max}]$$

Bezugnehmend auf die zweite Relation aus (2.2) kann die Bondpreisdynamik untersucht und daraus die Arbitragefreiheitsbedingung für die Driftfunktion hergeleitet werden¹¹⁸:

$$B(t, T) = e^{-\int_t^T f(t, u) du} \Rightarrow$$

$$dB(t, T) = -e^{-\int_t^T f(t, u) du} d\left[\int_t^T f(t, u) du\right] + \frac{1}{2} e^{-\int_t^T f(t, u) du} \left(d\left[\int_t^T f(t, u) du\right]\right)^2 \Rightarrow$$

$$\frac{dB(t, T)}{B(t, T)} = f(t, t) dt - \int_t^T df(t, u) du + \frac{1}{2} \left(d\left[\int_t^T f(t, u) du\right]\right)^2 \Rightarrow \quad (3.12)$$

$$\frac{dB(t, T)}{B(t, T)} = r(t) dt - \int_t^T (\alpha_f(t, u) dt + \sigma_f(t, u) dW(t)) du + \frac{1}{2} \left(\int_t^T \sigma_f(t, u) du\right)^2 dt \Rightarrow$$

$$\frac{dB(t, T)}{B(t, T)} = \left[r(t) - \int_t^T \alpha_f(t, u) du + \frac{1}{2} \left(\int_t^T \sigma_f(t, u) du\right)^2\right] dt - \left[\int_t^T \sigma_f(t, u) du\right] dW(t)$$

Falls $W(t)$ bereits die *Brownsche* Bewegung unter dem risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß darstellt, muss die Drift in der Bond-*SDE* dem risikolosen Zinssatz entsprechen:

$$r(t) - \int_t^T \alpha_f(t, u) du + \frac{1}{2} \left(\int_t^T \sigma_f(t, u) du\right)^2 = r(t) \Rightarrow \quad (3.13)$$

$$\int_t^T \alpha_f(t, u) du = \frac{1}{2} \left(\int_t^T \sigma_f(t, u) du\right)^2 \Rightarrow \alpha_f(t, T) = \sigma_f(t, T) \int_t^T \sigma_f(t, u) du$$

Andernfalls muss zuerst der Wechsel auf das äquivalente, bewertungsrelevante Martingalmaß nach Maßgabe des *Girsanov*-Theorems vollzogen werden. Mit dem adaptierten Driftadjustierungsprozess $\lambda(t)$, $0 < t \leq T^{\max}$, folgt:

$$\xi(t) = e^{-\int_0^t \lambda(u) dW(u) - \frac{1}{2} \int_0^t \lambda(u)^2 du}, \quad P^*(A) = E^P \left[1_{\{A\}} \xi(T^{\max}) \right] \quad \forall A \in \mathcal{F}(T^{\max}) \quad (3.14)$$

$$W^*(t) = \int_0^t \lambda(u) du + W(t) \Rightarrow dW^*(t) = \lambda(t) dt + dW(t)$$

¹¹⁷ Die Modellparameter $\alpha_f(t, T)$ und $\sigma_f(t, T)$ stellen adaptierte, stochastische Prozesse dar. Vgl. dazu Fn. 84. Der Subindex f weist auf die mögliche Abhängigkeit von den Zustandsvariablen, der instantanen *Forward Rate* $f(t, T)$ und/oder der *Short Rate* $r(t)$ hin.

¹¹⁸ Vgl. auch S. Shreve, "Stochastic Calculus for Finance II", Continuous-Time Models (2004), S. 423-430.

Nachdem (3.14) in (3.12) eingesetzt worden ist, erhält man aus der risikoadjustierten¹¹⁹ Bondpreisdynamik die Arbitragefreiheitsbedingung:

$$\begin{aligned} \frac{dB(t,T)}{B(t,T)} &= \left[r(t) - \int_t^T \alpha_f(t,u) du + \frac{1}{2} \left(\int_t^T \sigma_f(t,u) du \right)^2 + \lambda(t) \int_t^T \sigma_f(t,u) du \right] dt - \left[\int_t^T \sigma_f(t,u) du \right] dW^*(t) \\ r(t) - \int_t^T \alpha_f(t,u) du + \frac{1}{2} \left(\int_t^T \sigma_f(t,u) du \right)^2 + \lambda(t) \int_t^T \sigma_f(t,u) du &= r(t) \Rightarrow \\ \lambda(t) &= - \frac{\left(- \int_t^T \alpha_f(t,u) du + \frac{1}{2} \left(\int_t^T \sigma_f(t,u) du \right)^2 \right)}{\int_t^T \sigma_f(t,u) du} \Rightarrow \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\alpha_f(t,T) = \lambda(t) \sigma_f(t,T) + \sigma_f(t,T) \int_t^T \sigma_f(t,u) du$$

Unter Berücksichtigung von (3.14) erlaubt die Substitution von (3.15) in (3.11), die Dynamik der instantanen *Forward Rates* zu determinieren und die zeitraumumspannende Verbindung zwischen der aktuellen und der zukünftigen Zinsstruktur in t herzustellen:

$$\begin{aligned} df(t,T) &= \left(\lambda(t) \sigma_f(t,T) + \sigma_f(t,T) \int_t^T \sigma_f(t,u) du \right) dt + \sigma_f(t,T) dW(t) \Rightarrow \\ df(t,T) &= \left(\sigma_f(t,T) \int_t^T \sigma_f(t,u) du \right) dt + \sigma_f(t,T) dW^*(t) \Rightarrow \quad (3.16) \\ f(t,T) &= f(0,T) + \int_0^t \sigma_f(s,T) \int_s^T \sigma_f(s,u) du ds + \int_0^t \sigma_f(s,T) dW^*(s) \end{aligned}$$

Markant sticht an erster Stelle das Entfallen des Driftmodellierungszwangs hervor, da die Drift vollständig durch die Volatilitätsfunktion beschrieben wird. Für allgemeine, zustandsabhängige Definitionen der Volatilitätsstruktur¹²⁰ wird die Entwicklung der *Forward*

¹¹⁹ Unter der Arbitragefreiheitsbedingung setzt $\lambda(t)$ die Überschussrendite des Bonds ins Verhältnis zu seiner Volatilität und repräsentiert somit den Marktpreis des Risikos, der vom Fälligkeitszeitpunkt T unabhängig ist.

¹²⁰ Falls die Volatilitätsfunktion deterministischer Natur ist, errechnet sich die Korrelation zwischen zwei durch einen endlichen Zeitraum getrennten *Forward Rates* $f(t,T)$ und $f(t,T_1)$ zu:

$$\frac{\int_0^t \sigma_f(s,T) \sigma_f(s,T_1) ds}{\sqrt{\int_0^t \sigma_f(s,T)^2 ds} \sqrt{\int_0^t \sigma_f(s,T_1)^2 ds}} \leq 1, \text{ wobei sich Gleichheit einstellt, wenn } \sigma_f(s,T_1) = \text{const} \cdot \sigma_f(s,T). \text{ Für}$$

die einfachste Variante der separierbaren Volatilitätsform, die im nächsten Abschnitt hergeleitet wird, wird diese Bedingung immer erfüllt sein, woraus die perfekte Korrelation folgt:

$$\text{Mit } \sigma_f(t,T) = \sigma_r(t) e^{-b(T-t)}, \quad \sigma_f(t,T_1) = \sigma_r(t) e^{-b(T-t)} e^{-b(T_1-T)} \Rightarrow \sigma_f(t,T_1) = e^{-b(T_1-T)} \sigma_f(t,T) \Rightarrow$$

Rate Curve durch die gesamte Prozesshistorie im Zeitintervall $[0, t]$ beeinflusst, woraus in der Regel der *Non-Markov* Charakter der Zinsstruktur erwächst. Mehrere Wissenschaftler haben die Bedingungen untersucht, unter denen sich die *Markov*-Eigenschaft aufrechterhalten lässt, mit dem Ergebnis, dass bestimmte Volatilitätsformen existieren, die auf Kosten einer augmentierten Menge von Zustandsvariablen die Präservierung dieses Merkmals sicherstellen¹²¹.

Vor diesem Hintergrund stellt die bedachte Konkretisierung der Volatilitätsform als Input zu *HJM* die wichtigste Modellierungsentscheidung dar¹²². Die Anwendung eines konkreten *Short Rate*-basierten Zinsmodells stellt sich als äquivalent zur Wahl einer spezifischen Volatilitätsstruktur im *HJM*-Modellrahmen heraus¹²³. Aus diesem Grund widmet sich der nächste Abschnitt eingehend der Herleitung einer spezifischen Volatilitätsform, die unter finanztheoretischen Aspekten wünschenswerte Eigenschaften aufweist und zugleich mit

$$\rho(f_t(T), f_t(T_1)) = \frac{\int_0^t \sigma_f(s, T) \sigma_f(s, T) e^{-b(T_1-T)} ds}{\sqrt{\int_0^t \sigma_f(s, T)^2 ds} \sqrt{\int_0^t \sigma_f(s, T) e^{-2b(T_1-T)} ds}} = \frac{e^{-b(T_1-T)} \int_0^t \sigma_f(s, T)^2 ds}{e^{-b(T_1-T)} \sqrt{\int_0^t \sigma_f(s, T)^2 ds} \sqrt{\int_0^t \sigma_f(s, T)^2 ds}} = 1$$

Im Gegensatz dazu wird die unmittelbar darauf folgende Erweiterung zu dieser grundlegenden funktionalen Gestalt der Zinssatzschwankung oder eine allgemeine deterministische Form der Volatilitätsfunktion mit einer verhältnismäßig starken Zeitabhängigkeit, die in der Regel diese Voraussetzung nicht erfüllt, bereits völlig ausreichend sein, um eine signifikante Dekorrelation herbeizuführen. Sollte die Volatilitätsfunktion generell stochastischer Art sein, würde der vollkommene, intertemporale Zusammenhang - bedingt durch die Pfadabhängigkeit der Driftintegrale - auf jeden Fall zerstört werden. Aus diesen Überlegungen wird ersichtlich, dass zur Erzielung terminaler Dekorrelationen Mehrfaktoren-Modelle nicht unerlässlich sind. Ausgehend von einem Ein-Faktor-Modell und der damit einhergehenden perfekten instantanen Korrelation, können schließlich sogar bei deterministischen Volatilitätsfunktionen in Abhängigkeit vom Grad der Zeitdependenz Korrelationen zwischen *Forward Rates* über finite Zeithorizonte hinweg von deutlich unter 1 erreicht werden.

¹²¹ Vgl. (1) R. Bhar, C. Chiarella, "Transformation of Heath-Jarrow-Morton Models to Markovian Systems", *The European Journal of Finance* 3 (1997), S. 1-26; (2) R. Bhar, C. Chiarella, "Approximating Heath-Jarrow-Morton Non-Markovian Term Structure of Interest Rate Models with Markovian Systems", Working Paper 76 (2000), School of Finance and Economics, UTS, S. 1-22; (3) O. Cheyette, "Term Structure Dynamics and Mortgage Valuation", *Journal of Fixed Income* 1 (1992), S. 28-41 und als Erweiterung zu diesem Modell O. Cheyette, "Markov Representation of the Heath-Jarrow-Morton Model", Working Paper (1996), UCLA Workshop on the Future of Fixed Income Financial Theory; (4) C. Chiarella, O. K. Kwon, "Forward Rate Dependent Markovian Transformations of the Heath-Jarrow-Morton Term Structure Model", *Finance and Stochastics* (2001), Volume 5, Issue 2, S. 237-257.

Gebührende Aufmerksamkeit wurde auch der durch das allgemeine *HJM*-Gerüst implizierten *Short Rate* und den Voraussetzungen für die Beibehaltung des *Markovian* Charakters geschenkt. Vgl. (1) A. P. Carverhill, "When is the Short Rate Markovian?", *Mathematical Finance* 4 (1994), S. 305-312; (2) A. Jeffrey, "Single Factor Heath-Jarrow-Morton Term Structure Models Based on Markov Spot Interest Rate Dynamics", *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 30 (1995), S. 619-642.

¹²² Vgl. (1) P. Ritchken, L. Sankarasubramanian, "The Importance of Forward Rate Volatility Structures in Pricing Interest Rate-Sensitive Claims", *The Journal of Derivatives* (1995), S. 25-41 und (2) P. Ritchken, L. Sankarasubramanian, "Volatility Structures of Forward Rates and the Dynamics of the Term Structure", *Mathematical Finance* 5 (1995), S. 55-72.

¹²³ Vgl. C. Chiarella, O. K. Kwon, "Formulation of Popular Interest Rate Models under the HJM Framework", Research Paper 13 (1999), Quantitative Finance Research Group, School of Finance and Economics, UTS.

den für die Erhaltung der *Markov*-Beschaffenheit erforderlichen Strukturen harmoniert, allerdings zulasten einer erhöhten, jedoch endlichen Anzahl von Zustandsvariablen.

331 Die separierbare funktionelle Form der instantanen Volatilitätsstruktur

In einer allgemeinen Diffusionsumgebung sei die Volatilität Element der Klasse der *Lebesgue* quadratisch-integrierbaren Funktionen - $\sigma_f(t, T) \in L^2$, so dass die Definierbarkeit der Korrelationsstruktur¹²⁴ sichergestellt werden kann. Außerdem wird gefordert, dass die Volatilitätsfunktion, sofern sie stochastischer Natur ist, einen adaptierten Prozess darstellen soll, d. h. für jedes $t \geq 0$ ist $\sigma_f(t, T)$ F_t -messbar und unabhängig von der Realisation stochastischer Variablen in einem zukünftigen Zeitpunkt $\tau > t$.

Erwartungsgemäß werden verschiedene *Forward Rates* in ihrer Schwankungsbreite zweierlei Reaktion auf die Ankunft finanzwirtschaftlicher Neuigkeiten mit identischem Informationsgehalt zeigen. In einem bestimmten Zeitpunkt wird der stochastische Faktor in der Gestalt *Brownscher* Schocks gleichen Ausmaßes in Abhängigkeit von der Laufzeit der jeweiligen *Forward Rate* unterschiedliche Resonanz finden. In der Regel erscheint die Annahme plausibel, dass *Forward Rates* mit Verfallszeitpunkt in wenigen Monaten auf ökonomisch signifikante Signale volatiler reagieren werden als solche, die z. B. noch zehn Jahre zu laufen haben. Im Umkehrschluss ist mit der Zeitentfaltung von einer größeren oder kleineren Änderung im Niveau einer bestimmten *Forward Rate* auszugehen, in Abhängigkeit davon wie weit das Verfallsdatum auf der Zeitachse entfernt ist – wenige Monate oder mehrere Jahre.

In Anknüpfung an die Anregungen aus dem letzten Abschnitt gilt es im Folgenden, die Volatilitätsfunktion als den wichtigsten Inputparameter für die Modellkonstruktion zu spezifizieren, indem die diskursive finanztheoretische Interpretation der Schwankungsstruktur der *Forward Rates* und der darauf einflussnehmenden Faktoren formalisiert wird. Gestützt auf die Theorie der harmonischen Oszillation¹²⁵ aus der Physik wird eine lineare, homogene¹²⁶ Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten postuliert, die der Bewegung der *Forward Rates* in Abhängigkeit von der Restlaufzeit ab dem Moment der Verdrängung aus dem Gleichgewichtszustand folgen und die wiederherstellende Kraft beschreiben kann. Hinter diesem Gleichnis verbirgt sich die Intuition, dass der Modellrah-

¹²⁴ Vgl. Fn. 120.

¹²⁵ Vgl. (1) L. Lerner, "Physics for Scientists and Engineers", Vol.1 (1996), S. 139-168; (2) R. Serway, "Physics for Scientists and Engineers" (1999), S. 389-423.

¹²⁶ Gemäß dem Superpositionsprinzip linearer Differentialgleichungen stellt die Summe zweier unabhängiger Fundamentallösungen, jeweils mit einer Konstante multipliziert, eine weitere Lösung der Gleichung dar. Eine Fundamentallösung kann nicht als die gewichtete Summe der restlichen dargestellt werden.

men für die Entwicklung der Zinsstrukturdynamik und die Nachbildung der Volatilitätsstruktur - ähnlich wie der harmonische Oszillator – als ein äquilibristisches, kanonisches System angesehen werden könnte, das bei Verschiebung der Gleichgewichtsverhältnisse eine restaurierende Kraft erfährt, die in einem konstanten Verhältnis zu dieser Verdrängung – dem Produkt von der Volatilität der *Forward Rate* selbst und einer Kombination aus Cosinus- und/oder Sinusfunktionen¹²⁷ - steht. Darüber hinaus ist das System einer zur Geschwindigkeit der Anpassung proportionalen, endogenen Dämpfungskraft¹²⁸ ausgesetzt, die für die Abschwächung der Schwingungsausschläge im Zeitablauf sorgt. Vor dem Hintergrund der angestrebten Verbindung zwischen dem modernen, *Forward Rate*-fundierte *HJM*-Ansatz und dem klassischen, *Short Rate*-basierten Zinsstrukturmodell als Beweis für die essentielle Bedeutung der umsichtigen Wahl einer passenden Volatilitätsform, stellt sich die einfache mathematische Gesetzmäßigkeit, nach der sich die Amplitude einpendelt, als besonders geeignet für die Abbildung der Schwankungsstruktur heraus. Aufgrund dieser Überlegungen wird sich die Volatilität der *Forward Rates* als Funktion des Verfallszeitpunkts T indirekt aus der folgenden linearen Differentialgleichung für die Positionsfunktion $x(t, T)$ ergeben:

$$x(t, T) = \sigma_f(t, T) \left[\cos(w(T-t)) \pm \sin(w(T-t)) \right], \quad 0 \leq t \leq T$$

$$m \frac{\partial^2 x(t, T)}{\partial T^2} + a \frac{\partial x(t, T)}{\partial T} + kx(t, T) = 0, \quad \text{mit } m, a, k - \text{const.} \quad (3.17)$$

Unter Berücksichtigung der Tatsache, dass die Ableitung der exponentiellen Funktion durch die exponentielle Funktion selbst gegeben ist, erfolgt die Lösung mit Hilfe des Ansatzes $Ae^{\alpha(T-t)}$:

$$m\alpha^2 Ae^{\alpha(T-t)} + a\alpha Ae^{\alpha(T-t)} + kAe^{\alpha(T-t)} = 0 \Rightarrow Ae^{\alpha(T-t)} (m\alpha^2 + a\alpha + k) = 0 \Rightarrow$$

$$m\alpha^2 + a\alpha + k = 0 \Rightarrow \alpha_{\pm} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4km}}{2m} \quad (3.18)$$

Ein ausreichend kleiner Parameter a , so dass der Term unter der Quadratwurzel negativ wird, sorgt für ein oszillierendes System. Gemäß dem Superpositionsprinzip setzt sich die Lösung der Differentialgleichung aus der Menge mehrerer unabhängiger Fundamentallösungen zusammen:

¹²⁷ Die trigonometrischen Funktionen repräsentieren den komplexen Teil der Lösung und sind für die Schwingungen mit einer von der Amplitude unabhängigen Eigenfrequenz verantwortlich. Aufgrund der Independenz ist für die vorliegende Fragestellung irrelevant wie häufig das System oszilliert - lediglich wie es wieder zum Gleichgewicht findet, ist von Interesse.

¹²⁸ Die Frequenz der Schwingungen ist kleiner als in dem Fall ohne Dämpfung und die Amplitude nimmt mit der Zeit ab.

$$\alpha^2 - 4km < 0 \Rightarrow \alpha_{\pm} = \frac{-a \pm i\sqrt{4km - a^2}}{2m} = -j \pm iw, \text{ mit } j = \frac{a}{2m}, w = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{a^2}{4m^2}} \quad (3.19)$$

$$x(t, T) = Ae^{(-j+iw)(T-t)} + Be^{(-j-iw)(T-t)}$$

Durch die Startbedingungen werden die beiden Konstanten A und B determiniert:

$$(1) \quad x(t, t) = A + B = \sigma_f(t, t) = \sigma_r(t)$$

$$(2) \quad \left. \frac{\partial x(t, T)}{\partial T} \right|_{T=t} = (-j + iw)A + (-j - iw)B = -b\sigma_r(t) \quad (3.20)$$

Aus (3.17) wird ersichtlich, dass die Positionsfunktion am Anfang $x(t, T)|_{T=t}$ der *Short Rate*-Volatilität $\sigma_r(t)$ entspricht, die sowohl deterministischer als auch stochastischer Natur sein darf, jedoch unabhängig von T ist. Durch die zweite Nebenbedingung wird die anfängliche Geschwindigkeit festgelegt, mit der man sich von $\sigma_r(t)$ entfernt und gegen den langfristigen Gleichgewichtszustand strebt¹²⁹. Die Lösung dieses einfachen Gleichungssystems liefert unmittelbar A und B :

$$(-j + iw)(\sigma_r(t) - B) + (-j - iw)B = -b\sigma_r(t) \Rightarrow$$

$$-j\sigma_r(t) + jB + iw\sigma_r(t) - iwB - jB - iwB = -b\sigma_r(t) \Rightarrow B = \frac{(b + iw - j)\sigma_r(t)}{2iw} \quad (3.21)$$

$$\Rightarrow A = \sigma_r(t) - B = \sigma_r(t) - \frac{(b + iw - j)\sigma_r(t)}{2iw} = -\frac{(b - iw - j)\sigma_r(t)}{2iw} = B^*$$

A ergibt sich als das komplexe Konjugat von B und durch Einsetzen in (3.19) erhält man:

$$x(t, T) = \left[\sigma_r(t) - \frac{(b + iw - j)\sigma_r(t)}{2iw} \right] e^{-j(T-t) + iw(T-t)} + \sigma_r(t) \frac{(b + iw - j)}{2iw} e^{-j(T-t) - iw(T-t)}$$

$$= \sigma_r(t) e^{-j(T-t)} \left[e^{iw(T-t)} - \frac{(b + iw - j)}{2iw} e^{iw(T-t)} + \frac{(b + iw - j)}{2iw} e^{-iw(T-t)} \right]$$

$$= \sigma_r(t) e^{-j(T-t)} \left[e^{iw(T-t)} - \frac{(b + iw - j)}{2iw} \underbrace{\left(e^{iw(T-t)} - e^{-iw(T-t)} \right)}_{\substack{\cos(w(T-t)) + i\sin(w(T-t)) \\ -\cos(w(T-t)) + i\sin(w(T-t))}} \right]$$

$$= \sigma_r(t) e^{-j(T-t)} \left[e^{iw(T-t)} - \frac{(b + iw - j)}{2iw} 2i \sin(w(T-t)) \right]$$

$$= \sigma_r(t) e^{-j(T-t)} \left[\cos(w(T-t)) + i \sin(w(T-t)) - \frac{(b - j)}{w} \sin(w(T-t)) - i \sin(w(T-t)) \right]$$

¹²⁹ In diesem allgemeinen Fall ist die Anpassungsrate durch die Konstante b definiert, die mit dem *Mean Reversion*-Parameter aus dem Hull/White-Modell übereinstimmt, wie es im Weiteren für eine zeitabhängige Funktion $b(t)$ noch zu beweisen gilt. Außerdem ist der zweiten Startbedingung zusätzlich zu entnehmen, dass die Positionsfunktion für ein zeitlich weit entferntes T gegen Null tendiert. Müheless kann man sie jedoch gegen einen beliebigen langfristigen Wert streben lassen, wie im Folgenden gezeigt wird.

$$\Rightarrow x(t, T) = \sigma_r(t) e^{-j(T-t)} \left[\cos(w(T-t)) + \frac{(j-b)}{w} \sin(w(T-t)) \right] \quad (3.22)$$

als allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung (3.17) in Abhängigkeit der Koeffizienten m , a und k . Mit m der Einfachheit halber auf Eins normiert, impliziert die Wahl für den Koeffizienten a als das Zweifache des *Mean Reversion*-Parameters b trefflich die Äquivalenz von j und b , die (3.22) auf folgende vereinfachte Form reduziert¹³⁰:

$$x(t, T) = \sigma_r(t) e^{-b(T-t)} \cos(w(T-t)) \Rightarrow \sigma_f(t, T) = \sigma_r(t) e^{-b(T-t)} \quad (3.23)$$

mit $a^2 - 4km < 0 \Rightarrow 4b^2 < 4k \Rightarrow 0 < b < \sqrt{k}$

Da die Frequenz der Schwingungen $f=w/2\pi$ lediglich von der physischen Charakteristik des Systems¹³¹ und nicht von den Nebenbedingungen abhängt – im Gegensatz zur Amplitude, die über ihre Dependenz von der *Short Rate*-Volatilität und der *Mean Reversion Rate* allein durch (1) und (2) in (3.20) determiniert wird - kann die Deskription der Oszillationen von der Modellierung der *Forward Rate*-Schwankungsstruktur separiert werden. Erschwerend kommt noch der Umstand hinzu, dass sich die frequenzbestimmenden Parameter ohnehin keiner direkten ökonomischen Interpretation fügen. Im Unterschied dazu entstammen die kennzeichnenden Merkmale der Amplitude unmittelbar der finanzwirtschaftlichen Wirklichkeit. Folglich könnte die einfache Funktion, die den zeitlichen Verlauf der Schwingungsausschläge unabhängig von der Häufigkeit des Auftretens beschreibt und den Weg zum langfristigen Gleichgewicht weist, für die modellhafte Nachbildung der Volatilitätsform verwendet werden. Die Tatsache, dass die Volatilitätsfunktion der instantanen *Forward Rates* bei $(T-t) \rightarrow \infty$ gegen einen konstanten, langfristigen Grenzwert streben kann, lässt sich mühelos theoretisch erfassen, indem die Differentialgleichung (3.17) auf ähnliche Weise für eine abgewandelte Positionsfunktion $g(t, T) = x(t, T) - d$ unter entsprechend angepassten Startbedingungen gelöst wird:

$$(1) \quad g(t, t) = x(t, t) - d = A + B = \sigma_r(t) - d$$

$$(2) \quad \left. \frac{\partial g(t, T)}{\partial T} \right|_{T=t} = (-j + iw)A + (-j - iw)B = -b(\sigma_r(t) - d) \Rightarrow$$

$$x(t, T) = (\sigma_r(t) - d) e^{-j(T-t)} \left[\cos(w(T-t)) + \frac{(j-b)}{w} \sin(w(T-t)) \right] + d$$

¹³⁰ Andernfalls läge eine Überlagerung von Cosinus- und Sinusfunktionen mit unterschiedlichen, von den Nebenbedingungen abhängigen Amplituden, vor. Eine eindeutige Gesetzmäßigkeit, der das Ausmaß der Oszillation bzw. der Grad der maximalen Verdrängung innerhalb einer Periode folgt, ließe sich nicht ableiten.

¹³¹ Es handelt sich um die physikalische Realität, die durch die exogen vorgegebenen Koeffizienten der Differentialgleichung m , a und k zum Ausdruck kommt.

$$\begin{aligned} \Rightarrow x(t, T) &= (\sigma_r(t) - d)e^{-b(T-t)} \cos(w(T-t)) + d \quad \text{mit } j = b \\ \Rightarrow \sigma_f(t, T) &= (\sigma_r(t) - d)e^{-b(T-t)} + d \quad \text{mit } 0 < b < \sqrt{k} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Folgende Abbildungen veranschaulichen die in (3.23) und (3.24) hergeleiteten Ergebnisse:

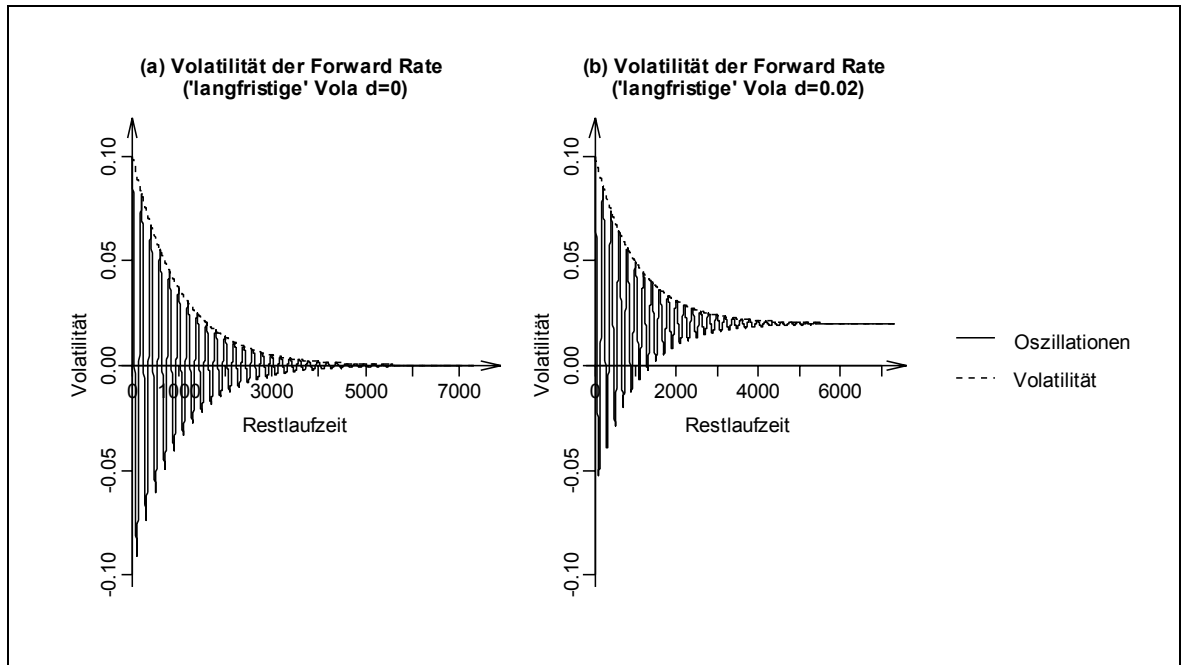


Abb. 3-1 Die Volatilität der Forward Rate als Funktion der Restlaufzeit

In der Grenzwertbetrachtung sinkt die Volatilität der Forward Rates im ersten Diagramm mit steigender Restlaufzeit allmählich auf Null. In (b) tendiert sie gegen einen noch zu kalibrierenden langfristigen Wert, der zu Demonstrationszwecken willkürlich bei $d=0.02$ gewählt worden ist.

Außer im Hinblick auf die Irrelevanz der Oszillationsfrequenz für die Modellierung der *Forward Rate*-Schwankungsstruktur, kommt das Separationsprinzip zusätzlich bezüglich der Gestalt der Volatilitätsfunktion besonders zur Geltung. Nach Maßgabe von (3.23) und (3.24) wird die Reaktion der *Forward Rates* auf Finanzinnovationen in einen rein zeitabhängigen Bestandteil $\sigma_r(t)$ und eine *Forward Rate*-spezifische Funktion der Restlaufzeit $e^{-b(T-t)}$ aufgespalten. Als Konsequenz aus dieser Definition in separierbarer Form ergibt sich für allgemeine, pfadabhängige *Short Rate*-Volatilitätsfunktionen¹³² die *Markov*-Deskription der Zinsstruktur unter Bezugnahme auf lediglich zwei Zustandsvariablen. Der stochastische Charakter der intertemporalen Verknüpfung zwischen der aktuellen und der zukünftigen *Discount Curves* wird allein über die instantane *Spot Rate* im Zeitpunkt t und eine zusätzliche Komponente, die die Prozesshistorie innerhalb des Zeitintervalls $[0, t]$ erfasst, beschrieben¹³³.

¹³² Die *Forward Rate*-Volatilitätsform $\sigma_f(t, T) = \sigma_r(t)e^{-b(T-t)}$ lässt sowohl eine deterministische, als auch eine stochastische *Short Rate*-Volatilitätsfunktion zu. Vgl. ausführlich dazu nächsten Abschnitt.

¹³³ Tatsächlich reicht es nicht länger aus, lediglich eine einzige Ausprägung des Zinssatzes am Ende der Beobachtungsperiode zusammen mit der aktuellen *Forward Rate Curve* in Erfahrung zu bringen, um

332 Die Verbindung zwischen dem *Forward Rate*-basierten *HJM*-Konstrukt und dem Hull/White-*Short Rate*-Zinsmodell

Zur Untermauerung der These über den unselbständigen Charakter des modernen Modellierungsansatzes¹³⁴ wird im Folgenden anhand der durch die bereits hervorgehobenen ökonomischen Gegebenheiten erzwungenen, im letzten Abschnitt hergeleiteten Volatilitätsstruktur (3.23), dessen Beziehung zum klassischen Verfahren zur Erklärung der Zinsstruktur aufgezeigt. Zuvor bedarf es allerdings einer weiterführenden, differenzierten Beschreibung der Volatilitätsform bezüglich der zeitabhängigen Komponente $\sigma_r(t)$. Hinsichtlich ihrer mathematischen Beschaffenheit könnte sie - in Abhängigkeit vom zugrunde liegenden *Short Rate*-Zinsmodell - einerseits rein deterministischer Natur sein, andererseits wäre jedoch eine stochastisch gestaltete Funktion durchaus vorstellbar, wenn nicht sogar wünschenswert. In der Tat könnte die *Forward Rate*-Volatilität über eine funktionale Dependenz von der *Short Rate* als pfadabhängig entwickelt werden - $\sigma_r(t) = \sigma r(t)^\eta$, wobei für $\eta = 1$ die Verbindung zum erweiterten *CEV*-Modell aus Abschnitt 251 zu untersuchen wäre. Falls die Explikation der Zinsstruktur nicht ausschließlich der instantanen *Spot Rate* vorbehalten bliebe, könnte zusätzlich eine F_t -messbare *Long Rate* $f(t, \tau)$ in die Volatilitätsfunktion inkorporiert werden, mit der Äquivalenz zum Brennan/Schwartz-Modell¹³⁵ als Konsequenz dieser Modellierungstechnik. Zum Zweck der Veranschaulichung werden sich allerdings die weiteren Ausführungen auf eine deterministische *Short Rate*-Volatilität $\sigma(t)$ nach Maßgabe des Hull/White-Zinsmodells¹³⁶ aus Abschnitt 241 beschränken.

Abschließend zu den Präliminarien sei auf den zeitabhängigen Charakter des *Mean Reversion*-Parameters hingewiesen, woraus eine variable Geschwindigkeit der Anpassung an den langfristigen Grenzwert resultiert, der gemäß der Definition in (3.23) null beträgt¹³⁷. Um die Veränderlichkeit des Adaptionsmechanismus zu berücksichtigen, muss der einfache Exponent $-b(T-t)$ in der *Forward Rate*-spezifischen Volatilitätskomponente lediglich durch

Kenntnis über die Zinsstruktur in diesem Zeitpunkt zu erlangen. Zur separierbaren Volatilitätsfunktion und zur *Markov*-Charakteristik des *HJM*-Zinsstrukturmodells vgl. P. Ritchken, L. Sankarasubramanian, "On Markovian Representations of the Term Structure", Working Paper of the Federal Reserve Bank of Cleveland (1992), S. 8-12.

¹³⁴ Vgl. Abschnitt 31, S. 59 oben. Der moderne Ansatz wurde vorerst als eine flexiblere formale Ausdrucksweise für ein ausgewähltes klassisches Zinsstrukturmodell in den Fokus der weiteren Forschungsbemühungen gerückt.

¹³⁵ M. J. Brennan, E. S. Schwartz, "A Continuous Time Approach to the Pricing of Bonds", Journal of Banking and Finance 3 (1979), S. 133-155.

¹³⁶ Diese Entscheidung ist nicht primär auf die extensive Herleitung und Erläuterung des Modells im Kapitel 2 zurückzuführen, sondern vielmehr auf die relativ einfache Kalibrierbarkeit seiner Variablen, wie sie im Abschnitt 243 erfolgt ist, im Gegensatz zum erweiterten *CEV*-Zinsmodell mit zustandsabhängiger Volatilität, dessen Parameter vom implementierungstechnischen Gesichtspunkt aus praktisch keiner Anpassung an Marktdaten unterliegen – vgl. die Diskussion im Abschnitt 32.

¹³⁷ Unschwer lässt sich ein beliebiger langfristiger Grenzwert in die Volatilitätsfunktion aufnehmen, wie im letzten Abschnitt gezeigt wurde. Vgl. (3.24).

das entsprechende Integral über $b(t)$ ersetzt werden. Mit der so festgelegten Gesetzmäßigkeit für die Schwankungsstruktur, kann der durch die arbitragefreie Dynamik der *Forward Rate* in (3.16) implizierte Prozess für die *Short Rate* folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} \text{Mit } \sigma_f(t, T) = \sigma_r(t) e^{-\int_t^T b(x) dx} \quad \text{und } \sigma_r(t) = \sigma_f(t, t) = \sigma(t) \Rightarrow \\ r(t) = f(0, t) + \int_0^t \sigma_r(u) e^{-\int_u^t b(x) dx} \int_u^t \sigma_r(u) e^{-\int_u^v b(x) dx} dv du + \int_0^t \sigma_r(u) e^{-\int_u^t b(x) dx} dW^*(u) \end{aligned} \quad (3.25)$$

Mittels totalen Differenzierens erhält man direkt die zugrunde liegende *SDE*:

$$\begin{aligned} dr(t) = [-b(t) \int_0^t \sigma_r(u) e^{-\int_u^t b(x) dx} \int_u^t \sigma_r(u) e^{-\int_u^v b(x) dx} dv du - b(t) \int_0^t \sigma_r(u) e^{-\int_u^t b(x) dx} dW^*(u) \\ + \int_0^t \sigma_r(u)^2 e^{-2\int_u^t b(x) dx} du + \frac{\partial f(0, t)}{\partial t}] dt + \sigma_r(t) dW^*(t) \Rightarrow \\ dr(t) = [b(t)(f(0, t) - r(t)) + \int_0^t \sigma_r(u)^2 e^{-2\int_u^t b(x) dx} du + \frac{\partial f(0, t)}{\partial t}] dt + \sigma_r(t) dW^*(t) \end{aligned} \quad (3.26)$$

Um die Äquivalenz zwischen der aus dem *HJM*-Konstruktionsrahmen hergeleiteten *Short Rate*-Stochastik und dem Hull/White-Zinsmodell¹³⁸ im klassischen Sinn zu beweisen, muss die Gleichheit beider Driftterme demonstriert werden:

$$\begin{aligned} b(t)(f(0, t) - r(t)) + \int_0^t \sigma_r(u)^2 e^{-2\int_u^t b(x) dx} du + \frac{\partial f(0, t)}{\partial t} = a^*(t) - b(t)r(t) \Rightarrow \\ b(t)f(0, t) + \int_0^t \sigma_r(u)^2 e^{-2\int_u^t b(x) dx} du + \frac{\partial f(0, t)}{\partial t} = a^*(t) \end{aligned} \quad (3.27)$$

Aus der Diskussion über die Bestimmung des funktionalen Charakters der Hull/White-Modellparameter zwecks bestmöglicher Wiedergabe der aktuellen Zinsstruktur können für die Lösung des vorliegenden Problems nützliche Erkenntnisse gewonnen werden¹³⁹:

$$a^*(t) = b(t) \frac{\partial A(0, t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 A(0, t)}{\partial t^2} + \left(\frac{\partial C(0, t)}{\partial t} \right)^2 \int_0^t \left(\frac{\sigma(s)}{\partial C(0, s) / \partial s} \right)^2 ds \quad (3.28)$$

$$\text{Mit } A(0, t) = -r(0)C(0, t) - \log B(0, t) = -r(0)C(0, t) + \int_0^t f(0, s) ds \Rightarrow$$

¹³⁸ Vgl. die *Short Rate*-Differentialgleichung (2.44).

¹³⁹ Vgl. Abschnitt 243, insb. Gleichungen (2.57) - (2.60).

$$\frac{\partial A(0,t)}{\partial t} = -r(0) \frac{\partial C(0,t)}{\partial t} + f(0,t), \quad \frac{\partial^2 A(0,t)}{\partial t^2} = -r(0) \frac{\partial^2 C(0,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial f(0,t)}{\partial t} \quad (3.29)$$

Mit $C(0,t) = \int_0^t e^{-\int_0^u b(s) ds} du \Rightarrow \frac{\partial C(0,t)}{\partial t} = e^{-\int_0^t b(s) ds}, \quad \frac{\partial^2 C(0,t)}{\partial t^2} = -b(t) \frac{\partial C(0,t)}{\partial t}$

Das Einsetzen in (3.28) führt direkt zu signifikanter Vereinfachung:

$$a^*(t) = b(t) \left(-r(0) \frac{\partial C(0,t)}{\partial t} + f(0,t) \right) - r(0) \frac{\partial^2 C(0,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial f(0,t)}{\partial t} + \left(\frac{\partial C(0,t)}{\partial t} \right)^2 \int_0^t \left(\frac{\sigma(s)}{\partial C(0,s)/\partial s} \right)^2 ds \Rightarrow \quad (3.30)$$

$$a^*(t) = b(t)f(0,t) + \frac{\partial f(0,t)}{\partial t} + \left(\frac{\partial C(0,t)}{\partial t} \right)^2 \int_0^t \left(\frac{\sigma(s)}{\partial C(0,s)/\partial s} \right)^2 ds$$

Daher genügt es mit Rückgriff auf (3.27), um die gewünschte modellübergreifende Übereinstimmung anschaulich vorzuführen, lediglich Folgendes zu zeigen:

$$\int_0^t \sigma_r(u)^2 e^{-2\int_0^u b(x) dx} du = \left(\frac{\partial C(0,t)}{\partial t} \right)^2 \int_0^t \left(\frac{\sigma(s)}{\partial C(0,s)/\partial s} \right)^2 ds \quad (3.31)$$

Bezugnehmend auf die Definitionen für $C(0,t)$ und dessen Ableitungen in (3.29) kann die geforderte Äquivalenz unmittelbar hergestellt werden:

$$\left(\frac{\partial C(0,t)}{\partial t} \right)^2 \int_0^t \left(\frac{\sigma(u)}{\partial C(0,u)/\partial u} \right)^2 du = e^{-2\int_0^t b(x) dx} \int_0^t \sigma(u)^2 e^{2\int_0^u b(x) dx} du = \int_0^t \sigma(u)^2 e^{-2\int_0^u b(x) dx} du \quad (3.32)$$

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass unter der Restriktion der spezifischen Volatilitätsstruktur auf folgende separierbare Form

$$\sigma_f(t,T) = \sigma_r(t) e^{-\int_t^T b(x) dx}, \quad \sigma_r(t) = \sigma_f(t,t) = \sigma(t)$$

aus der *HJM*-Entwicklung der *Forward Rate Curve*

$$df(t,T) = \left(\sigma_f(t,T) \int_t^T \sigma_f(t,u) du \right) dt + \sigma_f(t,T) dW^*(t)$$

die Dynamik der *Short Rate* nach Maßgabe des Hull/White-Zinsstrukturmodells erwächst:

$$dr(t) = \left(a^*(t) - b(t)r(t) \right) dt + \sigma(t) dW^*(t)$$

34 Das Libor-Marktmodell. Zeitkontinuierliche Deskription der linearer Zinsberechnungskonvention unterliegenden Forward Rates an diskreten, preissensitiven Stützstellen auf der Zinsstrukturkurve

341 Die Genesis der marktkonformen Modellierungstechnik

Trotz seines unverkennbaren Innovationsgehalts als Vorbote des neuen Zeitalters in der Modellierung der Zinsstruktur haften dem allgemeinen *HJM*-Modellrahmen weiterhin gravierende Nachteile an, die ihn in ein von den handelbaren *Plain-Vanilla* Zinsinstrumenten losgelöstes und aus praktischer Sicht schwer implementierbares Werkzeug verwandeln. Bevor die Unzulänglichkeiten der Methodik in gebotener Kürze analysiert und zum Anlass genommen werden, auf eine marktkonforme Modellierungstechnik überzugehen, bedarf es jedoch einer erläuternden Notiz zur Nomenklatur.

Der oben verwendete Begriff “Modellrahmen”¹⁴⁰ ist weder willkürlich noch aus Mangel an synonymen Bezeichnungen so gewählt worden. Faktisch kann es sich um eine nahezu unendliche Vielfalt von Zinsstrukturmodellen innerhalb des *HJM*-Bewertungsparadigmas handeln, die in Abhängigkeit von der genauen Spezifikation der Volatilitätsform und der Korrelationsstruktur zwischen den instantanen *Forward Rates* über finite Zeithorizonte hinweg unterschieden werden. In Anbetracht der diversen Implementierungsversionen, gestützt primär auf die zu modellierende Zustandsvariable (*Forward/Swap Rate*) und die Selektion eines geeigneten *Numeraire* resp. Wahrscheinlichkeitsmaßes zur Bestimmung ihrer Dynamik, hat sich in der finanztheoretischen Gemeinschaft daher auch keine einheitliche Überschrift für die auf diskrete, linear berechnete *Forward Rates* bezogene Vielartigkeit von Gestaltungstechniken herausgebildet. Einigkeit herrscht lediglich über die fundamentale Erkenntnis, dass die arbitragefreie Entwicklung der Zustandsvariablen als eine reine Funktion der Kovarianzelemente¹⁴¹ determinierbar ist. Leicht widersprüchlich wird im weiteren Verlauf der Argumentation, basierend auf der zugrunde liegenden Finanzquantität (*Forward/Swap Rate*), vereinfachend vom *Libor*- bzw. *Swap*-Marktmodell gesprochen, obwohl so ein universales und allgegenwärtiges Konstrukt in Wirklichkeit nicht existiert. Die Konzentration der Modellierungsbemühungen auf eine der beiden Zustandsvariablen hebt allerdings weder das Erfordernis einer gemeinsamen Beschreibung der stochastischen Entfaltung sowohl der Hauptvariablen als auch der in dem gewählten Modellgerüst sekundären Variablen auf, noch lässt sie die Bestrebung nach einer Joint-Kalibrierung überflüssig erscheinen. Als eine erste intuitive Erklärung für die zwingende Notwendigkeit der präzisen Kenntnis beider Märkte, sowohl für *Forward Rate*- als auch *Swap Rate*-abhängige *Plain-Vanilla* Zinsinstrumente, könnte die unmittelbare Erfahrung

¹⁴⁰ Zum allgemeinen Heath-Jarrow-Morton Modellrahmen vgl. ausführlich Abschnitt 33.

¹⁴¹ Dieses zentrale Merkmal wird in den darauf folgenden Ausführungen gründlich elaboriert.

aus der Realität dienen, dass nahezu keine exotischen Zinsprodukte eine Dependenz ausschließlich von einer der beiden Variablen als wertbestimmender Komponente aufweisen.

Mit den ersten nichttrivialen Applikationen der *HJM*-Methodik verlor das angesammelte Wissen über analytische oder numerische Lösungswege für partielle Differentialgleichungen an praktischer Relevanz¹⁴². Darüber hinaus waren die rekombinierenden Binomial-Baumtechniken angesichts des *Non-Markov* Charakters des log-normalen *Forward Rate*-Prozesses ebenso machtlos - ein unglücklicher Umstand, der relativ schnell die *Monte-Carlo*-Simulation als letzte Hoffnung am Horizont aufschimmern ließ. Ursprünglich auf der Basis der instantanen *Forward Rates* entwickelt, wies das *HJM*-Modell die unerwünschte Eigenschaft der mit positiver Wahrscheinlichkeit explodierenden log-normal verteilten Zinssätze auf¹⁴³. Später stellte sich allerdings heraus, dass die modellimplizierte infinite Beschaffenheit der Zustandsvariable in ursächlichem Zusammenhang mit der zugrunde gelegten kontinuierlichen Zinsberechnungskonvention steht. Sobald jedoch die *Forward Rates* durch die Diskretisierung der *Yield Curve* linear ermittelt werden und einen fixierten endlichen Laufzeithorizont erfahren, wird die gefürchtete explosionsartige Entfaltung der Zinssätze abgewendet¹⁴⁴. Außerdem besaß die ursprüngliche *HJM*-Modellvariable

¹⁴² Nicht umsonst werden im Kapitel 2, Abschn. 23 resp. 24, die *Short Rate*-basierten Zinsstrukturmodelle in die Gussform der "neuen Sprache", der Diffusions- und Wahrscheinlichkeitsmaßtheorie, hineingepresst.

¹⁴³ Ausgehend von der Log-Normalverteilung der Zustandsvariable und zu Demonstrationszwecken vereinfachend von zeitdeterministischer Volatilität wird die Dynamik der instantanen *Forward Rate* mit Rückgriff auf (3.16) folgendermaßen beschrieben:

$$df(t, T) = \left(\sigma_f(t, T) \int_t^T \sigma_f(t, u) du \right) dt + \sigma_f(t, T) dW^*(t) \quad \text{und} \quad \sigma_f(t, T) = \sigma(t, T) f(t, T) \Rightarrow$$

$$\frac{df(t, T)}{f(t, T)} = \left(\sigma(t, T) \int_t^T \sigma(t, u) f(t, u) du \right) dt + \sigma(t, T) dW^*(t)$$

Bekanntermaßen lautet die Lösung dieser *SDE*:

$$f(t, T) = f(0, T) e^{\int_0^t \sigma(s, T) \int_s^T \sigma(s, u) f(s, u) du ds - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma(s, T)^2 ds + \int_0^t \sigma(s, T) dW^*(s)}$$

Allerdings stellt die im Exponent enthaltene *Forward Rate* $f(s, u)$ selbst eine Exponentialfunktion dar:

$$f(s, u) = f(0, u) e^{\int_0^s \sigma(v, u) \int_v^u \sigma(v, x) f(v, x) dx dv - \frac{1}{2} \int_0^s \sigma(v, u)^2 dv + \int_0^s \sigma(v, u) dW^*(v)}$$

Als Argument einer Exponentialfunktion selbst bewirkt die Exponentialfunktion durch die sukzessive Substitution der *Forward Rate* in der Erwartung einen unendlichen Akkumulationsfaktor und führt somit die Explosion des Prozesses herbei. Folglich existiert keine finite Lösung für die *Forward Rates* unter dem risikoneutralen Martingalmaß, demnach auch keine unter jedem äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaß. Als Konsequenz daraus ergeben sich Arbitragemöglichkeiten, generiert durch gegen Null konvergierende Bondpreise. Vgl. beispielsweise A. Morton, "A Class of Stochastic Differential Equations Arising in Models for the Evolution of Bond Prices", Technical Report (1988), Cornell University.

¹⁴⁴ Das innere Integral verwandelt sich in sein zeitfinites Pendant, eine Summe über eine endliche Anzahl von diskreten *Forward Rates*. Zur Überwindung dieser Schwierigkeit durch das Verlegen des Augenmerks von den instantanen auf die einfachen, linear berechneten *Forward Rates* vgl. K. Sandmann, D. Sondermann, "On the Stability of Log-Normal Interest Rate Models", Discussion Paper B-263 (1994), University of Bonn.

- die instantane *Forward Rate* - kein direkt dem Markt entnommenes Äquivalent, das sich in den Preisen handelbarer *Plain-Vanilla* Zinsinstrumente widerspiegelte. Dieser fehlende Marktbezug führte zu einer sehr mühsam implementierbaren Kalibrierungstechnik, die im Vergleich zu den *Short Rate*-basierten Zinsmodellen zusätzlich durch die höhere Dimensionalität¹⁴⁵ des *HJM*-Konstrukts belastet wurde.

Im Gegensatz dazu stellen die einfachen *Forward Rates* wegen ihrer unmittelbaren oder mittels Umskalierung¹⁴⁶ erreichbaren Beobachtbarkeit den natürlichen Ausgangspunkt für

¹⁴⁵ Der Leser sei an die *Markov*-Eigenschaft der *Short Rate* erinnert, wohingegen die Aufrechterhaltung dieses Merkmals in der *HJM*-Modellwelt nur zulasten einer augmentierten Menge von Zustandsvariablen erfolgen kann. Unter der Restriktion der Volatilitätsstruktur auf eine separierbare Form gemäß Abschnitt 331 in der Gestalt $\sigma_f(t, T) = \sigma_r(t) e^{-b(T-t)}$, wobei $\sigma_r(t)$ eine sowohl deterministische als auch stochastische Definition zulässt, wird eine zweidimensionale *Markovian* Darstellung erreicht, in der *Short Rate* selbst und in einer weiteren Zustandsvariable $\beta(0, t) = \int_0^t \sigma_r(u)^2 e^{-2 \int_u^t b(x) dx} du$, die die Pfadabhängigkeit erfasst. Vgl. Anlage 4.

¹⁴⁶ Caplets notieren meistens auf Drei- oder Sechsmonats-*Forward Libor Rates* im Gegensatz zu *Swap Rates*, deren kürzeste Laufzeit üblicherweise ein Jahr beträgt. Zwecks Sicherstellung der Vergleichbarkeit bei einer Joint-Kalibrierung kann mittels folgender einfacher Umformung in der gebräuchlichen Schreibweise die Zwölfmonats-*Forward Libor Rate* ermittelt werden:

$$1 + \delta_{12M} L^{12M}(t, T_j, T_j + \delta_{12M}) = \left[1 + \delta_{6M} L^{6M}(t, T_j, T_j + \delta_{6M}) \right] \left[1 + \delta_{6M} L^{6M}(t, T_j + \delta_{6M}, T_j + \delta_{12M}) \right]$$

Mit Blick auf die Determinierung der quadratischen Variation liefert die direkte Anwendung vom *Ito's Lemma* auf die Dynamik der Modellvariablen auf beiden Seiten der Gleichung einen Ausdruck für die instantane Volatilität der gesuchten Zwölfmonats-*Forward Libor Rate* als Funktion der instantanen Volatilitäten der beiden Sechsmonats-*Forward Libor Rates* und deren Korrelation. Ausgehend von der jeweiligen *SDE* unter dem entsprechenden *Forward Rate*-spezifischen Martingalmaß

Mit $L_{T_j}^{6M, 12M}(t) = L(t, T_j, T_j + \delta_{6M, 12M})$ und $T_{j+1} = T_j + \delta_{6M}$

$$\frac{dL_{T_j}^{12M}(t)}{L_{T_j}^{12M}(t)} = \Sigma_{T_j}^{12M}(t) dW_{T_j}^{12M}(t), \quad \frac{dL_{T_j}^{6M}(t)}{L_{T_j}^{6M}(t)} = \Sigma_{T_j}^{6M}(t) dW_{T_j}^{6M}(t), \quad \frac{dL_{T_{j+1}}^{6M}(t)}{L_{T_{j+1}}^{6M}(t)} = \Sigma_{T_{j+1}}^{6M}(t) dW_{T_{j+1}}^{6M}(t)$$

erhält man nach beiderseitiger Differentiation:

$$\begin{aligned} \delta_{12M} dL_{T_j}^{12M}(t) &= \delta_{6M} dL_{T_j}^{6M}(t) + \delta_{6M} dL_{T_{j+1}}^{6M}(t) + \delta_{6M}^2 L_{T_j}^{6M}(t) dL_{T_{j+1}}^{6M}(t) + \delta_{6M}^2 L_{T_{j+1}}^{6M}(t) dL_{T_j}^{6M}(t) \Rightarrow \\ \delta_{12M} \Sigma_{T_j}^{12M}(t) L_{T_j}^{12M}(t) dW_{T_j}^{12M}(t) &= \delta_{6M} \Sigma_{T_j}^{6M}(t) L_{T_j}^{6M}(t) dW_{T_j}^{6M}(t) + \delta_{6M} \Sigma_{T_{j+1}}^{6M}(t) L_{T_{j+1}}^{6M}(t) dW_{T_{j+1}}^{6M}(t) + \\ \delta_{6M}^2 L_{T_j}^{6M}(t) L_{T_{j+1}}^{6M}(t) \Sigma_{T_{j+1}}^{6M}(t) dW_{T_{j+1}}^{6M}(t) &+ \delta_{6M}^2 L_{T_j}^{6M}(t) L_{T_{j+1}}^{6M}(t) \Sigma_{T_j}^{6M}(t) dW_{T_j}^{6M}(t) \Rightarrow \\ \delta_{12M} \Sigma_{T_j}^{12M}(t) L_{T_j}^{12M}(t) dW_{T_j}^{12M}(t) &= \left[\delta_{6M} L_{T_j}^{6M}(t) + \delta_{6M}^2 L_{T_j}^{6M}(t) L_{T_{j+1}}^{6M}(t) \right] \Sigma_{T_j}^{6M}(t) dW_{T_j}^{6M}(t) + \\ &\quad \left[\delta_{6M} L_{T_{j+1}}^{6M}(t) + \delta_{6M}^2 L_{T_j}^{6M}(t) L_{T_{j+1}}^{6M}(t) \right] \Sigma_{T_{j+1}}^{6M}(t) dW_{T_{j+1}}^{6M}(t) \end{aligned}$$

Der Prozess für die quadratische Variation der Zwölfmonats-*Forward Libor Rate* lautet folgendermaßen:

$$d\langle L_{T_j}^{12M}, L_{T_j}^{12M} \rangle(t) = \left[\left(\Sigma_{T_j}^{6M}(t) \right)^2 \left(f(L_{T_j}^{6M}, L_{T_{j+1}}^{6M}) \right)^2 + \left(\Sigma_{T_{j+1}}^{6M}(t) \right)^2 \left(g(L_{T_j}^{6M}, L_{T_{j+1}}^{6M}) \right)^2 + \right. \\ \left. 2 \Sigma_{T_j}^{6M}(t) \Sigma_{T_{j+1}}^{6M}(t) f(L_{T_j}^{6M}, L_{T_{j+1}}^{6M}) g(L_{T_j}^{6M}, L_{T_{j+1}}^{6M}) \rho_{T_j, T_{j+1}}(t) \right] dt$$

mit $f(L_{T_j}^{6M}, L_{T_{j+1}}^{6M}) = \delta_{6M} L_{T_j}^{6M}(t) + \delta_{6M}^2 L_{T_j}^{6M}(t) L_{T_{j+1}}^{6M}(t)$, $g(L_{T_j}^{6M}, L_{T_{j+1}}^{6M}) = \delta_{6M} L_{T_{j+1}}^{6M}(t) + \delta_{6M}^2 L_{T_j}^{6M}(t) L_{T_{j+1}}^{6M}(t)$

und $d\langle W_{T_j}^{6M}, W_{T_{j+1}}^{6M} \rangle(t) = \rho_{T_j, T_{j+1}}(t) dt$

Andererseits gilt natürlich:

$$d\langle L_{T_j}^{12M}, L_{T_j}^{12M} \rangle(t) = \left(\Sigma_{T_j}^{12M}(t) \right)^2 \left(L_{T_j}^{12M}(t) \right)^2 dt \Rightarrow$$

die modellhaften Überlegungen dar. Zum ersten Mal in der Geschichte der Pricing-Theorie gelang es, auf der Basis eines uniformen *Numeraire* Modellpreise für eine Reihe von Caplets simultan zu bestimmen, die präzise marktkonform waren und darüber hinaus die gleichzeitige Bewertung von komplexeren *Libor*-Instrumenten in einer in sich unwidersprüchlichen Weise unter einem einheitlichen Wahrscheinlichkeitsmaß ermöglichten. Von konstruktionstechnischem Gesichtspunkt aus betrachtet, konnten die diesem frühen Entwicklungsstadium innewohnenden exotischen Zinsprodukte auf einmal modellkonsistent bewertet werden und zusätzlich dazu unter korrekter Determinierung der impliziten Preise für das zugrunde liegende *Underlying* (Caplets/Swaptions), die nicht nach der Durchführung einer bedenklichen Kalibrierungsprozedur für die Modellparameter ermittelt worden waren, sondern explizit als Inputfaktoren in das Konstrukt inkorporiert wurden.

Gebührende Beachtung verdienen die Forschungsarbeiten¹⁴⁷ der Wissenschaftler, die das Fundament für den modernen Bewertungsansatz legten und deren wichtigster Beitrag in der innovativen Erkenntnis bestand, dass jede zeitdiskrete Implementierung des *HJM*-Gefüges vollständig und eindeutig durch die instantane Volatilität und die instantane Korrelation von bzw. zwischen den einfachen *Forward Rates* festgelegt wird. Als gemeinsames Merkmal dieser Marktmodelle zeichnete sich in erster Linie die einheitliche Zustandsvariable ab, die ausfallrisikofreie *Forward Libor Rate*. Die Entwicklungen in den letzten Jahren brachten jedoch die theoretisch untermauerten Versuche hervor, die Gestaltungstechniken für den Zinsprozess auf ausfallrisikobehaftete *Forward Libor Rates* zu erwei-

$$\begin{aligned} \left(\Sigma_{T_j}^{12M}(t)\right)^2 &= \left(\Sigma_{T_j}^{6M}(t)\right)^2 \left(\frac{f(L_{T_j}^{6M}, L_{T_{j+1}}^{6M})}{L_{T_j}^{12M}(t)}\right)^2 + \left(\Sigma_{T_{j+1}}^{6M}(t)\right)^2 \left(\frac{g(L_{T_j}^{6M}, L_{T_{j+1}}^{6M})}{L_{T_j}^{12M}(t)}\right)^2 + \\ &\quad 2\Sigma_{T_j}^{6M}(t)\Sigma_{T_{j+1}}^{6M}(t) \frac{f(L_{T_j}^{6M}, L_{T_{j+1}}^{6M})g(L_{T_j}^{6M}, L_{T_{j+1}}^{6M})}{\left(L_{T_j}^{12M}(t)\right)^2} \rho_{T_j, T_{j+1}}(t) \\ \left(\sigma_{Black}^{12M}(T_j)\right)^2 &= (T_j - t)^{-1} \int_t^{T_j} \left(\Sigma_{T_j}^{12M}(s)\right)^2 ds \end{aligned}$$

Somit besteht eine direkte Verbindung zwischen der *Black*-Volatilität für Zwölfmonats-Caplets mit Verfallszeitpunkt T_j , die Kenntnis über deren Ausprägung im Rahmen einer Joint-Kalibrierung unerlässlich sein wird, und den instantanen Volatilitäten der beiden Sechsmonats-*Forward Libor Rates*. Der Leser sei bereits in diesem frühen Stadium der Diskussion auf den stochastischen Charakter von $\left(\sigma_{Black}^{12M}(T_j)\right)^2$ als der zukünftigen Realisation des *Forward Libor Rate*-Prozesses hingewiesen. Auf effektive Approximationstechniken zur Überwindung dieser theoretischen Schwierigkeit wird an geeigneter Stelle später näher eingegangen.

¹⁴⁷ Vgl. (1) A. Brace, D. Gatarek, M. Musiela, "The Market Model of Interest Rate Dynamics", *Mathematical Finance* 7 (1997), S. 127-147. (2) F. Jamshidian, "Libor and Swap Market Models and Measures", *Finance and Stochastics* 1 4 (1997), S. 293-330. (3) K. Miltersen, K. Sandmann, D. Sondermann, "Closed Form Solutions for Term Structure Derivatives with Log-Normal Interest Rates", *Journal of Finance* 52 (1997), S. 409-430. (4) M. Musiela, M. Rutkowski, "Continuous-Time Term Structure Models: Forward-Measure Approach", *Finance and Stochastics* 1 4 (1997), S. 261-292.

tern. Es wurde ein neues *Forward*-Ausfallwahrscheinlichkeitsmaß kreiert, das als das herkömmliche *Forward*-Martingalmaß bedingt auf das Überleben des zugrunde liegenden *Numeraire* - eines ausfallrisikobehafteten Bonds - bis zur Fälligkeit angesehen werden konnte. Einen nachteiligen Nebeneffekt entfaltete allerdings die Existenz von Ereignissen, die mit einer streng positiven Wahrscheinlichkeit unter dem traditionellen *Forward*-Martingalmaß versehen waren, wohingegen sie gleichzeitig eine Wahrscheinlichkeit von Null unter dem *Forward*-Ausfallmartingalmaß aufwiesen. Ungeachtet des wünschenswerten handelbaren Charakters des Diskontierungsfaktors¹⁴⁸, ergab sich indessen aus der ausfallrisikobehafteten Beschaffenheit des *Numeraire* die unerwünschte Eigenschaft der in den meisten Fällen mangelnden beiderseitigen Äquivalenz der Martingalmaße¹⁴⁹. Alternativ zu dieser Methode wurde vor kurzer Zeit die Definition eines abgewandelten *Deflator* in Erwägung gezogen, der bedingt durch die fehlende Indikatorfunktion immer positive Werte annahm und ein jedenfalls zum risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß äquivalentes Martingalmaß implizierte. Auf der gegenseitigen absoluten Stetigkeit der Wahrscheinlichkeitsmaße beruhend, konnte somit die Ähnlichkeit zur klassischen arbitragefreien Bewertung von Zinsderivaten aufrechterhalten werden, obwohl das *Numeraire* streng genommen nicht länger ein handelbares Wertpapier darstellte¹⁵⁰.

Trotz der beabsichtigten Schwerpunktsetzung der vorliegenden Arbeit auf ausfallrisikofreie Marktmodelle, wird diese kurze Diskussion über ausfallrisikobehaftete Zustandsvariablen im Hinblick auf die existierende *Trade-Off*-Beziehung zwischen der Handelbarkeit, jedoch zulasten des möglichen Ausfalls des *Numeraire*, einerseits und der Gewährleistung eines in jedem Szenario positiven *Deflator*, allerdings unter Inkaufnahme dessen mangelnder Handelbarkeit, andererseits als überaus instruktiv erachtet. Gleichermaßen bahnt sich eine ähnliche Austauschrelation in der ausfallrisikofreien Modellwelt an, die bezüglich des jeweiligen Problemfelds zwar unterschiedliche Formen annehmen wird, derer sich der Leser jedoch unterschwellig immer bewusst sein sollte. In Wirklichkeit kann die modellinhärente Reproduktion der beobachtbaren Marktpreise von den zugrunde liegenden *Plain-Vanilla* Zinsinstrumenten, die sich in den *Short Rate*-basierten Modellen der ersten und zweiten Generation und im Rahmen der *HJM*-Methodik als extrem beschwerlich herausstellte, jetzt mit alarmierender Leichtigkeit und in vielfältiger Art und Weise in Abhängig-

¹⁴⁸ Vgl. dazu (1) P. J. Schönbucher, "A Libor Market Model with Default Risk", Working Paper (2000), University of Bonn. (2) P. J. Schönbucher, "A Measure of Survival", RISK August (2004), S. 79-85.

¹⁴⁹ Im Grunde repräsentiert der ausfallrisikobehaftete Bond kein zulässiges *Numeraire*.

¹⁵⁰ Vgl. dazu (1) D. Brigo, "Candidate Market Models and the Calibrated CIR++ Stochastic Intensity Model for CDS Options and Callable Floaters", In Proceedings of the 4th ICS Conference, Tokyo (2004). (2) D. Brigo, "Market Models for CDS Options and Callable Floaters", RISK January (2005), S. 89-94.

keit von der spezifischen Selektion der instantanen Volatilitäts- und Korrelationsstruktur¹⁵¹ unter den nahezu unendlich vielen möglichen Funktionsformen erreicht werden. Unglücklicherweise stehen gerade diese überreichlichen Auswahloptionen in ursächlichem Zusammenhang mit der erstaunlichen Fülle von Verhaltensmustern, die für die zu modellierende Zustandsvariable durch verhältnismäßig einfache marktkonsistente Kovarianzfunktionen erzeugt werden können. Infolge dieses breiten Wahlspektrums werden zwar stets die gleichen und korrekten Preise für das zugrunde liegende *Underlying* impliziert, allerdings jedes Mal substantiell unterschiedliche Werte für die exotischen Zinsprodukte generiert. Darüber hinaus kann eine nicht hinreichend umsichtig durchgeführte Kalibrierungsroutine auf der Basis eines willkürlich zusammengefügt Kovarianzgebildes aus finanzieller Sicht äußerst unattraktive oder geradezu pathologische Entwicklungen für die Korrelationsmatrix der betrachteten Finanzquantität *Forward Rate/Swap Rate* hervorrufen. Zwingend erforderlich wird aus diesem Grund die Auferlegung starker Struktureinschränkungen, die unter Aufrechterhaltung der effektiven und schnellen Marktpreisanpassungsfähigkeit die überzähligen Freiheitsgrade in transparenter Weise erheblich verringern können. Diesem Reduktionsprinzip folgend, wird unter dem finanztheoretischen Blickwinkel eine gerechtfertigte Schwankungsfunktion vorgeschlagen, die intuitiv die Erwartungshaltung über die zeitabhängige, deterministische Evolution der instantanen Volatilität zum Ausdruck bringt und zugleich flexibel genug ist, um die marktdeduzierte *Black-Volatilitätsstruktur* ohne die Notwendigkeit einer Schätzung von schwer zu kalibrierenden Parametern wie der *Mean Reversion Rate* oder der Volatilität der *Short Rate* zu reproduzieren. Zugegebenermaßen ist auch die instantane Volatilitätsfunktion nicht direkt beobachtbar, allerdings wird sie anhand der anvisierten Übersetzungsvorschrift mittels eines transparenten Mechanismus in eine unmittelbar aus dem Markt extrahierte Größe – die *Black-Volatilität* – überführt. Der angedrohte *Trade-Off*, der ausnahmslos auch diesem Problem-bereich immanent ist, zeichnet sich durch die anstehende Entscheidung über die Anzahl der beizubehaltenden Frequenzen in der *Fourier*-Analyse der einzigen rein zeitabhängigen Funktion in der empfohlenen instantanen Volatilitätsstruktur aus¹⁵².

Dank seiner flexiblen Beschaffenheit bezüglich der zugrunde liegenden Zustandsvariable, äquivalent in diskreten *Forward Rates* oder *Swap Rates* ausgedrückt werden zu können, stellt der moderne Modellierungsansatz das perfekte Werkzeug zur Erforschung der Kongruenz zwischen den beiden *Plain-Vanilla* Referenzoptionmärkten (Caplets/Swaptions)

¹⁵¹ bzw. in Abhängigkeit von Integralen über deterministische Kovarianzelemente, da im Rahmen des Standard-Marktmodells die instantane Volatilität und Korrelation als Funktionen der Zeit gestaltet werden.

¹⁵² Im Laufe der weiteren Ausführungen wird dieser kritische Punkt an geeigneter Stelle detailliert erläutert.

dar. Da die meisten komplexen exotischen Zinsprodukte *Hedge*-Positionen in *Underlyings* sowohl aus dem einen als auch aus dem anderen Markt erfordern¹⁵³, ist die Untersuchung der Implikationen einer *Forward Rate*-basierten Implementierung für die Swaption Matrix und umgekehrt¹⁵⁴ dringend angeraten. Unabänderlich sieht sich der Modellanwender dem *Trade-Off* zwischen einer besseren globalen Anpassung der *Forward Rate/Forward Rate* Kovarianzmatrix, wünschenswerten *Forward Rate/Forward Rate* und dadurch implizierten *Swap Rate/Swap Rate* Korrelationsformen, jedoch zulasten der perfekten Nachbildung der *Black*-Volatilitätsstruktur, einerseits und der exakten Reproduktion der extrahierbaren Marktvolatilitäten, allerdings unter Inkaufnahme einer mangelhaften Kalibrierung des gesamten *Forward Rate/Forward Rate* Kovarianzgebildes und auf Kosten unplausibler, beinahe pathologischer *Forward Rate/Forward Rate* bzw. daraus erwachsender *Swap Rate/Swap Rate* Korrelationsfunktionen, andererseits ausgesetzt. Erwartungsgemäß stellt sich das gleiche Austauschphänomen in ähnlicher Art und Weise bei einer forcierten Joint-Kalibrierung ein, die ohnehin sogar unter Hinnahme aller damit einhergehenden Nachteile nur approximativ, jedoch recht genau, erreicht wird¹⁵⁵.

342 Das Grundgerüst des Libor-Marktmodells in einer multifaktoriellen Konstruktionsumgebung

Betrachtet sei der Laufzeithorizont $[0, T^{\max}]$ und die dazu gehörende diskrete¹⁵⁶ Menge von Zeitpunkten $\{T_i, i \in [0, n], T_n \leq T^{\max}\}$. Des Weiteren werden paarweise Kombinationen von *Reset*- und *Payout*-Zeiten $(T_i, T_{i+1}), i \geq 0$, für die Gesamtheit umspannender *Forward Rates* festgelegt, denen folgende Tenorstruktur¹⁵⁷ $\alpha_i = T_{i+1} - T_i$ zugrunde liegt. Die einfache, der linearen Zinsberechnungskonvention unterliegende *Forward Rate*¹⁵⁸ lässt sich folgendermaßen definieren:

$$1 + \alpha_i f_i(t) = \frac{B(t, T_i)}{B(t, T_{i+1})} \Rightarrow f_i(t) = \frac{B(t, T_i) - B(t, T_{i+1})}{\alpha_i B(t, T_{i+1})}, \text{ mit } f_i(t) = f(t, T_i, T_{i+1}) \quad (3.33)$$

¹⁵³ Bedingt durch die spezifische Natur des jeweiligen exotischen Zinsprodukts wird abwechselnd mehr Wert auf die perfekte Reproduktion der *Forward Rate* oder *Swap Rate* Volatilität gelegt, obwohl Situationen durchaus denkbar wären, bei denen allein die Korrelation zwischen den beiden zugrunde liegenden Zustandsvariablen die entscheidende Rolle übernimmt.

¹⁵⁴ Alternativ sind die Konsequenzen für die Caplet-Volatilitätsstruktur aus einer *Swap Rate*-fundierten Applikation der Methodik zu erforschen.

¹⁵⁵ Dies ist ein erster Hinweis auf die eventuelle Kontraproduktivität einer um jeden Preis erzwungenen simultanen Kalibrierung an beide *Plain-Vanilla* Optionsmärkte.

¹⁵⁶ Diskretisiert wird an dieser Stelle das Kontinuum der Fälligkeiten.

¹⁵⁷ Gemeint sind die diskreten Stützstellen $\{T_i, i \in [0, n], T_n \leq T^{\max}\}$ auf der Zinsstrukturkurve, für die im Weiteren äquivalent auch der Begriff Periodenstruktur verwendet wird. Der Bruchteil eines vollen Jahres α_i bezeichnet den Tenor der *Forward Rate*.

¹⁵⁸ Duplikationstheoretisch wird die *Forward Rate* als der gleichgewichtige Strike ermittelt, der einen Wert für den entsprechenden *FRA* beim Abschluss (d. h. vor Fälligkeit) des Geschäfts in Höhe von Null erzwingt.

Von der Evolution der *Forward Rates* unter dem risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß und dem Geldmarktkonto als *Numeraire* wird im Folgenden primär aus zweierlei Gründen abgesehen. Unter diesem Wahrscheinlichkeitsmaß ist keine der zu entwickelnden *Forward Rates* log-normal verteilt. Unabänderlich erzwingt die Notwendigkeit der Erzielung einer Martingaldynamik, um unter anderem Caplets bzw. Swaptions im Einklang mit der *Black-Formel* bewerten zu können, den Wechsel auf ein *Forward*-Wahrscheinlichkeitsmaß, das mit der *Payout*-Zeit der jeweiligen *Forward Rate* korrespondiert. Außerdem konstituiert das *Forward*-Martingalmaß ohnehin den natürlichen Modellierungsrahmen zum Pricing von Cap- und/oder Swaption-basierten Derivaten, die das Fundament des Marktes für exotische Zinsprodukte gelegt haben. Allerdings wird vordergründig als besonders instruktiv erachtet, zuerst im Allgemeinen¹⁵⁹ die möglichen Formulierungen der *SDEs* für die Entfaltung der *Forward Rates* vorzustellen, bevor anschließend die durch das entsprechende *Forward*-Wahrscheinlichkeitsmaß implizierte arbitragefreie Driftfunktion hergeleitet wird.

3421 Drei äquivalente Deskriptionen der Forward Rate-Dynamik¹⁶⁰

Ausgedrückt in der vertrauten Matrix-Schreibweise lässt sich die Struktur der *Forward Rate*-Dynamik bezüglich eines später näher zu spezifizierenden Wahrscheinlichkeitsmaßes folgendermaßen darstellen:

$$\frac{df(t)}{f(t)} = \mu(f, t)dt + \Sigma(t)dW^Q(t) \quad (3.34)$$

mit:

$f(t) \square [n \times 1]$ *Forward Rate*-Spaltenvektor;

$\mu(f, t) \square [n \times 1]$ Spaltenvektor der Drifts, die sowohl zeitabhängig als auch eine Funktion der *Forward Rates* selbst sein können;

$dW^Q(t) \square [n \times 1]$ Spaltenvektor der korrelierten Standard-*Brownschen* Bewegungen unter dem bewertungsrelevanten Wahrscheinlichkeitsmaß Q , das durch das gewählte *Numeraire* definiert wird. Die einzelnen *Brownschen* Bewegungen hängen über die $[n \times n]$ symmetrische instantane Korrelationsmatrix $dW^Q(t)(dW^Q(t))^T = \rho dt$ miteinander zusammen;

$\Sigma(t) \square [n \times n]$ Diagonalmatrix, wobei jedes Element σ_i die instantane Volatilität der jewei-

¹⁵⁹ Die Drifts, die sowohl zeit- als auch zustandsabhängig sein können, werden vorläufig außer Acht gelassen.

¹⁶⁰ In Anlehnung an R. Rebonato, "Modern Pricing of Interest-Rate Derivatives: The Libor Market Model and Beyond", Princeton University Press (2002), p. 66-72.

ligen *Forward Rate* $f_i(t)$ bezeichnet. Falls die Korrelationsmatrix $\rho_{i,j}$, $i, j = \overline{1, n}$ einen vollen Rang aufweist, determinieren die Gleichungen in (3.34) die Entfaltung der Zinsstruktur mit einer Menge von dahinter stehenden Faktoren gleich der Anzahl der einzelnen *Forward Rates*, die in diesem Fall mittels ihrer eigenen *Brownschen* Bewegung modelliert werden. Von essentieller Bedeutung für die nachfolgend zu entwickelnde Kalibrierungsprozedur ist die Verbindung zwischen der zeitabhängigen instantanen Volatilitätsfunktion der *Forward Rate* mit *Reset*-Zeitpunkt T_i und ihrer impliziten *Black*-Volatilität¹⁶¹:

$$\sigma_{Black}^2(T_i)T_i = \int_0^{T_i} \sigma_i^2(u)du \quad (3.35)$$

Die Dynamik-Deskription (3.34) stellt zusammen mit der begleitenden, verknüpfungsherstellenden Gleichung (3.35) und der Korrelationsstruktur $\rho_{i,j}$ die transparenteste Beschreibung jeder *Forward Rate* in einer *Black*-ähnlichen Welt dar.

Oft ist die Entwicklung der ganzheitlichen Zinsstruktur anhand unabhängiger *Brownscher* Bewegungen unter expliziter Spezifikation der Auswirkung der separaten *Brownschen* Schocks auf jede einzelne *Forward Rate* zweckmäßiger:

$$\frac{df(t)}{f(t)} = \mu(f, t)dt + \sigma(t)dZ^Q(t) \quad (3.36)$$

mit:

$dZ(t) \square [m \times 1]$ Spaltenvektor der zueinander orthogonalen *Brownschen* Inkremente;

$\sigma(t) \square [n \times m]$ reelle Matrix, deren (i,j) -Element $\sigma_{i,j}(t)$ ausdrücklich die Reaktion der *Forward Rate* $f_i(t)$ auf die Deformation (Änderung der Steigung und/oder Konvexität) der Zinsstrukturkurve durch den Zuwachs des Unsicherheitsfaktors $dZ_j^Q(t)$ hervorhebt.

Aufgrund der Orthogonalität der *Brownschen* Inkremente lässt sich das (i,j) -Element der Kovarianzstruktur unmittelbar ermitteln:

$$\begin{aligned} Cov(f_i, f_j) &= E \left[\frac{df_i}{f_i} \frac{df_j}{f_j} \right] = E \left[\left(\mu_i dt + \sum_{k=1}^m \sigma_{ik} dZ_k \right) \left(\mu_j dt + \sum_{k=1}^m \sigma_{jk} dZ_k \right)^T \right] \\ &= \sum_{k=1}^m \sigma_{ik} dZ_k \left(\sum_{k=1}^m \sigma_{jk} dZ_k \right)^T = \sum_{k=1}^m \sigma_{ik} (\sigma_{jk})^T dt, \quad \text{mit } dZdt = 0, \end{aligned}$$

¹⁶¹ Die Beziehung ergibt sich aus der wohlbekanntenen Bewertungsformel für Zinsoptionen. Vgl. F. Black, "The Pricing of Commodity Contracts", Journal of Financial Economics 3 (March 1976), S. 167-79.

$$\begin{aligned}
dt dt = 0, \quad dZ_i dZ_j = \delta_{ij} dt, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases} \quad \text{und } i, j = \overline{1, n}, \quad m \leq n \\
\Rightarrow \text{Cov} \left(\underbrace{\frac{df(t)}{f(t)}}_{[n \times 1]} \underbrace{\left(\frac{df(t)}{f(t)} \right)^T}_{[1 \times n]} \right) = \underbrace{\sigma(t) (\sigma(t))^T}_{[n \times m][m \times n]}
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Bedingt durch die geringere Anzahl der unabhängigen Faktoren, besitzt die reelle und symmetrische Kovarianzmatrix einen entsprechend niedrigeren Rang m , mit der Konsequenz, dass man bei ihrer Orthogonalisierung nicht mehr als m unterschiedliche Eigenwerte erhält, die ungleich Null sind. Nur für den Fall der Gleichheit $m=n$ weist sie einen vollen Rang auf und allein unter dieser Voraussetzung ist die Dynamik-Deskription (3.34) - (3.35) äquivalent zu (3.36). Andernfalls resultiert eine Modell-Kovarianzmatrix, deren Korrelationsstruktur sich von der exogenen, marktbeobachtbaren Korrelation aufgrund der eingeschränkten Dimensionierung unterscheidet. Mit erneutem Bezug auf die Orthogonalität der *Brownschen* Inkremente $dZ(t)$, kann sowohl die Verbindung zwischen den Elementen der Matrizen $\Sigma(t)$ und $\sigma(t)$ als auch deren Verknüpfung mit der impliziten *Black*-Volatilität hergestellt werden:

$$\sigma_i^2(t) = \sum_{k=1}^m \sigma_{ik}^2(t) \Rightarrow \sigma_{Black}^2(T_i) T_i = \int_0^{T_i} \sigma_i^2(u) du = \int_0^{T_i} \sum_{k=1}^m \sigma_{ik}^2(u) du \tag{3.38}$$

Eine weitere nützliche Dekomposition der Ladungen der unabhängigen Sicherheitsfaktoren auf die einzelnen *Forward Rates*, die für die separate Darstellung der Korrelationsmatrix sorgt, erreicht man mit Hilfe von (3.38):

$$\begin{aligned}
\frac{df_i(t)}{f_i(t)} &= \mu_i dt + \sum_{k=1}^m \sigma_{ik} dZ_k = \mu_i dt + \sigma_i \sum_{k=1}^m \frac{\sigma_{ik}}{\sigma_i} dZ_k = \mu_i dt + \sigma_i \sum_{k=1}^m \frac{\sigma_{ik}}{\sqrt{\sum_{k=1}^m \sigma_{ik}^2}} dZ_k \\
&= \mu_i dt + \sigma_i \sum_{k=1}^m b_{ik} dZ_k, \quad \underbrace{b_{ik}}_{[n \times m]} = \frac{\sigma_{ik}}{\sqrt{\sum_{k=1}^m \sigma_{ik}^2}}
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Mit Bezug auf (3.37) lässt sich das (i,j) -Element der Korrelationsmatrix direkt ermitteln:

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(f_i, f_j) &= E \left[\frac{df_i}{f_i} \frac{df_j}{f_j} \right] = \sigma_i \sum_{k=1}^m b_{ik} dZ_k \left(\sigma_j \sum_{k=1}^m b_{jk} dZ_k \right)^T = \sigma_i \sum_{k=1}^m b_{ik} (b_{jk})^T \sigma_j dt \\
\Rightarrow \rho_{ij} &= \sum_{k=1}^m b_{ik} (b_{jk})^T
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Cov} \left(\underbrace{\frac{df(t)}{f(t)} \left(\frac{df(t)}{f(t)} \right)^T}_{[n \times 1][1 \times n]} \right) = \underbrace{\sigma(t) b(b)^T (\sigma(t))^T}_{[n \times n][n \times m][m \times n][n \times n]} \Rightarrow \rho = b(b)^T \quad (3.40)$$

Folglich wird durch die Dynamik-Deskription (3.39) die Reaktion der *Forward Rate* $f_i(t)$ auf die orthogonalen *Brownschen* Schocks in zwei distinkte Bestandteile zerlegt – einerseits in die instantane Volatilitätsfunktion $\sigma_i(t)$, die den totalen Volatilitätslevel der *Forward Rate* angibt, und andererseits in die Korrelationskomponente $\{b_{ik}\}_{k=1}^{m \square n}$. Falls weniger Faktoren als zu modellierende *Forward Rates* verwendet werden, muss die Norm aller Zeilenvektoren $\{b_i\}_{i=1}^n$ 1 sein, um die instantane Volatilitätsstruktur exakt wiederzugeben:

$$\sigma_i^2 \left(\sum_{k=1}^m b_{ik} dZ_k \right)^2 = \sigma_i^2 \sum_{k=1}^m b_{ik}^2 dt = \sigma_i^2 dt \Rightarrow \sum_{k=1}^m b_{ik}^2 = 1 \quad (3.41)$$

Wenn die instantane Volatilitätsfunktion zusätzlich dazu so kalibriert worden ist, dass sie gemäß (3.35) die korrekte mittlere Quadratwurzel aufweist, ist die Replizierung der Marktpreise von Caplets entsprechender Fälligkeit sichergestellt. Da für den Fall $m \square n$ die Modell-Korrelationsmatrix die von außen vorgegebene Markt-Korrelationsform nicht genau nachbilden kann, wird stets eine optimale Reproduktion¹⁶² der exogenen Struktur unter der Bedingung (3.41) angestrebt.

3422 Die Spezifizierung der arbitragefreien Driftfunktion unter dem terminalen Forward-Wahrscheinlichkeitsmaß

Als Ausgangspunkt der Analyse zur Herleitung der arbitragefreien Drift von *Forward Rates* sei das äquivalente Martingalmaß Q^{n+1} betrachtet, das mit dem am längsten laufenden Bond $B(t, T_{n+1})$ assoziiert wird. Mit Rückgriff auf Definition (3.33) stellt das Produkt aus der *Forward Rate* und dem länger laufenden Bond, das durch den Kauf des kurzen und den Verkauf des langen Bonds dupliziert werden kann, ein handelbares Wertpapier dar und folgt demnach bezogen auf das *Numeraire*, dessen Fälligkeit mit der *Payout*-Zeit der jeweiligen *Forward Rate* übereinstimmt, einem Martingal. Aufgrund dessen weist unter dem terminalen *Forward*-Wahrscheinlichkeitsmaß die letzte *Forward Rate* keine Drift auf:

$$f_n(t) B(t, T_{n+1}) = \frac{B(t, T_n) - B(t, T_{n+1})}{\alpha_n} \Rightarrow \frac{df_n(t)}{f_n(t)} = \sigma_n(t) \sum_{k=1}^m b_{nk} dW_k^{Q_{n+1}}(t) \quad (3.42)^{163}$$

¹⁶² Abhängig vom zu bewertenden Zinsprodukt kann entweder auf die möglichst exakte globale Reproduktion, oder auch nur auf die Wiedergabe bestimmter Bereiche der Korrelationsstruktur abgestellt werden.

¹⁶³ Überall bezeichnen dW_k orthogonal zueinander geordnete *Brownsche* Inkremente.

Folglich stellt jede einzelne *Forward Rate* unter ihrem eigenen Wahrscheinlichkeitsmaß jeweils ein Martingal dar, allerdings ist unter dem einheitlichen terminalen Wahrscheinlichkeitsmaß keine mehr driftlos. Die Definition des äquivalenten Martingalmaßes erfolgt mit Hilfe des *Radon-Nikodym-Derivative (RND)*:

$$\frac{dQ^n}{dQ^{n+1}} = \eta(t) | F_0 = \frac{B(t, T_n) / B(0, T_n)}{B(t, T_{n+1}) / B(0, T_{n+1})} = \frac{B(0, T_{n+1})}{B(0, T_n)} [1 + \alpha_n f_n(t)] \quad (3.43)$$

Bezugnehmend auf die *SDE* von $f_n(t)$ unter Q^{n+1} , liefert die Anwendung von *Ito's Lemma* direkt die Martingal-Dynamik von $\eta(t)$:

$$\begin{aligned} d\eta(t) &= \frac{B(0, T_{n+1})}{B(0, T_n)} \alpha_n df_n(t) = \frac{B(0, T_{n+1})}{B(0, T_n)} \alpha_n f_n(t) \sigma_n(t) \sum_{k=1}^m b_{nk} dW_k^{Q_{n+1}}(t) \Rightarrow \\ d\eta(t) &= \frac{\alpha_n f_n(t)}{1 + \alpha_n f_n(t)} \sigma_n(t) \eta(t) \sum_{k=1}^m b_{nk} dW_k^{Q_{n+1}}(t) \end{aligned} \quad (3.44)$$

Um den Maßwechsel nach Maßgabe des *Girsanov*-Theorems vollziehen zu können, muss der m -dimensionale, adaptierte Prozess $\xi_k(t)$ determiniert werden:

$$\begin{aligned} \eta(t) &= e^{\sum_{k=1}^m \int_0^t \xi_k(s) dW_k^{Q_{n+1}}(s) - \frac{1}{2} \int_0^t \|\xi(s)\|^2 ds}, \quad \|\xi(t)\| = \left(\sum_{k=1}^m \|\xi_k(t)\|^2 \right)^{1/2} \\ W_k^{Q_n}(t) &= W_k^{Q_{n+1}}(t) - \int_0^t \xi_k(s) ds, \quad k = \overline{1, m} \end{aligned} \quad (3.45)$$

Nach erneuter Anwendung von *Ito's Lemma* erhält man die alternative Dynamik für $\eta(t)$:

$$d\eta(t) = \eta(t) \sum_{k=1}^m \xi_k(t) dW_k^{Q_{n+1}}(t) \quad (3.46)$$

Der Vergleich zwischen den beiden Differentialgleichungen für $\eta(t)$ in (3.44) bzw. (3.46) verschafft unmittelbaren Aufschluss über den betreffenden Prozess $\xi_k(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_n f_n(t)}{1 + \alpha_n f_n(t)} \sigma_n(t) \sum_{k=1}^m b_{nk} dW_k^{Q_{n+1}}(t) &= \sum_{k=1}^m \xi_k(t) dW_k^{Q_{n+1}}(t) \Rightarrow \\ \xi_k(t) &= \frac{\alpha_n f_n(t)}{1 + \alpha_n f_n(t)} \sigma_n(t) b_{nk}, \quad \forall k = \overline{1, m} \end{aligned} \quad (3.47)$$

Für die Dynamik der eine Periode früher verfallenden *Forward Rate* $f_{n-1}(t)$, die unter Q^n einem Martingal folgt, lässt sich dementsprechend herleiten:

$$\text{Mit } W_k^{Q_n}(t) = W_k^{Q_{n+1}}(t) - \xi_k(t) dt, \quad k = \overline{1, m} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\frac{df_{n-1}(t)}{f_{n-1}(t)} &= \sigma_{n-1}(t) \sum_{k=1}^m b_{n-1k} dW_k^{Q_n}(t) \Rightarrow \\
\frac{df_{n-1}(t)}{f_{n-1}(t)} &= -\sigma_{n-1}(t) \sum_{k=1}^m b_{n-1k} b_{nk} \frac{\alpha_n f_n(t)}{1 + \alpha_n f_n(t)} \sigma_n(t) dt + \sigma_{n-1}(t) \sum_{k=1}^m b_{n-1k} dW_k^{Q_{n+1}}(t) \Rightarrow (3.48) \\
\frac{df_{n-1}(t)}{f_{n-1}(t)} &= -\sigma_{n-1}(t) \left(\frac{\alpha_n f_n(t) \sigma_n(t) \rho_{n-1,n}}{1 + \alpha_n f_n(t)} \right) dt + \sigma_{n-1}(t) \sum_{k=1}^m b_{n-1k} dW_k^{Q_{n+1}}(t)
\end{aligned}$$

Die iterative Applikation der gleichen Technik ermöglicht die Spezifizierung der *SDE* von *Forward Rates* $f_i(t)$ mit beliebigen *Reset*- bzw. *Payout*-Zeiten:

$$\begin{aligned}
dW_k^{Q_i}(t) &= dW_k^{Q_{n+1}}(t) - \sum_{l=i+1}^{n-1} \xi_{lk}(t) dt - \xi_k(t) dt, \quad \xi_{lk}(t) = \frac{\alpha_l f_l(t)}{1 + \alpha_l f_l(t)} \sigma_l(t) b_{lk} \Rightarrow \\
dW_k^{Q_i}(t) &= dW_k^{Q_{n+1}}(t) - \sum_{l=i+1}^n \frac{\alpha_l f_l(t)}{1 + \alpha_l f_l(t)} \sigma_l(t) b_{lk} \Rightarrow \\
\frac{df_i(t)}{f_i(t)} &= -\sigma_i(t) \sum_{l=i+1}^n \sum_{k=1}^m b_{ik} b_{lk} \frac{\alpha_l f_l(t)}{1 + \alpha_l f_l(t)} \sigma_l(t) dt + \sigma_i(t) \sum_{k=1}^m b_{ik} dW_k^{Q_{n+1}}(t) \Rightarrow \\
\frac{df_i(t)}{f_i(t)} &= -\sigma_i(t) \sum_{l=i+1}^n \frac{\alpha_l f_l(t) \sigma_l(t) \rho_{i,l}}{1 + \alpha_l f_l(t)} dt + \sigma_i(t) \sum_{k=1}^m b_{ik} dW_k^{Q_{n+1}}(t)
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Bemerkenswert ist die schwerwiegende Komplikation bei der Entwicklung der Zinsstruktur, die durch die explizite Abhängigkeit der Driftfunktion von den *Forward Rates* selbst herbeigeführt wird. Formell nimmt die Lösung der Differentialgleichung die bekannte Exponentialform an:

$$f_i(t) = f_i(0) e^{\int_0^t \left[-\sigma_i(s) \sum_{l=i+1}^n \frac{\alpha_l f_l(s) \sigma_l(s) \rho_{i,l}}{1 + \alpha_l f_l(s)} - \frac{1}{2} \sigma_i^2(s) \right] ds + \int_0^t \sigma_i(s) \sum_{k=1}^m b_{ik} dW_k^{Q_{n+1}}(s)} \tag{3.50}$$

Allerdings kann die Integration aufgrund des stochastischen Charakters des Driftterms nicht direkt durchgeführt werden. Der Integrand stellt keine einfache deterministische Funktion der Zeit dar, so dass der Logarithmus der *Forward Rates* nicht mehr einem multidimensionalen *Gaußschen* Prozess folgt. Es existieren jedoch anspruchsvolle Approximationsverfahren, die in der Lage sind, mit überraschender Genauigkeit die Driftfunktion als bedingt deterministisch zu gestalten und somit die wünschenswerten Eigenschaften einer *Gaußschen* Evolution der *Forward Rate Curve* zu präservieren. Ohne im Entferntesten den Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben, bietet der Anfang des nachfolgenden Abschnitts einen kurzen Abriss der prominentesten Methoden dar. Anschließend wird eine weitere Approximation entwickelt, deren Exaktheit durch den Vergleich mit einer rechenaufwendigen Annäherungslösung auf der Grundlage einer sehr feinen Diskretisierung des Driftintegrals überprüft wird.

343 Die Approximation der Driftfunktion

3431 Überblickartige Darstellung existierender Approximationsverfahren

Auf der Grundlage der schwachen *Runge-Kutta*-ähnlichen Approximation¹⁶⁴ zur numerischen Lösung von stochastischen Differentialgleichungen mit zustandsabhängiger Drift, erfreut sich die *Predictor-Corrector*¹⁶⁵ Methode breiter Akzeptanz. Zuerst werden die Logarithmen der *Forward Rates* nach Maßgabe des stochastischen *Log-Euler*-Schemas¹⁶⁶ so entwickelt, als wären die Drifts konstant und gleich ihren Startwerten. Anschließend werden die Drifts mit den gerade aus der Evolution der *Forward Rate Curve* determinierten Endwerten neu berechnet, bevor letztlich der Durchschnitt mit den anfänglichen Drifts gebildet wird. Schließlich wird die Zinsstruktur mit dem so ermittelten *Predictor-Corrector* Driftterm und der gleichen normal verteilten Zufallsvariable erneut entwickelt. Obwohl die Driftfunktion von der jeweiligen *Gaußschen* Ziehung des Pfades abhängt, erfolgt die Entfaltung der *Forward Rates* bedingt auf diese spezifische Ausprägung so, als ob die Driftfunktion deterministisch wäre. Die Approximation konvertiert die stochastische Drift in eine bedingt deterministische Funktion.

Ein weiteres Annäherungsverfahren approximiert die Verteilung der *Libor* und *Swap Rates* als log-normal¹⁶⁷. Im Gegensatz zu allen anderen Methoden, bei denen einzeln die Driftfunktion eine Adjustierung erfährt, wird im Rahmen dieses Ansatzes zusätzlich die Volatilitätsstruktur angepasst. Basierend allein auf partieller Integration, besticht die Technik durch ihre überraschende Einfachheit und eignet sich insbesondere zur Beschleunigung der *Monte-Carlo*-Simulation, Akzeleration der Kalibrierungsroutine und zur Modellierung rekombinierender Binomialbäume dank der log-normalen Eigenschaft aller *Rates*.

Gestützt auf die generelle Methodologie rekombinierender Baumknoten zur Konstruktion von multidimensionalen Binomialbäumen zwecks Approximation multivariat lognormal verteilter Prozesse¹⁶⁸, derer man sich später zur Entwicklung eines Zwei-Faktoren *Spot Rate* Modells der Zinsstruktur¹⁶⁹ angenommen hat, existiert eine effiziente Alternative zur

¹⁶⁴ Vgl. Abschnitt 2542.

¹⁶⁵ Vgl. (1) C. J. Hunter, P. Jäckel, M. S. Joshi, "Drift Approximations in a Forward-Rate-Based Libor Market Model", Royal Bank of Scotland Working Paper (2001), S. 1-10, (2) C. J. Hunter, P. Jäckel, M. S. Joshi, "Getting the Drift", RISK July (2001), S. 81-84, (3) R. Rebonato, "Modern Pricing of Interest-Rate Derivatives: The Libor Market Model and Beyond", Princeton University Press (2002), p. 123-131.

¹⁶⁶ Vgl. P. E. Kloeden, E. Platen, H. Schurz, "Numerical Solution of SDE through Computer Experiments" (1997), Corrected Second Printing, S. 110-115.

¹⁶⁷ Vgl. A. Daniluk, D. Gatarek, "A Fully Lognormal Libor Market Model", RISK September (2005), S. 115-118.

¹⁶⁸ Vgl. T. S. Ho, R. C. Stapleton, M. G. Subrahmanyam, "Multivariate Binomial Approximations for Asset Process with Non-Stationary Variance and Covariance Characteristics", Review of Financial Studies 8 (1995), S. 1125-1152.

¹⁶⁹ Vgl. S. Peterson, R. C. Stapleton, M. G. Subrahmanyam, "A Multi-Factor Spot Rate Model for the Pricing of Interest-Rate Derivatives", Journal of Financial and Quantitative Analysis 38 (2003), S. 847-880.

rechenaufwendigen *Monte-Carlo*-Simulation der stochastischen Driftfunktion, die sich adjustierter bedingter Wahrscheinlichkeiten bedient, um schließlich eine in zwei Dimensionen rekombinierende Gitterstruktur aufzustellen¹⁷⁰.

Weitere log-normale Approximationen¹⁷¹ erstrecken sich von der einfachen Eliminierung der Driftfunktion, über die *Picard-Lindelöf-0*¹⁷² Iteration, die faktisch mit dem „Einfrieren“ der *Libor Rate* auf ihrem aktuellen Niveau gleichzusetzen ist und dementsprechend eine deterministische Natur aufweist, bis hin zur *Picard-Lindelöf-1* Iteration, die einem *Gaußschen* Prozess folgt. Besonderer Nachdruck wird dem Simulationsverfahren auf der Basis log-normaler Zufallsfelder kontrastiert mit der konventionellen numerischen Technik zur Lösung von stochastischen Differentialgleichungen verliehen.

Deutliche Verbesserung der eingangs beschriebenen *Predictor-Corrector* Methode bezüglich der Approximationsgenauigkeit stellt ein neuartiges, auf dem Konzept der endkonditionierten *Brownschen* Bewegung fundiertes Annäherungsverfahren dar¹⁷³. Jede *Forward Rate* $f_l(s), \forall l = \overline{i+1, n}$, im stochastischen Driftterm in (3.50) wird über den auf den Endpunkt eines driftlosen *Libor*-Prozesses bedingten Erwartungswert approximiert:

$$\frac{df'_l(s)}{f'_l(s)} = \sigma_l(s) \sum_{k=1}^m b_{lk} dW_k^{Q_{n+1}}(s) \quad \text{mit} \quad f'_l(0) = f_l(0), \quad f'_l(t) = f_l^{D-A}(t) \quad (3.51)$$

$$\mu_l(s) = E[f'_l(s) | f'_l(t) = f_l^{D-A}(t)] \Rightarrow f_l(s) = \mu_l(s), \quad \forall l = \overline{i+1, n}$$

Auf Kosten der zusätzlichen, leicht restriktiven Annahme einer separierbaren Volatilitätsstruktur, wird eine signifikante Erhöhung der Berechnungsgeschwindigkeit im Vergleich zur klassischen *Monte-Carlo*-Simulation erzielt.

3432 Stochastische Driftapproximation mit Hilfe der Brownschen Brücke

Anstatt die im letzten Abschnitt geschilderten Approximationsverfahren zu elaborieren, wird im weiteren Verlauf der Ausführungen eine neue Methode zur Annäherung der pfadabhängigen Driftfunktion vorgestellt, die gleichermaßen auf dem Konzept der *Brownschen Brücke*¹⁷⁴ beruht. Im Gegensatz zu der Interpolationstechnik von Pietercz et al., die sich

¹⁷⁰ Vgl. S. Derrick, D. J. Stapleton, R. C. Stapleton, “The Libor Market Model: A Recombining Binomial Tree Methodology”, Working Paper (2005), S. 1-22.

¹⁷¹ Vgl. O. Kurbanmuradov, K. Sabelfeld, J. Schoenmakers, “Lognormal Approximations to Libor Market Models”, The Journal of Computational Finance 6 1 (2002), S.69-100.

¹⁷² Zum Originalwerk über das Picard-Lindelöf Iterationsverfahren vgl. M. E. Lindelöf, “Sur l'application de la méthode des approximations successives aux équations différentielles ordinaires du premier ordre”, Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences Vol. 114 (1894), pp. 454-457.

¹⁷³ Vgl. R. Pietersz, A. Pelsser, M. van Regenmortel, “Fast Drift Approximated Pricing in the BGM Model”, The Journal of Computational Finance 8 1 (2004), S. 93-124.

¹⁷⁴ Zur Charakterisierung der *Brownschen Brücke* vgl. Anlage 5.

zwar der *Brownschen Brücke* bedient, jedoch ihre bedingt deterministische Natur offenbart und somit allen anderen Ansätzen sehr ähnlich ist, emuliert die nachfolgende neuartige Prozedur den stochastischen Charakter der Zustandsvariablen. Gestützt auf die essentielle Tatsache, dass die Drift in (3.49) offenkundig von den *Forward Rates* selbst abhängt, allerdings eine Funktion von bereits ermittelten Liborsätzen darstellt, weist der Prozess einen natürlichen Startwert - definiert durch die aktuelle Zinsstruktur - und einen errechenbaren Endpunkt auf, der in iterativer Weise angefangen mit der letzten, unter dem terminalen Wahrscheinlichkeitsmaß einem Martingal folgenden *Libor Rate* ermittelt wird. Ausgehend von der Annahme, dass der Logarithmus der *Forward Rate*-Evolution einen generalisierten *Wiener* Prozess¹⁷⁵ repräsentiert

$$\ln \left(\frac{f_l(s)}{f_l(0)} \right) = \int_0^s \left(- \sum_{k=l+1}^n \frac{\alpha_k f_k(u) \sigma_k(u) \sigma_l(u)}{1 + \alpha_k f_k(u)} - \frac{1}{2} \sigma_l(u)^2 \right) du + \int_0^s \sigma_l(u) dW^{Q_{n+1}}(u),$$

suggeriert diese Feststellung die Anwendung einer *Brownschen Brücke* mit trivialem Startwert 0 und einem aus der iterativen Prozedur bekannten Endpunkt

$$\int_0^t \left(- \sum_{k=l+1}^n \frac{\alpha_k f_k(u) \sigma_k(u) \sigma_l(u)}{1 + \alpha_k f_k(u)} - \frac{1}{2} \sigma_l(u)^2 \right) du + \int_0^t \sigma_l(u) dW^{Q_{n+1}}(u) = \ln \left(\frac{f_l(t)}{f_l(0)} \right),$$

um den Liborsatz in einem beliebigen Zeitpunkt $0 < s < t$ wie folgt zu approximieren:

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{f_l(s)}{f_l(0)} \right) &= 0 \cdot (t-s) + \ln \left(\frac{f_l(t)}{f_l(0)} \right) s + (t-s) \int_0^s \frac{dW_{BB}(u)}{t-u} \Rightarrow \\ f_l(s) &= f_l(0) e^{\ln \left(\frac{f_l(t)}{f_l(0)} \right) s + (t-s) \int_0^s \frac{dW_{BB}(u)}{t-u}} \end{aligned} \quad (3.52)$$

Demzufolge wird die Entwicklung der *Libor Rate* durch das Einsetzen des Ausdrucks für $f_l(s)$ aus (3.52) in die Driftfunktion in (3.50) erreicht:

$$f_i(t) = f_i(0) e^{\int_0^t \left(- \sum_{l=i+1}^n \frac{\alpha_l f_l(0) e^{\ln \left(\frac{f_l(t)}{f_l(0)} \right) s + (t-s) \int_0^s \frac{dW_{BB}(u)}{t-u}} \sigma_l(s) \sigma_i(s)}{1 + \alpha_l f_l(0) e^{\ln \left(\frac{f_l(t)}{f_l(0)} \right) s + (t-s) \int_0^s \frac{dW_{BB}(u)}{t-u}}} - \frac{1}{2} \sigma_i(s)^2 \right) ds + \int_0^t \sigma_i(s) dW^{Q_{n+1}}(s)} \quad (3.53)$$

Es muss hervorgehoben werden, dass $W_{BB}(t)$ als unabhängig von $W^{Q_{n+1}}(t)$ gezogen wird und ausschließlich der Konstruktion der *Brownschen Brücke* dient. Aufgrund der Konditionierung auf eine normal verteilte Zufallsvariable, besitzt die Driftfunktion einen bedingt

¹⁷⁵ Im Gegensatz zur multifaktoriellen Dynamik in (3.49), wird im Folgenden eine eindimensionale stochastische Entwicklung der *Forward Rates* und damit einhergehend eine perfekte Korrelation zwischen den Liborsätzen unterstellt. Für die Funktionalität der Driftapproximation ist die explizite Integration einer instantanen Korrelationsstruktur in den Modellierungsrahmen irrelevant.

deterministischen Charakter, der *Forward Rate*-Prozess bleibt jedoch durch die Driftdependenz von der Realisation der *Libor Rate Non-Markov*. Darüber hinaus ist die Approximation umso ungenauer, je mehr Liborsätze ihren Einfluss auf den Driftterm ausüben bzw. je weiter man sich entlang der Zeitachse von dem terminalen Zeitpunkt t_{n+1} fortbewegt. Dennoch weist das propagierte Annäherungsverfahren hinreichende Präzision auf, wie es durch den Vergleich mit einer alternativen Implementierung auf der Basis einer sehr feinen Diskretisierung des Driftintegrals gezeigt werden kann. In jedem Simulationsschritt wird die Driftfunktion als abschnittsweise konstant approximiert, wodurch die Zugänglichkeit des ansonsten stochastischen Integrands gewährleistet ist:

Mit $k \rightarrow \infty$ resp. $\Delta t \rightarrow 0$, so dass $t = k \cdot \Delta t - \text{const.}$

$$f_i(k \cdot \Delta t) = f_i(0) e^{\sum_{m=0}^{k-1} \sum_{l=i+1}^n \frac{\alpha_l f_l(m \cdot \Delta t)}{1 + \alpha_l f_l(m \cdot \Delta t)} \left(\int_{m \cdot \Delta t}^{(m+1) \Delta t} \sigma_l(s) \sigma_i(s) - \frac{1}{2} \sigma_i(s)^2 \right) ds + \sum_{m=0}^{k-1} \sigma_i(m \cdot \Delta t) (W^{n+1}(m \cdot \Delta t + m) - W^{n+1}(m \cdot \Delta t))} \quad (3.54)$$

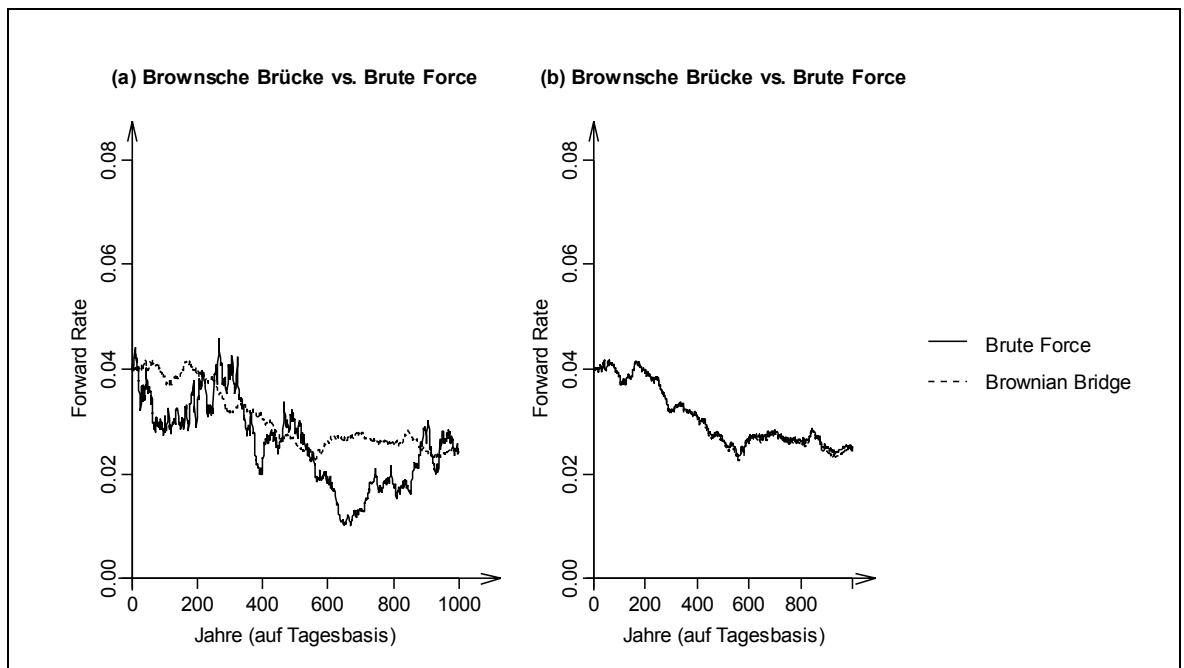


Abb. 3-2 Die Forward Rate als Funktion der Laufzeit

(a) Die Approximation mittels der Brownschen Brücke vs. die diskretisierte Entwicklung der Zinsstruktur.
 (b) Der Prozess der Approximation mittels der Brownschen Brücke vs. den Prozess der diskreten Implementierung. Die akzeptable Ungenauigkeit aufgrund der angewandten Annäherungsmethode findet ihren visuellen Niederschlag in den leicht auseinanderklaffenden Prozessverläufen der beiden alternativen Verfahren der Evolution der Zinsstruktur mit steigender Laufzeit und zeitmäßig größer werdender Entfernung zum terminalen Zeitpunkt t_{n+1} .

Die obigen Abbildungen stellen eine komparative Veranschaulichung der Approximation mittels der *Brownschen Brücke* gemäß (3.53) und der diskreten Implementierung gemäß (3.54) und eine Gegenüberstellung der jeweils dahinter stehenden Prozesse dar.

Die nachfolgende Tabelle quantifiziert die Ergebnisse aus der simulativen Evolution einer flachen Libor-Struktur und vergleicht die Performance der Approximation auf der Basis

der Brownschen Brücke mit der diskretisierten Entwicklung der Zinsstruktur und der eingangs erwähnten Methode von Pietercz et al. :

| | | | | | |
|-------------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $L(t_0)$ | 0.04000 | 0.04000 | 0.04000 | 0.04000 | 0.04000 |
| Brute Force | 0.03953 | 0.03965 | 0.03977 | 0.03989 | 0.04000 |
| B. Bridge | 0.03950 | 0.03960 | 0.03980 | 0.03990 | 0.04000 |
| Fast Drift | 0.03950 | 0.03960 | 0.03970 | 0.03990 | 0.04000 |

Eine exemplarische Anleitung zur praktischen Implementierung des vorgeschlagenen Simulationsalgorithmus lässt sich folgendermaßen zusammenfassen:

- (i) man beginne mit der aktuellen Zinsstruktur $f_i(0)$, $i = 1, \dots, n$;
- (ii) man determiniere den letzten Liborsatz gemäß seiner driftlosen Dynamik:

$$f_n(t) = f_n(0)e^{-\frac{1}{2}\int_0^t \sigma_n(u)^2 du + \int_0^t \sigma_n(u) dW^{Q_{n+1}}(u)}$$

- (iii) man berechne alle anderen *Forward Rates* $f_i(t)$, mit $i < n$, gemäß (3.53) unter Berücksichtigung der Tatsache, dass die Driftfunktion aus bereits in einem früheren Simulationsschritt ermittelten Liborsätzen $f_i(t)$ zusammengesetzt ist.

344 Die generellen Inputfaktoren für das Grundgerüst des Libor-Marktmodells

Basierend auf einer der wichtigsten Erkenntnisse des einleitenden Abschnitts über die Entstehung der marktkonformen Modellierungstechnik¹⁷⁶ – der vollständigen und eindeutigen Definition der zeitdiskreten Entwicklung der Zinsstruktur mittels der instantanen Schwankungs- und Korrelationsstruktur¹⁷⁷ – und der Existenz einer nahezu unerschöpflichen Fülle von Auswahloptionen bezüglich des modelltheoretischen Kovarianzgefüges, wird in einem ersten Schritt eine aus dem intuitiven Verständnis für die *HJM*-Volatilitätsform heraus ableitbare und vom Kalibrierungsgesichtspunkt aus praktikable Funktionsvorschrift für die instantane Volatilität vorgeschlagen. Fundiert durch empirisches Datenmaterial und vorrangig unter dem Blickwinkel der finanzwirtschaftlichen Plausibilität wird im Hinblick auf die anschließende Demonstration der Fähigkeit der implementierten Kalibrierungsprozedur, eine exogen vorgegebene Korrelationsmatrix in Abhängigkeit von der Anzahl der Faktoren partiell oder vollständig zu reproduzieren, eine spezifische Funktionsform für die

¹⁷⁶ Vgl. die ausführliche Diskussion im Abschnitt 341.

¹⁷⁷ Vgl. Formel (3.49).

Marktkorrelationsstruktur zugrunde gelegt. Des Weiteren wird im Rahmen der simultanen Anpassung an Daten aus beiden Referenzoptionmärkten (Caplets/Swaptions) untersucht, wie die *Swap Rate/Swap Rate* Zielkorrelationsstruktur in einer *Forward Rate*-basierten Entwicklungsumgebung zu modifizieren ist. Wegen des hohen Grades an praktischer Relevanz bleibt die technische Ausführung der Kalibrierungsroutinen einem separaten Abschnitt vorbehalten.

3441 Die Konstruktion der instantanen Volatilitätsfunktion

In Anlehnung an die rigorose Herleitung der *HJM*-Volatilitätsfunktion¹⁷⁸ wird gestützt auf die Theorie der harmonischen Oszillation aus der Physik folgende lineare, homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten für die Schwankung der *Forward Rates* in Abhängigkeit der Restlaufzeit aufgestellt:

$$m \frac{\partial \sigma_{f_i}^2(t, T_i)}{\partial T_i^2} + a \frac{\partial \sigma_{f_i}(t, T_i)}{\partial T_i} + k \sigma_{f_i}(t, T_i) = 0, \quad \text{mit } m, a, k - \text{const.} \quad (3.55)$$

Im Rahmen der *HJM*-Zinsstrukturevolution erfährt die instantane *Forward Rate* Änderungen innerhalb infinitesimal kleiner Zeitintervalle, woraus eine relativ niedrige Geschwindigkeitsanpassung für die Rückkehr zum langfristigen Niveau gefolgert werden kann, da der Zinssatz schließlich über unendlich viele Gelegenheiten verfügt, diesen Level zu erreichen. Infolgedessen entsprang die instantane Volatilitätsstruktur einem untergedämpft oszillierenden physikalischen System, wobei die Deskription der Schwingungen von der Nachbildung der Schwankungsstruktur separiert werden konnte. Im Gegensatz dazu werden die einer linearen Zinsberechnungskonvention unterliegenden Liborsätze zwar zeitkontinuierlich, jedoch an abzählbaren, diskreten Stützstellen auf der Zinsstruktur modelliert, woraus für die einfache *Forward Rate* zwangsläufig viel weniger Chancen erwachsen, zum langfristigen Niveau zurückzukehren. Folglich muss die gleichgewichtswiederherstellende endogene Dämpfungskraft, ausgedrückt durch die *Mean Reversion Rate* $b=a/2$ ¹⁷⁹, deutlich stärker ausfallen. Diese intuitiven Überlegungen affirmieren die Entscheidung, für die Herleitung der instantanen Volatilitätsfunktion der *Libor Rate* die kritisch gedämpfte Version im Unterschied zur untergedämpften Variante des harmonischen Oszillators zu verwenden. Die Lösung der Differentialgleichung erfolgt mit Hilfe des Ansatzes $Ae^{\alpha(T_i-t)}$ und liefert

¹⁷⁸ Vgl. nochmals die Ausführungen im Abschnitt 331.

¹⁷⁹ Vgl. S. 72.

die entsprechende Positionsfunktion, die in Ermangelung von Schwingungen direkt die gesuchte Volatilitätsstruktur ohne die Notwendigkeit des Separationsprinzips¹⁸⁰ beschreibt:

$$m\alpha^2 Ae^{\alpha(T_i-t)} + a\alpha Ae^{\alpha(T_i-t)} + kAe^{\alpha(T_i-t)} = 0 \Rightarrow Ae^{\alpha(T_i-t)} (m\alpha^2 + a\alpha + k) = 0 \Rightarrow$$

$$m\alpha^2 + a\alpha + k = 0 \Rightarrow \alpha_{\pm} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4km}}{2m} \quad (3.56)$$

$$\text{kritisch gedämpft: } a^2 - 4km = 0 \Rightarrow \alpha_{\pm} = \frac{-a}{2m} = -j$$

$$\text{Mit } m=1, a=2b \Rightarrow \frac{4b^2 - 4k}{4} = 0 \Rightarrow \text{Mean Reversion } b = \sqrt{k}$$

Gemäß dem Superpositionsprinzip setzt sich die Lösung der Differentialgleichung aus der Menge mehrerer unabhängiger Fundamentallösungen zusammen, wobei die Konstanten A und B durch die einschlägigen Startbedingungen determiniert werden:

$$\sigma_{f_i}(t, T_i) = Ae^{-j(T_i-t)} + Be^{-j(T_i-t)} = (A+B)e^{-j(T_i-t)} = (A+B)e^{-b(T_i-t)}$$

$$(1) \quad \sigma_{f_i}(t, t) = A+B = \sigma_r(t) \quad (3.57)$$

$$(2) \quad \left. \frac{\partial \sigma_{f_i}(t, T_i)}{\partial T_i} \right|_{T_i=t} = -j(A+B)e^{-j(T_i-t)} \Big|_{T_i=t} = -j(A+B) = -b\sigma_r(t) \Rightarrow A+B = \sigma_r(t)$$

Im Startzeitpunkt t entspricht die deskriptive Positionsfunktion $\sigma_{f_i}(t, T_i) \Big|_{T_i=t}$ der *Short Rate*-Volatilität $\sigma_r(t)$, die sowohl deterministischer als auch stochastischer Natur sein darf, jedoch unabhängig von T_i ist. Durch die zweite Nebenbedingung wird die anfängliche Geschwindigkeit festgelegt, mit der man sich von $\sigma_r(t)$ entfernt und gegen den langfristigen Gleichgewichtszustand strebt. Da (1) und (2) in (3.57) keine unabhängigen Lösungen für A und B produzieren¹⁸¹, außer dass deren Summe mit der *Short Rate*-Volatilität übereinstimmt, wird ein multiplikativ um die Restlaufzeit erweiterter Ansatz $A(T_i-t)e^{\alpha(T_i-t)}$ appliziert und in (3.55) eingesetzt:

$$\text{Mit } \frac{\partial [A(T_i-t)e^{\alpha(T_i-t)}]}{\partial T_i} = Ae^{\alpha(T_i-t)} + \alpha A(T_i-t)e^{\alpha(T_i-t)} \quad \text{und}$$

$$\frac{\partial^2 [A(T_i-t)e^{\alpha(T_i-t)}]}{\partial T_i^2} = 2\alpha Ae^{\alpha(T_i-t)} + \alpha^2 A(T_i-t)e^{\alpha(T_i-t)}$$

$$m.Ae^{\alpha(T_i-t)} (2\alpha + \alpha^2 (T_i-t)) + a.Ae^{\alpha(T_i-t)} (1 + \alpha (T_i-t)) + k.A(T_i-t)e^{\alpha(T_i-t)} = 0 \quad (3.58)$$

$$m(T_i-t)\alpha^2 + (2m + a(T_i-t))\alpha + a + k(T_i-t) = 0 \Rightarrow$$

$$\alpha_{\pm} = \frac{-2m - a(T_i-t) \pm \sqrt{(2m + a(T_i-t))^2 - 4m(T_i-t)(a + k(T_i-t))}}{2m(T_i-t)}$$

¹⁸⁰ Zum Separationsprinzip vgl. S.72 -73.

¹⁸¹ Der Ansatz $Ae^{\alpha(T_i-t)}$ ist offensichtlich nicht allgemein genug, da er nur eine einzige Lösung liefert. Ein fundamentales System erfordert jedoch wenigstens zwei voneinander unabhängige Lösungen.

Folglich ergibt der kritisch gedämpfte harmonische Oszillator:

$$\begin{aligned}
 \text{Mit } a^2 - 4km = 0 &\Rightarrow \alpha_+ = -\frac{a}{2m} \text{ und } \alpha_- = -\frac{2}{(T_i - t)} - \frac{a}{2m} \Rightarrow \\
 \sigma_{f_i}(t, T_i) &= A(T_i - t)e^{\alpha_+(T_i - t)} + B(T_i - t)e^{\alpha_-(T_i - t)} = (A + B.e^{-2})(T_i - t)e^{-b(T_i - t)} \\
 (1) \quad \sigma_{f_i}(t, t) &= \sigma_r(t) = 0 \tag{3.59} \\
 (2) \quad \left. \frac{\partial \sigma_{f_i}(t, T_i)}{\partial T_i} \right|_{T_i=t} &= A.e^{-b(T_i - t)} - A(T_i - t)b.e^{-b(T_i - t)} + B.e^{-2-b(T_i - t)} - B.b.e^{-2-b(T_i - t)} \Big|_{T_i=t} \\
 &= A + B.e^{-2} = -b\sigma_r(t)
 \end{aligned}$$

Wenig überraschend erweist sich dieser erweiterte Ansatz gleichermaßen als nicht reichhaltig genug, um zwei unabhängige Lösungen für A und B zu gewährleisten. Allerdings folgt durch die Überlagerung der beiden Ansätze¹⁸² für die Lösung der Differentialgleichung (3.55) unter zusätzlicher Berücksichtigung der Tatsache, dass die Volatilitätsfunktion bei $(T_i - t) \rightarrow \infty$ gegen einen langfristigen Grenzwert d streben kann:

$$\sigma_{f_i}(t, T_i) = \left(\underbrace{\frac{A+B}{a}}_c + \underbrace{\frac{A+B.e^{-2}}{c}}_c (T_i - t) - d \right) e^{-b(T_i - t)} + d \tag{3.60}$$

Im Rahmen der Kalibrierungsprozedur gilt es die Volatilitätsparameter a, b, c, d an Marktdaten anzupassen, wobei die reine Zeitdependenz der Schwankungsstruktur mit Hilfe der *Short Rate*-Volatilität $\sigma_r(t) = A + B$ eingefangen werden kann. Demzufolge muss a in der impliziten Volatilität der *Forward Rate* mit der kürzesten Laufzeit entsprechen. Auf der Basis der deterministischen *Short Rate*-Volatilität in (2.63), wird eine im Zeitablauf gemäß der *Mean Reversion Rate* exponentiell verfallende Funktion von t vorgeschlagen. Um eine rigide Überspezifikation der Volatilitätsstruktur, welche die Integration wichtiger Besonderheiten verfehlt, oder eine übermäßige Flexibilität mit zu vielen Freiheitsgraden zu vermeiden¹⁸³, wird die zugrunde liegende Exponentialfunktion als Fourierreihe mit einer niedrigen Anzahl¹⁸⁴ von zu behaltenden Frequenzen dargestellt¹⁸⁵. Zwecks Sicherstellung der Adaptivität der empfohlenen Funktion ist die Multiplikation mit einem weiteren, später im Rahmen der Kalibrierungsroutine anzupassenden Parameter erforderlich. Unter sorgfältiger

¹⁸² Gemäß dem Superpositionsprinzip

¹⁸³ Vgl. die Diskussion über den intrinsischen *Trade-Off* auf S. 81-83, insb. S. 82.

¹⁸⁴ Im Rahmen der Kalibrierung werden sich 10 als vollkommen ausreichend erweisen. Es handelt sich um die ersten 10 Harmonischen der Funktion $\sigma_r(t)$, die ein ganzzahliges Vielfaches m der Grundfrequenz $2\pi/2L$ darstellen.

¹⁸⁵ Zur Herleitung vgl. Anlage 6. In Anlehnung an die Ergebnisse aus der in einem späteren Abschnitt erfolgenden Kalibrierung wird der Anpassungsparameter A auf 0.1 gesetzt.

Beachtung dieser Überlegungen nimmt die instantane Volatilitätsfunktion der *Forward Rate* $\sigma_{f_i}(t, T_i)$ folgende Gestalt an:

$$\sigma_{f_i}(t, T_i) = [\sigma_r(t) + c(T_i - t) - d] e^{-b(T_i - t)} + d$$

$$\sigma_r(t) = A(1 - e^{-2bL}) \left(\frac{1}{2bL} + \sum_{m=1}^k \frac{1}{(m\pi)^2 + (bL)^2} \left[m\pi \sin\left(\frac{m\pi t}{L}\right) + bL \cos\left(\frac{m\pi t}{L}\right) \right] \right) \quad (3.61)$$

$$\text{Mit: } L = \frac{T^n}{2} \leq \frac{T^{\max}}{2}, \quad k = 10, \quad \{\alpha_i\} = \{A, b, c, d\}$$

α_i – zu kalibrierende Funktionsparameter

3442 Die Spezifikation der instantanen Korrelationsfunktion

Nach der Konstruktion der instantanen Volatilitätsfunktion ist es zwingend erforderlich, deren Beziehung zur erreichbaren Dekorrelation zwischen den Zinssätzen zu untersuchen, da für die Bewertung der meisten komplexen Derivate häufig nicht die unbedingte terminale Verteilung einer einzigen *Forward Rate*, sondern die Wahrscheinlichkeit der gemeinsamen bedingten Realisierung einer Reihe von *Forward Rates* zu verschiedenen Zeitpunkten ermittelt werden muss. Damit hängt unmittelbar die Frage nach der Anzahl der zu wählenden Faktoren zusammen, um exotische Produkte¹⁸⁶ realistisch preisen zu können. Allerdings erfährt dieses Problem eine nachrangige Behandlung aufgrund der oft übersehenen Tatsache, dass der Preis des zu bewertenden Zinsderivats nicht von der instantanen Korrelations- und Volatilitätsfunktion separat abhängt, sondern von den Kovarianzelementen¹⁸⁷ oder äquivalent von der terminalen Korrelation¹⁸⁸, die den Grad der Dependenz zwischen den *Forward Rates* zu einem bestimmten zukünftigen Zeitpunkt kumuliert angibt, im Gegensatz zur instantanen Korrelation, die ein Indikator für die Abhängigkeit zwischen instantanen Zinsänderungen darstellt. Beeinflusst durch sowohl die instantane Korrelation als auch die zeitvariable instantane Volatilitätsfunktion, ist die terminale Korrelation immer kleiner oder gleich der instantanen Korrelation. Folglich kann eine signifikante Dekorrelation sogar in einer Ein-Faktor-Entwicklungsumgebung mit perfekter instantaner Korrelation herbeigeführt werden, solange der instantanen Volatilitätsfunktion eine starke Zeitdependenz auferlegt wird. Natürlich wirft diese Reflektion die Frage nach der Erwünschtheit einer solchen Vorgehensweise auf. Allerdings besteht einer der größten Vorteile des modernen Modellierungsansatzes darin, dass die Wahl zwischen den beiden Methoden zur

¹⁸⁶ Tatsächlich behält diese Überlegung ihre Gültigkeit nicht nur für Exotics. Ein typisches Beispiel für ein *Plain-Vanilla* Zinsinstrument wäre die europäische Swaption, deren Payoff durch die Joint-Evolution der *Forward Rates* bestimmt wird, die die *Swap Rate* konstituieren. Die *Swap Rate* kann als eine lineare Kombination der zugrunde liegenden *Forward Rates* mit stochastischen Gewichten betrachtet werden, wie später verdeutlicht wird.

¹⁸⁷ Vgl. die Diskussion im Abschnitt 341, S.77 in Verbindung mit (3.49) bzw. (3.50).

¹⁸⁸ Noch als Dekorrelation bezeichnet.

Erzielung realistischer terminaler Korrelationen allein dem Modellanwender überlassen ist. Wahrscheinlich wäre eine ungefähre Gleichaufteilung auf die beiden Mechanismen ratsam, wird jedoch im Einzelfall von dem jeweiligen exotischen Zinsinstrument abhängen und von den Implikationen der stärkeren Konzentration auf eines der beiden Verfahren für das Produkt der anderen Methode, wodurch eine weitere Facette des modellinhärenten *Trade-Off*¹⁸⁹ zum Ausdruck kommt.

Die erfolgreiche Implementierung des Marktmodells ist auf die Qualität der spezifizierten instantanen Volatilitäts- und Korrelationsfunktionen angewiesen, deren Form finanztheoretisch intuitiv verständlich und ausreichend flexibel sein soll, ohne überzählige Freiheitsgrade in der Gestalt frei wählbarer Parameter zuzulassen, da dadurch die Gefahr einer Überkalibrierung entsteht. Der Konstruktion der instantanen Volatilität ähnlich, kann eine parametrische Spezifikation der instantanen Korrelationsfunktion vorgenommen werden, deren Koeffizienten so kalibriert werden, dass die bestmögliche Anpassung an Marktdaten erreicht wird. Im Gegensatz dazu implizierte ein nichtparametrischer Ansatz, dass die $n(n-1)/2$ Elemente einer $n \times n$ Korrelationsmatrix direkt aus Marktpreisen bestimmt werden müssten. Die Alternative zwischen den beiden Extrema ist die semiparametrische Konstruktion der Korrelationsfunktion¹⁹⁰, die an dieser Stelle nicht weiter verfolgt wird. Der Ansatz ist jedoch attraktiv, da er die positive Definitheit¹⁹¹ der resultierenden Korrelationsmatrix garantiert und die wünschenswerte Eigenschaft der abnehmenden Dekorrelationsgeschwindigkeit¹⁹² mit steigender Fälligkeit der *Forward Rates* aufweist. Ungeachtet der gewählten Methode ist die Determinierung der Korrelationen aus Marktpreisen eine sehr mühsame Aufgabe, da es keine *Plain-Vanilla* Zinsinstrumente gibt, die ausschließlich von der instantanen Korrelation zwischen *Forward Rates* abhängig sind, im Gegensatz zu Capletpreisen, die in einer direkten funktionalen Beziehung zu der instantanen Volatilität stehen. De facto ist die europäische Swaption das einzige einfache Zinsprodukt, in deren Bewertungsformel die instantane Korrelation einfließt. Allerdings wird der Preis der Swaption durch die Kovarianz über ihre Laufzeit hinweg bestimmt, die sowohl von der Zeitdependenz der instantanen Volatilitätsfunktion als auch von der instantanen Korrelation abhängt. Verschiedene Kombinationen der beiden Faktoren können in der gleichen Dekorrelation und folglich im gleichen Wert für die Swaption resultieren, wodurch sich die Er-

¹⁸⁹ Erneut wird auf den einführenden Abschnitt 341 - S. 81-83, insb. S. 82 - verwiesen.

¹⁹⁰ Vgl. *J. Schoenmakers, B. Coffey*, "Systematic Generation of Correlation Structures for the LIBOR Market Model", *International Journal of Theoretical and Applied Finance* 6 4 (2003), S. 1-13.

¹⁹¹ gleichbedeutend mit streng positiven Eigenwerten, da die Korrelationsmatrix quadratisch und symmetrisch ist.

¹⁹² Die Konvexität der Korrelationsstruktur ist eine abnehmende Funktion der Fälligkeit.

rechnung des Beitrags der einzelnen Elemente zum Zustandekommen des Preises als äußerst schwierig erweist. Auf die empirische Ermittlung der Korrelationen und die damit einhergehenden Probleme soll an dieser Stelle nicht näher eingegangen werden¹⁹³, da dies kein direkter Bestandteil der vorliegenden Untersuchung ist. Die Intention besteht lediglich darin, den Leser für die Schwierigkeiten bei der Verknüpfung von statistischen Methoden zur Schätzung von Korrelationen mit der Anforderung einer vom finanzwirtschaftlichen Gesichtspunkt aus plausiblen Funktionsform zu sensibilisieren. Im weiteren Verlauf der Arbeit wird eine exogen vorgegebene Korrelationsmatrix angenommen, die Marktkorrelationen beinhaltet und die Zielmatrix darstellt. Basierend auf der Tatsache, dass die Korrelation eine langfristige Charakteristik der *Forward Rates* ist und somit als relativ homogen im Zeitablauf erwartet wird, kann sie für das Paar $f_i(t)$ und $f_k(t)$ durch folgende zeitstationäre Funktion generiert werden, deren Parameter für den asymptotischen Korrelationswert und für die Dekorrelationsgeschwindigkeit $long_corr$ bzw. $decay_const$ in einem separaten Schritt unabhängig durch ökonometrische Schätzung ermittelt worden sind:

$$\rho_{ik} = long_corr + (1 - long_corr)e^{-decay_const|T_i - T_k|} \quad (3.62)$$

Die Hauptzielsetzung besteht in der Entwicklung einer verlässlichen und schnellen Kalibrierungsprozedur, die die bestmögliche Anpassung der instantanen Volatilitätsfunktion (3.61) an die marktimplizierte Volatilitätsstruktur und das Fitting der modelltheoretischen Korrelationen an die exogen vorgegebene Zielkorrelationsmatrix ermöglicht, vor allem wenn weniger Faktoren als die Anzahl der zugrunde liegenden *Forward Rates* verwendet werden.

345 Die Kalibrierung der modelltheoretischen Inputfunktionen an marktbeobachtbare Strukturen

3451 Das Fitting der instantanen Volatilitätsfunktion

Der Begriff marktimplizierte Volatilitätsstruktur bezieht sich auf die aus dem Markt extrahierbare *Black*-Volatilität $\sigma_{Black}(T_i)$, die mit einem Caplet mit Fälligkeit in T_i assoziiert ist. Mit der Definition der diskreten Menge von Zeitpunkten $\{T_i, i \in [0, n], T_n \leq T^{\max}\}$ innerhalb des Laufzeithorizonts $[0, T^{\max}]$ und der darauf basierend festgelegten Zinsstruktur umspannender *Forward Rates*, denen folgende *Reset*- und *Payout*-Zeiten (T_i, T_{i+1}) , $i \geq 0$, zugrunde liegen, lässt sich die Marktvolatilität als die mittlere quadratische Wurzel der zeitabhängigen instantanen Volatilitätsfunktion ausdrücken:

¹⁹³ Zu empirischen Informationen über die Korrelationsstruktur zusammen mit generellen qualitativen Aussagen über die Form der Korrelationsfunktion vgl. F. A. Longstaff, P. Santa-Clara, E. S. Schwartz, "The Relative Valuation of Caps and Swaptions: Theory and Empirical Evidence", *The Journal of Finance* 56 (2001), S. 2067-2109.

$$\sigma_{Black}^2(T_i)T_i = \int_0^{T_i} \sigma_{f_i}^2(u, T_i) du \quad (3.63)$$

Diese Äquivalenzbeziehung und die durch Formel (3.61) avancierte, vom finanzwirtschaftlichen Gesichtspunkt aus plausible¹⁹⁴ Form der instantanen Volatilitätsfunktion stellen das nötige Werkzeug zur Verfügung, um aus den erhältlichen Caplet-Marktdaten alle möglichen direkten Informationen über die Parametrisierung des Modells zu destillieren. Zu diesem Zweck wird eine nichtlineare Optimierungsroutine - die standardmäßige *Davidon-Fletcher-Powell*¹⁹⁵ Methode der variablen Metrik - eingesetzt, die alle Parameter der instantanen Volatilitätsfunktion solange simultan ändert, bis die quadrierte Distanz zwischen der modelltheoretischen und der marktimplizierten Volatilitätsstruktur minimiert wird:

$$\min_{\{\alpha_m\}} \Delta^2 = \sum_{i=1}^n \left(\int_0^{T_i} \sigma_{f_i}^2(u, T_i) du - \sigma_{Black}^2(T_i)T_i \right)^2, \quad \{\alpha_m\} = \{A, b, c, d\} \quad (3.64)$$

Nach der Ermittlung des globalen Minimums kann durch eine Feinabstimmung mittels folgender *Forward Rate*-charakteristischer Funktion $h(T_i) = h_i$:

$$h_i^2 = \frac{\sigma_{Black}^2(T_i)T_i}{\int_0^{T_i} \sigma_{f_i}^2(u, T_i) du} \quad (3.65)$$

die residualen Preisdiskrepanzen aufgefangen werden, wobei je konstanter die Koeffizienten h_i sind, desto erfolgreicher ist die Kalibrierungsprozedur in der Erzeugung einer zeit-homogenen Entwicklung der Volatilitätsstruktur. Da $\sigma_{Black}^2(T_i)T_i$ in der Regel keine streng monoton wachsende Funktion der Capletfälligkeit T_i ist, impliziert der Markt eine Änderung in der zukünftigen Volatilitätsform, wodurch die Integration einer rein zeitabhängigen Komponente - der *Short Rate*-Volatilität $\sigma_r(t)$ - in die propagierte instantane Volatilitätsfunktion (3.61) erforderlich wird. Als Konsequenz ergeben sich nach dem Fitting (3.64) für mittelfristige Caplets zwar relativ unveränderliche Koeffizienten h_i im Wertebereich nahe

¹⁹⁴ Darunter wird eine Evolution der Volatilität im Zeitablauf verstanden, die vertretbare oder gerechtfertigte Eigenschaften aufweist, wie eine nahezu homogene Zeitstruktur und die Aufrechterhaltung einer direkten Beziehung zur Gestaltung der Volatilitätsfunktionen im Rahmen der früheren Zinsmodellierungstechniken. Die rein zeitabhängige Komponente der instantanen Volatilitätsfunktion (3.61) ist eine Fourierreihe mit niedriger Anzahl von Frequenzen der exponentiell verfallenden *Short Rate*-Volatilität (2.63) im Hull/White-Zinsmodell, dessen Zusammenhang mit dem *HJM*-Konstrukt im Abschnitt 332 aufgedeckt wurde. Allerdings kann die Homogenität der temporalen Volatilitätsentwicklung nur approximativ präserviert werden, wie an der Notwendigkeit der Applikation einer zusätzlichen *Forward Rate*-spezifischen Komponente zwecks perfekter Kalibrierung an Capletpreise festzustellen ist.

¹⁹⁵ Vgl. (1) W. Press, S. Teukolsky, W. Vetterling, B. Flannery, "Numerical Recipes in C. The Art of Scientific Computing", Cambridge University Press (1996), S. 425-430. (2) J. Greenstadt, "Variations on Variable-Metric Methods", Mathematics of Computation 24 109 (1970), S. 1-22.

um 1 herum, für sehr kurzfristige Caplets jedoch schwanken sie mit $0.75 \leq h_i \leq 1$ deutlich stärker. Zusammenfassend sei ausdrücklich betont, dass nach der Durchführung der Kalibrierungsroutine (3.64) und der anschließenden Feinabstimmung (3.65), eine explizite Bedingung für die Bewertung von Caplets definiert wird:

$$h_i^2 \int_0^{T_i} \sigma_{f_i}^2(u, T_i) du$$

Mit $\sigma_{f_i}(t, T_i) = [\sigma_r(t) + c(T_i - t) - d] e^{-b(T_i - t)} + d,$

$$\sigma_r(t) = A \cdot (1 - e^{-2bL}) \left(\frac{1}{2bL} + \sum_{m=1}^k \frac{1}{(m\pi)^2 + (bL)^2} \left[m\pi \sin\left(\frac{m\pi t}{L}\right) + bL \cos\left(\frac{m\pi t}{L}\right) \right] \right) \quad (3.66)$$

und $L = \frac{T^n}{2} \leq \frac{T^{\max}}{2}, \quad k = 10$

3452 Das Fitting der instantanen Korrelationsfunktion. Optimales Verfahren zur bestmöglichen Reproduktion der exogenen Marktkorrelationsmatrix

Die zweckmäßigste Deskription der *Forward Rate*-Dynamik in einer Konstruktionsumgebung mit einer Anzahl von Faktoren (m), die geringer als die zu modellierenden *Forward Rates* (n) ist, wird durch die Gleichungen für die stochastische Evolution auf der Basis orthogonaler *Brownscher* Inkremente - wie in den Abschnitten 3421 und 3422 hergeleitet - zum Ausdruck gebracht. Vor dem Hintergrund der bevorstehenden Anpassung der modelltheoretischen Korrelationsmatrix an die exogen vorgegebene Marktkorrelationsstruktur (3.62) werden zu Referenzierungszwecken die relevante *SDE* und die essentielle Beziehung für die zu kalibrierende Funktion b_{ik} , die eine exakte Reproduktion der instantanen Volatilitätsfunktion $\sigma_i(t)$ sicherstellt¹⁹⁶, nochmals angeführt:

$$\frac{df_i(t)}{f_i(t)} = -\sigma_i(t) \sum_{l=i+1}^n \sum_{k=1}^m b_{ik} b_{lk} \frac{\alpha_l f_l(t)}{1 + \alpha_l f_l(t)} \sigma_l(t) dt + \sigma_i(t) \sum_{k=1}^m b_{ik} dW_k^{Q_{n+1}}(t)$$

$$E \left[\frac{df_i}{f_i} \frac{df_j}{f_j} \right] = \sigma_i \sum_{k=1}^m b_{ik} dZ_k \left(\sigma_j \sum_{k=1}^m b_{jk} dZ_k \right) = \sigma_i \sum_{k=1}^m b_{ik} (b_{jk}) \sigma_j dt \Rightarrow \rho_{ij} = \sum_{k=1}^m b_{ik} (b_{jk}) \quad (3.67)$$

$$E \left[\frac{df_i(t)}{f_i(t)} \frac{df_i(t)}{f_i(t)} \right] = \sigma_i^2 \left(\sum_{k=1}^m b_{ik} dZ_k \right)^2 = \sigma_i^2 \sum_{k=1}^m b_{ik}^2 dt = \sigma_i^2 dt \Rightarrow \sum_{k=1}^m b_{ik}^2 = 1$$

¹⁹⁶ Falls sie zusätzlich dazu so gewählt wird, dass $\sigma_i(t)$ den richtigen mittleren quadratischen Wurzelwert gemäß (3.63) aufweist, werden auch Caplets nach Maßgabe der Empfehlungen im letzten Abschnitt korrekt bewertet bzw. deren Marktpreise genau wiedergegeben.

Unter Einhaltung dieser Nebenbedingung werden die Faktorladungen b_{ik} in der meistverwendeten Form trigonometrischer Funktionen¹⁹⁷ mittels einer frei wählbaren Menge reeller Zahlen (Winkel) θ_{ij} parametrisiert und die Modellkorrelationsmatrix $\rho = b(b)^T$ erstellt:

$$\begin{aligned} b_{i1} &= \cos(\theta_{i1}) \\ b_{ij} &= \cos(\theta_{ij})\sin(\theta_{i1})\dots\sin(\theta_{i(j-1)}), \quad 1 < j < m \\ b_{im} &= \sin(\theta_{i1})\dots\sin(\theta_{i(m-1)}) \end{aligned} \quad (3.68)$$

Aufgrund der reduzierten Dimensionalität ($m \ll n$) resultiert die Orthogonalisierung der Modellkorrelationsmatrix in lediglich m distinkt positiven Eigenwerten mit der Konsequenz, dass den restlichen $n - m$ Eigenvektoren keine Bedeutung beigemessen werden sollte. Demzufolge wird der Erklärungsgehalt der modellbasierten Korrelationsstruktur beeinträchtigt und die marktextrahierte Zielkorrelationsmatrix kann nicht perfekt reproduziert werden. Vor diesem Hintergrund wird erneut die nichtlineare Kalibrierungsroutine aus dem letzten Abschnitt - technisch der *Davidon-Fletcher-Powell* Methode nachempfunden - mit der Zielsetzung appliziert, Caplets unter Beibehaltung der gewählten Parametrisierung der instantanen Volatilitätsfunktion (3.66) exakt preisen zu können und gleichzeitig die exogene Marktkorrelationsmatrix optimal zu approximieren:

$$\min_{\{\theta_{ik}, k=1, \dots, m\}} \Delta^2 = \sum_{i,j=1}^n \omega_{ij} \left(\rho_{ij}^{\text{markt}} - \rho_{ij}^{\text{modell}} \right)^2 = \sum_{i,j=1}^n \omega_{ij} \left(\rho_{ij}^{\text{markt}} - \sum_{k=1}^m b_{ik} (b_{jk})^T \right)^2 \quad (3.69)$$

Basierend auf einer stilisierten Zinsstruktur determiniert durch $n = 10$ *Forward Rates* wird die Marktkorrelationsmatrix ρ_{ij}^{markt} mittels Funktion (3.62) beschrieben, deren Parameter $long_corr = 0.6$ und $decay_const = 0.1$ in einem separaten Schritt unabhängig geschätzt worden sind. Anfangs beinhaltet die Matrix ω_{ij} identische konstante Gewichtungsfaktoren, um die bestmögliche globale Anpassung zu bewirken. Die optimale Lösung für verschiedene Faktorisierungen des Modells wird zur Veranschaulichung graphisch dargestellt:

¹⁹⁷ Es lässt sich unmittelbar zeigen, dass ein solcher funktionaler Zusammenhang dem Normierungszwang

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m b_{ik}^2 = 1 \text{ unterliegt: Mit } j = m - 1 \Rightarrow & b_{i1}^2 + \sum_{k=1}^j b_{ik}^2 + b_{im}^2 = b_{i1}^2 + \sum_{k=1}^{j-1} b_{ik}^2 + \cos(\theta_{ij}^2)\sin(\theta_{i1}^2)\dots\sin(\theta_{i(j-1)}^2) \\ & + \sin(\theta_{i1}^2)\dots\sin(\theta_{i(m-1)}^2) = b_{i1}^2 + \sum_{k=1}^{j-1} b_{ik}^2 + \sin(\theta_{i1}^2)\dots\sin(\theta_{i(j-1)}^2) [\cos(\theta_{ij}^2) + \sin(\theta_{ij}^2)] = \dots = \cos(\theta_{i1}^2) + \\ & \sin(\theta_{i1}^2) [\cos(\theta_{i2}^2) + \sin(\theta_{i2}^2)] = \cos(\theta_{i1}^2) + \sin(\theta_{i1}^2) = 1 \end{aligned}$$

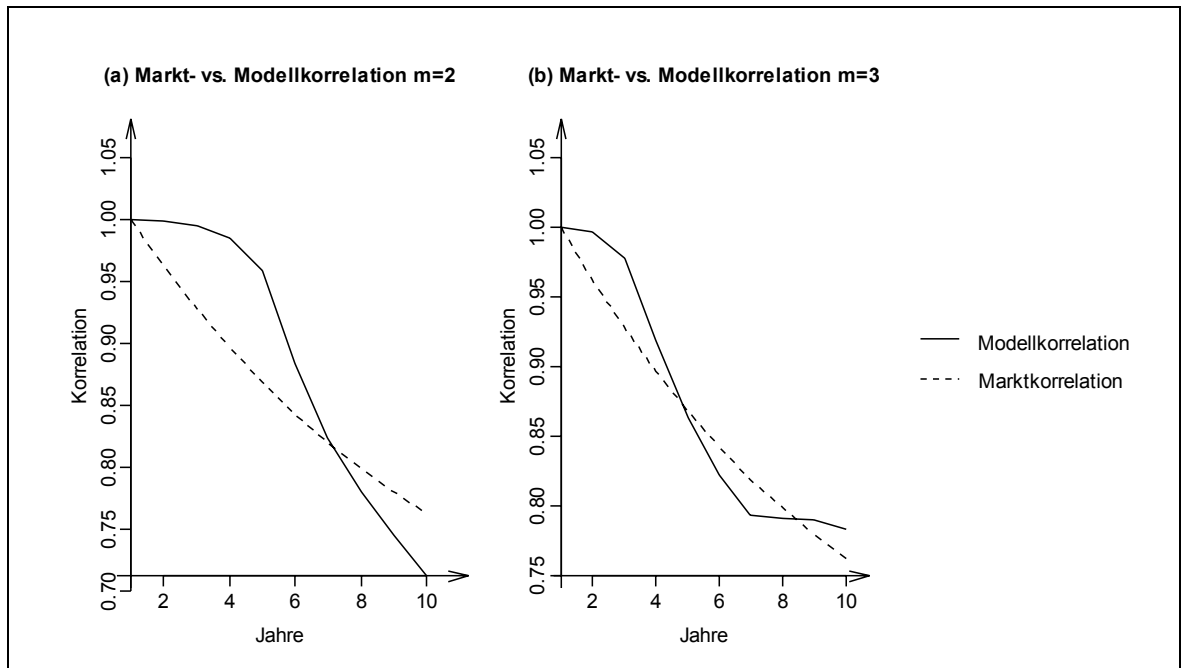


Abb. 3-3 Die instantane Korrelationsfunktion basierend auf einer Zwei- bzw. Drei-Faktoren-Implementierung

(a) und (b) Die Korrelation zwischen der ersten Zwölfmonats-*Forward Rate* und den folgenden neun entlang der Zinsstruktur für die Zielkorrelationsmatrix und die Modellkorrelationsmatrix, die als die optimale Lösung nach der bestmöglichen globalen Kalibrierung auf der Basis von zwei bzw. drei Faktoren, $m=2$ resp. $m=3$, ermittelt worden ist. Markant ist die Unfähigkeit der gewählten Faktorisierung, die schnelle Dekorrelation impliziert durch die Zielkorrelation zwischen der ersten, zweiten und dritten *Forward Rates* herbeizuführen. Begründet in der reduzierten Dimensionalität ist diese Eigenschaft bei der Implementierung mit $m=2$ deutlich stärker ausgeprägt.

Die Verbesserung des Fittings geht mit der Erhöhung der Anzahl der Modellierungsfaktoren einher, wie folgende Abbildung visualisiert:

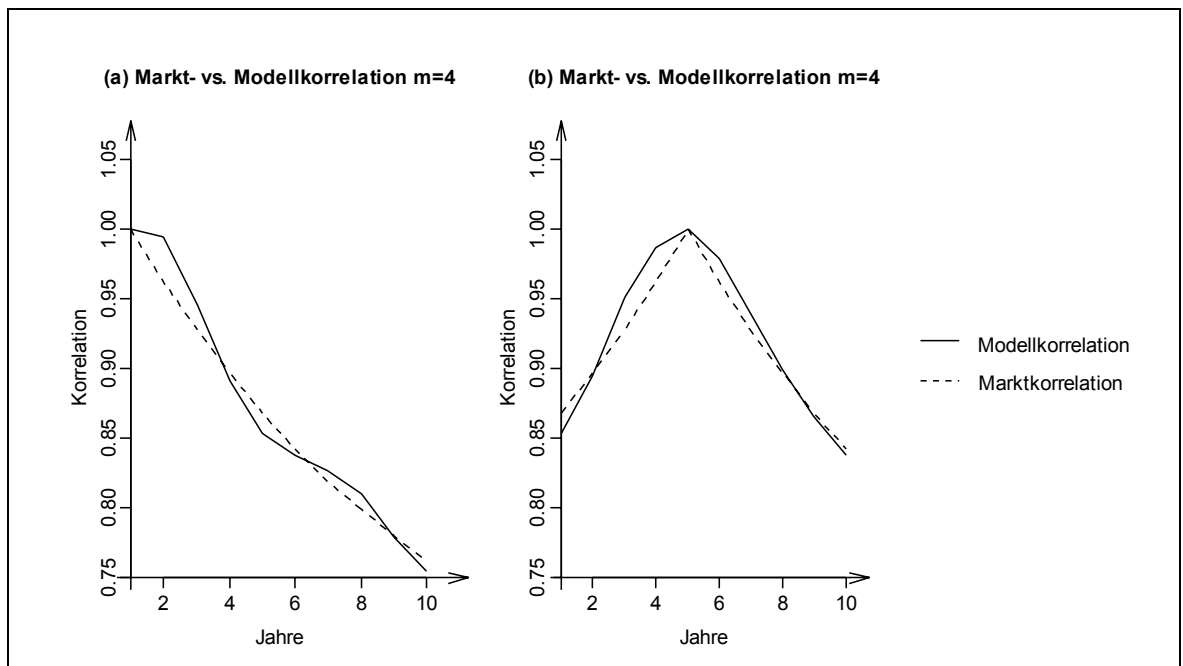


Abb. 3-4 Die instantane Korrelationsfunktion basierend auf einer Vier-Faktoren-Implementierung

(a) Die Korrelation zwischen der ersten Zwölfmonats-*Forward Rate* und den folgenden neun entlang der Zinsstruktur für die Zielkorrelationsmatrix und die Modellkorrelationsmatrix, die als die optimale Lösung nach der bestmöglichen globalen Kalibrierung auf der Basis von vier Faktoren, $m=4$, ermittelt worden ist.

(b) wie in (a), allerdings wird die Korrelation zwischen der fünften Zwölfmonats-*Forward Rate* und den restlichen neun *Forward Rates* dargestellt.

Um spezifische Eigenschaften exotischer Zinsprodukte einzufangen, können variable Gewichtungsfaktoren ω_{ij} der Funktion der quadrierten Distanz Δ^2 zugeordnet werden:

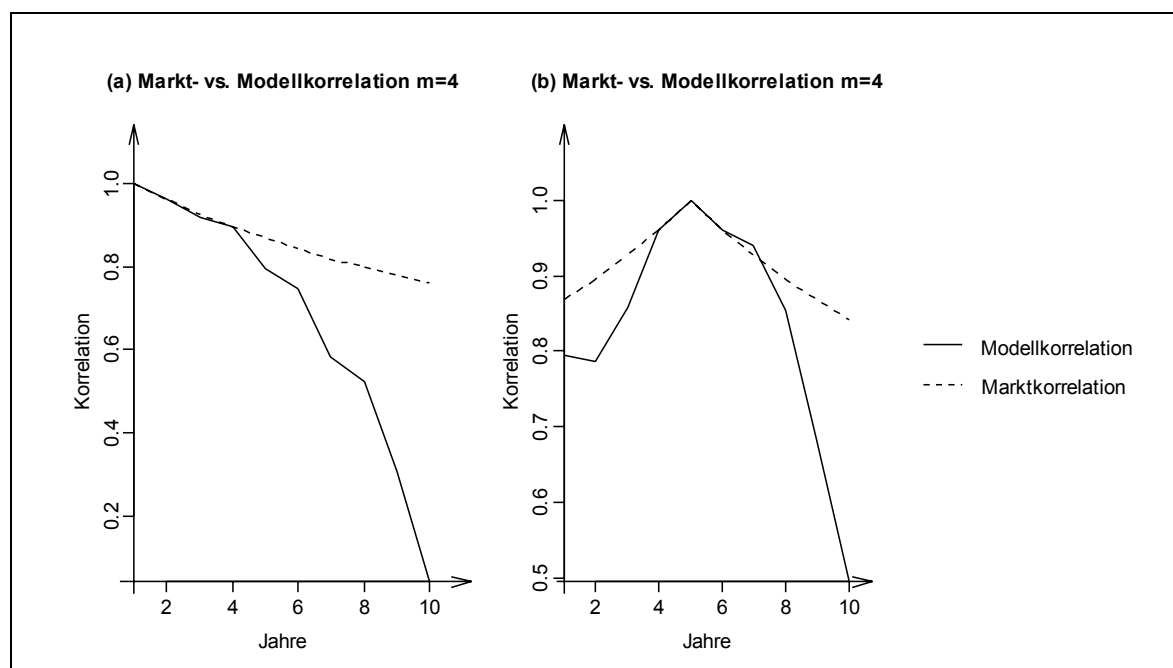


Abb. 3-5 Die instantane Korrelationsfunktion basierend auf einer Vier-Faktoren-Implementierung mit variablen Gewichtungsfaktoren

Die obige Abbildung spiegelt die Bemühung wider, die Korrelation zwischen unmittelbar angrenzenden *Forward Rates* zulasten derer zwischen weit auseinander liegenden *Forward Rates* exakt wiederzugeben. Der optimalen Reproduktion der Nebendiagonalen (ober- und unterhalb der Hauptdiagonale) wird größere Bedeutung als dem Rest der Korrelationsmatrix beigemessen. Diese Vorgehensweise wäre beispielsweise bei der Bewertung von Ratchet Caps geeignet, die eine Reihenfolge von Caplets mit stochastischen, eine Periode früher gefixten Strikes darstellen, da der Payoff ausschließlich durch aufeinander folgende *Forward Rates* determiniert wird:

$$RatchetCap_N = \sum_{j=1}^N \max\left(f(T_j, T_j, T_{j+1}) - [f(T_{j-1}, T_{j-1}, T_j) + h], 0\right), \quad h - const.$$

Es ist wichtig festzuhalten, dass in Abhängigkeit vom zu bewertenden Zinsderivat nahezu beliebige Abschnitte der Marktkorrelationsmatrix anhand der vorgeschlagenen Anpassungsroutine wiedergegeben werden können. Die Entscheidung über das relevante Segment und das notwendige Instrumentarium für die anschließende Kalibrierung liegen in der Hand des Modellanwenders.

346 Die Kongruenz zwischen Caplet- und Swaptionmärkten

Bei der Bewertung von komplexen Finanzstrukturen muss man fast immer auf die “Joint-Dynamics” von *Forward* und *Swap Rates* achten, da praktisch der Preis keines exotischen Produkts ausschließlich von den Volatilitäten und Korrelation zwischen homogenen Zustandsvariablen abhängt. Beispielsweise wird der Wert eines Trigger Swaps separat durch die Volatilität des Trigger (*Forward Rate*) und die Volatilität des *Underlying* (*Swap Rate*) beeinflusst, er wird aber gleichzeitig auch durch die Korrelation zwischen den beiden Zustandsvariablen determiniert. Darüber hinaus kann sich die relative Wichtigkeit der exakten Kalibrierung an die *Forward /Swap Rate*-Volatilitäten oder an die Korrelation zwischen den beiden je nach *In/Out-of-the-Moneyness* Level der Barriere ändern, wobei im Falle eines Multi-Look Trigger Swaps zusätzlich noch die *Forward Rate/Forward Rate*-Korrelation eine größere Bedeutung erlangt. Daher ist für eine robuste und verlässliche Modellimplementierung essentiell, die simultane Plausibilität der durch die gewählte Parametrisierung erzwungenen Werte all dieser Variablen zu überprüfen. Es ist extrem wichtig die Implikationen der anwenderspezifischen Dynamik der *Forward Rates* für die Entwicklung der *Swap Rates* und umgekehrt festzustellen. Nachdem die zeitabhängige Volatilitätsfunktion und die instantane Korrelation für die *Forward Rate*-basierte Umsetzung festgelegt worden sind, gilt es zu untersuchen, wie sich daraus schnell und effektiv die implizite Swaptionsmatrix ergibt und wie sich Markt- und Modellpreise von Swaptions zueinander verhalten.

Angeregt durch diese Diskussion wird in den nachfolgenden Abschnitten die Kalibrierung an implizite *Black*-Volatilitäten von Caplets unter der Nebenbedingung der Implikation einer nichtpathologischen Form der *Forward Rate/ Forward Rate* und *Swap Rate/Swap Rate*-Korrelationsmatrix untersucht, bevor anschließend der Versuch unternommen wird, an Swaptionmärkte zu kalibrieren und gleichzeitig die bestmögliche Anpassung an Marktpreise von Caplets zu gewährleisten, i. e. eine Joint-Kalibrierung.

3461 Die Implikationen einer Forward Rate-basierten Modellimplementierung und -kalibrierung für die Swap Rate-Kovarianzmatrix

Der Zinsswap ist ein unbedingter Finanzkontrakt über den Austausch einer Reihe von variablen und fixen Zinszahlungen. Auf der Basis von Payment-Zeitpunkten zwischen $T_{\alpha+1}$ und T_{β} , $\beta > \alpha$, zahlt das *Fixed Leg* jedes Mal $\tau_i K$ zum Zeitpunkt T_{i+1} , $i = \alpha, \dots, \beta - 1$ und $\tau_i = T_{i+1} - T_i$, als Gegenleistung für Zahlungen aus dem *Floating Leg* in Höhe von $\tau_i f_i(T_i)$. Mit *Reset*- und *Payout*-Zeiten für die zugrunde liegenden *Forward Rates*, lässt sich der Preis des Zinsswaps zum Zeitpunkt $t < T_{\alpha}$ folgendermaßen determinieren:

$$Swap_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{i=\alpha}^{\beta-1} \tau_i B(t, T_{i+1}) [f_i(t) - K] \quad (3.70)$$

Die faire (*Forward*) *Swap Rate* bezeichnet diejenige Fixrate K , bei der der Barwert des Kontrakts gerade Null ist und kann mit (3.33) wie folgt berechnet werden:

$$S_{\alpha,\beta}(t) = \frac{\sum_{i=\alpha}^{\beta-1} \tau_i B(t, T_{i+1}) f_i(t)}{\sum_{i=\alpha}^{\beta-1} \tau_i B(t, T_{i+1})} = \frac{B(t, T_\alpha) - B(t, T_\beta)}{\sum_{i=\alpha}^{\beta-1} \tau_i B(t, T_{i+1})} = \sum_{i=\alpha}^{\beta-1} w_i f_i(t), \quad w_i(t) = \frac{\tau_i B(t, T_{i+1})}{\sum_{i=\alpha}^{\beta-1} \tau_i B(t, T_{i+1})} \quad (3.71)$$

Die letzte Gleichheitsbeziehung ist für den Forschungszweck dieses Abschnitts extrem wichtig, da sie die *Swap Rate*-Dynamik in einer *Forward Rate*-basierten Modellierungsumgebung unmittelbar erschließt. Die instantane Volatilitätsfunktion der *Swap Rate* erhält man durch die direkte Applikation von *Ito's* Lemma:

$$\sigma_{\alpha,\beta}^2 = \frac{\sum_{i=\alpha}^{\beta-1} \sum_{j=\alpha}^{\beta-1} \left[\partial S_{\alpha,\beta}(t) / \partial f_i(t) \right] \left[\partial S_{\alpha,\beta}(t) / \partial f_j(t) \right] f_i(t) f_j(t) \sigma_i(t) \sigma_j(t) \rho_{ij}}{\left[\sum_{i=\alpha}^{\beta-1} w_i f_i(t) \right]^2} \quad (3.72)$$

Die *Swap Rate* hängt von jeder *Forward Rate* $f_i(t)$ auf zweierlei Weise ab: explizit mit dem Gewicht $w_i(t)$ und subtiler durch die Dependenz der gleichen Gewichtungsfunktion $w_i(t)$ von den *Forward Rates* selbst. Die Definition von $w_i(t)$ in (3.71) verleitet zu der Vermutung, dass die Volatilität der Gewichte im Vergleich zur Schwankung der *Forward* and *Swap Rates* vernachlässigbar klein ausfällt. Daher könnte man als eine erste Approximation den impliziten Einfluss der *Forward Rates* auf die *Swap Rate* ignorieren:

$$\text{Mit } \partial S_{\alpha,\beta}(t) / \partial f_i(t) \approx w_i(t) \Rightarrow \sigma_{\alpha,\beta}^2 = \frac{\sum_{i=\alpha}^{\beta-1} \sum_{j=\alpha}^{\beta-1} w_i(t) w_j(t) f_i(t) f_j(t) \sigma_i(t) \sigma_j(t) \rho_{ij}}{\left[\sum_{i=\alpha}^{\beta-1} w_i(t) f_i(t) \right]^2} \quad (3.73)$$

Jäckel/Rebonato und Hull/White¹⁹⁸ verfeinern diese Approximation, indem sie die explizite Dependenz der Gewichtungsfunktion $w_i(t)$ von den *Forward Rates* $f_i(t)$ zulassen. Die sich dadurch ergebende Korrektur der partiellen Ableitung der *Swap Rate* hat eine umso signifikantere Auswirkung auf die Genauigkeit, je steiler die Zinsstrukturkurve verläuft.

¹⁹⁸ Vgl. (1) P. Jäckel, R. Rebonato, "Linking Caplet and Swaption Volatilities in a BGM/J Framework: Approximate Solutions", QUARC Working Paper (2001), Royal Bank of Scotland. (2) J. Hull, A. White, "Forward Rate Volatilities, Swap Rate Volatilities and the Implementation of the Libor Market Model", Journal of Fixed Income 10 2 (2000), S. 46-62.

Für eine nahezu flache Zinsstruktur, ist die Approximation in (3.73) sehr präzise. Unabhängig voneinander entwickelt, erweisen sich die beiden Ansätze als identisch, sobald deren unterschiedliche Notationsweisen in Einklang gebracht worden sind.

Auf der Basis einer völlig deterministischen Volatilitätsstruktur der *Forward Rates* gelangt man zu einem relativ komplexen Ausdruck für die instantane Volatilität der entsprechenden *Swap Rate*, die stochastisch durch ihre Dependenz von der zukünftigen Realisation der *Forward Rates* und der Gewichte ist. Die Konsequenz daraus ist viel weit reichender als die verbreitete und vollkommen korrekte Schlussfolgerung, dass die lognormale Evolution der *Forward Rates* niemals mit einer lognormalen Entwicklung der *Swap Rates* kompatibel sein kann. Die Ermittlung der totalen *Black*-Volatilität der zugrunde liegenden Swaption erfordert die Integration der instantanen *Swap Rate*-Volatilität in (3.73):

$$\left[\sigma_{\alpha, \beta}^{Black} \right]^2 T_{\alpha} = \int_0^{T_{\alpha}} \sigma_{\alpha, \beta}^2(s) ds \quad (3.74)$$

Allerdings ist das Integral zustandsabhängig und jeder einzelne Pfad aus der Evolution der Zinsstruktur resultiert in einer unterschiedlichen instantanen *Swap Rate*-Volatilität. Aus diesem Grund kann die stochastische Größe auf der rechten Seite nicht unmittelbar der (pfadunabhängigen) reellen Zahl - der *Black*-Volatilität - gleichgesetzt werden. Die Bewertung von mehreren Swaptions gleichzeitig scheint eine äußerst mühselige Aufgabe zu sein, die zusätzlich durch die vorausgehende Durchführung der Optimierungsroutine zur Kalibrierung der parametrisierten instantanen *Forward Rate*-Volatilitäten erschwert wird. Einige leistungsfähige Approximationen¹⁹⁹ existieren dennoch, die sowohl einfache als auch komplexere Veränderungen in der Renditestruktur berücksichtigen. Oft beeinflusst die erste Hauptkomponente (der erste Eigenwert in der Hauptkomponentenanalyse) am stärksten die Variabilität der Zinskurve. Dadurch wird eine parallele Verschiebung²⁰⁰ herbeigeführt mit der Konsequenz, dass die Gewichte $v_{ij}(t)$ ²⁰¹ der Kovarianzterme $\sigma_i(t)\sigma_j(t)\rho_{ij}$ in (3.73) sehr schwach von der stochastischen Realisation der *Forward Rates* abhängen. Eine intuitive Erklärung dafür ist die Tatsache, dass die *Forward Rates* sowohl im Zähler als auch im Nenner der instantanen *Swap Rate*-Volatilität enthalten sind und sich dadurch identische Schocks größtenteils gegenseitig aufheben. Bei Deformierungen der Zinskurve im

¹⁹⁹ Vgl. R. Rebonato, "Modern Pricing of Interest-Rate Derivatives: The Libor Market Model and Beyond", Princeton University Press (2002), S. 296-304.

²⁰⁰ Eine Ein-Faktor-Implementierung des Modells (ein einziger Eigenwert) impliziert perfekte instantane Korrelation zwischen den Liborsätzen und lässt nur parallele Verschiebungen der Zinsstrukturkurve zu.

²⁰¹ $v_{ij}(t) = w_i(t)w_j(t)f_i(t)f_j(t) / \left[\sum_{i=\alpha}^{\beta-1} w_i(t)f_i(t) \right]^2$.

Sinne von Änderungen in der Steigung und der Konvexität werden $v_{ij}(t)$ deutlich variabler aufgrund der Einbeziehung von Hauptkomponenten höheren Grades. Entscheidend ist jedoch die Feststellung, dass sich die individuellen Gewichte assoziiert mit positiven und negativen Stress-Szenarien gleichen Ausmaßes in der Erwartung erstaunlich konstant verhalten. Diese symmetrischen Verformungen sind gleich wahrscheinlich und auf der Basis einer hohen Anzahl von Pfadsimulationen wird jeder Schock der Zinsstruktur mit derselben Frequenz auftreten wie sein antithetisches Pendant. Selbst wenn höhere Hauptkomponenten die *Forward Rate Curve* beeinflussen, entspricht die Erwartung der stochastischen Variablen in (3.73) fast perfekt der instantanen *Swap Rate*-Volatilität, die mit den aktuellen Werten $\{w(0)\}$ und $\{f(0)\}$ berechnet wird:

$$\sigma_{\alpha,\beta}^2 = \frac{\sum_{i=\alpha}^{\beta-1} \sum_{j=\alpha}^{\beta-1} \left[\partial S_{\alpha,\beta}(t) / \partial f_i(t) \Big|_{t=0} \right] \left[\partial S_{\alpha,\beta}(t) / \partial f_j(t) \Big|_{t=0} \right] f_i(0) f_j(0) \sigma_i(t) \sigma_j(t) \rho_{ij}}{\left[\sum_{i=\alpha}^{\beta-1} w_i f_i(0) \right]^2} \quad \text{bzw.} \quad (3.75)$$

$$\text{mit } \partial S_{\alpha,\beta}(t) / \partial f_i(t) \Big|_{t=0} \approx w_i(0) \Rightarrow \sigma_{\alpha,\beta}^2 = \frac{\sum_{i=\alpha}^{\beta-1} \sum_{j=\alpha}^{\beta-1} w_i(0) w_j(0) f_i(0) f_j(0) \sigma_i(t) \sigma_j(t) \rho_{ij}}{\left[\sum_{i=\alpha}^{\beta-1} w_i(0) f_i(0) \right]^2}$$

Die erwartete durchschnittliche *Black*-Volatilität nähert sich der integrierten instantanen *Swap Rate*-Volatilität mit auf dem heutigen Level „eingefrorenen“ $\{w\}$ und $\{f\}$ an:

$$\text{Mit } v_{ij}(0) = \frac{w_i(0) w_j(0) f_i(0) f_j(0)}{\left[\sum_{i=\alpha}^{\beta-1} w_i(0) f_i(0) \right]^2} \Rightarrow \left[\sigma_{\alpha,\beta}^{Black} \right]^2 T_\alpha = \int_0^{T_\alpha} \sigma_{\alpha,\beta}^2(s) ds \approx \quad (3.76)$$

$$\int_0^{T_\alpha} \sum_{i=\alpha}^{\beta-1} \sum_{j=\alpha}^{\beta-1} v_{ij}(0) \sigma_i(s) \sigma_j(s) \rho_{ij} ds = \sum_{i=\alpha}^{\beta-1} \sum_{j=\alpha}^{\beta-1} v_{ij}(0) \rho_{ij} \int_0^{T_\alpha} \sigma_i(s) \sigma_j(s) ds$$

Die zweiteilige Approximation (3.73) und (3.76) ermöglicht die präzise analytische Bewertung von Swaptions in einer Libor-basierten Modellierungsumgebung und ersetzt die Notwendigkeit einer zeitintensiven *Monte Carlo*-Simulation.

Die folgenden Abbildungen visualisieren separat den Effekt der Drei- und Fünf-Faktoren *Forward Rate*-fundierten Modellimplementierung auf die *Swap Rate*/*Swap Rate* Korrelationsstruktur, die sich aus der implizit ermittelten Kovarianzmatrix und den totalen *Black*-Volatilitäten ergibt.

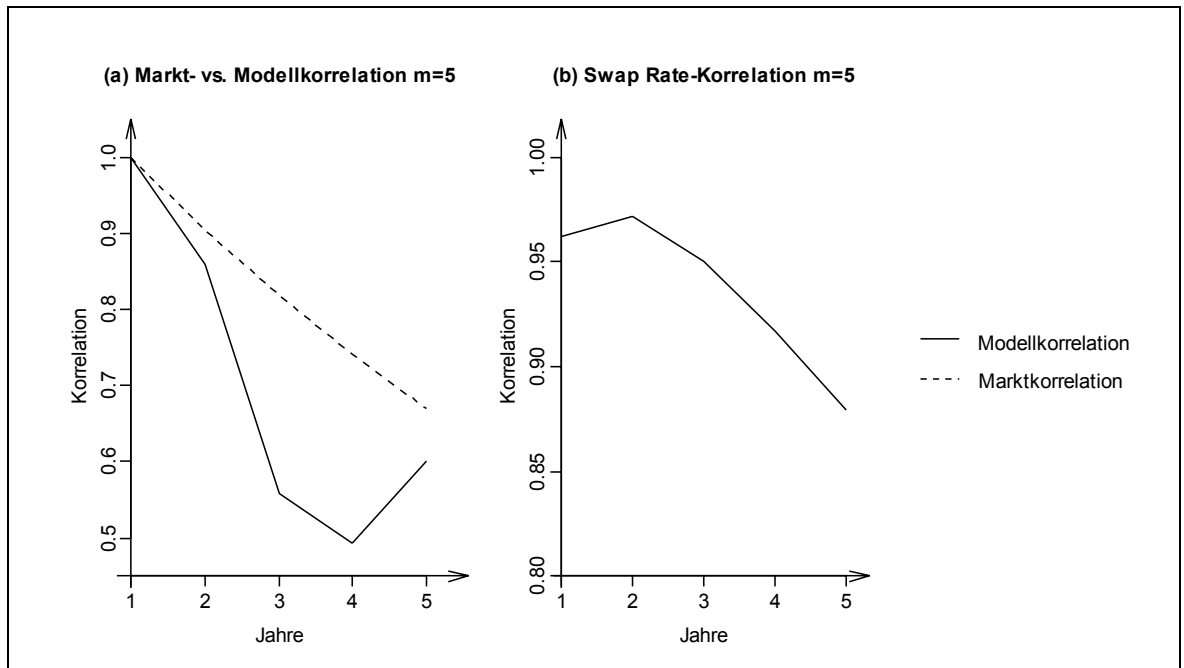


Abb. 3-6 Forward Rate- und implizite Swap Rate-Modellkorrelationsfunktionen in einem Fünf-Faktoren-Setting

(a) Die Korrelation zwischen der ersten Sechsmonats-*Forward Rate* und den folgenden vier entlang der stilisierten Zinsstruktur für die Zielkorrelationsmatrix und die Modellkorrelationsmatrix, die als die optimale Lösung nach der bestmöglichen globalen Kalibrierung auf der Basis von fünf Faktoren, $m=5$, ermittelt worden ist.

(b) Die implizite Modellkorrelation zwischen der ersten Sechsmonats-*Swap Rate* und den folgenden vier basiert auf der bestmöglichen globalen Kalibrierung an Capletmärkte.

Die Fünf-Faktoren-Modellausführung resultiert in einer perfekten Reproduktion der Hauptdiagonale der Marktkovarianzmatrix, d.h. Capletpreise werden vom Modell komplett wiedergegeben, gleichzeitig jedoch in äußerst pathologischen Korrelationsfunktionen.

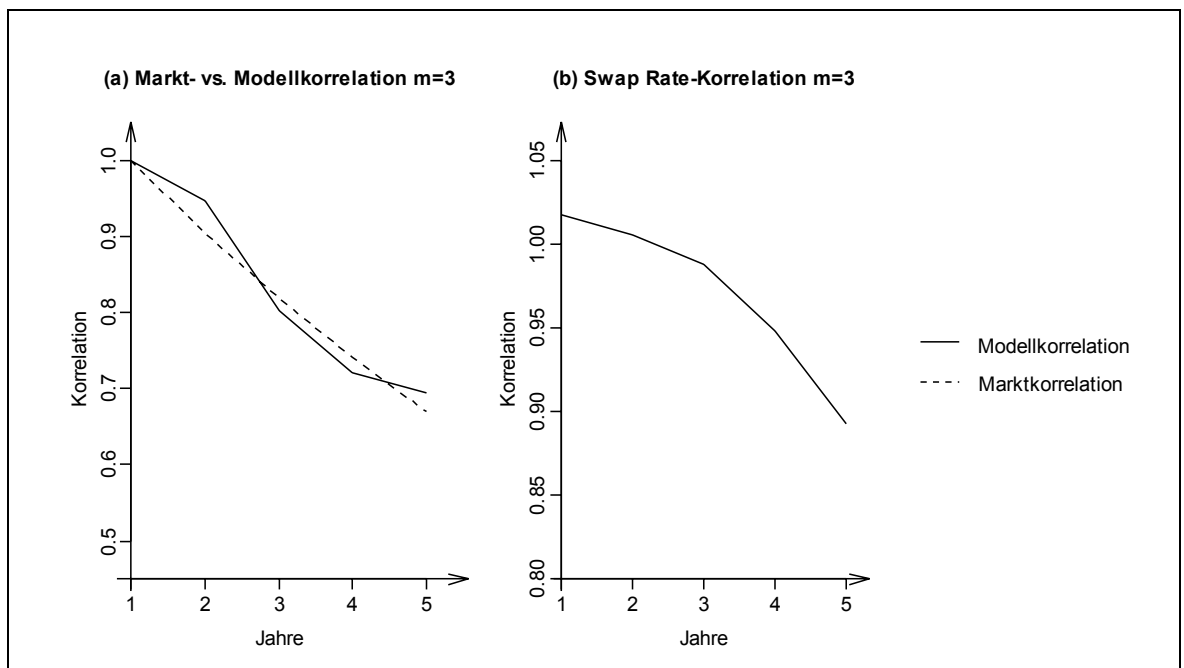


Abb. 3-7 Forward Rate- und implizite Swap Rate-Modellkorrelationsfunktionen in einem Drei-Faktoren-Setting

Im Gegensatz dazu zeigt die Drei-Faktoren-Modellimplementierung, dass die Hinnahme eines tolerablen Fehlers bei der Bewertung der Caplets durch eine bessere globale Anpassung an die Marktkovarianzmatrix und Produktion plausibler Korrelationsstrukturen mehr als aufgewogen werden kann.

Außer auf die Modellkorrelationsform insgesamt sei die Aufmerksamkeit des Lesers auch auf den Ordinatenabschnitt in (b) gelenkt. Da die *Swap Rate*-Korrelation implizit aus der in einem Libor-gestützten Konstruktionsumfeld entstandenen *Swap Rate/Swap Rate* Kovarianzmatrix und den Marktvolatilitäten ermittelt wird, bedeutet die Abweichung von 1 auf der Ordinate, dass Swaptionpreise nicht perfekt repliziert werden können. Im Umkehrschluss impliziert die Erzwingung der simultanen Kalibrierung an beide *Plain Vanilla* Optionsmärkte eine Korrelation der *Swap Rate* mit sich selbst ungleich 1. Caplet- und Swaptionmärkte scheinen inkongruent zu sein.

3462 Joint-Kalibrierung an Caplet- und Swaptionmärkte

Im Folgenden wird der Versuch einer simultanen Kalibrierung der modelltheoretischen *Forward* und *Swap Rate*-Kovarianzmatrizen an die entsprechenden Marktkovarianzmatrizen unternommen. In Anlehnung an Abschnitt 3442 wird zunächst eine plausible Funktionsform für die *Swap Rate*-Zielkorrelationsmatrix vorgeschlagen, deren Parameter durch ökonometrische Schätzung bereits ermittelt worden sind und für die zu entwickelnde Anpassungsroutine als exogen vorgegeben angenommen werden. Betrachtet werden koterminale *Swap Rates* $S_i^n(t)$ mit gemeinsamer *Payout*-Zeit T_n und diversen *Reset*-Zeiten T_i , die sich als Funktion der zugrunde liegenden *Forward Rates* ausdrücken lassen:

$$S_i^n(t) = S(t, T_i, T_n) = \left(\prod_{j=i}^{n-1} [1 + \tau_j f_j(t)] - 1 \right) / \sum_{k=i+1}^{n-1} \prod_{j=k}^{n-1} \tau_j [1 + \tau_j f_j(t)], \quad \tau_j = T_{j+1} - T_j \quad (3.77)$$

Basierend auf zwei entscheidenden Schlussfolgerungen, die leicht zu beweisen sind, wird die Korrelation zwischen $S_i^n(t)$ und $S_k^n(t)$ durch folgende stationäre Funktion generiert:

$$\rho_{sr_{ik}} = long_corr_sr + (1 - long_corr_sr) e^{-decay_sr |T_i - T_k| - \alpha \cdot \max(T_i, T_k)} \quad (3.78)$$

Ausgehend von der Definition (3.77) wird erstens eine *Swap Rate*-Korrelation größer als die Korrelation zwischen den entsprechenden *Forward Rates* festgestellt, $\rho_{S_i^n, S_k^n} > \rho_{f_i, f_k}$.

Dieser Effekt wird durch die Wahl einer niedrigeren Dekorrelationsgeschwindigkeit erreicht, $decay_sr < decay_const$, mit $decay_const$ aus (3.62). Darüber hinaus sinkt die Dekorrelation entlang der Nebendiagonalen, $\rho_{S_i^n, S_{i+1}^n} > \rho_{S_{i+1}^n, S_{i+2}^n} > \rho_{S_{i+2}^n, S_{i+3}^n} > \dots$, weil immer

weniger *Forward Rates* ihren Einfluss auf die Dynamik der *Swap Rates* entfalten. Diesem Umstand wird mit Hilfe des zusätzlichen Terms $\alpha \cdot \max(T_i, T_k)$ im Exponenten der *Swap Rate*- Korrelationsfunktion (3.78) begegnet.

Die beiden Abbildungen und Tabellen veranschaulichen die Implikationen der simultanen Kalibrierung für die Modell- *Forward und Swap Rate*-Korrelationen und die modelltheoretische Wiedergabe der Markt-Caplet- und Swaptionpreise.

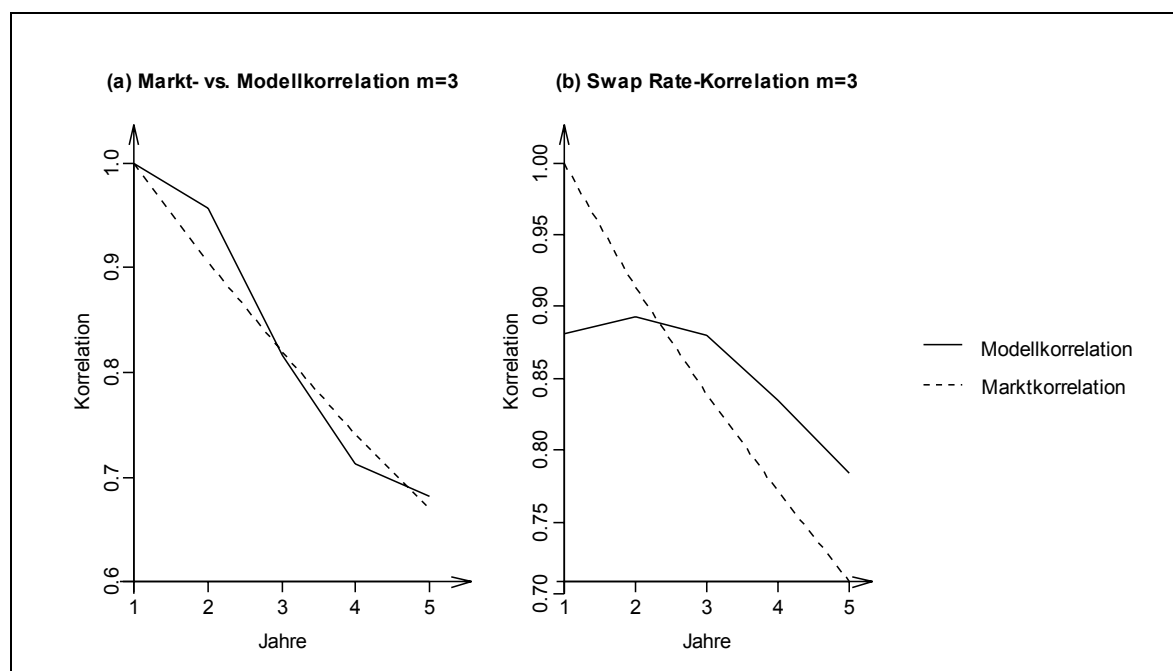


Abb. 3-8 Forward Rate- und Swap Rate-Modellkorrelationsfunktionen in einem Drei-Faktoren-Setting bei simultaner geringfügig übergewichtiger Kalibrierung, $w_cap=0.59$, an Caplet- als an Swaptionmärkte

| | | | | | |
|--------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Ziel-Forward Rate-Vola | 0.2 | 0.22 | 0.2 | 0.19 | 0.185 |
| Modell-Forward Rate-Vola | 0.181650 | 0.194081 | 0.192385 | 0.184439 | 0.18448 |
| Ziel-Swap Rate-Vola | 0.1831 | 0.1868 | 0.1821 | 0.1819 | 0.185 |
| Modell-Swap Rate-Vola | 0.185802 | 0.186527 | 0.186047 | 0.189285 | 0.193363 |

Der Kalibrierungsroutine liegt, ähnlich wie (3.69), folgende Minimierungsvorschrift zugrunde, wobei w_cap resp. $w_swap = 1 - w_cap$ globale und ω_{ij}^f resp. ω_{ij}^s lokale Feinsteuerungsinstrumente zur Gewichtsverteilung bei der Anpassung darstellen, deren Werte sich durch die relative Wichtigkeit der besseren Reproduktion der einen Kovarianzmatrix

gegenüber der anderen (global) bzw. spezifischer Segmente davon (lokal) determinieren lassen:

$$w_cap \sum_{i,j=1}^n \omega_{ij}^f \left(Cov_{ij}^{f\text{-markt}} - Cov_{ij}^{f\text{-modell}} \right)^2 + w_swap \sum_{i,j=1}^n \omega_{ij}^s \left(Cov_{ij}^{s\text{-markt}} - Cov_{ij}^{s\text{-modell}} \right)^2 \quad (3.79)$$

Die Drei-Faktoren-Implementierung liefert einen besseren globalen Fit insgesamt - im Sinne von einem kleineren Minimalwert für (3.79) - und eine plausible wenn auch nicht genau angepasste Funktionsform der *Forward Rate*-Korrelation, scheitert jedoch bei der modellhaften Replizierung der Markt-Optionspreise (Caplets und Swaptions werden nicht präzise gepreist) und resultiert in einer pathologischen Funktionsform der *Swap Rate*-Korrelation. Im Gegensatz dazu werden im Rahmen der Fünf-Faktoren-Modellausführung Caplets perfekt und Swaptions nahezu perfekt bewertet, allerdings verschlechtert sich der globale Fit. Darüber hinaus ergibt sich schon eine deutlich plausiblere Funktionsform der *Swap Rate*-Korrelation, obwohl sie sich durch eine zu geringe Dekorrelationsgeschwindigkeit auszeichnet. Damit verbunden ist aber die gravierende Qualitätsverschlechterung der modellinduzierten *Forward Rate*-Korrelationsfunktion.

Wenn auch nicht extrem inkonsistent, weisen beide Optionsmärkte einen gewissen Grad an interner Inkongruenz auf, die in den meisten Fällen²⁰² auf insuffiziente Liquidität und mangelhafte Angebot/Nachfrage-Bedingungen zurückgeführt wird und sich als Abschreckungsmittel auf die Aktivitäten von Händlern und Arbitrageuren auswirken kann, die ständig dem inhärenten *Trade-Off* zwischen der Güte des Fits möglichst vieler marktbeobachtbarer Größen und der finanzmathematischen Eingängigkeit der restlichen Eigenschaften des Modells (siehe erneut Abschnitt 341) ausgesetzt sind. Die Konsequenzen aus dieser Austauschbeziehung sind weitaus fundamentaler als bloß ein simpler Plausibilitätscheck, der jedem Trader angeraten ist, um die Übereinstimmung seiner Modellsichtweise (im Sinne von gewählter Parametrisierungsform) mit der dadurch implizierten zukünftigen Evolution des Marktes zu gewährleisten. Angesichts der Beinaheunmöglichkeit, eine vollständige Vereinbarkeit beider Optionsmärkte zu erzwingen, birgt der obsessive Überkalibrierungsdrang die Gefahr in sich, die Initialkosten zur Aufstellung der Replikationsportfolios im Rahmen einer selbstfinanzierenden dynamischen Tradingstrategie, die den terminalen *Payoff* des Derivats durch kontinuierliche Transaktionen im *Underlying* reproduziert und von jedem arbitragefreien Preismodell vorausgesetzt wird, falsch einzuschätzen. Schließ-

²⁰² Eine alternative Erklärung wäre auch die Annahme inadäquater parametrischer Formen für die instantanen Volatilitäts- und Korrelationsfunktionen. Die zukünftigen Änderungen der Volatilitätsstruktur müssen nicht deterministischer Natur sein und können einem stochastischen Gesetz unterliegen.

lich ist diese Feststellung lediglich ein Euphemismus für die Unfähigkeit der gewählten Modellparametrisierung, den “richtigen” Wert des exotischen Produkts zu ermitteln.

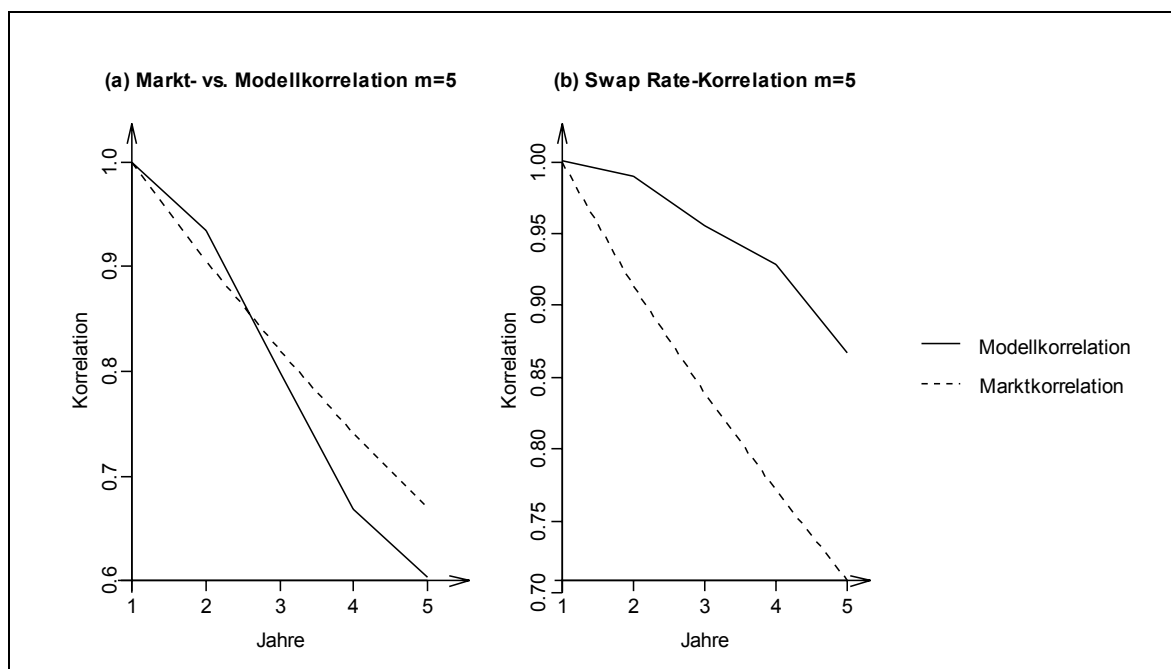


Abb. 3-9 Forward Rate- und Swap Rate-Modellkorrelationsfunktionen in einem Fünf-Faktoren-Setting bei simultaner gleichgewichtiger Kalibrierung, $w_{cap}=0.5$, an Caplet- und Swaptionmärkte

| | | | | | |
|--------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Ziel-Forward Rate-Vola | 0.2 | 0.22 | 0.2 | 0.19 | 0.185 |
| Modell-Forward Rate-Vola | 0.19999 | 0.219936 | 0.199979 | 0.189969 | 0.184997 |
| Ziel-Swap Rate-Vola | 0.1831 | 0.1868 | 0.1821 | 0.1819 | 0.185 |
| Modell-Swap Rate-Vola | 0.183103 | 0.186811 | 0.182546 | 0.1819 | 0.185006 |

4 Weiterentwicklungen und zukünftige Forschungsarbeit

Die mit beunruhigender Leichtigkeit erzielbare simultane Kalibrierung an mehrere Marktvariable auf beiden Optionsmärkten geht mit einem unbefriedigenden Nebeneffekt einher. Obwohl zweifellos sehr wichtig wegen der exakten Widerspiegelung der aktuellen Hedgekosten für den Trader, führt der perfekte Fit im Rahmen eines überkalibrierten Modells eine zeitinstationäre, teilweise positiv pathologische Evolution der Inputfunktionen (z. B. der instantanen Korrelationsfunktion) herbei und erzwingt die Einführung einer inhomogenen, zeitabhängigen instantanen Volatilitätsfunktion (vgl. die Diskussion im Abschnitt 3.4.1, insb. Formel (3.61)). Die Bemühung um die Konstruktion zeithomogener Modellgrößen wird nicht einfach durch ein ästhetisches Streben diktiert, sondern hängt mit der Vorhersagbarkeit der zukünftigen Evolution zusammen, die eine Ähnlichkeit zur beobachteten Vergangenheit aufweist. Die Implikation einer unplausiblen zukünftigen Entwicklung der Einflussfaktoren erfordert kontinuierliche Rekalibrierung des Modells, um die Ermittlung der "falschen" zukünftigen Re-Hedgekosten zu vermeiden. Sogar wenn die Kovarianzstrukturen, die das Modell vollständig beschreiben, deterministischen Gesetzmäßigkeiten gehorchen, sind sie dem Trader zunächst unbekannt. Aufgrund der unperfekten Information, ist der Markt unvollständig und dem Händler stehen übermäßig viele Freiheitsgrade bei der Modellkonstruktion zur Verfügung. Es ist jedoch wichtig, dass er selbst diese Freiheitsgrade reduzieren kann, indem er seine persönliche Sichtweise zum Ausdruck bringt bzw. sich für eine bestimmte Modellimplementierung entscheidet und nicht exogen durch ein unflexibles, überkalibriertes Modell in seinen Wahlmöglichkeiten eingeschränkt wird.

Erschwerend kommt noch hinzu, dass die Volatilitäten keineswegs deterministisch zu sein scheinen, wenn aber stochastisch, dann lässt sich deren Verhalten wahrscheinlich nicht in einer einfachen Diffusionsumgebung erklären. Die unumstrittene Marktpräsenz einer Caplet-Volatilitätsebene - einer separaten Volatilitätskurve in Abhängigkeit vom Basispreis für jede Capletfälligkeit - indiziert die zwingende Existenz alternativer Dynamiken für die *Forward Rates*, so dass die resultierenden Capletpreise, ausgedrückt durch die impliziten *Black*-Volatilitäten, eine von der flachen, mit der lognormalen Dynamik konsistenten Struktur abweichende Dependenz vom Strike aufweisen.

Ursprünglich für den *Equity*-Markt entwickelt, extrahiert der *Local Volatility*-Ansatz²⁰³ aus Optionspreisen in der Umgebung von der Fälligkeit T und dem Strike K (zweimal differen-

²⁰³ Vgl. (1) B. Dupire, "Pricing with a Smile", RISK January (1997), S. 18-20. (2) E. Derman, I. Kani, "Stochastic Implied Trees: Arbitrage Pricing with Stochastic Term and Strike Structure of Volatility", International Journal of Theoretical and Applied Finance 1 1 (1998), S. 61-110.

zierbarer Volatilitätssmile) direkte Informationen, um eindeutige Diffusionskoeffizienten eines alternativen Prozesses für das *Underlying* zu determinieren. Aufgrund der Notwendigkeit einer sehr feinen Interpolationstechnik ist das Modell in der Realität kaum praktikabel und prognostiziert darüber hinaus in der Umgebung eines deutlich ausgeprägten *Smile* eine Verschiebung der Volatilitätsstruktur, die der Evolution des Basiswertes entgegengesetzt ist und folglich im Widerspruch zum typischerweise zu beobachtenden Marktverhalten steht, das die Gleichläufigkeit von Volatilitätssmile und *Underlying* demonstriert²⁰⁴. Aus diesem Grund sind die im Rahmen des *Local Volatility*-Modells ermittelten Hedgeparameter irreführend. Obwohl das Modell konstruktionstechnisch über alle Strikes hinweg in sich konsistent bleibt und folglich die Aggregation der Risiken aller Optionen auf das gleiche *Underlying* erlaubt²⁰⁵, liefert es im Vergleich zur (inkonsistenten) Markt-Benchmark (dem *Black*-Modell) weniger präzise Hedges.

Es existieren zwei Klassen von eng zusammenhängenden Diffusionsmodellen, die gleichzeitig nicht flache implizite Volatilitätskurven zu einem gewissen Grad an Flexibilität erklären können und die Vollständigkeit des Marktes aufrechterhalten. In der Tat erschließen alle anderen Smile-reproduzierenden Mechanismen, die entweder deterministische (im Fall von Jump-Diffusion mit deterministischen Parametern) oder stochastische (im Fall von Jump-Diffusion mit stochastischen Parametern) Volatilitätsebenen zur Folge haben, eine oder mehrere Quellen von Unvollständigkeit.

Der *Displaced Diffusion*-Ansatz²⁰⁶ fügt in die Dynamik der *Libor Rate* einen Dislokationsparameter ein und erreicht damit eine Mischung aus normalen und lognormalen Reaktion auf die Schocks herbeigeführt durch die *Brownsche* Bewegung. Die Verteilungscharakteristika des Zinssatzes werden modifiziert und führen zu Optionspreisformeln in ge-

Das Thema über die mit einer stochastischen Volatilität einhergehende Unvollständigkeit des Marktes behandelt Dupire, indem er sich von der damals üblichen Modellierungstechnik, die auf Gleichgewichtsargumenten basiert und die Spezifikation des Marktpreises des Volatilitätsrisikos erfordert, abwendet und ein arbitragefreies Modell aufstellt, das komplexe Instrumente bedingt auf den Spotpreis des *Underlying* und seine Volatilität fair bewertet und eine perfekte Replikationsstrategie sicherstellt: vgl. B. Dupire, "Arbitrage Pricing with Stochastic Volatility", SORT Working Paper Banque Paribas (1993), S. 1-18. Allerdings ist das Wissen über die vollständigen Prozesse des Basiswertes und der Volatilität - deren Ausprägungen in allen möglichen zukünftigen Umweltzuständen - notwendig, die Kenntnis der aktuellen Werte und der terminalen Verteilungen zum Zeitpunkt der Fälligkeit reicht nicht aus.

²⁰⁴ Vgl. P. Hagan, D. Kumar, A. Lesniewski, D. Woodward, "Managing Smile Risk", Wilmott Magazine July (2002), S. 84-108. Aus den Defiziten des *Local Volatility*-Ansatzes heraus entwickeln die Autoren das Zwei-Faktoren SABR-Modell mit stochastischer Volatilität basierend auf zwei korrelierten *Brownschen* Bewegungen, das präzise die implizite Volatilitätsstruktur für beliebige Fälligkeiten reproduzieren kann und (sogar wichtiger) die korrekte Dynamik des Volatilitätskurven voraussagt. Das Kernergebnis ist die Herleitung der impliziten Volatilität, die in die *Black*-Formel eingesetzt zum Marktpreis der europäischen Option führt.

²⁰⁵ Nur das Residualrisiko muss eliminiert werden.

²⁰⁶ Die Idee findet ihren Ursprung im Aktienmodell von Rubinstein, vgl. M. Rubinstein, "Displaced Diffusion Option Pricing", Journal of Finance 38 (1983), S. 213-217.

schlossener Form, die einen monoton fallenden *Skew* aufweisen. In der Ära multifaktorieller, währungsübergreifender Zinsstrukturmodelle applizieren Benner et al.²⁰⁷ im Rahmen des *Cross-Currency Libor Market Model (CCLMM)* diese Technik auf FX-Optionen und finden heraus, dass *Out-of-the-Money* und *In-the-Money* Optionspreise, die einer *Displaced Diffusion*-Dynamik entspringen und mit Hilfe einer Bewertungsformel, die lognormale Verteilung des *Underlying* (der *FX Rate*) unterstellt, invertiert werden, den monoton fallenden *Skew* reproduzieren. Zu Verifikationszwecken werden *Displaced Diffusion* Optionspreise über mehrere Strikes hinweg zu den entsprechenden lognormalen Optionspreisen ins Verhältnis gesetzt mit dem Ergebnis, dass der Quotient geringfügig über Eins für *In-the-Money* Optionen liegt, praktisch Eins für *At-the-Money* Optionen beträgt und diesen Wert für *Out-of-the-Money* Optionen deutlich unterschreitet.

Zur zweiten Gattung von Diffusionsmodellen, die sogar noch reichhaltigere implizite Volatilitätsformen generieren können, gehört die Andersen/Andreasen²⁰⁸-Anwendung einer *CEV*-Konstruktion²⁰⁹ auf das *LMM*. Mittels einer Zeittransformation der *Brownschen* Bewegung und einer zusätzlichen Variablensubstitution drücken die Autoren die *SDE* in der Gestalt eines quadratischen *Besselschen* Prozesses aus und ermitteln die bedingte Dichtefunktion, mit deren Hilfe geschlossene Caplet-Bewertungsformeln in Abhängigkeit von der dezentralen Chi-Quadrat-Verteilung für alle Werte des Exponenten in der Dynamik (kleiner/größer als Eins resultiert in einem monoton fallenden/steigenden *Skew*) hergeleitet werden. Die theoretische Attraktivität einer *Libor Rate*, die im Gegensatz zur *Displaced Diffusion*-Methode nicht negativ werden kann, wird durch die zur Berechnung der infiniten Summe von Gamma Funktion in der *Besselschen* Funktion erforderliche numerische Intensität teilweise aufgewogen.

Kennzeichnend für den Anfang der 90er Jahre ist, dass die Monotonie der impliziten Volatilitätsstruktur ausschließlich auf die Abweichung des *Underlying* vom lognormalen Verhalten zurückgeführt wird. Ursächlich für den später aufgetretenen und fortbestehenden *Smile* in der charakteristischen *Hockey-Stick*²¹⁰ Gestalt scheint jedoch in einer zusätzlichen Eigenschaft verborgen zu sein, die die ursprüngliche Abberation von der lognormalen Dynamik verantwortlich für den monoton verlaufenden *Skew* überlagert. Es ist außerdem

²⁰⁷ Vgl. W. Benner, L. Zypkov, S. Jortzik, "A Multifactorial Cross-Currency LIBOR Market Model", SSRN Working Paper January (2007), S. 1-25.

²⁰⁸ Vgl. L. Andersen, J. Andreasen, "Volatility Skews and Extensions of the LIBOR Market Model", Applied Mathematical Finance 7 1 (2000), S. 1-32

²⁰⁹ Siehe Fn. 60.

²¹⁰ Die implizite Volatilitätskurve weist für höhere Strikes ein unterschiedlich steil ansteigendes Profil auf.

fraglich, ob die auf den *Equity*-Markt applizierten Methodologien direkt auf den Zinsderivatemarkt übertragen werden können. Der Mechanismus zur Erklärung des *Skew/Smile* an *Equity*-Märkten ist eindeutig: die typisch beobachtete negative Korrelation zwischen Änderungen in Aktienpreisen und Volatilitäten wird vielmehr durch die Auswirkung des *Leverage*²¹¹ als durch die Abweichung des Aktienprozesses von der lognormalen Verteilung begründet. Ähnliche Effekte kann man teilweise auch an Zinsmärkten beobachten: für sehr niedrige Zinssätze ist die prozentuale Volatilität deutlich höher als für höhere Zinsniveaus. Obwohl die absolute Zinsänderung als Reaktion auf Marktinformationen (*Brownsche* Schocks) von dem Zinslevel abhängt, wäre die Annahme über perfekt proportionale (lognormale) Änderungen zu restriktiv. Als Zwischenfazit kann vorerst festgehalten werden, dass auf der Suche nach einem geeigneten Modell für die Dynamik des *Underlying* eine Dependenz zwischen Proportionalität (lognormaler Prozess) und Unabhängigkeit (normaler Prozess) zusammen mit einer oder mehreren zusätzlichen Eigenschaften (z.B. Jumps, separater stochastischer Volatilitätsprozess) erstrebenswerter erscheint.

Eine Alternative zur direkten Heranziehung stochastischer Volatilität, die sich jedoch genauso wie die klassische Jump-Methode begrenzter Akzeptanz erfreut, kommt von Brigo/Mercurio²¹². Die Autoren entwickeln ein *LMM*, im Rahmen dessen jede *Forward Rate* einem Diffusionsprozess eindeutig determiniert durch eine Mischung aus entsprechend gewichteten lognormalen Dichtefunktionen folgt. Im engeren Sinne wird eine *Local Volatility*-Funktion $\sigma(t, f_j(t))$ bestimmt, so dass folgende *SDE*:

$$df_j(t) = \sigma(t, f_j(t)) f_j(t) dW^{Q_{j+1}}(t), \quad f_j(t) = f(t, T_j, T_{j+1}) \quad (4.1)$$

eine eindeutige Lösung $f_j(t)$ hat, deren Dichtefunktion:

$$p(y) = \frac{dQ_{j+1} \{f_j(t) \leq y\}}{dy} = \sum_{i=1}^N \lambda_i p^i(y), \quad \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1 \quad (4.2)$$

aus den gewichteten lognormalen Dichten $p^i(\cdot)$ zusammengesetzt ist, die mit den deterministischen Diffusionskoeffizienten $\sigma_i(t)$ der *i-ten* lognormalen Dynamik assoziiert sind:

$$df_j^i(t) = \sigma_i(t) f_j^i(t) dW^{Q_{j+1}}(t), \quad i = 1, \dots, N \quad (4.3)$$

²¹¹ Bei vorgegebener Fremdkapitalausstattung steigt der Verschuldungsgrad mit sinkendem Aktienpreis und die Volatilität erhöht sich.

²¹² (1) D. Brigo, F. Mercurio, "A Mixed-Up Smile", RISK September (2000), S. 123-126. (2) D. Brigo, F. Mercurio, "Lognormal-Mixture Dynamics and Calibration to Market Volatility Smiles", International Journal of Theoretical and Applied Finance 5 4 (2002), S. 427-446.

Die Inkorporation von *Skew/Smile* in die Modellierung der Volatilitätskurven kann ferner durch die Einbeziehung von Jumps in die Dynamik des *Underlying* erreicht werden. Die klassische Forschungsarbeit von Glasserman/Kou²¹³ wendet die Jump-Methodik auf das *LMM* an und erzielt einen zugegebenermaßen sehr guten *Smile*-Fit. Allerdings wird die hohe Kalibrierungsqualität durch einige technische Schwierigkeiten erkauft, insbesondere weisen die Verteilungsparameter der Jump-Größe und die Jump-Häufigkeit einen stark zeitabhängigen Charakter auf. Daraus resultieren zeitinhomogene (in der Tat abflachende) Volatilitätsstrukturen mit der Konsequenz, dass sich der zukünftige, vom Modell prognostizierte *Smile* auffällig vom aktuell vorherrschenden unterscheiden wird.

Vor dem Hintergrund der Vielfalt von beobachtbaren *Smile/Skew*-Formen wird zunehmend deutlicher, dass deren Komplexität nicht ausschließlich auf die fehlende Proportionalität in der Verschiebung des *Forward Rate*-Niveaus zurückgeführt werden kann. Robustere und anspruchsvollere Modelle, die über die wahrgenommene Abweichung der absoluten Basiswertänderungen von der lognormalen Verteilung hinausgehen, sind notwendig, um die ausgeprägten Dislokationen der *Smile*-Struktur (und insbesondere der relativen Preise von Caplets und Swaptions) vor allem in Zeiten turbulenter Märkte²¹⁴ zu erklären. Wenn die Neigung des *Smile*, seine Form im Zeitablauf zu verändern, in die Modellierung einbezogen werden soll, ist die Adaption der *Stochastic Volatility*-Methodik zu empfehlen.

Als Erweiterung des *CEV-LMM* von Andersen/Andreasen, das mittels einer frei wählbaren Funktion für die Dependenz vom *Forward Rate-Level* einen monoton fallenden *Skew* generiert, ergänzen Andersen/Brotherton-Ratcliffe²¹⁵ das Modell zwecks Reproduktion von nicht monotonen *Smiles* um einen skalaren (eindimensionalen) *mean-reverting* Varianzprozess²¹⁶, der als multiplikativer Skalierungsfaktor auf den Diffusionskoeffizienten der *Forward Rate*-Dynamik appliziert wird. Eine weitere kennzeichnende Charakteristik ist die Annahme über die Unabhängigkeit der beiden Prozesse, wodurch ein Wechsel vom Spot-Wahrscheinlichkeitsmaß auf das relevante Forward-Martingalmaß die *SDE* des Varianzprozesses unverändert lässt. Die Asymmetrie des Volatilitätsprofils wird durch die *CEV*-Dynamik der *Forward Rates* herbeigeführt. Folglich kann der restlichen Unsicherheit in der Spezifikation der Volatilitätsstruktur durch die Überlagerung des Zinsprozesses mittels

²¹³ Vgl. P. Glasserman, S. G. Kou, "The Term Structure of Simple Forward Rates with Jump Risk", *Mathematical Finance* 13 3 (2003), S. 383-410.

²¹⁴ wenn Modelle am meisten gebraucht werden und am schnellsten und sichersten versagen.

²¹⁵ L. Andersen, R. Brotherton-Ratcliffe, "Extended Libor Market Models with Stochastic Volatility", *The Journal of Computational Finance* 9 1 (2005).

²¹⁶ Ein mehrdimensionaler Varianzprozess kann mühelos inkorporiert werden und findet Anwendung vor allem dann, wenn die Varianz multiple *Mean Reversion-Levels* aufweist.

einer unkorrelierten *Brownschen* Bewegung Rechnung getragen werden. Da das präzise Pricing von Caplets und Swaptions für die effiziente Kalibrierung and diese Optionsmärkte unerlässlich ist, entwickeln die Autoren analytische Bewertungsformeln, die auf der Ermittlung der zentrierten fundamentalen Transformation²¹⁷ der bedingten Dichtefunktion der integrierten Varianz mittels asymptotischer Analyse basieren. Diese fundamentale Transformation kann als die *MGF* der bedingten Verteilung interpretiert werden, mit deren Hilfe die zentralen Momente durch sukzessives Differenzieren höheren Grades berechnet werden. Anschließend wird der Wert des betrachteten Derivats nach der Methode von Hull/White²¹⁸ mittels der *Taylor*-Entwicklung der *Black*-Optionspreisformel (als Funktion des Varianzprozesses) um den Erwartungswert der integrierten Varianz approximiert.

Die Zwei-Komponenten-Methode zur Generierung vom *Skew/Smile* wird auch von Rebonato/Joshi²¹⁹ befürwortet. Ihr Ansatz basiert abweichend von der vorhergehenden Technik auf einer *Displaced Diffusion-SDE* für die Entwicklung des *Underlying* mit der, von Rebonato im deterministischen Fall favorisierten, zeithomogenen instantanen Volatilitätsfunktion, deren Parameter jetzt allerdings stochastischen, *mean-reverting*, voneinander und von der Dynamik der *Forward Rates* unabhängigen Prozessen folgen. Im Gegensatz zur etablierten Kalibrierungsphilosophie stehen im Mittelpunkt der Modellierungsbemühung die Flexibilität und die Transparenz bei der Deskription der Zeitevolution von Markt-Volatilitätsstrukturen. Obwohl der bestmögliche Fit an Caplet/Swaption Kovarianzmatrizen als wichtiges und erstrebenswertes Nebenprodukt erachtet wird, besteht ein gewisser Grad an Bereitschaft die Güte der Anpassung aufzuopfern, nur um die finanzwirtschaftliche Plausibilität und die Erklärungsstärke des Modells aufrechtzuerhalten. Die Güte des erzielten Fit stellt keine modellinhärente Eigenschaft dar, sie fungiert auch nicht als eine Rechtfertigung für die gewählte Technik, sondern sollte wenn überhaupt als indirektes Ergebnis der Angemessenheit des Modells, als eine notwendige jedoch keineswegs hinreichende Bedingung, interpretiert werden.

²¹⁷ A.Lewis, “Option Valuation under Stochastic Volatility: With Mathematica Code”, Financial Press (2005), zeigt im Fall unkorrelierter *Brownscher* Bewegungen für das *Underlying* und den Varianzprozess, dass die Dichtefunktion der integrierten Varianz und die fundamentale Transformation – die *Fourier* Transformation des Derivats mit terminaler Randbedingung gleich Eins (die *Fourier* Transformation der *Payoff*-Funktion bei Fälligkeit) – *Laplace* Inversionspaare darstellen. Wenn diese fundamentale Transformation bekannt wäre, könnte man alternativ zur Vorgehensweise von Andersen/Brotherton-Ratcliffe die Wahrscheinlichkeitsdichte der Varianz mittels der inversen *Laplace* Transformation berechnen.

²¹⁸ Vgl. J. Hull, A. White, “The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities”, *Journal of Finance* 42 2 (1987), S. 281-300.

²¹⁹ Vgl. (1) R. Rebonato, “The Stochastic Volatility Libor Market Model”, *RISK* October (2001), S. 105-109. (2) M. Joshi, R. Rebonato, “A Displaced Diffusion Stochastic-Volatility Libor Market Model: Motivation, Definition and Implementation”, *Quantitative Finance* 3 6 (2003), S. 458-469.

Piterbargs Methodik²²⁰ beruht auf dem Verfahren von Andersen/Brotherton-Ratcliffe, verwendet jedoch die *Displaced Diffusion*-Dynamik anstelle des *CEV*-Ansatzes. Basierend auf der Beobachtung, dass Swaptions mit unterschiedlichen Ausübungszeitpunkten sehr verschiedene *Smile*-Strukturen aufweisen, benutzt der Autor eine vollständige Swaption *Skew*-Matrix als Inputfaktor, um die Libor-gestützte Implementierung des Marktmodells an Swaptions über alle verfügbaren Fälligkeiten und Strikes hinweg zu kalibrieren. Ausgehend von einem *Displaced Diffusion*-Swap Marktmodell mit stochastischer Volatilität:

$$\begin{aligned} dS &= (\gamma S(t) + (1-\gamma)S(0))\sqrt{V(t)}\sigma dW^{Q_{\alpha,\beta}}(t) \\ dV(t) &= k(\theta - V(t))dt + \xi\sqrt{V(t)}dZ(t) \\ V(0) &= \theta, \quad dW(t)dZ(t) = 0, \end{aligned} \quad (4.4)$$

das für jede einzelne *Swap Rate* $S_{\alpha,\beta}$ separat kalibriert worden ist, erhält man die Matrix des Tripels $\{\sigma_{\alpha,\beta}, \gamma_{\alpha,\beta}, \xi_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta=0}^{n-1}$, in der die marktimplizite Verteilung des Swapsatzes kodiert ist. Auf der modelltheoretischen Seite wird ein *Displaced Diffusion-LMM* mit jeweils einer zeitabhängigen, Libor-spezifischen *Skew*- und Volatilitätsfunktion postuliert:

$$df(t)_i = (\gamma_i(t)f_i(t) + (1-\gamma_i(t))f_i(0))\sqrt{V(t)}\sigma_i(t)dW^{Q_{i+1}}(t), \quad i = 0, \dots, n-1, \quad (4.5)$$

wobei der *Volatility of Variance*-Parameter ξ , der für die Generierung des *Smile* (der Konvexität der impliziten Volatilität als Funktion des Strike) zuständig ist, konstant gehalten wird. Die approximative²²¹ *SDE* für die *Swap Rate* wird mit der zeitabhängigen Volatilität $\sigma_{\alpha,\beta}(t)$ und dem variablen *Skew*-Parameter $\gamma_{\alpha,\beta}(t)$ als Funktion der entsprechenden *Forward Rate*-Größen, $\sigma_i(t)$ und $\gamma_i(t)$, aufgestellt. Der innovative Beitrag dieser Forschungsarbeit liegt in der Formulierung von dem effektiven *Skew* $\tilde{\gamma}_{\alpha,\beta}$ und der effektiven Volatilität $\tilde{\sigma}_{\alpha,\beta}$ als zeitstationären Parametern, die deren zeitvariables Pendant $\gamma_{\alpha,\beta}(t)$ resp. $\sigma_{\alpha,\beta}(t)$ approximieren. Anstelle der Notwendigkeit, auf der Grundlage der hergeleiteten *SDE* für die *Swap Rate*, (approximative) Bewertungsformeln in geschlossener Form für Swaptions zwecks Kalibrierung mittels einer nichtlinearen Minimierungsroutine entwickeln zu müssen, wird das Fitting von $\tilde{\gamma}_{\alpha,\beta}$ und $\tilde{\sigma}_{\alpha,\beta}$ and die marktimpliziten $\gamma_{\alpha,\beta}$ und $\sigma_{\alpha,\beta}$ nach der Methode der kleinsten Quadrate (*LSA*) vollzogen:

²²⁰ Vgl. (1) V. Piterbarg, “Stochastic Volatility Model with Time-Dependent Skew”, Applied Mathematical Finance 14 2 (2005), S. 147-185. (2) V. Piterbarg, “Time to Smile”, RISK May (2005), S. 71-75. (3) V. Piterbarg, “A Stochastic Volatility Forward Libor Model with a Term Structure of Volatility Smiles”, SSRN Working Paper (2003), S. 1-46.

²²¹ Zur *Swap Rate*-Modellierung in einer Libor-basierten Konstruktionsumgebung siehe erneut Abschnitt 3461.

$$\min_{\gamma_{\alpha,\beta}} \sum_{\alpha,\beta=0}^{n-1} \left(\tilde{\gamma}_{\alpha,\beta} - \gamma_{\alpha,\beta} \right)^2, \quad \min_{\sigma_{\alpha,\beta}} \sum_{\alpha,\beta=0}^{n-1} \left(\tilde{\sigma}_{\alpha,\beta} - \sigma_{\alpha,\beta} \right)^2, \quad \alpha + \beta \leq n-1 \quad (4.6)$$

In einer zunehmend sophistizierten Modellwelt, deren Komplexität durch die Vielfältigkeit und den Schwierigkeitsgrad der zu bewertenden Derivate (z. B. hybride Strukturen, die gleichzeitig einem Zins-, Währungs- und Kreditausfallrisiko ausgesetzt sind) erzwungen wird, entwickeln Benner/Zyapkov²²² im Rahmen des Cross-Currency Libor-Marktmodells (*CCLMM*) eine einheitliche Pricing-Plattform für diverse Multiwährungsexoten. Da die Mehrzahl von Cross-Currency Derivaten langjährige exotische Produkte darstellen, die sich in *Plain Vanilla* FX Optionen nicht ohne weiteres zerlegen lassen, allenfalls hängen sie vom ganzen Spektrum von FX Optionen über eine breite Auswahl von Strike/Fälligkeit-Kombinationen ab, scheint es unmöglich zu sein, für die Kalibrierung eine bestimmte FX Option mit einem spezifischen Strike bzw. Ausübungszeitpunkt auszusuchen. Piterbarg²²³ weist darauf hin, dass ein Cross-Currency LMM - ähnlich wie dieses von Schloegl²²⁴ - jedoch unter Berücksichtigung vom FX *Skew/Smile* und unterstützt von einem verlässlichen Kalibrierungsalgorithmus noch zu entwickeln ist. Das *CCLMM* von Benner/Zyapkov wird durch das folgende Gleichungssystem von *SDEs*, das aus der Zinsdynamik in den beiden Währungsräumen, der Evolution des Wechselkurses (der *Forward Foreign Exchange Rate*) und dem *mean-reverting* Volatilitätsprozess zusammengesetzt ist, vollständig beschrieben:

$$\begin{aligned} \frac{df_i(t)}{f_i(t)} &= -\sigma_i(t) \sum_{j=i+1}^{N-1} \frac{\alpha_j f_j(t) \sigma_j(t)}{1 + \alpha_j f_j(t)} dt + \sigma_i(t) dW_1^{Q_N}(t) \\ \frac{df_i^f(t)}{f_i^f(t)} &= -\sigma_i^f(t) \left(\sigma_{i+1}^{fx}(t) \sqrt{V(t)} \rho_{23} + \sum_{j=i+1}^{N-1} \frac{\alpha_j f_j(t) \sigma_j(t)}{1 + \alpha_j f_j(t)} \rho_{12} \right) dt + \sigma_i^f(t) dW_2^{Q_N}(t) \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\frac{dFX_i(t)}{FX_i(t)} = -\sum_{j=i}^{N-1} \frac{\alpha_j f_j(t) \sigma_j(t)}{1 + \alpha_j f_j(t)} \sigma_i^{fx}(t) \sqrt{V(t)} \rho_{13} dt + \sigma_i^{fx}(t) \sqrt{V(t)} dW_3^{Q_N}(t)$$

$$dV(t) = \left[\alpha(\theta - V(t)) + \xi \sqrt{V(t)} \sigma(t, t_N) \rho_{14} \right] dt + \xi \sqrt{V(t)} dW_4^{Q_N}(t)$$

Mit: $dW_m(t) dW_l(t) = \rho_{ml} dt$, wobei $m, l = \{1, 2, 3, 4\}$, $m \neq l$

$$\text{und } \sigma(t, t_N) = -\sum_{i=1}^{N-1} \frac{\alpha_i f(t, T_i, T_{i+1})}{1 + \alpha_i f(t, T_i, T_{i+1})} \sigma(t, T_i, T_{i+1}) - \frac{\alpha_0 f(t, t, t_1)}{1 + \alpha_0 f(t, t, t_1)} \sigma(t, t, t_1)$$

²²² Vgl. W. Benner, L. Zyapkov, "A Multifactor Cross-Currency LIBOR Market Model with a FX Volatility Skew", SSRN Working Paper May (2007), S. 1-21.

²²³ Vgl. V. Piterbarg, "Smiling Hybrids", RISK May (2006), S. 66-71.

²²⁴ Vgl. E. Schloegl, "A Multicurrency Extension of the Lognormal Interest Rate Market Models", Finance and Stochastics 6 (2002), S. 173-196.

Weiterhin wird eine modelltheoretische FX Optionspreisformel in geschlossener Form hergeleitet, die im Mittelpunkt der anschließend vorgeschlagenen Kalibrierungsroutine steht. Im Hinblick auf die Verbesserung der FX *Skew*-Anpassungsqualität wird das Modell zukünftig dahingehend erweitert, dass die FX Dynamik von einer mehrdimensionalen *Brownschen* Bewegung diktiert wird²²⁵. Diese kleine Verfeinerung wird das Konstrukt mit zusätzlichen Freiheitsgraden versorgen und mehr Flexibilität beim Fitting bewirken, da anstelle der skalaren Korrelationskoeffizienten dann für die *Skew*-Reproduktion während der Kalibrierung simultan variierbare Korrelationsvektoren/-matrizen zur Verfügung stehen werden. Gleichermaßen zukünftiger Forschungsarbeit gewidmet, bleibt auch die Einbeziehung von Jumps in die bis jetzt reinen Diffusionsdynamiken als Versuch, die Besonderheiten der *Smile*-Charakteristik adäquat zu beschreiben.

Der *Stochastic Volatility*-Ansatz ist zweifellos mit Schwierigkeiten technischer Art hinsichtlich der Implementierung und Kalibrierung verbunden. Erschwerend kommt die damit einhergehende Unvollständigkeit des Marktes mit all ihren Implikationen hinzu, wie im einleitenden Kapitel dieser Arbeit eingehend diskutiert wurde. Vor diesem Hintergrund drängt sich die berechtigte Frage auf, was eigentlich ein *Stochastic Volatility*-Modell an zusätzlichem Nutzen einbringt.

Versetze man sich in die Position eines Händlers hinein, der ein komplexes Produkt auf der Basis eines *LMM* mit deterministischer Volatilität bewertet. Darüber hinaus sei angenommen, dass der Trader eine zufrieden stellende Parametrisierungsform für die instantane Volatilitätsfunktion ausgewählt hat, das Modell so kalibriert hat, dass die Preise der wichtigsten Hedge-Instrumente (Caplets/Swaptions) exakt reproduziert werden und die Volatilitätsstruktur ein zeithomogenes Verhalten aufweist. Vega Hedge-Transaktionen sind dank der erfolgreichen Kalibrierung zu Marktpreisen durchgeführt worden. Sollte jedoch die zukünftige implizite Volatilitätsebene stochastisch ausfallen²²⁶, wird sich die Zeitstruktur der Volatilitäten auf eine Art und Weise ändern, die vom verwendeten deterministischen *LMM* nicht zugelassen wird, da das Modell einfach diese möglichen Umweltzustände nicht kennt. Im Gegensatz dazu wird eine *Stochastic Volatility*-Konstruktion, die die vielfältigen

²²⁵ Dieselbe Idee gilt auch für die Zinsdynamiken, sobald *Skew* und *Smile* auf die gleiche Art und Weise inkorporiert werden.

²²⁶ Die deutlichen Dislokationen und die *Hockey Stick*-Gestalt der Volatilitätsstruktur in der Zinswelt werden mit dem Marktaufbruch nach der russischen Krise (im August 1998) assoziiert. Historische Ereignisse haben immer einen tiefen Einfluss auf die implizite Volatilitätsform ausgeübt, z. B. der Aktienmarkt-Crash im Oktober 1987 wird für den negativen *Skew* verantwortlich gemacht – die implizite Wahrscheinlichkeitsverteilung des *Underlying* (risikoneutral) ist relativ zu dieser von empirischen Aktienrenditen (reales, physisches Wahrscheinlichkeitsmaß) linkschief.

Kombinationen von zukünftigen Zinsstrukturen und Volatilitätsebenen durch deren gemeinsame Dynamik untersucht, den auf den Eintritt dieser unbekanntem Umweltzustände bedingten Preisen ein Gewicht ungleich Null zuweisen und dementsprechend durch Mittelwertbildung den richtigen, risikoadjustierten Wert des exotischen Produkts ermitteln.

Es ist korrekt, dass der Markt unvollständig ist, unendlich viele äquivalente Wahrscheinlichkeitsmaße existieren, Risikopräferenzen nicht mehr irrelevant sind und der Payoff individueller komplexer Instrumente nicht perfekt replizierbar ist. Wenn jedoch das Modell an die aktuellen Optionspreise kalibriert worden ist, wird die Mittelwertbildung über die zukünftigen Payoff-Ausprägungen unter dem vom Markt implizit benutzten Wahrscheinlichkeitsmaß vollzogen, das die zurzeit vorherrschende Marktaversion gegen unhedgebare Risikofaktoren, Volatilitätsrisiko sowohl in der Gestalt allgemeiner systematischer Sensitivität gegenüber stochastischen Änderungen der Volatilität (*Volga*-Risiko) als auch Verschiebungen in der Volatilitätsstruktur unter dem Einfluss des *Underlying* (*Vanna*-Risiko), widerspiegelt. Unter Anwendung eines in sich konsistenten, arbitragefreien *Stochastic Volatility*-Modells wie (4.7) werden die adjustierten Preise diverser Instrumente zumindest für eine bestimmte Präferenzfunktion - die des Marktes - das Entgelt für die Übernahme des Volatilitätsrisikos in kohärenter Weise reflektieren.

Selbst wenn *Volga*- und *Vanna*-Risiken durch die bis zu einem gewissen Grad mögliche Vervollständigung des Marktes mit Hilfe von *Plain Vanilla* Optionen eliminiert werden²²⁷, bleibt der Dealer weiterhin der Unsicherheit ausgesetzt, dass der Markt das bewertungsrelevante Wahrscheinlichkeitsmaß ändert. Finanztheoretisch betrachtet besteht keinerlei Garantie bezüglich der in Zukunft von einem unvollständigen Markt erhobenen Prämie für unhedgebare Risikofaktoren. Diese Komplikation wird die kontinuierliche Rekalibrierung des Modells erfordern, um mit einem hinsichtlich seiner Risikopräferenz unentschlossenen Markt im Einklang zu sein, zusätzlich zum üblichen Hedge des Händlers gegen Änderungen des *Underlying* und die mögliche Misspezifikation der Modellparameter. Vor allem bei sehr langfristigen Finanzkontrakten, die sich über Generationen von Tradern erstrecken, können sich die Auswirkungen der Rekalibrierungsnotwendigkeit kumulativ als genauso schädigend erweisen wie ein *Six Sigma*-Ereignis unmittelbar vor Fälligkeit eines kurzfristigen Derivats. Für diese perfekten Gewitter ist die von der Finanz-Community adoptierte *Diffusion*-Modellierungstechnik (sogar mit stochastischer Volatilität) schlecht vorbereitet. Schließlich werden diese in der Finanzwelt gelegentlich tobenden Stürme als

²²⁷ Über den Kauf bzw. Verkauf von *away-from-the-money* Optionen.

akzeptabler Risikobestandteil des Berufs eines Händlers exotischer Instrumente, der keine Astraphobie entwickelt hat, angesehen, solange sie tatsächlich Ausnahmereignisse bleiben.

Sind sie es wirklich? Vor dem Hintergrund intrinsisch volatilerer Finanzmärkte sollte die früher nachdrücklich gemiedene Route allgemeiner *Levy* Prozesse (*Jump Diffusion-Theorie*) vielleicht wieder in den Fokus der Modellierungsbemühungen rücken, da die überwiegend eingesetzten Modelle - geeignet für die tägliche "Tretmühle" auf dem Trading Floor - am schnellsten und sichersten missglücken, und zwar ausgerechnet dann, wenn sie am meisten benötigt werden: in Zeiten starker Unruhe.

Keines dieser Probleme wird das Ende des Handels bzw. der Strukturierung von Zinsderivaten bereiten, aber der Himmel scheint nicht mehr so strahlend blau zu sein, wie man sich ihn vielleicht wünschte. Die Reise auf der Suche nach der "richtigsten" Modellierungstechnik geht weiter.

Anlagenverzeichnis

| | |
|---|-----|
| Anlage 1: Nachweis der <i>Markov</i> -Eigenschaft des <i>Short Rate</i> -Prozesses im Modell von Hull/White mit Hilfe des <i>Independence-Lemmas</i> | 127 |
| Anlage 2: Kalibrierung und Optionsbewertung im erweiterten Vasicek-Zinsmodell mit zeitabhängiger Volatilitätsstruktur und <i>mean-reverting</i> Driftfunktion | 131 |
| Anlage 3: Die funktionale Abhängigkeit der Volatilitätsstruktur von der <i>Short Rate</i> im Rahmen des erweiterten Zinsmodells | 137 |
| Anlage 4: Zweidimensionale Markov HJM-Darstellung der Discount Curve | 143 |
| Anlage 5: Das Konzept der Brownschen Brücke | 147 |
| Anlage 6: Fourieranalyse der zeitabhängigen Komponente der instantanen Volatilitätsfunktion | 149 |

Anlage 1: Nachweis der *Markov*-Eigenschaft des *Short Rate*-Prozesses im Modell von Hull/White mit Hilfe des *Independence-Lemmas*

Im Rahmen des Modells von Hull/White²²⁸ werden die Parameter der Driftfunktion und die Diffusion als deterministische Funktionen der Zeit gestaltet:

$$dr(t) = (a(t) - b(t)r(t))dt + \sigma(t)dW(t) \quad (\text{A1.1})^{229}$$

Der *Mean-Reverting Ornstein-Uhlenbeck*-Prozess ist die Lösung dieser *SDE*²³⁰. Wenn beide Seiten der Gleichung mit $\exp\{K(t)\}$ multipliziert werden, wobei $K(t) = \int_0^t b(u)du$ gilt, erhält man nach Umstellung:

$$\begin{aligned} e^{K(t)} dr(t) + b(t)r(t)e^{K(t)} dt &= a(t)e^{K(t)} dt + \sigma(t)e^{K(t)} dW(t) \\ d[e^{K(t)} r(t)] &= a(t)e^{K(t)} dt + \sigma(t)e^{K(t)} dW(t) \end{aligned} \quad (\text{A1.2})$$

Um aus der zweiten Gleichung in (A1.2) die *Short Rate* $r(t)$ zu extrahieren, werden beide Seiten über das Zeitintervall $[0; t]$ integriert:

²²⁸ Vgl. J. Hull, A. White, "Pricing Interest Rate Derivative Securities", Review of Financial Studies, 3, 4 (1990), S. 573-592.

²²⁹ Die Parameter $a(t)$, $b(t)$ und $\sigma(t)$ sind in diesem Modellrahmen als deterministische Funktionen der Zeit angenommen worden. Sollten diese Größen stochastisch gestaltet werden müssen, ist es notwendig sicherzustellen, dass sie für jedes $0 \leq t \leq T^{\max}$ F_t -messbar, d. h. zu $F = \{F_t\}_{0 \leq t \leq T^{\max}}$, $T^{\max} \in [0, \infty)$ adaptiert sind. Um die Existenz des stochastischen Integrals sicherzustellen, ist weiterhin die technische Bedingung der quadratischen Integrierbarkeit erforderlich:

$$E\left(\int_0^{T^{\max}} \sigma(t)^2 e^{2K(t)} d\langle W \rangle_t\right) < \infty$$

Falls der Unsicherheitsfaktor tatsächlich durch eine *Brownsche* Bewegung W_t dargestellt wird und die Variablen der Drift und der Diffusion zu der durch die *Brownsche* Bewegung erzeugten Filtration $F^W = \{F_t^W\}_{0 \leq t \leq T^{\max}}$, $T^{\max} \in [0, \infty)$ adaptiert sind, sind diese beiden Bedingungen ausreichend, um das *Ito*-Integral zu definieren. $\{F_t^W\}$ ist linksseitig-, aber nicht zwingend rechtsseitig-stetig. Aus dieser Eigenschaft folgt unmittelbar, dass der Integrand im *Ito*-Integral *nonanticipating* ist, d. h. unabhängig von den zukünftigen Ausprägungen des zugrunde liegenden Prozesses. Vgl. S. Neftci, "Mathematics of Financial Derivatives" (2000), S.213-216. Bei rechtsseitiger Stetigkeit verbessert ein Einblick in die infinitesimal nahe Zukunft die Informationsbasis nicht. Falls der treibende Unsicherheitsfaktor keine *Brownsche* Bewegung, sondern ein quadratisch integrierbares Martingal allgemeiner Natur oder ein rechtsseitig-stetiges Semimartingal mit einer endlichen linksseitigen Grenze ist, müssen $\sigma(t, \cdot)$ und $b(t, \cdot)$ vorhersehbare (*predictable*) Prozesse darstellen, d. h. linksseitig-stetig sein. Die Filtration, die dadurch erzeugt wird, ist auch linksseitig-stetig. Da im Rahmen dieser Arbeit ausschließlich auf die *Brownsche* Bewegung - ein stetiges, quadratisch integrierbares Martingal - als Unsicherheitsfaktor abgestellt wird, genügt es für den Fall stochastischer Parameter zu fordern, dass die Variablen zu $\{F_t^W\}$ adaptiert sind und die Eigenschaft der quadratischen Integrierbarkeit vorliegt. I. Karatzas, S. Shreve, "Brownian Motion and Stochastic Calculus" (1991), S.129-131 und S. Shreve, "Stochastic Calculus for Finance II" (2004), S. 125-134.

²³⁰ Zu stochastischen Differentialgleichungen und allgemeinen Lösungstechniken vgl. B. Oksendal, "Stochastic Differential Equations" (2000), S. 64-65, Ex. 5.1.3 und 5.1.4. Zum *Ornstein-Uhlenbeck*-Prozess siehe die Übungsaufgaben 5.4-5.7, S. 73-74 und vgl. G. E. Uhlenbeck/L. S. Ornstein, "On the Theory of Brownian Motion", Physical Review, 36 (1930), erneut erschienen in N. Wax, "Selected Papers on Noise and Stochastic Processes" (1954), S. 93-111.

$$\int_0^t d[e^{K(s)}r(s)] = \int_0^t a(s)e^{K(s)}ds + \int_0^t \sigma(s)e^{K(s)}dW(s)$$

$$e^{K(t)}r(t) = r(0) + \int_0^t a(s)e^{K(s)}ds + \int_0^t \sigma(s)e^{K(s)}dW(s) \quad (\text{A1.3})$$

$$r(t) = e^{-K(t)}\left[r(0) + \int_0^t a(s)e^{K(s)}ds + \int_0^t \sigma(s)e^{K(s)}dW(s)\right]$$

Im Folgenden wird gezeigt, dass $r(t)$ mit $0 < s < t$ die *Markov*-Eigenschaft aufweist:

$$r(t) = e^{-K(t)+K(s)-K(s)}\left[r(0) + \int_0^s a(u)e^{K(u)}du + \int_0^s \sigma(u)e^{K(u)}dW(u)\right]$$

$$+ e^{-K(t)}\int_s^t a(u)e^{K(u)}du + e^{-K(t)}\int_s^t \sigma(u)e^{K(u)}dW(u) \quad (\text{A1.4})^{231}$$

$$= \underbrace{e^{-K(t)+K(s)}r(s)}_{F(s)\text{-messbar}} + \underbrace{e^{-K(t)}\int_s^t a(u)e^{K(u)}du + e^{-K(t)}\int_s^t \sigma(u)e^{K(u)}dW(u)}_{F(s)\text{-unabhängig}}$$

Bedingt auf $F(s)$ wird der Erwartungswertoperator auf den zu modellierenden Zinssatz angewendet. Wenn man zusätzlich berücksichtigt, dass der letzte Summand ein *Ito*-Integral darstellt, das unabhängig von $F(s)$ ist und dessen Erwartungswert demzufolge null ergibt, erhält man einen Ausdruck für $r(t)$, der nur in seiner Abhängigkeit von $r(s)$ stochastisch ist:

$$E(r(t) | F(s)) = e^{-K(t)+K(s)}r(s) + e^{-K(t)}\int_s^t a(u)e^{K(u)}du \quad (\text{A1.5})$$

Die zukünftige Entwicklung des *Short Rate*-Prozesses ist unter der Voraussetzung, dass die heutige Ausprägung bekannt ist, unabhängig von der Historie des Zinssatzes, die zum heutigen Wert geführt hat. Folgendes Lemma²³² wird sich als besonders hilfreich für den Nachweis der *Markov*-Eigenschaft eines Prozesses erweisen.

Lemma: X und Y seien zwei Zufallsvariablen definiert auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) mit $G \subset \mathcal{F}$. X sei unabhängig von G und Y sei G -messbar. Für eine

²³¹ In der dritten Zeile sind die zum Zwecke der Verdeutlichung eingefügten Bezeichnungen unter der geschweiften Klammer etwas irreführend. Der erste Summand besteht aus einer deterministischen und einer stochastischen, $F(s)$ -messbaren, Komponente. Der zweite Summand ist vollkommen deterministischer Natur, wogegen der dritte wiederum sowohl deterministische als auch stochastische Bestandteile aufweist. Der stochastische Term ist dennoch $F(s)$ -unabhängig. Daher bezieht sich die Benennung $F(s)$ -messbar bzw. -unabhängig ausschließlich auf die stochastischen Inhalte, zumal der Ausdruck zusätzlich noch deterministische Funktionen enthalten kann.

²³² Bekannt in der Literatur als das *Independence Lemma*. Zur allgemeinen Vorgehensweise bei der Feststellung der *Markov*-Eigenschaft eines Prozesses vgl. S. Shreve, "Stochastic Calculus for Finance II" (2004), S. 73-75.

Funktion $f(x, y)$ von zwei deterministischen Variablen x und y sei $E(f(X, y)) = g(y)$ definiert. Dann gilt $E(f(X, Y) | G) = g(Y)$.

Es gilt zu zeigen, dass jede *Borel*-messbare Funktion $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, wobei $E|h(r(t))| < \infty$, folgende Beziehung erfüllt:

$$E(h(r(t)) | F(s)) = E(h(r(t)) | r(s)) = E^{s, r(s)} h(r(t)) = g(s, r(s)) \quad (\text{A1.6})^{233}$$

Im Folgenden werden X und Y eine $F(s)$ -messbare bzw. eine $F(s)$ -unabhängige stochastische Variable darstellen. Ferner stehen x bzw. y für die deterministische Version der Variablen.

$$\begin{aligned} E(h(r(t)) | F(s)) &= E(\underbrace{h(e^{-K(t)+K(s)} r(s))}_{F(s)\text{-messbar}} + \underbrace{e^{-K(t)} \int_s^t a(u) e^{K(u)} du + e^{-K(t)} \int_s^t \sigma(u) e^{K(u)} dW(u)}_{F(s)\text{-unabhängig}} | F(s)) \\ &= E(h(X + Y) | F(s)) \end{aligned}$$

Man definiere:

$$E(h(x + Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x + y) P(y) dy = g^+(x), \text{ wobei } P(\cdot) \text{ die Dichte von } Y \text{ bezeichnet}^{234}.$$

Folglich gilt gemäß dem *Independence Lemma*:

$$\begin{aligned} E(h(r(t)) | F(s)) &= E(h(X + Y) | F(s)) = g^+(X) = g^+(e^{-K(t)+K(s)} r(s)) \\ &= g^+(s, r(s), t) = g(s, r(s)) \text{ mit } t = \text{const.} \end{aligned} \quad (\text{A1.7})$$

²³³ Die ersten zwei mit Gleichheitszeichen verknüpften Erwartungswertausdrücke stellen die am häufigsten in der Literatur vorzufindende Definition der *Markov*-Eigenschaft eines Prozesses dar. Vgl. S. Shreve, "Stochastic Calculus for Finance I" (2004), S. 45. $r(s)$ ist zu der Filtration $\{F(s)\}_{s \geq 0}$ adaptiert, d. h. folgende Abbildung muss messbar sein: $(s, \omega) \rightarrow r(s, \omega): ([0, \infty) \times \Omega, \mathcal{B}([0, \infty)) \otimes F(s)) \rightarrow (\mathbb{R}^1, \mathcal{B}(\mathbb{R}^1))$. Mit anderen Worten muss die inverse Abbildung von $r(s, \omega)$ Element der *Produkt- σ -Algebra* sein: $\{(s, \omega); r(s, \omega) \in A\} \in \mathcal{B}([0, \infty)) \otimes F(s), \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$. Die zweite Bedingung $r(s)$ stellt in Wirklichkeit eine vereinfachte Schreibweise für das kleinste *σ -Feld* $F^r(s) = \sigma(r(s))$ dar, bezüglich dessen $r(s)$ für jedes $s \geq 0$ messbar ist und ist äquivalent zu dem durch die Zufallsvariable $r(s)$ selbst erzeugten *σ -Feld*. Streng mathematisch betrachtet ist das kleinste, durch $r(s, \omega)$ generierte, *σ -Feld* wiederum eine auf dem Produktraum $[0, \infty) \times \Omega$ definierte *Produkt- σ -Algebra*, die so erzeugt werden muss, dass Projektionen der Form $r_1: [0, \infty) \times \Omega \rightarrow [0, \infty)$, $r_2: [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \Omega$ gerade noch messbar sind. Dann wird die *Produkt- σ -Algebra* $\mathcal{B}([0, \infty)) \otimes F^r(s)$ durch folgende Vorschrift $\sigma(r_1(s, \omega)) \vee \sigma(r_2(s, \omega)) = r_1^{-1}(A_1) \vee r_2^{-1}(A_2)$, $\forall A_1 \in \mathcal{B}([0, \infty))$ und $\forall A_2 \in F^r(s)$, erzeugt. Zur Erzeugung von Produkten messbarer Räume vgl. **(1)** W. König, "Stochastik I" (Skriptum 2003), S. 49-51 und insb. Bemerkung 2.9.2. **(2)** H. Bauer, "Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie" (1974), S. 112-121.

²³⁴ Y folgt einer Normalverteilung $N(\alpha, \beta^2)$ mit $\alpha = e^{-K(t)} \int_s^t e^{K(u)} a(u) du$ und $\beta^2 = e^{-2K(t)} \int_s^t e^{2K(u)} \sigma(u)^2 du$.

In Abhängigkeit von der Fälligkeit $t \leq T^{\max}$ des zu bewertenden Derivats h erhält man verschiedene Funktionen $g_i(\cdot)$ für den heutigen Wert. Da ein bestimmtes Wertpapier mit einer festgelegten Restlaufzeit betrachtet wird, ist t stets ein konstanter Parameter und hat demzufolge keinen Einfluss auf die zu untersuchenden Variablen in der Funktion g . Bedingt auf $\sigma(r(s))$ wird der Erwartungswertoperator auf (A1.7) angewendet:

$$\begin{aligned} E(E(h(r(t)) | \mathcal{F}(s)) | r(s)) &= E(g(s, r(s)) | r(s)) \\ E(h(r(t)) | r(s)) &= g(s, r(s)) \end{aligned} \tag{A1.8}$$

Die rechten Seiten von (A1.7) und (A1.8) sind identisch. Infolgedessen müssen auch die linken Seiten der beiden Gleichungen miteinander übereinstimmen. Demnach gilt:

$$E(h(r(t)) | \mathcal{F}(s)) = E(h(r(t)) | r(s)) = g(s, r(s)) \tag{A1.9}$$

Die *Short Rate* folgt einem *Markov*-Prozess. Zudem wird aus (A1.9) ersichtlich, dass sich Erwartungswerte für beliebige Payoff-Funktionen von Derivaten auf den Zinssatz ermitteln lassen.

Anlage 2: Kalibrierung und Optionsbewertung im erweiterten Vasicek-Zinsmodell mit zeitabhängiger Volatilitätsstruktur und *mean-reverting* Driftfunktion

A2a Herleitung der Optionspreisformel

Ausgangspunkt für die nachfolgende Herleitung ist der abdiskontierte erwartete Payoff der Call-Option unter dem *Forward*-Wahrscheinlichkeitsmaß:

$$Call(0, T_1) = B(0, T_1) E^{P_{T_1}} \left((B(T_1, T_2) - K)^+ \right) = B(0, T_1) \int_{-\infty}^{\infty} (B(T_1, T_2) - K)^+ f(x) dx \quad (A2a.1)$$

$$(B(T_1, T_2) - K)^+ = B(T_1, T_2) - K \quad \text{wenn } B(T_1, T_2) > K \Rightarrow$$

$$B(0, T_2) e^{\int_0^{T_1} \left[r(u) + \sigma(u)^2 C(u, T_1) C(u, T_2) - \frac{1}{2} \sigma(u)^2 C(u, T_2)^2 \right] du - \int_0^{T_1} \sigma(u) C(u, T_2) dW^{T_1}(u)} - K > 0 \Rightarrow$$

$$\int_0^{T_1} r(u) du + \int_0^{T_1} \left[\sigma(u)^2 C(u, T_1) C(u, T_2) - \frac{1}{2} \sigma(u)^2 C(u, T_2)^2 \right] du - \int_0^{T_1} \sigma(u) C(u, T_2) dW^{T_1}(u) > \ln \frac{K}{B(0, T_2)}$$

Der unbekannte Term $\int_0^{T_1} r(u) du$ kann aus der Lösung der *SDE* für die Dynamik des *Numeraire* extrahiert werden:

$$dB(t, T_1) = \left(r(t) + \sigma(t)^2 C(t, T_1)^2 \right) B(t, T_1) dt - \sigma(t) C(t, T_1) B(t, T_1) dW^{T_1}(t) \Rightarrow$$

$$B(T_1, T_1) = B(0, T_1) e^{\int_0^{T_1} \left[r(u) + \sigma(u)^2 C(u, T_1)^2 - \frac{1}{2} \sigma(u)^2 C(u, T_1)^2 \right] du - \int_0^{T_1} \sigma(u) C(u, T_1) dW^{T_1}(u)} = 1 \Rightarrow$$

$$\int_0^{T_1} r(u) du = -\ln B(0, T_1) - \frac{1}{2} \int_0^{T_1} \sigma(u)^2 C(u, T_1)^2 du + \int_0^{T_1} \sigma(u) C(u, T_1) dW^{T_1}(u)$$

Nach Einsetzen dieses Ausdrucks in die Ungleichung oben, Zusammenfassen der Terme und Umstellen erhält man folgende Bedingung:

$$\int_0^{T_1} \sigma(u) [C(u, T_2) - C(u, T_1)] dW^{T_1}(u) < \ln \frac{B(0, T_2)}{B(0, T_1) K} - \frac{1}{2} \int_0^{T_1} \sigma(u)^2 [C(u, T_2) - C(u, T_1)]^2 du$$

$$\text{mit } \int_0^{T_1} \sigma(u) [C(u, T_2) - C(u, T_1)] dW^{T_1}(u) \square N \left(0, \int_0^{T_1} \sigma(u)^2 [C(u, T_2) - C(u, T_1)]^2 du \right) \quad (A2a.2)$$

Durch Standardisieren der Gaußschen Variablen wird $x \sim N(0, 1)$ definiert:

$$x = \frac{\int_0^{T_1} \sigma(u) [C(u, T_2) - C(u, T_1)] dW^{T_1}(u)}{\sqrt{\int_0^{T_1} \sigma(u)^2 [C(u, T_2) - C(u, T_1)]^2 du}} < \frac{\ln \frac{B(0, T_2)}{B(0, T_1)K} - \frac{1}{2} \int_0^{T_1} \sigma(u)^2 [C(u, T_2) - C(u, T_1)]^2 du}{\sqrt{\int_0^{T_1} \sigma(u)^2 [C(u, T_2) - C(u, T_1)]^2 du}}$$

$$\Rightarrow x < \frac{1}{\sigma_p} \ln \frac{B(0, T_2)}{B(0, T_1)K} - \frac{\sigma_p}{2} \quad \text{mit} \quad \sigma_p^2 = \int_0^{T_1} \sigma(u)^2 [C(u, T_2) - C(u, T_1)]^2 du \quad (\text{A2a.3})$$

Als Konsequenz aus der Formulierung dieser Bedingung lässt sich (A2a.1) vereinfachen:

$$Call(0, T_1) = B(0, T_1) \int_{-\infty}^{\infty} (B(T_1, T_2) - K)^+ f(x) dx = B(0, T_1) \int_{-\infty}^h (B(T_1, T_2) - K) f(x) dx \quad (\text{A2a.4})$$

mit $h = \frac{1}{\sigma_p} \ln \frac{B(0, T_2)}{B(0, T_1)K} - \frac{\sigma_p}{2}$

Folglich wird der Optionspreis als Differenz zwischen zwei Integralen bestimmt:

$$Call(0, T_1) = B(0, T_1) \int_{-\infty}^h B(T_1, T_2) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx - B(0, T_1) \int_{-\infty}^h K \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (\text{A2a.5})$$

Aus dem zweiten Integral erhält man unmittelbar:

$$B(0, T_1) \int_{-\infty}^h K \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = B(0, T_1) KN(h), \quad h = \frac{1}{\sigma_p} \ln \frac{B(0, T_2)}{B(0, T_1)K} - \frac{\sigma_p}{2} \quad (\text{A2a.6})$$

Das Auflösen des ersten Integrals bedarf geringfügiger Umformung:

$$B(0, T_1) \int_{-\infty}^h B(0, T_2) e^{\int_0^{T_1} [r(u) + \sigma(u)^2 C(u, T_1) C(u, T_2) - \frac{1}{2} \sigma(u)^2 C(u, T_2)^2] du - \int_0^{T_1} \sigma(u) C(u, T_2) dW^{T_1}(u)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx =$$

$$B(0, T_1) \int_{-\infty}^h B(0, T_2) e^{\underbrace{-\ln B(0, T_1) - \frac{1}{2} \int_0^{T_1} \sigma(u)^2 [C(u, T_2) - C(u, T_1)]^2 du}_{\sigma_p^2} - \underbrace{\int_0^{T_1} \sigma(u) [C(u, T_2) - C(u, T_1)] dW^{T_1}(u)}_{x\sigma_p}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = (\text{A2a.7})$$

$$B(0, T_1) \int_{-\infty}^h \frac{B(0, T_2)}{B(0, T_1)} e^{-\frac{1}{2} \sigma_p^2 - x\sigma_p} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = B(0, T_2) \int_{-\infty}^h \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+\sigma_p)^2}{2}} dx =$$

$$B(0, T_2) \int_{-\infty}^{h+\sigma_p} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = B(0, T_2) N(h + \sigma_p), \quad h = \frac{1}{\sigma_p} \ln \frac{B(0, T_2)}{B(0, T_1)K} - \frac{\sigma_p}{2}$$

Die Differenz zwischen (A2a.7) und (A2a.6) ergibt die Bewertungsformel für den Call:

$$Call(0, T_1) = B(0, T_2) N(h + \sigma_p) - B(0, T_1) KN(h), \quad h = \frac{1}{\sigma_p} \ln \frac{B(0, T_2)}{B(0, T_1)K} - \frac{\sigma_p}{2} \quad (\text{A2a.8}).$$

A2b Lösung der Differentialgleichung zur Kalibrierung des langfristigen Mittelwerts der *Short Rate*

Im Rahmen dieses Abschnitts wird die gedankliche Lücke zwischen der in der zweiten Zeile von (2.60) aufgestellten linearen Differentialgleichung und dem in der nachfolgenden Zeile direkt angeführten Endergebnis für $a(T)$ aufgefüllt, indem die Lösungsschritte, die diese Kalibrierungsformel zur Folge haben, ausführlich dargelegt werden. Ausgangspunkt ist die Definitionsgleichung für den langfristigen Mittelwert der *Short Rate*:

$$\begin{aligned} a'(T)e^{2K(T)} + 2a(T)b(T)e^{2K(T)} - (e^{2K(T)}\sigma(T)^2 + f(T)) &= 0 \Rightarrow \\ a'(T) + 2a(T)b(T) - \left(\sigma(T)^2 + \frac{f(T)}{e^{2K(T)}} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A2b.1})$$

Folgende Substitution wird vorgenommen und der daraus resultierende Ausdruck unmittelbar in die ursprüngliche Differentialgleichung eingesetzt:

$$\begin{aligned} a(T) &= u(T)v(T) \Rightarrow a'(T) = u'(T)v(T) + u(T)v'(T) \\ u'(T)v(T) + u(T)v'(T) + 2b(T)u(T)v(T) - (\sigma^2(T) + f(T)e^{-2K(T)}) &= 0 \Rightarrow \quad (\text{A2b.2}) \\ u'(T)v(T) + u(T)(v'(T) + 2b(T)v(T)) &= \sigma(T)^2 + f(T)e^{-2K(T)} \end{aligned}$$

Die Unbekannte $v(T)$ wird so gewählt, dass $v'(T) + 2b(T)v(T)$ null ergibt. Demnach muss zuerst diese behelfsmäßige Differentialgleichung gelöst werden:

$$\begin{aligned} v'(T) + 2b(T)v(T) = 0 \Rightarrow \frac{v'(T)}{v(T)} = -2b(T) \Rightarrow \frac{dv(T)}{v(T)} = -2b(T)dT \Rightarrow \quad (\text{A2b.3}) \\ \int_0^T \frac{dv(u)}{v(u)} = -2 \int_0^T b(u)du \Rightarrow v(T) = e^{-2 \int_0^T b(u)du} = e^{-2K(T)} \quad \text{mit } v(0) = 1 \end{aligned}$$

Durch Einsetzen dieses Ergebnisses für $v(T)$ in die zu lösende Differentialgleichung erzielt man einen deutlichen Vereinfachungseffekt:

$$u'(T)e^{-2K(T)} = \sigma(T)^2 + f(T)e^{-2K(T)} \Rightarrow u'(T) = \sigma(T)^2 e^{2K(T)} + f(T) \quad (\text{A2b.4})$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung liefert $u(T)$ und die Multiplikation mit der bereits ermittelten Funktion $v(T)$ ergibt den zu kalibrierenden Parameter $a(T)$ des Zinsmodells:

$$du(T) = (\sigma(T)^2 e^{2K(T)} + f(T))dT \Rightarrow \int_0^T du(s) = \int_0^T (\sigma(s)^2 e^{2K(s)} + f(s))ds \Rightarrow$$

$$u(T) = \int_0^T (\sigma(s)^2 e^{2K(s)} + f(s)) ds \quad \text{mit } u(0) = 0 \Rightarrow a(T) = u(T)v(T) =$$

$$e^{-2K(T)} \int_0^T (\sigma(s)^2 e^{2K(s)} + f(s)) ds = e^{-2K(T)} \int_0^T \sigma(s)^2 e^{2K(s)} ds + e^{-2K(T)} \int_0^T f(s) ds \quad (\text{A2b.5})$$

Beide Integrale werden separat berechnet. Bezugnehmend auf (2.57) erhält man für das erste Integral folgenden Ausdruck:

$$e^{-2K(T)} \int_0^T \sigma(s)^2 e^{2K(s)} ds = \left(\frac{\partial C(0, T)}{\partial T} \right)^2 \int_0^T \left(\frac{\sigma(s)}{\partial C(0, s) / \partial s} \right)^2 ds \quad \text{mit } e^{-K(T)} = \frac{\partial C(0, T)}{\partial T} \quad (\text{A2b.6})$$

Mit der Definition von $f(T)$ in (2.60) lässt sich der Wert des zweiten Integrals bestimmen:

$$e^{-2K(T)} \int_0^T f(s) ds = e^{-2K(T)} \int_0^T \frac{\partial \left(e^{K(s)} \frac{\partial A(0, s)}{\partial s} \right)}{\partial s} ds = e^{-K(T)} \frac{\partial \left(e^{K(T)} \frac{\partial A(0, T)}{\partial T} \right)}{\partial T} =$$

$$e^{-K(T)} \left(e^{K(T)} \frac{\partial^2 A(0, T)}{\partial T^2} + e^{K(T)} \frac{\partial A(0, T)}{\partial T} \frac{\partial K(T)}{\partial T} \right) = \frac{\partial^2 A(0, T)}{\partial T^2} + \frac{\partial A(0, T)}{\partial T} \frac{\partial K(T)}{\partial T} = \quad (\text{A2b.7})$$

$$\frac{\partial^2 A(0, T)}{\partial T^2} + b(T) \frac{\partial A(0, T)}{\partial T}$$

Folglich ergibt sich die Kalibrierungsformel für den langfristigen Mittelwert der *Short Rate* als die Summe der letzten beiden Ausdrücke in (A2b.7) und (A2b.6):

$$a(T) = \frac{\partial^2 A(0, T)}{\partial T^2} + b(T) \frac{\partial A(0, T)}{\partial T} + \left(\frac{\partial C(0, T)}{\partial T} \right)^2 \int_0^T \left(\frac{\sigma(s)}{\partial C(0, s) / \partial s} \right)^2 ds \quad (\text{A2b.8})$$

Die Notwendigkeit der Lösung einer Differentialgleichung lässt sich allerdings umgehen, wenn Gleichung (2.59) unmittelbar nach $a(T)$ umgestellt wird:

$$e^{K(T)} \frac{\partial \left(e^{K(T)} \frac{\partial A(0, T)}{\partial T} \right)}{\partial T} = e^{2K(T)} a(T) - \int_0^T \sigma(s)^2 e^{2K(s)} ds \Rightarrow$$

$$a(T) = e^{-K(T)} \frac{\partial \left(e^{K(T)} \frac{\partial A(0, T)}{\partial T} \right)}{\partial T} + e^{-2K(T)} \int_0^T \sigma(s)^2 e^{2K(s)} ds \Rightarrow \text{mit } C(0, T) = \int_0^T e^{-K(u)} du$$

$$a(T) = \frac{\partial C(0, T)}{\partial T} \left(\frac{b(T)}{\frac{\partial C(0, T)}{\partial T}} \frac{\partial A(0, T)}{\partial T} + \frac{1}{\frac{\partial C(0, T)}{\partial T}} \frac{\partial^2 A(0, T)}{\partial T^2} \right) + \left(\frac{\partial C(0, T)}{\partial T} \right)^2 \int_0^T \frac{\sigma(s)^2}{e^{-2K(s)}} ds \Rightarrow$$

$$a(T) = b(T) \frac{\partial A(0, T)}{\partial T} + \frac{\partial^2 A(0, T)}{\partial T^2} + \left(\frac{\partial C(0, T)}{\partial T} \right)^2 \int_0^T \left(\frac{\sigma(s)}{\partial C(0, s) / \partial s} \right)^2 ds$$

Dieser Ausdruck entspricht der Kalibrierungsformel (A2b.8).

A2c Die Drift des Bondpreisprozesses in der risikoneutralen Welt

Im allgemeinen Fall gilt es den Bondpreis in irgendeinem Zeitpunkt t für beliebige Fälligkeiten $T_i < T^{\max}$ zu bestimmen. Da die Bewertung unter dem risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß erfolgt, ist es nahe liegend zu erwarten, dass die Drift in der Dynamik des Bondpreises dem risikolosen Zinssatz entspricht. Im Folgenden wird die Annahme über die Drift, die bei der Herleitung der *SDE* für den Bondpreis in (2.50) gestützt auf diese Erwartungshaltung automatisch getroffen wurde, streng bewiesen. Als Ausgangspunkt für die weiteren Überlegungen dient die Bondpreisgleichung:

$$B(t, T) = e^{-r(t)C(t, T) - A(t, T)} \quad (\text{A2c.1})$$

Die Bestimmung der *SDE* des Bondpreises erfolgt mittels totaler Differentiation nach *Ito*:

$$\begin{aligned} \frac{dB(t, T)}{B(t, T)} &= \left(-C(t, T)dr(t) + \frac{1}{2}C(t, T)^2 dr(t)dr(t) - r(t)C_t(t, T)dt - A_t(t, T) \right) \Rightarrow \\ \frac{dB(t, T)}{B(t, T)} &= \left(-C(t, T)(a^*(t) - b(t)r(t)) + \frac{1}{2}C(t, T)^2 \sigma(t)^2 - r(t)C_t(t, T) - A_t(t, T) \right) dt \quad (\text{A2c.2}) \\ &\quad - \sigma(t)C(t, T)dW^*(t) \end{aligned}$$

Die Drift dieser *SDE* muss durch den risikolosen Zinssatz definiert sein. Demnach gilt es Folgendes zu beweisen:

$$\left(-C(t, T)(a^*(t) - b(t)r(t)) + \frac{1}{2}C(t, T)^2 \sigma(t)^2 - r(t)C_t(t, T) - A_t(t, T) \right) = r(t) \quad (\text{A2c.3})$$

Unter Ausnutzung der Kalibrierungsformel (2.57) für den Zinsmodellparameter $b(t)$ und Darstellung von $C(t, T)$ als Ausdruck zusammengesetzt aus kalibrierbaren Funktionen

$$\begin{aligned} C(t, T) &= e^{K(t)} \int_t^T e^{-K(u)} du = e^{K(t)} \underbrace{\int_0^T e^{-K(u)} du}_{C(0, T)} - e^{K(t)} \underbrace{\int_0^t e^{-K(u)} du}_{C(0, t)} = \frac{C(0, T) - C(0, t)}{\partial C(0, t) / \partial t} \\ \text{mit } K(t) &= \int_0^t b(u) du = -\log \frac{\partial C(0, t)}{\partial t} = \log \frac{1}{\partial C(0, t) / \partial t} \Rightarrow e^{K(t)} = \frac{1}{\partial C(0, t) / \partial t} \end{aligned}$$

lässt sich (A2c.3) folgendermaßen umformen:

$$C(t, T)b(t)r(t) - C(t, T)a(t) + \frac{1}{2}C(t, T)^2\sigma(t, T)^2 - r(t)C_t(t, T) - A_t(t, T) \stackrel{!}{=} r(t) \Rightarrow$$

$$\left(\underbrace{C(t, T)b(t) - C_t(t, T)}_I \right) \left(r(t) - \frac{C(t, T)a^*(t) - \frac{1}{2}C(t, T)^2\sigma(t)^2 + A_t(t, T)}{\underbrace{C(t, T)b(t) - C_t(t, T)}_I} \right) \stackrel{!}{=} r(t)$$

$$r(t) - \left(C(t, T)a^*(t) - \frac{1}{2}C(t, T)^2\sigma(t)^2 + A_t(t, T) \right) \stackrel{!}{=} r(t), \text{ da}$$

$$C(t, T)b(t) - C_t(t, T) = -\frac{C(0, T) - C(0, t)}{\partial C(0, t) / \partial t} \frac{\partial^2 C(0, t) / \partial t^2}{\partial C(0, t) / \partial t} - C_t(t, T) = \quad (\text{A2c.4})$$

$$-\frac{C(0, T) - C(0, t)}{\partial C(0, t) / \partial t} \frac{\partial^2 C(0, t) / \partial t^2}{\partial C(0, t) / \partial t} - \left(\frac{-(\partial C(0, t) / \partial t)^2 - (C(0, T) - C(0, t)) \frac{\partial^2 C(0, t)}{\partial t^2}}{(\partial C(0, t) / \partial t)^2} \right)$$

$$\frac{C(0, t) - C(0, T)}{(\partial C(0, t) / \partial t)^2} \partial^2 C(0, t) / \partial t^2 + \frac{(\partial C(0, t) / \partial t)^2}{(\partial C(0, t) / \partial t)^2} + \frac{C(0, T) - C(0, t)}{(\partial C(0, t) / \partial t)^2} \partial^2 C(0, t) / \partial t^2 = 1$$

Daher ist es ausreichend, um die Übereinstimmung der Drift mit dem risikolosen Zinssatz zu beweisen, die Gültigkeit folgender Beziehung zu zeigen:

$$C(t, T)a^*(t) - \frac{1}{2}C(t, T)^2\sigma(t)^2 + A_t(t, T) = 0 \quad (\text{A2c.5})$$

Mit Rückgriff auf die Definition von $A(t, T)$ in (2.49) und anschließender Bestimmung der partiellen Ableitung nach t , wird die Äquivalenz sofort hergestellt:

$$A(t, T) = \int_t^T \left(e^{K(s)} a^*(s) \int_s^T e^{-K(u)} du - \frac{1}{2} e^{2K(s)} \sigma(s)^2 \left(\int_s^T e^{-K(u)} du \right)^2 \right) ds \Rightarrow$$

$$A_t(t, T) = -e^{K(t)} a^*(t) \int_t^T e^{-K(u)} du + \frac{1}{2} e^{2K(t)} \sigma(t)^2 \left(\int_t^T e^{-K(u)} du \right)^2 = \quad (\text{A2c.6})$$

$$-a^*(t)C(t, T) + \frac{1}{2}\sigma(t)^2 C(t, T)^2 \Rightarrow C(t, T)a^*(t) - \frac{1}{2}C(t, T)^2\sigma(t)^2 + A_t(t, T) =$$

$$C(t, T)a^*(t) - \frac{1}{2}C(t, T)^2\sigma(t)^2 - a^*(t)C(t, T) + \frac{1}{2}\sigma(t)^2 C(t, T)^2 = 0$$

Dieses Ergebnis beendet den Beweis, dass die Drift in der Dynamik des Bondpreises unter dem risikoneutralen und gleichzeitig bewertungsrelevanten Wahrscheinlichkeitsmaß dem risikolosen Zinssatz entspricht.

Anlage 3: Die funktionale Abhängigkeit der Volatilitätsstruktur von der *Short Rate* im Rahmen des erweiterten Zinsmodells

A3a Bestimmung des bedingten Erwartungswertes

Auf der Basis des in (2.66) postulierten Zinsmodells gilt es den bedingten Erwartungswert von $\int_t^T r(s)ds$ als eine der bewertungsrelevanten Komponenten zu bestimmen, um schließlich mittels Bondpreise gemäß der *No-Arbitrage*-Beziehung in (2.33) die Bondpreisdynamik herzuleiten:

$$\begin{aligned} dr(t) &= (a^*(t) - b(t)r(t))dt + \sigma(t)r(t)dW^*(t) \Rightarrow \\ r(T) &= r(t) + \int_t^T (a^*(u) - b(u)r(u))du + \int_t^T \sigma(u)r(u)dW^*(u) \Rightarrow \\ E(r(T) | F(t)) &= r(t) + \int_t^T (a^*(u) - b(u)E(r(u) | F(t)))du \Rightarrow \\ \frac{d[E(r(T) | F(t))]}{dT} &= a^*(T) - b(T)E(r(T) | F(t)) \end{aligned} \tag{A3a.1}$$

Der letzte Ausdruck stellt eine *ODE* nach dem bedingten Erwartungswert dar, die folgendermaßen zu lösen ist:

$$\begin{aligned} \text{Mit } E(r(T) | F(t)) = X(T) \Rightarrow \frac{dX(T)}{dT} &= a^*(T) - b(T)X(T) \Big| \cdot e^{\int_t^T b(u)du} \Rightarrow \\ e^{\int_t^T b(u)du} dX(T) + b(T)e^{\int_t^T b(u)du} X(T)dT &= a^*(T)e^{\int_t^T b(u)du} dT \Rightarrow d \left[e^{\int_t^T b(u)du} X(T) \right] = a^*(T)e^{\int_t^T b(u)du} dT \Rightarrow \\ e^{\int_t^T b(u)du} X(T) &= X(t) + \int_t^T a^*(s)e^{\int_t^s b(u)du} ds \text{ und mit } X(t) = E(r(t) | F(t)) = r(t) \Rightarrow \\ E(r(T) | F(t)) &= r(t)e^{-\int_t^T b(u)du} + \int_t^T a^*(s)e^{-\int_t^s b(u)du} ds = e^{-K(T)} \left[r(t)e^{K(t)} + \int_t^T a^*(s)e^{K(s)} ds \right] \end{aligned} \tag{A3a.2}$$

Um den bedingten Erwartungswert von $\int_t^T r(s)ds$ zu determinieren, wird der Ausdruck in der zweiten Zeile von (A3a.1) nach der Variable T integriert:

$$\begin{aligned} \int_t^T r(s)ds &= \int_t^T \left(r(t) + \int_t^s (a^*(u) - b(u)r(u))du \right) ds + \int_t^T \int_t^s \sigma(u)r(u)dW^*(u)ds \Rightarrow \\ E \left(\int_t^T r(s)ds | F(t) \right) &= \int_t^T \left(r(t) + \int_t^s (a^*(u) - b(u)E(r(u) | F(t)))du \right) ds \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\frac{d \left[E \left(\int_t^T r(s) ds \mid F(t) \right) \right]}{dT} = r(t) + \int_t^T (a^*(u) - b(u) E(r(u) \mid F(t))) du = E(r(T) \mid F(t)) \quad (\text{A3a.3})^{235}$$

Die Eliminierung des Integrals erfordert eine weitere Ableitung nach T :

$$\frac{d^2 E \left(\int_t^T r(s) ds \mid F(t) \right)}{dT^2} = a^*(T) - b(T) \underbrace{E(r(T) \mid F(t))}_{\frac{dE \left(\int_t^T r(s) ds \mid F(t) \right)}{dT}}, \quad \text{mit } X(T) = E_t \left(\int_t^T r(s) ds \right) \Rightarrow \quad (\text{A3a.4})$$

$$\frac{d^2 X(T)}{dT^2} = a^*(T) - b(T) \frac{dX(T)}{dT}, \quad \text{mit } Y(T) = \frac{dX(T)}{dT} \Rightarrow \frac{dY(T)}{dT} = a^*(T) - b(T)Y(T)$$

Folglich ist mit der Substituierbarkeit der Erwartungswertbildung und der Differentialoperation nach T gelungen, die zu lösende *ODE* auf eine Gleichung zurückzuführen, deren Lösung bereits in (A3a.2) erfolgt ist:

$$\text{Da } X(T) = E \left(\int_t^T r(s) ds \mid F(t) \right) \Rightarrow \frac{dX(T)}{dT} = Y(T) = \frac{d \left[E \left(\int_t^T r(s) ds \mid F(t) \right) \right]}{dT} = E(r(T) \mid F(t))$$

Demnach bestimmt sich die Lösung der *ODE* nach $Y(T)$ mit Rückgriff auf (A3a.2) zu:

$$\frac{dX(T)}{dT} = Y(T) = r(t) e^{-\int_t^T b(v) dv} + \int_t^T a^*(u) e^{-\int_t^u b(v) dv} du \Rightarrow X(T) - \underbrace{X(t)}_0 = E \left(\int_t^T r(s) ds \mid F(t) \right) = \int_t^T Y(s) ds$$

²³⁵ Da es leicht gelingt die Gültigkeit folgender Ableitung $\frac{d \int_t^T r(s) ds}{dT} = r(T)$ nachzuweisen, folgt daraus direkt die unmittelbare Austauschbarkeit der Erwartungswertbildung und der Differentialoperation nach T : $\frac{d \left[E \left(\int_t^T r(s) ds \mid F(t) \right) \right]}{dT} = E \left(\frac{d \left[\int_t^T r(s) ds \right]}{dT} \mid F(t) \right) = E(r(T) \mid F(t))$. Die Validität der Ableitung kann

wie folgt nachgewiesen werden:

$$\frac{d \int_t^T r(s) ds}{dT} = \frac{d \left[\int_t^T \frac{r(t) M(t) e^{-\int_t^s b(v) dv}}{M(s)} ds + \int_t^T \int_t^s \frac{a^*(u) M(u) e^{-\int_t^u b(v) dv}}{M(s)} du ds \right]}{dT} = \underbrace{\frac{r(t) M(t)}{M(T)} e^{-\int_t^T b(v) dv}}_{r(T)} + \int_t^T \frac{a^*(u) M(u)}{M(T)} e^{-\int_t^u b(v) dv} du$$

$$\begin{aligned}
E\left(\int_t^T r(s)ds \mid F(t)\right) &= \int_t^T r(t)e^{-\int_t^s b(v)dv} ds + \int_t^T \int_t^s a^*(u)e^{-\int_u^s b(v)dv} dud s = r(t)e^{K(t)} \int_t^T e^{-K(s)} ds + \\
\int_t^T e^{-K(s)} \int_t^s a^*(u)e^{K(u)} dud s &= r(t)C(t,T) + \int_t^T a^*(u)e^{K(u)} \int_u^T e^{-K(s)} ds du \Rightarrow \quad (A3a.5) \\
E\left(\int_t^T r(s)ds \mid F(t)\right) &= r(t)C(t,T) + \int_t^T a^*(u)C(u,T) du
\end{aligned}$$

Die Äquivalenz des im Rahmen dieser Anlage hergeleiteten bedingten Erwartungswertes mit dem Ergebnis in (2.69) beendet den Beweis.

A3b Die partielle Ableitung des bedingten Erwartungswertes vom quadrierten Abzinsungsfaktor

Als Ausgangspunkt der nachfolgenden Herleitung dient (2.68) in quadrierter Form:

$$\left(\int_t^T r(w)dw\right)^2 = \left(\int_t^T \frac{r(t)M(t)e^{-\int_t^w b(u)du}}{M(w)} dw + \int_t^T \int_t^w \frac{a^*(s)M(s)e^{-\int_s^w b(u)du}}{M(w)} ds dw\right)^2 \quad (A3b.1)$$

Zum Zweck der Bestimmung der Bondvolatilität als Vorstufe der Herleitung in geschlossener Form von Optionspreisformeln mit funktionaler Abhängigkeit der „impliziten“ Volatilität von der *Short Rate* gilt es als letzte unbekannte bewertungsrelevante Komponente, die partielle Ableitung des bedingten Erwartungswertes vom quadrierten Abzinsungsfaktor zu determinieren:

$$\begin{aligned}
E_r\left(\left(\int_t^T r(w)dw\right)^2 \mid F(t)\right) &= E_r\left(\left(\int_t^T \frac{r(t)M(t)e^{-\int_t^w b(u)du}}{M(w)} dw\right)^2 + \left(\int_t^T \int_t^w \frac{a^*(s)M(s)e^{-\int_s^w b(u)du}}{M(w)} ds dw\right)^2 \mid F(t)\right) \\
+ 2E_r\left(\int_t^T \frac{r(t)M(t)e^{-\int_t^w b(u)du}}{M(w)} dw \int_t^T \int_t^w \frac{a^*(s)M(s)e^{-\int_s^w b(u)du}}{M(w)} ds dw \mid F(t)\right) &= \\
2r(t)E_t\left(\left(\int_t^T \frac{M(t)e^{-\int_t^w b(u)du}}{M(w)} dw\right)^2\right) &+ 2E_t\left(\int_t^T \frac{M(t)e^{-\int_t^w b(u)du}}{M(w)} dw \int_t^T \int_t^w \frac{a^*(s)M(s)e^{-\int_s^w b(u)du}}{M(w)} ds dw\right)
\end{aligned}$$

Der Übersichtlichkeit halber werden beide Summanden getrennt berechnet²³⁶:

$$\begin{aligned}
2r(t)E_t \left(\left(\int_t^T \frac{M(t)e^{-\int_t^w b(u)du}}{M(w)} dw \right)^2 \right) &= 2r(t) \left(\int_t^T e^{-\frac{1}{2}\int_t^w \sigma(u)^2 du} e^{-\int_t^w b(u)du} dw \right)^2 \quad \text{mit} \\
E_t \left(\frac{M(t)^2}{M(w)^2} \right) &= \frac{M(t)^2}{E_t \left(e^{-2\int_0^w \sigma(s)dW^*(s) - \int_0^w \sigma(s)^2 ds} \right)} = \frac{M(t)^2}{e^{-\int_0^w \sigma(s)^2 ds} E_t \left(e^{-2\int_0^w \sigma(s)dW^*(s)} \right)} = \quad (\text{A3b.2}) \\
&= \frac{M(t)^2}{e^{-\int_0^w \sigma(s)^2 ds} e^{-2\int_0^t \sigma(s)dW^*(s)} \frac{1}{2}(-2)^2 \int_t^w \sigma(s)^2 ds} = \\
&= \frac{M(t)^2}{e^{-\int_0^t \sigma(s)^2 ds} e^{-2\int_0^t \sigma(s)dW^*(s)} e^{\int_t^w \sigma(s)^2 ds}} = e^{-\int_t^w \sigma(s)^2 ds} \\
&= \frac{M(t)^2}{e^{-\int_0^t \sigma(s)^2 ds} e^{-2\int_0^t \sigma(s)dW^*(s)} e^{\int_t^w \sigma(s)^2 ds}} = e^{-\int_t^w \sigma(s)^2 ds}
\end{aligned}$$

Mit dem Ziel die Integrationsreihenfolge zu rotieren, erhält man unter Anwendung des *Fubini*-Theorems für den zweiten Summanden folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned}
2E_t \left(\int_t^T \frac{M(t)e^{-\int_t^w b(u)du}}{M(w)} dw \int_t^w \int_t^w \frac{a^*(s)M(s)e^{-\int_t^s b(u)du}}{M(w)} ds dw \right) &= \\
2E_t \left(\int_t^T \int_t^w \frac{a^*(s)M(s)M(t)}{M(w)^2} e^{-\int_t^w b(u)du} e^{-\int_s^w b(u)du} ds (dw)^2 \right) &= \\
2E_t \left(\int_t^T a^*(s)M(s)e^{K(s)} \int_s^T \frac{M(t)}{M(w)^2} e^{-\int_t^w b(u)du} e^{-K(w)} (dw)^2 ds \right) \quad \text{mit} \quad E_t \left(\frac{M(t)M(s)}{M(w)^2} \right) &= e^{-\int_s^w \sigma(u)^2 du} \\
= 2 \left(\int_t^T a^*(s)e^{K(s)} e^{\int_0^s \sigma(u)^2 du} \int_s^T e^{-\int_0^s \sigma(u)^2 du} e^{-K(w)} e^{-\int_t^w b(u)du} e^{-\int_s^w b(u)du} (dw)^2 ds \right) &= \\
= 2 \left(\int_t^T a^*(s)e^{2K(s)} e^{\int_0^s \sigma(u)^2 du} \int_s^T e^{-\int_0^s \sigma(u)^2 du} e^{-2K(w)} e^{-\int_t^w b(u)du} (dw)^2 ds \right) &=
\end{aligned}$$

²³⁶ Der Subindex t bezeichnet den Erwartungswert bedingt auf $F(t)$ und steht in keinem Zusammenhang mit der partiellen Ableitung nach t . Zur Notationsentlastung wird diese Konvention konsequent bis zum Ende der Anlage durchgesetzt.

$$= 2 \left(\int_t^T a^*(s) e^{2K(s)} e^{\int_0^s \sigma(u)^2 du} e^{-\int_t^s b(u) du} \left(\int_s^T e^{-\frac{1}{2} \int_0^w \sigma(u)^2 du} e^{-K(w)} dw \right)^2 ds \right) \quad (\text{A3b.3})$$

Die Gültigkeit des im Rahmen der Herleitung ohne Beweis verwendeten Erwartungswertes von den stochastischen Variablen lässt sich folgendermaßen demonstrieren:

$$\begin{aligned} E_t \left(\frac{M(t)M(s)}{M(w)^2} \right) &= E_t \left(\frac{e^{-\int_0^t \sigma(u) dW^*(u) - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma(u)^2 du} e^{-\int_0^s \sigma(u) dW^*(u) - \frac{1}{2} \int_0^s \sigma(u)^2 du}}{e^{-2 \int_0^w \sigma(u) dW^*(u) - \int_0^w \sigma(u)^2 du}} \right) = \\ &= \frac{e^{-\int_0^t \sigma(u) dW^*(u) - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma(u)^2 du} e^{-\int_0^s \sigma(u) dW^*(u) - \frac{1}{2} \int_0^s \sigma(u)^2 du}}{e^{-2 \int_0^w \sigma(u) dW^*(u) - \int_0^w \sigma(u)^2 du}} E_t \left(\frac{e^{-\int_t^s \sigma(u) dW^*(u)}}{e^{-2 \int_t^w \sigma(u) dW^*(u)}} \right) = \\ &= \frac{e^{-\frac{1}{2} \int_0^t \sigma(u)^2 du} e^{-\frac{1}{2} \int_0^s \sigma(u)^2 du}}{e^{-\int_0^w \sigma(u)^2 du}} E_t \left(\frac{e^{-\int_t^s \sigma(u) dW^*(u)}}{e^{-2 \int_t^w \sigma(u) dW^*(u)}} \right) = \\ &= \frac{e^{-\int_0^t \sigma(u)^2 du} e^{-\frac{1}{2} \int_t^s \sigma(u)^2 du}}{e^{-\int_0^t \sigma(u)^2 du} e^{-\int_t^w \sigma(u)^2 du}} E_t \left(\frac{1}{e^{-\int_t^s \sigma(u) dW^*(u)} e^{-2 \int_t^w \sigma(u) dW^*(u)}} \right) = \\ &= \frac{e^{-\frac{1}{2} \int_t^s \sigma(u)^2 du}}{e^{-\int_t^w \sigma(u)^2 du}} E_t \left(\frac{1}{e^{-\int_t^s \sigma(u) dW^*(u)}} \right) E_t \left(\frac{1}{e^{-2 \int_t^w \sigma(u) dW^*(u)}} \right) = \\ &= \frac{e^{-\frac{1}{2} \int_t^s \sigma(u)^2 du}}{e^{-\int_t^s \sigma(u)^2 du} e^{-\int_s^w \sigma(u)^2 du}} \frac{1}{e^{-\frac{1}{2} (-1)^2 \int_t^s \sigma(u)^2 du}} \frac{1}{e^{-\frac{1}{2} (-2)^2 \int_s^w \sigma(u)^2 du}} = e^{-\int_s^w \sigma(u)^2 du} \end{aligned}$$

$$\text{mit } E_t \left(\int_s^w \sigma(u) dW^*(u) \right) = E_t \left(\int_t^w \sigma(u) dW^*(u) \right) - E_t \left(\int_t^s \sigma(u) dW^*(u) \right) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Var}_t \left(\int_s^w \sigma(u) dW^*(u) \right) &= E_t \left(\int_t^w \sigma(u) dW^*(u) \right)^2 - \left(E_t \left(\int_t^w \sigma(u) dW^*(u) \right) \right)^2 - E_t \left(\int_t^s \sigma(u) dW^*(u) \right)^2 \\ &+ \left(E_t \left(\int_t^s \sigma(u) dW^*(u) \right) \right)^2 = \int_t^w \sigma(u)^2 du - \int_t^s \sigma(u)^2 du = \int_s^w \sigma(u)^2 du \end{aligned}$$

Die Zusammensetzung der erhaltenen Ausdrücke für die beiden Summanden in (A3b.2) und (A3b.3) liefert die partielle Ableitung des bedingten Erwartungswertes vom quadrierten Abzinsungsfaktor als letzte unbekannte bewertungsrelevante Komponente:

$$2r(t) \left(\int_t^T e^{-\frac{1}{2} \int_t^w \sigma(u)^2 du} e^{-\int_t^w b(u) du} dw \right)^2 + 2 \left(\int_t^T a^*(s) e^{2K(s)} e^{\int_0^s \sigma(u)^2 du} e^{-\int_t^s b(u) du} \left(\int_s^T e^{-\frac{1}{2} \int_0^w \sigma(u)^2 du} e^{-K(w)} dw \right)^2 ds \right)$$

und determiniert somit die endgültige Form der Bondvolatilität in (2.76).

Anlage 4: Zweidimensionale Markov HJM-Darstellung der Discount Curve

Unter der Restriktion der Volatilitätsstruktur auf eine separierbare Form gemäß Abschnitt 331 lässt sich das allgemeine *HJM*-Konstrukt zur Deskription der Zinsstruktur auf ein zweidimensionales *Markov*-System zurückführen. Ausgangspunkt des nachfolgenden Beweises bildet die *HJM*-Entwicklung der *Forward Rate Curve* gemäß (3.16) und die dadurch implizierte *Discount Curve* basierend auf der spezifischen Volatilitätsfunktion:

$$f(t, T) = f(0, T) + \int_0^t \sigma_f(s, T) \int_s^T \sigma_f(s, u) du ds + \int_0^t \sigma_f(s, T) dW^*(s)$$

Mit $B(t, T) = e^{-\int_t^T f(t, v) dv}$ und $\sigma_f(t, T) = \sigma_r(t) e^{-\int_t^T b(x) dx} \Rightarrow$ (A4.1)

$$B(t, T) = \frac{B(0, T)}{B(0, t)} e^{-\int_0^t \int_0^T \sigma_r(s) e^{-\int_s^T b(x) dx} \int_s^T \sigma_r(s) e^{-\int_s^T b(x) dx} du ds dv - \int_0^t \int_0^T \sigma_r(s) e^{-\int_s^T b(x) dx} dW^*(s) dv}$$

Der Einfachheit halber wird der Exponent in seine Bestandteile getrennt, die separat gezielter Umformung zwecks Aktualisierung der ganzen *Discount Curve* mittels einiger weniger Zustandsvariablen unterzogen werden:

$$-\int_0^t \sigma_r(s) \int_s^T e^{-\int_s^T b(x) dx} dv dW^*(s) = \int_0^t \sigma_r(s) \frac{e^{-\int_s^T b(x) dx}}{b(T)} dW^*(s) - \int_0^t \sigma_r(s) \frac{e^{-\int_s^T b(x) dx}}{b(t)} dW^*(s) =$$

$$-\alpha(t, T) \int_0^t \sigma_r(s) e^{-\int_s^T b(x) dx} dW^*(s) \text{ mit } \alpha(t, T) = \int_t^T e^{-\int_t^v b(x) dx} dv = \frac{1}{b(t)} - \frac{1}{b(T)} e^{-\int_t^T b(x) dx}$$

(A4.2)²³⁷

²³⁷ Zwecks übersichtlicher Beweisführung werden im Folgenden alle Integrale der Form $\int_t^T e^{-\int_t^v b(x) dx} dv$ explizit aufgelöst. Da der Ausdruck deterministischer Natur ist, besteht allerdings keine zwingende Notwendigkeit dafür, zumal die Berechnung nur näherungsweise erfolgen kann:

$$\int_t^T e^{-\int_t^v b(x) dx} dv = -\int_t^T \frac{d[e^{-\int_t^v b(x) dx}]}{b(v)} = -\frac{e^{-\int_t^T b(x) dx}}{b(v)} \Big|_t^T + \int_t^T e^{-\int_t^v b(x) dx} \frac{1}{b(v)} dv = -\frac{e^{-\int_t^T b(x) dx}}{b(v)} \Big|_t^T - \int_t^T \frac{e^{-\int_t^v b(x) dx}}{b(v)^2} dv =$$

$$-\frac{e^{-\int_t^T b(x) dx}}{b(v)} \Big|_t^T + \int_t^T \frac{d[e^{-\int_t^v b(x) dx}]}{b(v)^3} = -\frac{e^{-\int_t^T b(x) dx}}{b(v)} \Big|_t^T + \frac{e^{-\int_t^v b(x) dx}}{b(v)^3} \Big|_t^T + 3 \int_t^T \frac{e^{-\int_t^v b(x) dx}}{b(v)^4} dv = -\frac{e^{-\int_t^T b(x) dx}}{b(v)} \Big|_t^T + \frac{e^{-\int_t^v b(x) dx}}{b(v)^3} \Big|_t^T$$

$$-3 \frac{e^{-\int_t^T b(x) dx}}{b(v)^5} \Big|_t^T + 3.5 \frac{e^{-\int_t^T b(x) dx}}{b(v)^7} \Big|_t^T - 3.5.7 \frac{e^{-\int_t^T b(x) dx}}{b(v)^9} \Big|_t^T \dots = -\frac{e^{-\int_t^T b(x) dx}}{b(v)} \Big|_t^T + \frac{e^{-\int_t^v b(x) dx}}{b(v)^3} \Big|_t^T + \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^i -(2j+1) \frac{e^{-\int_t^v b(x) dx}}{b(v)^{2i+3}} \Big|_t^T$$

Vereinfacht wird im Weiteren als approximative Darstellung vereinbart, allein das erste Glied der Reihenentwicklung zu berücksichtigen. Erneut sei der Leser darauf hingewiesen, dass diese Approximation keine Auswirkung auf den nachfolgenden Beweis hat, da alle Integrale, die diesen deterministischen

In ähnlicher Weise wird die andere Komponente des Exponenten behandelt:

$$-\int_0^T \int_0^t \sigma_r(s) e^{-\int_s^v b(x) dx} \int_s^v \sigma_r(s) e^{-\int_s^u b(x) dx} dudsv = -\int_0^T \int_0^t \sigma_r(s)^2 e^{-\int_s^v b(x) dx} \left(\int_s^v e^{-\int_s^u b(x) dx} du \right) dsdv = \quad (\text{A4.3})$$

$$\int_0^T \int_0^t \frac{\sigma_r(s)^2}{b(v)} e^{-2\int_s^v b(x) dx} dsdv - \int_0^T \int_0^t \frac{\sigma_r(s)^2}{b(s)} e^{-\int_s^v b(x) dx} dsdv$$

Analog werden beide Integrale einzeln berechnet:

$$-\int_0^T \int_0^t \frac{\sigma_r(s)^2}{b(s)} e^{-\int_s^v b(x) dx} dsdv = -\int_0^t \frac{\sigma_r(s)^2}{b(s)} \left(\int_t^T e^{-\int_s^v b(x) dx} dv \right) ds = \int_0^t \frac{\sigma_r(s)^2}{b(s)} \frac{e^{-\int_s^T b(x) dx}}{b(T)} ds - \quad (\text{A4.4})$$

$$\int_0^t \frac{\sigma_r(s)^2}{b(s)} \frac{e^{-\int_s^T b(x) dx}}{b(T)} ds = -\alpha(t, T) \int_0^t \frac{\sigma_r(s)^2}{b(s)} e^{-\int_s^t b(x) dx} ds$$

Schließlich wird die gleiche Technik angewendet, um das andere Integral aufzulösen:

$$\int_0^T \int_0^t \frac{\sigma_r(s)^2}{b(v)} e^{-2\int_s^v b(x) dx} dsdv = \int_0^t \sigma_r(s)^2 e^{-2\int_s^t b(x) dx} \int_t^T \frac{e^{-\int_s^v b(x) dx}}{b(v)} dv ds = \beta(0, t) \int_t^T \frac{e^{-\int_t^v b(x) dx}}{b(v)} dv \quad (\text{A4.5})$$

$$\text{mit } \beta(0, t) = \int_0^t \sigma_r(s)^2 e^{-2\int_s^t b(x) dx} ds$$

Mit $t=T$ erschließt sich aus (A4.1) unmittelbar die Entwicklung der *Short Rate*:

$$\begin{aligned} r(t) &= f(0, t) + \int_0^t \sigma_r(u) e^{-\int_u^t b(x) dx} \int_u^t \sigma_r(u) e^{-\int_u^v b(x) dx} dv du + \int_0^t \sigma_r(u) e^{-\int_u^t b(x) dx} dW^*(u) \Rightarrow \\ r(t) - f(0, t) &= \int_0^t \sigma_r(u)^2 e^{-\int_u^t b(x) dx} \left(\int_u^t e^{-\int_u^v b(x) dx} dv \right) du + \int_0^t \sigma_r(u) e^{-\int_u^t b(x) dx} dW^*(u) \quad (\text{A4.6}) \\ &= -\int_0^t \frac{\sigma_r(u)^2}{b(t)} e^{-2\int_u^t b(x) dx} du + \int_0^t \frac{\sigma_r(u)^2}{b(u)} e^{-\int_u^t b(x) dx} du + \int_0^t \sigma_r(u) e^{-\int_u^t b(x) dx} dW^*(u) \end{aligned}$$

Charakter aufweisen, einheitlich die gleiche Annäherung erfahren. An der Bondbewertungsvorschrift (A4.7) erkennt man die gegenseitige Aufhebung der Approximationseffekte, da die Funktion

$\alpha(t, T) = \int_t^T e^{-\int_t^v b(x) dx} dv$ vorerst ungeachtet der Berechnungsmethode als ganze in die Formel einfließt. Erst

im nächsten Schritt, wenn es den Bondpreis explizit zu bestimmen gilt, wird die Ermittlung eines genauen Ausdrucks in Abhängigkeit von der *Mean Reversion*-Funktion $b(t)$ relevant.

Die Summe von (A4.2), (A4.4) und $b(t)^{-1}\beta(0,t)\alpha(t,T)$ ergibt $-\alpha(t,T)(r(t)-f(0,t))$. Mit dieser Erkenntnis kann der Bondpreis zu einem späteren Zeitpunkt t folgendermaßen ermittelt werden:

$$B(t,T) = \frac{B(0,T)}{B(0,t)} e^{-\alpha(t,T)(r(t)-f(0,t)) - \frac{1}{b(t)}\alpha(t,T)\beta(0,t) + \beta(0,t)} \int_t^T \frac{e^{-\int_t^v b(x)dx}}{b(v)} dv$$

$$\text{Mit } \int_t^T \frac{e^{-\int_t^v b(x)dx}}{b(v)} dv = -\frac{e^{-\int_t^v b(x)dx}}{2b(v)^2} \Big|_t^T - \int_t^T \frac{e^{-\int_t^v b(x)dx}}{b(v)^3} dv = -\frac{e^{-\int_t^T b(x)dx}}{2b(T)^2} + \frac{1}{2b(t)^2}$$

$$= \frac{-\alpha(t,T)^2}{2} + \frac{1}{b(t)^2} - \frac{e^{-\int_t^T b(x)dx}}{b(t)b(T)} \Rightarrow \quad (\text{A4.7})$$

$$B(t,T) = \frac{B(0,T)}{B(0,t)} e^{-\alpha(t,T)(r(t)-f(0,t)) - \frac{\beta(0,t)\alpha(t,T)^2}{2} + \frac{\beta(0,t)}{b(t)^2} - \frac{\beta(0,t)e^{-\int_t^T b(x)dx}}{b(t)b(T)} - \frac{1}{b(t)}\alpha(t,T)\beta(0,t)} \Rightarrow$$

$$B(t,T) = \frac{B(0,T)}{B(0,t)} e^{-\alpha(t,T)(r(t)-f(0,t)) - \frac{\beta(0,t)\alpha(t,T)^2}{2}}$$

Anhand dieser Bewertungsgleichung wird deutlich illustriert, dass alle relevanten Informationen für die Aktualisierung der *Discount Curve* ausschließlich durch die *Short Rate* $r(t)$ selbst und eine zusätzliche Zustandsvariable $\beta(0,t)$ zur Erfassung der Pfadausprägung innerhalb des Zeitintervalls $[0:t]$ eingefangen werden. Diese spezifische Wahl der Volatilitätsfunktion impliziert die Dynamik der *Short Rate* gemäß dem Hull/White-Zinsmodell²³⁸, wohingegen $\beta(0,t)$ folgender lokal deterministischer Differentialgleichung gehorcht:

$$d\beta(0,t) = [\sigma_r(t)^2 - 2b(t)\beta(0,t)] dt \quad (\text{A4.8})$$

In Wirklichkeit erweist sich die direkte Ermittlung der pfadabhängigen Zustandsvariable $\beta(0,t)$ als extrem schwierig. Allerdings genügt die Determinierung einer beliebigen Stützstelle auf der Zinsstruktur im zukünftigen Zeitpunkt t , um die ganze *Discount Curve* rekonstruieren zu können. Zu diesem Zweck wird der Bondpreis partiell nach s differenziert²³⁹:

²³⁸ Vgl. Abschnitt 332.

²³⁹ Für die partielle Ableitung von $\alpha(t,s)$ nach s folgt mit Fn. 237 :

$$\alpha(t,s) = \int_t^s e^{-\int_t^v b(x)dx} dv = -\frac{e^{-\int_t^v b(x)dx}}{b(v)} \Big|_t^s + \frac{e^{-\int_t^v b(x)dx}}{b(v)^3} \Big|_t^s - 3\frac{e^{-\int_t^v b(x)dx}}{b(v)^5} \Big|_t^s + 3.5\frac{e^{-\int_t^v b(x)dx}}{b(v)^7} \Big|_t^s - 3.5.7\frac{e^{-\int_t^v b(x)dx}}{b(v)^9} \Big|_t^s \dots \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \alpha(t,s)}{\partial s} ds = e^{-\int_t^s b(x)dx} ds + \frac{e^{-\int_t^s b(x)dx}}{b(s)^2} ds - \frac{e^{-\int_t^s b(x)dx}}{b(s)^2} ds - 3\frac{e^{-\int_t^s b(x)dx}}{b(s)^4} ds + 3\frac{e^{-\int_t^s b(x)dx}}{b(s)^4} ds + 3.5\frac{e^{-\int_t^s b(x)dx}}{b(s)^6} ds$$

Mit $T = s \Rightarrow$

$$\frac{\partial B(t,s)}{\partial s} ds = \left[-\alpha(t,s)\beta(0,t) \frac{\partial \alpha(t,s)}{\partial s} - (r(t) - f(0,t)) \frac{\partial \alpha(t,s)}{\partial s} \right] B(t,s) ds + \frac{\partial B(0,s)}{\partial s} \frac{B(t,s)}{B(0,s)} ds \Rightarrow$$

$$-B(t,s)f(t,s) ds = \left[-\alpha(t,s)\beta(0,t) - (r(t) - f(0,t)) \right] e^{-\int_t^s b(x) dx} B(t,s) ds - f(0,s)B(t,s) ds$$

$$\text{Mit } B(t,s) = e^{-\int_t^s f(t,u) du} \Rightarrow \frac{\partial B(t,s)}{\partial s} ds = -B(t,s)f(t,s) ds, \quad \frac{\partial \alpha(t,s)}{\partial s} ds = e^{-\int_t^s b(x) dx} ds \text{ und}$$

$$B(0,s) = e^{-\int_0^s f(0,u) du} \Rightarrow \frac{\partial B(0,s)}{\partial s} \frac{B(t,s)}{B(0,s)} ds = -B(0,s)f(0,s) \frac{B(t,s)}{B(0,s)} ds = -f(0,s)B(t,s) ds$$

Simple algebraische Umformungen liefern schließlich einen Ausdruck für $\beta(0,t)$:

$$\alpha(t,s)\beta(0,t) = f(0,t) - r(t) + [f(t,s) - f(0,s)] e^{\int_t^s b(x) dx} \Rightarrow$$

$$\beta(0,t) = \frac{1}{\alpha(t,s)} \left(f(0,t) - r(t) + [f(t,s) - f(0,s)] e^{\int_t^s b(x) dx} \right) \quad (\text{A4.9})$$

Das Einsetzen von $\beta(0,t)$ in die Bondbewertungsformel gemäß (A4.7) betont nachdrücklich, dass die Deskription der vollständigen *Discount Curve* in einem späteren Zeitpunkt t einen *Markov* Charakter bezüglich der beiden Zustandsvariablen $r(t)$ und $f(t,s)$ besitzt.

$$-3.5 \frac{e^{-\int_t^s b(x) dx}}{b(s)^6} ds - 3.5.7 \frac{e^{-\int_t^s b(x) dx}}{b(s)^8} ds + 3.5.7 \frac{e^{-\int_t^s b(x) dx}}{b(s)^8} ds \dots = e^{-\int_t^s b(x) dx} ds$$

Anlage 5: Das Konzept der Brownschen Brücke

Zur Darstellung des Konzepts bediene man sich der Charakterisierung von Oksendal²⁴⁰, der die *Brownsche* Brücke von a nach b als den Prozess $Y(t)$ definiert, der folgender eindimensionaler Differentialgleichung genügt:

$$dY(t) = \frac{b-Y(t)}{1-t} dt + dW(t), \quad 0 \leq t < 1, \quad Y(0) = a \quad \text{und} \quad a, b - \text{const.} \quad (\text{A5.1})$$

Es gilt zweierlei zu zeigen:

$$(1) \quad Y(t) = a(1-t) + bt + (1-t) \int_0^t \frac{dW(s)}{1-s}, \quad 0 \leq t < 1 \quad (\text{A5.2})$$

$$(2) \quad \lim_{t \rightarrow 1} Y(t) = b \quad \text{a.s.}$$

Mittels adäquater Substitutionen und anschließenden totalen Differenzierens nach *Ito*, erhält man für den ersten Teil des vorzuführenden Beweises:

$$\begin{aligned} \text{Mit } C(t) = 1-t \quad \text{und} \quad D(t) = \int_0^t \frac{dW(s)}{1-s} &\Rightarrow Y(t) = aC(t) + b(1-C(t)) + C(t)D(t) \Rightarrow \\ dY(t) &= [(a-b) + D(t)]dC(t) + C(t)dD(t) + dC(t)dD(t) \\ &= -[(a-b) + D(t)]dt + (1-t) \frac{dW(t)}{1-t} - \underbrace{\frac{1}{1-t} dW(t)dt}_0 \\ &= -adt + bdt - \frac{Y(t)}{1-t} dt + adt + \frac{bt}{1-t} dt + dW(t) \Rightarrow \\ dY(t) &= \frac{b-Y(t)}{1-t} dt + dW(t) \end{aligned}$$

Für den zweiten Teil ist es ausreichend, folgendes zu demonstrieren:

$$\lim_{t \rightarrow 1} (1-t) \int_0^t \frac{dW(s)}{1-s} = 0 \quad \text{a.s.}, \quad 0 \leq t < 1$$

Zwecks Anwendung des starken Gesetzes der großen Zahlen kann man sich mit Hilfe des Theorems über die Zeittransformation von Martingalen²⁴¹ des *Ito* Integrals entledigen:

$$\text{Mit } W^{\text{transf.}} - \text{ein dimensionale Brownsche Bewegung und } 0 \leq t < 1 \Rightarrow$$

²⁴⁰ B. Oksendal, "Stochastic Differential Equations", An Introduction with Applications (2000), 5th Ed. Zur Definition des Prozesses vgl. insb. Aufg. 5.11 auf S. 75, deren Lösung als Grundlage der nachfolgenden Ausführungen dient.

²⁴¹ Zum Time-Change for Martingales-Theorem vgl. I. Karatzas, S. Shreve, "Brownian Motion and Stochastic Calculus" (1991), 2nd Ed., S.174.

$$(1-t) \int_0^t \frac{dW(s)}{1-s} = (1-t) W_{\frac{1}{1-t}}^{\text{transf.}} = \frac{W_{\frac{1}{1-t}}^{\text{transf.}}}{\frac{1}{1-t} - 1 + 1}$$

$$\text{Aus } \lim_{\frac{1}{1-t} \rightarrow \infty} \frac{W_{\frac{1}{1-t}}^{\text{transf.}}}{\frac{1}{1-t} - 1 + 1} = 0 \text{ a.s.} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 1} (1-t) \int_0^t \frac{dW(s)}{1-s} = 0 \text{ a.s.}$$

Die letzte Eigenschaft der fast sicheren Konvergenz, worauf sich der Beweis der zweiten Forderung in (A5.2) maßgeblich stützt, lässt sich unmittelbar zeigen:

$$\text{Mit } E(W_t) = \mu = 0, \quad E(W_t)^2 = t, \quad \xi > 0 \text{ und } n \geq 1 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \text{Pr ob.} \left\{ \sup_{2^n \leq t \leq 2^{n+1}} \frac{|W_t|}{t} - \mu > \xi \right\} &\leq \frac{1}{\xi^2} E \left(\sup_{2^n \leq t \leq 2^{n+1}} \left(\frac{W_t}{t} \right)^2 \right) \leq \frac{1}{\xi^2 2^{2n}} E \left(\sup_{2^n \leq t \leq 2^{n+1}} W_t^2 \right) \leq \\ &\frac{4}{\xi^2 2^{2n}} E \left(W_{t=2^{n+1}}^2 \right) = \frac{8}{\xi^2 2^n} \end{aligned}$$

Die erste Ungleichung folgt direkt aus der *Chebychev's Inequality*²⁴², wohingegen die letzte auf *Doob's Maximum Inequality*²⁴³ für Submartingale beruht. Die Anwendung des Limes-Operators in Verbindung mit dem *Borel-Cantelli* Lemma ergibt:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \text{Pr ob.} \left\{ \sup_{2^n \leq t \leq 2^{n+1}} \frac{|W_t|}{t} - \mu > \xi \right\} &\leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{8}{\xi^2 2^n} = 0 \Rightarrow \\ \text{Pr ob.} \left\{ \frac{|W_t|}{t} - \mu > \xi, \text{ unendlich oft} \right\} &= 0 \Rightarrow \text{Pr ob.} \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{W_t}{t} = 0 \right\} = 1 \end{aligned}$$

Dieser letzte Schritt schließt den Beweis von (A5.2) ab und vervollständigt die Charakterisierung der *Brownschen* Brücke.

²⁴² Zur Chebychev's Inequality vgl. [B. Oksendal](#), "Stochastic Differential Equations", An Introduction with Applications (2000), 5th Ed., Aufg. 2.4 auf S. 16.

²⁴³ Zur Doob's Maximal Inequality vgl. [I. Karatzas, S. Shreve](#), "Brownian Motion and Stochastic Calculus" (1991), 2nd Ed., Theorem 3.8 auf S. 14. Es sei angemerkt, dass die Anwendung dieser Ungleichung legitim ist, da die *Brownsche* Bewegung – ein quadratisch integrierbares Martingal – automatisch die Eigenschaft des Submartingals besitzt.

Anlage 6: Die Fourieranalyse der zeitabhängigen Komponente der instantanen Volatilitätsfunktion

Für die Fourierreihenentwicklung der gemäß der *Mean Reversion Rate* exponentiell verfallenden *Short Rate*-Volatilitätsfunktion der Zeit mit Periode $2L$ lässt sich schreiben:

$$\sigma_r(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right), \quad t \in [0, 2L] \quad (\text{A6.1})$$

Die Koeffizienten a_0 , a_n , b_n gilt es auf der Basis der Orthogonalität der Sinus- und Cosinusfunktionen auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ zu determinieren. Exemplarisch wird die Bestimmung des Parameters der Sinusreihe vorgeführt. Von der rechten Seite in (A6.1) ausgehend, ermittelt man für das Integral über das Produkt der exponentiellen Funktion und der entsprechenden Sinusfunktion:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2L} dt \sigma_r(t) \sin\left(\frac{m\pi t}{L}\right) = \\ & \frac{a_0}{2} \underbrace{\int_0^{2L} dt \sin\left(\frac{m\pi t}{L}\right)}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\int_0^{2L} dt \sin\left(\frac{m\pi t}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right)}_{0 \text{ für } m \neq n} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \underbrace{\int_0^{2L} dt \sin\left(\frac{m\pi t}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)}_0 \\ & = a_m \int_0^{2L} dt \sin^2\left(\frac{m\pi t}{L}\right) = \frac{a_m}{2} \int_0^{2L} dt \cdot 2 \sin^2\left(\frac{m\pi t}{L}\right) = \frac{a_m}{2} \int_0^{2L} dt \left[1 - \cos\left(\frac{2m\pi t}{L}\right)\right] \\ & = a_m \cdot L - \frac{a_m}{2} \cdot \frac{L}{2m\pi} \left[\underbrace{\sin\left(\frac{2m\pi \cdot 2L}{L}\right)}_0 - \underbrace{\sin\left(\frac{2m\pi \cdot 0}{L}\right)}_0 \right] = a_m \cdot L \end{aligned} \quad (\text{A6.2})$$

Direkt auf die exponentielle Funktion abgestellt, erhält man mittels partieller Integration:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2L} dt e^{-bt} \sin\left(\frac{m\pi t}{L}\right) = -\frac{L}{m\pi} e^{-bt} \cos\left(\frac{m\pi t}{L}\right) \Big|_0^{2L} - b \frac{L}{m\pi} \int_0^{2L} dt e^{-bt} \cos\left(\frac{m\pi t}{L}\right) \\ & = \frac{L}{m\pi} (1 - e^{-2bL} \cos(2m\pi)) - b \frac{L}{m\pi} \left[\underbrace{\frac{L}{m\pi} e^{-bt} \sin\left(\frac{m\pi t}{L}\right) \Big|_0^{2L}}_0 + b \frac{L}{m\pi} \int_0^{2L} dt e^{-bt} \sin\left(\frac{m\pi t}{L}\right) \right] \\ & = \frac{L}{m\pi} (1 - e^{-2bL} \cos(2m\pi)) - b^2 \frac{L^2}{(m\pi)^2} \int_0^{2L} dt e^{-bt} \sin\left(\frac{m\pi t}{L}\right) \Rightarrow \\ & \int_0^{2L} dt e^{-bt} \sin\left(\frac{m\pi t}{L}\right) = \frac{L}{m\pi} (1 - e^{-2bL} \cos(2m\pi)) \Big/ \left(1 + b^2 \frac{L^2}{(m\pi)^2}\right) \end{aligned} \quad (\text{A6.3})$$

Aus der Äquivalenz von (A6.2) und kann für a_m gefolgert werden:

$$a_m = \frac{m\pi(1 - e^{-2bL})}{(m\pi)^2 + (bL)^2} \quad \text{mit } \cos(2m\pi) = 1 \quad (\text{A6.4})$$

Unter Anwendung der gleichen Technik berechnet man mit der Gleichheit von

$$(1) \int_0^{2L} dt \cdot e^{-bt} \cos\left(\frac{m\pi t}{L}\right) = b \frac{L^2}{(m\pi)^2} (1 - e^{-2bL} \cos(2m\pi)) \Big/ \left(1 + b^2 \frac{L^2}{(m\pi)^2}\right) \quad (\text{A6.5})$$

$$(2) \int_0^{2L} dt \sigma_r(t) \cos\left(\frac{m\pi t}{L}\right) = b_m \cdot L$$

für den Parameter der Cosinusreihe:

$$b_m = \frac{bL(1 - e^{-2bL})}{(m\pi)^2 + (bL)^2} \quad \text{mit } \cos(2m\pi) = 1 \quad (\text{A6.6})$$

Demnach lässt sich die *Short Rate*-Volatilitätsfunktion folgendermaßen darstellen:

$$\text{Mit } a_0 = \frac{1}{L} \int_0^{2L} dt \cdot e^{-bt} = \frac{1}{bL} (1 - e^{-2bL}) \quad \text{und } k \rightarrow \infty$$

$$\sigma_r(t) = \frac{1}{2bL} (1 - e^{-2bL}) + \sum_{m=1}^k \frac{m\pi(1 - e^{-2bL})}{(m\pi)^2 + (bL)^2} \sin\left(\frac{m\pi t}{L}\right) + \sum_{m=1}^k \frac{bL(1 - e^{-2bL})}{(m\pi)^2 + (bL)^2} \cos\left(\frac{m\pi t}{L}\right) \quad (\text{A6.7})$$

$$\sigma_r(t) = (1 - e^{-2bL}) \left(\frac{1}{2bL} + \sum_{m=1}^k \frac{1}{(m\pi)^2 + (bL)^2} \left[m\pi \sin\left(\frac{m\pi t}{L}\right) + bL \cos\left(\frac{m\pi t}{L}\right) \right] \right)$$

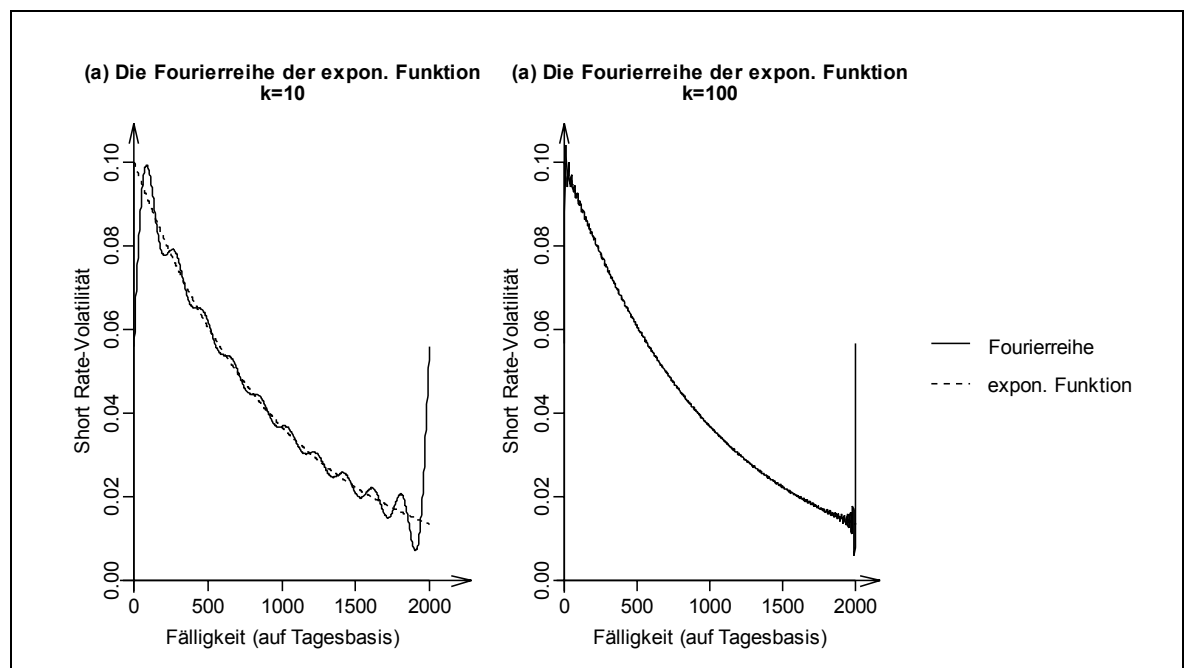


Abb. A-1 Die Approximation der Short Rate-Volatilität als Fourierreihe mit einer begrenzten Anzahl von Frequenzen.

Literaturverzeichnis

- Abramowitz, M.; Stegun, I. A.: "Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables" (1972)
- Andreasen, J., "Back to the Future", RISK September (2005), S. 104-109
- Andreasen, J., Andersen, L., "Volatility Skews and Extensions of the Libor Market Model", Applied Mathematical Finance 7 1 (2000), S. 1-32
- Andersen, L., Brotherton-Ratcliffe, R., "Esxtended Libor Market Models with Stochastic Volatility", The Journal of Computational Finance 9 1 (2005)
- Andres, P., "Von der Black/Scholes-Optionspreisformel zum GARCH-Optionsbewertungsmodell: Entwicklung und exemplarische Durchführung eines Ansatzes zur Überprüfung der Validität von Optionspreismodellen", Dissertation Göttingen (1997)
- Arfken, G., "Mathematical Methods for Physicists" (1985), 3rd Ed.
- Ball, C. A., Torous, W. N., "Bond Price Dynamics and Options", Journal of Financial and Quantitative Analysis 18 (1983), S. 517-531
- Bauer, H., "Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie" (1974), 2. Aufl.
- Benner, W., Zyapkov, L., Jortzik, S., "A Multifactoral Cross-Currency LIBOR Market Model", SSRN Working Paper January (2007), S. 1-25
- Benner, W., Zyapkov, L., "A Multifactoral Cross-Currency LIBOR Market Model with a FX Volatility Skew", SSRN Working Paper May (2007), S. 1-21
- Benninga, S., Wiener, Z., "Term Structure of Interest Rates", Mathematica in Education and Research, 7 2 (1998)
- Bertsekas, D., Tsitsiklis, T., "Introduction to Probability" (2002), 2nd Printing
- Bhar, R., Chiarella, C., "Transformation of Heath-Jarrow-Morton Models to Markovian Systems", The European Journal of Finance 3 (1997), S. 1-26
- Bhar, R., Chiarella, C., "Approximating Heath-Jarrow-Morton Non-Markovian Term Structure of Interest Rate Models with Markovian Systems", Working Paper 76 (2000), School of Finance and Economics, UTS, S. 1-22
- Bielecki, T., Rutkowski, M., "Credit Risk: Modeling, Valuation and Hedging", Springer Finance (2004), Corrected 2nd Printing
- Bingham, N., H., Kiesel, R., "Risk-Neutral Valuation", Springer Finance (2004), 2nd Ed.
- Black, B., Scholes, M., "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", Journal of Political Economy 81 (1973), S.637-654

- Black, F., “The Pricing of Commodity Contracts”, *Journal of Financial Economics* 3 (March 1976), S. 167-79
- Borwein, J., Bailey, D., Girgensohn, R., “Experimentation in Mathematics: Computational Paths to Discovery” (2004)
- Brace, A., Gatarek, D., Musiela, M., “The Market Model of Interest Rate Dynamics”, *Mathematical Finance* 7 (1997), S. 127-147
- Branger, N., Schlag, C., “Zinsderivate: Modelle und Bewertung”, Springer-Verlag (2004)
- Brennan, M. J., Schwartz, E. S., “The Valuation of American Put Options”, *Journal of Finance* 32 (1977), S. 449-62
- Brennan, M. J., Schwartz, E. S., “A Continuous Time Approach to the Pricing of Bonds”, *Journal of Banking and Finance* 3 (1979), S. 133-155
- Brennan, M. J., Schwartz, E. S., “Analyzing Convertible Bonds”, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 15 (1980), S. 907-929
- Brigo, D., Mercurio, F., “A Mixed-Up Smile”, *RISK* September (2000), S. 123-126
- Brigo, D., Mercurio, F., “Lognormal-Mixture Dynamics and Calibration to Market Volatility Smiles”, *International Journal of Theoretical and Applied Finance* 5 4 (2002), S. 427-446
- Brigo, D., Mercurio, F., “Analytical Pricing of the Smile in a Forward Libor Market Model”, *Quantitative Finance* 3 1 (2003), S. 15-27
- Brigo, D., Mercurio, F., Rapisarda, F., “Smile at the Uncertainty”, *RISK* May (2005), S. 97-101
- Brigo, D., “Candidate Market Models and the Calibrated CIR++ Stochastic Intensity Model for CDS Options and Callable Floaters”, In *Proceedings of the 4th ICS Conference, Tokyo* (2004)
- Brigo, D., “Market Models for CDS Options and Callable Floaters”, *RISK* January (2005), S. 89-94
- Brigo, D., “CMCDS Valuation with Market Models”, *RISK* June (2006), S. 78-83
- von Campenhausen, C., “Optionsbewertung bei stochastischer Volatilität: Theorie und Empirie”, *Dissertation St. Gallen* (1996)
- Carverhill, A. P., “When is the Short Rate Markovian?”, *Mathematical Finance* 4 (1994), S. 305-312
- Chan, K. C., Karolyi, G. A., Longstaff, F. A., Sanders, A. B., “An Empirical Comparison of Alternative Models of the Short-Term Interest Rate”, *Journal of Finance* 68 (1992), S. 1209-1227

- Cheyette, O., “Term Structure Dynamics and Mortgage Valuation”, *Journal of Fixed Income* 1 (1992), S. 28-41
- Cheyette, O., “Markov Representation of the Heath-Jarrow-Morton Model”, Working Paper (1996), UCLA Workshop on the Future of Fixed Income Financial Theory
- Chiarella, C., Kwon, O. K., “Formulation of Popular Interest Rate Models under the HJM Framework”, Research Paper 13 (1999), Quantitative Finance Research Group, School of Finance and Economics, UTS
- Chiarella, C., Kwon, O. K., “Forward Rate Dependent Markovian Transformations of the Heath-Jarrow-Morton Term Structure Model”, *Finance and Stochastics* (2001), Volume 5, Issue 2, S. 237-257
- Cox, J. C., Ross, S. A., “The Pricing of Options for Jump Processes”, Working Paper University of Pennsylvania (1975)
- Cox, J. C., Ross, S. A., “The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes”, *Journal of Financial Economics* 3 (1976), S. 145-166
- Cox, J. C., Ingersoll, J. E., Ross, S. A., “A Theory of the Term Structure of Interest Rates”, *Econometrica* 53 (1985), S. 385-407
- Daniluk, A., Gatarek, D., “A Fully Lognormal Libor Market Model”, *RISK* September (2005), S. 115-118
- Derman, E., Kani, I., “Stochastic Implied Trees: Arbitrage Pricing with Stochastic Term and Strike Structure of Volatility”, *International Journal of Theoretical and Applied Finance* 1 1 (1998), S. 61-110
- Derrick, S., Stapleton, D. J., Stapleton, R. C., “The Libor Market Model: A Recombining Binomial Tree Methodology”, Working Paper (2005), S. 1-22
- Dupire, B., “Arbitrage Pricing with Stochastic Volatility”, SORT Working Paper Banque Paribas (1993), S. 1-18
- Dupire, B., “Pricing with a Smile”, *RISK* January (1997), S. 18-20
- Eisenberg, L., Jarrow, R., “Option Pricing with Random Volatilities in Complete Markets”, Federal Reserve Bank of Atlanta Working Paper (1991), S. 91-116
- Feller, W., “Two Singular Diffusion Problems”, *The Annals of Mathematics* 54 1 (1951), S. 173-182
- Fichtenholz, G. M., “Differential- und Integralrechnung” Band 63 (1970), dritte Auflage, S. 408-634
- Geske, R., “The Valuation of Compound Options”, *Journal of Financial Economics* 7 (1979), S. 63-81
- Glasserman, P., Kou, S. G., “The Term Structure of Simple Forward Rates with Jump Risk”, *Mathematical Finance* 13 3 (2003), S. 383-410

- Gradshteyn, I. S., Ryzhik, I. M., “Tables of Integrals, Series and Products” (2000), 6th Ed.
- Greenstadt, J., “Variations on Variable-Metric Methods”, Mathematics of Computation 24 109 (1970), S. 1-22
- Hagan, P., Kumar, D., Lesniewski, A., Woodward, D., “Managing Smile Risk”, Wilmott Magazine July (2002), S. 84-108
- Harrison, J. M., Pliska, S. R., “Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading”, Stochastic Processes and Their Applications 11 (1981), S. 215-260
- Harrison, J. M., Pliska, S. R., “A Stochastic Calculus Model of Continuous Trading: Complete Markets”, Stochastic Processes and Their Applications 15 (1983), S. 313-316
- Heath, D., Jarrow, R., Morton, A., “Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A Discrete Time Approximation”, Journal of Financial and Quantitative Analysis 25 (1990), S. 419-440
- Heath, D., Jarrow, R., Morton, A., “Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation”, Econometrica 60 (1992), S. 77-105
- Heston, S., “A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options”, Review of Financial Studies 6 2 (1993), S.327-343
- Ho, T. S. Y., Lee, S.B., “Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims”, Journal of Finance 41 (1986), S. 1011-1129
- Ho, T.S., Stapleton, R. C., Subrahmanyam, M. G., “Multivariate Binomial Approximations for Asset Process with Non-Stationary Variance and Covariance Characteristics”, Review of Financial Studies 8 (1995), S. 1125-1152
- Hull, J., White, A., “Forward Rate Volatilities, Swap Rate Volatilities and the Implementation of the Libor Market Model”, Journal of Fixed Income 10 2 (2000), S. 46-62
- Hull, J., “Options, Futures, & Other Derivatives” (2000), 4th Ed.
- Hull, J., White, A., “Pricing Interest Rate Derivative Securities”, Review of Financial Studies 3, 4 (1990), S. 573-592
- Hull, J., White, A., “Valuing Derivative Securities Using the Explicit Finite Difference Method”, Journal of Financial and Quantitative Analysis 25 (1990), S. 87-100
- Hull, J., White, A., “The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities”, Journal of Finance 42 2 (1987), S. 281-300
- Hunt, P., Kennedy, J., Pelsser, A., “Markov-functional Interest Rate Models”, Finance and Stochastics 4 (2000), S. 391-408
- Hunter, C. J., Jäckel, P., Joshi, M. S., “Getting the Drift”, RISK July (2001), S. 81-84

- Hunter, C. J., Jäckel, P., Joshi, M. S., “Drift Approximations in a Forward-Rate-Based Libor Market Model”, Royal Bank of Scotland Working Paper (2001), S. 1-10
- Jäckel, P., Rebonato, R., “Linking Caplet and Swaption Volatilities in a BGM/J Framework: Approximate Solutions”, QUARC Working Paper (2001), Royal Bank of Scotland
- Jamshidian, F., “An Exact Bond Option Pricing Formula”, Journal of Finance 44 (1989), S. 205-209
- Jamshidian, F., “Libor and Swap Market Models and Measures”, Finance and Stochastics 1 4 (1997), S. 293-330
- Jarrow, R., Rudd, A., “Approximate Option Valuation for Arbitrary Stochastic Processes”, Journal of Financial Economics 10 (1982), S. 347-369
- Jeffrey, A., “Single Factor Heath-Jarrow-Morton Term Structure Models Based on Markov Spot Interest Rate Dynamics”, Journal of Financial and Quantitative Analysis 30 (1995), S. 619-642
- Johnson, H., “Option Pricing when the Variance is Changing”, Working Paper University of California LA (1979), S. 11-79
- Johnson, H., Shanno, D., “Option Pricing when the Variance is Changing”, Working Paper University of California Davis (1985), S. 85-107
- Joshi, M., Rebonato, R., “A Displaced Diffusion Stochastic-Volatility Libor Market Model: Motivation, Definition and Implementation”, Quantitative Finance 3 6 (2003), S. 458-469
- Karatzas, I., Shreve, S., “Brownian Motion and Stochastic Calculus” (1991), 2nd Ed.
- Kenney, J. F., Keeping, E. S., “Mathematics of Statistics” (1951), 2nd Ed.
- Kloeden, P. E., Platen, E., “Numerical Solution of Stochastic Differential Equations”, Springer Applications of Mathematics Vol. 23 (1992)
- Kloeden, P.E., Platen, E., Schurz, H., “Numerical Solution of SDE through Computer Experiments” (1997), Corrected Second Printing
- König, W., “Stochastik I” (Skriptum 2003)
- Kurbanmuradov, O., Sabelfeld, K., Schoenmakers, J., “Lognormal Approximations to Libor Market Models”, The Journal of Computational Finance 6 1 (2002), S.69-100
- Lambert, J. D., “Numerical Methods for Ordinary Differential Systems” (2000), Wiley Third Reprinting
- Lerner, L., “Physics for Scientists and Engineers” (1996), Vol. 1 Extended Version
- Lewis, A., “Option Valuation under Stochastic Volatility: With Mathematica Code”, Financial Press (2005)

- Lindelöf, M. E., “Sur l'application de la méthode des approximations successives aux équations différentielles ordinaires du premier ordre”; Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences Vol. 114 (1894), pp. 454-457
- Longstaff, F. A., Santa-Clara, P., Schwartz, E. S., “The Relative Valuation of Caps and Swaptions: Theory and Empirical Evidence“, The Journal of Finance 56 6 (2001), S. 2067-2109
- Marsh, T. A., Rosenfeld, E. R., “Stochastic Processes for Interest Rates and Equilibrium Bond Prices”, The Journal of Finance 38 (1983), S. 635-645
- Melino, A., Turnbull, S., “The Pricing of Foreign Currency Options with Stochastic Volatility”, Journal of Econometrics 45 (1990), S. 239-265
- Melino, A., Turnbull, S., “The Pricing of Foreign Currency Options”, Canadian Journal of Economics 24 (1991), S. 251-281
- Merton, R., “An Intertemporal Capital Asset Pricing Model”, Econometrica 41 (1973), S. 867-886
- Merton, R., “An Analytic Derivation of the Efficient Portfolio Frontier”, Journal of Financial and Quantitative Analysis 7 (1972), S. 1851-1872
- Merton, R., “Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model”, Journal of Economic Theory 3 (1971), S. 373-413
- Merton, R., “Theory of Rational Option Pricing”, Bell Journal of Economics and Management Science 4 (1973), S. 141-183
- Merton, R., “Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous”, Journal of Financial Economics 3 (1976), S. 125-144
- Miltersen, K., Sandmann, K., Sondermann, D., “Closed Form Solutions for Term Structure Derivatives with Log-Normal Interest Rates”, Journal of Finance 52 (1997), S. 409-430
- Morton, A., “A Class of Stochastic Differential Equations Arising in Models for the Evolution of Bond Prices”, Technical Report (1988), Cornell University
- Musiela, M., Rutkowski, M., “Martingale Methods in Financial Modelling”, Applications of Mathematics 36 (1997)
- Musiela, M., Rutkowski, M., “Continuous-Time Term Structure Models: Forward-Measure Approach”, Finance and Stochastics 1 4 (1997), S. 261-292
- Neftci, S., “Mathematics of Financial Derivatives” (2000), 2nd Ed.
- Oksendal, B., “Stochastic Differential Equations”, An Introduction with Applications (2000), 5th Ed.
- Papoulis, A., “Probability, Random Variables, and Stochastic Processes” (1984), 2nd Ed.
- Perridon, L., Steiner, M., “Finanzwirtschaft der Unternehmung” (2003), 12. Aufl.

- Peterson, S. J., Stapleton, R. C., Subrahmanyam, M. G., “A Multi-Factor Spot Rate Model for the Pricing of Interest-Rate Derivatives”, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 38 (2003), S. 847-880
- Pietersz, R., Pelsser, A., van Regenmortel, M., “Fast Drift Approximated Pricing in the BGM Model”, *The Journal of Computational Finance* 8 1 (2004), S. 93-124
- Piterbarg, V., “A Stochastic Volatility Forward Libor Model with a Term Structure of Volatility Smiles”, SSRN Working Paper (2003), S. 1-46
- Piterbarg, V., “Stochastic Volatility Model with Time-Dependent Skew”, *Applied Mathematical Finance* 14 2 (2005), S. 147-185
- Piterbarg, V., “Time to Smile”, *RISK* May (2005), S. 71-75
- Piterbarg, V., “Smiling Hybrids”, *RISK* May (2006), S. 66-71
- Press, W. H., Flannery, B. P., Teukolsky, S. A., “Numerical Recipes in FORTRAN: The Art of Scientific Computing” (1992), 2nd Ed.
- Press, W., Teukolsky, S., Vetterling, W., Flannery, B., “Numerical Recipes in C. The Art of Scientific Computing”, Cambridge University Press (1996), 2nd Ed.
- Rebonato, R., “The Stochastic Volatility Libor Market Model”, *RISK* October (2001), S. 105-109
- Rebonato, R., “Modern Pricing of Interest-Rate Derivatives: The Libor Market Model and Beyond”, Princeton University Press (2002)
- Rendleman, R., Bartter, B., “The Pricing of Options on Debt Securities”, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 15 (1980), S. 11-24
- Ritchken, P., Sankarasubramanian, L., “On Markovian Representations of the Term Structure”, Working Paper of the Federal Reserve Bank of Cleveland (1992)
- Ritchken, P., Sankarasubramanian, L., “The Importance of Forward Rate Volatility Structures in Pricing Interest Rate-Sensitive Claims”, *The Journal of Derivatives* (1995), S. 25-41
- Ritchken, P., Sankarasubramanian, L., “Volatility Structures of Forward Rates and the Dynamics of the Term Structure”, *Mathematical Finance* 5 (1995), S. 55-72
- Rubinstein, M., “Displaced Diffusion Option Pricing”, *The Journal of Finance* 38 (1983), S. 213-217
- Rubinstein, M., “Nonparametric Tests of Alternative Option Pricing Models Using All Reported Trades and Quotes on the 30 Most Active CBOE Option Classes from August 23, 1976 through August 31, 1978”, *The Journal of Finance* 40 (1985), S. 455-480
- Sandmann, K., Sondermann, D., “On the Stability of Log-Normal Interest Rate Models”, Discussion Paper No. B-263 (1994), University of Bonn

Schloegl, E., “A Multicurrency Extension of the Lognormal Interest Rate Market Models”, Finance and Stochastics 6 (2002), S. 173-196

Schoenmakers, J., Coffey, B., “Systematic Generation of Correlation Structures for the LIBOR Market Model”, International Journal of Theoretical and Applied Finance 6 4 (2003), S. 1-13.

Schönbucher, P. J., “A Libor Market Model with Default Risk”, Working Paper (2000), University of Bonn

Schönbucher, P. J., “A Measure of Survival”, RISK August (2004), S. 79-85

Schroder, M., “Computing the Constant Elasticity of Variance Option Pricing Formula”, The Journal of Finance 44 (1989), S. 211-219

Scott, L., “Option Pricing when the Variance Changes Randomly: Theory and an Application”, Journal of Financial and Quantitative Analysis 22 (1987), S. 419-438

Serway, R., “Physics for Scientists and Engineers” (1999), 5th Ed.

Shreve, S., “Stochastic Calculus for Finance I”, The Binomial Asset Pricing Model (2004)

Shreve, S., “Stochastic Calculus for Finance II”, Continuous-Time Models (2004)

Stein, E. M., Stein, J. C., “Stock Price Distributions with Stochastic Volatility: An Analytic Approach”, Review of Financial Studies 4 (1991), S. 727-752

Uhlenbeck, G. E., Ornstein, L. S., “On the Theory of Brownian Motion”, Physical Review, 36 (1930), erneut erschienen in N. Wax, “Selected Papers on Noise and Stochastic Processes” (1954), S. 93-111

Vasicek, O., “An Equilibrium Characterization of the Term Structure”, Journal of Financial Economics 5 (1977), S.177-188

Wiggins, J., “Option Values under Stochastic Volatilities”, Journal of Financial Economics 19 (1987), S. 351-372

IFBG · Platz der Goettinger Sieben 3 · 37073 Goettingen · Germany

Tel.: +49 (0) 551 39 7666

Fax: +49 (0) 551 39 7665

lzyapkov@yahoo.com

EDUCATION AND DISSERTATION

Jun. 2004 – Present

Scientific Research at the Faculty of Economic Sciences, Department of Corporate Finance and Banking Management, University of Goettingen, Germany

Primary Areas of Interest and Ongoing Studies:

• Fixed Income:

Models of the Term Structure of Interest Rates with a strong emphasis on the Stochastic Volatility Approach to the Libor Market Model
Pricing and Hedging of Exotic Interest Rate Derivatives

• Financial Risk Management:

Managing Interest Rate and Credit Risk
Managing Exotic Options Risk

• Structured Financial Products:

Exotic Options Embedded in Structured Equity Derivatives
Financial Engineering of Interest Rate and Credit Products

• Hybrid Financial Structures:

Interest Rate-Credit Hybrid Derivatives: Modelling and Valuation

Ph.D. Thesis:

The Libor Market Model – Implementation and Calibration. Pricing and Hedging of Interest Rate Products and Exotic Libor Derivatives

Working Papers and Current Research Projects:

A Multifactorial Cross-Currency Libor Market Model (Co-Authors: Prof. Dr. W. Benner, Dr. S. Jortzik)

SSRN Working Paper Series available at:

http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=975194

Submitted to Finance and Stochastics

Pricing a Cross-Currency Swap Contingent Credit Default Swap (CCS-CCDS) and Applications to Hedging against Counterparty Risk Exposures (Joint work in progress with Dr. S. Jortzik)

A Multifactorial Cross-Currency Libor Market Model with a FX Volatility Skew (Co-Author: Prof. Dr. W. Benner)

SSRN Working Paper Series available at:

http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=983574

Submitted to the Review of Financial Studies

Conference Presentations:

A Multifactorial Cross-Currency Libor Market Model

14th Annual Global Finance Conference

held from April 1-4, 2007 in Melbourne, Australia

A Multifactoral Cross-Currency Libor Market Model with a FX Volatility Skew
accepted for presentation at the Quantitative Methods in Finance Conference
to be held from December 12-15, 2007 in Sydney, Australia

- Apr. 1998 – Mar. 2003 Course of Study at the Faculty of Economic Sciences, University of
Goettingen, Germany
Degree: Diplom-Kaufmann (Masters of Science, Grade: 2.18)
• Majors: Corporate Finance (Grade: 1.72), Banking Management (Grade: 2.15),
Marketing (Grade: 2.28)
• **Masters Thesis (Grade: 1.7):**
Barrier Options Embedded in Structured Financial Products – Hedging
Alternatives and Applicability to Knock-In Equity-Linked Bonds and Barrier
Discount Certificates
- Sept. 1996 – Sept. 1997 Two-Semester Course of Study at the Faculty of Management, Department of
International Economic Relations, University of Economics Varna, Bulgaria
• Majors: International Business and Entrepreneurship, Finance and Credit

ACADEMIC APPOINTMENT AND INTERNSHIP

- Sept. 2004 – Department of Corporate Finance and Banking Management, University of
Goettingen
Research Assistant and Course Instructor:
• Prepared Lecture Notes, Presentation Material and Overheads accompanying
Courses
• Administered Midterm Exams and Graded Final Exams
• Supervised Masters Theses
• Held Lecture Courses in Corporate Finance, Financial Risk Management and
Capital Market Theory
- Self-directed Lectures:**
Theory of Financial Markets, Valuation Theory and Financial Investment
(Lectures and Tutorials in the Masters Program of “Finance, Accounting and
Taxes”)
- Feb. 2001 – Apr. 2001 Internship with The Gothaer Insurance Company, Department of Mathematics,
Life Insurance Division
Financial Analyst:
• Data Capture and Processing
• Performed Time Series Analysis Applying Extrapolation Techniques
• Collaborated with Researchers in the Engineering and Structuring of Life
Insurance Products

LINGUISTIC PROFICIENCY AND TECHNICAL SKILLS

- | | |
|--------------------------------|--|
| Languages | German (native) Bulgarian (native) English (fluent, spoken and written) Russian (reading and listening comprehension) French (elementary) |
| Computer/Programming Skills | Operating Systems: Windows 98/ME/2000/NT/XP, Linux Programming Languages: Assembler, C, C++, Visual Basic, S Internet-Technology: HTML, JavaScript Application Software: Word, Excel, PowerPoint, R |

