

Stabilisierte Lagrange Finite-Elemente im Elektromagnetismus und
in der inkompressiblen Magnetohydrodynamik

Dissertation
zur Erlangung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Doktorgrades
„Doctor rerum naturalium“
der Georg-August-Universität Göttingen

im Promotionsprogramm Mathematik
der Georg-August University School of Science (GAUSS)

vorgelegt von
Benjamin Wacker
aus Verden/Aller

Göttingen, 2015

Betreuungsausschuss

- Prof. Dr. Gert Lube,
Institut für Numerische und Angewandte Mathematik,
Georg-August-Universität Göttingen
- Prof. Dr. Gerlind Plonka-Hoch,
Institut für Numerische und Angewandte Mathematik,
Georg-August-Universität Göttingen

Prüfungskommission

- Referent:
Prof. Dr. Gert Lube,
Institut für Numerische und Angewandte Mathematik,
Georg-August-Universität Göttingen
- Korreferent:
Prof. Dr. Thorsten Hohage,
Institut für Numerische und Angewandte Mathematik,
Georg-August-Universität Göttingen

Weitere Mitglieder der Prüfungskommission:

- PD Dr. Ulf-Rainer Fiebig,
Institut für Mathematische Stochastik,
Georg-August-Universität Göttingen
- Prof. Dr. Gerlind Plonka-Hoch,
Institut für Numerische und Angewandte Mathematik,
Georg-August-Universität Göttingen
- Prof. Dr. Anja Sturm,
Institut für Mathematische Stochastik,
Georg-August-Universität Göttingen
- Prof. Dr. Ingo Witt,
Mathematisches Institut,
Georg-August-Universität Göttingen

Tag der mündlichen Prüfung: 26. Oktober 2015

Danksagung

Zuallererst möchte ich meinem Betreuer Prof. Dr. Gert Lube für die vielen interessanten Diskussionen und seine investierte Zeit danken, welche zum Entstehen dieser Arbeit wesentlich beigetragen haben. Außerdem bedanke ich mich dafür, dass mir mit der Bearbeitung des Feldes der Magnetohydrodynamik eine konsistente Fortführung meiner Arbeiten über Elektromagnetismus und Fluidodynamik aus meiner Studienzeit ermöglicht werden konnte.

Ferner sei Prof. Dr. Gerlind Plonka-Hoch für die Annahme als Zweitbetreuerin und Prof. Dr. Thorsten Hohage für die bedingungslose Annahme des Korreferats sehr herzlich gedankt. Weiter bedanke ich mich bei allen Mitgliedern der Prüfungskommission, die sich bereiterklärt haben, sich an der Kommission zu beteiligen.

Desweiteren gilt mein Dank insbesondere M.Sc. Daniel Arndt und M.Sc. Utku Kaya, die mit vielen Anregungen und Diskussionen bezüglich der numerischen Implementation der Modelle unterstützend zur Fertigstellung dieser Dissertationsschrift beigetragen haben. Weiterhin gebührt mein Dank M.Sc. Frederic Weidling, welcher sich einverstanden erklärt hat, die ersten vier Kapitel dieser Dissertationsschrift zur Korrektur zu lesen, wohingegen ich nochmals M.Sc. Daniel Arndt für das Gegenlesen der letzten vier Kapitel dieser Arbeit danke. Außerdem sei der Arbeitsgruppe „Numerik singular gestörter partieller Differentialgleichungen“ und dem Institut für Numerische und Angewandte Mathematik der Georg-August-Universität für ein angenehmes Arbeitsklima gedankt.

Ohne die finanzielle Unterstützung des Graduiertenkollegs 1023 „Identifikation in mathematischen Modellen: Synergie stochastischer und numerischer Methoden“ wäre die Bearbeitung der Fragestellung meiner Dissertationsschrift nicht möglich gewesen. Der Deutschen Forschungsgemeinschaft sei für die Bereitstellung eines Forschungsstipendiums herzlich gedankt.

Als Letztes möchte ich mich insbesondere bei meiner Familie und meinen Freunden für die Unterstützung der letzten Jahre bedanken. Ohne diese Stütze in dieser Zeit wäre diese Schrift in dieser Form wahrscheinlich niemals entstanden.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Grundlagen	5
2.1	Gemischte Probleme	5
2.1.1	Erläuterung der Fragestellung	5
2.1.2	Ein erster Zugang zur Beantwortung der Fragestellung	7
2.1.3	Ein alternativer Zugang zur Problemstellung	8
2.2	Interpolation und Interpolationsoperatoren im Rahmen der Finite-Elemente-Methode	10
2.2.1	Finite Elemente	11
2.2.2	Scott-Zhang-Operator	14
3	Kontinuierliches magnetisches Induktionsproblem	17
3.1	Motivation	17
3.2	Problemformulierung und Wohlgestelltheit	19
3.3	Erweitertes magnetisches Induktionsproblem	21
4	Stabilisierte diskrete magnetische Induktionsprobleme	29
4.1	Stabilisiertes magnetisches Induktionsproblem	29
4.1.1	Finite-Elemente-Räume	29
4.1.2	Problemformulierung	30
4.1.3	Wohlgestelltheit	30
4.1.4	Konvergenzanalyse für glatte Lösungen	35
4.1.5	Konvergenzanalyse für nichtglatte Lösungen	39
4.2	Stabilisiertes erweitertes magnetisches Induktionsproblem	41
4.2.1	Finite-Elemente-Räume und lokale Projektion	41
4.2.2	Problemformulierung	43
4.2.3	Wohlgestelltheit	44
4.2.4	Konvergenzanalyse für glatte Lösungen	51
5	Kontinuierliches Magneto hydrodynamikproblem	61
5.1	Navier-Stokes-Gleichungen	61

5.2	Motivation des Magnetohydrodynamikproblems	64
5.3	Stationäre Problemformulierung und Wohlgestellttheit	64
6	Stabilisiertes diskretes Magnetohydrodynamikproblem	69
6.1	Finite-Elemente-Räume und lokale Projektion	69
6.2	Problemformulierung	70
6.2.1	Equal-Order Problemformulierung	70
6.2.2	Inf-sup-stabile Problemformulierung	71
6.3	Stabilitätsanalyse	72
6.3.1	Stabilität im Fall der Equal-Order-Approximation	73
6.3.2	Stabilität im Fall der inf-sup-stabilen Approximation	82
6.4	Konvergenzanalyse für glatte Lösungen	88
6.4.1	Vorbereitungen ohne LPS-Kompatibilität	89
6.4.2	Equal-Order-Fall ohne LPS-Kompatibilität	92
6.4.3	Inf-sup-stabiler Fall ohne LPS-Kompatibilität	96
6.4.4	Vorbereitungen mit LPS-Kompatibilität	99
6.4.5	Equal-Order-Fall mit LPS-Kompatibilität	101
6.4.6	Inf-sup-stabiler Fall mit LPS-Kompatibilität	102
6.5	Konvergenzanalyse für nichtglatte Lösungen	103
7	Numerische Beispiele	107
7.1	Algorithmen für das zeitabhängige erweiterte Induktionsproblem und für das zeitabhängige Magnetohydrodynamikmodell	107
7.1.1	Algorithmus für das zeitabhängige erweiterte Induktionsproblem . .	107
7.1.2	Algorithmus für das zeitabhängige Magnetohydrodynamikmodell . .	108
7.2	Beispiel für das magnetische Induktionsproblem	109
7.3	Beispiele für das erweiterte magnetische Induktionsproblem	113
7.3.1	Analogie zur Konvektions-Diffusions-Gleichung	114
7.3.2	Das anschauliche Beispiel der Flussverdrängung	115
7.3.3	Das Beispiel nach Shercliff	117
7.4	Beispiele für das Magnetohydrodynamikmodell	120
7.4.1	Zweidimensionales analytisches Problem	120
7.4.2	Zweidimensionale Hartmannkanalströmung	122

8	Zusammenfassung und Ausblick	125
8.1	Zusammenfassung	125
8.2	Ausblick	126
A	Grundlagen der klassischen Vektoranalysis	129
A.1	Wichtige Definitionen	129
A.2	Gradient eines Skalarfeldes	130
A.3	Divergenz eines Vektorfeldes	131
A.4	Rotation eines Vektorfeldes	132
B	Funktionalanalytische Grundlagen und partielle Integration	137
B.1	Sobolevräume	137
B.2	Vektorfunktionen mit wohldefinierter Rotation oder Divergenz	139
B.3	Funktionsräume für die Differentiation in Banachräumen	144

1 Einleitung

Die Magnetohydrodynamik als wichtiges Teilgebiet der Physik behandelt das Verhalten elektrisch leitender Fluide, welche durch ein Magnetfeld beeinflusst werden. Aus mathematischer Sicht führt dies zu einer Kopplung zwischen den Navier-Stokes-Gleichungen der Hydrodynamik und den Maxwell-Gleichungen des Elektromagnetismus. Einige wichtige Anwendungen finden sich im naturwissenschaftlichen Bereich in der Geodynamik oder im ingenieurwissenschaftlichen Bereich zur Strömungsbeeinflussung zum Beispiel in Fusionsreaktoren. Die numerische Simulation solcher Prozesse kann als Ergänzung zu Experimenten angesehen werden oder diese, sofern jene nicht durchgeführt werden können, ersetzen, um Rückschlüsse über die Rückwirkung zwischen Magnetfeld und Fluid zu gewinnen. Der mathematischen Modellierung und numerischen Umsetzung kommt dabei eine tragende Rolle zu, um solche Rechnungen qualitativ und quantitativ möglichst exakt durchzuführen.

Aus den Beispielen [28, Beispiele 5.64 + 5.65] für Konvektionsprobleme und Grenzschichtprobleme ist bekannt, dass eine naive Implementation der zugrundeliegenden schwachen Formulierung der zugehörigen partiellen Differentialgleichung zu großen Oszillationen an den Gebietsgrenzen oder in den Grenzschichten führt. Anhand dieser Problematiken und deren Behebung durch zusätzliche Stabilisierungen erkennen wir, warum es notwendig sein kann, die Diskretisierung der partiellen Differentialgleichungen in Anwendungsfällen um passende Stabilisierungsterme zu ergänzen.

Das Ziel dieser Arbeit ist eine mathematische Untersuchung einer knotenbasierten stabilisierten Finite-Elemente-Methode, um die Kopplung zwischen den Navier-Stokes-Gleichungen und den Maxwell-Gleichungen zu realisieren. Schrittweise werden dafür die stationären Grundgleichungen des Elektromagnetismus in einer stabilisierten Variante analysiert, um die zeitabhängige magnetische Induktionsgleichung der Maxwell-Gleichungen um einen Kopplungsterm zwischen einem vorgeschriebenen Geschwindigkeitsfeld und dem unbekanntem Magnetfeld zu erweitern. Als Letztes wird schließlich das gesamte gekoppelte Magnetohydrodynamikmodell mit unbekanntem Magnetfeld und unbekanntem Geschwindigkeitsfeld im stationären Falle analysiert.

Der Standardansatz in der Magnetohydrodynamik ist wegen der Maxwell-Gleichungen die Verwendung rotationskonformer Finite-Element-Methoden, wozu sich eine Übersicht in [37] findet. Durch die Arbeiten [19] und [20] fand eine Rehabilitation knotenbasierter Finite-Elemente-Methoden statt, welche nach [33] erfolgreich für die Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen eingesetzt werden. Eine Lösung des gekoppelten Magnetohydrodynamikmodelles mittels knotenbasierter Finite-Elemente-Methoden scheint daher wegen des bedeutenden Einsatzes in der Fluidodynamik von großem Interesse. Insbesondere wurde deshalb in [7] eine residual-basierte Stabilisierung für den Einsatz knotenbasierter Finite-Elemente-Methoden in der Magnetohydrodynamik vorgeschlagen. Diese Methode wird in dieser Arbeit aufgegriffen und durch eine symmetrische Projektionsstabilisierung statt einer residualen Stabilisierung überarbeitet. Somit reduziert sich die Zahl der Stabilisierungsterme von 31 auf maximal 7, womit eine mögliche problematische Fehlerquelle in der

Implementierung verringert werden kann.

Die Arbeit gliedert sich dabei in die folgenden Abschnitte.

Kapitel 2 liefert die notwendigen Grundlagen über gemischte Probleme, um die stationären Probleme auf ihre Wohlgestelltheit zu analysieren. Ferner werden Grundbegriffe der Finite-Elemente-Methode erläutert und der für die spätere Analysis benötigte Scott-Zhang-Operator mit seinen Eigenschaften wird vorgestellt.

Das anschließende Kapitel 3 beschäftigt sich mit den kontinuierlichen magnetischen Induktionsproblemen der Maxwell-Gleichungen. Zunächst wird die Grundgleichung motiviert und anschließend die Wohlgestelltheit dieser Differentialgleichung nachgewiesen. Daran schließt sich eine Erweiterung um eine Kopplung mit einem vorgeschriebenen Geschwindigkeitsfeld an, sodass sich die sogenannte erweiterte Induktionsgleichung ergibt. Deren Wohlgestelltheit wird im zeitabhängigen Kontext ebenfalls untersucht.

Im Kapitel 4 werden die im vorangegangenen Abschnitt vorgestellten kontinuierlichen Probleme im Ort semidiskretisiert und stabilisiert. Dazu wird die Divergenznebenbedingung stabilisiert und um einen zusätzlichen Lagrange-Multiplikator erweitert. Im Falle der Induktionsgleichung der Maxwell-Gleichungen wird in dieser Arbeit im Vergleich zur bisherigen Literatur nach Artikel [6] die Skalierung der Stabilisierungsparameter nur aus einer Stabilitätsanalyse gewonnen. Dies geschieht mithilfe einer natürlichen Norm auf den jeweiligen Funktionenräumen und mittels des eingeführten Scott-Zhang-Operators. Eine Wohlgestelltheitsanalyse und Konvergenzanalyse im Falle glatter und nichtglatter Lösungen des Magnetfeldes werden in dieser Arbeit vorgestellt, wobei die Konvergenzanalyse im nichtglatten Falle sich auf die Arbeit [6] von Santiago Badia und Ramon Codina stützt. Desweiteren wird die zeitabhängige magnetische Induktionsgleichung untersucht, was nach gegenwärtigem Kenntnisstand in dieser Form erstmalig in einer gemeinsamen Arbeit [45] des Autors mit Utku Kaya und Gert Lube untersucht worden ist. Im Vergleich zu diesem Artikel wird die Stabilisierung wie im Falle der Induktionsgleichung vorgenommen und schließlich um eine zusätzliche lokale Projektion des Kopplungstermes ergänzt. Abschließend werden die Stabilität und die Konvergenz im Falle eines glatten Magnetfeldes diskutiert.

Der folgende Abschnitt 5 gibt einen kurzen Überblick über die Navier-Stokes-Gleichungen. Anschließend wird das stationäre Magnetohydrodynamikmodell motiviert, dessen Wohlgestelltheit im kontinuierlichen Falle nachgewiesen wird.

Das Hauptkapitel 6 befasst sich mit der Semidiskretisierung des stationären Magnetohydrodynamikproblems in den Ortskoordinaten. Grundlage der stabilisierten Formulierung ist die Arbeit [8] von Santiago Badia, Ramon Codina und Ramon Planas ihrer residualbasierten Stabilisierungsmethode zur Lösung dieses Problems. Im Gegensatz zu ihrer Arbeit wird hier allerdings eine symmetrische Stabilisierung auf der Basis lokaler Projektionen vorgeschlagen, welche mit maximal 7 Stabilisierungstermen statt der im residualbasierten Falle 31 Terme auskommt. Die vorgeschlagene lokale Projektionsmethode mit Divergenzstabilisierungen und Lagrange-Multiplikator-Nebenbedingung für die Divergenznebenbedingung des Magnetfeldes wird auf Stabilität und Konvergenz analysiert. Wäh-

rend in [8] der Fall einer Equal-Order-Approximation, was gleichen Polynomansatzgrad für insbesondere Geschwindigkeitsfeld und zugehörigem kinematischen Druck bedeutet, herausgestellt wird, werden im Kapitel 6 auch die klassischen Taylor-Hood-Elemente betrachtet. Hierbei unterscheiden sich der Ansatzgrad zwischen dem Geschwindigkeitsfeld und dem kinematischen Druck um eine Ordnung. Ähnliches wird für das Magnetfeld und den zusätzlichen Lagrange-Multiplikator, magnetischer Pseudodruck genannt, untersucht. Nach bestem Kenntnisstand des Autors ist dies bisher in der Literatur erstmalig im gemeinsamen Preprint [64] mit Daniel Arndt und Gert Lube untersucht worden.

Im folgenden Kapitel 7 wird der Algorithmus zur Lösung des zeitabhängigen erweiterten Induktionsproblems und des zeitabhängigen Magnetohydrodynamikmodells vorgestellt. Anschließend werden für alle drei untersuchten stabilisierten Modelle Beispiele angeführt, wobei die meisten dieser Probleme zur Bestätigung des theoretischen Konvergenzverhaltens dienen sollen.

Zum Abschluss dieser Arbeit werden die Ergebnisse im Kapitel 8 zusammengefasst und es erfolgt ein Ausblick, in welche Richtung die gewonnenen Resultate dieser Dissertation weiterentwickelt werden können.

Im Anhang findet sich schließlich eine Zusammenfassung über funktionalanalytische Grundlagen, welche einige Grundbegriffe für den Leser bereitstellen sollen. Es werden wesentliche Funktionenräume und Notationen erläutert, welche in den vorherigen Kapiteln dieser Ausarbeitung verwendet werden. Es empfiehlt sich, dieses Anhangskapitel als Grundlage zu lesen.

2 Grundlagen

Dieses Kapitel dient der Einführung der Theorie stationärer gemischter Probleme und von Interpolationsmethoden, wobei die in dieser Arbeit benutzte Finite-Elemente-Methode im Speziellen angerissen wird. Ferner wird der für diese Dissertation wesentliche Scott-Zhang-Interpolationsoperator vorgestellt.

2.1 Gemischte Probleme

In diesem Abschnitt sollen grundlegende Ergebnisse der Theorie der gemischten Probleme angegeben werden. Dafür wird zunächst die Fragestellung der gemischten Probleme präzisiert, um anschließend Bedingungen für die Wohlgestelltheit solcher Formulierungen anzugeben. Wesentlich wird dabei auf die Arbeit [62] des Autors im Wortlaut zurückgegriffen, die auf dem Buch [28] beruht.

2.1.1 Erläuterung der Fragestellung

Es seien X und M zwei reelle Hilberträume mit den Normen $\|\cdot\|_X$ und $\|\cdot\|_M$ und den Skalarprodukten $(\cdot, \cdot)_{X \times X}$ und $(\cdot, \cdot)_{M \times M}$. Weiterhin seien X' und M' die zugehörigen Dualräume mit den Normen $\|\cdot\|_{X'}$ und $\|\cdot\|_{M'}$. Mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ notieren wir die duale Paarung zwischen den Räumen X' und X oder M' und M derart, dass diese als Abbildungen

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{X' \times X} : X' \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

und

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{M' \times M} : M' \times M \longrightarrow \mathbb{R}$$

aufgefasst werden können.

Wir führen zwei stetige Bilinearformen auf diesen Hilberträumen ein, welche durch

$$a(\cdot, \cdot) : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

und

$$b(\cdot, \cdot) : X \times M \longrightarrow \mathbb{R}$$

gegeben sind. Die zugehörigen Normen werden durch

$$\|a\| := \sup_{u, v \in X \setminus \{0\}} \frac{a(u, v)}{\|u\|_X \|v\|_X}$$

und

$$\|b\| := \sup_{\substack{v \in X \setminus \{0\} \\ \mu \in M \setminus \{0\}}} \frac{b(v, \mu)}{\|v\|_X \|\mu\|_M}$$

definiert.

Wir betrachten nun das *gemischte Variationsproblem*, welches wir ab sofort mit (Q) bezeichnen wollen:

„Gegeben seien $l \in X'$ und $\chi \in M'$. Zu ihnen soll ein Tupel $(u, \lambda) \in X \times M$ derart gefunden werden, dass die Beziehungen

$$a(u, v) + b(v, \lambda) = \langle l, v \rangle_{X' \times X} \quad \forall v \in X, \quad (2.1)$$

$$b(u, \mu) = \langle \chi, \mu \rangle_{M' \times M} \quad \forall \mu \in M \quad (2.2)$$

gelten.“

Das gemischte Variationsproblem (Q) lässt sich in eine äquivalente Operatorgleichung überführen. Dazu bringen wir die beiden Bilinearformen $a(\cdot, \cdot)$ und $b(\cdot, \cdot)$ mit den beiden Operatoren $A \in \mathcal{L}(X, X')$ und $B \in \mathcal{L}(X, M')$ dergestalt in Verbindung, dass die Beziehungen

$$\langle Au, v \rangle_{X' \times X} = a(u, v) \quad \forall u, v \in X, \quad (2.3)$$

$$\langle Bv, \mu \rangle_{M' \times M} = b(v, \mu) \quad \forall v \in X, \forall \mu \in M \quad (2.4)$$

gelten. Außerdem sei $B' \in \mathcal{L}(M, X')$ der zu B duale Operator, was

$$\langle B'\mu, v \rangle_{X' \times X} = \langle Bv, \mu \rangle_{M' \times M} = b(v, \mu) \quad (2.5)$$

für alle $v \in X$ und für alle $\mu \in M$ bedeutet.

Die eingeführten Notationen geben uns die Möglichkeit, das Problem (Q) auch in folgender äquivalenter Weise darzustellen, was wir als Problem (Q') bezeichnen wollen:

„Finde ein Tupel $(u, \lambda) \in X \times M$ derart, dass die Beziehungen

$$Au + B'\lambda = l \in X', \quad (2.6)$$

$$Bu = \chi \in M' \quad (2.7)$$

erfüllt sind.“

Wir führen den linearen Operator $\Phi \in \mathcal{L}(X \times M, X' \times M')$ ein, welcher durch

$$\Phi(v, \mu) = (Av + B'\mu, Bv) \quad (2.8)$$

definiert ist. Die Einführung dieses Operators ist insbesondere durch das Problem (Q') motiviert.

Das Problem (Q) ist wohlgestellt, womit in diesem Falle eindeutig lösbar gemeint ist, wenn Φ ein Isomorphismus von $X \times M$ nach $X' \times M'$ ist. Unser Ziel wird es sein, notwendige und hinreichende Bedingungen dafür zu finden, dass das Problem (Q) wohlgestellt ist. Dazu definieren wir

$$V := V(0) = \ker(B) \subset X \quad (2.9)$$

und

$$V(\chi) := \{v \in X \mid b(v, \mu) = \langle \chi, \mu \rangle_{M' \times M} \quad \forall \mu \in M\} \subset X, \quad (2.10)$$

wobei (2.9) erst durch (2.10) einen Sinn erhält. Die Stetigkeit des Operators B liefert uns, dass V ein abgeschlossener Unterraum von X ist.

Mit diesen Definitionen betrachten wir das folgende Problem (P):

„Finde $u \in V(\chi)$ derart, dass

$$a(u, v) = \langle l, v \rangle_{X' \times X} \quad (2.11)$$

für alle $v \in V$ gilt.“

Falls $(u, \lambda) \in X \times M$ eine Lösung des Problems (Q) darstellt, ist $u \in V(\chi)$ wegen der Beziehungen (2.2) und (2.10) und deshalb löst u ebenso das Problem (P). Wir möchten notwendige und hinreichende Bedingungen finden, die uns sicherstellen, dass auch die Umkehrung dieser Aussage gilt.

Zu diesem Zwecke definieren wir die beiden folgenden Mengen.

Definition 2.1. Die *polare Menge* V^0 von V wird durch

$$V^0 := \{g \in X' \mid \langle g, v \rangle_{X' \times X} = 0 \forall v \in V\} \subset X'$$

definiert. Das *orthogonale Komplement* V^\perp von V wird mittels

$$V^\perp := \{x \in X \mid (x, v)_{X \times X} = 0 \forall v \in V\} \subset X$$

definiert.

Die Stetigkeit des Skalarproduktes auf dem Hilbertraum X gibt uns die Abgeschlossenheit des Unterraumes V^\perp von X .

2.1.2 Ein erster Zugang zur Beantwortung der Fragestellung

Satz 2.2. Die drei folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (i) Es existiert eine positive reelle Konstante $\beta > 0$ derart, dass

$$\inf_{\mu \in M \setminus \{0\}} \sup_{v \in X \setminus \{0\}} \frac{b(v, \mu)}{\|v\|_X \|\mu\|_M} \geq \beta \quad (2.12)$$

gilt.

- (ii) Der Operator B' ist ein Isomorphismus von M nach V^0 und es gilt mit einem positiven $\beta > 0$

$$\|B'\mu\|_{X'} \geq \beta \|\mu\|_M \quad (2.13)$$

für alle $\mu \in M$.

- (iii) Der Operator B ist ein Isomorphismus von V^\perp nach M' und es gilt mit einem positiven $\beta > 0$

$$\|Bv\|_{M'} \geq \beta \|v\|_X \quad (2.14)$$

für alle $v \in V^\perp$.

Beweis. Der Beweis ist bei [62, Satz 2.3] nachzulesen. \square

Bemerkung 2.3. Die Bedingung (2.12) stammt von Babuška und Brezzi. Diese inf-sup-Bedingung wird daher häufig auch als *Babuška-Brezzi-Bedingung* bezeichnet.

Um das Hauptresultat dieses Abschnittes zu formulieren, führen wir den linearen, stetigen Operator $\pi: X' \rightarrow V'$ vermöge

$$\langle \pi l, v \rangle_{X' \times X} = \langle l, v \rangle_{X' \times X} \quad (2.15)$$

für alle $l \in X'$ und alle $v \in V$ ein. Somit ist π ein orthogonaler Projektionsoperator und wir erhalten, dass

$$\|\pi l\|_{V'} \leq \|\pi\|_{\mathcal{L}(X', V')} \|l\|_{X'} \leq \|l\|_{X'}$$

gilt.

Theorem 2.4. *Das Problem (Q) ist wohlgestellt, d.h. $\Phi: X \times M \rightarrow X' \times M'$ ist ein Isomorphismus genau dann, wenn die folgenden zwei Bedingungen gelten:*

- (i) *Der Operator πA ist ein Isomorphismus von V nach V' ;*
- (ii) *Die Bilinearform $b(\cdot, \cdot)$ erfüllt die inf-sup-Bedingung (2.12).*

Beweis. Vergleiche [62, Theorem 3.5]. \square

2.1.3 Ein alternativer Zugang zur Problemstellung

In diesem Unterabschnitt werden wir einen alternativen Zugang zur Fragestellung der gemischten Probleme vorstellen. Die grundlegende Fragestellung bleibt dieselbe wie zuvor, wobei wir insbesondere an die wesentliche Kernfrage (Q)

„Gegeben seien $l \in X'$ und $\chi \in M'$. Zu ihnen soll ein Tupel $(u, \lambda) \in X \times M$ derart gefunden werden, dass die Beziehungen

$$\begin{aligned} a(u, v) + b(v, \lambda) &= \langle l, v \rangle_{X' \times X} \quad \forall v \in X, \\ b(u, \mu) &= \langle \chi, \mu \rangle_{M' \times M} \quad \forall \mu \in M \end{aligned}$$

gelten.“,

die wegen des Rieszschen Darstellungssatzes äquivalente Operatorformulierung (Q')

„Finde ein Tupel $(u, \lambda) \in X \times M$ derart, dass die Beziehungen

$$\begin{aligned} Au + B'\lambda &= l \in X', \\ Bu &= \chi \in M' \end{aligned}$$

erfüllt sind.“

und den Operator π , welcher direkt nach Bemerkung 2.3 eingeführt wird, erinnern möchten. Mit $\ker(B)$ bezeichnen wir den Kern des Operators B und ferner definieren wir mit dem erwähnten Operator π den folgenden Operator $\pi A: \ker(B) \rightarrow (\ker(B))'$ mittels der Zuweisung

$$\langle \pi Au, v \rangle_{X' \times X} = \langle Au, v \rangle_{X' \times X}$$

für alle $u, v \in \ker(B)$. Aufgrund des bereits bewiesenen Theorems 2.4 wissen wir dementsprechend, wann das Problem (Q) und damit auch die Operatorformulierung (Q') wohlgestellt sind.

Eine andere Sichtweise auf das Problem (Q) wäre es, einen Produktraum $W = X \times M$ mit der Bilinearform

$$c((u, \lambda), (v, \mu)) = a(u, v) + b(v, \lambda) + b(u, \mu)$$

und einer Linearform

$$k(v, \mu) = \langle l, v \rangle_{X' \times X} + \langle \chi, \mu \rangle_{M' \times M}$$

einzuführen. Dementsprechend können wir jetzt die Problemstellung

„Finde ein Tupel $(u, \lambda) \in W$ dergestalt, dass

$$c((u, \lambda), (v, \mu)) = k(v, \mu) \tag{2.16}$$

für alle $(v, \mu) \in W$ erfüllt ist.“

betrachten. Mit der bekannten Problemstellung und dem vorgestellten Operator πA gelingt es uns zunächst, die folgende Erkenntnis nach [28, Theorem 2.34] von Alexandre Ern und Jean-Luc Guermond zu gewinnen.

Theorem 2.5. *Unter den gemachten Annahmen aus Unterabschnitt 2.1.1 ist das gemischte Variationsproblem (Q) genau dann wohlgestellt, wenn*

$$\begin{cases} \exists \alpha > 0, \inf_{u \in \ker(B) \setminus \{0\}} \sup_{v \in \ker(B) \setminus \{0\}} \frac{a(u, v)}{\|u\|_X \cdot \|v\|_X} \geq \alpha, \\ \forall v \in \ker(B), (\forall u \in \ker(B) \setminus \{0\} : a(u, v) = 0) \implies (v = 0), \end{cases} \tag{2.17}$$

und

$$\exists \beta > 0, \inf_{\mu \in M \setminus \{0\}} \sup_{v \in X \setminus \{0\}} \frac{b(v, \mu)}{\|v\|_X \cdot \|\mu\|_M} \geq \beta \tag{2.18}$$

gelten. Ferner ergeben sich die a-priori-Abschätzungen

$$\begin{cases} \|u\|_X \leq c_1 \cdot \|l\|_{X'} + c_2 \cdot \|\chi\|_{M'} \\ \|\lambda\|_M \leq c_3 \cdot \|l\|_{X'} + c_4 \cdot \|\chi\|_{M'} \end{cases} \tag{2.19}$$

mit den Konstanten $c_1 = \alpha^{-1}$, $c_2 = \beta^{-1} \cdot (1 + \alpha^{-1} \cdot \|a\|)$, $c_3 = c_2$ und der letzten Konstanten $c_4 = \beta^{-2} \cdot \|a\| \cdot (1 + \alpha^{-1} \cdot \|a\|)$.

Beweis. Ein Beweis ist bei [62, Theorem 2.8] zu finden. □

Als wichtiges Resultat möchten wir das nachfolgende Theorem aus dem Werk [28, Theorem 2.36] von Alexandre Ern und Jean-Luc Guermond anführen:

Theorem 2.6. *Wir versehen den Produktraum $W = X \times M$ mit der Norm*

$$\|(u, \lambda)\|_W := \|u\|_X + \|\lambda\|_M.$$

Dann erfüllt die Bilinearform

$$c((u, \lambda), (v, \mu)) = a(u, v) + b(v, \lambda) + b(u, \mu)$$

die Bedingungen

$$\exists \tilde{\alpha} > 0 : \inf_{(u, \lambda) \in W \setminus \{(0, 0)\}} \sup_{(v, \mu) \in W \setminus \{(0, 0)\}} \frac{c((u, \lambda), (v, \mu))}{\|(u, \lambda)\|_W \cdot \|(v, \mu)\|_W} \geq \tilde{\alpha} \quad (2.20)$$

und

$$\forall (v, \mu) \in W : (\forall (u, \lambda) \in W : c((u, \lambda), (v, \mu)) = 0) \implies ((v, \mu) = (0, 0)) \quad (2.21)$$

dann und nur dann, wenn die Bedingungen

$$\begin{cases} \exists \alpha > 0 : \inf_{u \in \ker(B) \setminus \{0\}} \sup_{v \in \ker(B) \setminus \{0\}} \frac{a(u, v)}{\|u\|_X \cdot \|v\|_X} \geq \alpha \\ \forall v \in \ker(B) : (\forall u \in \ker(B) : a(u, v) = 0) \implies (v = 0) \end{cases} \quad (2.22)$$

und

$$\exists \beta > 0 : \inf_{\lambda \in M \setminus \{0\}} \sup_{v \in X \setminus \{0\}} \frac{b(v, \lambda)}{\|v\|_X \cdot \|\lambda\|_M} \geq \beta \quad (2.23)$$

gelten.

Beweis. Vergleiche [62, Theorem 2.10]. □

2.2 Interpolation und Interpolationsoperatoren im Rahmen der Finite-Elemente-Methode

In diesem Unterabschnitt besprechen wir grundlegende Definitionen und Beispiele Finite-Elemente. Dabei folgen wir im Wesentlichen dem Vorlesungsskriptum [47]. Finite-Elemente-Methoden sind dadurch gekennzeichnet, dass das Lösungsgebiet in möglichst einfache geometrische Teilgebiete zerlegt wird, die Ansatzfunktionen über diesen Teilgebieten lokal definiert sind und globale Eigenschaften durch Vorgabe bestimmter Bedingungen an die Ansatzfunktionen eingehalten werden. Weitere Details zu Finiten Elementen finden sich in den Werken [15], [16], [28]. Ferner werden wir einige grundlegende Aspekte der Interpolation von nichtglatten Funktionen mittels des Scott-Zhang-Operators nach [62] besprechen, wobei weiterführende Details in der Originalliteratur [58] zu finden sind.

2.2.1 Finite Elemente

Sei $\Omega \in \mathbb{R}^d$ mit $d \in \{1, 2, 3\}$ ein beschränktes, polyedrisches Gebiet. Benutzt werde eine nichtüberlappende Zerlegung $\mathcal{T}_h = \{K_i\}_{i=1}^M$ des Gebietes Ω in M konvexe polyedrische Teilgebiete K_i mit den Eigenschaften

$$\overline{\Omega} = \cup_{j=1}^M \overline{K_j}, \quad K_i \cap K_j = \emptyset, \quad i \neq j, \quad h_i := \text{diam}(K_i), \quad h := \max_{i=1, \dots, M} h_i. \quad (2.24)$$

Da wir die Zulässigkeit eines Gebietes fordern wollen, definieren wir sie.

Definition 2.7. Eine Zerlegung $\mathcal{T}_h = \{K_i\}_{i=1}^M$ des Gebietes Ω wird *zulässig* genannt, falls jeweils zwei Teilgebiete $\overline{K_i}$ und $\overline{K_j}$ entweder

- genau eine vollständige gemeinsame Fläche (im Falle $d = 3$),
- genau eine vollständige gemeinsame Kante (im Falle $d \geq 2$),
- genau einen Punkt gemeinsam ($d \geq 1$) haben

oder paarweise disjunkt sind. Eine Zerlegung wird *quasiuniform* oder *isotrop* genannt, falls ein $\kappa > 0$ derart existiert, dass alle $K \in \mathcal{T}_h$ einen Kreis vom Radius ϱ_K mit

$$\varrho_K \geq \frac{\text{diam}(K)}{2\kappa}$$

enthalten. Mit diam wird dabei der Durchmesser eines Teilgebietes K bezeichnet. Eine Zerlegung \mathcal{T}_h nennen wir *uniform*, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass jedes Element $K \in \mathcal{T}_h$ einen Kreis mit Radius $\varrho_K \geq \frac{h}{\varepsilon}$ enthält.

Wir definieren jetzt den Begriff eines Finiten Elements.

Definition 2.8. Ein *Finites Element* ist ein Tupel (K, \mathcal{P}, Σ) mit den folgenden Eigenschaften:

- $K \subset \mathbb{R}^d$ ist ein konvexes, polyedrisches Gebiet und die Teile des Randes ∂K , welche auf einer Hyperfläche liegen, heißen *Seiten*.
- Der *Raum der Formfunktionen* \mathcal{P} ist ein auf K definierter endlichdimensionaler linearer Funktionenraum mit der Dimension $l \in \mathbb{N}$.
- Die *Menge der Freiheitsgrade* Σ besteht aus l linear unabhängigen Funktionalen über \mathcal{P} . Jede Funktion $p \in \mathcal{P}$ wird durch die Werte der l Funktionalen aus Σ eindeutig festgelegt.

Werden nur vorgegebene Funktionswerte verwendet, sprechen wir beim zugehörigen Finiten Element von einem *Lagrangeschen Finiten Element*.

Eine alternative Charakterisierung lässt sich über den algebraischen Dualraum \mathcal{P}' von \mathcal{P} vornehmen. Dann kann eine Menge $\{N_1, \dots, N_l\}$ aus \mathcal{P}' , die Menge der Knotenvariablen, mit Σ identifiziert werden.

Definition 2.9. Sei (K, \mathcal{P}, Σ) ein Finites Element. Eine Basis $\{\varphi_1, \dots, \varphi_l\}$ von \mathcal{P} mit der Eigenschaft $N_i(\varphi_j) = \delta_{ij}$ für $1 \leq i, j \leq l$ wird *nodale Basis* von \mathcal{P} genannt.

Wir definieren den lokalen Interpolanten.

Definition 2.10. Seien (K, \mathcal{P}, Σ) ein Finites Element und $\{\varphi_1, \dots, \varphi_l\}$ eine nodale Basis von \mathcal{P} . Sei v eine Funktion, für welche alle $N_i \in \Sigma, i \in \{1, \dots, l\}$ definiert sind. Als *lokalen Interpolanten* bezeichnen wir eine Funktion $\Pi_K v \in \mathcal{P}$, welche

$$v \mapsto \Pi_K v := \sum_{i=1}^l N_i(v) \varphi_i \quad (2.25)$$

erfüllt.

Hiermit sind wir in der Lage, den globalen Interpolanten zu definieren.

Definition 2.11. Sei das beschränkte, polyedrische Gebiet $\Omega \in \mathbb{R}^d, d \in \{1, 2, 3\}$ mittels einer zulässigen Triangulation $\mathcal{T}_h = \{K_i\}_{i=1}^M$ exakt trianguliert. Zu jedem Gebiet seien ein Finites Element $(K_i, \mathcal{P}_i, \Sigma_i)$ und eine nodale Basis in \mathcal{P}_i erklärt. Ferner sei $k \in \mathbb{N}_0$ die höchste in der nodalen Basis vorkommende Ordnung partieller Ableitungen. Für $v \in \mathcal{C}^k(\bar{\Omega})$ wird durch

$$(\Pi_{\mathcal{T}_h} v)|_{K_i} = \Pi_{K_i}(v|_{K_i}) \quad (2.26)$$

ein *globaler Interpolant* $\Pi_{\mathcal{T}_h} v$ für alle $K_i \in \mathcal{T}_h$ definiert.

Praktisch wird ein Gitter von einer *Referenzzelle* \tilde{K} und einer geometrischen Transformation $T_K: \tilde{K} \rightarrow K$ mit $K \in \mathcal{T}_h$ erzeugt. Dabei wird T_K in der Regel durch ein Lagrangesches Finites Element $(\tilde{K}, \tilde{\mathcal{P}}, \tilde{\Sigma})$ spezifiziert. Sei $l_{\text{geo}} := \text{card}(\tilde{\Sigma})$, seien $\{\tilde{N}_1, \dots, \tilde{N}_{l_{\text{geo}}}\}$ die Knoten, assoziiert mit $\tilde{\Sigma}$, und $\{\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_{l_{\text{geo}}}\}$ die Ansatzfunktionen.

Zur Erzeugung eines Gitters wird eine Menge $\{N_1^m, \dots, N_{l_{\text{geo}}}^m\}_{1 \leq m \leq M}$ benötigt, wobei es sich hier um die Menge der geometrischen Knoten des m -ten Teilgebietes handelt. Für $1 \leq m \leq M$ definieren wir die geometrische Transformation durch

$$T_m: \tilde{K} \rightarrow K_m, \tilde{x} \mapsto T_m(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^{l_{\text{geo}}} N_i^m \tilde{\varphi}_i(\tilde{x}) \quad (2.27)$$

und hierbei gelten $T_m(\tilde{N}_i) = N_i^m, 1 \leq i \leq l_{\text{geo}}$ und $K_m = T_m(\tilde{K})$.

Wir geben zwei Beispiele Finiter Elemente, welche in dieser Ausarbeitung benutzt werden.

Sei $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ und definiere den Raum

$$\mathbb{P}_r := \left\{ p(\mathbf{x}) = \sum_{\substack{0 \leq i_1, \dots, i_d \leq r \\ i_1 + \dots + i_d \leq r}} \alpha_{i_1 \dots i_d} x_1^{i_1} \dots x_d^{i_d}, \alpha_{i_1 \dots i_d} \in \mathbb{R} \right\} \quad (2.28)$$

der simplizialen Elemente und den Raum

$$\mathbb{Q}_r := \left\{ q(\mathbf{x}) = \sum_{0 \leq i_1 + \dots + i_d \leq r} \alpha_{i_1 \dots i_d} x_1^{i_1} \dots x_d^{i_d}, \alpha_{i_1 \dots i_d} \in \mathbb{R} \right\} \quad (2.29)$$

der Quader-Elemente mit $r \in \mathbb{N}$. Mittels Einführung dieser baryzentrischer Koordinaten kann man nachweisen, dass für ein polyedrisches Gebiet $K \subset \mathbb{R}^d$ unter der Wahl $\mathcal{P} \in \{\mathbb{P}_r, \mathbb{Q}_r\}$ Finite Elemente definiert werden können. Für einen Beweis verweisen wir auf [28, Proposition 1.34, Proposition 1.35].

Als Letztes führen wir nach [28] nützliche inverse Ungleichungen an. Beginnen wollen wir mit einer lokalen Variante.

Lemma 2.12. *Sei $\{\widehat{K}, \widehat{P}, \widehat{\Sigma}\}$ ein finites Element. Sei $l \geq 0$ derart, dass $\widehat{P} \subset W^{l, \infty}(\widehat{K})$. Sei $\{\mathcal{T}_h\}$ eine quasiuniforme oder isotrope Zerlegung nach Definition 2.7, wobei als geometrische Transformation T_K auf das Referenzelement \widehat{K} affin-lineare Transformationen benutzt werden. Sei $0 \leq m \leq l$ mit $m, l \in \mathbb{N}_0$ und $1 \leq p, q \leq \infty$. Dann existiert eine Konstante c , welche unabhängig von h , K , p und q ist, sodass*

$$\|v\|_{W^{l,p}(K)} \leq ch_K^{(m-l+d(p^{-1}-q^{-1}))} \|v\|_{W^{m,q}(K)} \quad (2.30)$$

für alle $v \in P_K := \{\widehat{p} \circ T_K^{-1}; \widehat{p} \in \widehat{P}\}$ gilt, wobei $d \in \mathbb{N}$ die Raumdimension des Gebietes $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ist, über welchem interpoliert wird.

Beweis. Der Beweis dieser Aussage steht in [28, Lemma 1.138]. □

Es verbleibt, die globale Variante anzugeben.

Lemma 2.13. *Seien die Voraussetzungen aus Lemma 2.12 erfüllt. Setze*

$$W_h := \left\{ v_h : \forall K \in \mathcal{T}_h : v_h \circ T_K \in \widehat{P} \right\}.$$

Dann existiert eine Konstante c , welche unabhängig von h , K , p und q ist, sodass für alle $0 \leq m \leq l$ mit $m, l \in \mathbb{N}_0$ und alle $v_h \in W_h$ die globale Ungleichung

$$\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|v_h\|_{W^{l,p}(K)}^p \right)^{p^{-1}} \leq ch^{(m-l+\min\{0, d(p^{-1}-q^{-1})\})} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|v_h\|_{W^{m,q}(K)}^q \right)^{q^{-1}} \quad (2.31)$$

erfüllt wird, wobei $d \in \mathbb{N}$ die Raumdimension des Gebietes $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ist, über welchem interpoliert wird.

Beweis. Dieser Beweis findet sich in [28, Lemma 1.141]. □

2.2.2 Scott-Zhang-Operator

In diesem Unterabschnitt möchten wir den Scott-Zhang-Operator \mathcal{SZ} , welcher von Scott und Zhang [58] eingeführt worden ist, vorstellen. Wir folgen den Ideen aus diesem Artikel und dem dritten Kapitel aus [2].

Wir bezeichnen mit $\varphi_i \in V_h$, $i \in I$ aus einer Indexmenge I , die nodalen Formfunktionen eines Finite-Elemente-Raumes V_h und definieren

$$\mathcal{SZ}(u) := \sum_{i \in I} a_i \cdot \varphi_i, \quad (2.32)$$

wobei die $a_i \in \mathbb{R}$ noch zu charakterisieren sind. Mit $X^{(i)}$ werden im Folgenden die Knotenpunkte benannt.

Um nichtglatte Funktionen zu behandeln, betrachten wir Teilgebiete $\sigma_i \subset \bar{\Omega}$ unseres Ausgangsgebietes und wählen

$$a_i := \left(\prod_{\sigma_i} u \right) (X^{(i)}), \quad (2.33)$$

wobei $\prod_{\sigma_i}: L^2(\sigma_i) \rightarrow \mathcal{P}_{k,\sigma_i}$ den L^2 -Projektionsoperator darstellt, wobei ferner \mathcal{P}_{k,σ_i} ein Polynomansatzraum, deren Polynome Grad $\leq k$ haben und auf σ_i eingeschränkt sind, ist. Die Teilgebiete σ_i lassen sich nach den folgenden Kriterien auswählen:

- Falls der Knoten $X^{(i)}$ ein innerer Punkt eines Elementes $K \in \mathcal{T}_h$ ist, so setzen wir $\sigma_i := K$.

Falls andererseits $X^{(i)}$ ein Randpunkt eines oder mehrerer Elemente $K \in \mathcal{T}_h$ darstellt, so wird σ_i als die $(d-1)$ -dimensionale Fläche oder Kante ζ eines der folgenden Elemente gewählt:

- Falls es eine Fläche oder Kante ζ gibt, sodass $X^{(i)}$ ein innerer Punkt von ζ ist, dann wird σ_i eindeutig durch $\sigma_i := \zeta$ festgelegt.
- Falls dies nicht zutrifft, so nehmen wir σ_i als eine Kante oder Fläche, für die $X^{(i)} \in \bar{\zeta}$ gilt. Diese Wahl beschränken wir dadurch, dass wir im Falle $X^{(i)} \in \partial\Omega$ dementsprechend $\sigma_i \in \partial\Omega$ fordern.

Wir geben eine weitere äquivalente Definition von \mathcal{SZ} an. Die $L^2(\sigma_i)$ -Projektion

$$\prod_{\sigma_i} u \in \mathcal{P}_{k,\sigma_i} = V_h|_{\sigma_i}$$

wird mittels

$$\|u - \prod_{\sigma_i} u_i\|_{L^2(\sigma_i)} = \min_{v \in \mathcal{P}_{k,\sigma_i}} \|u - v\|_{L^2(\sigma_i)} \quad (2.34)$$

charakterisiert. Eine explizite Realisierung von $\left(\prod_{\sigma_i} u\right) (X^{(i)})$ kann mittels der Einführung der Funktion $\psi_i \in V_h|_{\sigma_i}$ mit

$$\int_{\sigma_i} \psi_i \cdot \varphi_j \, dx = \delta_{ij} \quad (2.35)$$

für alle $j \in I$ erreicht werden. Wir sehen somit ein, dass

$$a_i = \left(\prod_{\sigma_i} u\right) (X^{(i)}) = \int_{\sigma_i} u \cdot \psi_i \, dx \quad (2.36)$$

gilt. Mittels der schon bekannten Definition des Scott-Zhang-Operators erkennen wir, dass sich hiermit

$$\mathcal{SZ}(u) = \sum_{i \in I} a_i \cdot \varphi_i = \sum_{i \in I} \left(\int_{\sigma_i} u \cdot \psi_i \, dx \right) \cdot \varphi_i \quad (2.37)$$

ergibt, sodass \prod_{σ_i} für $u \in L^2(\sigma_i)$ definiert ist. Dieser Ansatz kann wegen des endlichen Integralwertes, da $\psi_i \in L^\infty(\sigma_i)$ als Polynom ist, auf Funktionen $u \in L^1(\sigma_i)$ ausgedehnt werden.

Dies bedeutet, dass $\mathcal{SZ}: W^{l,p}(\Omega) \rightarrow V_h$ für $l \geq 1$ bei $p = 1$ und anderenfalls für $l > p^{-1}$ definiert wird.

Nach Artikel [58] erhalten wir auch das nachfolgende Approximationsresultat.

Satz 2.14. *Wir betrachten eine isotrope Zerlegung. Ferner sei $l \geq 1$ bei $p = 1$ und anderenfalls $l > p^{-1}$ erfüllt. Sei $v \in W^{l,p}(\Omega)$. Dann gelten mit einer Konstanten $C_{SZ} > 0$*

$$\|v - \mathcal{SZ}(v)\|_{W^{m,p}(K)} \leq C_{SZ} h_K^{l-m} \cdot \|v\|_{W^{l,p}(\Omega)} \quad (2.38)$$

und

$$\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^{p(m-l)} \cdot \|v - \mathcal{SZ}(v)\|_{W^{m,p}(K)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \lesssim \|v\|_{W^{l,p}(\Omega)} \quad (2.39)$$

für $0 \leq m \leq l \leq r + 1$, wobei r der Grad des Polynomansatzraumes ist.

Beweis. Vergleiche [58, Theorem 4.1]. □

Bemerkung 2.15. Mit $h := \max_{K \in \mathcal{T}_h} \text{diam}(K)$ können wir Satz 2.14 zu

$$\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|v - \mathcal{SZ}(v)\|_{W^{m,p}(K)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \lesssim h^{l-m} \cdot \|v\|_{W^{l,p}(\Omega)} \quad (2.40)$$

für $0 \leq m \leq l \leq r + 1$ vereinfachen, was auch nach [58] möglich ist.

3 Kontinuierliches magnetisches Induktionsproblem

Dieses Kapitel dient der Darstellung des kontinuierlichen magnetischen Induktionsproblems aus den Maxwell-Gleichungen, um hierauf aufbauend später die stabilisierte Lagrange Finite-Elemente-Methode zu motivieren. Die Präsentation dieses Abschnittes greift überwiegend auf die Arbeit [62], welche auf Grundlage des Artikels [6] verfasst worden ist, zurück. Es werden die wesentlichen Resultate zitiert.

Zunächst wird eine Motivation der kontinuierlichen magnetischen Induktionsgleichung der Maxwell-Gleichungen auf der Basis des Vorlesungsskriptes [57] gegeben. Alternative Zugänge über das Aufstellen eines Lagrange-Funktional finden sich in den Arbeiten [6], [46], [49] und [62].

Anschließend werden geeignete Funktionenräume und Randbedingungen vorgestellt, unter deren Voraussetzungen sich die Wohlgestelltheit der vorgestellten partiellen Differentialgleichung beweisen lässt. Dies geschieht insbesondere auf den Ideen der Arbeiten [6] und [62] für homogene Medien. Erweiterungen der Ergebnisse auf inhomogene Medien und später deren Diskretisierung mit ebenfalls knotenbasierten Finite-Elemente-Methoden sind in den Arbeiten [12] und [13] nachzulesen.

Im Folgenden werden Skalarprodukte (\cdot, \cdot) und Dualprodukte $\langle \cdot, \cdot \rangle$ immer im L^2 -Sinne verwendet. Sofern sich diese auf das ganze Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ beziehen, bleibt das jeweilige Skalarprodukt oder Dualprodukt ohne Index. Im Falle eines Teilgebietes $K \subset \Omega$ schreiben wir $(\cdot, \cdot)_K$ beziehungsweise $\langle \cdot, \cdot \rangle_K$. Dies gilt für die restlichen Hauptkapitel ebenso.

3.1 Motivation

Wir definieren zuerst die folgenden physikalischen Feldgrößen mit ihren physikalischen Einheiten im SI-System

Symbol	Einheit	Feldgröße
\mathbf{b}	$\frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}$	Magnetische Flußdichte
\mathbf{d}	$\frac{\text{As}}{\text{m}^2}$	Verschiebungsstromdichte
\mathbf{e}	$\frac{\text{V}}{\text{m}}$	Elektrische Feldstärke
\mathbf{h}	$\frac{\text{A}}{\text{m}}$	Magnetische Feldstärke
\mathbf{j}	$\frac{\text{A}}{\text{m}^2}$	Elektrische Stromdichte
ϱ	$\frac{\text{As}}{\text{m}^3}$	Ladungsdichte

und beginnen mit den Maxwell-Gleichungen

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{e} = \mathbf{f}_b, \quad (3.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{h} = \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} + \mathbf{j}, \quad (3.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{d} = \varrho, \quad (3.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0 \quad (3.4)$$

als Ausgangspunkt, wobei \mathbf{f}_b zusätzliche externe Wirkungen zusammenfasst. Desweiteren bezeichnen

Symbol	Materialparameter
ε	Permittivität
μ	Permeabilität
σ	Elektrische Leitfähigkeit

Materialparameter, mit denen die linearen Materialgesetze

$$\mathbf{b} = \mu \mathbf{h}, \quad (3.5)$$

$$\mathbf{d} = \varepsilon \mathbf{e}, \quad (3.6)$$

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{e} \quad (3.7)$$

formuliert werden können.

Bemerkung 3.1. Gleichung (3.1) besagt, dass bei Vertauschung der Divergenz und der Zeitableitung die Divergenz von \mathbf{b} zeitlich konstant für divergenzfreies \mathbf{f}_b ist, sodass die Divergenznebenbedingung (3.4) nur für das Setzen der Anfangsbedingung benötigt wird. Eine analoge Argumentation zeigt diese Aussage für die Ladungsdichte ϱ , welche sich zeitlich entsprechend zu $\nabla \cdot \mathbf{j}$ verhalten muss.

Setzen wir die linearen Materialgesetze (3.7), (3.5) und (3.2) in (3.1) ein, ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_b &\stackrel{(3.1)}{=} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{e} \\ &\stackrel{(3.7)}{=} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} + \frac{1}{\sigma} \nabla \times \mathbf{j} \\ &\stackrel{(3.2)}{=} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} + \frac{1}{\sigma} \nabla \times \left(\nabla \times \mathbf{h} - \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} \right) \\ &\stackrel{(3.5)}{=} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} + \frac{1}{\sigma \mu} \nabla \times \nabla \times \mathbf{b} - \frac{1}{\sigma} \nabla \times \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Eine Vernachlässigung des Verschiebungsstromes liefert bei Multiplikation mit der Ladungsdichte ϱ , der Interpretation von \mathbf{f}_b als Kraftterm und dem Setzen von $\lambda := \frac{\varrho}{\sigma \mu}$ das magnetische Induktionsproblem der Maxwell-Gleichungen

$$\varrho \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} + \lambda \nabla \times \nabla \times \mathbf{b} = \mathbf{f}_b, \quad (3.8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0, \quad (3.9)$$

wobei diese partielle Differentialgleichung mit der Divergenznebenbedingung im Folgenden verknüpft als Maxwell-Gleichung bezeichnet wird.

3.2 Problemformulierung und Wohlgestellttheit

Nachdem wir im vorangegangenen Unterabschnitt mit (3.8) - (3.9) das magnetische Induktionsproblem der Maxwell-Gleichungen motiviert haben, möchten wir jetzt auf der Grundlage der Arbeiten [6] und [62] die Problemformulierung mithilfe geeigneter Funktionenräume konkretisieren. Die wesentlichen Ergebnisse werden aus [62] zitiert.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ mit $d \in \{2, 3\}$ ein im Allgemeinen nichtkonvexes, polyedrisches Lipschitzgebiet. Ferner verwenden wir die Funktionenräume

$$H_0^1(\Omega)^d := \left\{ \mathbf{b} \in H^1(\Omega)^d \mid \mathbf{b} = 0 \text{ auf } \partial\Omega \right\}, \quad (3.10)$$

$$H(\operatorname{div}; \Omega) := \left\{ \mathbf{b} \in L^2(\Omega)^d \mid \nabla \cdot \mathbf{b} := \operatorname{div}(\mathbf{b}) \in L^2(\Omega) \right\}, \quad (3.11)$$

$$H(\operatorname{rot}; \Omega) := \left\{ \mathbf{b} \in L^2(\Omega)^d \mid \nabla \times \mathbf{b} := \operatorname{rot}(\mathbf{b}) \in L^2(\Omega)^d \right\}, \quad (3.12)$$

$$H(\operatorname{div} 0; \Omega) := \left\{ \mathbf{b} \in H(\operatorname{div}; \Omega) \mid \nabla \cdot \mathbf{b} = 0 \text{ in } \Omega \right\}, \quad (3.13)$$

$$H_0(\operatorname{rot}; \Omega) := \left\{ \mathbf{b} \in H(\operatorname{rot}; \Omega) \mid \mathbf{n} \times \mathbf{b} = 0 \text{ auf } \partial\Omega \right\}, \quad (3.14)$$

wobei \mathbf{n} die nach außen zeigende Einheitsnormale des Gebietes Ω bezeichnet. Für die zweidimensionale Rotation betten wir den \mathbb{R}^2 einfach in den \mathbb{R}^3 ein, wobei die letzte Komponente eines zweidimensionalen Vektors einfach identisch verschwindet. Dazu möchten wir Folgendes nach [37, Abschnitt 1] bemerken.

Bemerkung 3.2. Im Zweidimensionalen wird der Rotationsoperator $\nabla \times$ auf einem zweidimensionalen Vektor $\mathbf{b} = (b_1, b_2)^T$ mittels

$$\nabla \times \mathbf{b} := \partial_x b_2 - \partial_y b_1$$

operieren. Die Rotation eines Skalars r ist durch

$$\nabla \times r := (\partial_y r, -\partial_x r)$$

bestimmt. Für zwei zweidimensionale Vektoren $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T$ und $\mathbf{b} = (b_1, b_2)^T$ wird das Kreuzprodukt durch

$$\mathbf{u} \times \mathbf{b} := u_1 b_2 - u_2 b_1$$

gegeben.

Die Motivation aus [62] über das Lagrange-Funktional mit der Randbedingung $\mathbf{n} \times \mathbf{b} = 0$ auf $\partial\Omega$ führt zur Aufgabenstellung mit homogenen Randbedingungen:

„Finde ein Tupel $(\mathbf{b}, r) \in H_0(\operatorname{rot}; \Omega) \times H_0^1(\Omega)$, welches eine Lösung von

$$\lambda \nabla \times (\nabla \times \mathbf{b}) + \nabla r = \mathbf{f}_{\mathbf{b}}, \quad (3.15a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0 \quad (3.15b)$$

unter den Nebenbedingungen $\mathbf{n} \times \mathbf{u} = 0$ und $r = 0$ auf $\partial\Omega$ mit $\mathbf{f}_{\mathbf{b}} \in H(\operatorname{div} 0; \Omega)$ darstellt.“

Der zusätzliche Lagrangeparameter r , welcher aus der Motivation gewonnen wird und magnetischer Pseudodruck genannt wird, dient als Bestrafungsparameter, um die Divergenzfreiheit des Magnetfeldes \mathbf{b} sicherzustellen.

Wir wollen uns jetzt der Variationsformulierung dieses Problems widmen. Die angegebenen Funktionenräume liefern die folgende Rotationsformulierung:

„Finde $(\mathbf{b}, r) \in H_0(\text{rot}; \Omega) \times H_0^1(\Omega)$ derart, dass

$$(\lambda \nabla \times \mathbf{b}, \nabla \times \mathbf{c}) + (\nabla r, \mathbf{c}) = (\mathbf{f}_{\mathbf{b}}, \mathbf{c}) \quad \forall \mathbf{c} \in H_0(\text{rot}; \Omega), \quad (3.16a)$$

$$-(\nabla s, \mathbf{b}) = 0 \quad \forall s \in H_0^1(\Omega) \quad (3.16b)$$

gilt, wobei angenommen wird, dass $\mathbf{f}_{\mathbf{b}} \in H(\text{div } 0; \Omega)$ erfüllt ist.“

Bemerkung 3.3. Wir sehen in dieser schwachen Formulierung ein, dass $r \equiv 0$ gilt. Da $r \in H_0^1(\Omega)$ ist, gilt $\nabla \times \nabla r = 0$, sodass $\nabla r \in H_0(\text{rot}; \Omega)$. Ferner gilt $\nabla \cdot \mathbf{f}_{\mathbf{b}} \equiv 0$ fast überall in Ω . Daher gilt bei Wahl $\mathbf{c} = \nabla r$ folglich mit partieller Integration der rechten Seite

$$\begin{aligned} -(\nabla r, \nabla r) &= \lambda(\nabla \times \mathbf{b}, \nabla \times \nabla r) - (\nabla r, \nabla r) \\ &= (\mathbf{f}_{\mathbf{b}}, \nabla r) \\ &= -(\nabla \cdot \mathbf{f}_{\mathbf{b}}, r) \\ &= 0 \end{aligned}$$

und mit $r \equiv 0$ auf $\partial\Omega$ folgt mit der Ungleichung nach Poincaré $r \equiv 0$ fast überall in Ω .

Um unser Ziel der Formulierung eines Sattelpunktproblems zu erreichen, führen wir die Bilinearformen

$$\begin{aligned} a: H_0(\text{rot}; \Omega) \times H_0(\text{rot}; \Omega) &\longrightarrow \mathbb{R}, & (\mathbf{b}, \mathbf{c}) &\longmapsto \lambda(\nabla \times \mathbf{b}, \nabla \times \mathbf{c}), \\ b: H_0(\text{rot}; \Omega) \times H_0^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R}, & (\mathbf{c}, r) &\longmapsto (\nabla r, \mathbf{c}) \end{aligned}$$

und

$$c((\mathbf{b}, r); (\mathbf{c}, s)) = a(\mathbf{b}, \mathbf{c}) + b(\mathbf{c}, r) - b(\mathbf{b}, s) \quad (3.17)$$

ein. Darüber hinaus definieren wir abkürzend die Hilbert-Räume $C := H_0(\text{rot}; \Omega)$ und $S := H_0^1(\Omega)$, welche mit den Normen

$$\|\mathbf{c}\|_C := \frac{\sqrt{\lambda}}{L_0} \cdot \|\mathbf{c}\|_{L^2(\Omega)^d} + \sqrt{\lambda} \|\nabla \times \mathbf{c}\|_{L^2(\Omega)^d} \quad (3.18)$$

und

$$\|s\|_S := \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \cdot \|s\|_{L^2(\Omega)} + \frac{L_0}{\sqrt{\lambda}} \|\nabla s\|_{L^2(\Omega)^d} \quad (3.19)$$

ausgestattet sind, wobei $L_0 = L_0(\Omega)$ eine Konstante mit der Dimension einer Länge darstellt, damit die Normen von den Dimensionen der physikalischen Einheiten übereinstimmen. Die Norm, welche zum Produktraum $C \times S$ gehört, wird mittels

$$\|(\mathbf{c}, s)\|_{\text{Gal, Maxw}} := \|\mathbf{c}\|_C + \|s\|_S \quad (3.20)$$

gegeben. Es soll die Wohlgestelltheit des Problems (3.16) untersucht werden.

Satz 3.4. *Die inf-sup-Bedingung*

$$\exists \beta > 0: \inf_{(\mathbf{b}, r) \in C \times S \setminus \{(0,0)\}} \sup_{(\mathbf{c}, s) \in C \times S \setminus \{(0,0)\}} \frac{c((\mathbf{b}, r); (\mathbf{c}, s))}{\|(\mathbf{b}, r)\|_{\text{Gal, Maxw}} \cdot \|(\mathbf{c}, s)\|_{\text{Gal, Maxw}}} \geq \beta > 0 \quad (3.21)$$

ist erfüllt und deswegen ist das Problem (3.16) wohlgestellt.

Beweis. Der Beweis findet sich bei [62, Satz 3.1]. \square

Wir definieren

$$s_r(r, s) = \frac{L_0^2}{\lambda} \cdot \int_{\Omega} \nabla r \cdot \nabla s \, dx \quad (3.22)$$

als Regularisierungsterm der Formulierung (3.16) und erhalten das regularisierte Variationsproblem:

„Finde $(\mathbf{b}, r) \in C \times S$ dergestalt, dass

$$a(\mathbf{b}, v) + b(\mathbf{c}, r) = (\mathbf{f}_{\mathbf{b}}, \mathbf{c}) \quad \forall \mathbf{c} \in C, \quad (3.23a)$$

$$-b(\mathbf{b}, s) + s_r(r, s) = 0 \quad \forall s \in S \quad (3.23b)$$

erfüllt wird.“

Satz 3.5. *Formulierung (3.23) ist wohlgestellt und die Lösung $(\mathbf{b}, r) \in C \times S$ ist dieselbe wie diejenige des Problems in Formulierung (3.16).*

Beweis. Die Aussage findet sich bewiesen in [62, Satz 3.3]. \square

3.3 Erweitertes magnetisches Induktionsproblem

Betrachten wir erneut das Modell (3.8) - (3.9) und ergänzen dieses um eine wirkende Kraft, die sich ergibt, falls ein elektrisch leitendes Fluid betrachtet wird, welches mit einer bekannten Geschwindigkeit $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega)^d)$ strömt. Dieser zusätzliche Induktionsterm $\nabla \times (\mathbf{u} \times \varrho \mathbf{b})$ wird aus dem Kraftterm $\mathbf{f}_{\mathbf{b}}$ abgespalten, sodass sich das erweiterte magnetische Induktionsproblem mittels

$$\varrho \partial_t \mathbf{b} + \lambda \nabla \times (\nabla \times \mathbf{b}) + \nabla r - \nabla \times (\mathbf{u} \times \varrho \mathbf{b}) = \mathbf{f}_{\mathbf{b}}, \quad (3.24a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0 \quad (3.24b)$$

beschreiben lässt. Hierbei haben wir erneut den Lagrangeschen Multiplikator r des magnetischen Pseudo-Druckes benutzt.

Um nachzuweisen, dass das kontinuierliche Problem wohlgestellt ist, folgen wir dem Abschnitt über das kontinuierliche erweiterte Induktionsproblem der Arbeit [45] des Autors mit Utku Kaya und Gert Lube, welcher auf Basis des Artikels [65] des Autors mit Gert

Lube entstanden ist. Der Nachweis beruht im Wesentlichen auf dem Hauptsatz über parabolische Probleme von J.-L. Lions. Wir nutzen die Funktionenräume aus Unterabschnitt 3.2 und die zeitabhängigen Räume $L^2(t_0, t_1; X)$ und $L^\infty(t_0, t_1; X)$ mit Funktionenraum X aus Unterabschnitt B.3 des Anhangs. Sei zusätzlich $\mathbf{f}_b \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^d \cap H(\operatorname{div} 0; \Omega))$. Es ergibt sich nach partieller Integration die Variationsformulierung:

„Finde $\mathbf{b}: [0, T] \rightarrow C$ und $r: [0, T] \rightarrow S$ dergestalt, dass

$$(\varrho \partial_t \mathbf{b}, \mathbf{c}) + (\lambda \nabla \times \mathbf{b}, \nabla \times \mathbf{c}) + (\nabla r, \mathbf{c}) - (\mathbf{u} \times \varrho \mathbf{b}, \nabla \times \mathbf{c}) = (\mathbf{f}_b, \mathbf{c}) \quad \forall \mathbf{c} \in C, \quad (3.25a)$$

$$-(\nabla s, \mathbf{b}) = 0 \quad \forall s \in S \quad (3.25b)$$

fast überall in $[0, T]$ mit $\mathbf{f}_b \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^d \cap H(\operatorname{div} 0; \Omega))$ erfüllt wird.“

Wir definieren die Bilinearformen $a: C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ und $b: S \times C \rightarrow \mathbb{R}$ mittels

$$\begin{aligned} a(\mathbf{b}, \mathbf{c}) &:= (\lambda \nabla \times \mathbf{b}, \nabla \times \mathbf{c}) - (\mathbf{u} \times \varrho \mathbf{b}, \nabla \times \mathbf{c}), \\ b(\mathbf{c}, r) &:= (\nabla r, \mathbf{c}) \end{aligned}$$

und schließlich $c((\mathbf{b}, r), (\mathbf{c}, s)) := a(\mathbf{b}, \mathbf{c}) + b(\mathbf{c}, r) - b(\mathbf{b}, s)$. Damit liest sich die variationelle Formulierung in folgender Gestalt:

„Finde $\mathbf{b} \in L^2(0, T; C)$ und $r \in L^2(0, T; S)$ derart, dass

$$(\varrho \partial_t \mathbf{b}, \mathbf{c}) + c((\mathbf{b}, r), (\mathbf{c}, s)) = (\mathbf{f}_b, \mathbf{c}) \quad (3.26)$$

für alle $(\mathbf{c}, s) \in C \times S$ fast überall in $[0, T]$ mit $\mathbf{f}_b \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^d \cap H(\operatorname{div} 0; \Omega))$ gilt.“

Lemma 3.6. Sei $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega)^d)$. Die Bilinearform $a: C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ erfüllt die Garding-Ungleichung. Das bedeutet, dass Konstanten $\gamma > 0$ und $\kappa \geq 0$ derart existieren, dass

$$a(\mathbf{b}, \mathbf{b}) \geq \gamma \|\mathbf{b}\|_C^2 - \kappa \|\mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \quad (3.27)$$

für alle $\mathbf{b} \in C$ gilt. Desweiteren ist die Bilinearform beschränkt, das heißt, es gibt eine Konstante $M \geq 0$ so, dass

$$|a(\mathbf{b}, \mathbf{c})| \leq M \|\mathbf{b}\|_C \|\mathbf{c}\|_C$$

für alle $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in C$ gültig ist.

Beweis. 1) Zuerst beweisen wir (3.27). Es gilt unter Anwendung der Youngschen Ungleichung und mittels quadratischer Ergänzung

$$\begin{aligned} a(\mathbf{b}, \mathbf{b}) &= (\lambda \nabla \times \mathbf{b}, \nabla \times \mathbf{b}) - (\mathbf{u} \times \varrho \mathbf{b}, \nabla \times \mathbf{b}) \\ &\geq \lambda \|\nabla \times \mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 - \|\mathbf{u} \times \varrho \mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)^d} \|\nabla \times \mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)^d} \\ &\geq \lambda \|\nabla \times \mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 - \varrho \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)^d} \|\mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)^d} \|\nabla \times \mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)^d} \\ &= \lambda \|\nabla \times \mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 - \frac{\varrho \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)^d} L_0 \sqrt{\lambda}}{\lambda} \frac{\sqrt{\lambda}}{L_0} \|\mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)^d} \sqrt{\lambda} \|\nabla \times \mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)^d} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \frac{\lambda}{2} \|\nabla \times \mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \frac{\lambda}{2L_0} \|\mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 - \frac{\lambda}{2L_0} \|\mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \\
&\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{\varrho \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)^d} L_0}{\lambda} \right)^2 \frac{\lambda}{L_0^2} \|\mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \\
&\geq \frac{1}{4} \|\mathbf{b}\|_C^2 - \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{\varrho \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)^d} L_0}{\lambda} \right)^2 \right) \frac{\lambda}{L_0^2} \|\mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)^d}^2.
\end{aligned}$$

Mit den Konstanten

$$\gamma := \frac{1}{4} \text{ und } \kappa := \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{\varrho \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)^d} L_0}{\lambda} \right)^2 \right) \frac{\lambda}{L_0^2}$$

erhalten wir

$$a(\mathbf{b}, \mathbf{b}) \geq \gamma \|\mathbf{b}\|_C^2 - \kappa \|\mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)^d}^2$$

für alle $\mathbf{b} \in C$, was (3.27) beweist.

2) Die Beschränktheit der Bilinearform folgt aus

$$\begin{aligned}
|a(\mathbf{b}, \mathbf{c})| &\leq \lambda \|\nabla \times \mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)^d} \|\nabla \times \mathbf{c}\|_{L^2(\Omega)^d} \\
&\quad + \varrho \|\mathbf{u} \times \varrho \mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)^d} \|\nabla \times \mathbf{c}\|_{L^2(\Omega)^d} \\
&\leq \left\{ \sqrt{\lambda} \|\nabla \times \mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)^d} \right\} \left\{ \sqrt{\lambda} \|\nabla \times \mathbf{c}\|_{L^2(\Omega)^d} \right\} \\
&\quad + \varrho \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)^d} \|\mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)^d} \|\nabla \times \mathbf{c}\|_{L^2(\Omega)^d} \\
&\leq \|\mathbf{b}\|_C \|\mathbf{c}\|_C + \left\{ \varrho \frac{L_0}{\lambda} \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)^d} \right\} \left\{ \frac{\sqrt{\lambda}}{L_0} \|\mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)^d} \right\} \left\{ \sqrt{\lambda} \|\nabla \times \mathbf{c}\|_{L^2(\Omega)^d} \right\} \\
&\leq \|\mathbf{b}\|_C \|\mathbf{c}\|_C + \left\{ \varrho \frac{L_0}{\lambda} \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)^d} \right\} \|\mathbf{b}\|_C \|\mathbf{c}\|_C \\
&\leq 2 \max \left\{ 1, \varrho \frac{L_0}{\lambda} \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)^d} \right\} \|\mathbf{b}\|_C \|\mathbf{c}\|_C
\end{aligned}$$

mittels der Setzung

$$M := 2 \max \left\{ 1, \varrho \frac{L_0}{\lambda} \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)^d} \right\},$$

womit dementsprechend

$$|a(\mathbf{b}, \mathbf{c})| \leq M \|\mathbf{b}\|_C \|\mathbf{c}\|_C$$

für alle $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in C$ erfüllt wird. \square

Wir erhalten das nachfolgende Theorem.

Theorem 3.7. *Mit der obigen Wahl der Funktionenräume gilt die folgende Abschätzung*

$$\begin{aligned} & \varrho \|\mathbf{b}(t)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + 2\gamma \int_0^t e^{3\frac{\kappa}{\varrho}(t-\tau)} \|\mathbf{b}(\tau)\|_C^2 d\tau \\ & \leq \varrho e^{3\frac{\kappa}{\varrho}t} \|\mathbf{b}(0)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \int_0^t \frac{e^{3\frac{\kappa}{\varrho}(t-\tau)}}{\kappa} \|\mathbf{f}_{\mathbf{b}}(\tau)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 d\tau \end{aligned} \quad (3.28)$$

an die Formulierung (3.26) für $\mathbf{f}_{\mathbf{b}} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^d \cap H(\operatorname{div} 0; \Omega))$ und $\mathbf{b}(0) \in L^2(\Omega)^d$.

Beweis. Für fixiertes $t \in (0, T]$ wählen wir $\mathbf{c} = \mathbf{b}$ und $s = r$. Wir erhalten

$$(\varrho \partial_t \mathbf{b}, \mathbf{b}) = \frac{\varrho}{2} \frac{d}{dt} (\mathbf{b}, \mathbf{b}) = \frac{\varrho}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)^d}^2.$$

Jetzt impliziert Lemma 3.6 zusammen mit den Ungleichungen von Cauchy-Schwarz und Young

$$\begin{aligned} & \frac{\varrho}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \gamma \|\mathbf{b}\|_C^2 - \kappa \|\mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + (\nabla r, \mathbf{b}) - (\mathbf{b}, \nabla r) \\ & \leq \|\mathbf{f}_{\mathbf{b}}\|_{L^2(\Omega)^d} \|\mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)^d} \\ & \leq \frac{1}{2\kappa} \|\mathbf{f}_{\mathbf{b}}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \frac{\kappa}{2} \|\mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)^d}^2. \end{aligned}$$

Multiplikation mit $2e^{-3\frac{\kappa}{\varrho}t}$ gibt

$$\varrho e^{-3\frac{\kappa}{\varrho}t} \frac{d}{dt} \|\mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + 2\gamma e^{-3\frac{\kappa}{\varrho}t} \|\mathbf{b}\|_C^2 - 3\kappa e^{-3\frac{\kappa}{\varrho}t} \|\mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \leq \frac{e^{-3\frac{\kappa}{\varrho}t}}{\kappa} \|\mathbf{f}_{\mathbf{b}}\|_{L^2(\Omega)^d}^2.$$

Wegen der Produktregel gilt

$$\frac{d}{dt} \left(\varrho e^{-3\frac{\kappa}{\varrho}t} \|\mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \right) = \varrho e^{-3\frac{\kappa}{\varrho}t} \frac{d}{dt} \left(\|\mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \right) - 3\kappa e^{-3\frac{\kappa}{\varrho}t} \|\mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)^d}^2$$

und somit folgt

$$\frac{d}{dt} \left(\varrho e^{-3\frac{\kappa}{\varrho}t} \|\mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \right) + 2\gamma e^{-3\frac{\kappa}{\varrho}t} \|\mathbf{b}\|_C^2 \leq \frac{e^{-3\frac{\kappa}{\varrho}t}}{\kappa} \|\mathbf{f}_{\mathbf{b}}\|_{L^2(\Omega)^d}^2.$$

Wegen der Identität

$$\int_0^t \frac{d}{ds} \left(\varrho e^{-3\frac{\kappa}{\varrho}s} \|\mathbf{b}(s)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \right) ds = \varrho e^{-3\frac{\kappa}{\varrho}t} \|\mathbf{b}(t)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 - \varrho \|\mathbf{b}(0)\|_{L^2(\Omega)^d}^2$$

für beliebiges $t \in [0, T]$ ergibt sich bei Integration über $(0, t)$ dementsprechend

$$\int_0^t \frac{d}{d\tau} \left(\varrho e^{-3\frac{\kappa}{\varrho}\tau} \|\mathbf{b}(\tau)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \right) d\tau + 2\gamma \int_0^t e^{-3\frac{\kappa}{\varrho}\tau} \|\mathbf{b}(\tau)\|_C^2 d\tau$$

$$\begin{aligned}
&= \varrho e^{-3\frac{\kappa}{\varrho}t} \|\mathbf{b}(t)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 - \varrho \|\mathbf{b}(0)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + 2\gamma \int_0^t e^{-3\frac{\kappa}{\varrho}\tau} \|\mathbf{b}(\tau)\|_C^2 d\tau \\
&\leq \int_0^t \frac{e^{-3\frac{\kappa}{\varrho}\tau}}{\kappa} \|\mathbf{f}_b(\tau)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 d\tau
\end{aligned}$$

und damit gilt

$$\varrho \|\mathbf{b}(t)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + 2\gamma \int_0^t e^{3\frac{\kappa}{\varrho}(t-\tau)} \|\mathbf{b}(\tau)\|_C^2 d\tau \leq \varrho e^{3\frac{\kappa}{\varrho}t} \|\mathbf{b}(0)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \int_0^t \frac{e^{3\frac{\kappa}{\varrho}(t-\tau)}}{\kappa} \|\mathbf{f}_b(\tau)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 d\tau,$$

was die Behauptung zeigt. \square

Bemerkung 3.8. Seien $\mathbf{V} := C \cap H(\operatorname{div} 0; \Omega)$ und $\mathbf{H} := H(\operatorname{div} 0; \Omega)$. Da

$$b(\mathbf{c}, s) = -(\nabla s, \mathbf{c}) = (s, \nabla \cdot \mathbf{c}) = 0$$

für alle $\mathbf{c} \in \mathbf{V}$, ist das Problem (3.26) äquivalent zur nachfolgenden Aufgabenstellung:

„Gesucht ist $\mathbf{b} : [0, T] \rightarrow \mathbf{V}$ derart, dass

$$(\varrho \partial_t \mathbf{b}, \mathbf{c}) + a(\mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{f}_b, \mathbf{c}) \quad \forall \mathbf{c} \in \mathbf{V} \quad (3.29)$$

fast überall in $[0, T]$ für gegebene $\mathbf{b}_0 := \mathbf{b}(0) \in \mathbf{H}$ und $\mathbf{f}_b \in L^2(0, T; \mathbf{V}' \cap H(\operatorname{div} 0; \Omega))$ gilt.“

Ferner bildet $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{H} \equiv \mathbf{H}' \subseteq \mathbf{V}'$ ein Gelfand-Tripel. Dies sehen wir folgendermaßen. $\{\mathbf{V}, \|\cdot\|_C\}$ und $\{\mathbf{H}, \|\cdot\|_{L^2(\Omega)^d}\}$ sind Hilberträume. Für jedes $\mathbf{b} \in \mathbf{V}$ gibt es eine Konstante C_F dergestalt, dass

$$\|\mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)^d} \leq C_F \|\mathbf{b}\|_C \quad (3.30)$$

gilt. Diese Aussage stammt aus [52, Korollar 3.49]. Deshalb bettet \mathbf{V} stetig in \mathbf{H} ein. Das Dichtheitsargument ist klar, da eine Teilmenge \mathcal{M} eines Banachraumes M dicht in M genau dann liegt, wenn jedes Element von M' , welches auf \mathcal{M} verschwindet, ebenfalls auf M verschwindet. Diese Aussage findet sich bei [33, (2.14)].

Wir geben nun ein allgemeines Theorem von J. - L. Lions (1961) über die Existenz und Eindeutigkeit von Evolutionsproblemen an. Für einen Beweis mittels Galerkin-Approximation verweisen wir auf [66, Theorem 23.A].

Theorem 3.9. Sei $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{H} \subseteq \mathcal{V}'$ ein Gelfand-Tripel. Falls die Bilinearform $a : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist und die Garding-Ungleichung erfüllt, so hat folgendes Problem eine eindeutige Lösung:

Finde $\mathbf{u} \in \mathcal{W}(0, T; \mathcal{V}) := \{\mathbf{u} \in L^2(0, T; \mathcal{V}) : \exists \mathbf{u}' \in L^2(0, T; \mathcal{V}')\}$ derart, dass

$$(\mathbf{u}'(t), \mathbf{v})_{\mathcal{H}} + a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_{\mathcal{H}} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad (3.31)$$

fast überall in $t \in [0, T]$ für gegebene $\mathbf{u}_0 := \mathbf{u}(0) \in \mathcal{H}$ und $\mathbf{f} \in L^2(0, T; \mathcal{V}')$. Es bezeichnet \mathbf{u}' die zeitliche Ableitung.

Es sei zu diesem Theorem noch Folgendes bemerkt.

Bemerkung 3.10. Eigentlich setzt [66, Theorem 23.A] eine Positivitätsbedingung an den betrachteten Operator voraus. In [66, Bemerkung 23.25] wird allerdings bewiesen, dass die Garding-Ungleichung als abgeschwächte Voraussetzung genügt, da sich das ursprüngliche Problem mittels einer Exponentialtransformation in der Zeit in einen positiven Operator überführen lässt. Die benötigte Exponentialfunktion in der Zeit, mit welcher das zeitabhängige, erweiterte Induktionsproblem transformiert werden muss, lautet $2e^{-3\frac{\kappa}{e}t}$ aus Theorem 3.7.

Korollar 3.11. *Die Formulierung (3.29) besitzt eine eindeutige Lösung $\mathbf{b} \in \mathcal{W}(0, T; \mathbf{V})$.*

Beweis. Wir betrachten das Gelfand-Tripel $\mathbf{V} \subset \mathbf{H} \subset \mathbf{V}'$. Nach Lemma 3.6 erfüllt die Bilinearform $a : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ die Garding-Ungleichung und ist gleichmäßig stetig auf C , also gleichfalls auf dem Unterraum \mathbf{V} von C . Nutzen wir jetzt Theorem 3.9, können wir schlussfolgern, dass (3.29) eine eindeutige Lösung $\mathbf{b} \in \mathcal{W}(0, T; \mathbf{V})$ besitzt. \square

Wir sind in der Lage, hier nachzuweisen, dass die variationelle Formulierung (3.25) eindeutig lösbar ist. Unser Beweis modifiziert [38, Theorem 2.2.11], welches das zeitabhängige Stokes-Problem behandelt.

Theorem 3.12. *Für $\mathbf{f}_{\mathbf{b}} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^d \cap H(\operatorname{div} 0; \Omega))$ und $\mathbf{b}_0 = \mathbf{b}(0) \in H(\operatorname{div} 0; \Omega)$ besitzt (3.25) eine eindeutige Lösung $(\mathbf{b}, r) \in \mathcal{W}(0, T; C) \times L^2(0, T; S)$.*

Beweis. 1) Zuerst zeigen wir unter der Annahme der Existenz einer Lösung, dass diese eindeutig ist. Sei also $(\mathbf{b}, r) \in \mathcal{W}(0, T; C) \times L^2(0, T; S)$ eine Lösung. Aus $b(\mathbf{b}, s) = 0$ erhalten wir $\nabla \cdot \mathbf{b} = 0$ in $L^2(\Omega)$. Dieses Resultat und die Annahme $\mathbf{b} \in L^2(0, T; C)$ liefern $\mathbf{b} \in L^2(0, T; \mathbf{V})$. Wir bemerken, dass $C' \subset \mathbf{V}'$ gilt. Aus $\mathbf{b}' \in L^2(0, T; C')$ folgt $\mathbf{b}' \in L^2(0, T; \mathbf{V}')$. Deshalb erhalten wir $\mathbf{b} \in \mathcal{W}(0, T; \mathbf{V})$.

Da für beliebiges $\mathbf{c} \in \mathbf{V}$ auch $b(\mathbf{c}, r) = 0$ gilt, folgt, dass

$$(\varrho \partial_t \mathbf{b}, \mathbf{c}) + a(\mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{f}_{\mathbf{b}}, \mathbf{c}) \quad \forall \mathbf{c} \in \mathbf{V} \quad (3.32)$$

ist. Wir sehen ein, dass \mathbf{b} eine Lösung von (3.29) ist. Schließlich sichert Korollar 3.11 die Eindeutigkeit.

2) Jetzt untersuchen wir die Existenz einer Lösung $\mathbf{b} \in \mathcal{W}(0, T; C)$. Sei \mathbf{b} eine eindeutige Lösung von (3.29), welche durch Korollar 3.11 existiert. Wegen der Divergenzfreiheit von \mathbf{b} gilt die Divergenznebenbedingung in angegebener Form nach partieller Integration. Ferner haben wir $\mathbf{b}' \in L^2(0, T; \mathbf{V}')$. Unter Ausnutzung der Annahme, dass der Kraftterm die Bedingung $\mathbf{f}_{\mathbf{b}} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^d \cap H(\operatorname{div} 0; \Omega))$ erfüllt, folgt mit der Stetigkeit der Bilinearform $a : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ nach Lemma 3.6 die Möglichkeit, dass wir die Gleichung aus (3.32) durch

$$\|\varrho \partial_t \mathbf{b}\|_{C'} = \sup_{\mathbf{c} \in C \setminus \{0\}} \frac{(\mathbf{f}_{\mathbf{b}}, \mathbf{c}) - a(\mathbf{b}, \mathbf{c})}{\|\mathbf{c}\|_C}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sup_{\mathbf{c} \in C \setminus \{\mathbf{0}\}} \frac{\|\mathbf{f}_{\mathbf{b}}\|_{C'} \|\mathbf{c}\|_C + M \|\mathbf{b}\|_C \|\mathbf{c}\|_C}{\|\mathbf{c}\|_C} \\
&= \sup_{\mathbf{c} \in C \setminus \{\mathbf{0}\}} \|\mathbf{f}_{\mathbf{b}}\|_{C'} + M \|\mathbf{b}\|_C < \infty
\end{aligned}$$

abschätzen können. Daher gilt $\mathbf{b}' \in L^2(0, T; C')$. Darum sehen wir ein, dass eine Lösung $\mathbf{b} \in \mathcal{W}(0, T; C)$ existiert.

3) Ferner wollen wir zeigen, dass die Bilinearform $b: C \times S \rightarrow \mathbb{R}$ die inf-sup-Bedingung erfüllt. Wir wissen, dass $\nabla r \in C$ gilt. Daher existiert für jedes $r \in S$ dementsprechend genau ein Magnetfeld $\mathbf{c}_r = -\nabla r \in C$ mit $\|\mathbf{c}_r\|_C = 1$ derart, dass

$$b(\mathbf{c}_r, r) = b(-\nabla r, r) = (\nabla r, \nabla r) \geq \beta_r \|r\|_S^2$$

mit einer Konstanten $\beta_r > 0$ erfüllt wird, sodass wir r mittels des Gradienten durch die Poincare-Ungleichung kontrollieren. Dies sichert insbesondere die Existenz von $\beta_r > 0$ mit

$$\inf_{s \in S \setminus \{0\}} \sup_{\mathbf{c} \in C \setminus \{\mathbf{0}\}} \frac{b(\mathbf{c}, s)}{\|\mathbf{c}\|_C \|s\|_S} \geq \beta_r > 0. \quad (3.33)$$

Aus der Theorie der gemischten Problem wissen wir, dass die inf-sup-Bedingung (3.33) die Wohlgestelltheit des stationären Problems sichert. Da die inf-sup-Bedingung erfüllt ist, können wir folgern, dass dementsprechend das zeitabhängige Problem eine eindeutige Lösung $(\mathbf{b}, r) \in \mathcal{W}(0, T; C) \times L^2(0, T; S)$ besitzt. \square

4 Stabilisierte diskrete magnetische Induktionsprobleme

In diesem Abschnitt widmen wir uns der Diskretisierung der kontinuierlichen magnetischen Induktionsprobleme der Maxwell-Gleichungen aus dem vorherigen Kapitel 3. Üblicherweise wird das entstehende gemischte Problem beispielsweise mittels rotationskonformer Elemente [43], Randelementemethoden [54] oder unstetiger Elemente [44] gelöst. Dies liegt insbesondere an der Eigenschaft, dass die angeführten Vorgehen die diskrete Variante der kontinuierlichen inf-sup-Bedingung erfüllen.

Die Arbeiten [19] und [20] führten zu einer verstärkten Rehabilitation der knotenbasierten Lagrangeschen Finiten Elemente für das magnetische Induktionsproblem. Die wesentliche Idee der Artikel besteht in der Einführung eines gewichteten Stabilisierungstermes bezüglich der nichtkonvexen Ecken des Rechengebietes. Hier besteht die Schwierigkeit, dass bereits vor Start einer Rechnung jeweilige Singularitäten identifiziert werden und die Gewichtungsfunktionen für die Stabilisierungen definiert werden müssen, was eine einfache Berechnung verkompliziert.

Aus diesem Grund folgen wir hier dem Ansatz der Arbeit [6], bei der einerseits die Einführung eines Lagrange-Parameters und andererseits die Divergenznenbedingung des kontinuierlichen magnetisches Induktionsproblems zur Stabilisierung verwendet werden. Es wird zuerst das stabilisierte diskrete Problem vorgestellt, dessen Wohlgestelltheit anschließend bewiesen wird. Danach wird für glatte Lösungen eine Konvergenzanalyse durchgeführt. Abschließend werden in der Konvergenzanalyse noch Voraussetzungen angegeben, unter denen sogar für nichtglatte Lösungen des Magnetfeldes $\mathbf{b} \in H^r(\Omega)^d \cap C$ mit $\frac{1}{2} < r < 1$ Aussagen getroffen werden können.

4.1 Stabilisiertes magnetisches Induktionsproblem

Wir betrachten in diesem Abschnitt die stabilisierte Diskretisierung des kontinuierlichen Problems aus Abschnitt 3.2. Dabei wird zunächst die diskrete stabilisierte Problemformulierung eingeführt, um anschließend deren Wohlgestelltheit nachzuweisen. Aufbauend folgt eine Fehleranalyse für glatte und nichtglatte Lösungen des Problems.

4.1.1 Finite-Elemente-Räume

Wir verwenden den Raum \mathbb{P}_r der simplizialen Elemente der polynomialen Ordnung $r \in \mathbb{N}$ oder den Raum \mathbb{Q}_r der Quader-Elemente oder Hexaeder-Elemente der polynomialen Ordnung $r \in \mathbb{N}$ nach Abschnitt 2.2 der Grundlagen. Insbesondere werden wir für das Funktionenraumpaar $C_h \times S_h$ entweder Equal-Order-Räume der Gestalt $\mathbb{P}_r \times \mathbb{P}_r$ oder $\mathbb{Q}_r \times \mathbb{Q}_r$ mit $r \in \mathbb{N}$ oder Taylor-Hood-Räume der Form $\mathbb{P}_{r+1} \times \mathbb{P}_r$ oder $\mathbb{Q}_{r+1} \times \mathbb{Q}_r$ benutzen.

4.1.2 Problemformulierung

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ mit $d \in \{2, 3\}$ ein im Allgemeinen nichtkonvexes, polyedrisches Gebiet. Seien die Funktionenräume $C := H_0(\text{rot}; \Omega)$ und $S := H_0^1(\Omega)$ wie in (3.14) und (3.10) aus dem vorangegangenen Kapitel 3. Wir betrachten konforme Methoden, d.h. $C_h \times S_h \subset C \times S$. Sei \mathcal{T}_h eine zulässige und für die Analysis quasiuniforme Zerlegung von Ω in Elemente $K \in \mathcal{T}_h$. Wir untersuchen erneut die unstabilisierte kontinuierliche Formulierung (3.16) mit der zugehörigen kontinuierlichen Gesamtnorm aus (3.20), sodass die kontinuierliche Bedingung (3.21) erfüllt ist. Ferner verwenden wir die dortigen Notationen. Die Problemstellung lautet somit bei Ergänzung der Stabilisierungen:

„Finde $(\mathbf{b}_h, r_h) \in C_h \times S_h$ derart, dass

$$\lambda(\nabla \times \mathbf{b}_h, \nabla \times \mathbf{c}_h) - (\nabla r_h, \mathbf{c}_h) + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{div}} (\nabla \cdot \mathbf{b}_h, \nabla \cdot \mathbf{c}_h)_K = (\mathbf{f}_b, \mathbf{c}_h) \quad \forall \mathbf{c}_h \in C_h, \quad (4.1a)$$

$$- (\nabla s_h, \mathbf{b}_h) + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{grad}} (\nabla r_h, \nabla s_h)_K = 0 \quad \forall s_h \in S_h \quad (4.1b)$$

gilt, wobei angenommen wird, dass $\mathbf{f}_b \in H(\text{div } 0; \Omega)$ erfüllt ist.“

Hierbei stellen τ_{div} und τ_{grad} nichtnegative Stabilisierungsparameter dar, deren Skalierungsverhalten im Vergleich zum Artikel [6] nach bestem Kenntnisstand des Autors erstmalig aus der Stabilitätsanalyse gewonnen wird. Diese Stabilisierungsparameter sind von problemabhängigen Größen wie der magnetischen Diffusivität λ , der Längenskala L_0 und der Gitterweite h_K abhängig. Wir erinnern daran, dass der magnetische Pseudodruck r im Kontinuierlichen nach Bemerkung 3.3 verschwindet.

4.1.3 Wohlgestelltheit

Um die Wohlgestelltheit der Problemformulierung (4.1) zu beweisen, definieren wir die gitterabhängige Norm

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{c}_h, r_h)\|_{\text{h,Ind}} &:= \sqrt{\lambda} \|\nabla \times \mathbf{c}_h\|_{L^2(\Omega)^d} + \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{div}} \|\nabla \cdot \mathbf{c}_h\|_{L^2(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{grad}} \|\nabla r_h\|_{L^2(K)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4.2)$$

und die stabilisierte Bilinearform

$$\begin{aligned} c_s((\mathbf{b}_h, r_h), (\mathbf{c}_h, s_h)) &:= \lambda(\nabla \times \mathbf{b}_h, \nabla \times \mathbf{c}_h) + (\nabla r_h, \mathbf{c}_h) - (\nabla s_h, \mathbf{b}_h) \\ &\quad + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{div}} (\nabla \cdot \mathbf{b}_h, \nabla \cdot \mathbf{c}_h)_K + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{grad}} (\nabla r_h, \nabla s_h)_K. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Im Gegensatz zur Gesamtnorm (3.20) haben wir in der Norm (4.2) nur Kontrolle über die Rotation des Magnetfeldes. Allerdings gewinnen wir durch die Stabilisierungen Kontrolle

über die Divergenz des Magnetfeldes und den Gradienten des magnetischen Pseudodrucks, sodass sich volle Kontrolle über Letzteren mittels der Idee eines Argumentes nach der Ungleichung von Poincaré gewinnen lässt. Dass wir ferner auch Kontrolle über das Magnetfeld erhalten, wollen wir im Folgenden zeigen. Wir benötigen dazu folgendes Hilfsresultat.

Lemma 4.1. *Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2). \quad (4.4)$$

Beweis. Dies ist eine einfache Folgerung aus der Youngschen Ungleichung. \square

Damit erhalten wir eine Koerzitivitätsaussage für (4.3) bezüglich (4.2).

Lemma 4.2. *Die Bilinearform $c_s : (C_h \times S_h) \times (C_h \times S_h) \rightarrow \mathbb{R}$ aus (4.3) ist bezüglich der gitterabhängigen Norm (4.2) koerziv. Genauer gilt*

$$\frac{1}{3} \|(\mathbf{b}_h, r_h)\|_{\mathbf{h}, \text{Ind}}^2 \leq c_s((\mathbf{b}_h, r_h), (\mathbf{b}_h, r_h)) \quad (4.5)$$

für alle $(\mathbf{b}_h, r_h) \in C_h \times S_h$.

Beweis. Es gilt mit der Ungleichung (4.4) aus Lemma 4.1

$$\begin{aligned} c_s((\mathbf{b}_h, r_h), (\mathbf{b}_h, r_h)) &= \lambda \|\nabla \times \mathbf{b}_h\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{div}} \|\nabla \cdot \mathbf{b}_h\|_{L^2(K)}^2 \\ &\quad + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{grad}} \|\nabla r_h\|_{L^2(K)^d}^2 \\ &\geq \frac{1}{3} \left\{ \sqrt{\lambda} \|\nabla \times \mathbf{b}_h\|_{L^2(\Omega)^d} + \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{div}} \|\nabla \cdot \mathbf{b}_h\|_{L^2(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \left. + \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{grad}} \|\nabla r_h\|_{L^2(K)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\}^2 \\ &= \frac{1}{3} \|(\mathbf{c}_h, r_h)\|_{\mathbf{h}, \text{Ind}}^2 \end{aligned}$$

für alle $(\mathbf{b}_h, r_h) \in C_h \times S_h$. \square

Aus Lemma 4.2 lässt sich mit folgender Hilfsaussage auch die Koerzitivität bezüglich der stetigen Norm auf $C \times S$ beweisen.

Lemma 4.3. *Sei $\mathbf{f}_b \in C'$. Eine beliebige Lösung $(\mathbf{b}_h, r_h) \in C_h \times S_h$ des diskreten Problems*

$$c_s((\mathbf{b}_h, r_h), (\mathbf{c}_h, s_h)) = \langle \mathbf{f}_b, \mathbf{c}_h \rangle \quad (4.6)$$

für alle $(\mathbf{c}_h, s_h) \in C_h \times S_h$ erfüllt die Ungleichung

$$\|(\mathbf{b}_h, r_h)\|_{\text{Gal, Maxw}} := \|\mathbf{b}_h\|_C + \|r_h\|_S \leq D_1 \|(\mathbf{b}_h, r_h)\|_{\text{h,Ind}} \quad (4.7)$$

mit der Konstanten

$$D_1 := \frac{1}{\beta_{\text{Ind}}} \left\{ 1 + \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{L_0}{\sqrt{\lambda \tau_{\text{grad}}}} \right) + C_1 \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{h_K \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\tau_{\text{div}} L_0}} \right) + C_2 \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{\sqrt{\tau_{\text{grad}} \lambda}}{L_0} \right) \right\} \quad (4.8)$$

und der Konstanten β_{Ind} aus der kontinuierlichen inf-sup-Bedingung und mit einer weiteren Konstanten

$$D_2 := \left(6 \left\{ 1 + \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{\tau_{\text{div}} L_0^2}{h_K^2 \lambda} \right) + \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{\tau_{\text{grad}} \lambda}{L_0^2} \right) \right\} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.9)$$

gilt

$$\|(\mathbf{b}_h, r_h)\|_{\text{h,Ind}} \leq D_2 \{ \|\mathbf{b}_h\|_C + \|r_h\|_S \} =: D_2 \|(\mathbf{b}_h, r_h)\|_{\text{Gal, Maxw}} \quad (4.10)$$

ebenfalls für alle $(\mathbf{c}_h, s_h) \in C_h \times S_h$.

Beweis. Aus der kontinuierlichen Bedingung (3.21) folgt wegen $C_h \times S_h \subset C \times S$ und somit der Konformität der Methode, dass ein $(\bar{\mathbf{c}}, \bar{s}) \in C \times S$ mit $\|\bar{\mathbf{c}}\|_C + \|\bar{s}\|_S = 1$ existiert und somit auch eine Konstante $\beta_{\text{Ind}} > 0$, sodass

$$\begin{aligned} c((\mathbf{b}_h, r_h), (\bar{\mathbf{c}}, \bar{s})) &:= \lambda (\nabla \times \mathbf{b}_h, \nabla \times \bar{\mathbf{c}}) + (\nabla r_h, \bar{\mathbf{c}}) - (\nabla \bar{s}, \mathbf{b}_h) \\ &\geq \beta_{\text{Ind}} \{ \|\mathbf{b}_h\|_C + \|r_h\|_S \} \end{aligned}$$

gilt. Desweiteren haben wir somit

$$\begin{aligned} \beta_{\text{Ind}} \{ \|\mathbf{b}_h\|_C + \|r_h\|_S \} &\leq c((\mathbf{b}_h, r_h), (\bar{\mathbf{c}}, \bar{s})) \\ &= \lambda (\nabla \times \mathbf{b}_h, \nabla \times \bar{\mathbf{c}}) + (\nabla r_h, \bar{\mathbf{c}}) - (\nabla \bar{s}, \mathbf{b}_h) \\ &\leq \sqrt{\lambda} \|\nabla \times \mathbf{b}_h\|_{L^2(\Omega)^d} \sqrt{\lambda} \|\nabla \times \bar{\mathbf{c}}\|_{L^2(\Omega)^d} + |(\nabla \bar{s}, \mathbf{b}_h)| \\ &\quad + \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{grad}} \|\nabla r_h\|_{L^2(K)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{L_0}{\sqrt{\lambda \tau_{\text{grad}}}} \right) \frac{\sqrt{\lambda}}{L_0} \|\bar{\mathbf{c}}\|_{L^2(\Omega)^d} \\ &\leq \left(1 + \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{L_0}{\sqrt{\lambda \tau_{\text{grad}}}} \right) \right) \|(\mathbf{b}_h, r_h)\|_{\text{h,Ind}} + |(\nabla \bar{s}, \mathbf{b}_h)|. \end{aligned}$$

Wir verwenden den Scott-Zhang-Operator $\mathcal{SZ}(\cdot)$, wie 1990 in [58] oder in Unterabschnitt 2.2.2 eingeführt. Mit den Eigenschaften des Scott-Zhang-Operators und der inversen Ungleichung auf einer zulässigen und quasiuniformen Zerlegung des Gebietes Ω nach Unterabschnitt 2.2.1 gilt wegen der Divergenznebenbedingung aus (4.1b) und partieller Integration

$$|(\nabla \bar{s}, \mathbf{b}_h)| \leq |(\nabla \bar{s} - \nabla \mathcal{SZ}(\bar{s}), \mathbf{b}_h)| + |(\nabla \mathcal{SZ}(\bar{s}), \mathbf{b}_h)|$$

$$\begin{aligned}
&= |(\bar{s} - \mathcal{S}\mathcal{Z}(\bar{s}), \nabla \cdot \mathbf{b}_h)| + \left| \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{grad}} (\nabla r_h, \nabla \mathcal{S}\mathcal{Z}(\bar{s}))_K \right| \\
&\leq C_1 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K \|\nabla \bar{s}\|_{L^2(K)^d} \frac{\sqrt{\tau_{\text{div}}}}{\sqrt{\tau_{\text{div}}}} \|\nabla \cdot \mathbf{b}_h\|_{L^2(K)} \\
&\quad + \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{grad}} \|\nabla r_h\|_{L^2(K)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{grad}} \frac{\lambda L_0^2}{L_0^2 \lambda} \|\nabla \mathcal{S}\mathcal{Z}(\bar{s})\|_{L^2(K)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C_1 \frac{L_0}{\sqrt{\lambda}} \|\nabla \bar{s}\|_{L^2(\Omega)^d} \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{h_K \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\tau_{\text{div}} L_0}} \right) \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{div}} \|\nabla \cdot \mathbf{b}_h\|_{L^2(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \frac{L_0}{\sqrt{\lambda}} \|\nabla \mathcal{S}\mathcal{Z}(\bar{s})\|_{L^2(\Omega)^d} \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{\sqrt{\tau_{\text{grad}} \lambda}}{L_0} \right) \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{grad}} \|\nabla r_h\|_{L^2(K)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C_1 \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{h_K \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\tau_{\text{div}} L_0}} \right) \|(\mathbf{b}_h, r_h)\|_{\text{h,Ind}} \\
&\quad + C_2 \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{\sqrt{\tau_{\text{grad}} \lambda}}{L_0} \right) \|(\mathbf{b}_h, r_h)\|_{\text{h,Ind}}
\end{aligned}$$

und dies führt insgesamt zu

$$\begin{aligned}
\beta_{\text{Ind}} \{ \|\mathbf{b}_h\|_C + \|r_h\|_S \} &\leq c((\mathbf{b}_h, r_h), (\bar{\mathbf{c}}, \bar{s})) \\
&\leq \left(1 + \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{L_0}{\sqrt{\lambda \tau_{\text{grad}}}} \right) \right) \|(\mathbf{b}_h, r_h)\|_{\text{h,Ind}} + |(\nabla \bar{s}, \mathbf{b}_h)| \\
&\leq \left(1 + \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{L_0}{\sqrt{\lambda \tau_{\text{grad}}}} \right) \right) \|(\mathbf{b}_h, r_h)\|_{\text{h,Ind}} \\
&\quad + C_1 \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{h_K \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\tau_{\text{div}} L_0}} \right) \|(\mathbf{b}_h, r_h)\|_{\text{h,Ind}} \\
&\quad + C_2 \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{\sqrt{\tau_{\text{grad}} \lambda}}{L_0} \right) \|(\mathbf{b}_h, r_h)\|_{\text{h,Ind}},
\end{aligned}$$

wobei wir mit der Setzung

$$\begin{aligned}
\tilde{D}_1 &:= 1 + \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{L_0}{\sqrt{\lambda \tau_{\text{grad}}}} \right) + C_1 \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{h_K \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\tau_{\text{div}} L_0}} \right) \\
&\quad + C_2 \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{\sqrt{\tau_{\text{grad}} \lambda}}{L_0} \right)
\end{aligned}$$

also

$$\beta_{\text{Ind}} \{ \|\mathbf{b}_h\|_C + \|r_h\|_S \} \leq \tilde{D}_1 \|(\mathbf{b}_h, r_h)\|_{\text{h,Ind}} \quad (4.11)$$

erhalten. Die Setzung $D_1 := \frac{\tilde{D}_1}{\beta_{\text{Ind}}}$ liefert aus (4.11) dementsprechend (4.7).

Ferner folgt mit der inversen Ungleichung für eine zulässige und quasiuniforme Zerlegung des Gebietes Ω nach Unterabschnitt 2.2.1 und Lemma 4.1, dass wir

$$\begin{aligned}
\|(\mathbf{c}_h, s_h)\|_{\mathbf{h}, \text{Ind}}^2 &\leq 3\lambda \|\nabla \times \mathbf{c}_h\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + 3 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{div}} \|\nabla \cdot \mathbf{c}_h\|_{L^2(K)}^2 \\
&\quad + 3 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{grad}} \|\nabla s_h\|_{L^2(K)^d}^2 \\
&\leq 3\lambda \|\nabla \times \mathbf{c}_h\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + 3 \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{\tau_{\text{div}} L_0^2}{h_K^2 \lambda} \right) \frac{\lambda}{L_0^2} \|\mathbf{c}_h\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \\
&\quad + 3 \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{\tau_{\text{grad}} \lambda}{L_0^2} \right) \frac{L_0^2}{\lambda} \|\nabla s_h\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \\
&\leq 6 \left\{ 1 + \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{\tau_{\text{div}} L_0^2}{h_K^2 \lambda} \right) + \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{\tau_{\text{grad}} \lambda}{L_0^2} \right) \right\} \{ \|\mathbf{c}_h\|_C + \|s_h\|_S \}^2
\end{aligned}$$

für alle $(\mathbf{c}_h, s_h) \in C_h \times S_h$ bekommen. Die Setzung

$$D_2 := \left(6 \left\{ 1 + \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{\tau_{\text{div}} L_0^2}{h_K^2 \lambda} \right) + \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{\tau_{\text{grad}} \lambda}{L_0^2} \right) \right\} \right)^{\frac{1}{2}}$$

liefert somit (4.10). □

Wir halten somit Folgendes für die Parameterwahl aus dem Beweis des Lemma 4.3 fest.

Bemerkung 4.4. Aus den somit erhaltenen Konstanten D_1 und D_2 mit der Forderung, dass $D_1, D_2 = \mathcal{O}(1)$ gilt und somit die Konstanten D_1 und D_2 unabhängig von λ , h_K und L_0 sein sollen, sehen wir daher, dass es nichtnegative reelle Zahlen $e_1, E_1, f_1, F_1 \in \mathbb{R}$ mit $e_1 \leq E_1$ und $f_1 \leq F_1$ gibt, sodass wir

$$e_1 \frac{\lambda h_K^2}{L_0^2} \leq \tau_{\text{div}} \leq E_1 \frac{\lambda h_K^2}{L_0^2}$$

und

$$f_1 \frac{L_0^2}{\lambda} \leq \tau_{\text{grad}} \leq F_1 \frac{L_0^2}{\lambda}$$

erhalten. Somit halten wir das Skalierungsverhalten

$$\tau_{\text{div}} \sim \frac{\lambda h_K^2}{L_0^2} \quad \text{und} \quad \tau_{\text{grad}} \sim \frac{L_0^2}{\lambda} \tag{4.12}$$

für die Stabilisierungsparameter τ_{div} und τ_{grad} fest.

Wir beweisen die Stetigkeit der stabilisierten Bilinearform $c_s : (C_h \times S_h) \times (C_h \times S_h) \rightarrow \mathbb{R}$ aus (4.3) bezüglich der kontinuierlichen Norm.

Lemma 4.5. *Die stabilisierte Bilinearform $c_s : C_h \times S_h \times C_h \times S_h \rightarrow \mathbb{R}$ aus (4.3) ist bezüglich der kontinuierlichen Norm $\|\mathbf{c}_h\|_C + \|s_h\|_S$ stetig.*

Beweis. Für beliebige $(\mathbf{b}_h, r_h), (\mathbf{c}_h, s_h) \in C_h \times S_h$ gilt nach Lemma 4.3, dass sich

$$\begin{aligned}
& |c_s((\mathbf{b}_h, r_h), (\mathbf{c}_h, s_h))| \\
& \leq |\lambda(\nabla \times \mathbf{b}_h, \nabla \times \mathbf{c}_h)| + |(\nabla r_h, \mathbf{c}_h)| + |(\nabla s_h, \mathbf{b}_h)| \\
& \quad + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{div}} |(\nabla \cdot \mathbf{b}_h, \nabla \cdot \mathbf{c}_h)| + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{grad}} |(\nabla r_h, \nabla s_h)| \\
& \leq \|\mathbf{b}_h\|_C \|\mathbf{c}_h\|_C + \frac{L_0}{\sqrt{\lambda}} \|\nabla r_h\|_{L^2(\Omega)^d} \frac{\sqrt{\lambda}}{L_0} \|\mathbf{c}_h\|_{L^2(\Omega)^d} + \frac{L_0}{\sqrt{\lambda}} \|\nabla s_h\|_{L^2(\Omega)^d} \frac{\sqrt{\lambda}}{L_0} \|\mathbf{b}_h\|_{L^2(\Omega)^d} \\
& \quad + 2\|(\mathbf{b}_h, r_h)\|_{\text{h,Ind}} \|(\mathbf{c}_h, s_h)\|_{\text{h,Ind}} \\
& \leq \left\{3 + 2D_2^2\right\} \{\|\mathbf{b}_h\|_C + \|r_h\|_S\} \{\|\mathbf{c}_h\|_C + \|s_h\|_S\}
\end{aligned}$$

ergibt. □

Somit lässt sich jetzt die Wohlgestellttheit der Formulierung (4.1) beweisen.

Theorem 4.6. *Die Problemformulierung (4.1) ist wohlgestellt.*

Beweis. Nach den Lemmata 4.3 und 4.5 gilt

$$\begin{aligned}
(\|\mathbf{b}_h\|_C + \|r_h\|_S)^2 & \leq D_1^2 \|(\mathbf{b}_h, r_h)\|_{\text{h,Ind}}^2 \\
& = D_1^2 c_s((\mathbf{b}_h, r_h), (\mathbf{b}_h, r_h))
\end{aligned}$$

und somit liegt Koerzivität vor, womit (4.1) in kompakter Darstellung ein lineares System mit positiv definiten Matrix darstellt, was die eindeutige Existenz einer Lösung beweist.

Andererseits folgt mittels der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und der Young-Ungleichung

$$\begin{aligned}
(\|\mathbf{b}_h\|_C + \|r_h\|_S)^2 & \leq D_1^2 c_s((\mathbf{b}_h, r_h), (\mathbf{b}_h, r_h)) \\
& = D_1^2 \langle \mathbf{f}_b, \mathbf{b}_h \rangle \\
& \leq D_1^2 \|\mathbf{f}_b\|_{C'} \|\mathbf{b}_h\|_C \\
& \leq \frac{D_1^4}{2} \|\mathbf{f}_b\|_{C'}^2 + \frac{1}{2} (\|\mathbf{b}_h\|_C + \|r_h\|_S)^2,
\end{aligned}$$

womit sich

$$(\|\mathbf{b}_h\|_C + \|r_h\|_S)^2 \leq D_1^4 \|\mathbf{f}_b\|_{C'}^2$$

ergibt und somit die Wohlgestellttheit des Problems nachweist. □

4.1.4 Konvergenzanalyse für glatte Lösungen

Dieser Unterabschnitt dient dazu, eine Fehleranalyse für glatte Lösungen des stationären magnetischen Induktionsproblems herzuleiten. Wir erinnern daran, dass dieses Problem im Kontinuierlichen durch (3.16) gegeben wird, während die stabilisierte diskrete Formulierung (4.1) herangezogen wird. Die Gesamtbilinearform des kontinuierlichen und des stabilisierten diskreten Problems sind durch (3.17) und (4.3) gegeben.

Seien $(\mathbf{b}, r) \in C \times S$ und $(\mathbf{b}_h, r_h) \in C_h \times S_h$ die Lösungen des kontinuierlichen bzw. des stabilisierten diskreten Problems. Wegen der Konformität der Methode ist die Bilinearform

$$c_s: (C \times S) \times (C \times S) \longrightarrow \mathbb{R}$$

wohldefiniert und es gilt somit

$$\begin{aligned} & c_s((\mathbf{b} - \mathbf{b}_h, r - r_h), (\mathbf{c}_h, s_h)) \\ &= \lambda (\nabla \times (\mathbf{b} - \mathbf{b}_h), \nabla \times \mathbf{c}_h) + (\nabla (r - r_h), \mathbf{c}_h) - (\mathbf{b} - \mathbf{b}_h, \nabla s_h) \\ & \quad + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{div}} (\nabla \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{b}_h), \nabla \cdot \mathbf{c}_h)_K + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{grad}} (\nabla (r - r_h), \nabla s_h)_K \\ &= 0 \end{aligned} \tag{4.13}$$

für alle $(\mathbf{c}_h, s_h) \in C_h \times S_h$.

Seien $\mathbf{j}^{\mathbf{b}}: C \longrightarrow C_h$ und $j^r: S \longrightarrow S_h$ entsprechende Interpolationsoperatoren. Wir zerlegen die Fehler mittels

$$\mathbf{b} - \mathbf{b}_h = (\mathbf{b} - \mathbf{j}^{\mathbf{b}}\mathbf{b}) + (\mathbf{j}^{\mathbf{b}}\mathbf{b} - \mathbf{b}_h) = \varepsilon_{\mathbf{b}} + \mathbf{e}_{\mathbf{b}} \tag{4.14}$$

und

$$r - r_h = (r - j^r r) + (j^r r - r_h) = \varepsilon_r + e_r \tag{4.15}$$

in Interpolations- und Approximationsfehler. Setzen wir $\mathbf{c}_h = \mathbf{e}_{\mathbf{b}}$ und $s_h = e_r$, so folgt aus (4.13) mit der Bilinearität von c_s also

$$\begin{aligned} & c_s((\mathbf{b} - \mathbf{b}_h, r - r_h), (\mathbf{e}_{\mathbf{b}}, e_r)) \\ &= c_s((\varepsilon_{\mathbf{b}} + \mathbf{e}_{\mathbf{b}}, \varepsilon_r + e_r), (\mathbf{e}_{\mathbf{b}}, e_r)) \\ &= c_s((\mathbf{e}_{\mathbf{b}}, e_r), (\mathbf{e}_{\mathbf{b}}, e_r)) + c_s((\varepsilon_{\mathbf{b}}, \varepsilon_r), (\mathbf{e}_{\mathbf{b}}, e_r)) \\ &= c_s((\mathbf{e}_{\mathbf{b}}, e_r), (\mathbf{e}_{\mathbf{b}}, e_r)) + c((\varepsilon_{\mathbf{b}}, \varepsilon_r), (\mathbf{e}_{\mathbf{b}}, e_r)) \\ & \quad + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{div}} (\nabla \cdot \varepsilon_{\mathbf{b}}, \nabla \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{b}})_K + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{grad}} (\nabla \varepsilon_r, \nabla e_r)_K \\ &= 0 \end{aligned}$$

und wegen $\varepsilon_r = r - j^r r = 0$ ergibt sich somit

$$c_s((\mathbf{e}_{\mathbf{b}}, e_r), (\mathbf{e}_{\mathbf{b}}, e_r)) = -c((\varepsilon_{\mathbf{b}}, \varepsilon_r), (\mathbf{e}_{\mathbf{b}}, e_r)) - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{div}} (\nabla \cdot \varepsilon_{\mathbf{b}}, \nabla \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{b}})_K. \tag{4.16}$$

Wir definieren

$$I := -c((\varepsilon_{\mathbf{b}}, \varepsilon_r), (\mathbf{e}_{\mathbf{b}}, e_r))$$

und

$$II := - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{div}} (\nabla \cdot \varepsilon_{\mathbf{b}}, \nabla \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{b}})_K.$$

Eine Abschätzung von I liefert mit der gitterabhängigen Norm aus (4.2) und der bekannten Beziehung $\varepsilon_r = r - j^r r = 0$ mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folglich

$$\begin{aligned}
|I| &\leq |\lambda(\nabla \times \varepsilon_{\mathbf{b}}, \nabla \times \mathbf{e}_{\mathbf{b}})| + |(\nabla \varepsilon_r, \mathbf{e}_{\mathbf{b}})| + |(\nabla e_r, \varepsilon_{\mathbf{b}})| \\
&\leq \left(\sqrt{\lambda} \|\nabla \times \varepsilon_{\mathbf{b}}\|_{L^2(\Omega)^d} \right) \left(\sqrt{\lambda} \|\nabla \times \mathbf{e}_{\mathbf{b}}\|_{L^2(\Omega)^d} \right) \\
&\quad + \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{\tau_{\text{grad}}} \|\varepsilon_{\mathbf{b}}\|_{L^2(K)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{grad}} \|\nabla e_r\|_{L^2(K)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left\{ \sqrt{\lambda} \|\nabla \times \varepsilon_{\mathbf{b}}\|_{L^2(\Omega)^d} + \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{\tau_{\text{grad}}} \|\varepsilon_{\mathbf{b}}\|_{L^2(K)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \|(\mathbf{e}_{\mathbf{b}}, e_r)\|_{\text{h,Ind}}.
\end{aligned}$$

Für II bekommen wir ebenfalls mit der Norm aus (4.2)

$$|II| \leq \|(\varepsilon_{\mathbf{b}}, \varepsilon_r)\|_{\text{h,Ind}} \|(\mathbf{e}_{\mathbf{b}}, e_r)\|_{\text{h,Ind}}.$$

Dies bedeutet, dass wir zusammenfassend in (4.16)

$$\begin{aligned}
&|c_s((\mathbf{e}_{\mathbf{b}}, e_r), (\mathbf{e}_{\mathbf{b}}, e_r))| \\
&= \lambda \|\nabla \times \mathbf{e}_{\mathbf{b}}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{div}} \|\nabla \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{b}}\|_{L^2(K)}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{grad}} \|\nabla e_r\|_{L^2(K)^d}^2 \\
&\leq |I| + |II| \\
&\leq \left\{ \sqrt{\lambda} \|\nabla \times \varepsilon_{\mathbf{b}}\|_{L^2(\Omega)^d} + \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{\tau_{\text{grad}}} \|\varepsilon_{\mathbf{b}}\|_{L^2(K)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \|(\varepsilon_{\mathbf{b}}, \varepsilon_r)\|_{\text{h,Ind}} \right\} \\
&\quad \times \|(\mathbf{e}_{\mathbf{b}}, e_r)\|_{\text{h,Ind}}
\end{aligned} \tag{4.17}$$

erhalten. Mit der Youngschen Ungleichung und $\varepsilon_r = r - j^r r = 0$ sehen wir, dass

$$\begin{aligned}
&|c_s((\mathbf{e}_{\mathbf{b}}, e_r), (\mathbf{e}_{\mathbf{b}}, e_r))| \\
&= \lambda \|\nabla \times \mathbf{e}_{\mathbf{b}}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{div}} \|\nabla \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{b}}\|_{L^2(K)}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{grad}} \|\nabla e_r\|_{L^2(K)^d}^2 \\
&\leq \frac{1}{3 \cdot 2} \|(\mathbf{e}_{\mathbf{b}}, e_r)\|_{\text{h,Ind}}^2 \\
&\quad + \frac{3}{2} \left\{ \lambda \|\nabla \times \varepsilon_{\mathbf{b}}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \|(\varepsilon_{\mathbf{b}}, \varepsilon_r)\|_{\text{h,Ind}}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{\tau_{\text{grad}}} \|\varepsilon_{\mathbf{b}}\|_{L^2(K)^d}^2 \right\}
\end{aligned}$$

gilt. Mit der Definition der gitterabhängigen Norm aus (4.2) ergibt sich dementsprechend

$$\begin{aligned}
& |c_s((\mathbf{e}_b, e_r), (\mathbf{e}_b, e_r))| \\
& \leq \frac{1}{2} \left\{ \lambda \|\nabla \times \mathbf{e}_b\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{div}} \|\nabla \cdot \mathbf{e}_b\|_{L^2(K)}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{grad}} \|\nabla e_r\|_{L^2(K)^d}^2 \right\} \\
& \quad + \frac{3}{2} \left\{ 4\lambda \|\nabla \times \varepsilon_b\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + 3 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{div}} \|\nabla \cdot \varepsilon_b\|_{L^2(K)}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{\tau_{\text{grad}}} \|\varepsilon_b\|_{L^2(K)^d}^2 \right\}
\end{aligned}$$

und hieraus

$$\begin{aligned}
& |c_s((\mathbf{e}_b, e_r), (\mathbf{e}_b, e_r))| \\
& = \lambda \|\nabla \times \mathbf{e}_b\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{div}} \|\nabla \cdot \mathbf{e}_b\|_{L^2(K)}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{grad}} \|\nabla e_r\|_{L^2(K)^d}^2 \\
& \leq 12\lambda \|\nabla \times \varepsilon_b\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + 9 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{div}} \|\nabla \cdot \varepsilon_b\|_{L^2(K)}^2 + 3 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{\tau_{\text{grad}}} \|\varepsilon_b\|_{L^2(K)^d}^2.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Wir fassen dieses Ergebnis im folgenden Theorem zusammen.

Theorem 4.7. *Seien $\mathbf{b} \in H^{l+1}(\Omega)^d \cap C$ und $r \in H^{m+1}(\Omega) \cap S$ mit $l, m \in \mathbb{N}_0$. Die Stabilisierungsparameter werden entsprechend (4.12) gewählt. Dann folgt mit Konstanten $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2 \geq 0$*

$$\begin{aligned}
& |c_s((\mathbf{e}_b, e_r), (\mathbf{e}_b, e_r))| \\
& = \lambda \|\nabla \times \mathbf{e}_b\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{div}} \|\nabla \cdot \mathbf{e}_b\|_{L^2(K)}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{grad}} \|\nabla e_r\|_{L^2(K)^d}^2 \\
& \leq \tilde{C}_1 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^{2l} \left\{ \lambda + \tau_{\text{div}} + \frac{h_K^2}{\tau_{\text{grad}}} \right\} |\mathbf{b}|_{\mathbb{H}^{l+1}(\omega_K)}^2 \\
& \leq \tilde{C}_2 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^{2l} \lambda \left\{ 1 + 2 \frac{h_K^2}{L_0^2} \right\} |\mathbf{b}|_{\mathbb{H}^{l+1}(\omega_K)}^2
\end{aligned} \tag{4.19}$$

für eine Umgebung ω_K der Nachbarzellen einer Zelle K .

Beweis. Die Interpolationseigenschaften der Finite-Elemente-Räume geben die obige Behauptung. \square

Bemerkung 4.8. Nach Lemmata 4.2, 4.3 und 4.5 gilt

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{6D_1} \left\{ \|\mathbf{e}_b\|_C^2 + \|e_r\|_S^2 \right\} \\
& \leq \frac{1}{3} \|(\mathbf{e}_b, e_r)\|_{\mathfrak{h}, \text{Ind}}^2 \\
& \leq c_s((\mathbf{e}_b, e_r), (\mathbf{e}_b, e_r)),
\end{aligned} \tag{4.20}$$

womit sogar der Fehler bezüglich der vollen Normen in den Räumen C und S nach Theorem 4.7 abgeschätzt werden kann.

4.1.5 Konvergenzanalyse für nichtglatte Lösungen

Um eine Fehleranalyse für nichtglatte Lösungen durchzuführen, wird etwas Vorarbeit benötigt. Die entsprechenden Resultate werden aus [6] entnommen und zitiert. Wir geben einige Bemerkungen an. Als Erstes nutzen wir folgendes Resultat.

Lemma 4.9. *Falls $\mathbf{b} \in C \cap H(\operatorname{div}; \Omega)$ ist, gilt $\mathbf{b} \in H^r(\Omega)^d$ für ein reelles $r > \frac{1}{2}$ und es gilt*

$$L_0^{r-1} \|\mathbf{b}\|_{H^r(\Omega)^d} \leq \tilde{C} \left\{ \|\nabla \times \mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)^d} + \|\nabla \cdot \mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)} \right\} \quad (4.21)$$

mit einer Konstanten $\tilde{C} > 0$.

Beweis. Der Beweis findet sich [1, Proposition 3.7]. □

Mithilfe eines Spursatzes für gebrochenrationale Sobolevräume nach [23, Theorem 1] erhalten wir folgendes Korollar.

Korollar 4.10. *Jedes $\mathbf{c} \in C \cap H(\operatorname{div}; \Omega)$ gehört für beliebiges $K \in \mathcal{T}_h$ zu $L^2(\partial K)$.*

Beweis. Wegen des vorherigen Lemmas 4.9 gilt $\mathbf{c} \in H^r(\Omega)^d$ für ein reelles $r > \frac{1}{2}$. Nach zitiertem Theorem [23, Theorem 1] gilt $\mathbf{c} \in H^{r-\frac{1}{2}}(\partial K)$, was die Behauptung beweist. □

Desweiteren benötigen wir das kommende Lemma aus [19].

Lemma 4.11. *Sei $\mathbf{b} \in C \cap H(\operatorname{div}; \Omega)$ die Lösung des kontinuierlichen Maxwell-Problems aus (3.16). Dann gilt eine Zerlegung in*

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_0 + \nabla \varphi \quad (4.22)$$

mit $\mathbf{b}_0 \in H^{1+r}(\Omega)^d \cap H_0(\operatorname{rot}; \Omega)$ und $\varphi \in H_0^1(\Omega) \cap H^{1+r}(\Omega)$ für ein reelles $r > \frac{1}{2}$.

Beweis. Ein Beweis findet sich in [19] oder [20, Kapitel 6]. □

Um Fehlerabschätzungen für nichtglatte Lösungen zu beweisen, wird eine Annahme an den Finite-Elemente-Raum C_h getroffen.

Annahme 4.12. Es existiere über der Gebietszerlegung \mathcal{T}_h ein Finite-Elemente-Raum G_h dergestalt, dass für jedes $\phi_h \in G_h$ dann $\nabla \phi_h \in C_h$ gilt. Ferner erfülle dieser Raum G_h die Approximationseigenschaft

$$\inf_{\phi_h \in G_h} \|\phi - \phi_h\|_{H^s(K)} \leq Ch_K^{t-s} \|\phi\|_{H^t(K)} \quad (4.23)$$

mit einer Konstanten $C > 0$ für jedes $K \in \mathcal{T}_h$ für beliebiges $\phi \in H^t(K)$ für $0 \leq s \leq t \leq k+1$ für die polynomiale Ansatzordnung $k \in \mathbb{N}$.

Bevor wir unter dieser Annahme das Hauptresultat zitieren, machen wir folgende Bemerkung.

Bemerkung 4.13. Unter der Zerlegung aus Lemma 4.11 sehen wir für den singulären Anteil φ in der Divergenzstabilisierung, dass sich unter partieller Integration

$$\begin{aligned} & \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{div}} \int_K (\nabla \cdot \nabla \varphi) (\nabla \cdot \mathbf{c}_h) \, dx \\ = & - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{div}} \int_K (\nabla \varphi) (\nabla \nabla \cdot \mathbf{c}_h) \, dx \\ & + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{div}} \int_{\partial K} (\nabla \varphi) \mathbf{n} (\nabla \cdot \mathbf{c}_h) \, dx \end{aligned}$$

ergibt, was nötig ist, um den Ausdruck $\nabla \cdot \nabla \varphi$ zu vermeiden, welcher eine zu große Regularität an den singulären Anteil des Magnetfeldes \mathbf{b} fordert.

Definiere den Fehlerausdruck

$$\mathbf{E}_h(\mathbf{b}, r) := \inf_{(\bar{\mathbf{b}}, \bar{r}) \in C_h \times S_h} \|(\mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}}, r - \bar{r})\|_{\text{Gal, Maxw}} + \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{\tau_{\text{div}}}{h_K} \|\mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}}\|_{L^2(\partial K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.24)$$

mit der Norm (3.20), der sich aus der vorherigen Bemerkung unter der Anwendung der inversen Ungleichung auf die Testfunktion ergibt.

Wir erhalten somit nachfolgendes Theorem.

Theorem 4.14. *Die diskrete Lösung $(\mathbf{b}_h, r_h) \in C_h \times S_h$ des diskreten Maxwell-Problems (4.1) erfüllt zur kontinuierlichen Lösung $(\mathbf{b}, r) \in C \times S$ des kontinuierlichen Maxwell-Problems (3.16) die Fehlerungleichung*

$$\|(\mathbf{b} - \mathbf{b}_h, r - r_h)\|_{\text{Gal, Maxw}} \leq \tilde{C} \mathbf{E}_h(\mathbf{b}, r) \quad (4.25)$$

mit einer Konstanten $\tilde{C} \geq 0$.

Beweis. Der Beweis lässt sich bei [6, Theorem 3.9] finden. \square

Hiermit lässt sich jetzt das Haupttheorem aus [6] formulieren.

Theorem 4.15. *Es gelte Annahme 4.12 und es gelte eine Zerlegung der Form $\mathbf{b} = \mathbf{b}_0 + \nabla \varphi$ wie aus Lemma 4.11. Dann erfüllt die diskrete Lösung $(\mathbf{b}_h, r_h) \in C_h \times S_h$ des diskreten Maxwell-Problems die Fehlerabschätzung*

$$\|(\mathbf{b} - \mathbf{b}_h, r - r_h)\|_{\text{Gal, Maxw}} \leq \tilde{C} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \sqrt{\lambda} h_K^t \|\mathbf{b}_0\|_{\mathbf{H}^{1+t}(\Omega)^d} + \frac{\sqrt{\lambda}}{L_0^{1-\varepsilon}} h_K^{t-\varepsilon} \|\varphi\|_{\mathbf{H}^{1+t}(\Omega)^d} \right\} \quad (4.26)$$

mit einer Konstanten $\tilde{C} \geq 0$ für jedes $\varepsilon \in (0, t - \frac{1}{2})$ und $t := \min\{r, k\}$.

Beweis. Dieser Beweis findet sich bei [6, Theorem 3.12] □

Es stellt sich natürlich die Frage für hinreichende Bedingungen an Annahme 4.12. Dazu möchten wir eine Bemerkung angeben.

Bemerkung 4.16. Nach [6, Abschnitt 3.4] ist diese Bedingung für die Raumdimension $d = 2$ für alle Polynomansatzräume mit Polynomgrad $k \geq 4$ ohne weitere Annahmen erfüllt. In einem solchen Falle kann der Raum G_h im Dreiecksfall vom Argyris-Dreieck konstruiert werden. Für $k \geq 2$ lässt sich G_h vom Bogner-Fox-Schmidt-Dreieck konstruieren.

Eine Konstruktion für $k \geq 1$ für beide Raumdimensionen $d \in \{2, 3\}$ gibt der Powell-Sabin-Interpolator, welcher im Artikel [17] besprochen wird. Ferner stellen S. Badia und R. Codina in [6] numerisch fest, dass auch das sogenannte Crossbox-Element die theoretischen Konvergenzraten erfüllt. Allerdings ist bis heute nicht theoretisch nachgewiesen, dass es die obige Annahme erfüllt.

Desweiteren geben M. Costabel und M. Dauge in ihren Arbeiten [19] und [20] einige spezielle Grundgittertopologien an. Bestimmte kartesische Gitter erfüllen zum Beispiel in numerischen Rechnungen für die Dreieckselemente \mathbb{P}_k für $k \geq 2$ die theoretischen Konvergenzraten für singuläre Lösungen. Allerdings bleibt die Beantwortung der Frage, ob diese speziellen kartesischen Grundgitterstrukturen die Annahme erfüllen, offen. □

4.2 Stabilisiertes erweitertes magnetisches Induktionsproblem

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit der Diskretisierung des erweiterten magnetischen Induktionsproblems, welches wir auf kontinuierlicher Ebene bereits in Abschnitt 3.3 betrachtet haben. Insbesondere erweitert dieses Teilkapitel Ergebnisse der Arbeit [45] des Autors mit Utku Kaya und Gert Lube um die Stabilisierung des Induktionsterm $-\langle \nabla \times (\mathbf{u} \times \varrho \mathbf{b}) \rangle$. Um dieses durchführen zu können, verwenden wir die lokale Projektionsmethode, welche im Folgenden eingeführt wird. Für wesentliche Ideen dieser Stabilisierungsart verweisen wir auf die Arbeit [50] oder den Übersichtsartikel [14], die diese am Beispiel der Oseen-Gleichung erläutern. Aufbauend wird die diskrete stabilisierte Problemformulierung eingeführt, um deren Wohlgestelltheit mittels der Theorie parabolischer Probleme zu zeigen. Letztlich folgt eine Fehleranalyse dieses Problems.

4.2.1 Finite-Elemente-Räume und lokale Projektion

Wir verwenden den Raum \mathbb{P}_r der simplizialen Elemente der polynomialen Ordnung $r \in \mathbb{N}$ oder den Raum \mathbb{Q}_r der Quader-Elemente oder Hexaeder-Elemente der polynomialen Ordnung $r \in \mathbb{N}$ nach Abschnitt 2.2 der Grundlagen. Insbesondere werden wir für das Funktionenraumpaar $C_h \times S_h$ entweder Equal-Order-Räume der Gestalt $\mathbb{P}_r \times \mathbb{P}_r$ oder $\mathbb{Q}_r \times \mathbb{Q}_r$ mit $r \in \mathbb{N}$ oder Taylor-Hood-Räume der Form $\mathbb{P}_{r+1} \times \mathbb{P}_r$ oder $\mathbb{Q}_{r+1} \times \mathbb{Q}_r$ benutzen.

Wir betrachten konforme Finite-Elemente-Räume

$$C_h \times S_h \subseteq C \times S.$$

$\{\mathcal{T}_h\}_h$ sei eine Familie von quasiuniformen Gebietszerlegungen von $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Für einen Simplex $T \in \mathcal{T}_h$ oder Quader/Hexaeder $T \in \mathbb{R}^d$ sei \hat{T} der Referenzeinheitssimplex oder der Einheitswürfel $(-1, 1)^d$. Die bijektive Referenzabbildung $F_T : \hat{T} \rightarrow T$ ist für Simplizes affin-linear und multilinear für Quader/Hexaeder. \mathbb{P}_l beziehungsweise \mathbb{Q}_l mit $l \in \mathbb{N}_0$ sind die Räume der Polynome vom Grad $\leq l$ beziehungsweise der Polynome vom Grad $\leq l$ in jeder Variablen und es sei

$$\mathbb{R}_l(\hat{T}) := \begin{cases} \mathbb{P}_l(\hat{T}) & \text{auf Simplizes } \hat{T} \\ \mathbb{Q}_l(\hat{T}) & \text{auf Quadern/Hexaedern } \hat{T}. \end{cases}$$

Die Referenzabbildung gibt eine Transformation von der Referenzzelle auf eine beliebige Zelle der Zerlegung \mathcal{T}_h . Die Referenzzelle bietet den Vorteil, dass alle Basisfunktionen und numerische Integrationsformeln nur dort benötigt werden. Wir definieren daher $Y_{h,-l} := \{\mathbf{c}_h \in L^2(\Omega) : \mathbf{c}_h|_T \circ F_T \in \mathbb{R}_l(\hat{T}) \ \forall T \in \mathcal{T}_h\}$ und $Y_{h,l} := Y_{h,-l} \cap C$ oder $Y_{h,l} := Y_{h,-l} \cap W^{1,2}(\Omega)^d$ für die glatte Fehleranalyse und nehmen die folgende inverse Ungleichung und die Approximationseigenschaften an.

(A.1): Der Finite-Elemente-Raum $Y_{h,k}$ erfülle die lokale inverse Ungleichung

$$\|\nabla \mathbf{c}_h\|_{L^2(T)^d} \leq Ch_T^{-1} \|\mathbf{c}_h\|_{L^2(T)^d} \quad \forall \mathbf{c}_h \in Y_{h,k}, \ \forall T \in \mathcal{T}_h.$$

(A.2): Es gibt einen Interpolationsoperator $\mathbf{j}_1 : W^{1,2}(\Omega)^d \rightarrow Y_{h,k}$ derart, dass für alle $T \in \mathcal{T}_h$ und für alle $\mathbf{c} \in W^{l,2}(\Omega)^d$ mit $1 \leq l \leq k+1$

$$\|\mathbf{c} - \mathbf{j}_1 \mathbf{c}\|_{L^2(T)^d} + h_T \|\nabla(\mathbf{c} - \mathbf{j}_1 \mathbf{c})\|_{L^2(T)^d} \leq Ch_T^l \|\mathbf{c}\|_{H^l(T)^d}$$

gilt.

Analoge Eigenschaften gelten für die skalarwertige Version für den Finite-Elemente-Raum, der S_h approximiert. Im Falle, dass das Makrogitter \mathcal{M}_h betrachtet wird, wird in **(A.2)** in der rechten Seite der Ungleichung T durch eine Umgebung ω_M der Nachbarzellen der Zelle M ersetzt.

Zur Vereinfachung schreiben wir $C_h = \mathbb{R}_k$ anstatt $C_h = [Y_{h,k}]^d \cap C$ und $S_h = \mathbb{R}_{k-1}$ anstatt $S_h = Y_{h,k-1} \cap S$, $k \geq 2$.

Zum Vergleich betrachten wir auch Equal-Order-Interpolation mit C_h wie oben für $k \geq 1$ und $S_h = Y_{h,k} \cap S$, $k \geq 1$.

Wir führen für die Stabilisierung ein Makrogitter $\mathcal{M}_h = \{M\}$ mit $\mathcal{M}_h = \mathcal{T}_h$ im Ein-Level-Fall oder $\mathcal{M}_h = \mathcal{T}_{2h}$ im Zwei-Level-Fall ein. Im letzten Fall wird die Zerlegung \mathcal{T}_h von \mathcal{M}_h durch baryzentrische Verfeinerung von d -Simplizes oder regulärer dyadischer Verfeinerung von Quadern oder Hexaedern realisiert.

Auf $M \in \mathcal{M}_h$ definieren wir den lokalen Finite-Elemente-Raum

$$D_M^s := \{\mathbf{v} \in [L^2(M)]^d : \mathbf{v}|_M \in \mathbb{R}_s\}, \quad s \in \{0, \dots, k\}. \quad (4.27)$$

Die lokale orthogonale L^2 -Projektion ist durch $\pi_M^s : [L^2(M)]^d \rightarrow D_M^s$ gegeben. Ferner bezeichnen wir mit $\kappa_M^s := id - \pi_M^s$ den sogenannten Fluktuationsoperator.

(A.3): Der Fluktuationsoperator κ_M^s besitzt abhängig von D_M^s und $s \in \{0, \dots, k\}$ die Approximationseigenschaft

$$\|\kappa_M^s \mathbf{w}\|_{L^2(M)^d} \leq Ch_M^l \|\mathbf{w}\|_{H^l(M)^d}, \quad \forall \mathbf{w} \in [W^{l,2}(\Omega)]^d, M \in \mathcal{M}_h, l = 0, \dots, s. \quad (4.28)$$

Eine hinreichende Bedingung für **(A.3)** ist $\mathbb{R}_{s-1} \subset D_M^s$. Außerdem sichert diese Annahme die Konsistenz unserer Methode für $h \rightarrow 0$. Im Folgenden werden wir auf die Indizes am Fluktuationsoperator übersichtshalber verzichten.

4.2.2 Problemformulierung

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ mit $d \in \{2, 3\}$ ein im Allgemeinen nichtkonvexes, polyedrisches Gebiet. Seien die Funktionenräume $C := H_0(\text{rot}; \Omega)$ und $S := H_0^1(\Omega)$ wie in (3.14) und (3.10) aus dem vorangegangenen Kapitel 3, wobei wir konforme Methoden, d.h. $C_h \times S_h \subset C \times S$, betrachten. Sei \mathcal{T}_h eine zulässige und quasiuniforme Zerlegung von Ω in Elemente $K \in \mathcal{T}_h$ und \mathcal{M}_h das entsprechende Makrogitter nach vorherigem Unterabschnitt 4.2.1. Wir stabilisieren erneut die unstabilisierte kontinuierliche Formulierung (3.25) mit der zugehörigen kontinuierlichen Gesamtnorm aus (3.20). Ferner verwenden wir die dortigen Notationen. Die Problemstellung lautet somit bei Ergänzung der Stabilisierungen:

„Finde $(\mathbf{b}_h, r_h) \in L^2(0, T; C_h) \times L^2(0, T; S_h)$ derart, dass

$$\begin{aligned} & \varrho(\partial_t \mathbf{b}_h, \mathbf{c}_h) + \lambda(\nabla \times \mathbf{b}_h, \nabla \times \mathbf{c}_h) + (\nabla r_h, \mathbf{c}_h) \\ & - \langle \nabla \times (\mathbf{u} \times \varrho \mathbf{b}_h), \mathbf{c}_h \rangle + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{div, EInd}} (\nabla \cdot \mathbf{b}_h, \nabla \cdot \mathbf{c}_h)_K \\ & + \sum_{M \in \mathcal{M}_h} \tau_{\text{EInd}} (\kappa(\nabla \times (\mathbf{u} \times \varrho \mathbf{b}_h)), \kappa(\nabla \times (\mathbf{u} \times \varrho \mathbf{c}_h)))_K = (\mathbf{f}_b, \mathbf{c}_h) \quad \forall \mathbf{c}_h \in C_h, \end{aligned} \quad (4.29a)$$

$$- (\nabla s_h, \mathbf{b}_h) + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{grad, EInd}} (\nabla r_h, \nabla s_h)_K = 0 \quad \forall s_h \in S_h \quad (4.29b)$$

gilt, wobei angenommen wird, dass $\mathbf{f}_b \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^d \cap H(\text{div } 0; \Omega))$ erfüllt ist und das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; W^{1,\infty}(\Omega)^d)$ vorgeschrieben wird.“

4.2.3 Wohlgestellttheit

Um die Wohlgestellttheit der Problemformulierung (4.29) zu beweisen, definieren wir die schwache gitterabhängige Norm

$$\begin{aligned}
& \|(\mathbf{c}_h, s_h)\|_{\mathbf{h}, \text{EInd}, \mathbf{w}} \\
& := \sqrt{\lambda} \|\nabla \times \mathbf{c}_h\|_{L^2(\Omega)^d} + \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{div}, \text{EInd}} \|\nabla \cdot \mathbf{c}_h\|_{L^2(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{grad}, \text{EInd}} \|\nabla s_h\|_{L^2(K)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
& + \left(\sum_{M \in \mathcal{M}_h} \tau_{\text{EInd}} \|\kappa(\nabla \times (\mathbf{u} \times \varrho \mathbf{c}_h))\|_{L^2(M)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{4.30}
\end{aligned}$$

welche die schwache gitterabhängige Norm (4.2) um den Stabilisierungsterm des Terms $-\nabla \times (\mathbf{u} \times \varrho \mathbf{b}_h)$ erweitert, und die starke gitterabhängige Norm

$$\begin{aligned}
& \|(\mathbf{c}_h, s_h)\|_{\mathbf{h}, \text{EInd}, \mathbf{s}} \\
& := \|\mathbf{c}_h\|_C + \|s_h\|_S + \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{div}, \text{EInd}} \|\nabla \cdot \mathbf{c}_h\|_{L^2(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{grad}, \text{EInd}} \|\nabla s_h\|_{L^2(K)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
& + \left(\sum_{M \in \mathcal{M}_h} \tau_{\text{EInd}} \|\kappa(\nabla \times (\mathbf{u} \times \varrho \mathbf{c}_h))\|_{L^2(M)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.31}
\end{aligned}$$

auf $C_h \times S_h$ sowie die stabilisierte Bilinearform

$$\begin{aligned}
& c_s((\mathbf{b}_h, r_h), (\mathbf{c}_h, s_h)) \\
& := \lambda(\nabla \times \mathbf{b}_h, \nabla \times \mathbf{c}_h) + (\nabla r_h, \mathbf{c}_h) - (\nabla s_h, \mathbf{b}_h) - \langle \nabla \times (\mathbf{u} \times \varrho \mathbf{b}_h), \mathbf{c}_h \rangle \\
& + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{div}, \text{EInd}} (\nabla \cdot \mathbf{b}_h, \nabla \cdot \mathbf{c}_h)_K + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{grad}, \text{EInd}} (\nabla r_h, \nabla s_h)_K \\
& + \sum_{M \in \mathcal{M}_h} \tau_{\text{EInd}} (\kappa(\nabla \times (\mathbf{u} \times \varrho \mathbf{b}_h)), \kappa(\nabla \times (\mathbf{u} \times \varrho \mathbf{c}_h)))_M. \tag{4.32}
\end{aligned}$$

Es wird die Stetigkeit der stabilisierten Bilinearform $c_s: (C_h \times S_h) \times (C_h \times S_h) \rightarrow \mathbb{R}$ aus (4.32) bezüglich der gitterabhängigen Norm $\|(\cdot, \cdot)\|_{\mathbf{h}, \text{EInd}, \mathbf{s}}$ aus (4.31) für beliebiges $t \in [0, T]$ nachgewiesen.

Lemma 4.17. *Die stabilisierte Bilinearform $c_s: (C_h \times S_h) \times (C_h \times S_h) \rightarrow \mathbb{R}$ aus (4.32) ist bezüglich der gitterabhängigen Norm $\|(\cdot, \cdot)\|_{\mathbf{h}, \text{EInd}, \mathbf{s}}$ aus (4.31) stetig. Das bedeutet, dass eine Konstante $\tilde{C} > 0$ derart existiert, dass*

$$|c_s((\mathbf{b}_h, r_h), (\mathbf{c}_h, s_h))| \leq \tilde{C} \|(\mathbf{b}_h, r_h)\|_{\mathbf{h}, \text{EInd}, \mathbf{s}} \|(\mathbf{c}_h, s_h)\|_{\mathbf{h}, \text{EInd}, \mathbf{s}} \tag{4.33}$$

für alle $(\mathbf{b}_h, r_h), (\mathbf{c}_h, s_h) \in C_h \times S_h$ gilt.

Beweis. Aufgrund der Definition der gitterabhängigen Norm aus (4.31) folgt

$$|c_s((\mathbf{b}_h, r_h), (\mathbf{c}_h, s_h))| \leq 4\|(\mathbf{b}_h, r_h)\|_{\text{h,EInd,s}}\|(\mathbf{c}_h, s_h)\|_{\text{h,EInd,s}} + |(\nabla r_h, \mathbf{c}_h)| + |(\nabla \times (\mathbf{u} \times \varrho \mathbf{b}_h), \mathbf{c}_h)| + |(\nabla \cdot \mathbf{b}_h, s_h)|. \quad (4.34)$$

Desweiteren gilt

$$\begin{aligned} |(\nabla r_h, \mathbf{c}_h)| &\leq \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{grad,EInd}} \|\nabla r_h\|_{L^2(K)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{\tau_{\text{grad,EInd}}} \|\mathbf{c}_h\|_{L^2(K)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|(\mathbf{b}_h, r_h)\|_{\text{h,EInd,s}} \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{L_0}{\sqrt{\tau_{\text{grad,EInd}} \sqrt{\lambda}}} \right) \|\mathbf{c}_h\|_C \\ &\leq \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{L_0}{\sqrt{\tau_{\text{grad,EInd}} \sqrt{\lambda}}} \right) \|(\mathbf{b}_h, r_h)\|_{\text{h,EInd,s}} \|(\mathbf{c}_h, s_h)\|_{\text{h,EInd,s}}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Ferner erhalten wir mit partieller Integration

$$\begin{aligned} &|\langle \nabla \times (\mathbf{u} \times \varrho \mathbf{b}_h), \mathbf{c}_h \rangle| \\ &= |(\mathbf{u} \times \varrho \mathbf{b}_h, \nabla \times \mathbf{c}_h)| \\ &\leq \varrho \frac{\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)^d} L_0}{\lambda} \|\mathbf{b}_h\|_C \|\mathbf{c}_h\|_C \\ &\leq \varrho \frac{\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)^d} L_0}{\lambda} \|(\mathbf{b}_h, r_h)\|_{\text{h,EInd,s}} \|(\mathbf{c}_h, s_h)\|_{\text{h,EInd,s}}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Ferner erhalten wir analog zu (4.35)

$$\begin{aligned} &|(\nabla s_h, \mathbf{b}_h)| \\ &\leq \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{L_0}{\sqrt{\tau_{\text{grad,EInd}} \sqrt{\lambda}}} \right) \|(\mathbf{b}_h, r_h)\|_{\text{h,EInd,s}} \|(\mathbf{c}_h, s_h)\|_{\text{h,EInd,s}}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Einsetzen von (4.35)–(4.37) in (4.34) gibt

$$\begin{aligned} &|c_s((\mathbf{b}_h, r_h), (\mathbf{c}_h, s_h))| \\ &\leq 4\|(\mathbf{b}_h, r_h)\|_{\text{h,EInd,s}}\|(\mathbf{c}_h, s_h)\|_{\text{h,EInd,s}} + |(\nabla r_h, \mathbf{c}_h)| \\ &\quad + |(\nabla \times (\mathbf{u} \times \varrho \mathbf{b}_h), \mathbf{c}_h)| + |(\nabla \cdot \mathbf{b}_h, s_h)| \\ &\leq \left\{ 4 + \varrho \frac{\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)^d} L_0}{\lambda} + 2 \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{L_0}{\sqrt{\tau_{\text{grad,EInd}} \sqrt{\lambda}}} \right) \right\} \|(\mathbf{b}_h, r_h)\|_{\text{h,EInd,s}} \|(\mathbf{c}_h, s_h)\|_{\text{h,EInd,s}} \end{aligned} \quad (4.38)$$

und mit der Setzung

$$\tilde{C} := \left\{ 4 + \varrho \frac{\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)^d} L_0}{\lambda} + 2 \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{L_0}{\sqrt{\tau_{\text{grad,EInd}} \sqrt{\lambda}}} \right) \right\}$$

zeigt dies die Behauptung. \square

Dieses Ergebnis lässt mit den Ergebnissen aus Abschnitt 4.1 folgende Bemerkung zur Parameterwahl zu.

Bemerkung 4.18. Da Abschnitt 4.1 den Fall $\mathbf{u} \equiv 0$ und $\partial_t \mathbf{b} \equiv 0$ behandelt, kann, um den Spezialfall des stationären Induktionsproblems einzuschließen, die Parameterwahl

$$\tau_{\text{div,EInd}} \sim \frac{h_K^2 \lambda}{L_0^2} \quad \text{und} \quad \tau_{\text{grad,EInd}} \sim \frac{L_0^2}{\lambda} \quad (4.39)$$

übernommen werden, da die Stabilisierungsparameter $\tau_{\text{div,EInd}}$ und $\tau_{\text{grad,EInd}}$ in Abschnitt 4.1 aus der Stabilitätsanalyse bezüglich der kontinuierlichen Norm $\|\cdot\|_C + \|\cdot\|_S$ hergeleitet worden sind. Diese Anteile sind Bestandteil der gitterabhängigen Norm (4.31).

Als Nächstes muss die Gardingsche Ungleichung nachgewiesen werden.

Lemma 4.19. *Mit den Setzungen*

$$\gamma_{\text{EInd}} := \frac{1}{4} \quad (4.40)$$

und

$$\kappa_{\text{EInd}} := \frac{\lambda}{2L_0^2} \left\{ 1 + \varrho^2 \frac{\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)^d}^2 L_0^2}{\lambda^2} \right\} \quad (4.41)$$

sehen wir ein, dass mit der stabilisierten Bilinearform $c_s: (C_h \times S_h) \times (C_h \times S_h) \rightarrow \mathbb{R}$ aus (4.32) die Gardingsche Ungleichung

$$\begin{aligned} c_s((\mathbf{b}_h, r_h), (\mathbf{b}_h, r_h)) &\geq \gamma_{\text{EInd}} \|\mathbf{b}_h\|_C^2 - \kappa_{\text{EInd}} \|\mathbf{b}_h\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \\ &\quad + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{div,EInd}} \|\nabla \cdot \mathbf{b}_h\|_{L^2(K)}^2 \\ &\quad + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{grad,EInd}} \|\nabla r_h\|_{L^2(K)^d}^2 \\ &\quad + \sum_{M \in \mathcal{M}_h} \tau_{\text{EInd}} \|\kappa(\nabla \times (\mathbf{u} \times \varrho \mathbf{b}_h))\|_{L^2(M)^d}^2 \end{aligned} \quad (4.42)$$

für alle $(\mathbf{b}_h, r_h) \in C_h \times S_h$ erfüllt wird.

Beweis. Es gilt mit partieller Integration und der Youngschen Ungleichung

$$\begin{aligned} c_s((\mathbf{b}_h, r_h), (\mathbf{b}_h, r_h)) &\geq \lambda \|\nabla \times \mathbf{b}_h\|_{L^2(\Omega)^d}^2 - |\langle \nabla \times (\mathbf{u} \times \varrho \mathbf{b}_h), \mathbf{b}_h \rangle| \\ &\quad + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{div,EInd}} \|\nabla \cdot \mathbf{b}_h\|_{L^2(K)}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{grad,EInd}} \|\nabla r_h\|_{L^2(K)^d}^2 \\ &\quad + \sum_{M \in \mathcal{M}_h} \tau_{\text{EInd}} \|\kappa(\nabla \times (\mathbf{u} \times \varrho \mathbf{b}_h))\|_{L^2(M)^d}^2 \\ &\geq \lambda \|\nabla \times \mathbf{b}_h\|_{L^2(\Omega)^d}^2 - \varrho \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)^d} \|\mathbf{b}_h\|_{L^2(\Omega)^d} \|\nabla \times \mathbf{b}_h\|_{L^2(\Omega)^d} \\ &\quad + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{div,EInd}} \|\nabla \cdot \mathbf{b}_h\|_{L^2(K)}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{grad,EInd}} \|\nabla r_h\|_{L^2(K)^d}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{M \in \mathcal{M}_h} \tau_{\text{EInd}} \|\kappa (\nabla \times (\mathbf{u} \times \varrho \mathbf{b}_h))\|_{L^2(M)^d}^2 \\
\geq & \frac{1}{2} \lambda \|\nabla \times \mathbf{b}_h\|_{L^2(\Omega)^d}^2 - \frac{1}{2} \frac{\varrho^2 \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)^d}^2}{\lambda} \|\mathbf{b}_h\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \\
& + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{div,EInd}} \|\nabla \cdot \mathbf{b}_h\|_{L^2(K)}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{grad,EInd}} \|\nabla r_h\|_{L^2(K)^d}^2 \\
& + \sum_{M \in \mathcal{M}_h} \tau_{\text{EInd}} \|\kappa (\nabla \times (\mathbf{u} \times \varrho \mathbf{b}_h))\|_{L^2(M)^d}^2 \\
= & \frac{1}{2} \lambda \|\nabla \times \mathbf{b}_h\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \frac{1}{2} \frac{\lambda}{L_0^2} \|\mathbf{b}_h\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \\
& - \frac{1}{2} \frac{\lambda}{L_0^2} \|\mathbf{b}_h\|_{L^2(\Omega)^d}^2 - \frac{1}{2} \frac{\varrho^2 \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)^d}^2}{\lambda} \|\mathbf{b}_h\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \\
& + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{div,EInd}} \|\nabla \cdot \mathbf{b}_h\|_{L^2(K)}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{grad,EInd}} \|\nabla r_h\|_{L^2(K)^d}^2 \\
& + \sum_{M \in \mathcal{M}_h} \tau_{\text{EInd}} \|\kappa (\nabla \times (\mathbf{u} \times \varrho \mathbf{b}_h))\|_{L^2(M)^d}^2 \\
\geq & \frac{1}{4} \|\mathbf{b}_h\|_C^2 - \frac{\lambda}{2L_0^2} \left\{ 1 + \varrho^2 \frac{\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)^d}^2 L_0^2}{\lambda^2} \right\} \|\mathbf{b}_h\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \\
& + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{div,EInd}} \|\nabla \cdot \mathbf{b}_h\|_{L^2(K)}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{grad,EInd}} \|\nabla r_h\|_{L^2(K)^d}^2 \\
& + \sum_{M \in \mathcal{M}_h} \tau_{\text{EInd}} \|\kappa (\nabla \times (\mathbf{u} \times \varrho \mathbf{b}_h))\|_{L^2(M)^d}^2 \\
= & \gamma_{\text{EInd}} \|\mathbf{b}_h\|_C^2 - \kappa_{\text{EInd}} \|\mathbf{b}_h\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \\
& + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{div,EInd}} \|\nabla \cdot \mathbf{b}_h\|_{L^2(K)}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{grad,EInd}} \|\nabla r_h\|_{L^2(K)^d}^2 \\
& + \sum_{M \in \mathcal{M}_h} \tau_{\text{EInd}} \|\kappa (\nabla \times (\mathbf{u} \times \varrho \mathbf{b}_h))\|_{L^2(M)^d}^2
\end{aligned}$$

für alle $(\mathbf{b}_h, r_h) \in C_h \times S_h$. □

Damit beweisen wir folgende Energiegleichung.

Theorem 4.20. *Mit der obigen Wahl der Funktionenräume gilt die folgende Abschätzung*

$$\begin{aligned}
& \varrho \|\mathbf{b}_h(t)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + 2\gamma_{\text{EInd}} \int_0^t e^{3\kappa_{\text{EInd}} \frac{(t-\tau)}{e}} \|\mathbf{b}_h(\tau)\|_C^2 \, d\tau \\
& + 2 \int_0^t e^{3\kappa_{\text{EInd}} \frac{(t-\tau)}{e}} \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{div,EInd}} \|\nabla \cdot \mathbf{b}_h(\tau)\|_{L^2(K)}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{grad,EInd}} \|\nabla r_h(\tau)\|_{L^2(K)^d}^2 \right. \\
& \left. + \sum_{M \in \mathcal{M}_h} \tau_{\text{EInd}} \|\kappa(\nabla \times (\mathbf{u}(\tau) \times \varrho \mathbf{b}_h(\tau)))\|_{L^2(M)^d}^2 \right\} \, d\tau \\
& \leq \varrho e^{3\kappa_{\text{EInd}} \frac{t}{e}} \|\mathbf{b}_h(0)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \int_0^t \frac{e^{3\kappa_{\text{EInd}} \frac{(t-\tau)}{e}}}{\kappa_{\text{EInd}}} \|\mathbf{f}_b(\tau)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \, d\tau
\end{aligned} \tag{4.43}$$

an die Formulierung (4.29) für $\mathbf{f}_b \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^d \cap H(\text{div } 0; \Omega))$ und $\mathbf{b}(0) \in L^2(\Omega)^d$.

Beweis. Für fixiertes $t \in (0, T]$ wählen wir $\mathbf{c}_h = \mathbf{b}_h$ und $s_h = r_h$. Wir erhalten

$$(\varrho \partial_t \mathbf{b}_h, \mathbf{b}_h) = \frac{\varrho}{2} \frac{d}{dt} (\mathbf{b}_h, \mathbf{b}_h) = \frac{\varrho}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{b}_h\|_{L^2(\Omega)^d}^2.$$

Jetzt impliziert Lemma 4.19 zusammen mit den Ungleichungen von Cauchy-Schwarz und Young

$$\begin{aligned}
& \frac{\varrho}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{b}_h\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \gamma_{\text{EInd}} \|\mathbf{b}_h\|_C^2 - \kappa_{\text{EInd}} \|\mathbf{b}_h\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{div,EInd}} \|\nabla \cdot \mathbf{b}_h\|_{L^2(K)}^2 \\
& + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{grad,EInd}} \|\nabla r_h\|_{L^2(K)^d}^2 + \sum_{M \in \mathcal{M}_h} \tau_{\text{EInd}} \|\kappa(\nabla \times (\mathbf{u} \times \varrho \mathbf{b}_h))\|_{L^2(M)^d}^2 \\
& \leq \frac{\varrho}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + c_s((\mathbf{b}_h, r_h), \mathbf{b}_h, r_h) \\
& \leq \|\mathbf{f}_b\|_{L^2(\Omega)^d} \|\mathbf{b}_h\|_{L^2(\Omega)^d} \\
& \leq \frac{1}{2\kappa_{\text{EInd}}} \|\mathbf{f}_b\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \frac{\kappa_{\text{EInd}}}{2} \|\mathbf{b}_h\|_{L^2(\Omega)^d}^2
\end{aligned}$$

mit der Konstanten $\kappa_{\text{EInd}} > 0$ aus (4.41). Multiplikation mit $2e^{-3\kappa_{\text{EInd}} \frac{t}{e}}$ gibt

$$\begin{aligned}
& \varrho e^{-3\kappa_{\text{EInd}} \frac{t}{e}} \frac{d}{dt} \|\mathbf{b}_h\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + 2\gamma_{\text{EInd}} e^{-3\kappa_{\text{EInd}} \frac{t}{e}} \|\mathbf{b}\|_C^2 - 3\kappa_{\text{EInd}} e^{-3\kappa_{\text{EInd}} \frac{t}{e}} \|\mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \\
& + 2e^{-3\kappa_{\text{EInd}} \frac{t}{e}} \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{div,EInd}} \|\nabla \cdot \mathbf{b}_h\|_{L^2(K)}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{grad,EInd}} \|\nabla r_h\|_{L^2(K)^d}^2 \right. \\
& \left. + \sum_{M \in \mathcal{M}_h} \tau_{\text{EInd}} \|\kappa(\nabla \times (\mathbf{u} \times \varrho \mathbf{b}_h))\|_{L^2(M)^d}^2 \right\} \\
& \leq \frac{e^{-3\kappa_{\text{EInd}} \frac{t}{e}}}{\kappa_{\text{EInd}}} \|\mathbf{f}_b\|_{L^2(\Omega)^d}^2.
\end{aligned}$$

Wegen der Produktregel gilt

$$\frac{d}{dt} \left(\varrho e^{-3\kappa_{\text{EInd}} \frac{t}{\varrho}} \|\mathbf{b}_h\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \right) = \varrho e^{-3\kappa_{\text{EInd}} \frac{t}{\varrho}} \frac{d}{dt} \left(\|\mathbf{b}_h\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \right) - 3\kappa_{\text{EInd}} e^{-3\kappa_{\text{EInd}} \frac{t}{\varrho}} \|\mathbf{b}_h\|_{L^2(\Omega)^d}^2$$

und somit folgt

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\varrho e^{-3\kappa_{\text{EInd}} \frac{t}{\varrho}} \|\mathbf{b}_h\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \right) + 2\gamma_{\text{EInd}} e^{-3\kappa_{\text{EInd}} \frac{t}{\varrho}} \|\mathbf{b}_h\|_C^2 \\ & + 2e^{-3\kappa_{\text{EInd}} \frac{t}{\varrho}} \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{div,EInd}} \|\nabla \cdot \mathbf{b}_h\|_{L^2(K)}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{grad,EInd}} \|\nabla r_h\|_{L^2(K)}^2 \right. \\ & \left. + \sum_{M \in \mathcal{M}_h} \tau_{\text{EInd}} \|\kappa(\nabla \times (\mathbf{u} \times \varrho \mathbf{b}_h))\|_{L^2(M)^d}^2 \right\} \\ & \leq \frac{e^{-3\kappa_{\text{EInd}} \frac{t}{\varrho}}}{\kappa_{\text{EInd}}} \|\mathbf{f}_b\|_{L^2(\Omega)^d}^2. \end{aligned}$$

Wegen der Identität

$$\int_0^t \frac{d}{ds} \left(\varrho e^{-3\kappa_{\text{EInd}} \frac{s}{\varrho}} \|\mathbf{b}_h(s)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \right) ds = \varrho e^{-3\kappa_{\text{EInd}} \frac{t}{\varrho}} \|\mathbf{b}_h(t)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 - \varrho \|\mathbf{b}_h(0)\|_{L^2(\Omega)^d}^2$$

für beliebiges $t \in [0, T]$ ergibt sich bei Integration über $(0, t)$ dementsprechend

$$\begin{aligned} & \int_0^t \frac{d}{d\tau} \left(\varrho e^{-3\kappa_{\text{EInd}} \frac{\tau}{\varrho}} \|\mathbf{b}_h(\tau)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \right) d\tau + 2\gamma_{\text{EInd}} \int_0^t e^{-3\kappa_{\text{EInd}} \frac{\tau}{\varrho}} \|\mathbf{b}_h(\tau)\|_C^2 d\tau \\ & + 2 \int_0^t e^{-3\kappa_{\text{EInd}} \frac{\tau}{\varrho}} \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{div,EInd}} \|\nabla \cdot \mathbf{b}_h(\tau)\|_{L^2(K)}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{grad,EInd}} \|\nabla r_h(\tau)\|_{L^2(K)}^2 \right. \\ & \left. + \sum_{M \in \mathcal{M}_h} \tau_{\text{EInd}} \|\kappa(\nabla \times (\mathbf{u}(\tau) \times \varrho \mathbf{b}_h(\tau)))\|_{L^2(M)^d}^2 \right\} d\tau \\ & = \varrho e^{-3\kappa_{\text{EInd}} \frac{t}{\varrho}} \|\mathbf{b}_h(t)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 - \varrho \|\mathbf{b}_h(0)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + 2\gamma_{\text{EInd}} \int_0^t e^{-3\kappa_{\text{EInd}} \frac{\tau}{\varrho}} \|\mathbf{b}_h(\tau)\|_C^2 d\tau \\ & + 2 \int_0^t e^{-3\kappa_{\text{EInd}} \frac{\tau}{\varrho}} \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{div,EInd}} \|\nabla \cdot \mathbf{b}_h(\tau)\|_{L^2(K)}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{grad,EInd}} \|\nabla r_h(\tau)\|_{L^2(K)}^2 \right. \\ & \left. + \sum_{M \in \mathcal{M}_h} \tau_{\text{EInd}} \|\kappa(\nabla \times (\mathbf{u}(\tau) \times \varrho \mathbf{b}_h(\tau)))\|_{L^2(M)^d}^2 \right\} d\tau \\ & \leq \int_0^t \frac{e^{-3\kappa_{\text{EInd}} \frac{\tau}{\varrho}}}{\kappa_{\text{EInd}}} \|\mathbf{f}_b(\tau)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 d\tau \end{aligned}$$

und damit gilt

$$\begin{aligned}
& \varrho \|\mathbf{b}_h(t)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + 2\gamma_{\text{EInd}} \int_0^t e^{3\frac{\kappa_{\text{EInd}}(t-\tau)}{\varrho}} \|\mathbf{b}_h(\tau)\|_C^2 \, d\tau \\
& + 2 \int_0^t e^{3\frac{\kappa_{\text{EInd}}(t-\tau)}{\varrho}} \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{div,EInd}} \|\nabla \cdot \mathbf{b}_h(\tau)\|_{L^2(K)}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{grad,EInd}} \|\nabla r_h(\tau)\|_{L^2(K)^d}^2 \right. \\
& \left. + \sum_{M \in \mathcal{M}_h} \tau_{\text{EInd}} \|\kappa(\nabla \times (\mathbf{u}(\tau) \times \varrho \mathbf{b}_h(\tau)))\|_{L^2(M)^d}^2 \right\} \, d\tau \\
& \leq \varrho e^{3\frac{\kappa_{\text{EInd}} t}{\varrho}} \|\mathbf{b}_h(0)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \int_0^t \frac{e^{3\frac{\kappa_{\text{EInd}}(t-\tau)}{\varrho}}}{\kappa_{\text{EInd}}} \|\mathbf{f}_b(\tau)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \, d\tau,
\end{aligned}$$

was die Behauptung zeigt. \square

Es verbleibt, die Wohlgestellttheit der Problemformulierung (4.29) nachzuweisen.

Theorem 4.21. *Seien $\mathbf{f}_b \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^d \cap H(\text{div } 0; \Omega))$ und $\mathbf{b}(0) \in L^2(\Omega)^d$. Unter den Voraussetzungen der Lemmata 4.17 – 4.19 und des Theorems 4.20 ergibt sich die Wohlgestellttheit der Problemformulierung (4.29).*

Beweis. Die zweite Gleichung der Problemformulierung (4.29) mit $s_h = r_h$ liefert

$$(\nabla r_h, \mathbf{b}_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{grad,EInd}} \|\nabla r_h\|_{L^2(K)^d}^2.$$

Unter den obigen Voraussetzungen existiert ein $\tau_0 > 0$ derart, dass

$$\min_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{grad,EInd}} \geq \tau_0 > 0$$

gilt und die Definition der Norm $\|\cdot\|_C$ liefert

$$\|\nabla r_h\|_{L^2(\Omega)^d} \leq \frac{L_0 \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\tau_0} \sqrt{\lambda} L_0} \|\mathbf{b}_h\|_{L^2(\Omega)^d} \leq \frac{L_0}{\sqrt{\lambda} \sqrt{\tau_0}} \|\mathbf{b}_h\|_C$$

und mittels Poincaré-Ungleichung folgt

$$\frac{\min\left\{1, \frac{1}{C_P}\right\}}{2} \sqrt{\tau_0} \|r_h\|_S \leq \|\mathbf{b}_h\|_C. \quad (4.44)$$

Dies liefert die Existenz eines invertierbaren linearen Operators $G_h: C_h \rightarrow S_h$ mit der Eigenschaft $r_h = G_h \mathbf{b}_h$.

Mit der Setzung $(\mathbf{c}_h, s_h) = (\mathbf{b}_h, r_h)$ und $r_h = G_h \mathbf{b}_h$ folgt aus Theorem 4.20

$$\begin{aligned}
& \varrho \|\mathbf{b}_h(t)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + 2\gamma_{\text{EInd}} \int_0^t e^{3\kappa_{\text{EInd}} \frac{(t-\tau)}{\varrho}} \|\mathbf{b}_h(\tau)\|_C^2 d\tau \\
& + 2 \int_0^t e^{3\kappa_{\text{EInd}} \frac{(t-\tau)}{\varrho}} \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{div,EInd}} \|\nabla \cdot \mathbf{b}_h(\tau)\|_{L^2(K)}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{grad,EInd}} \|\nabla G_h \mathbf{b}_h(\tau)\|_{L^2(K)^d}^2 \right. \\
& \left. + \sum_{M \in \mathcal{M}_h} \tau_{\text{EInd}} \|\kappa(\nabla \times (\mathbf{u}(\tau) \times \varrho \mathbf{b}_h(\tau)))\|_{L^2(M)^d}^2 \right\} d\tau \\
& \leq \varrho e^{3\kappa_{\text{EInd}} \frac{t}{\varrho}} \|\mathbf{b}_h(0)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \int_0^t \frac{e^{3\kappa_{\text{EInd}} \frac{(t-\tau)}{\varrho}}}{\kappa_{\text{EInd}}} \|\mathbf{f}_b(\tau)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 d\tau
\end{aligned}$$

und das verallgemeinerte Theorem von Cauchy-Lipschitz liefert somit die eindeutige Existenz eines Magnetfeldes $\mathbf{b}_h: [0, T] \rightarrow C_h$, womit wegen (4.44) die eindeutige Existenz eines magnetischen Pseudo-Druckes $r_h: [0, T] \rightarrow S_h$ gesichert ist. \square

4.2.4 Konvergenzanalyse für glatte Lösungen

Dieser Unterabschnitt dient dazu, eine Fehleranalyse für glatte Lösungen des erweiterten magnetischen Induktionsproblems herzuleiten. Wir erinnern daran, dass dieses Problem im Kontinuierlichen durch (3.25) gegeben wird, während die stabilisierte diskrete Formulierung (4.29) herangezogen wird. Die Gesamtbilinearform des kontinuierlichen c und des stabilisierten diskreten Problems c_s sind durch (3.26) und (4.32) gegeben. Wir verwenden die gitterabhängige Norm (4.30).

Seien $(\mathbf{b}, r) \in C \times S$ und $(\mathbf{b}_h, r_h) \in C_h \times S_h$ die Lösungen des kontinuierlichen bzw. des stabilisierten diskreten Problems. Wegen der Konformität der Methode gilt somit bei Subtraktion des stabilisierten diskreten vom kontinuierlichen Problem

$$\varrho(\partial_t(\mathbf{b} - \mathbf{b}_h), \mathbf{c}_h) + c((\mathbf{b}, r), (\mathbf{c}_h, s_h)) - c_s((\mathbf{b}_h, r_h), (\mathbf{c}_h, s_h)) = 0 \quad (4.45)$$

für alle $(\mathbf{c}_h, s_h) \in C_h \times S_h \subset C \times S$. Es folgt in äquivalenter Weise wegen $\nabla r = 0$ und $\nabla \cdot \mathbf{b} = 0$

$$\begin{aligned}
& \varrho(\partial_t(\mathbf{b} - \mathbf{b}_h), \mathbf{c}_h) + c_s(((\mathbf{b} - \mathbf{b}_h), (r - r_h)), (\mathbf{c}_h, s_h)) \\
& = \sum_{M \in \mathcal{M}_h} \tau_{\text{EInd}} (\kappa(\nabla \times (\mathbf{u} \times \varrho \mathbf{b})), \kappa(\nabla \times (\mathbf{u} \times \varrho \mathbf{c}_h)))_M
\end{aligned} \quad (4.46)$$

für alle $(\mathbf{c}_h, s_h) \in C_h \times S_h \subset C \times S$.

Seien $\mathbf{j}^b: C \rightarrow C_h$ und $j^r: S \rightarrow S_h$ entsprechende Interpolationsoperatoren. Wir zerlegen die Fehler mittels

$$\mathbf{b} - \mathbf{b}_h = (\mathbf{b} - \mathbf{j}^b \mathbf{b}) + (\mathbf{j}^b \mathbf{b} - \mathbf{b}_h) = \varepsilon_b + \mathbf{e}_b \quad (4.47)$$

und

$$r - r_h = (r - j^r r) + (j^r r - r_h) = \varepsilon_r + e_r \quad (4.48)$$

in Interpolations- und Approximationsfehler. Setzen wir $\mathbf{c}_h = \mathbf{e}_b$ und $s_h = e_r$, so folgt aus (4.46) mit der Bilinearität von c_s also

$$\begin{aligned} & \varrho (\partial_t (\varepsilon_b + \mathbf{e}_b), \mathbf{e}_b) + c_s (((\varepsilon_b + \mathbf{e}_b), (\varepsilon_r + e_r)), (\mathbf{e}_b, e_r)) \\ &= \sum_{M \in \mathcal{M}_h} \tau_{\text{EInd}} (\kappa (\nabla \times (\mathbf{u} \times \varrho \mathbf{b})), \kappa (\nabla \times (\mathbf{u} \times \varrho \mathbf{e}_b)))_M \end{aligned}$$

und dementsprechend ergibt sich

$$\begin{aligned} & \frac{\varrho}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{e}_b\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + c_s ((\mathbf{e}_b, e_r), (\mathbf{e}_b, e_r)) \\ &= -\varrho (\partial_t \varepsilon_b, \mathbf{e}_b) - c((\varepsilon_b, \varepsilon_r), (\mathbf{e}_b, e_r)) \\ & \quad - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{grad,EInd}} (\nabla \varepsilon_r, \nabla e_r)_K - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{div,EInd}} (\nabla \cdot \varepsilon_b, \nabla \cdot \mathbf{e}_b)_K \\ & \quad - \sum_{M \in \mathcal{M}_h} \tau_{\text{EInd}} (\kappa (\nabla \times (\mathbf{u} \times \varrho \varepsilon_b)), \kappa (\nabla \times (\mathbf{u} \times \varrho \mathbf{e}_b)))_M \\ & \quad + \sum_{M \in \mathcal{M}_h} \tau_{\text{EInd}} (\kappa (\nabla \times (\mathbf{u} \times \varrho \mathbf{b})), \kappa (\nabla \times (\mathbf{u} \times \varrho \mathbf{e}_b)))_M. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Wegen des zusätzlich auftretenden Termes werden wir ein ähnliches Vorgehen wie in [21, Abschnitt 4.1] verwenden. Wir werden zunächst die Terme auf der rechten Seite von (4.49) nach oben abschätzen. Es ergibt sich mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|\varrho (\partial_t \varepsilon_b, \mathbf{e}_b)| \leq \varrho \|\partial_t \varepsilon_b\|_{L^2(\Omega)^d} \|\mathbf{e}_b\|_{L^2(\Omega)^d} \quad (4.50)$$

für den ersten Term. Ebenfalls mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung, partieller Integration, wegen $\nabla r = 0$, wegen $j^r r = 0$ und der Definition aus (4.30) folgt damit

$$\begin{aligned} & |c((\varepsilon_b, \varepsilon_r), (\mathbf{e}_b, e_r))| \\ & \leq |\lambda (\nabla \times \varepsilon_b, \nabla \times \mathbf{e}_b)| + |(\nabla \varepsilon_r, \mathbf{e}_b)| \\ & \quad + |(\nabla e_r, \varepsilon_b)| + |(\nabla \times (\mathbf{u} \times \varrho \varepsilon_b), \mathbf{e}_b)| \\ & \leq \left(\sqrt{\lambda} \|\nabla \times \varepsilon_b\|_{L^2(\Omega)^d} \right) \left(\sqrt{\lambda} \|\nabla \times \mathbf{e}_b\|_{L^2(\Omega)^d} \right) \\ & \quad + \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{\tau_{\text{grad,EInd}}} \|\varepsilon_b\|_{L^2(K)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|(\mathbf{e}_b, e_r)\|_{\text{h,Eind,w}} \\ & \quad + \frac{\varrho \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)^d}}{\sqrt{\lambda}} \|\varepsilon_b\|_{L^2(\Omega)^d} \|(\mathbf{e}_b, e_r)\|_{\text{h,Eind,w}} \\ & \leq \left\{ \sqrt{\lambda} \|\nabla \times \varepsilon_b\|_{L^2(\Omega)^d} + \frac{\varrho \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)^d}}{\sqrt{\lambda}} \|\varepsilon_b\|_{L^2(\Omega)^d} \right. \\ & \quad \left. + \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{\tau_{\text{grad,EInd}}} \|\varepsilon_b\|_{L^2(K)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \|(\mathbf{e}_b, e_r)\|_{\text{h,Eind,w}} \end{aligned} \quad (4.51)$$

für den zweiten Term. Desweiteren liefert die Cauchy-Schwarz-Ungleichung mit der Definition aus (4.30)

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{grad,EInd}} (\nabla \varepsilon_r, \nabla e_r)_K + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{div,EInd}} (\nabla \cdot \varepsilon_{\mathbf{b}}, \nabla \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{b}})_K \right. \\
& \quad \left. + \sum_{M \in \mathcal{M}_h} \tau_{\text{EInd}} (\kappa (\nabla \times (\mathbf{u} \times \varrho \varepsilon_{\mathbf{b}})), \kappa (\nabla \times (\mathbf{u} \times \varrho \mathbf{e}_{\mathbf{b}})))_M \right| \\
& \leq 3 \|(\varepsilon_{\mathbf{b}}, \varepsilon_r)\|_{\text{h,EInd,w}} \|\mathbf{e}_{\mathbf{b}}, e_r\|_{\text{h,EInd,w}}
\end{aligned} \tag{4.52}$$

für die Summe der Stabilisierungsterme. Ferner bekommen wir mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{M \in \mathcal{M}_h} \tau_{\text{EInd}} (\kappa (\nabla \times (\mathbf{u} \times \varrho \mathbf{b})), \kappa (\nabla \times (\mathbf{u} \times \varrho \mathbf{e}_{\mathbf{b}})))_M \right| \\
& \leq \left(\sum_{M \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{EInd}} \|\kappa (\nabla \times (\mathbf{u} \times \varrho \mathbf{b}))\|_{L^2(M)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|(\mathbf{e}_{\mathbf{b}}, e_r)\|_{\text{h,EInd,w}}
\end{aligned} \tag{4.53}$$

für den verbliebenen Term, sodass sich aus (4.49) mit (4.50) - (4.53) zusammenfassend

$$\begin{aligned}
& \frac{\varrho}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{e}_{\mathbf{b}}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + c_s ((\mathbf{e}_{\mathbf{b}}, e_r), (\mathbf{e}_{\mathbf{b}}, e_r)) \\
& \leq \varrho \|\partial_t \varepsilon_{\mathbf{b}}\|_{L^2(\Omega)^d} \|\mathbf{e}_{\mathbf{b}}\|_{L^2(\Omega)^d} \\
& \quad + \left\{ \sqrt{\lambda} \|\nabla \times \varepsilon_{\mathbf{b}}\|_{L^2(\Omega)^d} + \frac{\varrho \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)^d}}{\sqrt{\lambda}} \|\varepsilon_{\mathbf{b}}\|_{L^2(\Omega)^d} \right. \\
& \quad + \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{\tau_{\text{grad,EInd}}} \|\varepsilon_{\mathbf{b}}\|_{L^2(K)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + 3 \|(\varepsilon_{\mathbf{b}}, \varepsilon_r)\|_{\text{h,EInd,w}} \\
& \quad \left. + \left(\sum_{M \in \mathcal{M}_h} \tau_{\text{EInd}} \|\kappa (\nabla \times (\mathbf{u} \times \varrho \mathbf{b}))\|_{L^2(M)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \|(\mathbf{e}_{\mathbf{b}}, e_r)\|_{\text{h,EInd,w}}
\end{aligned} \tag{4.54}$$

ergibt. Mit der Definition der stabilisierten Bilinearform c_s aus (4.32), partieller Integration, der Definition der gitterabhängigen Norm aus (4.30) und der Youngschen Ungleichung

folgt

$$\begin{aligned}
& c_s ((\mathbf{e}_b, e_r), (\mathbf{e}_b, e_r)) \\
&= \lambda (\nabla \times \mathbf{e}_b, \nabla \times \mathbf{e}_b) + (\nabla e_r, \mathbf{e}_b) \\
&\quad - (\nabla e_r, \mathbf{e}_b) - \langle \nabla \times (\mathbf{u} \times \varrho \mathbf{e}_b), \mathbf{e}_b \rangle \\
&\quad + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{grad,EInd}} (\nabla e_r, \nabla e_r)_K + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{\text{div,EInd}} (\nabla \cdot \mathbf{e}_b, \nabla \cdot \mathbf{e}_b)_K \\
&\quad + \sum_{M \in \mathcal{M}_h} \tau_{\text{EInd}} (\kappa (\nabla \times (\mathbf{u} \times \varrho \mathbf{e}_b)), \kappa (\nabla \times (\mathbf{u} \times \varrho \mathbf{e}_b)))_M \\
&\geq \frac{1}{4} \|(\mathbf{e}_b, e_r)\|_{\text{h,Eind,w}}^2 - \varrho \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)^d} \|\mathbf{e}_b\|_{L^2(\Omega)^d} \|\nabla \times \mathbf{e}_b\|_{L^2(\Omega)^d} \\
&\geq \frac{1}{4} \|(\mathbf{e}_b, e_r)\|_{\text{h,Eind,w}}^2 - \frac{1}{8} \lambda \|\nabla \times \mathbf{e}_b\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \\
&\quad - 2 \frac{\varrho^2 \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)^d}^2}{\lambda} \|\mathbf{e}_b\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \\
&\geq \frac{1}{8} \|(\mathbf{e}_b, e_r)\|_{\text{h,Eind,w}}^2 - 2 \frac{\varrho^2 \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)^d}^2}{\lambda} \|\mathbf{e}_b\|_{L^2(\Omega)^d}^2
\end{aligned} \tag{4.55}$$

als Abschätzung nach unten für die diskrete stabilisierte Bilinearform. Mithilfe der Ungleichung aus (4.55) lässt sich folglich in der Ungleichung (4.54) erneut mit der Youngschen

Ungleichung einsetzen, dass wir

$$\begin{aligned}
& \frac{\varrho}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{e}_\mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \frac{1}{8} \|(\mathbf{e}_\mathbf{b}, e_r)\|_{\mathbf{h}, \text{EInd}, \mathbf{w}}^2 - 2 \frac{\varrho^2 \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)^d}^2}{\lambda} \|\mathbf{e}_\mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \\
& \leq \varrho \|\partial_t \varepsilon_\mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)^d} \|\mathbf{e}_\mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)^d} \\
& \quad + \left\{ \sqrt{\lambda} \|\nabla \times \varepsilon_\mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)^d} + \frac{\varrho \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)^d}}{\sqrt{\lambda}} \|\varepsilon_\mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)^d} \right. \\
& \quad + \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{\tau_{\text{grad}, \text{EInd}}} \|\varepsilon_\mathbf{b}\|_{L^2(K)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + 3 \|(\varepsilon_\mathbf{b}, \varepsilon_r)\|_{\mathbf{h}, \text{EInd}, \mathbf{w}} \\
& \quad \left. + \left(\sum_{M \in \mathcal{M}_h} \tau_{\text{EInd}} \|\kappa(\nabla \times (\mathbf{u} \times \varrho \mathbf{b}))\|_{L^2(M)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \|(\mathbf{e}_\mathbf{b}, e_r)\|_{\mathbf{h}, \text{EInd}, \mathbf{w}} \\
& \leq \frac{\varrho^2}{2} \|\partial_t \varepsilon_\mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{e}_\mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \frac{1}{16} \|(\mathbf{e}_\mathbf{b}, e_r)\|_{\mathbf{h}, \text{EInd}, \mathbf{w}}^2 \\
& \quad + 4 \left\{ \sqrt{\lambda} \|\nabla \times \varepsilon_\mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)^d} + \frac{\varrho \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)^d}}{\sqrt{\lambda}} \|\varepsilon_\mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)^d} \right. \\
& \quad + \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{\tau_{\text{grad}, \text{EInd}}} \|\varepsilon_\mathbf{b}\|_{L^2(K)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + 3 \|(\varepsilon_\mathbf{b}, \varepsilon_r)\|_{\mathbf{h}, \text{EInd}, \mathbf{w}} \\
& \quad \left. + \left(\sum_{M \in \mathcal{M}_h} \tau_{\text{EInd}} \|\kappa(\nabla \times (\mathbf{u} \times \varrho \mathbf{b}))\|_{L^2(M)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\}^2 \tag{4.56} \\
& \leq \frac{\varrho^2}{2} \|\partial_t \varepsilon_\mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{e}_\mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \frac{1}{16} \|(\mathbf{e}_\mathbf{b}, e_r)\|_{\mathbf{h}, \text{EInd}, \mathbf{w}}^2 \\
& \quad + 20 \left\{ \lambda \|\nabla \times \varepsilon_\mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \frac{\varrho^2 \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)^d}^2}{\lambda} \|\varepsilon_\mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \right. \\
& \quad + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{\tau_{\text{grad}, \text{EInd}}} \|\varepsilon_\mathbf{b}\|_{L^2(K)^d}^2 + 9 \|(\varepsilon_\mathbf{b}, \varepsilon_r)\|_{\mathbf{h}, \text{EInd}, \mathbf{w}}^2 \\
& \quad \left. + \sum_{M \in \mathcal{M}_h} \tau_{\text{EInd}} \|\kappa(\nabla \times (\mathbf{u} \times \varrho \mathbf{b}))\|_{L^2(M)^d}^2 \right\} \\
& \leq \frac{\varrho^2}{2} \|\partial_t \varepsilon_\mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{e}_\mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \frac{1}{16} \|(\mathbf{e}_\mathbf{b}, e_r)\|_{\mathbf{h}, \text{EInd}, \mathbf{w}}^2 \\
& \quad + 20 \left\{ 10 \|(\varepsilon_\mathbf{b}, \varepsilon_r)\|_{\mathbf{h}, \text{EInd}, \mathbf{w}}^2 + \frac{\varrho^2 \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)^d}^2}{\lambda} \|\varepsilon_\mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \right. \\
& \quad \left. + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{\tau_{\text{grad}, \text{EInd}}} \|\varepsilon_\mathbf{b}\|_{L^2(K)^d}^2 + \sum_{M \in \mathcal{M}_h} \tau_{\text{EInd}} \|\kappa(\nabla \times (\mathbf{u} \times \varrho \mathbf{b}))\|_{L^2(M)^d}^2 \right\}
\end{aligned}$$

erhalten, was in äquivalenterweise zu

$$\begin{aligned}
& 8\varrho \frac{d}{dt} \|\mathbf{e}_\mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \|(\mathbf{e}_\mathbf{b}, e_r)\|_{\mathbf{h}, \text{Eind}, \mathbf{w}}^2 - 8 \left(1 + 4 \frac{\varrho^2 \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)^d}^2}{\lambda} \right) \|\mathbf{e}_\mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \\
& \leq 8\varrho^2 \|\partial_t \varepsilon_\mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + 320 \left\{ 10 \|(\varepsilon_\mathbf{b}, \varepsilon_r)\|_{\mathbf{h}, \text{Eind}, \mathbf{w}}^2 + \frac{\varrho^2 \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)^d}^2}{\lambda} \|\varepsilon_\mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \right. \\
& \quad \left. + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{\tau_{\text{grad}, \text{EInd}}} \|\varepsilon_\mathbf{b}\|_{L^2(K)^d}^2 + \sum_{M \in \mathcal{M}_h} \tau_{\text{EInd}} \|\kappa (\nabla \times (\mathbf{u} \times \varrho \mathbf{b}))\|_{L^2(M)^d}^2 \right\}
\end{aligned} \tag{4.57}$$

führt. Setzen wir

$$\tilde{C} := \left(1 + 4 \frac{\varrho^2 \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)^d}^2}{\lambda} \right) \tag{4.58}$$

und multiplizieren wir die Ungleichung (4.57) mit dem Faktor $\frac{1}{8} \exp\left(-\frac{\tilde{C}}{\varrho} t\right)$, so gibt dies

$$\begin{aligned}
& \varrho e^{-\frac{\tilde{C}}{\varrho} t} \frac{d}{dt} \|\mathbf{e}_\mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 - \tilde{C} e^{-\frac{\tilde{C}}{\varrho} t} \|\mathbf{e}_\mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \frac{1}{8} e^{-\frac{\tilde{C}}{\varrho} t} \|(\mathbf{e}_\mathbf{b}, e_r)\|_{\mathbf{h}, \text{Eind}, \mathbf{w}}^2 \\
& \leq \varrho^2 e^{-\frac{\tilde{C}}{\varrho} t} \|\partial_t \varepsilon_\mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + 40 e^{-\frac{\tilde{C}}{\varrho} t} \left\{ 10 \|(\varepsilon_\mathbf{b}, \varepsilon_r)\|_{\mathbf{h}, \text{Eind}, \mathbf{w}}^2 + \frac{\varrho^2 \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)^d}^2}{\lambda} \|\varepsilon_\mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \right. \\
& \quad \left. + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{\tau_{\text{grad}, \text{EInd}}} \|\varepsilon_\mathbf{b}\|_{L^2(K)^d}^2 + \sum_{M \in \mathcal{M}_h} \tau_{\text{EInd}} \|\kappa (\nabla \times (\mathbf{u} \times \varrho \mathbf{b}))\|_{L^2(M)^d}^2 \right\}.
\end{aligned} \tag{4.59}$$

Wegen der Produktregel gilt

$$\frac{d}{dt} \left(\varrho e^{-\frac{\tilde{C}}{\varrho} t} \|\mathbf{e}_\mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \right) = \varrho e^{-\frac{\tilde{C}}{\varrho} t} \frac{d}{dt} \|\mathbf{e}_\mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 - \tilde{C} e^{-\frac{\tilde{C}}{\varrho} t} \|\mathbf{e}_\mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \tag{4.60}$$

und somit folgt in (4.59)

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left(\varrho e^{-\frac{\tilde{C}}{\varrho} t} \|\mathbf{e}_\mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \right) + \frac{1}{8} e^{-\frac{\tilde{C}}{\varrho} t} \|(\mathbf{e}_\mathbf{b}, e_r)\|_{\mathbf{h}, \text{Eind}, \mathbf{w}}^2 \\
& = \varrho e^{-\frac{\tilde{C}}{\varrho} t} \frac{d}{dt} \|\mathbf{e}_\mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 - \tilde{C} e^{-\frac{\tilde{C}}{\varrho} t} \|\mathbf{e}_\mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \frac{1}{8} e^{-\frac{\tilde{C}}{\varrho} t} \|(\mathbf{e}_\mathbf{b}, e_r)\|_{\mathbf{h}, \text{Eind}, \mathbf{w}}^2 \\
& \leq \varrho^2 e^{-\frac{\tilde{C}}{\varrho} t} \|\partial_t \varepsilon_\mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + 40 e^{-\frac{\tilde{C}}{\varrho} t} \left\{ 10 \|(\varepsilon_\mathbf{b}, \varepsilon_r)\|_{\mathbf{h}, \text{Eind}, \mathbf{w}}^2 + \frac{\varrho^2 \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)^d}^2}{\lambda} \|\varepsilon_\mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \right. \\
& \quad \left. + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{\tau_{\text{grad}, \text{EInd}}} \|\varepsilon_\mathbf{b}\|_{L^2(K)^d}^2 + \sum_{M \in \mathcal{M}_h} \tau_{\text{EInd}} \|\kappa (\nabla \times (\mathbf{u} \times \varrho \mathbf{b}))\|_{L^2(M)^d}^2 \right\}.
\end{aligned} \tag{4.61}$$

Wenn wir die Integration über $(0, t)$ mit einem beliebigem $t \in [0, T]$ durchführen, liefert

dies mit der Annahme $\mathbf{b}_h(0) = \mathbf{j}^{\mathbf{b}}(0)$ und dementsprechend $\mathbf{e}_{\mathbf{b}}(0) = 0$ also

$$\begin{aligned}
& \varrho e^{-\frac{\tilde{c}}{\varrho}t} \|\mathbf{e}_{\mathbf{b}}(t)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 - \varrho \|\mathbf{e}_{\mathbf{b}}(0)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \frac{1}{8} \int_0^t e^{-\frac{\tilde{c}}{\varrho}s} \|(\mathbf{e}_{\mathbf{b}}(s), e_r(s))\|_{\mathfrak{h}, \text{Eind}, \mathbf{w}}^2 ds \\
&= \varrho e^{-\frac{\tilde{c}}{\varrho}t} \|\mathbf{e}_{\mathbf{b}}(t)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \frac{1}{8} \int_0^t e^{-\frac{\tilde{c}}{\varrho}s} \|(\mathbf{e}_{\mathbf{b}}(s), e_r(s))\|_{\mathfrak{h}, \text{Eind}, \mathbf{w}}^2 ds \\
&\leq \int_0^t \left\{ e^{-\frac{\tilde{c}}{\varrho}s} \left\{ \varrho^2 \|\partial_t \varepsilon_{\mathbf{b}}(s)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + 40 \left\{ 10 \|(\varepsilon_{\mathbf{b}}(s), \varepsilon_r(s))\|_{\mathfrak{h}, \text{Eind}, \mathbf{w}}^2 \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \frac{\varrho^2 \|\mathbf{u}(s)\|_{L^\infty(\Omega)^d}^2}{\lambda} \|\varepsilon_{\mathbf{b}}(s)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{\tau_{\text{grad}, \text{EInd}}} \|\varepsilon_{\mathbf{b}}(s)\|_{L^2(K)^d}^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \sum_{M \in \mathcal{M}_h} \tau_{\text{EInd}} \|\kappa(\nabla \times (\mathbf{u}(s) \times \varrho \mathbf{b}(s)))\|_{L^2(M)^d}^2 \right\} \right\} ds. \tag{4.62}
\end{aligned}$$

Bei Multiplikation mit dem Exponentialterm sehen wir ein, dass

$$\begin{aligned}
& \varrho \|\mathbf{e}_{\mathbf{b}}(t)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \frac{1}{8} \int_0^t e^{\frac{\tilde{c}}{\varrho}(t-s)} \|(\mathbf{e}_{\mathbf{b}}(s), e_r(s))\|_{\mathfrak{h}, \text{Eind}, \mathbf{w}}^2 ds \\
&\leq \int_0^t \left\{ e^{\frac{\tilde{c}}{\varrho}(t-s)} \left\{ \varrho^2 \|\partial_t \varepsilon_{\mathbf{b}}(s)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + 40 \left\{ 10 \|(\varepsilon_{\mathbf{b}}(s), \varepsilon_r(s))\|_{\mathfrak{h}, \text{Eind}, \mathbf{w}}^2 \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \frac{\varrho^2 \|\mathbf{u}(s)\|_{L^\infty(\Omega)^d}^2}{\lambda} \|\varepsilon_{\mathbf{b}}(s)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{\tau_{\text{grad}, \text{EInd}}} \|\varepsilon_{\mathbf{b}}(s)\|_{L^2(K)^d}^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \sum_{M \in \mathcal{M}_h} \tau_{\text{EInd}} \|\kappa(\nabla \times (\mathbf{u}(s) \times \varrho \mathbf{b}(s)))\|_{L^2(M)^d}^2 \right\} \right\} ds \tag{4.63}
\end{aligned}$$

gilt. Nehmen wir desweiteren $\mathbf{b} \in L^2(0, T; H^{k+1}(\Omega)^d)$ und $\partial_t \mathbf{b} \in L^2(0, T; H^{k+1}(\Omega)^d)$ an, erhalten wir aufgrund der Interpolationseigenschaften mit einer passenden Umgebung

$\omega_M \subset \Omega$ um die Zelle $M \in \mathcal{M}_h$ des Makrogitters \mathcal{M}_h schließlich wegen $\varepsilon_r = 0$

$$\begin{aligned}
& \varrho \|\mathbf{e}_b(t)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \frac{1}{8} \int_0^t e^{\frac{\tilde{c}}{\varrho}(t-s)} \|(\mathbf{e}_b(s), e_r(s))\|_{\mathbf{h}, \text{Eind}, w}^2 ds \\
& \leq \int_0^t C_1 \left\{ e^{\frac{\tilde{c}}{\varrho}(t-s)} \left\{ \varrho^2 \sum_{M \in \mathcal{M}_h} h_M^{2k} |\partial_t \mathbf{b}(s)|_{H^{k+1}(\omega_M)}^2 \right. \right. \\
& \quad + \sum_{M \in \mathcal{M}_h} \left\{ h_M^{2k} |\mathbf{b}(s)|_{H^{k+1}(\omega_M)}^2 \left(\lambda + \tau_{\text{div}, \text{EInd}} d^2 + \tau_{\text{EInd}} \varrho^2 \|\nabla \mathbf{u}(s)\|_{L^\infty(M)^d}^2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{\varrho^2 \|\mathbf{u}(s)\|_{L^\infty(\Omega)^d}^2 h_M^2}{\lambda} + \frac{h_M^2}{\tau_{\text{grad}, \text{EInd}}} + \tau_{\text{EInd}} \varrho^2 \|\nabla \mathbf{u}(s)\|_{L^\infty(M)^d}^2 \right) \right\} \left. \right\} ds
\end{aligned} \tag{4.64}$$

und eine Kalibrierung der Stabilisierungsparameter aus (4.64) bestätigt die Wahl aus Bemerkung 4.18 mittels

$$\tau_{\text{div}, \text{EInd}} \sim \frac{h_M^2 \lambda}{L_0^2} \quad \text{und} \quad \tau_{\text{grad}, \text{EInd}} \sim \frac{L_0^2}{\lambda} \tag{4.65}$$

wegen der Kalibrierung

$$\tau_{\text{div}, \text{EInd}} \tau_{\text{grad}, \text{EInd}} \sim h_M^2.$$

Außerdem sehen wir, dass die Forderung

$$\tau_{\text{EInd}} \varrho^2 \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^\infty(M)^d}^2 \sim \mathcal{O}(1)$$

zum Parameterbereich

$$0 \leq \tau_{\text{EInd}} \leq \frac{C}{\varrho^2 \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^\infty(M)^d}^2} \tag{4.66}$$

führt, sofern wir einen nichtverschwindenden Geschwindigkeitsgradienten voraussetzen. Ferner erhalten wir aus (4.64)

$$h_M \leq C \frac{\sqrt{\lambda}}{\varrho \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)^d}} \tag{4.67}$$

als Gitterweitenbeschränkung. Wir erhalten das folgende Theorem als Zusammenfassung unserer Betrachtung.

Theorem 4.22. *Seien $\mathbf{b} \in L^2(0, T; H^{k+1}(\Omega)^d)$ und $\partial_t \mathbf{b} \in L^2(0, T; H^{k+1}(\Omega)^d)$. Ferner sei $\mathbf{b}_h(0) = \mathbf{j}^b(0)$. Wähle die Stabilisierungsparameter wie in (4.65) und (4.66) und es gelte die Gitterweitenbeschränkung aus (4.67). Dann gilt*

$$\begin{aligned}
& \varrho \|\mathbf{e}_b(t)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \frac{1}{8} \int_0^t e^{\frac{\tilde{c}}{\varrho}(t-s)} \|(\mathbf{e}_b(s), e_r(s))\|_{\mathbf{h}, \text{Eind}, w}^2 ds \\
& \leq \int_0^t C_2 e^{\frac{\tilde{c}}{\varrho}(t-s)} \sum_{M \in \mathcal{M}_h} h_M^{2k} \left(|\partial_t \mathbf{b}(s)|_{H^{k+1}(\omega_M)}^2 + |\mathbf{b}(s)|_{H^{k+1}(\omega_M)}^2 \right) ds
\end{aligned} \tag{4.68}$$

mit einer Konstanten $C_2 \geq 0$.

Beweis. Der Beweis folgt aus Unterabschnitt 4.2.4. □

Wir möchten an dieser Stelle folgende Bemerkung anbringen.

Bemerkung 4.23. Sollte neben den angegebenen Bedingungen dieses Unterabschnitts zur Fehleranalyse glatter Lösungen noch eine Kompatibilitätsbedingung der Gestalt

$$\left(\mathbf{c} - \mathbf{j}^b \mathbf{c}, \eta_h \right) = 0, \forall \mathbf{c} \in C, \forall \eta_h \in D_M^s$$

für den lokalen Projektionsstabilisierungsterm gelten, vergleiche dazu [15, Theorem III.4.9] oder [31] in der Originalliteratur, so lässt sich eine verbesserte Abschätzung für den Fehler des Induktionsterms $\langle \nabla \times (\mathbf{u} \times \varrho \mathbf{b}) \rangle$ vornehmen. Detaillierter wird diese Problematik im Kapitel 6 behandelt. Ebenso werden wir den Fall nichtglatter Lösungen für das Magneto-hydrodynamikmodell in Kapitel 6 anschneiden.

5 Kontinuierliches Magnetohydrodynamikproblem

In diesem Kapitel motivieren wir das kontinuierliche Magnetohydrodynamikproblem, wobei wir insbesondere den Darstellungen in [7] und [64] folgen werden. Hierbei handelt es sich um eine Kopplung zwischen der bereits dargestellten Induktionsgleichung der Maxwell-Gleichungen und der Momentengleichung der Navier-Stokes-Gleichungen, wobei durch die Interaktion zwischen dem Magnetfeld und dem Fluid zusätzliche nichtlineare Kraftterme relevant werden.

Zunächst werden die Navier-Stokes-Gleichungen angerissen. Für eine detaillierte Darstellung der theoretischen Grundlagen verweisen wir auf die Werke [30] und [60]. Wir beschränken uns im Wesentlichen auf eine Wiedergabe des kontinuierlichen inkompressiblen Problems.

Daran schließt sich eine Diskussion des inkompressiblen zeitabhängigen Magnetohydrodynamikproblems an. Für eine schöne Herleitung und Diskussion aus den beiden Teilproblemen bieten sich die Werke von P. A. Davidson [22] und H. Goedbloed mit S. Poedts [35] an. Eine mathematischere Betrachtung findet sich in [32].

Aus der zeitabhängigen Fragestellung wird schließlich das stationäre Problem motiviert, dessen Wohlgestelltheit in schwacher Formulierung untersucht wird.

5.1 Navier-Stokes-Gleichungen

Wir definieren die folgenden physikalischen Feldgrößen mit ihren physikalischen Einheiten im SI-System

Symbol	Einheit	Feldgröße
\mathbf{u}	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$	Geschwindigkeitsfeld
p	$\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$	kinematischer Druck

und hierbei stellt der eigentliche Druck p bei Division durch die konstante Dichte aufgrund der Inkompressibilität den kinematischen Druck dar. Ferner benötigen wir die kinematische Viskosität ν , welche die Einheit $\frac{\text{m}^2}{\text{s}}$ besitzt, und eine äußere Kraft $\mathbf{f}_{\mathbf{u}}$, die einheitentechnisch auch um den Faktor einer Dichte dividiert wird. Somit lässt sich die Momentengleichung der Navier-Stokes-Gleichung durch

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}_{\mathbf{u}}, \quad (5.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (5.2)$$

mit der Divergenznebenbedingung für die Inkompressibilität ausdrücken.

Wie in der Einleitung erwähnt, lassen sich theoretische Details zu Existenz und Eindeutigkeit in den Werken [30] und [60] nachlesen. Wir führen einige Begrifflichkeiten ein, um zwei Resultate aus [61] zur Existenz und Eindeutigkeit anzugeben. Dieser Abschnitt stammt aus [63, Kapitel 2.1].

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ mit $d \in \{2, 3\}$ ein offenes, beschränktes, zusammenhängendes Gebiet mit Lipschitz-Rand $\partial\Omega$. Unser Modell für instationäre, inkompressible Strömungen wird durch das System der Navier-Stokes-Gleichungen

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \cdot \Delta \mathbf{u} + \nabla p + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \mathbf{f}_{\mathbf{u}} \text{ in } \Omega \times (0, T) \quad (5.3a)$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0 \text{ in } \Omega \times (0, T) \quad (5.3b)$$

$$\mathbf{u} = 0 \text{ auf } \partial\Omega \times (0, T) \quad (5.3c)$$

$$\mathbf{u}(\cdot, 0) = \mathbf{u}_0 \text{ in } \Omega \quad (5.3d)$$

beschrieben. Wir betrachten die beiden Funktionenräume

$$V := \left\{ \mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^d \mid \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0 \right\} \quad (5.4)$$

und

$$H := \left\{ \mathbf{u} \in L^2(\Omega)^d \mid \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0 \text{ in } \Omega, \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ auf } \partial\Omega \right\}. \quad (5.5)$$

Mittels (\cdot, \cdot) bezeichnen wir das L^2 -Skalarprodukt. Desweiteren führen wir die Bilinearformen

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, dx \quad (5.6)$$

und

$$b(\mathbf{v}, p) := - \int_{\Omega} p \cdot \operatorname{div}(\mathbf{v}) \, dx \quad (5.7)$$

ein, welche zusätzlich um die Trilinearform

$$N(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) := \int_{\Omega} [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v}] \cdot \mathbf{w} \, dx \quad (5.8)$$

ergänzt werden. Diese ist bekanntermaßen schiefsymmetrisch. Es sei im Weiteren $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum und X' der zugehörige Dualraum, sodass wir

$$L^p(0, T; X) := \{ \varphi : (0, T) \rightarrow X \text{ messbar} \mid t \mapsto \|\varphi(\cdot, t)\|_X \text{ in } L^p(0, T; \mathbb{R}) \} \quad (5.9)$$

und

$$\mathcal{C}^k(0, T; X) := \{ \mathbf{f} : (0, T) \rightarrow X \mid \mathbf{f} \text{ besitzt stetige Ableitungen bis zur Ordnung } k \} \quad (5.10)$$

nach Unterabschnitt B.3 definieren können. Die Ableitung ist in diesem Falle im Fréchet-Sinne zu verstehen. Für $1 \leq p < \infty$ ist $L^p(0, T; X)$ ein Banachraum mit der Norm

$$\|\varphi\|_{L^p(0, T; X)} := \left\{ \int_0^T \|\varphi(\cdot, t)\|_X^p \, dt \right\}^{\frac{1}{p}} \quad (5.11)$$

und für $p = \infty$ ist $L^\infty(0, T; X)$ ein Banachraum mit der Norm

$$\|\varphi\|_{L^\infty(0, T; X)} := \operatorname{ess\,sup}_{t \in (0, T)} \|\varphi(\cdot, t)\|_X. \quad (5.12)$$

Jetzt können wir den Begriff der schwachen Stetigkeit einführen, welcher uns zum Begriff der schwachen Lösung der instationären, inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen bringt.

Definition 5.1. Sei $\varphi: (0, T) \rightarrow X$. φ heißt *schwach stetig* in t_0 , wenn für jede Folge $\{t_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset (0, T)$ mit

$$\lim_{m \rightarrow \infty} t_m = t_0$$

und jedes $\psi \in X'$ gilt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \langle \varphi(\cdot, t_m), \psi \rangle_{X \times X'} = \langle \varphi(\cdot, t_0), \psi \rangle_{X \times X'}.$$

Nun erlaubt uns diese Definition, einen geeigneten schwachen Lösungsbegriff für die instationären, inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen anzugeben.

Definition 5.2. Seien $T > 0$, $\mathbf{u}_0 \in H$, $\mathbf{f}_\mathbf{u} \in L^2(0, T; V')$ und

$$\mathbf{u} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^n) \cap L^2(0, T; V').$$

Dann nennen wir u eine *schwache Lösung* von (5.3a), wenn für alle

$$\mathbf{v} \in \mathcal{C}^1(0, T; L^2(\Omega)^n) \cap \mathcal{C}^0(0, T; V)$$

mit $\mathbf{v}(\cdot, T) = 0$

$$\begin{aligned} - \int_0^T \left(\mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right) dt + \nu \cdot \int_0^T a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) dt + \int_0^T N(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) dt \\ = \int_0^T (\mathbf{f}_\mathbf{u}, \mathbf{v}) dt + (\mathbf{u}_0, \mathbf{v}(\cdot, 0)) \end{aligned} \quad (5.13)$$

gilt.

Diese Definition motiviert sich aus (5.3a) durch Multiplikation mit einer Testfunktion \mathbf{v} , Integration über Ω , Integration über $[0, T]$ und partieller Integration der beiden ersten Integrale der linken Seite. Dies ergibt somit schließlich die Variationsformulierung

$$\begin{aligned} - \int_0^T \left(\mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right) dt + \nu \cdot \int_0^T a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) dt + \int_0^T N(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) dt \\ = \int_0^T (\mathbf{f}_\mathbf{u}, \mathbf{v}) dt + (\mathbf{u}_0, \mathbf{v}(\cdot, 0)). \end{aligned}$$

Für die Existenz schwacher Lösungen zu (5.3a) finden wir das nachfolgende Resultat.

Satz 5.3. Seien \mathbf{f}_u und \mathbf{u}_0 wie in der Definition 5.2 der schwachen Lösung. Dann besitzt (5.3a) mindestens eine schwache Lösung \mathbf{u} . Außerdem gilt $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \in L^1(0, T; V')$.

Beweis. Dieser Beweis findet sich bei [61, IV Satz 1.3] oder [63, Satz 2.3]. □

Zur Frage der Eindeutigkeit ergibt sich folgender Satz.

Satz 5.4. 1.) Sei $d = 2$. Dann besitzt (5.3a) genau eine schwache Lösung \mathbf{u} . Außerdem gilt $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \in L^2(0, T; V')$, $\mathbf{u} \in \mathcal{C}(0, T; H)$ und $\mathbf{u}(\cdot, t) \rightarrow \mathbf{u}_0$ in H für $t \rightarrow 0$.

2.) Sei $d = 3$. Dann gilt für jede schwache Lösung von (5.3a) $\mathbf{u} \in L^{\frac{8}{3}}(0, T; L^4(\Omega)^3)$ und $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \in L^{\frac{4}{3}}(0, T; V')$. Es gibt höchstens eine schwache Lösung in $L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$. Eine solche Lösung ist automatisch in $\mathcal{C}(0, T; H)$ und erfüllt den Grenzwertprozess $\mathbf{u}(\cdot, t) \rightarrow \mathbf{u}_0$ in H für $t \rightarrow 0$.

Beweis. Dieser Beweis findet sich bei [61, IV Satz 1.5] oder [63, Satz 2.5]. □

5.2 Motivation des Magnetohydrodynamikproblems

Aus den Gleichungen (3.8), (3.9), (5.1) und (5.2) gewinnen wir mit der Modifikation des magnetischen Pseudo-Drucks als Lagrange-Multiplikator das zeitabhängige Magnetohydrodynamikproblem, indem wir die zusätzlichen Kraftterme $(\nabla \times \mathbf{b}) \times \varrho \mathbf{b}$ aus \mathbf{f}_u und $\nabla \times (\mathbf{u} \times \varrho \mathbf{b})$ aus dem divergenzfreien \mathbf{f}_b berücksichtigt, ohne dabei spezielle relativistische oder quantenmechanische Effekte zu beachten. Somit erhalten wir

$$\partial_t \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - (\nabla \times \mathbf{b}) \times (\varrho \mathbf{b}) = \mathbf{f}_u, \quad (5.14)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (5.15)$$

$$\varrho \partial_t \mathbf{b} + \lambda \nabla \times \nabla \times \mathbf{b} + \nabla r - \nabla \times (\mathbf{u} \times (\varrho \mathbf{b})) = \mathbf{f}_b, \quad (5.16)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0 \quad (5.17)$$

für das zeitabhängige inkompressible Magnetohydrodynamikmodell. Zu Fragen der Existenz und Eindeutigkeit des zeitabhängigen Magnetohydrodynamikmodells verweisen wir auf die Arbeiten [25] von G. Duvaut und J.L. Lions und [59] von M. Sermange und R. Temam, während die Frage der Wohlgestelltheit für das stationäre Magnetohydrodynamikmodell im Folgenden erläutert wird.

5.3 Stationäre Problemformulierung und Wohlgestelltheit

Zuerst werden wir uns damit beschäftigen, die Fragestellung (5.14)-(5.17) zu linearisieren. Wir folgen dabei einem Zeitdiskretisierungsansatz und einer Linearisierungsidee in [7]. Sei $\theta \in [0, 1]$ und setze

$$\dot{\mathbf{u}}^{n+1} = \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t},$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}^{n+\theta} &= \theta \mathbf{u}^{n+1} + (1-\theta) \mathbf{u}^n, \\
\dot{\mathbf{b}}^{n+1} &= \frac{\mathbf{b}^{n+1} - \mathbf{b}^n}{\Delta t}, \\
\mathbf{b}^{n+\theta} &= \theta \mathbf{b}^{n+1} + (1-\theta) \mathbf{b}^n.
\end{aligned}$$

Bezeichnen wir mit $\hat{\mathbf{u}}^n$ und $\hat{\mathbf{b}}^n$ Zeitextrapolationen an $\mathbf{u}^{n+\theta}$ und $\mathbf{b}^{n+\theta}$, so erhalten wir in Analogie zu (5.14)-(5.17)

$$\dot{\mathbf{u}}^{n+1} - \nu \Delta \mathbf{u}^{n+\theta} + (\hat{\mathbf{u}}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+\theta} + \nabla p^{n+\theta} - (\nabla \times \mathbf{b}^{n+\theta}) \times (\varrho \hat{\mathbf{b}}^n) = \mathbf{f}_{\mathbf{u}}, \quad (5.18)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+\theta} = 0, \quad (5.19)$$

$$\varrho \dot{\mathbf{b}}^{n+1} + \lambda \nabla \times \nabla \times \mathbf{b}^{n+\theta} + \nabla r^{n+\theta} - \nabla \times (\mathbf{u}^{n+\theta} \times (\varrho \hat{\mathbf{b}}^n)) = \mathbf{f}_{\mathbf{b}}, \quad (5.20)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{b}^{n+\theta} = 0. \quad (5.21)$$

Setzen wir zur Motivation $\theta = 1$ und schieben wir bekannte Terme auf die rechte Seite der Gleichungen, so erhalten wir

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1}}{\Delta t} - \nu \Delta \mathbf{u}^{n+1} + (\hat{\mathbf{u}}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+1} + \nabla p^{n+1} - (\nabla \times \mathbf{b}^{n+1}) \times (\varrho \hat{\mathbf{b}}^n) = \hat{\mathbf{f}}_{\mathbf{u}},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0,$$

$$\varrho \frac{\mathbf{b}^{n+1}}{\Delta t} + \lambda \nabla \times \nabla \times \mathbf{b}^{n+1} + \nabla r^{n+1} - \nabla \times (\mathbf{u}^{n+1} \times (\varrho \hat{\mathbf{b}}^n)) = \hat{\mathbf{f}}_{\mathbf{b}},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{b}^{n+1} = 0$$

mit modifizierten rechten Seiten $\hat{\mathbf{f}}_{\mathbf{u}}$ und $\hat{\mathbf{f}}_{\mathbf{b}}$. Die Terme $\frac{\mathbf{u}^{n+1}}{\Delta t}$ und $\varrho \frac{\mathbf{b}^{n+1}}{\Delta t}$ können als Reaktionssterme interpretiert werden und geben zusätzliche L^2 -Kontrolle über \mathbf{u} und \mathbf{b} in jedem Zeitschritt. Wir werden in diesem Unterabschnitt und in Kapitel 6 sehen, dass wir selbst ohne diese zusätzliche Kontrolle Wohlgestelltheit des kontinuierlichen und des diskreten, stabilisierten Problems im stationären Falle erhalten können. Mittels der Untersuchung des stationären Gleichgewichtszustandes eines thermodynamischen Systems in (5.18) - (5.21) durch $\dot{\mathbf{u}}^{n+1} = \mathbf{0}$ und $\dot{\mathbf{b}}^{n+1} = \mathbf{0}$ können wir mittels $(\mathbf{a}, \mathbf{d}) = (\hat{\mathbf{u}}^n, \varrho \hat{\mathbf{b}}^n)$ linearisieren. Definieren wir schließlich $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{n+\theta}$, $\mathbf{b} = \mathbf{b}^{n+\theta}$, $p = p^{n+\theta}$ und $r = r^{n+\theta}$, bekommen wir hieraus

$$-\nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - (\nabla \times \mathbf{b}) \times \mathbf{d} = \mathbf{f}_{\mathbf{u}}, \quad (5.22)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (5.23)$$

$$\lambda \nabla \times (\nabla \times \mathbf{b}) + \nabla r - \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{d}) = \mathbf{f}_{\mathbf{b}}, \quad (5.24)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0. \quad (5.25)$$

Um Randbedingungen für diese Problemstellung anzugeben, zerlegen wir den Rand $\Gamma = \partial\Omega$ des beschränkten, polygonalen, im Allgemeinen nichtkonvexen Gebietes $\Omega \in \mathbb{R}^d$ mit $d \in \{2, 3\}$ in zwei disjunkte Partitionen mittels

$$\Gamma = \Gamma_{f,w} \cup \Gamma_{f,n}, \quad (5.26)$$

$$\Gamma = \Gamma_{m,w} \cup \Gamma_{m,n}, \quad (5.27)$$

wobei der erste Buchstabe das Fluidteilproblem oder das Magnetfeldteilproblem beschreibt, wohingegen der zweite Buchstabe angibt, ob es sich um wesentliche oder natürliche Randbedingungen handelt. Das Geschwindigkeitsfeldproblem wird mit den Randbedingungen

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_\Gamma \text{ auf } \Gamma_{f,w} \quad (5.28)$$

und

$$-p\mathbf{n} + \nu\mathbf{n} \cdot \nabla\mathbf{u} = \sigma_{n,f} \text{ auf } \Gamma_{f,n} \quad (5.29)$$

versehen, wobei \mathbf{u}_Γ eine wesentliche vorgeschriebene Randbedingung und $\sigma_{n,f}$ die rechte Seite der Robinrandbedingung wiedergeben. Es stellt \mathbf{n} die äußere Einheitsnormale des Gebietes Ω dar. Für das Magnetfeldproblem werden die wesentlichen Randbedingungen

$$\mathbf{n} \times \mathbf{b} = \mathbf{n} \times \mathbf{b}_\Gamma \text{ auf } \Gamma_{m,w} \quad (5.30)$$

für das Magnetfeld und

$$r = 0 \text{ auf } \Gamma_{m,w} \quad (5.31)$$

für den magnetischen Pseudodruck gegeben. Die natürlichen Randbedingungen werden mittels

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{b}_\Gamma \text{ auf } \Gamma_{m,n} \quad (5.32)$$

und

$$\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{b}) = \mathbf{J}_\Gamma \text{ auf } \Gamma_{m,n} \quad (5.33)$$

beschrieben.

Aus den obigen Randbedingungen lässt sich eine variationelle Formulierung gewinnen. Zur Vereinfachung der Darstellung werden homogene Randbedingungen angenommen und daher wird $\Gamma_{f,n} = \emptyset$ und $\Gamma_{m,n} = \emptyset$ gesetzt. Somit können die Funktionenräume

$$V = \left\{ \mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^d : \mathbf{v} = 0 \text{ auf } \partial\Omega \right\}, \quad (5.34)$$

$$Q = L_0^2(\Omega) = \left\{ q \in L^2(\Omega) \left| \int_{\Omega} q \, dx = 0 \right. \right\}, \quad (5.35)$$

$$C = \{ \mathbf{c} \in H(\text{rot}; \Omega) : \mathbf{n} \times \mathbf{c} = 0 \text{ auf } \partial\Omega \}, \quad (5.36)$$

$$S = H_0^1(\Omega) \quad (5.37)$$

betrachtet werden. V entspricht der Wahl des Geschwindigkeitsraumes, Q der Wahl des Funktionenraumes für den kinematischen Druck, C dem Magnetfeldraum und S erfüllt die Bedingungen an den magnetischen Pseudodruck.

Mit geeigneten Skalarprodukten und Dualprodukten, Multiplikation mit Testfunktionen aus den obigen Funktionenräumen, partieller Integration und der sich damit ergebenden Wahl für die Bilinearform und die Linearform mittels

$$\mathcal{A}_G(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = \nu(\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{v}) + \langle \mathbf{a} \cdot \nabla\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - (p, \nabla \cdot \mathbf{v}) - \langle (\nabla \times \mathbf{b}) \times \mathbf{d}, \mathbf{v} \rangle$$

$$+ (\nabla \cdot \mathbf{u}, q) - (\mathbf{b}, \nabla s) \quad (5.38)$$

$$\begin{aligned} & + \lambda (\nabla \times \mathbf{b}, \nabla \times \mathbf{c}) + (\nabla r, \mathbf{c}) - \langle \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{d}), \mathbf{c} \rangle, \\ \mathcal{F}_G(\mathbf{V}) &= \langle \mathbf{f}_u, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{f}_b, \mathbf{c} \rangle \end{aligned} \quad (5.39)$$

lässt sich die Variationsformulierung des stationären inkompressiblen Magnetohydrodynamikproblems (5.22)-(5.25) in folgender Weise formulieren:

„Finde $\mathbf{U} := (\mathbf{u}, \mathbf{b}, p, r) \in V \times C \times Q \times S$ dergestalt, dass

$$\mathcal{A}_G(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = \mathcal{F}_G(\mathbf{V}) \quad (5.40)$$

für alle $\mathbf{V} := (\mathbf{v}, \mathbf{c}, q, s) \in V \times C \times Q \times S$ gilt.“

Es gelten nach [8] die Bedingungen

$$\exists \beta_f > 0 : \inf_{q \in Q} \sup_{\mathbf{v} \in V} \frac{(q, \nabla \cdot \mathbf{v})}{\|q\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)^d}} \geq \beta_f \quad (5.41)$$

und

$$\exists \beta_m > 0 : \inf_{s \in S} \sup_{\mathbf{c} \in C} \frac{(\nabla s, \mathbf{c})}{\|s\|_{H^1(\Omega)^d} \|\mathbf{c}\|_{H(\text{rot}; \Omega)}} \geq \beta_m, \quad (5.42)$$

wobei in den Infima und Suprema offensichtliche Divisionen durch Null aufgrund der Definitionen der Räume nicht gestattet sind. Ferner gelten nach [52, Korollar 3.51] die Friedrichs-Ungleichungen

$$\|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)^d} \leq C \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}} \quad \forall \mathbf{v} \in V \quad (5.43)$$

und

$$\|\mathbf{c}\|_{H(\text{rot}; \Omega)} \leq C \left\{ \|\nabla \times \mathbf{c}\|_{L^2(\Omega)^d} + \|\nabla \cdot \mathbf{c}\|_{L^2(\Omega)} \right\} \quad \forall \mathbf{c} \in C. \quad (5.44)$$

Diese Aussagen sind die Hilfsmittel, um das folgende Wohlgestelltheorem nach [8, Theorem 1] zu beweisen. Dafür werden auf den Funktionenräumen V , C , Q und S aus (5.34)-(5.37) die Normen

$$\|\mathbf{v}\|_V := \frac{\sqrt{\nu}}{L_0} \cdot \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)^d} + \sqrt{\nu} \cdot \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}}, \quad (5.45)$$

$$\|\mathbf{c}\|_C := \frac{\sqrt{\lambda}}{L_0} \cdot \|\mathbf{c}\|_{L^2(\Omega)^d} + \sqrt{\lambda} \cdot \|\nabla \times \mathbf{c}\|_{L^2(\Omega)^d}, \quad (5.46)$$

$$\|q\|_Q := \frac{1}{\sqrt{\nu}} \cdot \|q\|_{L^2(\Omega)}, \quad (5.47)$$

$$\|s\|_S := \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \cdot \|s\|_{L^2(\Omega)} + \frac{L_0}{\sqrt{\lambda}} \cdot \|\nabla s\|_{L^2(\Omega)^d} \quad (5.48)$$

definiert. Die gesamte Norm wird mittels

$$\|(\mathbf{v}, \mathbf{c}, q, s)\|_{\text{Gal}} = \|\mathbf{v}\|_V + \|\mathbf{c}\|_C + \|q\|_Q + \|s\|_S \quad (5.49)$$

gegeben.

Theorem 5.5. *Es gilt die Bedingung*

$$\exists \beta > 0 : \inf_{(\mathbf{u}, \mathbf{b}, p, r) \in V \times C \times Q \times S} \sup_{(\mathbf{v}, \mathbf{c}, q, s) \in V \times C \times Q \times S} \frac{\mathcal{A}_G((\mathbf{u}, \mathbf{b}, p, r), (\mathbf{v}, \mathbf{c}, q, s))}{\|(\mathbf{u}, \mathbf{b}, p, r)\|_{\text{Gal}} \cdot \|(\mathbf{v}, \mathbf{c}, q, s)\|_{\text{Gal}}} \geq \beta \quad (5.50)$$

und somit ist die Problemformulierung (5.40) wohlgestellt.

Beweis. Die Beweisidee ergibt sich wie folgt: $\mathcal{A}_G((\mathbf{u}, \mathbf{b}, 0, 0), (\mathbf{v}, \mathbf{c}, 0, 0))$ ist offensichtlich bilinear, stetig und bei Einschränkung auf $V \cap H(\text{div } 0; \Omega) \times C \cap H(\text{div } 0; \Omega)$ aus (3.13) koerziv, was eine Folge partieller Integration, der Divergenzfreiheit und der Ungleichungen (5.43) und (5.44) ist. Dieses Resultat zusammen mit (5.41) und (5.42) ist nach Theorem 2.6 notwendig und hinreichend zum Beweis der Bedingung (5.50). Dies ist nach Theorem 2.5 notwendig und hinreichend für die Wohlgestelltheit von (5.40). \square

6 Stabilisiertes diskretes Magnetohydrodynamikproblem

In diesem Abschnitt widmen wir uns der stabilisierten diskreten Formulierung des kontinuierlichen Magnetohydrodynamikproblems aus Kapitel 5. Die Ausgangsformulierung aus (5.22) - (5.25) des kontinuierlichen Problems mit den Räumen aus (5.34) - (5.37), den einzelnen Normen (5.45) - (5.48) und der Gesamtnorm aus (5.49) auf dem Produktraum $V \times C \times Q \times S$ bleibt bestehen. Ähnlich zum Vorgehen der Arbeiten [7] - [10] werden wir eine konforme knotenbasierte Finite-Elemente-Methode vorschlagen, sodass $V_h \times C_h \times Q_h \times S_h \subset V \times C \times Q \times S$ gilt.

Im Gegensatz zu den angegebenen Arbeiten, die eine residual-basierte Stabilisierungstechnik formulieren, welche in einem solchen Falle theoretisch 31 einzelne Stabilisierungsterme für die Implementation notwendig macht, werden wir uns an Ideen aus [14] orientieren, sodass eine symmetrische Stabilisierung mit insgesamt maximal 7 einzelnen Stabilisierungstermen vorgenommen wird. Dazu werden Grundlagen der lokalen Projektionsmethode vorgestellt, um anschließend die Stabilität des vorgeschlagenen stabilisierten diskreten Magnetohydrodynamikproblems zu untersuchen. Hierfür wird bereits in der Problemformulierung in der Wahl zwischen Equal-Order-Approximation in den Ansatzräumen $V_h \times Q_h$ und $C_h \times S_h$ und derjenigen der sogenannten inf-sup-stabilen Approximationsräume unterschieden. Diese Unterscheidung wird uns durch die Stabilitätsanalyse und die Fehleranalyse begleiten. Hierbei erfüllen Equal-Order-Approximationen keine inf-sup-Bedingungen zwischen den Räumen $V_h \times Q_h$ beziehungsweise $C_h \times S_h$.

6.1 Finite-Elemente-Räume und lokale Projektion

Wir betrachten konforme Finite-Elemente-Räume

$$V_h \times Q_h \subseteq V \times Q, C_h \times S_h \subseteq C \times S.$$

Es gelten alle Voraussetzungen und Annahmen, die in Unterabschnitt 4.2.1 getroffen worden sind. Insbesondere bleiben also die Annahmen **(A.1)** - **(A.3)** aus Unterabschnitt 4.2.1 für die Paare $V_h \times Q_h$ beziehungsweise $C_h \times S_h$ gültig, womit wir neben der Zerlegung \mathcal{T}_h auch wieder ein Makrogitter \mathcal{M}_h benötigen.

Eines unserer Ziele ist die Anwendung inf-sup-stabiler Finite-Elemente-Raumpaare $V_h \times Q_h$ mit der diskreten Eigenschaft

(A.4): (*Diskrete inf-sup Bedingung*)

$$\exists \beta \neq \beta(h) > 0 \quad : \quad \sup_{\mathbf{v}_h \in V_h \setminus \{0\}} \frac{(\nabla \cdot \mathbf{v}_h, q_h)}{\|\nabla \mathbf{v}_h\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}}} \geq \beta \|q_h\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall q_h \in Q_h. \quad (6.1)$$

Diese Eigenschaft muss für das Finite-Element-Paar $C_h \times S_h$ wegen der Stabilitätsanalyse aus Kapitel 4 nicht gefordert werden, wie wir auch in der kommenden Stabilitätsanalyse aufgrund der vollen Stabilisierung des magnetischen Pseudo-Drucks, die notwendig ist, sehen werden.

Zur Vereinfachung schreiben wir $V_h, C_h = \mathbb{R}_k$ anstatt $V_h = [Y_{h,k}]^d \cap V, C_h = [Y_{h,k}]^d \cap C$ und $Q_h, S_h = \mathbb{R}_{k-1}$ anstatt $Q_h = Y_{h,k-1} \cap Q, S_h = Y_{h,k-1} \cap S, k \geq 2$.

Zum Vergleich betrachten wir auch Equal-Order-Interpolation mit C_h wie oben für $k \geq 1$ und $S_h = Y_{h,k} \cap S, k \geq 1$. Analoges gilt für V_h und S_h .

6.2 Problemformulierung

Wir werden die Problemformulierung für den Ansatz der Equal-Order-Approximation und der inf-sup-stabilen Approximation in diesem Unterabschnitt vorstellen.

6.2.1 Equal-Order Problemformulierung

Die Formulierung des kontinuierlichen Problems aus (5.22) - (5.25) wird um zugehörige Stabilisierungsterme erweitert und mit geeigneten Testfunktionen multipliziert. Gesucht wird dann ein Tupel $\mathbf{U}_h := (\mathbf{u}_h, \mathbf{b}_h, p_h, r_h) \in V_h \times C_h \times Q_h \times S_h$ derart, dass

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \rangle + \nu (\nabla \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) - (p, \nabla \cdot \mathbf{v}_h) - \langle (\nabla \times \mathbf{b}_h) \times \mathbf{d}, \mathbf{v}_h \rangle \\ & + \sum_{M \in \mathcal{M}_h} \tau_1 (\kappa (\mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{u}_h), \kappa (\mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{v}_h))_M + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_2 (\nabla \cdot \mathbf{u}_h, \nabla \cdot \mathbf{v}_h)_K \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$+ \sum_{M \in \mathcal{M}_h} \tau_3 (\kappa (\nabla \times (\mathbf{u}_h \times \mathbf{d})), \kappa (\nabla \times (\mathbf{v}_h \times \mathbf{d})))_M = \langle \mathbf{f}_u, \mathbf{v}_h \rangle,$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{u}_h, q_h) + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_7 (\nabla p_h, \nabla q_h)_K = 0, \quad (6.3)$$

$$\lambda (\nabla \times \mathbf{b}_h, \nabla \times \mathbf{c}_h) + (\nabla r_h, \mathbf{c}_h) - \langle \nabla \times (\mathbf{u}_h \times \mathbf{d}), \mathbf{c}_h \rangle \quad (6.4)$$

$$+ \sum_{M \in \mathcal{M}_h} \tau_4 (\kappa ((\nabla \times \mathbf{b}_h) \times \mathbf{d}), \kappa ((\nabla \times \mathbf{c}_h) \times \mathbf{d}))_M + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_5 (\nabla \cdot \mathbf{b}_h, \nabla \cdot \mathbf{c}_h)_K = \langle \mathbf{f}_b, \mathbf{c}_h \rangle,$$

$$- (\mathbf{b}_h, \nabla s_h) + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_6 (\nabla r_h, \nabla s_h)_K = 0 \quad (6.5)$$

für alle $\mathbf{V}_h := (\mathbf{v}_h, \mathbf{c}_h, q_h, s_h) \in V_h \times C_h \times Q_h \times S_h$ gilt.

Wir erinnern daran, dass in Kapitel 5 die Bilinearform \mathcal{A}_G in (5.38) und die Linearform

\mathcal{F}_G in (5.39) eingeführt worden sind. Ergänzend definieren wir

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{LPS}^{EO}(\mathbf{U}_h, \mathbf{V}_h) &:= \sum_{M \in \mathcal{M}_h} \tau_1 (\kappa(\mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{u}_h), \kappa(\mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{v}_h))_M \\
&+ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_2 (\nabla \cdot \mathbf{u}_h, \nabla \cdot \mathbf{v}_h)_K \\
&+ \sum_{M \in \mathcal{M}_h} \tau_3 (\kappa(\nabla \times (\mathbf{u}_h \times \mathbf{d})), \kappa(\nabla \times (\mathbf{v}_h \times \mathbf{d})))_M \\
&+ \sum_{M \in \mathcal{M}_h} \tau_4 (\kappa((\nabla \times \mathbf{b}_h) \times \mathbf{d}), \kappa((\nabla \times \mathbf{c}_h) \times \mathbf{d}))_M \quad (6.6) \\
&+ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_5 (\nabla \cdot \mathbf{b}_h, \nabla \cdot \mathbf{c}_h)_K \\
&+ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_6 (\nabla r_h, \nabla s_h)_K \\
&+ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_7 (\nabla p_h, \nabla q_h)_K
\end{aligned}$$

für $\mathbf{U}_h, \mathbf{V}_h \in V_h \times C_h \times Q_h \times S_h$. Damit lässt sich das Problem kompakt in der Gestalt, dass ein $\mathbf{U}_h \in V_h \times C_h \times Q_h \times S_h$ gesucht wird, sodass

$$\mathcal{A}_{Stab}^{EO}(\mathbf{U}_h, \mathbf{V}_h) := \mathcal{A}_G(\mathbf{U}_h, \mathbf{V}_h) + \mathcal{S}_{LPS}^{EO}(\mathbf{U}_h, \mathbf{V}_h) = \mathcal{F}_G(\mathbf{V}_h) \quad (6.7)$$

für alle $\mathbf{V}_h \in V_h \times C_h \times Q_h \times S_h$ gilt, schreiben.

6.2.2 Inf-sup-stabile Problemformulierung

Die Formulierung des Problems aus (6.2) - (6.5) bleibt erhalten, außer dass die volle Stabilisierung des Druckgradienten mittels

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_7 (\nabla p_h, \nabla q_h)_K$$

durch eine lokale Projektion mittels

$$\sum_{M \in \mathcal{M}_h} \tau_7 (\kappa(\nabla p_h), \kappa(\nabla q_h))_M$$

ersetzt wird. Für einen Approximationsvergleich im Falle der Oseen-Gleichungen verweisen auf die Arbeit [48]. Damit liest sich der Stabilisierungsterm im Falle der inf-sup-stabilen

Approximation

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{LPS}^{ISS}(\mathbf{U}_h, \mathbf{V}_h) &:= \sum_{M \in \mathcal{M}_h} \tau_1 (\kappa(\mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{u}_h), \kappa(\mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{v}_h))_M \\
&+ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_2 (\nabla \cdot \mathbf{u}_h, \nabla \cdot \mathbf{v}_h)_K \\
&+ \sum_{M \in \mathcal{M}_h} \tau_3 (\kappa(\nabla \times (\mathbf{u}_h \times \mathbf{d})), \kappa(\nabla \times (\mathbf{v}_h \times \mathbf{d})))_M \\
&+ \sum_{M \in \mathcal{M}_h} \tau_4 (\kappa((\nabla \times \mathbf{b}_h) \times \mathbf{d}), \kappa((\nabla \times \mathbf{c}_h) \times \mathbf{d}))_M \quad (6.8) \\
&+ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_5 (\nabla \cdot \mathbf{b}_h, \nabla \cdot \mathbf{c}_h)_K \\
&+ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_6 (\nabla r_h, \nabla s_h)_K \\
&+ \sum_{M \in \mathcal{M}_h} \tau_7 (\kappa(\nabla p_h), \kappa(\nabla q_h))_M
\end{aligned}$$

für $\mathbf{U}_h, \mathbf{V}_h \in V_h \times C_h \times Q_h \times S_h$. Damit lässt sich das Problem kompakt in der Gestalt, dass ein $\mathbf{U}_h \in V_h \times C_h \times Q_h \times S_h$ gesucht wird, sodass

$$\mathcal{A}_{Stab}^{ISS}(\mathbf{U}_h, \mathbf{V}_h) := \mathcal{A}_G(\mathbf{U}_h, \mathbf{V}_h) + \mathcal{S}_{LPS}^{ISS}(\mathbf{U}_h, \mathbf{V}_h) = \mathcal{F}_G(\mathbf{V}_h) \quad (6.9)$$

für alle $\mathbf{V}_h \in V_h \times C_h \times Q_h \times S_h$ gilt, schreiben.

6.3 Stabilitätsanalyse

In diesem Abschnitt wenden wir uns der Stabilitätsanalyse der Problemformulierungen (6.7) und (6.9) zu. Im Wesentlichen folgen wir der Argumentation aus [8, Kapitel 4], wobei wir einerseits statt der 31 Stabilisierungsterme nur maximal 7 Stabilisierungsterme verwenden und andererseits zusätzlich die Stabilitätsanalyse für den Fall inf-sup-stabiler Elemente modifiziert werden muss. Hierfür werden wir zuerst den Fall der Equal-Order-Approximation untersuchen und schließlich die Unterschiede im inf-sup-stabilen Falle für das Geschwindigkeitsfeld und den kinematischen Druck herausarbeiten.

6.3.1 Stabilität im Fall der Equal-Order-Approximation

Ausgangspunkt unserer Untersuchungen ist die Problemformulierung (6.7). Wir definieren für $\mathbf{V}_h := (\mathbf{v}_h, \mathbf{c}_h, q_h, s_h) \in V_h \times C_h \times Q_h \times S_h$ mittels

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{V}_h\|_{\text{Stab, EO, w}} &:= \sqrt{\nu} \|\nabla \mathbf{v}_h\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}} + \sqrt{\lambda} \|\nabla \times \mathbf{c}_h\|_{L^2(\Omega)^d} \\
&+ \left(\sum_{M \in \mathcal{M}_h} \tau_1 \|\kappa (\mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{v}_h)\|_{L^2(M)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_2 \|\nabla \cdot \mathbf{v}_h\|_{L^2(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ \left(\sum_{M \in \mathcal{M}_h} \tau_3 \|\kappa (\nabla \times (\mathbf{v}_h \times \mathbf{d}))\|_{L^2(M)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ \left(\sum_{M \in \mathcal{M}_h} \tau_4 \|\kappa ((\nabla \times \mathbf{c}_h) \times \mathbf{d})\|_{L^2(M)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_5 \|\nabla \cdot \mathbf{c}_h\|_{L^2(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_6 \|\nabla s_h\|_{L^2(K)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_7 \|\nabla q_h\|_{L^2(K)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{6.10}$$

eine schwache Stabilisierungsnorm, bezüglich welcher zunächst die Koerzivität der stabilisierten diskreten Bilinearform $\mathcal{A}_{\text{Stab}}^{\text{EO}}$ gezeigt werden soll.

Lemma 6.1. *Sei $\mathbf{a} \in L^\infty(\Omega)^d \cap V$ mit $\nabla \cdot \mathbf{a} = 0$. Sei desweiteren $\mathbf{d} \in W^{1,\infty}(\Omega)^d \cap H(\text{rot}, \Omega)$. Dann gilt*

$$\frac{1}{9} \|\mathbf{U}_h\|_{\text{Stab, EO, w}}^2 \leq \mathcal{A}_{\text{Stab}}^{\text{EO}}(\mathbf{U}_h, \mathbf{U}_h) \tag{6.11}$$

für alle $\mathbf{U}_h := (\mathbf{u}_h, \mathbf{b}_h, p_h, r_h) \in V_h \times C_h \times Q_h \times S_h$.

Beweis. Partielle Integration liefert für $\mathbf{a} \in L^\infty(\Omega)^d \cap V$ mit $\nabla \cdot \mathbf{a} = 0$ zunächst

$$\langle \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h \rangle = -\frac{1}{2} \langle (\nabla \cdot \mathbf{a}) \mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h \rangle = 0$$

und für $\mathbf{d} \in L^\infty(\Omega)^d \cap H(\text{rot}, \Omega)$

$$\langle (\nabla \times \mathbf{b}_h) \times \mathbf{d}, \mathbf{u}_h \rangle = -\langle \nabla \times (\mathbf{u}_h \times \mathbf{d}), \mathbf{b}_h \rangle$$

nach [8, Lemma 1]. Mit diesen Beziehungen folgt bei symmetrischem Testen in der stabilisierten diskreten Bilinearform \mathcal{A}_{Stab}^{EO}

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{Stab}^{EO}(\mathbf{U}_h, \mathbf{U}_h) &:= \mathcal{A}_G(\mathbf{U}_h, \mathbf{U}_h) + \mathcal{S}_{LPS}^{EO}(\mathbf{U}_h, \mathbf{U}_h) \\ &= \lambda(\nabla \times \mathbf{b}_h, \nabla \times \mathbf{b}_h) + \nu(\nabla \mathbf{u}_h, \nabla \mathbf{u}_h) + \mathcal{S}_{LPS}^{EO}(\mathbf{U}_h, \mathbf{U}_h) \\ &\geq \frac{1}{9} \|\mathbf{U}_h\|_{\text{Stab, EO, w}}^2,\end{aligned}\tag{6.12}$$

was die Behauptung beweist. \square

Bemerkung 6.2. Wir bemerken an dieser Stelle, dass wir im Lemma 6.1 tatsächlich nur verwendet haben, dass für die partielle Integration $\mathbf{d} \in H(\text{rot}, \Omega)$ benötigt wird. Allerdings können wir bei Finite-Elemente-Funktionen auch davon ausgehen, dass diese und deren Gradient essentiell beschränkt sind.

Wir zeigen eine schwache inf-sup-Bedingung für die kontinuierliche Bilinearform \mathcal{A}_G bezüglich der Norm (6.10), wobei wir die Gesamtnorm

$$\|(\mathbf{v}, \mathbf{c}, q, s)\|_{\text{Gal}} = \|\mathbf{v}\|_V + \|\mathbf{c}\|_C + \|q\|_Q + \|s\|_S$$

nach (5.49) mit den Einzelraumnormen (5.45) - (5.48) verwenden.

Lemma 6.3. Sei $\mathbf{a} \in L^\infty(\Omega)^d \cap V$ mit $\nabla \cdot \mathbf{a} = 0$. Sei $\mathbf{d} \in W^{1,\infty}(\Omega)^d \cap H(\text{rot}, \Omega)$. Dann gilt mit einer Konstanten $C > 0$

$$\beta \|\mathbf{U}_h\|_{\text{Gal}} - C_1 \|\mathbf{U}_h\|_{\text{Stab, EO, w}} \leq C \sup_{(\mathbf{v}_h, \mathbf{0}, 0, s_h) \in V_h \times S_h} \frac{\mathcal{A}_G(\mathbf{U}_h, (\mathbf{v}_h, \mathbf{0}, 0, s_h))}{\|(\mathbf{v}_h, \mathbf{0}, 0, s_h)\|_{\text{Gal}}}\tag{6.13}$$

mit der Konstanten $\beta > 0$ aus (5.50) der kontinuierlichen Bedingung für ein beliebiges $\mathbf{U}_h := (\mathbf{u}_h, \mathbf{b}_h, p_h, r_h) \in V_h \times C_h \times Q_h \times S_h$ mit der Konstanten C_1 aus (6.17).

Beweis. Um die Bedingung (6.13) zu beweisen, benutzen wir die kontinuierliche Bedingung (5.50) und die Konformität der Methode. Die Bedingung (5.50) lässt sich derart umformulieren, dass für ein beliebiges Element der Form $\mathbf{U}_h := (\mathbf{u}_h, \mathbf{b}_h, p_h, r_h) \in V_h \times C_h \times Q_h \times S_h$ ein eindeutiges $\mathbf{V} := (\mathbf{v}, \mathbf{c}, q, s) \in V \times C \times Q \times S$ mit der Eigenschaft

$$\|\mathbf{V}\|_{\text{Gal}} = 1\tag{6.14}$$

existiert, sodass

$$\beta \|\mathbf{U}_h\|_{\text{Gal}} \leq \mathcal{A}_G(\mathbf{U}_h, \mathbf{V})\tag{6.15}$$

gilt. Analog zu Lemma 4.3 benutzen wir den Scott-Zhang-Operator $SZ(\cdot)$ und erhalten

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_G(\mathbf{U}_h, \mathbf{V}) &= \mathcal{A}_G(\mathbf{U}_h, (\mathbf{v} - SZ(\mathbf{v}), \mathbf{c}, q, s - SZ(s))) \\ &\quad + \mathcal{A}_G(\mathbf{U}_h, (SZ(\mathbf{v}), \mathbf{0}, 0, SZ(s))) \\ &:= I + II.\end{aligned}\tag{6.16}$$

Mittels der Dreiecksungleichung, Cauchy-Schwarz-Ungleichung, der Poincaré-Ungleichung, partiellen Integrationen, der Eigenschaften des Scott-Zhang-Operators nach Satz 2.14 und der schwachen Norm aus (6.10) folgt

$$\begin{aligned}
I &\leq |\nu \langle \nabla \mathbf{u}_h, \nabla (\mathbf{v} - SZ(\mathbf{v})) \rangle| + |\langle \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{u}_h, \mathbf{v} - SZ(\mathbf{v}) \rangle| + |(p_h, \nabla \cdot (\mathbf{v} - SZ(\mathbf{v})))| \\
&\quad + |\langle (\nabla \times \mathbf{b}_h) \times \mathbf{d}, \mathbf{v} - SZ(\mathbf{v}) \rangle| + |\langle \nabla \cdot \mathbf{u}_h, q \rangle| \\
&\quad + |\lambda \langle \nabla \times \mathbf{b}_h, \nabla \times \mathbf{c} \rangle| + |\langle \nabla r_h, \mathbf{c} \rangle| \\
&\quad + |\langle \nabla \times (\mathbf{u}_h \times \mathbf{d}), \mathbf{c} \rangle| + |\langle \mathbf{b}_h, \nabla (s - SZ(s)) \rangle| \\
&\leq C_{SZ} \sqrt{\nu} \|\nabla \mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}} \sqrt{\nu} \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}} \\
&\quad + C_{SZ} \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{\|\mathbf{a}\|_{L^\infty(K)^d} h_K}{\nu} \right) \sqrt{\nu} \|\nabla \mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}} \sqrt{\nu} \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}} \\
&\quad + C_{SZ} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_7 \|\nabla p_h\|_{L^2(K)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{h_K^2}{\tau_7 \nu} \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(K)^{d \times d}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + C_{SZ} \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{\|\mathbf{d}\|_{L^\infty(K)^d} h_K}{\sqrt{\nu \lambda}} \right) \sqrt{\lambda} \|\nabla \times \mathbf{b}_h\|_{L^2(\Omega)^d} \sqrt{\nu} \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}} \\
&\quad + \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_2 \|\nabla \cdot \mathbf{u}_h\|_{L^2(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{\tau_2}} \right) \frac{1}{\sqrt{\nu}} \|q\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + \sqrt{\lambda} \|\nabla \times \mathbf{b}_h\|_{L^2(\Omega)^d} \sqrt{\lambda} \|\nabla \times \mathbf{c}\|_{L^2(\Omega)^d} \\
&\quad + \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_6 \|\nabla r_h\|_{L^2(K)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{L_0^2}{\tau_6 \lambda} \frac{\lambda}{L_0^2} \|\mathbf{c}\|_{L^2(K)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{\|\mathbf{d}\|_{L^\infty(\Omega)^d}}{\sqrt{\nu \lambda}} \right) \sqrt{\nu} \|\mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}} \sqrt{\lambda} \|\nabla \times \mathbf{c}\|_{L^2(\Omega)^d} \\
&\quad + C_{SZ} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_5 \|\nabla \cdot \mathbf{b}_h\|_{L^2(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{\sqrt{\lambda} h_K}{\sqrt{\tau_5} L_0} \right) \frac{L_0}{\sqrt{\lambda}} \|\nabla s\|_{L^2(\Omega)^d} \\
&\leq C_{SZ} \|\mathbf{U}_h\|_{\text{Stab, EO, w}} \|\mathbf{V}\|_{\text{Gal}} \\
&\quad + C_{SZ} \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{\|\mathbf{a}\|_{L^\infty(K)^d} h_K}{\nu} \right) \|\mathbf{U}_h\|_{\text{Stab, EO, w}} \|\mathbf{V}\|_{\text{Gal}} \\
&\quad + C_{SZ} \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{h_K}{\sqrt{\tau_7} \sqrt{\nu}} \right) \|\mathbf{U}_h\|_{\text{Stab, EO, w}} \|\mathbf{V}\|_{\text{Gal}} \\
&\quad + C_{SZ} \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{\|\mathbf{d}\|_{L^\infty(K)^d} h_K}{\sqrt{\nu \lambda}} \right) \|\mathbf{U}_h\|_{\text{Stab, EO, w}} \|\mathbf{V}\|_{\text{Gal}} \\
&\quad + \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{\tau_2}} \right) \|\mathbf{U}_h\|_{\text{Stab, EO, w}} \|\mathbf{V}\|_{\text{Gal}} \\
&\quad + \|\mathbf{U}_h\|_{\text{Stab, EO, w}} \|\mathbf{V}\|_{\text{Gal}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{L_0}{\sqrt{\tau_6} \sqrt{\lambda}} \right) \|\mathbf{U}_h\|_{\text{Stab, EO, w}} \|\mathbf{V}\|_{\text{Gal}} \\
& + \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{C_P \|\mathbf{d}\|_{L^\infty(K)^d}}{\sqrt{\nu \lambda}} \right) \|\mathbf{U}_h\|_{\text{Stab, EO, w}} \|\mathbf{V}\|_{\text{Gal}} \\
& + C_{SZ} \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{\sqrt{\lambda} h_K}{\sqrt{\tau_5} L_0} \right) \|\mathbf{U}_h\|_{\text{Stab, EO, w}} \|\mathbf{V}\|_{\text{Gal}} \\
\leq & \left\{ C_{SZ} + C_{SZ} \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{\|\mathbf{a}\|_{L^\infty(K)^d} h_K}{\nu} \right) + C_{SZ} \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{h_K}{\sqrt{\tau_7} \sqrt{\nu}} \right) \right. \\
& + C_{SZ} \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{\|\mathbf{d}\|_{L^\infty(K)^d} h_K}{\sqrt{\nu \lambda}} \right) + \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{\tau_2}} \right) + 1 + \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{L_0}{\sqrt{\tau_6} \sqrt{\lambda}} \right) \\
& \left. + \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{C_P \|\mathbf{d}\|_{L^\infty(K)^d}}{\sqrt{\nu \lambda}} \right) + C_{SZ} \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{\sqrt{\lambda} h_K}{\sqrt{\tau_5} L_0} \right) \right\} \|\mathbf{U}_h\|_{\text{Stab, EO, w}} \\
:= & C_1 \|\mathbf{U}_h\|_{\text{Stab, EO, w}}
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
C_1 := & \left\{ 1 + C_{SZ} + C_{SZ} \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{\|\mathbf{a}\|_{L^\infty(K)^d} h_K}{\nu} \right) + C_{SZ} \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{h_K}{\sqrt{\tau_7} \sqrt{\nu}} \right) \right. \\
& + C_{SZ} \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{\|\mathbf{d}\|_{L^\infty(K)^d} h_K}{\sqrt{\nu \lambda}} \right) + \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{\tau_2}} \right) + \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{L_0}{\sqrt{\tau_6} \sqrt{\lambda}} \right) \\
& \left. + \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{C_P \|\mathbf{d}\|_{L^\infty(K)^d}}{\sqrt{\nu \lambda}} \right) + C_{SZ} \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{\sqrt{\lambda} h_K}{\sqrt{\tau_5} L_0} \right) \right\}
\end{aligned} \tag{6.17}$$

als Konstanten. Zusammenfassend gilt also

$$I \leq C_1 \|\mathbf{U}_h\|_{\text{Stab, EO, w}} \tag{6.18}$$

für die Abschätzung des ersten Terms. Wir sehen ferner mit einer Konstanten $C > 0$ ein, dass

$$\begin{aligned}
II & := \mathcal{A}_G(\mathbf{U}_h, (SZ(\mathbf{v}), \mathbf{0}, 0, SZ(s))) \\
& \leq C \sup_{(\mathbf{v}_h, s_h) \in V_h \times S_h} \frac{\mathcal{A}_G(\mathbf{U}_h, (\mathbf{v}_h, \mathbf{0}, 0, s_h))}{\|(\mathbf{v}_h, \mathbf{0}, 0, s_h)\|_{\text{Gal}}}
\end{aligned}$$

gilt, womit sich als Zusammenfassung

$$II \leq C \sup_{(\mathbf{v}_h, s_h) \in V_h \times S_h} \frac{\mathcal{A}_G(\mathbf{U}_h, (\mathbf{v}_h, \mathbf{0}, 0, s_h))}{\|(\mathbf{v}_h, \mathbf{0}, 0, s_h)\|_{\text{Gal}}} \tag{6.19}$$

ergibt. Setzen wir (6.18) und (6.19) in (6.16) ein, so folgt

$$\beta \|\mathbf{U}_h\|_{\text{Gal}} - C_1 \|\mathbf{U}_h\|_{\text{Stab, EO, w}} \leq C \sup_{(\mathbf{v}_h, s_h) \in V_h \times S_h} \frac{\mathcal{A}_G(\mathbf{U}_h, (\mathbf{v}_h, \mathbf{0}, 0, s_h))}{\|(\mathbf{v}_h, \mathbf{0}, 0, s_h)\|_{\text{Gal}}} \tag{6.20}$$

und dies beendet den Beweis. \square

Die Kombination von Lemma 6.1 und Lemma 6.3 liefert das folgende Korollar, welches eine abgeschwächte Kontrolle über die Gesamtnorm der Lösung des stabilisierten diskreten Problems aus (6.7) gewährleistet.

Korollar 6.4. *Seien die Voraussetzungen von Lemma 6.1 und Lemma 6.3 erfüllt. Dann gilt*

$$\beta \|\mathbf{U}_h\|_{\text{Gal}} \leq C \sup_{(\mathbf{v}_h, s_h) \in V_h \times S_h} \frac{\mathcal{A}_G(\mathbf{U}_h, (\mathbf{v}_h, \mathbf{0}, 0, s_h))}{\|(\mathbf{v}_h, \mathbf{0}, 0, s_h)\|_{\text{Gal}}} + 3C_1 \left(\mathcal{A}_{\text{Stab}}^{EO}\right)^{\frac{1}{2}}(\mathbf{U}_h, \mathbf{U}_h) \quad (6.21)$$

für beliebiges $\mathbf{U}_h := (\mathbf{u}_h, \mathbf{b}_h, p_h, r_h) \in V_h \times C_h \times Q_h \times S_h$.

Beweis. Hierbei handelt es sich um eine direkte Konsequenz aus Lemma 6.1 und Lemma 6.3. \square

Wir bemerken aus Lemma 6.3 und der Konstanten C_1 aus (6.17) noch Folgendes.

Bemerkung 6.5. Wegen Lemma 6.3 und der Konstanten C_1 aus (6.17) sehen wir ein, dass wir als untere Schranken für die Stabilisierungsparameter τ_j mit $j \in \{2, 5, 6, 7\}$

$$\begin{aligned} \tau_2 &\geq c\nu, \\ \tau_5 &\geq c \frac{\lambda h_K^2}{L_0^2}, \\ \tau_6 &\geq c \frac{L_0^2}{\lambda}, \\ \tau_7 &\geq c \frac{h_K^2}{\nu} \end{aligned}$$

mit unterschiedlichen Konstanten $c \geq 0$ für die einzelnen Stabilisierungsparameter erhalten.

Wir definieren schließlich für $\mathbf{V}_h := (\mathbf{v}_h, \mathbf{c}_h, q_h, s_h) \in V_h \times C_h \times Q_h \times S_h$ mittels

$$\|\mathbf{V}_h\|_{\text{Stab, EO, s}} := \|\mathbf{V}_h\|_{\text{Stab, EO, w}} + \frac{\sqrt{\nu}}{L_0} \|\mathbf{v}_h\|_{L^2(\Omega)^d} + \frac{1}{\sqrt{\nu}} \|q_h\|_{L^2(\Omega)} \quad (6.22)$$

eine starke Stabilisierungsnorm, wobei die schwache Stabilisierungsnorm aus (6.10) benutzt wird. Offensichtlich gilt mit der Definition der Norm aus (5.49)

$$\begin{aligned} \|\mathbf{V}_h\|_{\text{Stab, EO, s}} &= \|\mathbf{V}_h\|_{\text{Stab, EO, w}} + \frac{\sqrt{\nu}}{L_0} \|\mathbf{v}_h\|_{L^2(\Omega)^d} + \frac{1}{\sqrt{\nu}} \|q_h\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|\mathbf{V}_h\|_{\text{Stab, EO, w}} + \|\mathbf{V}_h\|_{\text{Gal}} \end{aligned} \quad (6.23)$$

für beliebiges $\mathbf{V}_h \in V_h \times C_h \times Q_h \times S_h$. Dies führt zusammenfassend zum folgenden Korollar.

Korollar 6.6. *Seien die Voraussetzungen von Lemma 6.1 und Lemma 6.3 erfüllt. Dann gilt*

$$\begin{aligned} \|\mathbf{U}_h\|_{\text{Stab, EO, s}} &\leq \frac{C}{\beta} \sup_{(\mathbf{v}_h, s_h) \in V_h \times S_h} \frac{\mathcal{A}_G(\mathbf{U}_h, (\mathbf{v}_h, \mathbf{0}, 0, s_h))}{\|(\mathbf{v}_h, \mathbf{0}, 0, s_h)\|_{\text{Gal}}} \\ &\quad + 3 \left(1 + \frac{C_1}{\beta}\right) (\mathcal{A}_{\text{Stab}}^{\text{EO}})^{\frac{1}{2}}(\mathbf{U}_h, \mathbf{U}_h) \end{aligned} \quad (6.24)$$

für beliebiges $\mathbf{U}_h := (\mathbf{u}_h, \mathbf{b}_h, p_h, r_h) \in V_h \times C_h \times Q_h \times S_h$.

Beweis. Nach (6.23), Lemma 6.1 und Korollar 6.4 ergibt sich

$$\begin{aligned} \|\mathbf{U}_h\|_{\text{Stab, EO, s}} &\leq \|\mathbf{U}_h\|_{\text{Stab, EO, w}} + \|\mathbf{U}_h\|_{\text{Gal}} \\ &\leq 3 (\mathcal{A}_{\text{Stab}}^{\text{EO}})^{\frac{1}{2}}(\mathbf{U}_h, \mathbf{U}_h) + \frac{C}{\beta} \sup_{(\mathbf{v}_h, s_h) \in V_h \times S_h} \frac{\mathcal{A}_G(\mathbf{U}_h, (\mathbf{v}_h, \mathbf{0}, 0, s_h))}{\|(\mathbf{v}_h, \mathbf{0}, 0, s_h)\|_{\text{Gal}}} \\ &\quad + \frac{3C_1}{\beta} (\mathcal{A}_{\text{Stab}}^{\text{EO}})^{\frac{1}{2}}(\mathbf{U}_h, \mathbf{U}_h) \\ &= \frac{C}{\beta} \sup_{(\mathbf{v}_h, s_h) \in V_h \times S_h} \frac{\mathcal{A}_G(\mathbf{U}_h, (\mathbf{v}_h, \mathbf{0}, 0, s_h))}{\|(\mathbf{v}_h, \mathbf{0}, 0, s_h)\|_{\text{Gal}}} \\ &\quad + 3 \left(1 + \frac{C_1}{\beta}\right) (\mathcal{A}_{\text{Stab}}^{\text{EO}})^{\frac{1}{2}}(\mathbf{U}_h, \mathbf{U}_h), \end{aligned}$$

was die Behauptung zeigt. □

Wir zeigen nun, dass die Lösung $\mathbf{U}_h \in V_h \times C_h \times Q_h \times S_h$ des Problems (6.7) stetig von den Daten abhängt. Zunächst wird dies bezüglich der schwachen Stabilisierungsnorm $\|\cdot\|_{\text{Stab, EO, w}}$ aus (6.10) nachgewiesen.

Lemma 6.7. *Seien $\mathbf{a} \in L^\infty(\Omega)^d \cap V$, $\nabla \cdot \mathbf{a} = 0$, $\mathbf{d} \in W^{1,\infty}(\Omega)^d \cap H(\text{rot}, \Omega)$. Dann gilt*

$$\|\mathbf{U}_h\|_{\text{Stab, EO, w}} \leq 9 \sup_{\mathbf{V}_h \in V_h \times C_h \times Q_h \times S_h} \frac{\mathcal{F}_G(\mathbf{V}_h)}{\|\mathbf{V}_h\|_{\text{Stab, EO, w}}} \quad (6.25)$$

für die Lösung $\mathbf{U}_h \in V_h \times C_h \times Q_h \times S_h$ von (6.7).

Beweis. Es gilt nach Lemma 6.1

$$\|\mathbf{U}_h\|_{\text{Stab, EO, w}}^2 \leq 9 \mathcal{A}_{\text{Stab}}^{\text{EO}}(\mathbf{U}_h, \mathbf{U}_h). \quad (6.26)$$

Falls $\|\mathbf{U}_h\|_{\text{Stab, EO, w}} = 0$ sein sollte, ist die Ungleichung (6.25) automatisch erfüllt. Gelte folglich $\|\mathbf{U}_h\|_{\text{Stab, EO, w}} > 0$. Dann folgt aus Lemma 6.1

$$\|\mathbf{U}_h\|_{\text{Stab, EO, w}} \leq 9 \frac{\mathcal{A}_{\text{Stab}}^{\text{EO}}(\mathbf{U}_h, \mathbf{U}_h)}{\|\mathbf{U}_h\|_{\text{Stab, EO, w}}}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 9 \sup_{\mathbf{V}_h \in V_h \times C_h \times Q_h \times S_h} \frac{\mathcal{A}_{\text{Stab}}^{\text{EO}}(\mathbf{U}_h, \mathbf{V}_h)}{\|\mathbf{V}_h\|_{\text{Stab, EO, w}}} \\
&= 9 \sup_{\mathbf{V}_h \in V_h \times C_h \times Q_h \times S_h} \frac{\mathcal{F}_G(\mathbf{V}_h)}{\|\mathbf{V}_h\|_{\text{Stab, EO, w}}},
\end{aligned}$$

was den Beweis abschließt. \square

Das vorangegangene Lemma 6.7 ermöglicht es uns, die stetige Abhängigkeit der diskreten Lösung $\mathbf{U}_h \in V_h \times C_h \times Q_h \times S_h$ des Problems (6.7) von den Daten bezüglich der starken Stabilisierungsnorm $\|\cdot\|_{\text{Stab, EO, s}}$ aus (6.22) zu beweisen.

Theorem 6.8. *Seien $\mathbf{a} \in L^\infty(\Omega)^d \cap V$, $\nabla \cdot \mathbf{a} = 0$, $\mathbf{d} \in W^{1,\infty}(\Omega)^d \cap H(\text{rot}, \Omega)$. Dann gilt*

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{U}_h\|_{\text{Stab, EO, s}} &\leq \left(9 + 9\frac{C_1}{\beta} + \frac{CD}{\beta}\right) \|\mathbf{U}_h\|_{\text{Stab, EO, w}} \\
&\quad + \frac{CE}{\beta} \sup_{(\mathbf{v}_h, \mathbf{0}, 0, s_h) \in V_h \times S_h} \frac{|\mathcal{F}_G(\mathbf{v}_h, \mathbf{0}, 0, s_h)|}{\|(\mathbf{v}_h, \mathbf{0}, 0, s_h)\|_{\text{Stab, EO, s}}}
\end{aligned} \tag{6.27}$$

für die Lösung $\mathbf{U}_h \in V_h \times C_h \times Q_h \times S_h$ von (6.7) mit den Konstanten $\beta > 0$ aus (5.50), C_1 aus (6.17), C aus Korollar 6.6 und den Konstanten D und E , welche durch

$$\begin{aligned}
D &:= \left\{ 1 + C \max_{M \in \mathcal{M}_h} \left(\frac{\sqrt{\tau_1} \|\mathbf{a}\|_{L^\infty(M)^d}}{\sqrt{\nu}} \right) + C \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{\sqrt{\tau_2}}{\sqrt{\nu}} \right) \right. \\
&\quad \left. + C \max_{M \in \mathcal{M}_h} \left(\frac{(1+d) \left(\|\mathbf{d}\|_{L^\infty(M)^d} + L_0 \|\nabla \mathbf{d}\|_{L^\infty(M)^{d \times d}} \right) \sqrt{\tau_3}}{\sqrt{\nu}} \right) \right. \\
&\quad \left. + C \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{\sqrt{\tau_6} \sqrt{\lambda}}{L_0} \right) \right\}
\end{aligned} \tag{6.28}$$

und

$$\begin{aligned}
E &:= \left\{ 4 + C \max_{M \in \mathcal{M}_h} \left(\frac{\sqrt{\tau_1} \|\mathbf{a}\|_{L^\infty(M)^d}}{\sqrt{\nu}} \right) + C \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{\sqrt{\tau_2}}{\sqrt{\nu}} \right) \right. \\
&\quad \left. + C \max_{M \in \mathcal{M}_h} \left(\frac{(1+d) \left(\|\mathbf{d}\|_{L^\infty(M)^d} + L_0 \|\nabla \mathbf{d}\|_{L^\infty(M)^{d \times d}} \right) \sqrt{\tau_3}}{\sqrt{\nu}} \right) \right. \\
&\quad \left. + C \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{\sqrt{\tau_6} \sqrt{\lambda}}{L_0} \right) \right\}
\end{aligned} \tag{6.29}$$

definiert werden.

Beweis. Zum Beweis des Theorems dient Korollar 6.6, wonach

$$\|\mathbf{U}_h\|_{\text{Stab, EO, s}} \leq \frac{C}{\beta} \sup_{(\mathbf{v}_h, \mathbf{0}, 0, s_h) \in V_h \times S_h} \frac{\mathcal{A}_G(\mathbf{U}_h, (\mathbf{v}_h, \mathbf{0}, 0, s_h))}{\|(\mathbf{v}_h, \mathbf{0}, 0, s_h)\|_{\text{Gal}}}$$

$$\begin{aligned}
& +3 \left(1 + \frac{C_1}{\beta}\right) (\mathcal{A}_{Stab}^{EO})^{\frac{1}{2}}(\mathbf{U}_h, \mathbf{U}_h) \\
& := I + II
\end{aligned}$$

gilt. Für II beobachten wir, dass

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{Stab}^{EO}(\mathbf{U}_h, \mathbf{U}_h) &= \nu \|\nabla \mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \lambda \|\nabla \times \mathbf{b}_h\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \mathcal{S}_{LPS}^{EO}(\mathbf{U}_h, \mathbf{U}_h) \\
&\leq 9 \|\mathbf{U}_h\|_{\text{Stab, EO, w}}^2
\end{aligned}$$

ist und sehen somit ein, dass sich

$$|II| = \left| 3 \left(1 + \frac{C_1}{\beta}\right) (\mathcal{A}_{Stab}^{EO})^{\frac{1}{2}}(\mathbf{U}_h, \mathbf{U}_h) \right| \leq 9 \left(1 + \frac{C_1}{\beta}\right) \|\mathbf{U}_h\|_{\text{Stab, EO, w}} \quad (6.30)$$

ergibt. Für eine Abschätzung mit einem beliebigem Element $(\mathbf{v}_h, \mathbf{0}, 0, s_h) \in V_h \times C_h \times Q_h \times S_h$ betrachten wir die Gleichung

$$\begin{aligned}
& \mathcal{A}_G(\mathbf{U}_h, (\mathbf{v}_h, \mathbf{0}, 0, s_h)) \\
&= \mathcal{F}_G((\mathbf{v}_h, \mathbf{0}, 0, s_h)) - \sum_{M \in \mathcal{M}_h} \tau_1 (\kappa(\mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{u}_h), \kappa(\mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{v}_h))_M \\
&\quad - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_2 (\nabla \cdot \mathbf{u}_h, \nabla \cdot \mathbf{v}_h)_K - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_6 (\nabla r_h, \nabla s_h)_K \\
&\quad - \sum_{M \in \mathcal{M}_h} \tau_3 (\kappa(\nabla \times (\mathbf{u}_h \times \mathbf{d})), \kappa(\nabla \times (\mathbf{v}_h \times \mathbf{d})))_M
\end{aligned} \quad (6.31)$$

und somit die Abschätzung

$$\begin{aligned}
& \mathcal{A}_G(\mathbf{U}_h, (\mathbf{v}_h, \mathbf{0}, 0, s_h)) \\
&\leq |\mathcal{A}_G(\mathbf{U}_h, (\mathbf{v}_h, \mathbf{0}, 0, s_h))| \\
&\leq |\mathcal{F}_G((\mathbf{v}_h, \mathbf{0}, 0, s_h))| + 4 \|(\mathbf{v}_h, \mathbf{0}, 0, s_h)\|_{\text{Stab, EO, w}} \|\mathbf{U}_h\|_{\text{Stab, EO, w}}.
\end{aligned}$$

Desweiteren erhalten wir mit der Vektorformel

$$\nabla \times (\mathbf{z}_1 \times \mathbf{z}_2) = \mathbf{z}_2 \cdot \nabla \mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2 (\nabla \cdot \mathbf{z}_1) - \mathbf{z}_1 \cdot \nabla \mathbf{z}_2 + \mathbf{z}_1 (\nabla \cdot \mathbf{z}_2)$$

und der Approximationseigenschaft des Fluktuationsoperators mit unterschiedlichen Konstanten C in den Summanden

$$\begin{aligned}
& \|(\mathbf{v}_h, \mathbf{0}, 0, s_h)\|_{\text{Stab, EO, w}} \\
&= \sqrt{\nu} \|\nabla \mathbf{v}_h\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}} + \left(\sum_{M \in \mathcal{M}_h} \tau_1 \|\kappa(\mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{v}_h)\|_{L^2(M)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_2 \|\nabla \cdot \mathbf{v}_h\|_{L^2(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\sum_{M \in \mathcal{M}_h} \tau_3 \|\kappa (\nabla \times (\mathbf{v}_h \times \mathbf{d}))\|_{L^2(M)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
& + \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_6 \|\nabla s_h\|_{L^2(K)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
\leq & \left\{ 1 + C \max_{M \in \mathcal{M}_h} \left(\frac{\sqrt{\tau_1} \|\mathbf{a}\|_{L^\infty(M)^d}}{\sqrt{\nu}} \right) + C \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{\sqrt{\tau_2}}{\sqrt{\nu}} \right) \right. \\
& + C \max_{M \in \mathcal{M}_h} \left(\frac{(1+d) (\|\mathbf{d}\|_{L^\infty(M)^d} + L_0 \|\nabla \mathbf{d}\|_{L^\infty(M)^{d \times d}}) \sqrt{\tau_3}}{\sqrt{\nu}} \right) \\
& \left. + C \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{\sqrt{\tau_6} \sqrt{\lambda}}{L_0} \right) \right\} \|(\mathbf{v}_h, \mathbf{0}, 0, s_h)\|_{\text{Gal}}.
\end{aligned}$$

Definieren wir die Konstante D wie in (6.28), so gilt

$$\|(\mathbf{v}_h, \mathbf{0}, 0, s_h)\|_{\text{Stab, EO, w}} \leq D \|(\mathbf{v}_h, \mathbf{0}, 0, s_h)\|_{\text{Gal}},$$

was zusammenfassend

$$\begin{aligned}
& \mathcal{A}_G(\mathbf{U}_h, (\mathbf{v}_h, \mathbf{0}, 0, s_h)) \\
\leq & |\mathcal{A}_G(\mathbf{U}_h, (\mathbf{v}_h, \mathbf{0}, 0, s_h))| \\
\leq & |\mathcal{F}_G((\mathbf{v}_h, \mathbf{0}, 0, s_h))| + 4 \|(\mathbf{v}_h, \mathbf{0}, 0, s_h)\|_{\text{Stab, EO, w}} \|\mathbf{U}_h\|_{\text{Stab, EO, w}} \\
\leq & |\mathcal{F}_G((\mathbf{v}_h, \mathbf{0}, 0, s_h))| + 4D \|(\mathbf{v}_h, \mathbf{0}, 0, s_h)\|_{\text{Gal}} \|\mathbf{U}_h\|_{\text{Stab, EO, w}}
\end{aligned}$$

gibt. Da das Element $(\mathbf{v}_h, \mathbf{0}, 0, s_h) \in V_h \times C_h \times Q_h \times S_h$ beliebig gewählt worden ist, folgt

$$\begin{aligned}
\sup_{(\mathbf{v}_h, s_h) \in V_h \times S_h} \frac{\mathcal{A}_G(\mathbf{U}_h, (\mathbf{v}_h, \mathbf{0}, 0, s_h))}{\|(\mathbf{v}_h, \mathbf{0}, 0, s_h)\|_{\text{Gal}}} & \leq \sup_{(\mathbf{v}_h, s_h) \in V_h \times S_h} \frac{|\mathcal{F}_G((\mathbf{v}_h, \mathbf{0}, 0, s_h))|}{\|(\mathbf{v}_h, \mathbf{0}, 0, s_h)\|_{\text{Gal}}} \\
& + 4D \|\mathbf{U}_h\|_{\text{Stab, EO, w}}.
\end{aligned} \tag{6.32}$$

Analog zur Abschätzung

$$\|(\mathbf{v}_h, \mathbf{0}, 0, s_h)\|_{\text{Stab, EO, w}} \leq D \|(\mathbf{v}_h, \mathbf{0}, 0, s_h)\|_{\text{Gal}}$$

sehen wir mit der Konstanten E wie in (6.29) ein, dass sich

$$\|(\mathbf{v}_h, \mathbf{0}, 0, s_h)\|_{\text{Stab, EO, s}} \leq E \|(\mathbf{v}_h, \mathbf{0}, 0, s_h)\|_{\text{Gal}}$$

ergibt. Dies liefert

$$\begin{aligned}
\sup_{(\mathbf{v}_h, s_h) \in V_h \times S_h} \frac{\mathcal{A}_G(\mathbf{U}_h, (\mathbf{v}_h, \mathbf{0}, 0, s_h))}{\|(\mathbf{v}_h, \mathbf{0}, 0, s_h)\|_{\text{Gal}}} & \leq E \sup_{(\mathbf{v}_h, s_h) \in V_h \times S_h} \frac{|\mathcal{F}_G((\mathbf{v}_h, \mathbf{0}, 0, s_h))|}{\|(\mathbf{v}_h, \mathbf{0}, 0, s_h)\|_{\text{Stab, EO, s}}} \\
& + 4D \|\mathbf{U}_h\|_{\text{Stab, EO, w}}.
\end{aligned} \tag{6.33}$$

Die Abschätzungen von I und II aus (6.33) führen uns wegen der Ungleichung vom Anfang dieses Theorems zu

$$\begin{aligned} \|\mathbf{U}_h\|_{\text{Stab, EO, s}} &\leq \left(9 + 9\frac{C_1}{\beta} + \frac{CD}{\beta}\right) \|\mathbf{U}_h\|_{\text{Stab, EO, w}} \\ &\quad + \frac{CE}{\beta} \sup_{(\mathbf{v}_h, s_h) \in V_h \times S_h} \frac{|\mathcal{F}_G(\mathbf{v}_h, \mathbf{0}, 0, s_h)|}{\|(\mathbf{v}_h, \mathbf{0}, 0, s_h)\|_{\text{Stab, EO, s}}}, \end{aligned}$$

was das Theorem beweist. \square

6.3.2 Stabilität im Fall der inf-sup-stabilen Approximation

Ausgangspunkt unserer Untersuchungen ist die Problemformulierung (6.9). Wir definieren für $\mathbf{V}_h := (\mathbf{v}_h, \mathbf{c}_h, q_h, s_h) \in V_h \times C_h \times Q_h \times S_h$ mittels

$$\begin{aligned} \|\mathbf{V}_h\|_{\text{Stab, ISS, w}} &:= \sqrt{\nu} \|\nabla \mathbf{v}_h\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}} + \sqrt{\lambda} \|\nabla \times \mathbf{c}_h\|_{L^2(\Omega)^d} \\ &\quad + \left(\sum_{M \in \mathcal{M}_h} \tau_1 \|\kappa(\mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{v}_h)\|_{L^2(M)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_2 \|\nabla \cdot \mathbf{v}_h\|_{L^2(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left(\sum_{M \in \mathcal{M}_h} \tau_3 \|\kappa(\nabla \times (\mathbf{v}_h \times \mathbf{d}))\|_{L^2(M)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left(\sum_{M \in \mathcal{M}_h} \tau_4 \|\kappa((\nabla \times \mathbf{c}_h) \times \mathbf{d})\|_{L^2(M)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_5 \|\nabla \cdot \mathbf{c}_h\|_{L^2(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_6 \|\nabla s_h\|_{L^2(K)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left(\sum_{K \in \mathcal{M}_h} \tau_7 \|\kappa(\nabla q_h)\|_{L^2(M)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{6.34}$$

eine schwache Stabilisierungsnorm, bezüglich welcher zunächst die Koerzivität der stabilisierten diskreten Bilinearform $\mathcal{A}_{\text{Stab}}^{\text{ISS}}$ gezeigt werden soll.

Lemma 6.9. *Sei $\mathbf{a} \in L^\infty(\Omega)^d \cap V$ mit $\nabla \cdot \mathbf{a} = 0$. Sei desweiteren $\mathbf{d} \in W^{1,\infty}(\Omega)^d \cap H(\text{rot}, \Omega)$. Dann gilt*

$$\frac{1}{9} \|\mathbf{U}_h\|_{\text{Stab, ISS, w}}^2 \leq \mathcal{A}_{\text{Stab}}^{\text{ISS}}(\mathbf{U}_h, \mathbf{U}_h) \tag{6.35}$$

für alle $\mathbf{U}_h := (\mathbf{u}_h, \mathbf{b}_h, p_h, r_h) \in V_h \times C_h \times Q_h \times S_h$.

Beweis. Der Beweis verläuft ähnlich zu Lemma 6.1. \square

Analog zu Bemerkung 6.2 können die Bedingungen abgeschwächt werden. Wir wollen folgendes Hilfsresultat beweisen.

Lemma 6.10. *Sei $\mathbf{a} \in L^\infty(\Omega)^d \cap V$ mit $\nabla \cdot \mathbf{a} = 0$. Sei desweiteren $\mathbf{d} \in W^{1,\infty}(\Omega)^d \cap H(\text{rot}, \Omega)$. Dann gilt mit Konstanten $C_2 > 0$ aus (6.40) und $C_3 > 0$ aus (6.41)*

$$\|p_h\|_Q \leq C_2 \cdot \sup_{(\mathbf{v}_h, s_h) \in V_h \times S_h} \frac{\mathcal{A}_G(\mathbf{U}_h, (\mathbf{v}_h, \mathbf{0}, 0, s_h))}{\|(\mathbf{v}_h, \mathbf{0}, 0, s_h)\|_{\text{Gal}}} + C_3 \|\mathbf{U}\|_{\text{Stab, ISS, w}} \quad (6.36)$$

für den kinematischen Druck $p_h \in Q_h$ in Abhängigkeit von der vollen Magnetohydrodynamik-Lösung $\mathbf{U}_h \in V_h \times C_h \times Q_h \times S_h$.

Beweis. Analog zu [48, Lemma 3.2] existiert zu $p_h \in Q_h$ nach der diskreten inf-sup-Bedingung des Fluid-Teils aus Unterabschnitt 6.1 in (6.1) genau ein $\mathbf{v}_h \in V$ derart, dass

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_h = -p_h \quad (6.37)$$

und mit einer Konstanten $\beta_{\text{fl}} > 0$

$$\|\nabla \mathbf{v}_h\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}} \leq \frac{1}{\beta_{\text{fl}}} \|p_h\|_{L^2(\Omega)} \quad (6.38)$$

gelten. Definiere $C_A := \frac{1}{\beta_{\text{fl}}}$ und schreibe

$$\|\nabla \mathbf{v}_h\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}} \leq C_A \|p_h\|_{L^2(\Omega)}. \quad (6.39)$$

Betrachte Gleichung (6.2), welche

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{f}_u, \mathbf{v}_h \rangle &= (\mathcal{A}_G + \mathcal{S}_{LPS}^{\text{ISS}})(\mathbf{U}_h, (\mathbf{v}_h, \mathbf{0}, 0, 0)) \\ &= -(p_h, \nabla \cdot \mathbf{v}_h) + \langle \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \rangle + \nu (\nabla \mathbf{u}_h, \nabla \mathbf{v}_h) \\ &\quad - \langle (\nabla \times \mathbf{b}_h) \times \mathbf{d}, \mathbf{v}_h \rangle + \sum_{M \in \mathcal{M}_h} \tau_1 (\kappa(\mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{u}_h), \kappa(\mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{v}_h))_M \\ &\quad + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_2 (\nabla \cdot \mathbf{u}_h, \nabla \cdot \mathbf{v}_h)_K + \sum_{M \in \mathcal{M}_h} \tau_3 (\kappa(\nabla \times (\mathbf{u}_h \times \mathbf{d})), \kappa(\nabla \times (\mathbf{v}_h \times \mathbf{d})))_K \end{aligned}$$

liefert. Mit (6.37), (6.39), der Cauchy-Schwarz-Ungleichung, der Poincaré-Ungleichung, der Definition aus (6.34), der Approximationseigenschaft des Fluktuationoperators und der Vektorformel

$$\nabla \times (\mathbf{z}_1 \times \mathbf{z}_2) = \mathbf{z}_2 \cdot \nabla \mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2 (\nabla \cdot \mathbf{z}_1) - \mathbf{z}_1 \cdot \nabla \mathbf{z}_2 + \mathbf{z}_1 (\nabla \cdot \mathbf{z}_2)$$

wie im Equal-Order-Fall folgt daher

$$\begin{aligned} \|p_h\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C_P \|\mathbf{f}_u\|_{L^2(\Omega)^d} \|\nabla \mathbf{v}_h\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}} \\ &\quad + \frac{\|\mathbf{a}\|_{L^\infty(\Omega)^d} C_P}{\sqrt{\nu}} \sqrt{\nu} \|\nabla \mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}} \|\nabla \mathbf{v}_h\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \nu \|\nabla \mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}} \|\nabla \mathbf{v}_h\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}} \\
& + \frac{\|\mathbf{d}\|_{L^\infty(\Omega)^d} C_P}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{\lambda} \|\nabla \times \mathbf{b}_h\|_{L^2(\Omega)^d} \|\nabla \mathbf{v}_h\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}} \\
& + \left(\sum_{M \in \mathcal{M}_h} \tau_1 \|\kappa(\mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{u}_h)\|_{L^2(M)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{M \in \mathcal{M}_h} \tau_1 \|\kappa(\mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{v}_h)\|_{L^2(M)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
& + \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_2 \|\nabla \cdot \mathbf{u}_h\|_{L^2(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_2 \|\nabla \cdot \mathbf{v}_h\|_{L^2(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
& + \left(\sum_{M \in \mathcal{M}_h} \tau_3 \|\kappa(\nabla \times (\mathbf{u}_h \times \mathbf{d}))\|_{L^2(M)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \times \\
& \times \left(\sum_{M \in \mathcal{M}_h} \tau_3 \|\kappa(\nabla \times (\mathbf{v}_h \times \mathbf{d}))\|_{L^2(M)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
\leq & C_P \|\mathbf{f}_u\|_{L^2(\Omega)^d} \|\nabla \mathbf{v}_h\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}} + \frac{\|\mathbf{a}\|_{L^\infty(\Omega)^d} C_P}{\sqrt{\nu}} \|\mathbf{U}_h\|_{\text{Stab, ISS, w}} \|\nabla \mathbf{v}_h\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}} \\
& + \sqrt{\nu} \|\mathbf{U}_h\|_{\text{Stab, ISS, w}} \|\nabla \mathbf{v}_h\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}} + \frac{\|\mathbf{d}\|_{L^\infty(\Omega)^d} C_P}{\sqrt{\lambda}} \|\mathbf{U}_h\|_{\text{Stab, ISS, w}} \times \\
& \times \|\nabla \mathbf{v}_h\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}} + \|\mathbf{U}_h\|_{\text{Stab, ISS, w}} \max_{M \in \mathcal{M}_h} \left(\sqrt{\tau_1} \|\mathbf{a}\|_{L^\infty(M)^d} \right) \|\nabla \mathbf{v}_h\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}} \\
& + \|\mathbf{U}_h\|_{\text{Stab, ISS, w}} \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\sqrt{\tau_2} d \right) \|\nabla \mathbf{v}_h\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}} \\
& + \|\mathbf{U}_h\|_{\text{Stab, ISS, w}} \|\nabla \mathbf{v}_h\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}} \times \\
& \times \max_{M \in \mathcal{M}_h} \left(\sqrt{\tau_3} (1+d) \left(\|\mathbf{d}\|_{L^\infty(M)^d} + \max(1, L_0) \|\nabla \mathbf{d}\|_{L^\infty(M)^{d \times d}} \right) \right) \\
\leq & \|\nabla \mathbf{v}_h\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}} \left\{ C_P \|\mathbf{f}_u\|_{L^2(\Omega)^d} + \|\mathbf{U}_h\|_{\text{Stab, ISS, w}} \left\{ \frac{C_P}{\sqrt{\nu}} \|\mathbf{a}\|_{L^\infty(\Omega)^d} \right. \right. \\
& + \sqrt{\nu} + \frac{C_P}{\sqrt{\lambda}} \|\mathbf{d}\|_{L^\infty(\Omega)^d} + \max_{M \in \mathcal{M}_h} \left(\sqrt{\tau_1} \|\mathbf{a}\|_{L^\infty(M)^d} \right) + \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\sqrt{\tau_2} d \right) \\
& \left. \left. + \max_{M \in \mathcal{M}_h} \left(\sqrt{\tau_3} (1+d) \left(\|\mathbf{d}\|_{L^\infty(M)^d} + \max(1, L_0) \|\nabla \mathbf{d}\|_{L^\infty(M)^{d \times d}} \right) \right) \right\} \right\} \\
\leq & C_A \|p_h\|_{L^2(\Omega)} \left\{ C_P \|\mathbf{f}_u\|_{L^2(\Omega)^d} + \|\mathbf{U}_h\|_{\text{Stab, ISS, w}} \left\{ \frac{C_P}{\sqrt{\nu}} \|\mathbf{a}\|_{L^\infty(\Omega)^d} \right. \right. \\
& + \sqrt{\nu} + \frac{C_P}{\sqrt{\lambda}} \|\mathbf{d}\|_{L^\infty(\Omega)^d} + \max_{M \in \mathcal{M}_h} \left(\sqrt{\tau_1} \|\mathbf{a}\|_{L^\infty(M)^d} \right) + \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\sqrt{\tau_2} d \right) \\
& \left. \left. + \max_{M \in \mathcal{M}_h} \left(\sqrt{\tau_3} (1+d) \left(\|\mathbf{d}\|_{L^\infty(M)^d} + \max(1, L_0) \|\nabla \mathbf{d}\|_{L^\infty(M)^{d \times d}} \right) \right) \right\} \right\}
\end{aligned}$$

was zu

$$\|p_h\|_Q = \frac{\|p_h\|_{L^2(\Omega)^d}}{\sqrt{\nu}}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{C_A}{\sqrt{\nu}} \left\{ C_P \|\mathbf{f}_u\|_{L^2(\Omega)^d} + \|\mathbf{U}_h\|_{\text{Stab, ISS, w}} \left\{ \frac{C_P}{\sqrt{\nu}} \|\mathbf{a}\|_{L^\infty(\Omega)^d} + \sqrt{\nu} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{C_P}{\sqrt{\lambda}} \|\mathbf{d}\|_{L^\infty(\Omega)^d} + \max_{M \in \mathcal{M}_h} \left(\sqrt{\tau_1} \|\mathbf{a}\|_{L^\infty(M)^d} \right) + \max_{K \in \mathcal{T}_h} (\sqrt{\tau_2} d) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \max_{M \in \mathcal{M}_h} \left(\sqrt{\tau_3} (1+d) \left(\|\mathbf{d}\|_{L^\infty(M)^d} + \max(1, L_0) \|\nabla \mathbf{d}\|_{L^\infty(M)^{d \times d}} \right) \right) \right\} \\
&= \frac{C_A C_P}{\sqrt{\nu}} \|\mathbf{f}_u\|_{L^2(\Omega)^d} + C_A \|\mathbf{U}_h\|_{\text{Stab, ISS, w}} \left\{ \frac{C_P}{\nu} \|\mathbf{a}\|_{L^\infty(\Omega)^d} + 1 \right. \\
&\quad \left. + \frac{C_P}{\sqrt{\lambda} \sqrt{\nu}} \|\mathbf{d}\|_{L^\infty(\Omega)^d} + \max_{M \in \mathcal{M}_h} \left(\frac{\sqrt{\tau_1}}{\sqrt{\nu}} \|\mathbf{a}\|_{L^\infty(M)^d} \right) + \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{\sqrt{\tau_2}}{\sqrt{\nu}} d \right) \right. \\
&\quad \left. + \max_{M \in \mathcal{M}_h} \left(\frac{\sqrt{\tau_3}}{\sqrt{\nu}} (1+d) \left(\|\mathbf{d}\|_{L^\infty(M)^d} + \max(1, L_0) \|\nabla \mathbf{d}\|_{L^\infty(M)^{d \times d}} \right) \right) \right\}
\end{aligned}$$

führt. Definieren wir die Konstanten

$$C_2 := \frac{C_A C_P}{\sqrt{\nu}} \quad (6.40)$$

und

$$\begin{aligned}
C_3 := C_A \left\{ \frac{C_P}{\nu} \|\mathbf{a}\|_{L^\infty(\Omega)^d} + 1 + \frac{C_P}{\sqrt{\lambda} \sqrt{\nu}} \|\mathbf{d}\|_{L^\infty(\Omega)^d} + \max_{M \in \mathcal{M}_h} \left(\frac{\sqrt{\tau_1}}{\sqrt{\nu}} \|\mathbf{a}\|_{L^\infty(M)^d} \right) \right. \\
\left. + \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{\sqrt{\tau_2}}{\sqrt{\nu}} d \right) + \max_{M \in \mathcal{M}_h} \left(\frac{\sqrt{\tau_3}}{\sqrt{\nu}} (1+d) \left(\|\mathbf{d}\|_{L^\infty(M)^d} + \max(1, L_0) \|\nabla \mathbf{d}\|_{L^\infty(M)^{d \times d}} \right) \right) \right\}, \quad (6.41)
\end{aligned}$$

so gelangen wir zu

$$\|p_h\|_Q \leq C_2 \sup_{(\mathbf{v}_h, \mathbf{s}_h) \in V_h \times S_h} \frac{\mathcal{A}_G(\mathbf{U}_h, (\mathbf{v}_h, \mathbf{0}, 0, s_h))}{\|(\mathbf{v}_h, \mathbf{0}, 0, s_h)\|_{\text{Gal}}} + C_3 \|\mathbf{U}_h\|_{\text{Stab, ISS, w}}, \quad (6.42)$$

was die Behauptung beweist. \square

Wir zeigen jetzt eine schwache inf-sup-Bedingung für die kontinuierliche Bilinearform \mathcal{A}_G bezüglich der Norm (6.34).

Lemma 6.11. *Sei $\mathbf{a} \in L^\infty(\Omega)^d \cap V$ mit $\nabla \cdot \mathbf{a} = 0$. Sei $\mathbf{d} \in W^{1,\infty}(\Omega)^d \cap H(\text{rot}, \Omega)$. Dann gilt mit Konstanten $C_5 > 0$ und $C_6 > 0$ aus (6.47) und (6.48)*

$$\beta \|\mathbf{U}_h\|_{\text{Gal}} - C_6 \|\mathbf{U}_h\|_{\text{Stab, ISS, w}} \leq C_5 \sup_{(\mathbf{v}_h, \mathbf{s}_h) \in V_h \times S_h} \frac{\mathcal{A}_G(\mathbf{U}_h, (\mathbf{v}_h, \mathbf{0}, 0, s_h))}{\|(\mathbf{v}_h, \mathbf{0}, 0, s_h)\|_{\text{Gal}}} \quad (6.43)$$

mit der Konstanten $\beta > 0$ aus (5.50) der kontinuierlichen Bedingung für ein beliebiges $\mathbf{U}_h := (\mathbf{u}_h, \mathbf{b}_h, p_h, r_h) \in V_h \times C_h \times Q_h \times S_h$.

Beweis. Der Beweis verläuft analog zu Lemma 6.3, abgesehen von dem Umstand, dass der Term $(p_h, \nabla \cdot (\mathbf{v} - SZ(\mathbf{v})))$ nach vorherigem Lemma 6.10 mit der Konstanten

$$C_4 := \max_{K \in \mathcal{T}_h} (1, h_K) \quad (6.44)$$

durch die Eigenschaften des Scott-Zhang-Operators mittels

$$\begin{aligned} |(p_h, \nabla \cdot (\mathbf{v} - SZ(\mathbf{v})))| &\leq \frac{\|p_h\|_{L^2(\Omega)^d}}{\sqrt{\nu}} \sqrt{\nu} C_4 \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}} \\ &\leq C_4 \sqrt{\nu} \|p_h\|_Q \\ &\leq C_2 C_4 \sqrt{\nu} \sup_{(\mathbf{v}_h, s_h) \in V_h \times S_h} \frac{\mathcal{A}_G(\mathbf{U}_h, (\mathbf{v}_h, \mathbf{0}, 0, s_h))}{\|(\mathbf{v}_h, \mathbf{0}, 0, s_h)\|_{\text{Gal}}} \\ &\quad + C_3 C_4 \sqrt{\nu} \|\mathbf{U}_h\|_{\text{Stab, ISS, w}} \end{aligned} \quad (6.45)$$

abgeschätzt wird. In unserem jetzigen Falle muss die Konstante C_1 aus (6.17) durch

$$\begin{aligned} \widetilde{C}_1 := &\left\{ 1 + \max_{K \in \mathcal{T}_h} (h_K) + C_{SZ} \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{\|\mathbf{a}\|_{L^2(K)^d} h_K}{\nu} \right) + C_{SZ} \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{\|\mathbf{d}\|_{L^2(K)^d} h_K}{\sqrt{\nu \lambda}} \right) \right. \\ &+ \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{\tau_2}} \right) + \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{L_0}{\sqrt{\tau_6} \sqrt{\lambda}} \right) + \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{C_P \|\mathbf{d}\|_{L^\infty(K)^d}}{\sqrt{\nu \lambda}} \right) \\ &\left. + C_{SZ} \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{\sqrt{\lambda} h_K}{\sqrt{\tau_5} L_0} \right) \right\} \end{aligned} \quad (6.46)$$

modifiziert werden. Setzen wir also die Konstanten

$$C_5 := C + C_2 C_4 \sqrt{\nu} \quad (6.47)$$

und

$$C_6 := \widetilde{C}_1 + C_3 C_4 \sqrt{\nu}, \quad (6.48)$$

so folgt

$$\beta \|\mathbf{U}_h\|_{\text{Gal}} - C_6 \|\mathbf{U}_h\|_{\text{Stab, ISS, w}} \leq C_5 \sup_{(\mathbf{v}_h, s_h) \in V_h \times S_h} \frac{\mathcal{A}_G(\mathbf{U}_h, (\mathbf{v}_h, \mathbf{0}, 0, s_h))}{\|(\mathbf{v}_h, \mathbf{0}, 0, s_h)\|_{\text{Gal}}}, \quad (6.49)$$

was den Beweis abschließt. \square

Die Kombination von Lemma 6.9 und Lemma 6.11 liefert das folgende Korollar, welches eine abgeschwächte Kontrolle über die Gesamtnorm der Lösung des stabilisierten diskreten Problems aus (6.9) gewährleistet.

Korollar 6.12. *Seien die Voraussetzungen von Lemma 6.9 und Lemma 6.11 erfüllt. Dann gilt*

$$\beta \|\mathbf{U}_h\|_{\text{Gal}} \leq C_5 \sup_{(\mathbf{v}_h, s_h) \in V_h \times S_h} \frac{\mathcal{A}_G(\mathbf{U}_h, (\mathbf{v}_h, \mathbf{0}, 0, s_h))}{\|(\mathbf{v}_h, \mathbf{0}, 0, s_h)\|_{\text{Gal}}} + 3C_6 \left(\mathcal{A}_{\text{Stab}}^{\text{ISS}} \right)^{\frac{1}{2}} (\mathbf{U}_h, \mathbf{U}_h) \quad (6.50)$$

für beliebiges $\mathbf{U}_h := (\mathbf{u}_h, \mathbf{b}_h, p_h, r_h) \in V_h \times C_h \times Q_h \times S_h$.

Beweis. Hierbei handelt es sich um eine direkte Konsequenz aus Lemma 6.9 und Lemma 6.11. \square

Wir definieren schließlich für $\mathbf{V}_h := (\mathbf{v}_h, \mathbf{c}_h, q_h, s_h) \in V_h \times C_h \times Q_h \times S_h$ mittels

$$\|\mathbf{V}_h\|_{\text{Stab, ISS, s}} := \|\mathbf{V}_h\|_{\text{Stab, ISS, w}} + \frac{\sqrt{\nu}}{L_0} \|\mathbf{v}_h\|_{L^2(\Omega)^d} + \frac{1}{\sqrt{\nu}} \|q_h\|_{L^2(\Omega)} \quad (6.51)$$

eine starke Stabilisierungsnorm, wobei die schwache Stabilisierungsnorm aus (6.34) benutzt wird. Offensichtlich gilt mit der Definition der Norm aus (5.49)

$$\begin{aligned} \|\mathbf{V}_h\|_{\text{Stab, ISS, s}} &= \|\mathbf{V}_h\|_{\text{Stab, ISS, w}} + \frac{\sqrt{\nu}}{L_0} \|\mathbf{v}_h\|_{L^2(\Omega)^d} + \frac{1}{\sqrt{\nu}} \|q_h\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|\mathbf{V}_h\|_{\text{Stab, ISS, w}} + \|\mathbf{V}_h\|_{\text{Gal}} \end{aligned} \quad (6.52)$$

für beliebiges $\mathbf{V}_h \in V_h \times C_h \times Q_h \times S_h$. Dies führt zusammenfassend zum folgenden Korollar.

Korollar 6.13. *Seien die Voraussetzungen von Lemma 6.9 und Lemma 6.11 erfüllt. Dann gilt mit Korollar 6.12*

$$\begin{aligned} \|\mathbf{U}_h\|_{\text{Stab, ISS, s}} &\leq \frac{C_5}{\beta} \sup_{(\mathbf{v}_h, s_h) \in V_h \times S_h} \frac{\mathcal{A}_G(\mathbf{U}_h, (\mathbf{v}_h, \mathbf{0}, 0, s_h))}{\|(\mathbf{v}_h, \mathbf{0}, 0, s_h)\|_{\text{Gal}}} \\ &\quad + 3 \left(1 + \frac{C_6}{\beta}\right) \left(\mathcal{A}_{\text{Stab}}^{\text{ISS}}\right)^{\frac{1}{2}}(\mathbf{U}_h, \mathbf{U}_h) \end{aligned} \quad (6.53)$$

für beliebiges $\mathbf{U}_h := (\mathbf{u}_h, \mathbf{b}_h, p_h, r_h) \in V_h \times C_h \times Q_h \times S_h$.

Beweis. Der Beweis verläuft nach demselben Muster wie Korollar 6.6. \square

Wir zeigen jetzt, dass die Lösung $\mathbf{U}_h \in V_h \times C_h \times Q_h \times S_h$ des Problems (6.9) stetig von den Daten abhängt. Zunächst wird dies bezüglich der schwachen Stabilisierungsnorm $\|\cdot\|_{\text{Stab, ISS, w}}$ aus (6.34) nachgewiesen.

Lemma 6.14. *Seien $\mathbf{a} \in L^\infty(\Omega)^d \cap V$, $\nabla \cdot \mathbf{a} = 0$, $\mathbf{d} \in W^{1,\infty}(\Omega)^d \cap H(\text{rot}, \Omega)$. Dann gilt*

$$\|\mathbf{U}_h\|_{\text{Stab, ISS, w}} \leq 9 \sup_{\mathbf{V}_h \in V_h \times C_h \times Q_h \times S_h} \frac{\mathcal{F}_G(\mathbf{V}_h)}{\|\mathbf{V}_h\|_{\text{Stab, ISS, w}}} \quad (6.54)$$

für die Lösung $\mathbf{U}_h \in V_h \times C_h \times Q_h \times S_h$ von (6.9).

Beweis. Der Beweis ist eine Adaption von Lemma 6.7. \square

Das vorherige Lemma 6.14 ermöglicht es uns, die stetige Abhängigkeit der Lösung $\mathbf{U}_h \in V_h \times C_h \times Q_h \times S_h$ des Problems (6.9) von den Daten bezüglich der starken Stabilisierungsnorm $\|\cdot\|_{\text{Stab, ISS, s}}$ aus (6.51) zu beweisen.

Theorem 6.15. *Seien $\mathbf{a} \in L^\infty(\Omega)^d \cap V$, $\nabla \cdot \mathbf{a} = 0$, $\mathbf{d} \in W^{1,\infty}(\Omega)^d \cap H(\text{rot}, \Omega)$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} \|\mathbf{U}_h\|_{\text{Stab, ISS, s}} &\leq \left(9 + \frac{9C_6}{\beta} + \frac{C_5 D}{\beta}\right) \|\mathbf{U}_h\|_{\text{Stab, ISS, w}} \\ &+ \frac{C_5 E}{\beta} \sup_{(\mathbf{v}_h, \mathbf{0}, 0, s_h) \in V_h \times S_h} \frac{|\mathcal{F}_G((\mathbf{v}_h, \mathbf{0}, 0, s_h))|}{\|(\mathbf{v}_h, \mathbf{0}, 0, s_h)\|_{\text{Stab, ISS, s}}} \end{aligned} \quad (6.55)$$

für die Lösung $\mathbf{U}_h \in V_h \times C_h \times Q_h \times S_h$ von (6.9) mit den Konstanten $\beta > 0$ aus (5.50), C_5 aus Korollar 6.13, C_6 aus Korollar 6.13 und den Konstanten D und E , welche durch (6.28) und (6.29) gegeben sind.

Beweis. Der Beweis ist eine Modifikation des Theorems 6.8. □

Wir schließen die Stabilitätsanalyse des stationären linearisierten Magnetohydrodynamikmodells mit der folgenden Bemerkung ab.

Bemerkung 6.16. In den Theoremen 6.8 und 6.15 haben wir Schranken für gewisse Galerkiinterme und zusätzliche Stabilitätsterme gewonnen. Allerdings kann für feste Gitter die Kontrolle über $\|p\|_{L^2(\Omega)}$ und $\|\mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)^d}$ entsprechend einbrechen, sofern bestimmte Grenzwerte in den physikalischen Parametern $\nu \rightarrow 0$, $\lambda \rightarrow 0$ betrachtet werden. Dies steht im Einklang mit einer Bemerkung aus [8, Bemerkung 4.2]. Dieses Phänomen tritt allerdings bereits bei der Diskretisierung der Navier-Stokes-Gleichungen mit stabilisierten Lagrangeschen Finiten-Elementen in [5] oder [18] auf. Ferner beobachten wir diesen Umstand numerisch auch in der stabilisierten Approximation der Maxwell-Gleichung mit Lagrangeschen Finiten-Elementen in [64] anhand des Beispiels der singulären Lösung in einem nichtkonvexen Gebiet.

Desweiteren erhalten wir, wie zum Beispiel in Bemerkung 6.5 gesehen, gewisse Schranken an die Stabilisierungsparameter, welche nicht lokal projiziert werden. □

6.4 Konvergenzanalyse für glatte Lösungen

In diesem Unterabschnitt beschäftigen wir uns mit der Konvergenzanalyse für glatte Lösungen für das stationäre, linearisierte, stabilisierte, diskrete Magnetohydrodynamikmodell. Dies bedeutet, dass $\mathbf{b} \in H^l(\Omega)^d$, $l \in \mathbb{N}$ angenommen wird. Hierbei werden die Fälle der Equal-Order-Approximation und der inf-sup-stabilen Approximation unterschieden. Schließlich wird noch auf der Annahme einer orthogonalen LPS-Kompatibilitätsbedingung für die LPS-Terme wie zum Beispiel beim Magnetfeld

$$(\mathbf{c} - \mathbf{j}^{\mathbf{b}} \mathbf{c}, \eta_h) = 0, \quad \forall \mathbf{c} \in C, \quad \forall \eta_h \in D_M^s$$

eine Fehleranalyse für glatte Lösungen durchgeführt.

6.4.1 Vorbereitungen ohne LPS-Kompatibilität

Zuallererst wollen wir eine approximative Galerkin-Orthogonalität nachweisen.

Lemma 6.17. *Sei $\mathbf{U} := (\mathbf{u}, \mathbf{b}, p, r) \in V \times C \times Q \times S$ die Lösung des kontinuierlichen linearisierten Magnetohydrodynamikproblems aus (5.40). Sei $\mathbf{U}_h \in V_h \times C_h \times Q_h \times S_h$ die Lösung des diskreten, linearisierten, stabilisierten Magnetohydrodynamikmodells aus (6.7) beziehungsweise (6.9). Dann gilt*

$$\left(\mathcal{A}_G + \mathcal{S}_{LPS}^{EO/ISS} \right) (\mathbf{U} - \mathbf{U}_h, \mathbf{V}_h) = \mathcal{S}_{LPS}^{EO/ISS} (\mathbf{U}, \mathbf{V}_h) \quad (6.56)$$

für alle $\mathbf{V}_h \in V_h \times C_h \times Q_h \times S_h$.

Beweis. Subtrahieren wir (6.7) beziehungsweise (6.9) von (5.40), so gibt dies

$$\mathcal{A}_G (\mathbf{U} - \mathbf{U}_h, \mathbf{V}_h) - \mathcal{S}_{LPS}^{EO/ISS} (\mathbf{U}_h, \mathbf{V}_h) = 0,$$

was mit Addition von $\mathcal{S}_{LPS}^{EO/ISS} (\mathbf{U}, \mathbf{V}_h)$ die Behauptung zeigt. \square

Seien $\mathbf{U} := (\mathbf{u}, \mathbf{b}, p, r) \in V \times C \times Q \times S$ die Lösung des kontinuierlichen linearisierten Magnetohydrodynamikproblems aus (5.40) und $\mathbf{U}_h \in V_h \times C_h \times Q_h \times S_h$ die Lösung des diskreten, linearisierten, stabilisierten Magnetohydrodynamikmodells aus (6.7) beziehungsweise (6.9). Dann impliziert Lemma 6.17

$$\left(\mathcal{A}_G + \mathcal{S}_{LPS}^{EO/ISS} \right) (\mathbf{U} - \mathbf{U}_h, \mathbf{V}_h) = \mathcal{S}_{LPS}^{EO/ISS} (\mathbf{U}, \mathbf{V}_h) \quad (6.57)$$

für alle $\mathbf{V}_h \in V_h \times C_h \times Q_h \times S_h$. Sei $\mathbf{J} := (\mathbf{j}^{\mathbf{u}}, \mathbf{j}^{\mathbf{b}}, j^p, j^r)$ mit

$$\begin{aligned} \mathbf{j}^{\mathbf{u}} &: V \longrightarrow V_h, \\ \mathbf{j}^{\mathbf{b}} &: C \longrightarrow C_h, \\ j^p &: Q \longrightarrow Q_h, \\ j^r &: S \longrightarrow S_h \end{aligned}$$

ein Interpolationsoperator. Dann zerlegen wir den Fehler $\mathbf{U} - \mathbf{U}_h$ mittels

$$\mathbf{U} - \mathbf{U}_h = (\mathbf{U} - \mathbf{J}\mathbf{U}) + (\mathbf{J}\mathbf{U} - \mathbf{U}_h) = \mathcal{E} - \mathbf{E}_h \quad (6.58)$$

mit dem Interpolationsfehler $\mathcal{E} := (\varepsilon_{\mathbf{u}}, \varepsilon_{\mathbf{b}}, \varepsilon_p, \varepsilon_r)$ und dem Approximationsfehler $\mathbf{E}_h := (\mathbf{e}_{\mathbf{u}}, \mathbf{e}_{\mathbf{b}}, e_p, e_r)$. Setzen wir $\mathbf{V}_h = \mathbf{E}_h$ in Gleichung (6.57) und nutzen (6.58), so erhalten wir

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{A}_G + \mathcal{S}_{LPS}^{EO/ISS} \right) (\mathbf{U} - \mathbf{U}_h, \mathbf{E}_h) &= \left(\mathcal{A}_G + \mathcal{S}_{LPS}^{EO/ISS} \right) (\mathcal{E} - \mathbf{E}_h, \mathbf{E}_h) \\ &= \mathcal{S}_{LPS}^{EO/ISS} (\mathbf{U}, \mathbf{E}_h) \end{aligned}$$

und dies führt uns zu

$$\left(\mathcal{A}_G + \mathcal{S}_{LPS}^{EO/ISS} \right) (\mathbf{E}_h, \mathbf{E}_h) = -\mathcal{S}_{LPS}^{EO/ISS} (\mathbf{U}, \mathbf{E}_h) + \mathcal{A}_G (\mathcal{E}, \mathbf{E}_h) + \mathcal{S}_{LPS}^{EO/ISS} (\mathcal{E}, \mathbf{E}_h).$$

Daraus folgt dementsprechend

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}_G + \mathcal{S}_{LPS}^{EO/ISS})(\mathbf{E}_h, \mathbf{E}_h) &\leq \left| \mathcal{S}_{LPS}^{EO/ISS}(\mathbf{U}, \mathbf{E}_h) - \mathcal{A}_G(\mathcal{E}, \mathbf{E}_h) - \mathcal{S}_{LPS}^{EO/ISS}(\mathcal{E}, \mathbf{E}_h) \right| \\ &=: |I + II + III|, \end{aligned} \quad (6.59)$$

wobei unser Ziel darin besteht, die einzelnen Terme I , II und III abzuschätzen. Dabei nutzen wir die Dreiecksungleichung, um anschließend für die Terme obere Schranken anzugeben. Es ergibt sich zuerst mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\begin{aligned} |I| &= \left| \mathcal{S}_{LPS}^{EO/ISS}(\mathbf{U}, \mathbf{E}_h) \right| \\ &\leq \left(\mathcal{S}_{LPS}^{EO/ISS}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathcal{S}_{LPS}^{EO/ISS}(\mathbf{E}_h, \mathbf{E}_h) \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (6.60)$$

Mit ähnlicher Argumentation folgt

$$\begin{aligned} |III| &= \left| \mathcal{S}_{LPS}^{EO/ISS}(\mathcal{E}, \mathbf{E}_h) \right| \\ &\leq \left(\mathcal{S}_{LPS}^{EO/ISS}(\mathcal{E}, \mathcal{E}) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathcal{S}_{LPS}^{EO/ISS}(\mathbf{E}_h, \mathbf{E}_h) \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (6.61)$$

für $|III|$. Für II sehen wir mit der Definition von \mathcal{A}_G aus (5.38), dass

$$\begin{aligned} |-II| &\leq \sqrt{\nu} \|\nabla \varepsilon_{\mathbf{u}}\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}} \sqrt{\nu} \|\nabla \mathbf{e}_{\mathbf{u}}\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}} + \sqrt{\lambda} \|\nabla \times \varepsilon_{\mathbf{b}}\|_{L^2(\Omega)^d} \sqrt{\lambda} \|\nabla \times \mathbf{e}_{\mathbf{b}}\|_{L^2(\Omega)^d} \\ &\quad + |\langle \mathbf{a} \cdot \nabla \varepsilon_{\mathbf{u}}, \mathbf{e}_{\mathbf{u}} \rangle - \langle (\nabla \times \varepsilon_{\mathbf{b}}) \times \mathbf{d}, \mathbf{e}_{\mathbf{u}} \rangle - \langle \nabla \times (\varepsilon_{\mathbf{u}} \times \mathbf{d}), \mathbf{e}_{\mathbf{b}} \rangle \\ &\quad - (\varepsilon_p, \nabla \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{u}}) + (\nabla \cdot \varepsilon_{\mathbf{u}}, e_p) + (\nabla \varepsilon_r, \mathbf{e}_{\mathbf{b}}) - (\nabla e_r, \varepsilon_{\mathbf{b}})| \\ &=: \sqrt{\nu} \|\nabla \varepsilon_{\mathbf{u}}\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}} \sqrt{\nu} \|\nabla \mathbf{e}_{\mathbf{u}}\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}} + \sqrt{\lambda} \|\nabla \times \varepsilon_{\mathbf{b}}\|_{L^2(\Omega)^d} \sqrt{\lambda} \|\nabla \times \mathbf{e}_{\mathbf{b}}\|_{L^2(\Omega)^d} \\ &\quad + |IV| \end{aligned} \quad (6.62)$$

gilt. Nun müssen wir die nichtsymmetrischen Terme in IV abschätzen. Partielle Integration und die Cauchy-Schwarz-Ungleichung geben

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{a} \cdot \nabla \varepsilon_{\mathbf{u}}, \mathbf{e}_{\mathbf{u}} \rangle &= -\langle \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{e}_{\mathbf{u}}, \varepsilon_{\mathbf{u}} \rangle \\ &\leq \left(\sum_{M \in \mathcal{M}_h} \frac{\|\mathbf{a}\|_{L^\infty(M)^d}^2}{\nu} \|\varepsilon_{\mathbf{u}}\|_{L^2(M)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\nu} \|\nabla \mathbf{e}_{\mathbf{u}}\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}}, \\ -(\varepsilon_p, \nabla \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{u}}) &\leq \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{\tau_2} \|\varepsilon_p\|_{L^2(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_2 \|\nabla \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{u}}\|_{L^2(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \\ -(\varepsilon_{\mathbf{b}}, \nabla e_r) &\leq \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{\tau_6} \|\varepsilon_{\mathbf{b}}\|_{L^2(K)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_6 \|\nabla e_r\|_{L^2(K)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \\ -\langle \nabla \times (\varepsilon_{\mathbf{u}} \times \mathbf{d}), \mathbf{e}_{\mathbf{b}} \rangle &= \langle \varepsilon_{\mathbf{u}}, (\nabla \times \mathbf{e}_{\mathbf{b}}) \times \mathbf{d} \rangle \end{aligned}$$

$$\leq \left(\sum_{M \in \mathcal{M}_h} \frac{\|\mathbf{d}\|_{L^\infty(M)^d}^2}{\lambda} \|\varepsilon_{\mathbf{u}}\|_{L^2(M)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\lambda} \|\nabla \times \mathbf{e}_{\mathbf{b}}\|_{L^2(\Omega)^d}^2$$

für die vier angegebenen Terme. Im Equal-Order-Falle gilt mit partieller Integration und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\begin{aligned} -(e_p, \nabla \cdot \varepsilon_{\mathbf{u}}) &= (\nabla e_p, \varepsilon_{\mathbf{u}}) \\ &\leq \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_7 \|\nabla e_p\|_{L^2(K)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{\tau_7} \|\varepsilon_{\mathbf{u}}\|_{L^2(K)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Im Falle der inf-sup-stabilen Approximation gilt, dass der kritische Term

$$-(e_p, \nabla \cdot \varepsilon_{\mathbf{u}}) = 0$$

bei der Wahl eines stetigen Druckraumes $Q_h \in \{\mathbb{P}_{k-1}, \mathbb{Q}_{k-1}\}$ verschwindet. Siehe dazu [3]. Falls ein unstetiger Druckapproximationsraum gewählt wird, wird in [3] auch gezeigt, dass dieser mit einem zusätzlichen Sprungstabilisierungsterm über die Kanten behandelt werden kann.

Wegen

$$r = j^r r = 0$$

verschwindet $(\nabla \varepsilon_r, \mathbf{e}_{\mathbf{b}})$. Verwenden wir partielle Integration, die Cauchy-Schwarz-Ungleichung, die Ungleichung nach Poincaré und die Vektorformel

$$\nabla \times (\mathbf{z}_1 \times \mathbf{z}_2) = \mathbf{z}_2 \cdot \nabla \mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2 (\nabla \cdot \mathbf{z}_1) - \mathbf{z}_1 \cdot \nabla \mathbf{z}_2 + \mathbf{z}_1 (\nabla \cdot \mathbf{z}_2),$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned} & -\langle (\nabla \times \varepsilon_{\mathbf{b}}) \times \mathbf{d}, \mathbf{e}_{\mathbf{u}} \rangle \\ &= (\varepsilon_{\mathbf{b}}, \nabla \times (\mathbf{e}_{\mathbf{u}} \times \mathbf{d})) \\ &\leq \sum_{M \in \mathcal{M}_h} \|\varepsilon_{\mathbf{b}}\|_{L^2(M)^d} \|\nabla \times (\mathbf{e}_{\mathbf{u}} \times \mathbf{d})\|_{L^2(M)^d} \\ &\leq \sum_{M \in \mathcal{M}_h} \|\varepsilon_{\mathbf{b}}\|_{L^2(M)^d} (1+d) \left\{ \|\mathbf{e}_{\mathbf{u}}\|_{L^2(M)^d} \|\nabla \mathbf{d}\|_{L^\infty(M)^{d \times d}} + \|\mathbf{d}\|_{L^\infty(M)^d} \|\nabla \mathbf{e}_{\mathbf{u}}\|_{L^2(M)^{d \times d}} \right\} \\ &\leq \sum_{M \in \mathcal{M}_h} \|\varepsilon_{\mathbf{b}}\|_{L^2(M)^d} (1+d) \left\{ \|\mathbf{d}\|_{L^\infty(M)^d} + C_P \|\nabla \mathbf{d}\|_{L^\infty(M)^{d \times d}} \right\} \|\nabla \mathbf{e}_{\mathbf{u}}\|_{L^2(M)^{d \times d}} \\ &\leq \left(\sum_{M \in \mathcal{M}_h} \frac{(1+d)^2 \left\{ \|\mathbf{d}\|_{L^\infty(M)^d} + C_P \|\nabla \mathbf{d}\|_{L^\infty(M)^{d \times d}} \right\}^2}{\nu} \|\varepsilon_{\mathbf{b}}\|_{L^2(M)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ &\quad \times \sqrt{\nu} \|\nabla \mathbf{e}_{\mathbf{u}}\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}} \end{aligned}$$

für den letzten der sieben nichtsymmetrischen Terme. Somit gilt zusammenfassend mit der Youngschen Ungleichung für den Equal-Order-Fall

$$\left(\mathcal{A}_G + \mathcal{S}_{LPS}^{EO} \right) (\mathbf{E}_h, \mathbf{E}_h) \leq \left(S_1^{EO} \right)^2 + \left(S_2^{EO} \right)^2 \quad (6.63)$$

mit

$$\begin{aligned}
S_1^{EO} &:= \sqrt{\nu} \|\nabla \varepsilon_{\mathbf{u}}\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}} + \sqrt{\lambda} \|\nabla \times \varepsilon_{\mathbf{b}}\|_{L^2(\Omega)^d} \\
&+ \left(\sum_{M \in \mathcal{M}_h} \frac{\|\mathbf{a}\|_{L^\infty(M)^d}^2}{\nu} \|\varepsilon_{\mathbf{u}}\|_{L^2(M)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{M \in \mathcal{M}_h} \frac{\|\mathbf{d}\|_{L^\infty(M)^d}^2}{\lambda} \|\varepsilon_{\mathbf{u}}\|_{L^2(M)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ \left(\sum_{M \in \mathcal{M}_h} \frac{(1+d)^2 \left\{ \|\mathbf{d}\|_{L^\infty(M)^d} + C_P \|\nabla \mathbf{d}\|_{L^\infty(M)^{d \times d}} \right\}^2}{\nu} \|\varepsilon_{\mathbf{b}}\|_{L^2(M)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{6.64}$$

und

$$\begin{aligned}
S_2^{EO} &:= \left(\mathcal{S}_{LPS}^{EO}(\mathcal{E}, \mathcal{E}) \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\mathcal{S}_{LPS}^{EO}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{\tau_2} \|\varepsilon_p\|_{L^2(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{\tau_6} \|\varepsilon_{\mathbf{b}}\|_{L^2(K)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{\tau_7} \|\varepsilon_{\mathbf{u}}\|_{L^2(K)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{6.65}$$

Im inf-sup-stabilen Falle gilt analog zu (6.63)

$$\left(\mathcal{A}_G + \mathcal{S}_{LPS}^{ISS} \right) (\mathbf{E}_h, \mathbf{E}_h) \leq \left(S_1^{ISS} \right)^2 + \left(S_2^{ISS} \right)^2 \tag{6.66}$$

mit

$$S_1^{ISS} := S_1^{EO} \tag{6.67}$$

nach (6.64) und

$$\begin{aligned}
S_2^{ISS} &:= \left(\mathcal{S}_{LPS}^{ISS}(\mathcal{E}, \mathcal{E}) \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\mathcal{S}_{LPS}^{ISS}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{\tau_2} \|\varepsilon_p\|_{L^2(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{\tau_6} \|\varepsilon_{\mathbf{b}}\|_{L^2(K)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{6.68}$$

ähnlich zu (6.65).

6.4.2 Equal-Order-Fall ohne LPS-Kompatibilität

Sei die Lösung $\mathbf{U} \in [\mathbf{H}^{k+1}(\Omega)]^d \times [\mathbf{H}^{k+1}(\Omega)]^d \times [\mathbf{H}^{k+1}(\Omega)]^d \times [\mathbf{H}^{k+1}(\Omega)]^d$ des kontinuierlichen Problems (5.40) von entsprechender Glattheit. Mit den Eigenschaften des lokalen L^2 -Projektors und den Interpolationseigenschaften der Finiten-Elemente, zum Beispiel [34], folgt für den Term aus (6.64) mit einer Umgebung der Nachbarzellen ω_M um die Zelle

$M \in \mathcal{M}_h$

$$\begin{aligned} (S_1^{EO})^2 &\leq C \sum_{M \in \mathcal{M}_h} h_M^{2k} \left\{ \left(\nu + \frac{\|\mathbf{a}\|_{L^\infty(M)^d}^2 h_M^2}{\nu} + \frac{\|\mathbf{d}\|_{L^\infty(M)^d}^2 h_M^2}{\lambda} \right) |\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\omega_M)^d}^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\lambda + h_M^2 \frac{\left\{ \|\mathbf{d}\|_{L^\infty(M)^d} + C_P \|\nabla \mathbf{d}\|_{L^\infty(M)^{d \times d}} \right\}^2}{\nu} \right) |\mathbf{b}|_{H^{k+1}(\omega_M)^d}^2 \right\} \end{aligned} \quad (6.69)$$

und

$$\begin{aligned} (S_2^{EO})^2 &\leq C \sum_{M \in \mathcal{M}_h} h_M^{2k} \left\{ \left(\tau_2 + \frac{h_M^2}{\tau_7} \right) |\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\omega_M)^d}^2 + \left(\tau_5 + \frac{h_M^2}{\tau_6} \right) |\mathbf{b}|_{H^{k+1}(\omega_M)^d}^2 \right. \\ &\quad + h_M^{2(s-k)} \left(\tau_1 \|\mathbf{a}\|_{L^\infty(M)^d}^2 + \tau_3 \left\{ \|\mathbf{d}\|_{L^\infty(M)^d} + C_P \|\nabla \mathbf{d}\|_{L^\infty(M)^{d \times d}} \right\}^2 \right) |\mathbf{u}|_{H^{s+1}(\omega_M)^d}^2 \\ &\quad \left. + h_M^{2(s-k)} \tau_7 |p|_{H^{s+1}(\omega_M)}^2 + h_M^{2(s-k)} \tau_4 \|\mathbf{d}\|_{L^\infty(M)^d}^2 |\mathbf{b}|_{H^{s+1}(\omega_M)^d}^2 + \frac{h_M^2}{\tau_2} |p|_{H^{k+1}(\omega_M)}^2 \right\} \end{aligned} \quad (6.70)$$

für den Term aus (6.65). Definiere die lokale Fluid-Reynoldszahl und die lokale Magnet-Reynoldszahl mittels

$$\text{Re}_{f,M} := \frac{\|\mathbf{a}\|_{L^\infty(M)^d} h_M}{\nu} \quad (6.71)$$

und

$$\text{Re}_{m,M} := \frac{\|\mathbf{d}\|_{L^\infty(M)^d} h_M}{\lambda}. \quad (6.72)$$

Analog werden die globalen Zahlen definiert, wobei $M \subset \Omega$ durch das Rechengebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ersetzt wird. Eine Äquilibration der Terme aus (6.69) gibt uns

$$\begin{aligned} \nu + \frac{\|\mathbf{a}\|_{L^\infty(M)^d}^2 h_M^2}{\nu} + \frac{\|\mathbf{d}\|_{L^\infty(M)^d}^2 h_M^2}{\lambda} &\lesssim 1, \\ \lambda + h_M^2 \frac{\left\{ \|\mathbf{d}\|_{L^\infty(M)^d} + C_P \|\nabla \mathbf{d}\|_{L^\infty(M)^{d \times d}} \right\}^2}{\nu} &\lesssim 1. \end{aligned}$$

Dies liefert uns zusammen mit (6.71) und (6.72) die Gitterweitenbeschränkungen

$$\sqrt{\nu} \text{Re}_{f,M} \leq C \quad (6.73)$$

und

$$\sqrt{\lambda} \text{Re}_{m,M} \leq C \quad (6.74)$$

mit gegebenenfalls unterschiedlichen Konstanten C . Eine Äquilibration der Terme aus (6.70) ergibt

$$\tau_2 + \frac{h_M^2}{\tau_7} \lesssim 1,$$

$$\begin{aligned}\tau_5 + \frac{h_M^2}{\tau_6} &\lesssim 1, \\ \frac{h_M^2}{\tau_2} &\lesssim 1\end{aligned}$$

und

$$\tau_1 \|\mathbf{a}\|_{L^\infty(M)^d}^2 + \tau_3 \left\{ \|\mathbf{d}\|_{L^\infty(M)^d} + C_P \|\nabla \mathbf{d}\|_{L^\infty(M)^{d \times d}} \right\}^2 + \tau_4 \|\mathbf{d}\|_{L^\infty(M)^d}^2 + \tau_7 \lesssim h_M^{2(k-s)},$$

wobei insbesondere die interessanten Fälle $s \in \{k-1, k\}$ betrachtet werden. Aufgrund der ersten Gleichung folgt die Beziehung

$$\tau_2 \tau_7 \lesssim h_M^2$$

und somit erhalten wir

$$\begin{aligned}c\nu \leq \tau_2 &\leq C\nu \max\{1, \text{Re}_{f,\Omega}\}, \\ \tau_7 &\sim \frac{h_M^2}{\tau_2}.\end{aligned}$$

Aus

$$\tau_5 + \frac{h_M^2}{\tau_6} \sim 1$$

folgt also

$$\tau_5 \tau_6 \sim h_M^2,$$

was die Parameterwahl

$$\begin{aligned}\tau_5 &\sim \frac{h_M^2 \lambda}{L_0^2}, \\ \tau_6 &\sim \frac{L_0^2}{\lambda}\end{aligned}$$

aus Bemerkung 6.5 mit einem Äquilibrierungszeichen bestätigt. Mit $s \in \{k-1, k\}$ lassen sich wegen $\tau_2 \sim \nu$ nach obiger Betrachtung die Wahlen

$$\begin{aligned}0 \leq \tau_1 &\lesssim C \frac{\tau_2 h_M^{2(k-s)}}{\|\mathbf{a}\|_{L^\infty(M)^d}^2}, \\ 0 \leq \tau_3 &\lesssim C \frac{\tau_2 h_M^{2(k-s)}}{\left\{ \|\mathbf{d}\|_{L^\infty(M)^d} + C_P \|\nabla \mathbf{d}\|_{L^\infty(M)^{d \times d}} \right\}^2}, \\ 0 \leq \tau_4 &\lesssim C \frac{\tau_2 h_M^{2(k-s)}}{\|\mathbf{d}\|_{L^\infty(M)^d}^2}\end{aligned}$$

rechtfertigen. Fassen wir also die Parameterwahl in

$$0 \leq \tau_1 \lesssim C \frac{\tau_2 h_M^{2(k-s)}}{\|\mathbf{a}\|_{L^\infty(M)^d}^2}, \quad (6.75)$$

$$c\nu \leq \tau_2 \lesssim C\nu \max\{1, \operatorname{Re}f, \Omega\}, \quad (6.76)$$

$$0 \leq \tau_3 \lesssim C \frac{\tau_2 h_M^{2(k-s)}}{\left\{ \|\mathbf{d}\|_{L^\infty(M)^d} + C_P \|\nabla \mathbf{d}\|_{L^\infty(M)^{d \times d}} \right\}^2}, \quad (6.77)$$

$$0 \leq \tau_4 \lesssim C \frac{\tau_2 h_M^{2(k-s)}}{\|\mathbf{d}\|_{L^\infty(M)^d}^2}, \quad (6.78)$$

$$\tau_5 \sim \frac{h_M^2 \lambda}{L_0^2}, \quad (6.79)$$

$$\tau_6 \sim \frac{L_0^2}{\lambda}, \quad (6.80)$$

$$\tau_7 \sim \frac{h_M^2}{\tau_2} \quad (6.81)$$

zusammen, so folgt mit Lemma 6.1 folgendes Konvergenzresultat bezüglich der schwachen Stabilisierungsnorm aus (6.10).

Theorem 6.18. *Seien $\mathbf{a} \in L^\infty(\Omega)^d \cap V$, $\mathbf{d} \in W^{1,\infty}(\Omega)^d \cap H(\operatorname{rot}, \Omega)$ und $\mathbf{U} \in [\mathbf{H}^{k+1}(\Omega)]^d \times [\mathbf{H}^{k+1}(\Omega)]^d \times [\mathbf{H}^{k+1}(\Omega)]^d \times [\mathbf{H}^{k+1}(\Omega)]^d$ die Lösung des kontinuierlichen linearisierten Magnetohydrodynamikproblems aus (5.40). Sei $\mathbf{U}_h \in V_h \times C_h \times Q_h \times S_h$ die Lösung des diskreten, linearisierten, stabilisierten Magnetohydrodynamikmodells aus (6.7). Dann gilt mit der Gitterweitenbeschränkung aus (6.73)-(6.74) und der Parameterwahl aus (6.75)-(6.81)*

$$\|\mathbf{U} - \mathbf{U}_h\|_{\text{Stab, EO, w}}^2 \leq \tilde{C} \sum_{M \in \mathcal{M}_h} h_M^{2k} \left(|\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\omega_M)}^2 + |\mathbf{b}|_{H^{k+1}(\omega_M)}^2 + |\mathbf{p}|_{H^{k+1}(\omega_M)}^2 \right) \quad (6.82)$$

mit einer Konstanten $\tilde{C} > 0$.

Beweis. Der Beweis ist eine Folgerung aus den vorherigen Betrachtungen aus Unterabschnitt 6.4.2. \square

Betrachten wir den Galerkin-Term $\mathcal{A}_G(\mathbf{E}_h, \mathbf{V}_h)$ für beliebiges $\mathbf{V}_h \in V_h \times C_h \times Q_h \times S_h$ aus Korollar 6.6, so gilt

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}_G(\mathbf{E}_h, \mathbf{V}_h) \\ \leq & \|\mathbf{V}_h\|_{\text{Stab, EO, s}} \left\{ \sqrt{\nu} \|\nabla \mathbf{e}_\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}} + \frac{\|\mathbf{a}\|_{L^\infty(\Omega)^d} L_0}{\nu} \sqrt{\nu} \|\nabla \mathbf{e}_\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}} \right. \\ & + \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{\tau_2} \|e_p\|_{L^2(K)}^2 \right) + \frac{\|\mathbf{d}\|_{L^\infty(\Omega)^d} L_0}{\sqrt{\lambda} \sqrt{\nu}} \sqrt{\lambda} \|\nabla \times \mathbf{e}_\mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)^d} \\ & + \sqrt{\nu} \|\nabla \mathbf{e}_\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}} + \sqrt{\lambda} \|\nabla \times \mathbf{e}_\mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)^d} \\ & \left. + \frac{\|\mathbf{d}\|_{L^\infty(\Omega)^d} L_0}{\sqrt{\lambda} \sqrt{\nu}} \frac{\sqrt{\nu} C_P}{L_0} \|\nabla \mathbf{e}_\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}} + \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{\tau_6 L_0^2}{\lambda} \|\nabla \cdot \mathbf{e}_\mathbf{b}\|_{L^2(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \end{aligned}$$

und mittels Theorem 6.18 folgt folgendes Konvergenzresultat unter Beachtung, dass möglicherweise in bestimmten asymptotischen Grenzwerten des kontinuierlichen Problems für $\mathbf{V}_h = (\mathbf{v}_h, \mathbf{0}, 0, s_h)$ Kontrolle über $\|\mathbf{b} - \mathbf{b}_h\|_C$ und $\|p - p_h\|_Q$ verlorengehen.

Theorem 6.19. *Seien $\mathbf{a} \in L^\infty(\Omega)^d \cap V$, $\mathbf{d} \in W^{1,\infty}(\Omega)^d \cap H(\text{rot}, \Omega)$ und $\mathbf{U} \in [\mathbf{H}^{k+1}(\Omega)]^d \times [\mathbf{H}^{k+1}(\Omega)]^d \times [\mathbf{H}^{k+1}(\Omega)]^d \times [\mathbf{H}^{k+1}(\Omega)]^d$ die Lösung des kontinuierlichen linearisierten Magnetohydrodynamikproblems aus (5.40). Sei $\mathbf{U}_h \in V_h \times C_h \times Q_h \times S_h$ die Lösung des diskreten, linearisierten, stabilisierten Magnetohydrodynamikmodells aus (6.7). Dann gilt mit der Gitterweitenbeschränkung aus (6.73)-(6.74) und der Parameterwahl aus (6.75)-(6.81)*

$$\|\mathbf{U} - \mathbf{U}_h\|_{\text{Stab, EO, s}}^2 \leq \tilde{C} \sum_{M \in \mathcal{M}_h} h_M^{2k} \left(|\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\omega_M)^d}^2 + |\mathbf{b}|_{H^{k+1}(\omega_M)^d}^2 + |\mathbf{p}|_{H^{k+1}(\omega_M)}^2 \right) \quad (6.83)$$

mit einer Konstanten $\tilde{C} > 0$.

Beweis. Der Beweis ist eine Folgerung aus den vorherigen Betrachtungen aus Unterabschnitt 6.4.2. \square

Wir halten noch Folgendes fest.

Bemerkung 6.20. Sofern wir $\nu \leq h_M$ und $\lambda \leq h_M$ in Größenordnungen ohne physikalische Einheiten annehmen, können wir im Falle der Equal-Order-Approximation auch Methoden mit der Ordnung $k + \frac{1}{2}$ erhalten. Vergleiche dazu [64, Theorem 5.5]. Leider ergeben sich schärfere Gitterweitenbeschränkungen als in den vorangegangenen Fällen.

6.4.3 Inf-sup-stabiler Fall ohne LPS-Kompatibilität

Betrachte hinreichend glatte Lösungen $\mathbf{U} \in [\mathbf{H}^{k+1}(\Omega)]^d \times [\mathbf{H}^{k+1}(\Omega)]^d \times [\mathbf{H}^k(\Omega)]^d \times [\mathbf{H}^k(\Omega)]^d$ des kontinuierlichen Problems (5.40). Mit den Eigenschaften des lokalen L^2 -Projektors und den Interpolationseigenschaften der Finiten-Elemente, z.B. [34], folgt für den Term aus (6.67) mit einer Umgebung der Nachbarzellen ω_M um die Zelle $K \in \mathcal{M}_h$

$$\begin{aligned} (S_1^{ISS})^2 \leq C \sum_{M \in \mathcal{M}_h} h_M^{2k} \left\{ \left(\nu + \frac{\|\mathbf{a}\|_{L^\infty(M)^d}^2 h_M^2}{\nu} + \frac{\|\mathbf{d}\|_{L^\infty(M)^d}^2 h_M^2}{\lambda} \right) |\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\omega_M)^d}^2 \right. \\ \left. + \left(\lambda + h_M^2 \frac{\left\{ \|\mathbf{d}\|_{L^\infty(M)^d} + C_P \|\nabla \mathbf{d}\|_{L^\infty(M)^{d \times d}} \right\}^2}{\nu} \right) |\mathbf{b}|_{H^{k+1}(\omega_M)^d}^2 \right\} \quad (6.84) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
(S_2^{ISS})^2 &\leq C \sum_{M \in \mathcal{M}_h} h_M^{2k} \left\{ \tau_2 |\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\omega_M)}^2 + \left(\tau_5 + \frac{h_M^2}{\tau_6} \right) |\mathbf{b}|_{H^{k+1}(\omega_M)}^2 \right. \\
&\quad + h_M^{2(s-k)} \left(\tau_1 \|\mathbf{a}\|_{L^\infty(M)^d}^2 + \tau_3 \left\{ \|\mathbf{d}\|_{L^\infty(M)^d} + C_P \|\nabla \mathbf{d}\|_{L^\infty(M)^{d \times d}} \right\}^2 \right) |\mathbf{u}|_{H^{s+1}(\omega_M)}^2 \\
&\quad \left. + h_M^{2(s-k-1)} \tau_7 |p|_{H^s(\omega_M)}^2 + h_M^{2(s-k)} \tau_4 \|\mathbf{d}\|_{L^\infty(M)^d}^2 |\mathbf{b}|_{H^{s+1}(\omega_M)}^2 + \frac{1}{\tau_2} |p|_{H^k(\omega_M)}^2 \right\}
\end{aligned} \tag{6.85}$$

für den Term aus (6.68). Es gelten die lokalen Definitionen (6.71) und (6.72). Eine Äquilibration der Terme aus (6.84) gibt uns

$$\begin{aligned}
\nu + \frac{\|\mathbf{a}\|_{L^\infty(M)^d}^2 h_M^2}{\nu} + \frac{\|\mathbf{d}\|_{L^\infty(M)^d}^2 h_M^2}{\lambda} &\lesssim 1, \\
\lambda + h_M^2 \frac{\left\{ \|\mathbf{d}\|_{L^\infty(M)^d} + C_P \|\nabla \mathbf{d}\|_{L^\infty(M)^{d \times d}} \right\}^2}{\nu} &\lesssim 1.
\end{aligned}$$

Dies liefert uns zusammen mit (6.71) und (6.72) die Gitterweitenbeschränkungen (6.73) und (6.74). Eine Äquilibration der Terme aus (6.85) ergibt

$$\begin{aligned}
\tau_2 &\lesssim 1, \\
\tau_5 + \frac{h_M^2}{\tau_6} &\lesssim 1, \\
\frac{h_M^2}{\tau_2} &\lesssim 1
\end{aligned}$$

und

$$\tau_1 \|\mathbf{a}\|_{L^\infty(M)^d}^2 + \tau_3 \left\{ \|\mathbf{d}\|_{L^\infty(M)^d} + C_P \|\nabla \mathbf{d}\|_{L^\infty(M)^{d \times d}} \right\}^2 + \tau_4 \|\mathbf{d}\|_{L^\infty(M)^d}^2 + \frac{\tau_7}{h_M^2} \lesssim h^{2(k-s)},$$

wobei insbesondere die interessanten Fälle $s \in \{k-1, k\}$ betrachtet werden. Aufgrund der ersten Gleichung folgt mit den Ergebnissen der Stabilitätsanalyse die Beziehung

$$c\nu \leq \tau_2 \leq C\nu \max\{1, \text{Re}_{f,\Omega}\}$$

und ferner erhalten wir

$$\tau_7 \sim \frac{h_M^{2(k-s+1)}}{\tau_2}.$$

Aus

$$\tau_5 + \frac{h_M^2}{\tau_6} \lesssim 1$$

folgt also

$$\tau_5 \tau_6 \lesssim h_M^2,$$

was die Parameterwahl

$$\begin{aligned}\tau_5 &\sim \frac{h_M^2 \lambda}{L_0^2}, \\ \tau_6 &\sim \frac{L_0^2}{\lambda}\end{aligned}$$

aus Bemerkung 6.5 bestätigt. Mit $s \in \{k-1, k\}$ lassen sich wegen $c\nu \leq \tau_2 \leq C\nu \max\{1, \operatorname{Re}_{f,\Omega}\}$ die Wahlen

$$\begin{aligned}0 \leq \tau_1 &\lesssim C \frac{\tau_2 h_M^{2(k-s)}}{\|\mathbf{a}\|_{L^\infty(M)^d}^2}, \\ 0 \leq \tau_3 &\lesssim C \frac{\tau_2 h_M^{2(k-s)}}{\left\{ \|\mathbf{d}\|_{L^\infty(M)^d} + C_P \|\nabla \mathbf{d}\|_{L^\infty(M)^{d \times d}} \right\}^2}, \\ 0 \leq \tau_4 &\lesssim C \frac{\tau_2 h_M^{2(k-s)}}{\|\mathbf{d}\|_{L^\infty(M)^d}^2}\end{aligned}$$

rechtfertigen. Fassen wir also die Parameterwahl in

$$0 \leq \tau_1 \lesssim C \frac{\tau_2 h_M^{2(k-s)}}{\|\mathbf{a}\|_{L^\infty(M)^d}^2}, \quad (6.86)$$

$$c\nu \leq \tau_2 \leq C\nu \max\{1, \operatorname{Re}_{f,\Omega}\}, \quad (6.87)$$

$$0 \leq \tau_3 \lesssim C \frac{\tau_2 h_M^{2(k-s)}}{\left\{ \|\mathbf{d}\|_{L^\infty(M)^d} + C_P \|\nabla \mathbf{d}\|_{L^\infty(M)^{d \times d}} \right\}^2}, \quad (6.88)$$

$$0 \leq \tau_4 \lesssim C \frac{\tau_2 h_M^{2(k-s)}}{\|\mathbf{d}\|_{L^\infty(M)^d}^2}, \quad (6.89)$$

$$\tau_5 \sim \frac{h_M^2 \lambda}{L_0^2}, \quad (6.90)$$

$$\tau_6 \sim \frac{L_0^2}{\lambda}, \quad (6.91)$$

$$\tau_7 \sim \frac{h_M^{2(k-s+1)}}{\tau_2} \quad (6.92)$$

zusammen, so folgt mit Lemma 6.1 folgendes Konvergenzresultat bezüglich der schwachen Stabilisierungsnorm aus (6.10).

Theorem 6.21. *Seien $\mathbf{a} \in L^\infty(\Omega)^d$, $\mathbf{d} \in L^\infty(\Omega)^d \cap H(\operatorname{rot}, \Omega)$ und $\mathbf{U} \in [\mathbf{H}^{k+1}(\Omega)]^d \times [\mathbf{H}^{k+1}(\Omega)]^d \times [\mathbf{H}^k(\Omega)]^d \times [\mathbf{H}^k(\Omega)]^d$ die Lösung des kontinuierlichen linearisierten Magnetohydrodynamikproblems aus (5.40). Sei $\mathbf{U}_h \in V_h \times C_h \times Q_h \times S_h$ die Lösung des diskreten, linearisierten, stabilisierten Magnetohydrodynamikmodells aus (6.9). Dann gilt mit*

der Gitterweitenbeschränkung aus (6.73)-(6.74) und der Parameterwahl aus (6.86)-(6.92)

$$\| \mathbf{U} - \mathbf{U}_h \|_{\text{Stab, ISS, w}}^2 \leq \tilde{C} \sum_{M \in \mathcal{M}_h} h_M^{2k} \left(|\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\omega_M)^d}^2 + |\mathbf{b}|_{H^{k+1}(\omega_M)^d}^2 + |\mathbf{p}|_{H^k(\omega_M)}^2 \right) \quad (6.93)$$

mit einer Konstanten $\tilde{C} > 0$.

Beweis. Der Beweis ist eine Folgerung aus den vorherigen Betrachtungen aus Unterabschnitt 6.4.2. \square

Analog lässt sich mit der Argumentation nach Theorem 6.18 folgendes Ergebnis gewinnen.

Theorem 6.22. Seien $\mathbf{a} \in L^\infty(\Omega)^d$, $\mathbf{d} \in L^\infty(\Omega)^d \cap H(\text{rot}, \Omega)$ und $\mathbf{U} \in [\mathbf{H}^{k+1}(\Omega)]^d \times [\mathbf{H}^{k+1}(\Omega)]^d \times [\mathbf{H}^k(\Omega)]^d \times [\mathbf{H}^k(\Omega)]^d$ die Lösung des kontinuierlichen linearisierten Magneto-hydrodynamikproblems aus (5.40). Sei $\mathbf{U}_h \in V_h \times C_h \times Q_h \times S_h$ die Lösung des diskreten, linearisierten, stabilisierten Magneto-hydrodynamikmodells aus (6.9). Dann gilt mit der Gitterweitenbeschränkung aus (6.73)-(6.74) und der Parameterwahl aus (6.86)-(6.92)

$$\| \mathbf{U} - \mathbf{U}_h \|_{\text{Stab, ISS, s}}^2 \leq \tilde{C} \sum_{M \in \mathcal{T}_h} h_M^{2k} \left(|\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\omega_M)^d}^2 + |\mathbf{b}|_{H^{k+1}(\omega_M)^d}^2 + |\mathbf{p}|_{H^k(\omega_M)}^2 \right) \quad (6.94)$$

mit einer Konstanten $\tilde{C} > 0$.

Beweis. Der Beweis ist eine Folgerung aus den vorherigen Betrachtungen aus Unterabschnitt 6.4.2. \square

6.4.4 Vorbereitungen mit LPS-Kompatibilität

Wir nehmen hier als Vereinfachung elementweise konstante Felder $\mathbf{a}|_M = \mathbf{a}_M$ und $\mathbf{d}|_M = \mathbf{d}_M$ an. Hierbei handelt es sich um eine technische Annahme für den stationären Fall, um bestimmte L^2 -Terme zu kontrollieren. Im zeitabhängigen Fall des Navier-Stokes-Problem lässt sich diese Annahme mit der Anwendung des Gronwall-Lemmas umgehen. Siehe dazu [3] oder [21].

Wir nehmen die folgende *LPS-Kompatibilitätsbedingung* zwischen den Projektionsräumen D_M^s und dem Finite-Elemente-Raum $[Y_{h,k}]^d$ an. Setze $Y_{h,k}(M) := \{\mathbf{w}_h \in [Y_{h,k}]^d : \mathbf{w}_h = \mathbf{0} \text{ in } \Omega \setminus M\}$.

(A.5): Es existiert eine Konstante $\gamma > 0$ derart, dass

$$\inf_{\mathbf{v}_h \in D_M^s} \sup_{\mathbf{w}_h \in Y_{h,k}(M)} \frac{(\mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h)_M}{\|\mathbf{v}_h\|_{L^2(M)^d} \|\mathbf{w}_h\|_{L^2(M)^d}} \geq \gamma \quad \forall h > 0, \forall M \in \mathcal{M}_h. \quad (6.95)$$

Folgen wir Theorem 2.2 in [50], so können wir die Existenz von Interpolationsoperatoren $\mathbf{j}^u : V \rightarrow V_h$, $\mathbf{j}^b : C \rightarrow C_h$, $j^p : Q \rightarrow Q_h$ zeigen, welche die Orthogonalitätsbedingungen

$$(\mathbf{v} - \mathbf{j}^u \mathbf{v}, \zeta_h) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V \text{ und } \forall \zeta_h \in D_M^s, \quad (6.96)$$

$$(\mathbf{c} - \mathbf{j}^{\mathbf{b}} \mathbf{c}, \eta_{\mathbf{h}}) = 0 \quad \forall \mathbf{c} \in C \quad \text{und} \quad \forall \eta_{\mathbf{h}} \in D_M^s, \quad (6.97)$$

$$(p - j^p p, \rho_h) = 0 \quad \forall p \in Q \quad \text{und} \quad \forall \rho_h \in D_M^s \quad (6.98)$$

erfüllen.

Ferner werden die Interpolationsbedingungen aus **(A.2)** für die Interpolationsoperatoren im Falle glatter Lösungen erhalten.

Hinreichende Bedingungen an die Zerlegungen $\mathcal{T}_h, \mathcal{M}_h$, die Finite-Elemente-Räume und die Projektionsräume für (6.96)-(6.98) können in [21] oder [50] gefunden werden. Für den Einlevel-Fall $\mathcal{T}_h = \mathcal{M}_h$ muss beispielsweise der Geschwindigkeitsraum durch lokale Blasenfunktion - vergleiche [50] - angereichert werden.

Es gilt im Allgemeinen $\mathbf{j}^{\mathbf{u}} \notin V_h^{div}$, daher muss der gemischte Term $(e_p, \nabla \cdot \varepsilon_{\mathbf{u}})$ betrachtet werden. Eine sorgfältige Wahl des Druckraumes Q_h wird benötigt. Die kritischen gemischten Terme verschwinden für stetigen Druckraum $Q_h = \mathbb{P}_{k-1}$. Das Fehlersplitting ist analog zu den Vorbereitungen aus Unterabschnitt 6.4.1. Wie in Abschnitt 6.1 erwähnt, lassen wir Indizes am Fluktuationsoperator aus Gründen der Übersicht weg.

(6.96)-(6.98) erlauben wegen der Annahme konstanter Approximationen \mathbf{a}_M und \mathbf{d}_M an die Felder \mathbf{a} und \mathbf{d} auf allen $M \in \mathcal{M}_h$ eine Modifikation der Abschätzungen der Terme

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \cdot \nabla \varepsilon_{\mathbf{u}}, \mathbf{e}_{\mathbf{u}}) &= -\left((\mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{e}_{\mathbf{u}}), \varepsilon_{\mathbf{u}} \right) \\ &= \sum_{M \in \mathcal{M}_h} -\left(\kappa (\mathbf{a}_M \cdot \nabla \mathbf{e}_{\mathbf{u}}), \varepsilon_{\mathbf{u}} \right)_M \\ &\leq \left(\sum_{M \in \mathcal{M}_h} \frac{1}{\tau_1} \|\varepsilon_{\mathbf{u}}\|_{L^2(M)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{E}_{\mathbf{h}}\|_{Stab,EO/ISS,w}, \\ -((\nabla \times \varepsilon_{\mathbf{b}}) \times \mathbf{d}, \mathbf{e}_{\mathbf{u}}) &= \left(\varepsilon_{\mathbf{b}}, (\nabla \times (\mathbf{e}_{\mathbf{u}} \times \mathbf{d})) \right) \\ &= \sum_{M \in \mathcal{M}} \left(\varepsilon_{\mathbf{b}}, \kappa (\nabla \times (\mathbf{e}_{\mathbf{u}} \times \mathbf{d}_M)) \right)_M \\ &\leq \left(\sum_{M \in \mathcal{M}_h} \frac{1}{\tau_4} \|\varepsilon_{\mathbf{b}}\|_{0,2,M}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{E}_{\mathbf{h}}\|_{Stab,EO/ISS,w}, \\ -(\nabla \times (\varepsilon_{\mathbf{u}} \times \mathbf{d}), \mathbf{e}_{\mathbf{b}}) &= (\varepsilon_{\mathbf{u}}, ((\nabla \times \mathbf{e}_{\mathbf{b}}) \times \mathbf{d})) \\ &= \sum_{M \in \mathcal{M}_h} (\varepsilon_{\mathbf{u}}, \kappa ((\nabla \times \mathbf{e}_{\mathbf{b}}) \times \mathbf{d}_M))_M \\ &\leq \left(\sum_{M \in \mathcal{M}_h} \frac{1}{\tau_3} \|\varepsilon_{\mathbf{u}}\|_{0,2,M}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{E}_{\mathbf{h}}\|_{Stab,EO/ISS,w}. \end{aligned}$$

6.4.5 Equal-Order-Fall mit LPS-Kompatibilität

Wir erhalten

$$\left(S_1^{EO}\right)^2 \leq C \sum_{M \in \mathcal{M}_h} h_M^{2k} \left\{ \left(\nu + \frac{h_M^2}{\tau_1} + \frac{h_M^2}{\tau_3} \right) |\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\omega_M)^d}^2 + \left(\lambda + \frac{h_M^2}{\tau_4} \right) |\mathbf{b}|_{H^{k+1}(\omega_M)^d}^2 \right\} \quad (6.99)$$

und

$$\begin{aligned} \left(S_2^{EO}\right)^2 &\leq C \sum_{M \in \mathcal{M}_h} h_M^{2k} \left\{ \left(\tau_2 + \frac{h_M^2}{\tau_7} \right) |\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\omega_M)^d}^2 \right. \\ &\quad + h_M^{2(s-k)} \left(\tau_1 \|\mathbf{a}_M\|_{L^\infty(M)^d}^2 + \tau_4 \|\mathbf{d}_M\|_{L^\infty(M)^d}^2 \right) |\mathbf{u}|_{H^{s+1}(\omega_M)^d}^2 \\ &\quad + \tau_7 h_M^{2(s-k)} |p|_{H^s(\omega_M)}^2 + \frac{h_M^2}{\tau_2} |p|_{H^{k+1}(\omega_M)}^2 + \left(\tau_6 + \frac{h_M^2}{\tau_5} \right) |\mathbf{b}|_{H^{k+1}(\omega_M)^d}^2 \\ &\quad \left. + h_M^{2(s-k)} \tau_3 \|\mathbf{d}_M\|_{L^\infty(M)^d}^2 |\mathbf{b}|_{H^{s+1}(\omega_M)^d}^2 \right\}. \end{aligned} \quad (6.100)$$

Wir haben die Äquilibrierungen

$$\begin{aligned} \nu + \frac{h_M^2}{\tau_1} + \tau_1 \|\mathbf{a}_M\|_{L^\infty(M)^d}^2 + \tau_4 \|\mathbf{d}_M\|_{L^\infty(M)^d}^2 + \frac{h_M^2}{\tau_3} + \tau_2 + \frac{h_M^2}{\tau_7} &\lesssim \nu + h_M \|\mathbf{a}_M\|_{L^\infty(M)^d}, \\ \tau_7 + \frac{h_M^2}{\tau_2} &\lesssim \nu + h_M \|\mathbf{a}_M\|_{L^\infty(M)^d}, \\ \lambda + \frac{h_M^2}{\tau_4} + \tau_6 + \frac{h_M^2}{\tau_5} + \tau_3 \|\mathbf{d}_M\|_{L^\infty(M)^d}^2 &\lesssim \lambda + h_M \|\mathbf{d}_M\|_{L^\infty(M)} \end{aligned}$$

mit $s = k$. Dies führt auf die Parameterwahlen

$$\tau_1 \sim \frac{h_M}{\|\mathbf{a}_M\|_{L^\infty(M)^d}} \min \{1, Re_{f,M}\}, \quad (6.101)$$

$$\tau_2 \sim \max \left\{ \nu, h_M \|\mathbf{a}_M\|_{L^\infty(M)^d} \right\}, \quad (6.102)$$

$$\tau_3 \sim \frac{h_M}{\|\mathbf{d}_M\|_{L^\infty(M)^d}} \min \{1, Re_{f,M}\}, \quad (6.103)$$

$$\tau_4 \sim \frac{h_M}{\|\mathbf{d}_M\|_{L^\infty(M)^d}} \min \{1, Re_{m,M}\}, \quad (6.104)$$

$$\tau_5 \sim \frac{L_0^2}{\lambda}, \quad (6.105)$$

$$\tau_6 \sim \frac{\lambda h_M^2}{L_0^2}, \quad (6.106)$$

$$\tau_7 \sim \max \left\{ \nu, h_M \|\mathbf{a}_M\|_{L^\infty(M)^d} \right\} \quad (6.107)$$

und ohne Gitterweitenbeschränkungen auf folgendes Theorem ähnlich zu Theorem 6.18.

Theorem 6.23. Seien $\mathbf{a} \in L^\infty(\Omega)^d \cap V$, $\mathbf{d} \in W^{1,\infty}(\Omega)^d \cap H(\text{rot}, \Omega)$ und $\mathbf{U} \in [\mathbf{H}^{k+1}(\Omega)]^d \times [\mathbf{H}^{k+1}(\Omega)]^d \times [\mathbf{H}^{k+1}(\Omega)]^d$ die Lösung des kontinuierlichen linearisierten Magnetohydrodynamikproblems aus (5.40). Sei $\mathbf{U}_h \in V_h \times C_h \times Q_h \times S_h$ die Lösung des diskreten, linearisierten, stabilisierten Magnetohydrodynamikmodells aus (6.7). Dann gilt mit der Parameterwahl aus (6.101)-(6.107)

$$\|\mathbf{U} - \mathbf{U}_h\|_{\text{Stab, EO, w}}^2 \leq \tilde{C} \sum_{M \in \mathcal{M}_h} \sigma h_M^{2k} \left(|\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\omega_M)}^2 + |\mathbf{b}|_{H^{k+1}(\omega_M)}^2 + |\mathbf{p}|_{H^{k+1}(\omega_M)}^2 \right) \quad (6.108)$$

mit einer Konstanten $\tilde{C} > 0$ und $\sigma := \nu + \lambda + h_M \left(\|\mathbf{a}_M\|_{L^\infty(M)^d} + \|\mathbf{d}_M\|_{L^\infty(M)^d} \right)$.

Analog zu Theorem 6.19 folgt das nachfolgende Resultat ohne Gitterweitenbeschränkung.

Theorem 6.24. Seien $\mathbf{a} \in L^\infty(\Omega)^d \cap V$, $\mathbf{d} \in W^{1,\infty}(\Omega)^d \cap H(\text{rot}, \Omega)$ und $\mathbf{U} \in [\mathbf{H}^{k+1}(\Omega)]^d \times [\mathbf{H}^{k+1}(\Omega)]^d \times [\mathbf{H}^{k+1}(\Omega)]^d$ die Lösung des kontinuierlichen linearisierten Magnetohydrodynamikproblems aus (5.40). Sei $\mathbf{U}_h \in V_h \times C_h \times Q_h \times S_h$ die Lösung des diskreten, linearisierten, stabilisierten Magnetohydrodynamikmodells aus (6.7). Dann gilt mit der Parameterwahl aus (6.101)-(6.107)

$$\|\mathbf{U} - \mathbf{U}_h\|_{\text{Stab, EO, s}}^2 \leq \tilde{C} \sum_{M \in \mathcal{M}_h} \sigma h_M^{2k} \left(|\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\omega_M)}^2 + |\mathbf{b}|_{H^{k+1}(\omega_M)}^2 + |\mathbf{p}|_{H^{k+1}(\omega_M)}^2 \right) \quad (6.109)$$

mit einer Konstanten $\tilde{C} > 0$ und $\sigma := \nu + \lambda + h_M \left(\|\mathbf{a}_M\|_{L^\infty(M)^d} + \|\mathbf{d}_M\|_{L^\infty(M)^d} \right)$.

6.4.6 Inf-sup-stabiler Fall mit LPS-Kompatibilität

Wir erhalten

$$\left(S_1^{\text{ISS}} \right)^2 \leq C \sum_M h_M^{2k} \left[\left(\nu + \frac{h_M^2}{\tau_1} + \frac{h_M^2}{\tau_3} \right) |\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\omega_M)}^2 + \left(\lambda + \frac{h_M^2}{\tau_4} \right) |\mathbf{b}|_{H^{k+1}(\omega_M)}^2 \right] \quad (6.110)$$

und es gilt weiter

$$\begin{aligned} S_2^2 &\leq C \sum_M h_M^{2k} \left[\tau_2 |\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\omega_M)}^2 + h_M^{2(s-k)} (\tau_1 \|\mathbf{a}_M\|_{L^\infty(M)^d}^2 + \tau_4 \|\mathbf{d}_M\|_{L^\infty(M)^d}^2) |\mathbf{u}|_{H^{s+1}(\omega_M)}^2 \right. \\ &\quad + \frac{1}{\tau_2} |\mathbf{p}|_{H^k(\omega_M)}^2 + \left(\tau_6 + \frac{h_M^2}{\tau_5} \right) |\mathbf{b}|_{H^{k+1}(\omega_M)}^2 + h_M^{2(s-k)} \tau_3 \|\mathbf{d}_M\|_{L^\infty(M)^d}^2 |\mathbf{b}|_{H^{s+1}(\omega_M)}^2 \\ &\quad \left. + h_M^{2(s-k)} |\mathbf{p}|_{H^s(\omega_M)}^2 \right]. \end{aligned} \quad (6.111)$$

Eine Äquilibrierung der Terme gibt

$$c h_M^2 \leq \tau_1 \leq C \frac{h_M^{2(k-s)}}{\|\mathbf{a}_M\|_{L^\infty(M)^d}^2}, \quad c\nu \leq \tau_2 \leq C\nu \max\{1, \text{Re}_f \Omega\} \quad (6.112)$$

und

$$Ch_M^2 \leq \tau_3, \tau_4 \leq C \frac{h_M^{2(k-s)}}{\|\mathbf{d}_M\|_{L^\infty(M)^d}^2} \quad (6.113)$$

und abschließend

$$\tau_5 \sim L_0^2/\lambda, \quad \tau_6 \sim h_M^2\lambda/L_0^2, \quad \tau_7 \sim \frac{h_M^{2(k-s)}}{\tau_2}. \quad (6.114)$$

Das führt ohne Gitterweitenbeschränkung auf das folgende Theorem ähnlich zum gefundenen Theorem 6.21.

Theorem 6.25. *Seien $\mathbf{a} \in L^\infty(\Omega)^d$, $\mathbf{d} \in L^\infty(\Omega)^d \cap H(\text{rot}, \Omega)$ und $\mathbf{U} \in [\mathbf{H}^{k+1}(\Omega)]^d \times [\mathbf{H}^{k+1}(\Omega)]^d \times [\mathbf{H}^k(\Omega)]^d \times [\mathbf{H}^k(\Omega)]^d$ die Lösung des kontinuierlichen linearisierten Magnetohydrodynamikproblems aus (5.40). Sei $\mathbf{U}_h \in V_h \times C_h \times Q_h \times S_h$ die Lösung des diskreten, linearisierten, stabilisierten Magnetohydrodynamikmodells aus (6.9). Dann gilt mit der Parameterwahl aus (6.112)-(6.114)*

$$\|\mathbf{U} - \mathbf{U}_h\|_{\text{Stab, ISS, w}}^2 \leq \tilde{C} \sum_{M \in \mathcal{M}_h} \sigma h_M^{2k} \left(|\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\omega_M)^d}^2 + |\mathbf{b}|_{H^{k+1}(\omega_M)^d}^2 + |\mathbf{p}|_{H^k(\omega_M)}^2 \right) \quad (6.115)$$

mit einer Konstanten $\tilde{C} > 0$ und $\sigma := \nu + \lambda + h_M \left(\|\mathbf{a}_M\|_{L^\infty(M)^d} + \|\mathbf{d}_M\|_{L^\infty(M)^d} \right)$.

Ähnlich zu Theorem 6.22 erhalten wir ohne Gitterweitenbeschränkung das nachfolgende Theorem als Resultat.

Theorem 6.26. *Seien $\mathbf{a} \in L^\infty(\Omega)^d$, $\mathbf{d} \in L^\infty(\Omega)^d \cap H(\text{rot}, \Omega)$ und $\mathbf{U} \in [\mathbf{H}^{k+1}(\Omega)]^d \times [\mathbf{H}^{k+1}(\Omega)]^d \times [\mathbf{H}^k(\Omega)]^d \times [\mathbf{H}^k(\Omega)]^d$ die Lösung des kontinuierlichen linearisierten Magnetohydrodynamikproblems aus (5.40). Sei $\mathbf{U}_h \in V_h \times C_h \times Q_h \times S_h$ die Lösung des diskreten, linearisierten, stabilisierten Magnetohydrodynamikmodells aus (6.9). Dann gilt mit der Parameterwahl aus (6.112)-(6.114)*

$$\|\mathbf{U} - \mathbf{U}_h\|_{\text{Stab, ISS, s}}^2 \leq \tilde{C} \sum_{M \in \mathcal{T}_h} \sigma h_M^{2k} \left(|\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\omega_M)^d}^2 + |\mathbf{b}|_{H^{k+1}(\omega_M)^d}^2 + |\mathbf{p}|_{H^k(\omega_M)}^2 \right) \quad (6.116)$$

mit einer Konstanten $\tilde{C} > 0$ und $\sigma := \nu + \lambda + h_M \left(\|\mathbf{a}_M\|_{L^\infty(M)^d} + \|\mathbf{d}_M\|_{L^\infty(M)^d} \right)$.

6.5 Konvergenzanalyse für nichtglatte Lösungen

Unter einer nichtglatte Lösungen verstehen wir ein Magnetfeld, für welches $\mathbf{b} \notin H^1(\Omega)^d$ liegt. Dieser Umstand tritt beispielsweise dann auf, wenn das Rechengebiet nichtkonvex ist und eine einspringende Ecke vorliegt. Beispiele für solche Gegebenheiten finden sich in [6] oder [19]. Im Folgenden seien die bekannten Felder $\mathbf{a} \in L^\infty(\Omega)^d \cap V$ und $\mathbf{d} \in W^{1,\infty}(\Omega)^d \cap C$.

In diesem Unterabschnitt wollen wir die Ideen aus Unterkapitel 4.1.5 auf das stationäre linearisierte Magnetohydrodynamikmodell übertragen. Wesentlich wird die Annahme 4.12 sein. Ferner benötigen wir den Umstand, dass

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_5 \int_{\partial K} (\nabla \varphi) \mathbf{n} (\nabla \cdot \mathbf{c}_h) \, dx = 0$$

gilt. Da die LPS-Kompatibilität eine bestimmte Glattheit an die Argumente im Fluktuationsoperator voraussetzt, wird die Fehleranalyse nur für den Fall ohne diese Orthogonalitätsbedingung durchgeführt.

Startpunkt, um die Fehleranalyse für dieses Problem zu skizzieren, ist die Zerlegung aus Theorem 4.11, welches uns

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_0 + \nabla \varphi \tag{6.117}$$

mit $\mathbf{b}_0 \in H^{1+r}(\Omega)^d \cap H_0(\text{rot}; \Omega)$ und $\varphi \in H_0^1(\Omega) \cap H^{1+r}(\Omega)$ für ein reelles $r > \frac{1}{2}$ liefert. Wegen $\nabla \times \nabla \varphi = 0$ gilt somit offenbar beispielsweise

$$(\nabla \times \mathbf{b}, \nabla \times \mathbf{c}_h) = (\nabla \times \mathbf{b}_0, \nabla \times \mathbf{c}_h)$$

für eine beliebige Testfunktion $\mathbf{c}_h \in C_h$. Somit ist erneut der einzige Term in der Fehleranalyse, der Probleme bereitet, die Divergenzstabilisierung des Magnetfeldes. Analog zum Unterabschnitt 4.1.5 sehen wir mit partieller Integration für den singulären Anteil φ ein, dass sich

$$\begin{aligned} & \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_5 \int_K (\nabla \cdot \nabla \varphi) (\nabla \cdot \mathbf{c}_h) \, dx \\ &= - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_5 \int_K (\nabla \varphi) (\nabla \nabla \cdot \mathbf{c}_h) \, dx \\ & \quad + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_5 \int_{\partial K} (\nabla \varphi) \mathbf{n} (\nabla \cdot \mathbf{c}_h) \, dx \end{aligned}$$

ergibt. Wir benötigen die folgende Approximationseigenschaft aus Unterkapitel 4.1.5:

Annahme 6.27. Es existiere über der Gebietszerlegung \mathcal{T}_h ein Finite-Elemente-Raum G_h dergestalt, dass für jedes $\phi_h \in G_h$ dann $\nabla \phi_h \in C_h$ gilt. Ferner erfülle dieser Raum G_h die Approximationseigenschaft

$$\inf_{\phi_h \in G_h} \|\phi - \phi_h\|_{H^s(K)} \leq C h_K^{t-s} \|\phi\|_{H^t(K)} \tag{6.118}$$

mit einer Konstanten $C > 0$ für jedes $K \in \mathcal{T}_h$ für beliebiges $\phi \in H^t(K)$ für $0 \leq s \leq t \leq k + 1$ für die polynomiale Ansatzordnung $k \in \mathbb{N}$.

Mit Unterabschnitt 4.1.5 und den Vorbereitungen aus Unterabschnitt 6.4.1 ergeben sich dann mit der nichtbeschränkenden Annahme, dass $h_M \leq 1$ ist, die folgenden Resultate im Falle der Equal-Order-Approximation:

Theorem 6.28. Seien $\mathbf{a} \in L^\infty(\Omega)^d \cap V$, $\mathbf{d} \in W^{1,\infty}(\Omega)^d \cap H(\text{rot}, \Omega)$ und $\mathbf{U} \in [\mathbf{H}^{k+1}(\Omega)]^d \times [\mathbf{H}^r(\Omega)]^d \times [\mathbf{H}^{k+1}(\Omega)]^d \times [\mathbf{H}^{k+1}(\Omega)]^d$ die Lösung des kontinuierlichen linearisierten Magnetohydrodynamikproblems aus (5.40) mit $\frac{1}{2} < r < 1$. Sei $\mathbf{U}_h \in V_h \times C_h \times Q_h \times S_h$ die Lösung des diskreten, linearisierten, stabilisierten Magnetohydrodynamikmodells aus (6.7). Dann gilt mit der Gitterweitenbeschränkung aus (6.73)-(6.74), der Parameterwahl aus (6.75)-(6.81) und der Annahme 6.27

$$\begin{aligned} \|\mathbf{U} - \mathbf{U}_h\|_{\text{Stab, EO, w}}^2 &\leq \tilde{C} \sum_{M \in \mathcal{M}_h} h_M^{2t} \left(|\mathbf{u}|_{\mathbf{H}^{k+1}(\omega_M)^d}^2 + |\mathbf{b}_0|_{H^{t+1}(\omega_M)^d}^2 + |\mathbf{p}|_{\mathbf{H}^{k+1}(\omega_M)}^2 \right) \\ &\quad + \frac{\lambda}{L_0^{2-2\varepsilon}} h_M^{2(t-\varepsilon)} |\varphi|_{H^{t+1}(\omega_M)^d}^2 \end{aligned} \quad (6.119)$$

mit einer Konstanten $\tilde{C} > 0$ für $t := \min\{r, k\}$ für jedes $\varepsilon \in \left(0, t - \frac{1}{2}\right)$.

Dies lässt sich ähnlich zum vorherigen Vorgehen im glatten Fall auf die starke Norm erweitern.

Theorem 6.29. Seien $\mathbf{a} \in L^\infty(\Omega)^d \cap V$, $\mathbf{d} \in W^{1,\infty}(\Omega)^d \cap H(\text{rot}, \Omega)$ und $\mathbf{U} \in [\mathbf{H}^{k+1}(\Omega)]^d \times [\mathbf{H}^r(\Omega)]^d \times [\mathbf{H}^{k+1}(\Omega)]^d \times [\mathbf{H}^{k+1}(\Omega)]^d$ die Lösung des kontinuierlichen linearisierten Magnetohydrodynamikproblems aus (5.40) mit $\frac{1}{2} < r < 1$. Sei $\mathbf{U}_h \in V_h \times C_h \times Q_h \times S_h$ die Lösung des diskreten, linearisierten, stabilisierten Magnetohydrodynamikmodells aus (6.7). Dann gilt mit der Gitterweitenbeschränkung aus (6.73)-(6.74), der Parameterwahl aus (6.75)-(6.81) und der Annahme 6.27

$$\begin{aligned} \|\mathbf{U} - \mathbf{U}_h\|_{\text{Stab, EO, s}}^2 &\leq \tilde{C} \sum_{M \in \mathcal{M}_h} h_M^{2t} \left(|\mathbf{u}|_{\mathbf{H}^{k+1}(\omega_M)^d}^2 + |\mathbf{b}_0|_{H^{t+1}(\omega_M)^d}^2 + |\mathbf{p}|_{\mathbf{H}^{k+1}(\omega_M)}^2 \right) \\ &\quad + \frac{\lambda}{L_0^{2-2\varepsilon}} h_M^{2(t-\varepsilon)} |\varphi|_{H^{t+1}(\omega_M)^d}^2 \end{aligned} \quad (6.120)$$

mit einer Konstanten $\tilde{C} > 0$ für $t := \min\{r, k\}$ für jedes $\varepsilon \in \left(0, t - \frac{1}{2}\right)$.

Analoge Resultate erhält man mit den entsprechenden Parameterwahlen ohne LPS-Kompatibilität für die inf-sup-stabilen Approximationen.

Bemerkung 6.30. Wesentliches Resultat der Fehleranalyse aus den Abschnitten 6.4 und 6.5 ist die zwingende Notwendigkeit der Stabilisierungen, welche nicht lokal projiziert werden. Dies zeigte sich auch bereits in der Stabilitätsanalyse. Für die lokalen Projektionsstabilisierungen ergibt sich ein großer Parameterbereich, der auch deren Nichteinschalten einschließt.

7 Numerische Beispiele

In diesem Kapitel werden wir zunächst die Algorithmen für das zeitabhängige erweiterte Induktionsproblem und für das zeitabhängige Magnetohydrodynamikmodell vorstellen.

Anschließend wird zuerst zum Induktionsproblem ein zweidimensionales Beispiel angeführt, welches wegen der Nichtkonvexität des Rechengebietes eine singuläre Magnetfeldlösung besitzt. Dieses Beispiel dient dazu, die Konvergenzanalyse im Falle nichtglatter Lösungen zu unterstreichen. Dieses Beispiel findet sich auch in den Arbeiten [64] und [45].

Aufbauend folgen zwei Beispiele zum erweiterten magnetischen Induktionsproblem. Hierbei treten im ersten Beispiel scharfe innere Grenzschichten in zwei Dimensionen auf, die trotzdem überraschenderweise auf einem feinen Gitter ohne Stabilisierung gut approximiert werden. Im Anschluss wird das dreidimensionale Problem von Shercliff vorgestellt, welches ein Randgrenzschichtphänomen vorstellt. Bei kleinerer magnetischer Diffusivität λ zeigt sich, dass grenzschichtangepasste Gitter die Qualität der Lösung wesentlich verbessern. Diese beiden Beispiele finden sich auch in [45].

Als Letztes werden noch zwei analytische Beispiele für das volle Magnetohydrodynamikmodell vorgestellt, die [64] entstammen. Es handelt es sich um ein analytisches Beispiel, um die theoretischen Konvergenzraten im Falle glatter Lösungen und das Parameterdesign für die vollen Stabilisierungen zu unterstreichen. Desweiteren wird eine klassische Kanalströmung nach dem Beispiel von Hartmann beschrieben und numerische Ergebnisse präsentiert.

7.1 Algorithmen für das zeitabhängige erweiterte Induktionsproblem und für das zeitabhängige Magnetohydrodynamikmodell

In diesem Unterabschnitt werden die Algorithmen für das zeitabhängige erweiterte Induktionsproblem und für das zeitabhängige Magnetohydrodynamikmodell vorgestellt. Wir benutzen in beiden Fällen als Zeitdiskretisierungsschema das BDF(2)-Schema.

7.1.1 Algorithmus für das zeitabhängige erweiterte Induktionsproblem

Wir behandeln zuerst den magnetischen Pseudodruck explizit. Finde $\mathbf{b}_{\text{ht}}^n \in C_h$ für vorgeschriebenes Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T, W^{1,\infty}(\Omega)^d)$ aus

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{3\mathbf{b}_{\text{ht}}^n - 4\mathbf{b}_{\text{ht}}^{n-1} + \mathbf{b}_{\text{ht}}^{n-2}}{2\Delta t}, \mathbf{c}_{\text{h}} \right) + \lambda (\nabla \times \mathbf{b}_{\text{ht}}^n, \nabla \times \mathbf{c}_{\text{h}}) \\
 & + \sum_M (\tau_{\text{EInd}} (\kappa_M^s (\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{b}_{\text{ht}}^n)), \kappa_M^s (\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{c}_{\text{h}})))_M \\
 & \quad + \tau_{\text{div,EInd}} (\nabla \cdot \mathbf{b}_{\text{ht}}^n, \nabla \cdot \mathbf{c}_{\text{h}})_M + (\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{b}_{\text{ht}}^n), \mathbf{c}_{\text{h}}) \\
 & = (\mathbf{f}_b^n, \mathbf{c}_{\text{h}}) - (\nabla \tau_{\text{ht}}^{n-1}, \mathbf{c}_{\text{h}})
 \end{aligned} \tag{7.1}$$

für alle $\mathbf{c}_h \in C_h$. Finde anschließend $r_{ht}^n \in S_h$ aus

$$-(\mathbf{b}_{ht}^n, \nabla s_h) + \sum_M \tau_{\text{grad, EInd}} (\nabla r_{ht}^n, \nabla s_h)_M = 0 \quad (7.2)$$

für alle $s_h \in S_h$.

7.1.2 Algorithmus für das zeitabhängige Magnetohydrodynamikmodell

Die rotationale Inkrement-Version des Druckkorrekturschemas aus [39] wird für den kinematischen Druck angewendet. Das bedeutet, dass wir einen Geschwindigkeitszwischenvektor einführen und die Geschwindigkeitsgleichung mit expliziter Behandlung des Druckes lösen. Das Problem liest sich dann in folgender Gestalt: Finde ein $\tilde{\mathbf{u}}_{ht}^n \in V_h$ aus

$$\begin{aligned} & \left(\frac{3\tilde{\mathbf{u}}_{ht}^n - 4\mathbf{u}_{ht}^{n-1} + \mathbf{u}_{ht}^{n-2}}{2\Delta t}, \mathbf{v}_h \right) + \nu (\nabla \tilde{\mathbf{u}}_{ht}^n, \nabla \mathbf{v}_h) + ((\tilde{\mathbf{u}}_{ht}^n \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}}_{ht}^n, \mathbf{v}_h) \\ & + \sum_M (\tau_1 (\kappa_M^s ((\mathbf{a}_M^n \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}}_{ht}^n), \kappa_M^s ((\mathbf{a}_M^n \cdot \nabla) \mathbf{v}_h))_M + \tau_2 (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}_{ht}^n, \nabla \cdot \mathbf{v}_h)_M \\ & \quad + \tau_3 (\kappa_M^s (\nabla \times (\tilde{\mathbf{u}}_{ht}^n \times \mathbf{d}_M^n), \kappa_M^s (\nabla \times (\mathbf{v}_h \times \mathbf{d}_M^n)))_M) \\ & = (\mathbf{f}_u^n, \mathbf{v}_h) - (\nabla p_{ht}^{n-1}, \mathbf{v}_h) - (\nabla \times \mathbf{b}_{ht}^* \times \mathbf{b}_{ht}^*, \mathbf{v}_h) \end{aligned} \quad (7.3)$$

für alle $\mathbf{v}_h \in V_h$, wobei $\mathbf{b}_{ht}^* := 2\mathbf{b}_{ht}^{n-1} - \mathbf{b}_{ht}^{n-2}$ eine Extrapolation ist. Hierbei sind \mathbf{a}_M^n eine konstante Approximation an die Lösung $\tilde{\mathbf{u}}_{ht}^n$ und \mathbf{d}_M^n eine konstante Approximation an \mathbf{b}_{ht}^* .

Danach wird die Lösung in den Raum der schwach-divergenzfreien Funktionen projiziert. Das Problem liest sich dann: Finde $(\mathbf{u}_{ht}^n, \phi_{ht}^n) \in (\tilde{V}_h \times Q_h)$ derart, dass für alle $q_h \in Q_h$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{3\mathbf{u}_{ht}^n - 3\tilde{\mathbf{u}}_{ht}^n}{2\Delta t} + \nabla \phi_{ht}^n, \nabla q_h \right) = 0, \\ & (\nabla \cdot \mathbf{u}_{ht}^n, q_h) = 0 \end{aligned} \quad (7.4)$$

gilt, wobei \tilde{V}_h sich von V_h durch die Randbedingung $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0$ für alle $\mathbf{v} \in \tilde{V}_h$ unterscheidet. Wegen der diskreten inf-sup-Bedingung für Taylor-Hood-Elemente, die wir verwenden, benötigen wir keine explizite Druckstabilisierung. Dann setze den neuen Druck zu

$$p_{ht}^n = \phi_{ht}^n + p_{ht}^{n-1} - \nu \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}_{ht}^n.$$

Für das Magnetfeld benutzen wir die folgende Implementation. Wir lösen zuerst die Magnetfeldgleichung und behandeln den magnetischen Pseudodruck r explizit. Das heißt:

Finde $\mathbf{b}_{\text{ht}}^n \in C_h$ aus

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{3\mathbf{b}_{\text{ht}}^n - 4\mathbf{b}_{\text{ht}}^{n-1} + \mathbf{b}_{\text{ht}}^{n-2}}{2\Delta t}, \mathbf{c}_{\text{h}} \right) + \lambda (\nabla \times \mathbf{b}_{\text{ht}}^n, \nabla \times \mathbf{c}_{\text{h}}) \\
& + \sum_M (\tau_4 (\kappa_M^s ((\nabla \times \mathbf{b}_{\text{ht}}^n) \times \mathbf{d}_M^n), \kappa_M^s ((\nabla \times \mathbf{c}_{\text{h}}) \times \mathbf{d}_M^n))_M \\
& \quad + \tau_5 (\nabla \cdot \mathbf{b}_{\text{ht}}^n, \nabla \cdot \mathbf{c}_{\text{h}})_M) \\
& = (\mathbf{f}_b^n, \mathbf{c}_{\text{h}}) - (\nabla r_{\text{ht}}^{n-1}, \mathbf{c}_{\text{h}}) + (\nabla \times (\tilde{\mathbf{u}}_{\text{ht}}^n \times \mathbf{b}_{\text{ht}}^*), \mathbf{c}_{\text{h}})
\end{aligned} \tag{7.5}$$

für alle $\mathbf{c}_{\text{h}} \in C_h$. Schließlich lösen wir nach dem magnetischen Pseudodruck: Finde $r_{\text{ht}}^n \in S_h$ derart, dass für alle $s_h \in S_h$

$$- (\mathbf{b}_{\text{ht}}^n, \nabla s_h) + \sum_M \tau_6 (\nabla r_{\text{ht}}^n, \nabla s_h)_M = 0 \tag{7.6}$$

gilt.

7.2 Beispiel für das magnetische Induktionsproblem

In diesem Unterkapitel wollen wir uns mit einem nichtkonvexen Rechengebiet beschäftigen, sodass bei der magnetischen Induktionsgleichung eine singuläre Lösung entsteht. Dies bedeutet, dass das Magnetfeld $\mathbf{b} \notin H^r(\Omega)^d$ mit $r \geq 1$. Dieses Beispiel findet sich in [6] und die Ergebnisse entstammen der Publikation [64] des Autors mit Daniel Arndt und Gert Lube.

Wir betrachten das Gebiet $\Omega = (-1, 1)^2 \setminus \{[0, 1] \times [-1, 0]\}$, wobei die exakte Lösung des Magnetfeldes und des magnetischen Pseudodruckes in Polarkoordinaten (z, φ) mittels

$$b(z, \varphi) := z^{\frac{2}{3}} \sin\left(\frac{2\varphi}{3}\right), \quad r(z, \varphi) = 0.$$

gegeben sind. Die magnetische Diffusivität ist durch $\lambda = 1$ gegeben. Es gilt $\mathbf{f}_b = 0$. Ferner ist in diesem Falle wegen der analytischen Lösung bekannt, dass $\mathbf{b} \in [W^{\frac{2}{3}, 2}(\Omega)]^2$ gilt und wir somit nicht $\mathbf{b} \in [W^{1, 2}(\Omega)]^2$ haben. Die Dirichlet-Randbedingungen für den magnetischen Pseudodruck werden mittels $r = 0$ auf $\partial\Omega$ gesetzt und die Randbedingungen für das Magnetfeld lauten $\mathbf{n} \times \mathbf{b} = \mathbf{n} \times \mathbf{b}_{\mathbf{D}}$, wobei $\mathbf{b}_{\mathbf{D}}$ der exakten Lösung \mathbf{b} auf $\partial\Omega$ entspricht. Dieses Problem wird mittels eines stationären Löser rechnerisch umgesetzt, welcher in **FreeFEM++** [40] geschrieben ist. Die benutzen Finite-Elemente-Räume lauten $[\mathbb{P}_1]^2 / \mathbb{P}_1$ im Falle der Equal-Order-Interpolation und $[\mathbb{P}_2]^2 / \mathbb{P}_1$ im Taylor-Hood-Falle für das Magnetfeld und den magnetischen Pseudodruck. Wir untersuchen zunächst die theoretischen Konvergenzraten aus Kapitel 4 auf verschiedenen Gitter, welche in Abbildung 7.1 zu sehen sind.

Wir erhalten dabei die folgenden Ergebnisse, wobei die Konvergenzraten in Klammern stehen.

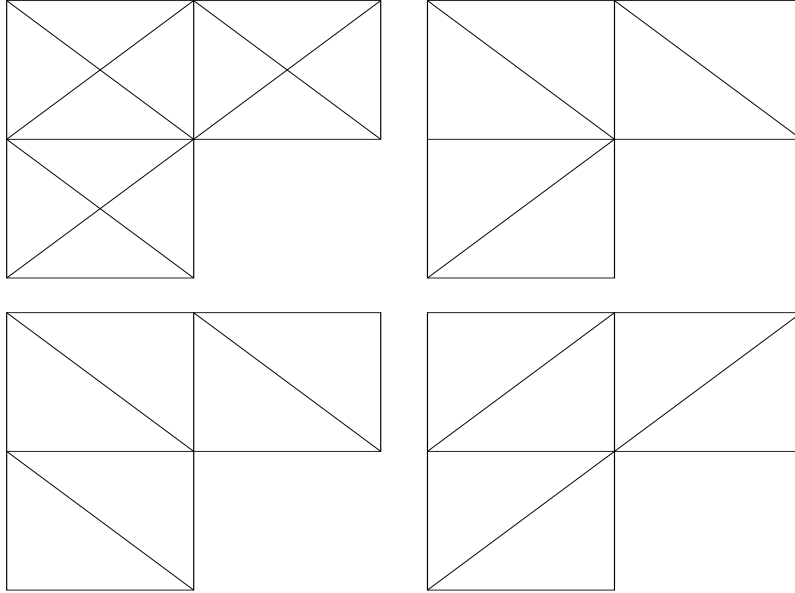


Abbildung 7.1: Gitter für die Berechnungen: (Links oben) Crossbox, (Rechts oben) \mathbb{P}_1 Standardgitter, (Links unten) \mathbb{P}_1 rechts-modifiziertes Gitter, (Rechts unten) \mathbb{P}_1 links-modifiziertes Gitter

Crossbox, Equal-order				
h	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}
$\ \mathbf{b} - \mathbf{b}_h\ _0$	$1.71E - 1$	$1.09E - 1$ (0.65)	$6.91E - 2$ (0.66)	$4.36E - 2$ (0.66)
$\ \nabla \times (\mathbf{b} - \mathbf{b}_h)\ _0$	$1.93E - 2$	$7.66E - 3$ (1.33)	$3.04E - 3$ (1.33)	$1.23E - 3$ (1.31)
$\ r - r_h\ _0$	$7.94E - 3$	$3.46E - 3$ (1.20)	$1.45E - 3$ (1.25)	$5.96E - 4$ (1.28)
$\ \nabla (r - r_h)\ _0$	$3.91E - 2$	$2.49E - 2$ (0.65)	$1.57E - 2$ (0.66)	$9.92E - 3$ (0.66)
$\ \nabla \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{b}_h)\ _0$	3.65	4.57 (-0.32)	5.75 (-0.33)	7.23 (-0.33)
Crossbox, Taylor-Hood				
h	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}
$\ \mathbf{b} - \mathbf{b}_h\ _0$	$1.60E - 1$	$1.02E - 1$ (0.65)	$6.45E - 2$ (0.66)	$4.07E - 2$ (0.66)
$\ \nabla \times (\mathbf{b} - \mathbf{b}_h)\ _0$	$1.55E - 2$	$6.13E - 3$ (1.34)	$2.42E - 3$ (1.34)	$9.61E - 4$ (1.33)
$\ r - r_h\ _0$	$6.25E - 3$	$2.74E - 3$ (1.19)	$1.15E - 3$ (1.25)	$4.71E - 4$ (1.29)
$\ \nabla (r - r_h)\ _0$	$3.04E - 2$	$1.94E - 2$ (0.65)	$1.23E - 2$ (0.66)	$7.74E - 3$ (0.67)
$\ \nabla \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{b}_h)\ _0$	3.52	4.41 (-0.33)	5.54 (-0.33)	6.98 (-0.33)

Tabelle 7.1: Fehler zwischen kontinuierlicher und approximierter Lösung auf dem Crossboxgitter des Beispiels aus Unterabschnitt 7.2 mit Konvergenzraten in Klammern

\mathbb{P}_1 Standardgitter, Equal-order				
h	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}
$\ \mathbf{b} - \mathbf{b}_h\ _0$	$3.62E - 1$	$2.86E - 1$ (0.34)	$2.23E - 1$ (0.36)	$1.74E - 1$ (0.36)
$\ \nabla \times (\mathbf{b} - \mathbf{b}_h)\ _0$	$1.19E - 1$	$7.98E - 2$ (0.58)	$5.68E - 2$ (0.49)	$4.19E - 2$ (0.44)
$\ r - r_h\ _0$	$2.33E - 2$	$1.46E - 2$ (0.67)	$8.83E - 3$ (0.73)	$5.30E - 3$ (0.74)
$\ \nabla (r - r_h)\ _0$	$7.98E - 2$	$6.39E - 2$ (0.32)	$5.07E - 2$ (0.33)	$4.00E - 2$ (0.34)
$\ \nabla \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{b}_h)\ _0$	3.06	3.94 (-0.36)	5.24 (-0.41)	7.12 (-0.44)
\mathbb{P}_1 Standardgitter, Taylor-Hood				
h	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}
$\ \mathbf{b} - \mathbf{b}_h\ _0$	$2.19E - 1$	$1.41E - 1$ (0.64)	$8.98E - 2$ (0.65)	$5.68E - 2$ (0.66)
$\ \nabla \times (\mathbf{b} - \mathbf{b}_h)\ _0$	$2.87E - 2$	$1.16E - 2$ (1.31)	$4.72E - 3$ (1.30)	$1.92E - 3$ (1.30)
$\ r - r_h\ _0$	$1.00E - 2$	$4.58E - 3$ (1.13)	$1.96E - 3$ (1.22)	$8.13E - 4$ (1.27)
$\ \nabla (r - r_h)\ _0$	$3.81E - 2$	$2.46E - 2$ (0.63)	$1.56E - 2$ (0.66)	$9.89E - 3$ (0.66)
$\ \nabla \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{b}_h)\ _0$	3.18	3.99 (-0.33)	5.02 (-0.33)	6.32 (-0.33)

Tabelle 7.2: Fehler zwischen kontinuierlicher und approximierter Lösung auf dem Standardgitter des Beispiels aus Unterabschnitt 7.2 mit Konvergenzraten in Klammern

\mathbb{P}_1 rechts-modifiziertes Gitter, Equal-order				
h	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}
$\ \mathbf{b} - \mathbf{b}_h\ _0$	$3.61E - 1$	$2.83E - 1$ (0.35)	$2.20E - 1$ (0.36)	$1.71E - 1$ (0.36)
$\ \nabla \times (\mathbf{b} - \mathbf{b}_h)\ _0$	$1.18E - 1$	$7.91E - 2$ (0.58)	$5.66E - 2$ (0.48)	$4.20E - 2$ (0.43)
$\ r - r_h\ _0$	$2.29E - 2$	$1.43E - 2$ (0.68)	$8.56E - 3$ (0.74)	$5.11E - 3$ (0.74)
$\ \nabla (r - r_h)\ _0$	$8.13E - 2$	$6.47E - 2$ (0.33)	$5.10E - 2$ (0.34)	$4.02E - 2$ (0.34)
$\ \nabla \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{b}_h)\ _0$	3.17	4.08 (-0.36)	5.37 (-0.40)	7.20 (-0.42)
\mathbb{P}_1 rechts-modifiziertes Gitter, Taylor-Hood				
h	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}
$\ \mathbf{b} - \mathbf{b}_h\ _0$	$2.21E - 1$	$1.42E - 1$ (0.64)	$9.05E - 2$ (0.65)	$5.72E - 2$ (0.66)
$\ \nabla \times (\mathbf{b} - \mathbf{b}_h)\ _0$	$2.94E - 2$	$1.14E - 2$ (1.37)	$4.48E - 3$ (1.35)	$1.78E - 3$ (1.33)
$\ r - r_h\ _0$	$1.02E - 2$	$4.66E - 3$ (1.13)	$1.99E - 3$ (1.23)	$8.25E - 4$ (1.27)
$\ \nabla (r - r_h)\ _0$	$4.03E - 2$	$2.60E - 2$ (0.63)	$1.65E - 2$ (0.66)	$1.04E - 2$ (0.67)
$\ \nabla \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{b}_h)\ _0$	3.21	4.02 (-0.32)	5.05 (-0.33)	6.36 (-0.33)

Tabelle 7.3: Fehler zwischen kontinuierlicher und approximierter Lösung auf dem rechts-modifizierten Gitter des Beispiels aus Unterabschnitt 7.2 mit Konvergenzraten in Klammern

Aus unseren Berechnungen beobachten wir in den Tabellen 7.1 - 7.4, dass das Crossbox-Element in Übereinstimmung mit einer Bemerkung aus [6] sowohl im Falle der Equal-Order-Interpolation als auch der Taylor-Hood-Interpolation die asymptotisch richtigen Konvergenzraten liefert. Wir sehen außerdem überraschenderweise, dass die Taylor-Hood-Approximation in $[\mathbb{P}_2]^2 / \mathbb{P}_1$ ebenfalls auf allen anderen Gitter im Vergleich zur Equal-

\mathbb{P}_1 links-modifiziertes Gitter, Equal-order				
h	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}
$\ \mathbf{b} - \mathbf{b}_h\ _0$	$3.30E - 1$	$2.60E - 1$ (0.34)	$2.04E - 1$ (0.35)	$1.59E - 1$ (0.36)
$\ \nabla \times (\mathbf{b} - \mathbf{b}_h)\ _0$	$1.09E - 1$	$7.30E - 2$ (0.58)	$5.20E - 2$ (0.49)	$3.85E - 2$ (0.43)
$\ r - r_h\ _0$	$2.04E - 2$	$1.25E - 2$ (0.71)	$7.50E - 3$ (0.74)	$4.49E - 3$ (0.74)
$\ \nabla (r - r_h)\ _0$	$7.39E - 2$	$5.93E - 2$ (0.32)	$4.72E - 2$ (0.33)	$3.75E - 2$ (0.33)
$\ \nabla \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{b}_h)\ _0$	3.00	3.82 (-0.35)	4.97 (-0.38)	6.57 (-0.40)
\mathbb{P}_1 links-modifiziertes Gitter, Taylor-Hood				
h	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}
$\ \mathbf{b} - \mathbf{b}_h\ _0$	$2.11E - 1$	$1.36E - 1$ (0.63)	$8.62E - 2$ (0.66)	$5.45E - 2$ (0.66)
$\ \nabla \times (\mathbf{b} - \mathbf{b}_h)\ _0$	$2.73E - 2$	$1.08E - 2$ (1.34)	$4.27E - 3$ (1.34)	$1.71E - 3$ (1.32)
$\ r - r_h\ _0$	$9.82E - 3$	$4.46E - 3$ (1.14)	$1.91E - 3$ (1.22)	$7.89E - 4$ (1.28)
$\ \nabla (r - r_h)\ _0$	$3.75E - 2$	$2.42E - 2$ (0.63)	$1.54E - 2$ (0.65)	$9.73E - 3$ (0.66)
$\ \nabla \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{b}_h)\ _0$	3.16	3.96 (-0.33)	4.97 (-0.33)	6.26 (-0.33)

Tabelle 7.4: Fehler zwischen kontinuierlicher und approximierter Lösung auf dem links-modifizierten Gitter des Beispiels aus Unterabschnitt 7.2 mit Konvergenzraten in Klammern

Order-Approximation die theoretischen Konvergenzraten erzeugt. Dies könnte an der speziellen kartesischen Struktur der Gitter liegen und würde daher mit den Bemerkungen aus [19] und [20] übereinstimmen, welche sich auch in Bemerkung 4.16 finden lassen.

Wir untersuchen jetzt den Einfluss der Längenskala L_0 . Wir verwenden das \mathbb{P}_1 Standardgitter dafür. Desweiteren benutzen wir das Taylor-Hood-Finite-Element-Paar $[\mathbb{P}_2]^2 / \mathbb{P}_1$ für unsere Berechnungen. Sei $\lambda = 1$ die magnetische Diffusivität.

h	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}
$\ \mathbf{b} - \mathbf{b}_h\ _0$	$7.69E - 1$	$6.63E - 1$ (0.21)	-
$\ \nabla \times (\mathbf{b} - \mathbf{b}_h)\ _0$	1.04	0.90 (0.21)	-
$\ r - r_h\ _0$	$3.87E - 1$	$3.85E - 1$ (0.01)	-
$\ \nabla (r - r_h)\ _0$	1.46	2.05 (-0.49)	-
$\ \nabla \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{b}_h)\ _0$	$3.34E - 1$	$8.87E - 1$ (-1.41)	-

Tabelle 7.5: Fehler zwischen kontinuierlicher und approximierter Lösung auf dem Standardgitter des Beispiels aus Unterabschnitt 7.2 mit Konvergenzraten in Klammern für $L_0 = 10^{-1}$

Wir sehen anhand dieser Ergebnisse in den Tabellen 7.5 - 7.10, dass die Längenskala einen wesentlichen Einfluss auf die Größe der Fehler besitzt. Außerdem beobachten wir, dass sowohl bei sehr kleinen als auch sehr großen Längenskalen die korrekten Konvergenzraten nicht mehr erreicht werden. Dies könnte daran liegen, dass mit den Skalierung der Stabilisierungsparametern durch die Längenskalen bestimmte Nebenbedingungen wie die Divergenznebenbedingung oder das Verschwinden des magnetischen Pseudodruckes nicht

h	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}
$\ \mathbf{b} - \mathbf{b}_h\ _0$	$2.19E - 1$	$1.41E - 1$ (0.64)	$8.98E - 2$ (0.65)
$\ \nabla \times (\mathbf{b} - \mathbf{b}_h)\ _0$	$2.87E - 2$	$1.16E - 2$ (1.31)	$4.72E - 3$ (1.30)
$\ r - r_h\ _0$	$1.00E - 2$	$4.58E - 3$ (1.13)	$1.96E - 3$ (1.22)
$\ \nabla(r - r_h)\ _0$	$3.81E - 2$	$2.46E - 2$ (0.63)	$1.56E - 2$ (0.66)
$\ \nabla \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{b}_h)\ _0$	3.18	3.99 (-0.33)	5.02 (-0.33)

Tabelle 7.6: Fehler zwischen kontinuierlicher und approximierter Lösung auf dem Standardgitter des Beispiels aus Unterabschnitt 7.2 mit Konvergenzraten in Klammern für $L_0 = 1$

h	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}
$\ \mathbf{b} - \mathbf{b}_h\ _0$	$2.25E - 1$	$1.43E - 1$ (0.65)	$9.02E - 2$ (0.66)
$\ \nabla \times (\mathbf{b} - \mathbf{b}_h)\ _0$	$1.30E - 3$	$5.29E - 4$ (1.30)	$2.18E - 4$ (1.28)
$\ r - r_h\ _0$	$4.15E - 4$	$1.86E - 4$ (1.16)	$7.89E - 5$ (1.24)
$\ \nabla(r - r_h)\ _0$	$1.58E - 3$	$9.97E - 4$ (0.66)	$6.29E - 4$ (0.66)
$\ \nabla \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{b}_h)\ _0$	3.28	4.04 (-0.30)	5.05 (-0.32)

Tabelle 7.7: Fehler zwischen kontinuierlicher und approximierter Lösung auf dem Standardgitter des Beispiels aus Unterabschnitt 7.2 mit Konvergenzraten in Klammern für $L_0 = 10^1$

h	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}
$\ \mathbf{b} - \mathbf{b}_h\ _0$	$2.25E - 1$	$1.43E - 1$ (0.65)	$9.02E - 2$ (0.66)
$\ \nabla \times (\mathbf{b} - \mathbf{b}_h)\ _0$	$1.32E - 9$	$5.37E - 10$ (1.30)	$2.22E - 10$ (1.27)
$\ r - r_h\ _0$	$4.16E - 10$	$1.86E - 10$ (1.16)	$7.89E - 11$ (1.24)
$\ \nabla(r - r_h)\ _0$	$1.58E - 9$	$9.98E - 10$ (0.66)	$6.29E - 10$ (0.67)
$\ \nabla \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{b}_h)\ _0$	3.28	4.04 (-0.30)	5.05 (-0.32)

Tabelle 7.8: Fehler zwischen kontinuierlicher und approximierter Lösung auf dem Standardgitter des Beispiels aus Unterabschnitt 7.2 mit Konvergenzraten in Klammern für $L_0 = 10^4$

mehr gewährleistet werden.

7.3 Beispiele für das erweiterte magnetische Induktionsproblem

Die Ergebnisse dieses Abschnittes entstammen einer Preprint-Version des gemeinsamen Artikels [45] des Autors mit Utku Kaya und Gert Lube. Es wird zunächst eine Analogie zwischen der erweiterten magnetischen Induktionsgleichung und der Konvektions-Diffusions-Gleichung gezogen. Es werden danach das Beispiel der Flussverdrängung durch das Magnetfeld aus [22, Kapitel 4] und das Beispiel von Shercliff aus [10] untersucht. Alle Rechnungen werden mit **FreeFem++** [40] mit dem Taylor-Hood-Elementen $[\mathbb{P}_2]^d / \mathbb{P}_1$

h	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}
$\ \mathbf{b} - \mathbf{b}_h\ _0$	$2.25E - 1$	$1.43E - 1$ (0.65)	$9.08E - 2$ (0.66)
$\ \nabla \times (\mathbf{b} - \mathbf{b}_h)\ _0$	$1.33E - 11$	$4.97E - 12$ (1.42)	$1.96E - 12$ (1.34)
$\ r - r_h\ _0$	$4.14E - 12$	$1.87E - 12$ (1.15)	$8.10E - 13$ (1.21)
$\ \nabla(r - r_h)\ _0$	$1.58E - 11$	$1.00E - 11$ (0.66)	$6.39E - 12$ (0.65)
$\ \nabla \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{b}_h)\ _0$	3.28	4.03 (-0.30)	5.11 (-0.34)

Tabelle 7.9: Fehler zwischen kontinuierlicher und approximierter Lösung auf dem Standardgitter des Beispiels aus Unterabschnitt 7.2 mit Konvergenzraten in Klammern für $L_0 = 10^5$

h	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}
$\ \mathbf{b} - \mathbf{b}_h\ _0$	$2.26E - 1$	$1.43E - 1$ (0.65)	$1.04E - 1$ (0.46)
$\ \nabla \times (\mathbf{b} - \mathbf{b}_h)\ _0$	$3.19E - 12$	$1.27E - 12$ (1.33)	$1.25E - 12$ (0.02)
$\ r - r_h\ _0$	$1.04E - 12$	$4.62E - 13$ (1.17)	$2.81E - 13$ (0.72)
$\ \nabla(r - r_h)\ _0$	$3.95E - 12$	$2.49E - 12$ (0.67)	$1.99E - 12$ (0.32)
$\ \nabla \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{b}_h)\ _0$	3.28	4.07 (-0.31)	5.41 (-0.41)

Tabelle 7.10: Fehler zwischen kontinuierlicher und approximierter Lösung auf dem Standardgitter des Beispiels aus Unterabschnitt 7.2 mit Konvergenzraten in Klammern für $L_0 = 2 \cdot 10^5$

durchgeführt.

7.3.1 Analogie zur Konvektions-Diffusions-Gleichung

Beginnen wir mit der erweiterten magnetischen Induktionsgleichung (3.24), können wir ein analoges Modell mit dem magnetischen Vektorpotential $\boldsymbol{\zeta}$ mit $\nabla \times \boldsymbol{\zeta} = \mathbf{b}$ ableiten. Dann kann (3.24) mittels

$$\nabla \times \left[\frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial t} - \mathbf{u} \times (\nabla \times \boldsymbol{\zeta}) + \lambda \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\zeta}) \right] = 0$$

ausgedrückt werden und daher gilt

$$\frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial t} - \mathbf{u} \times (\nabla \times \boldsymbol{\zeta}) + \lambda \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\zeta}) = \nabla \varphi \quad (7.7)$$

mit einer beliebigen skalaren Funktion φ . Da φ keinen Einfluss auf \mathbf{b} besitzt, besteht eine Möglichkeit, um $\boldsymbol{\zeta}$ zu spezifizieren, in der Nutzung der Coulomb-Gauge-Transformation $\nabla \cdot \boldsymbol{\zeta} = 0$, sodass sich sich (7.7) zu

$$\frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial t} - \mathbf{u} \times (\nabla \times \boldsymbol{\zeta}) + \lambda \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\zeta}) = 0 \quad (7.8)$$

vereinfacht. Für zweidimensionale Analogien haben wir dementsprechend $\boldsymbol{\zeta} = \zeta(x, y, t)\mathbf{e}_z$ oder $\mathbf{b} = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}, -\frac{\partial \zeta}{\partial x}, 0 \right)$ mit der Flussfunktion $\zeta(x, y)$. Dann stimmen die Konturlinien ζ in der $x - y$ -Ebene mit den magnetischen Feldlinien überein.

In ähnlicher Weise kann die Strömung eines inkompressiblen Fluids mittels eines Vektorpotentials ψ repräsentiert werden, welches durch $\mathbf{u} = \nabla \times \boldsymbol{\psi}$ gegeben ist und $\nabla \cdot \boldsymbol{\psi} = 0$ erfüllt. Für zweidimensionale Geschwindigkeitsfelder haben wir die Strömungsfunktion ψ , für welche

$$\mathbf{u} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}, -\frac{\partial \psi}{\partial x}, 0 \right)$$

gilt. Dann nimmt (7.8) im zweidimensionalen Fall die Gestalt einer linearen Konvektions-Diffusions-Gleichung mittels

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \zeta - \lambda \nabla^2 \zeta = 0 \quad (7.9)$$

an. Das Problem (7.9) wird im Ort mit der Standard-Galerkin-Finiten-Elemente-Methode ohne Stabilisierung mit \mathbb{P}_2 -Elementen auf demselben Gitter wie das erweiterte Induktionsproblem gelöst. Das BDF(2)-Zeitdiskretisierungsschema wird hierbei verwendet.

7.3.2 Das anschauliche Beispiel der Flussverdrängung

Hier betrachten wir das Flussverdrängungsphänomen als anschauliches Beispiel, durch welches der Einfluss des zusätzlichen Kraftterms in der erweiterten magnetischen Induktionsgleichung illustriert werden soll. Wir beschränken uns auf ein Problem mit stationärer Lösung.

Sei $\Omega := (-0.5, 0.5)^2$ mit Rand $\partial\Omega := \Gamma_{in} \cup \Gamma_{con}$. Das gegebene Geschwindigkeitsfeld \mathbf{u} wird durch

$$\mathbf{u} = (-y, x, 0), \quad r < R; \quad \mathbf{u} = (0, 0, 0), \quad R < r$$

beschrieben, ist achsensymmetrisch zur z -Achse und hat kreisförmige Strömungslinien. Die Winkelgeschwindigkeit ist durch $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}(r) = \frac{1}{2}(\nabla \times \mathbf{u}) = 1$ gegeben. Betrachte einen unendlich-ausgedehnten Zylinder mit Radius R . Ein Magnetfeld $\mathbf{b} = b_0 \mathbf{e}_y$ wirkt auf ein elektrisch leitendes Fluid, welches sich im Zylinder bewegt. Der gesamte Rand wird leitend angenommen. Die exakte Lösung dieses Problem ist in Polarkoordinaten nach [51] durch

$$\zeta = \text{Re}[f(r)\exp(i\theta)]$$

gegeben mit

$$f(r) = Dj_1(pr), \quad 0 < r < R; \quad f(r) = -B_0r + C/r, \quad R < r$$

und den Konstanten $D = \frac{2}{pj_0(pR)}$, $C = \frac{R(2j_1(pR) - pj_0(pR))}{pj_0(pR)}$. Hier bezeichnet $j_n(x)$ die n -te Bessel-Funktionen erster Ordnung und $p = \frac{1-i}{\sqrt{(\tilde{\omega}/2\lambda)}}$. Von der exakten Lösung ergeben sich mit der magnetischen Reynolds-Zahl

$$R_m = \frac{\tilde{\omega}R^2}{\lambda}$$

die Grenzwerte

$$\lim_{R_m \rightarrow \infty} \zeta = 0, \quad 0 < r < R; \quad \lim_{R_m \rightarrow \infty} \zeta = -B_0 \left(r - \frac{R^2}{r} \right) \cos\theta, \quad R < r.$$

Als Erstes lösen wir die Konvektions-Diffusions-Gleichung. Für gegebenes $\zeta(0; x, y)$ suchen wir das magnetische Potential $\zeta(t; x, y)$ nach (7.9) mit Dirichlet-Daten, die sich aus der analytischen Lösung berechnen.

Danach übersetzen wir diese gefundene Konfiguration auf die stationäre magnetische erweiterte Induktionsgleichung und lösen diese mit den Randbedingungen

$$\mathbf{n} \times \mathbf{b} = \mathbf{n} \times \mathbf{b}_{\text{exact}}, \quad r = 0 \text{ on } \partial\Omega.$$

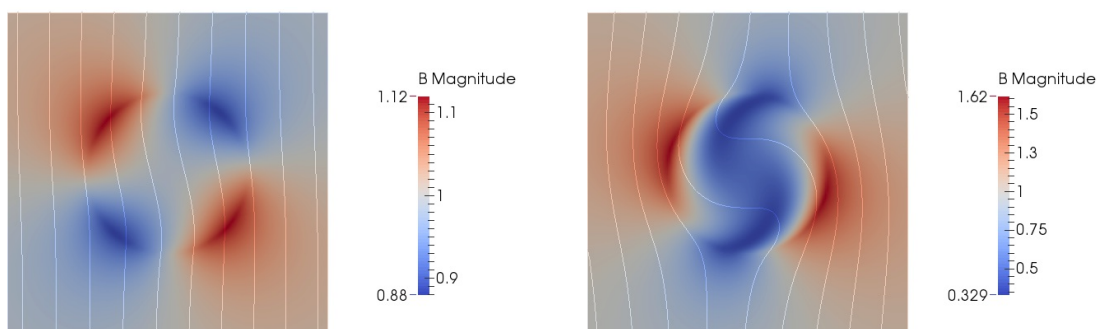


Abbildung 7.2: Magnetfelder für $R_m \in \{1, 10\}$ für das Beispiel aus Unterabschnitt 7.3.2

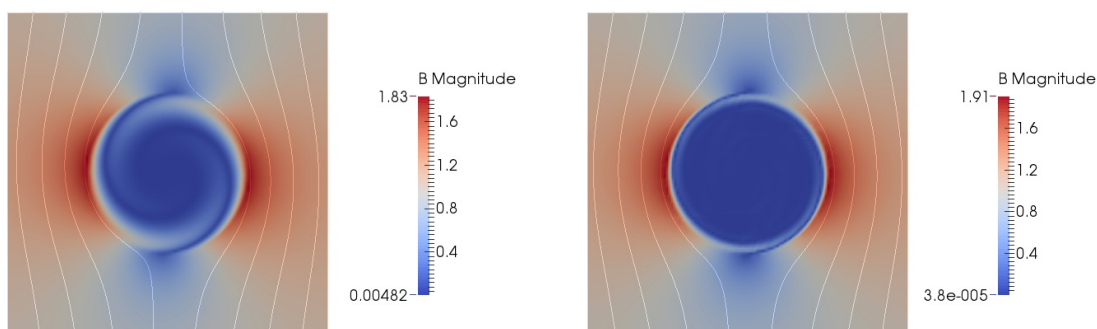


Abbildung 7.3: Magnetfelder für $R_m \in \{100, 1000\}$ für das Beispiel aus Unterabschnitt 7.3.2

Die berechneten Magnetfelder \mathbf{b} werden in den Abbildungen 7.2-7.3 dargestellt. In diesen Abbildungen ist das Magnetfeld aus der stabilisierten erweiterten magnetischen Induktionsgleichung mit $\tau_{\text{EInd}} = 0$ ermittelt worden, während die Konturlinien der Flussfunktion ζ durch die ungestabilisierte Konvektions-Diffusions-Gleichung ermittelt worden sind.

Die Ergebnisse in den Abbildungen 7.2-7.3 können in folgender Art interpretiert werden. Mit Vergrößerung von R_m wird die Verwirbelung von \mathbf{b} größer. Das Magnetfeld \mathbf{b} wird vom rotierenden Fluid nach außen verdrängt durch die Verwirbelung der Magnetfeldlinien und durch die Wirbelströmungsdiffusion. Bei dominierender Konvektion sehen wir also die Ausbildung von inneren Grenzschichten.

7.3.3 Das Beispiel nach Shercliff

In der Magnetohydrodynamik werden analytische Lösungen nach Hunt oder Shercliff untersucht, um die Güte von numerischen Methoden zu untersuchen. Wir betrachten das Shercliff-Beispiel für vorgeschriebenes Geschwindigkeitsfeld.

Sei $\Omega := (-1, 1)^2 \times (-0.01, 0.01)$ ein dreidimensionales, dünnes Rechengebiet. Für $r_{1/2k} = \frac{1}{2}(\pm \lambda^{-\frac{1}{2}} + (\lambda^{-1} + 4\alpha_k^2)^{\frac{1}{2}})$ und $\alpha_k = (k + \frac{1}{2})\pi$ wird das Geschwindigkeitsfeld durch $\mathbf{u} = (0, 0, u_z)^T$ gegeben, wobei

$$u_z = V \left(1 - 0.825\lambda^{-\frac{1}{4}} - \lambda^{-\frac{1}{2}} \right)^{-1} \lambda^{\frac{3}{2}}$$

mit

$$V(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(-1)^k \cos(\alpha_k x)}{l\alpha_k^3} (1 - V_2 - V_3)$$

und

$$V_2(x, y) = \frac{1 - e^{-2r_{2k}} e^{-r_{1k}(1-y)} + e^{-r_{1k}(1+y)}}{2} \frac{1 - e^{-2r_{1k}} e^{-r_{2k}(1-y)} + e^{-r_{2k}(1+y)}}{1 - e^{-2(r_{1k}+r_{2k})}}, \quad V_3(x, y) = \frac{1 - e^{-2r_{1k}} e^{-r_{2k}(1-y)} + e^{-r_{2k}(1+y)}}{2} \frac{1 - e^{-2r_{1k}} e^{-r_{1k}(1-y)} + e^{-r_{1k}(1+y)}}{1 - e^{-2(r_{1k}+r_{2k})}}$$

gilt.

Das gesuchte Magnetfeld hat die analytische Lösung $\mathbf{b} = (0, 1, b_z)^T$ mit

$$b_z(x, y) = H(x, y) \left(1 - 0.825\lambda^{-\frac{1}{4}} - \lambda^{-\frac{1}{2}} \right)^{-1}, \quad H(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(-1)^k \cos(\alpha_k x)}{l\alpha_k^3} (H_2 - H_3),$$

wobei

$$H_2(x, y) = \frac{1 - e^{-2r_{2k}} e^{-r_{1k}(1-y)} - e^{-r_{1k}(1+y)}}{2} \frac{1 - e^{-2r_{1k}} e^{-r_{2k}(1-y)} - e^{-r_{2k}(1+y)}}{1 - e^{-2(r_{1k}+r_{2k})}}, \quad H_3(x, y) = \frac{1 - e^{-2r_{1k}} e^{-r_{2k}(1-y)} - e^{-r_{2k}(1+y)}}{2} \frac{1 - e^{-2r_{1k}} e^{-r_{1k}(1-y)} - e^{-r_{1k}(1+y)}}{1 - e^{-2(r_{1k}+r_{2k})}}$$

gilt. Während an den Ausströmrändern und dem Einströmrändern periodische Randbedingungen gesetzt werden, sind die Randbedingungen an den Wänden durch

$$\mathbf{n} \times \mathbf{b} = \mathbf{n} \times \mathbf{b}_{\text{exact}}, \quad r = 0$$

gegeben. In Abbildung 7.4 sehen wir die Gitter mit den zugehörigen Lösungen für $\lambda = 1$ (links) und $\lambda = 10^{-4}$ (rechts) im Höhenquerschnitt $z = 0$. Im letzten Falle wurde das Gitter an die Grenzschichten angepasst. Dies wird mittels der Transformation $T : \Omega \rightarrow \Omega$

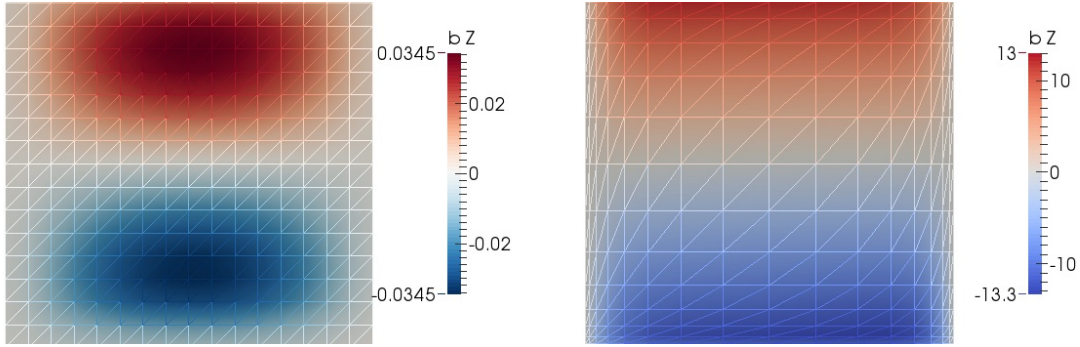


Abbildung 7.4: Gitter mit Lösungen für $\lambda \in \{1, 10^{-4}\}$ für das Beispiel aus Unterabschnitt 7.3.3

realisiert, welche durch $T(x, y, z) = \left(\frac{\tanh(2x)}{\tanh(2)}, \frac{\tanh(2y)}{\tanh(2)}, z \right)$ definiert wird. Erneut wird keine Stabilisierung des zusätzlichen Krafttermes vorgenommen.

Es folgen drei Tabellen. In den beiden ersten Tabellen werden Fehler mit Konvergenzraten in Klammern für $\lambda = 1$ und $\lambda = 10^{-4}$ auf einem regelmäßig verfeinerten Gitter präsentiert, während in Letzterer mit obiger Transformation ein grenzschichtangepasstes Gitter für $\lambda = 10^{-4}$ benutzt wird, um die extremen Gradienten auflösen zu können.

$h_{x,y}$	h_z	$\ \mathbf{e}_b\ $	$\ \nabla \times \mathbf{e}_b\ $	$\ e_r\ $	$\ \nabla e_r\ $
2^{-2}	2^0	2.07E-4 (-)	3.06E-3 (-)	2.71E-8 (-)	1.05E-7 (-)
2^{-3}	2^{-1}	2.69E-5 (2.94)	8.32E-4 (1.88)	8.35E-9 (1.70)	3.56E-8 (1.55)
2^{-4}	2^{-2}	3.41E-6 (2.98)	2.14E-4 (1.96)	1.93E-9 (2.12)	9.23E-9 (1.95)

Tabelle 7.11: Numerische Fehler für \mathbf{b}_h und r_h mit $\lambda = 1$ für das Beispiel aus Unterabschnitt 7.3.3 mit Konvergenzraten in Klammern

$h_{x,y}$	h_z	$\ \mathbf{e}_b\ $	$\ \nabla \times \mathbf{e}_b\ $	$\ e_r\ $	$\ \nabla e_r\ $
2^{-2}	2^0	1.49E+0 (-)	1.23E+1 (-)	1.66E-8 (-)	6.85E-8 (-)
2^{-3}	2^{-1}	1.95E+0 (-0.39)	1.89E+1 (-0.62)	3.05E-8 (-0.87)	1.50E-7 (-1.13)
2^{-4}	2^{-2}	7.80E-1 (1.32)	1.58E+1 (0.26)	2.05E-8 (0.58)	1.34E-7 (0.17)

Tabelle 7.12: Numerische Fehler für \mathbf{b}_h und r_h mit $\lambda = 10^{-4}$ für das Beispiel aus Unterabschnitt 7.3.3 mit Konvergenzraten in Klammern

$h_{x,y}^*$	h_z	$\ \mathbf{e}_b\ $	$\ \nabla \times \mathbf{e}_b\ $	$\ e_r\ $	$\ \nabla e_r\ $
2^{-2}	2^0	2.26E+0 (-)	1.97E+1 (-)	7.78E-8 (-)	3.55E-7 (-)
2^{-3}	2^{-1}	5.19E-1 (2.12)	1.14E+1 (0.79)	2.94E-8 (1.40)	1.84E-7 (0.95)
2^{-4}	2^{-2}	8.65E-2 (2.58)	3.92E+0 (1.54)	3.20E-9 (3.20)	4.70E-8 (1.97)

Tabelle 7.13: Numerische Fehler für \mathbf{b}_h und r_h mit $\lambda = 10^{-4}$ auf angepasstem Gitter für das Beispiel aus Unterabschnitt 7.3.3 mit Konvergenzraten in Klammern

Die Konvergenzergebnisse für $\lambda = 1$ und $\lambda = 10^{-4}$ sind in den Tabellen 7.11-7.13 angege-

ben. Für den gutartigen Fall $\lambda = 1$ sehen wir in Tabelle 7.11, dass eine Gitterverfeinerung auf isotropem Gitter keine Probleme bereitet. Anders gestaltet sich dies im Falle $\lambda = 10^{-4}$ auf isotropem Gitter, wie wir Tabelle 7.12 entnehmen. Dort erkennen wir, dass hier insbesondere der steile Gradient Probleme bereitet. Nutzen wir dahingegen ein Gitter, welches an diese Grenzschicht angepasst ist, so entnehmen wir Tabelle 7.13, dass sich die absoluten Fehler der einzelnen Normen tatsächlich deutlich verbessern. Hier korrespondiert $h_{x,y}^*$ mit der Gitterweite, welche durch die obige Transformation T bei festgehaltener Anzahl von Freiheitsgraden gegeben wird.

7.4 Beispiele für das Magnetohydrodynamikmodell

In diesem Abschnitt betrachten wir zwei Beispiele für das stabilisierte Magnetohydrodynamikmodell aus Kapitel 6. Dabei handelt es sich zuerst um eine zweidimensionale analytische Lösung des zeitabhängigen Problems. Dieses Beispiel ist aus [10] adaptiert und die Ergebnisse stammen aus [64]. Danach befassen wir uns mit einer zweidimensionalen Kanalströmung, deren analytische Lösung ebenfalls bekannt ist. Dieses Beispiel entstammt [37]. Eine schöne physikalische Motivation der Hartmann-Kanalströmung, wie dieses Problem auch bezeichnet wird, ist in [53, Kapitel 4.1] gegeben. Die numerischen Ergebnisse sind Resultate aus [64] und der Löser ist mit **deal.II** [11] geschrieben worden.

7.4.1 Zweidimensionales analytisches Problem

Das zweidimensionale analytische Problem wird auf dem Gebiet $\Omega = (-1, 1) \times (-1, 1)$ gelöst, wobei die Lösung durch

$$\begin{aligned} u_x(t, x, y) = b_x(t, x, y) &:= x^4 \sin\left(\frac{\pi t}{10}\right) \exp\left(\frac{t}{25}\right), \\ u_y(t, x, y) = b_y(t, x, y) &:= -4x^3 y \sin\left(\frac{\pi t}{10}\right) \exp\left(\frac{t}{25}\right), \\ p(x, y) &:= x^2 + y^2, \\ r(x, y) &:= 0 \end{aligned}$$

gegeben wird und nicht von den physikalischen Parametern der magnetischen Diffusivität λ und der Viskosität ν abhängt. Die Kraftterme \mathbf{f}_u und \mathbf{f}_b werden durch Auswertung des partiellen Differentialgleichungssystems in starker Form berechnet. Die Randbedingungen für das Geschwindigkeitsfeld werden durch die analytische Lösung für den gesamten Rand vorgeschrieben, wohingegen die Randbedingungen für das Magnetfeld durch $\mathbf{n} \times \mathbf{b} = \mathbf{n} \times \mathbf{b}_D$ für gesamten Rand gesetzt werden, wobei \mathbf{b}_D der analytischen Lösung für das Magnetfeld entspricht. Die Anfangsbedingungen für alle Unbekannten werden ebenfalls durch die analytischen Lösungen vorgeschrieben.

Wir verwenden das Zeitintervall $[0, 0.1]$ mit der Zeitschrittweite $\Delta t = 10^{-4}$, um Ordnungsreduktionseffekte für die räumlichen Konvergenzraten durch eine gröbere Zeitschritte für feinere Gitter zu verhindern.

Die Koeffizienten des physikalischen Problems sind durch $\nu = 10^{-6}$ und $\lambda = 10^{-6}$ in den kommenden Bildern gegeben. Das Finite-Elemente-Paar $[Q]^2/Q$ wird für V_h/Q_h und C_h/S_h als bekanntes Taylor-Hood-Element verwendet. Die benutzen Stabilisierungsparameter sind $\tau_2 = 1$, $\tau_5 = \frac{h^2 \lambda}{L_0^2}$ und $\tau_6 = \frac{L_0^2}{\lambda}$, wobei wir $L_0 = 2$ als Längenskala des physikalischen Problems verwenden. Dies entspricht der Gebietsbreite.

Wir sehen in der Abbildung 7.5, dass wir die gewünschten quasi-optimalen Fehlerraten erhalten, welche sich aus unserer Konvergenzanalyse ergeben. Dies zeigt sich auch im Falle kleinerer Viskosität ν und kleinerer magnetischer Diffusivität λ , wodurch eine gewisse Robustheit der verwendeten Stabilisierungsparameter numerisch unterstützt wird.

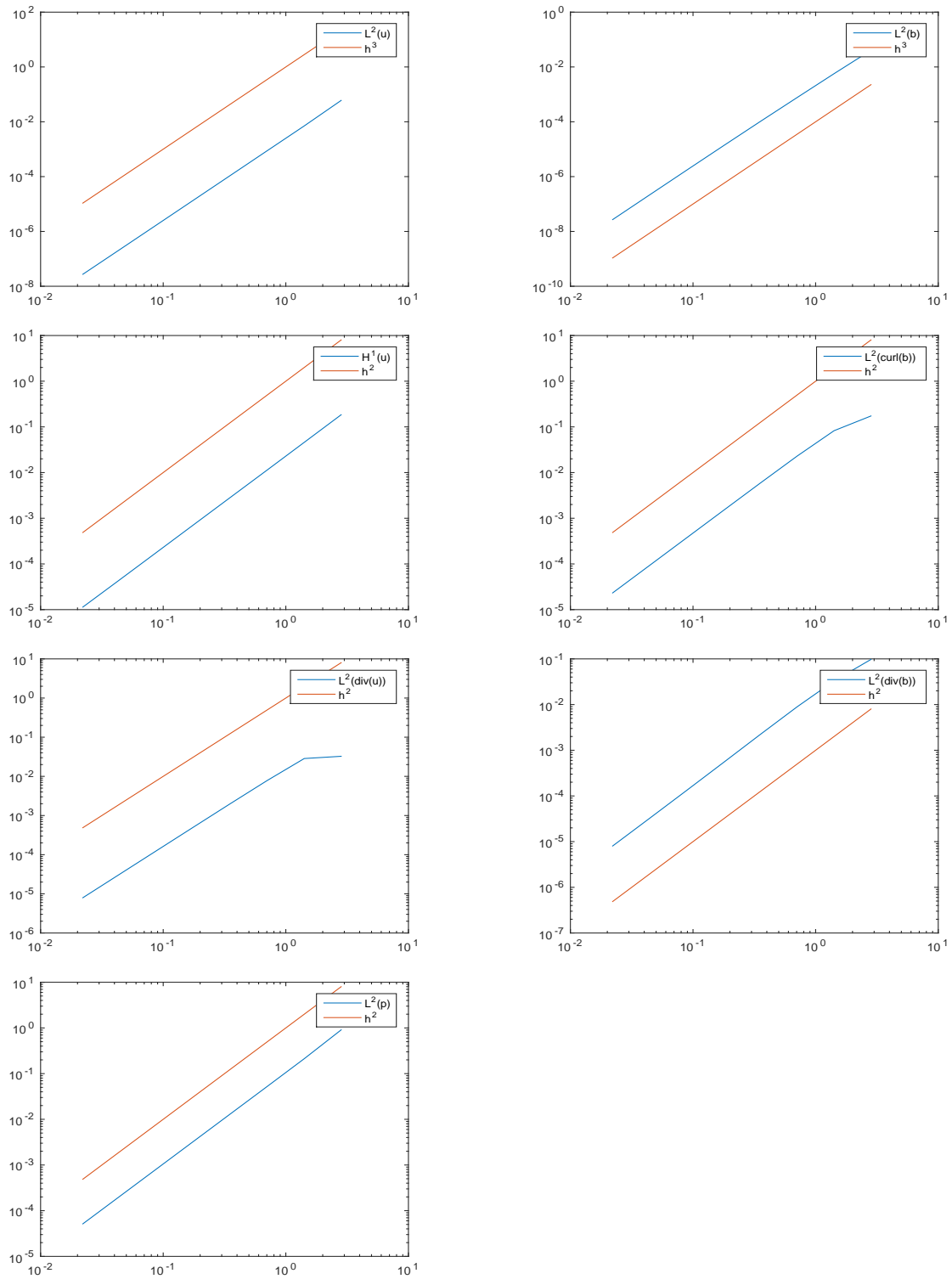


Abbildung 7.5: Die Fehler zwischen der kontinuierlichen Lösung und der Approximation des zweidimensionalen analytischen Problems aus Unterabschnitt 7.4.1

7.4.2 Zweidimensionale Hartmannkanalströmung

Die zweidimensionale Hartmannkanalströmung wird auf dem Gebiet $\Omega = (0, 10) \times (-1, 1)$ gelöst, wobei die stationäre Lösung durch

$$\begin{aligned}
 u_x(x, y) &:= \frac{10\text{Re}}{\left(\frac{\text{Re}}{\lambda}\right)^{0.5} \tanh\left(\left(\frac{\text{Re}}{\lambda}\right)^{0.5}\right)} \left(1.0 - \frac{\cosh\left(\left(\frac{\text{Re}}{\lambda}\right)^{0.5} y\right)}{\cosh\left(\left(\frac{\text{Re}}{\lambda}\right)^{0.5}\right)}\right), \\
 u_y(x, y) &:= 0, \\
 b_x(x, y) &:= 10 \left(\frac{\sinh\left(\left(\frac{\text{Re}}{\lambda}\right)^{0.5} y\right)}{\sinh\left(\left(\frac{\text{Re}}{\lambda}\right)^{0.5}\right)} - y\right), \\
 b_y(x, y) &:= 1.0, \\
 p(x, y) &:= -10x - \frac{10^2}{2} \left(\left(\frac{\sinh\left(\left(\frac{\text{Re}}{\lambda}\right)^{0.5} y\right)}{\sinh\left(\left(\frac{\text{Re}}{\lambda}\right)^{0.5}\right)} - y\right)\right)^2, \\
 r(x, y) &:= 0
 \end{aligned}$$

gegeben wird und von der magnetischen Diffusivität λ und der Viskosität ν abhängt.

Die Kraftterme sind durch $\mathbf{f}_u = \mathbf{0}$ und $\mathbf{f}_b = \mathbf{0}$ gegeben und die physikalischen Parameter des Problems werden gemäß $\nu = 0.5$ und $\lambda = 0.5$ gesetzt. Die Randbedingungen für das Geschwindigkeitsfeld sind durch die analytische Lösung für den gesamten Rand vorgeschrieben, wohingegen die Randbedingungen für das Magnetfeld zu $\mathbf{n} \times \mathbf{b} = \mathbf{n} \times \mathbf{b}_D$ für den ganzen Rand gesetzt werden, wobei \mathbf{b}_D der analytischen Lösung für das Magnetfeld entspricht.

Die Anfangsbedingungen sind durch $\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$, $\mathbf{b}_0 = \mathbf{0}$, $p_0 = 0$ und $r_0 = 0$ gegeben.

Wir nutzen das Zeitintervall $[0, 10]$ mit der Zeitschrittweite $\Delta t = 0.1$, um hinreichend weit gegen den stationären Zustand zu rechnen. Als Finite-Elemente-Raum nutzen wir $[\mathbb{Q}]^2 / \mathbb{Q}$ für V_h / Q_h und C_h / S_h als die bekannten Taylor-Hood-Elemente. Die benutzten Stabilisierungsparameter sind mittels $\tau_2 = 1$, $\tau_5 = \frac{h^2 \lambda}{L_0^2}$ und $\tau_6 = \frac{L_0^2}{\lambda}$ gegeben, wobei wir $L_0 = 1$ als charakterische Längenskala verwenden. Dies entspricht der halben Kanalbreite. Somit entspricht die Fluid-Reynolds-Zahl also $\text{Re} = 2$ und die Hartmann-Zahl $\text{Ha} = \sqrt{\frac{\text{Re}}{\lambda}} = 2$.

Wir sehen in Abbildung 7.6, dass wir die gewünschten quasi-optimalen Fehlerraten in diesem Falle, wie durch die Konvergenzanalyse vorhergesagt, für die meisten Gitter erhalten. Die Konvergenzrateneinbrüche auf feineren Gittern rühren sehr wahrscheinlich von der zu groben Zeitschrittweite.

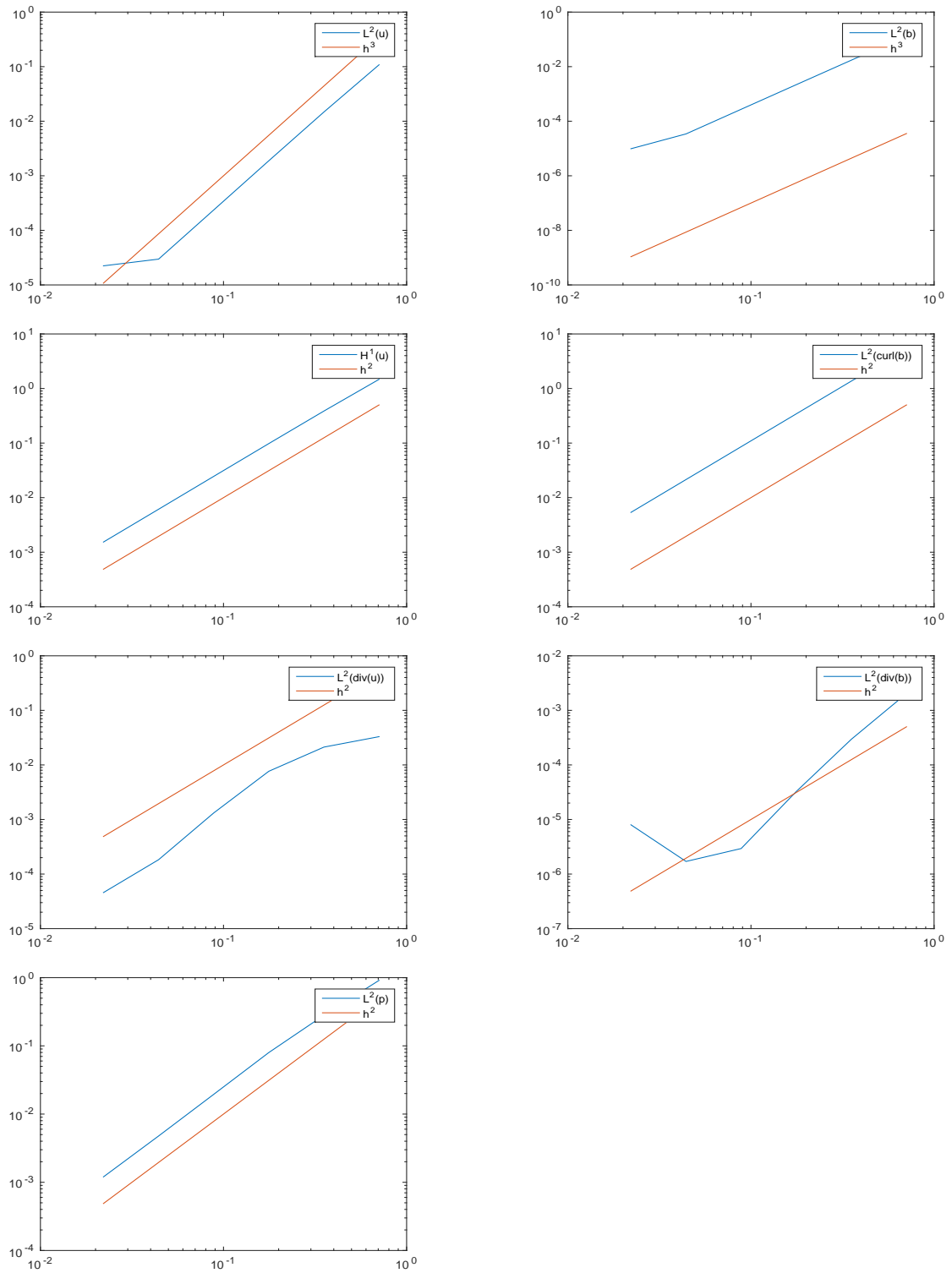


Abbildung 7.6: Die Fehler zwischen der kontinuierlichen Lösung und der Approximation der zweidimensionalen Hartmannströmung aus Unterabschnitt 7.4.2

8 Zusammenfassung und Ausblick

Das letzte Hauptkapitel dieser Ausarbeitung befasst sich mit einer Zusammenfassung der erzielten Resultate und zeigt mögliche Richtungen, in denen die Ergebnisse dieser Arbeit fortgeführt oder ergänzt werden können, auf.

8.1 Zusammenfassung

Das wesentliche Ziel dieser Dissertationsschrift war es, verschiedene partielle Differentialgleichungen aus dem Elektromagnetismus und der inkompressiblen Magnetohydrodynamik zu untersuchen, um anschließend stabilisierte knotenbasierte Finite-Elemente-Methoden vorzuschlagen, damit mittels der Diskretisierungen approximative Lösungen bestimmt werden können. Wesentliche Ansätze dafür lieferten die Arbeiten [6] über die Induktionsgleichung der Maxwell-Gleichungen und [8] für das inkompressible Magnetohydrodynamikmodell.

Nach der Einleitung in Kapitel 1, welche die wesentliche Motivation, die Ziele und den Aufbau dieser Schrift motivierte, sind in Kapitel 2 die Grundlagen über gemischte Problem und die Finite-Elemente-Methode, die in dieser Arbeit verwendet wurden, gelegt worden.

Darauf aufbauend, ergab sich das Kapitel 3, welche die Induktionsgleichung der Maxwell-Gleichung auf kontinuierlicher Ebene skizzierte und im stationären Falle dessen Wohlgestelltheit beantwortete. Eine Erweiterung des Krafttermes um die Wirkung eines vorgeschriebenen Geschwindigkeitsfeldes motivierte die stetige Formulierung der erweiterten magnetischen Induktionsgleichung, deren Wohlgestelltheit im instationären Kontext behandelt wurde. Das folgende Kapitel 4 befasste sich mit der Formulierung der stabilisierten Problemstellungen im Diskreten, wobei insbesondere im Vergleich zur bisherigen Literatur im Falle der Induktionsgleichung der Maxwell-Gleichungen die Stabilisierungsparameter wegen der gegebenen Funktionenräume alleine aus der Stabilitätsanalyse hergeleitet werden konnten. Eine Konvergenzanalyse auf Grundlage der Ergebnisse aus [6] wurde ebenso durchgeführt. Ferner wurde aus mathematischer Sicht im Falle der erweiterten Induktionsgleichung im Vergleich zum bisherigen Stand der Forschung die Stabilisierung um einen lokalen Projektionsstabilisierungsterm des hinzukommenden Kraftterms durch das vorgeschriebene Geschwindigkeitsfeld ergänzt und deren Stabilitätsanalyse sowie eine Konvergenzanalyse im Falle glatter Magnetfeldlösungen angegeben.

Diese beiden einzelnen Problemstellungen wurden in Kapitel 5 schließlich mit der Navier-Stokes-Gleichung nach dem Vorbild in [8] oder [32] gekoppelt, um somit die Wohlgestelltheit des inkompressiblen, stationären Magnetohydrodynamikmodells im Kontinuierlichen mittels der Theorie gemischter Probleme aus 2 oder [28] nachzuweisen. Damit folgte das Schwerpunktkapitel 6 über die stabilisierte Finite-Elemente-Approximation dieses Problems. Im Unterschied zur residual-basierten Methode aus [8] wurde eine lokale Projektionsstabilisierungsmethode vorgeschlagen, welche um die Stabilisierungen der Divergenznebenbedingungen und des magnetischen Pseudodruckes ergänzt wurde. Desweiteren wurde im Unterschied zum Artikel [8] nicht nur die Equal-Order-Approximation betrachtet, son-

dern diese auch um die bekannten Taylor-Hood-Approximationen zum Vergleich erweitert. Es folgten eine Stabilitäts- und Konvergenzanalyse für diese Problemstellungen.

Im folgenden Kapitel 7 wurden numerische Beispiele für alle drei Modelle angegeben, um insbesondere die Wahl des Stabilisierungsparameterdesigns zu testen. Diese Beispiele beinhalteten einerseits ein nichtkonvexes Rechengebiet, um im Falle der Induktionsgleichung der Maxwell-Gleichungen die theoretischen Konvergenzraten im Falle nichtglatter Lösungen herauszustellen. Anschließend folgten klassische Beispiele von Shercliff und Hartmann, welche die Konvergenzraten für den glatten Fall unterstrichen. Desweiteren sehen wir allerdings für kleinen physikalischen Parameter λ , dass es gelegentlich auch hilfreich sein kann, grenzschichtangepasste Gitter zu verwenden, um bessere Ergebnisse zu erzielen.

In allen Beispielen zeigt sich, dass die Stabilisierung des magnetischen Pseudodruckes und die Stabilisierung der Divergenznebenbedingungen zur Massenerhaltung einen entscheidenden Beitrag für die Güte der diskreten Lösungen liefern. Alle Beispiele zeigen auch, dass ohne Stabilisierung mit Konvergenzratenverlust gerechnet werden muss und in vielen Fällen die Algorithmen nicht stabil laufen. Bei den gerechneten Beispielen mit moderaten ν und λ als physikalische Parameter zeigt sich außerdem, dass wir ohne die Anwendung der Stabilisierung der Fluktuationsterme im Falle inf-sup-stabiler Elemente auskommen. Dies deckt sich auch mit Beobachtungen im Falle laminarer Strömungen in [3] und [21].

8.2 Ausblick

In natürlicher Weise stellt sich die Frage, wie die Resultate dieser Ausarbeitung geeignet fortgesetzt werden könnten.

Aus theoretischer Sicht wurde das inkompressible Magnetohydrodynamikmodell stationär behandelt. Ein erster Schritt könnte in einfacher Weise daraus bestehen, den Transfer zum instationären Falle durchzuführen, wie es bereits im Kapitel 4 mit der erweiterten magnetischen Induktionsgleichung im Diskreten durchgeführt worden ist. Ferner wurde das Problem hier im isothermen Falle behandelt. Es wäre dementsprechend durchaus denkbar, das Magnetohydrodynamikproblem um die Kopplung mit der Wärmeleitungsgleichung zu ergänzen. Desweiteren stellt sich insbesondere auch in der Astrophysik die Frage der Auswirkung der Rotation eines Planeten um seine Rotationsachse, sodass zum Beispiel in der Navier-Stokes-Gleichung noch ein sogenannter Coriolis-Kraftterm hinzugenommen werden könnte, um eine Stabilisierung vorzuschlagen. Für diesen letzten Fall sei auf die Arbeit [4] verwiesen.

Weiterhin könnte an der Schnittstelle zwischen theoretischen und praktischen Aspekten dieser Ausarbeitung die Einflüsse der Präkonditionierung dieses Sattelpunktproblems, welches wir mit einem Projektionsalgorithmus in Kapitel 7 entkoppelt hatten, untersucht werden. Mögliche Ansätze, um diese Problematik zu bearbeiten, finden sich in dem Artikel [9] für das Magnetohydrodynamikproblem, dem Buch [26] für Navier-Stokes-Löser oder der Dissertation [42] für Navier-Stokes-Löser.

Praktisch betrachtet, wäre es sicherlich interessant, weiterreichende Beispiele mit der vor-

geschlagenen lokalen Projektionsstabilisierungsmethode durchzurechnen. Erste Anlaufstellen wären die Werke [22], [32], [35] oder [36]. Desweiteren bleibt die Frage weiterer Parameterstudien offen, um zu klären, wann die lokale Projektionsstabilisierung benötigt werden. Ferner müssen wir uns der Problematik der Turbulenz für große Fluid-Reynolds-Zahlen oder für große Magnet-Reynolds-Zahlen stellen, ob die hier analysierten Stabilisierungen ausreichen oder wie im Falle der Navier-Stokes-Gleichungen Turbulenzmodelle eingesetzt werden müssen.

Eine weitere Möglichkeit bestände darin, anstatt der stetigen in dieser Arbeit vorgeschlagenen Lagrangeschen Finite-Elemente-Methoden die unstetigen Galerkin-Finite-Elemente-Methoden nach [24] auf das Magnetohydrodynamikmodell anzuwenden, da M. Hedwig und P.W. Schroeder in dem Artikel [41] solche Methoden mit einer zusätzlichen Divergenzstabilisierung erfolgreich zur besseren Erfüllung der Divergenz Nebenbedingung in einer numerischen Simulation des Schmelzens von Galliums verwendet haben.

A Grundlagen der klassischen Vektoranalysis

Dieses Kapitel ist dem Anhang der Bachelorarbeit [62] des Autors wortwörtlich entnommen. Es dient dazu, wesentliche Grundlagen der Vektoranalysis vorzustellen. Da diese Thematik in den Anfängervorlesungen meist nur oberflächlich behandelt wird, soll ihr hier mehr Aufmerksamkeit gewidmet werden. Im Falle des \mathbb{R}^n verständigen wir uns darauf, dass $n \in \{2, 3\}$ gilt. Diese Einschränkung wird allerdings erst bei der Definition der Rotation eines Vektorfeldes benötigt. Vom Aufbau folgen wir in diesem Abschnitt [55].

A.1 Wichtige Definitionen

Beginnen möchten wir mit der Definition eines Skalarfeldes.

Definition A.1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $\Phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Dann sagen wir, dass die skalarwertige Funktion Φ ein *Skalarfeld* definiert.

Vom physikalischen Standpunkt sollten die Werte $\Phi(\vec{x})$ mit $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems sein. Dies bedeutet, dass die Werte $\Phi(\vec{x})$ unter geeigneten Koordinatentransformationen unverändert bleiben. Dann bezeichnen wir ein Skalarfeld auch als invariant unter diesen Transformationen.

Wichtige Beispiele für solche Koordinatentransformationen stellen Rotationen oder Translationen dar.

Definition A.2. Die Fläche $F \subset \mathbb{R}^n$, auf welcher

$$\Phi(F) \equiv \text{const}$$

gilt, nennen wir *Niveaufläche*.

Desweiteren sind wir auch an vektorwertigen Funktionen interessiert.

Definition A.3. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $\vec{x} \in \Omega$ und $\vec{V}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Abbildung mit der Eigenschaft, dass

$$\vec{x} \mapsto (V_1(\vec{x}), \dots, V_n(\vec{x}))$$

mit skalarwertigen Funktionen V_1, \dots, V_n und $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dann wird \vec{V} als *Vektorfunktion* bezeichnet und wir schreiben auch, dass \vec{V} auf Ω ein *Vektorfeld* definiert.

Ein wichtiges Beispiel aus der Physik lässt sich zum Beispiel durch ein Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(x, y, z)$ im \mathbb{R}^3 einer strömenden Flüssigkeit geben.

Ebenso wie bei einem Skalarfeld definieren wir die Invarianz solcher Vektorfelder \vec{V} , falls diese bei den schon angesprochenen Transformationen in ihrer Gestalt nicht verändert werden.

A.2 Gradient eines Skalarfeldes

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $\Phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ein stetig differenzierbares Skalarfeld. Wir notieren kürzer, dass $\Phi(\cdot) \in \mathcal{C}^1(\Omega; \mathbb{R})$ ist.

Versuchen wir die Frage nach der Änderung der Funktionswerte $\Delta\Phi$ in benachbarten Punkten von $\vec{x} \in \Omega$ zu klären, so ergibt sich das *totale Differential*

$$d\Phi = \sum_{j=1}^n \frac{\partial\Phi}{\partial x_j} dx_j$$

als gute Näherung. Gelegentlich definieren wir diese Gleichung auch als Skalarprodukt zweier Vektoren. Dabei schreiben wir verkürzend, dass

$$d\vec{r} = (dx_1, \dots, dx_n)$$

gilt, und die folgende Definition liefert uns den zweiten Vektor, um die angesprochene Gleichung als Skalarprodukt zu formulieren.

Definition A.4. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $\vec{x} \in \Omega$ und $\Phi(\cdot) \in \mathcal{C}^1(\Omega; \mathbb{R})$, dann definieren wir den Vektor

$$\text{grad}(\Phi(\vec{x})) := \nabla(\Phi(\vec{x})) := \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}(\vec{x}), \dots, \frac{\partial\Phi}{\partial x_n}(\vec{x}) \right)$$

als den *Gradienten* von Φ .

Der Gradient stellt tatsächlich ein Vektorfeld auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ dar, denn er erfüllt alle Eigenschaften eines Vektors und insbesondere sind seine Komponenten translationsinvariant und transformieren sich unter Drehung des Koordinatensystems in Vektoren.

Wir wollen zunächst einige Rechenregeln betrachten.

Satz A.5. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\vec{x} \in \Omega$ und $\Phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ein stetig differenzierbares Skalarfeld.

1) Sei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante, so gilt

$$\text{grad}(c \cdot \Phi(\vec{x})) = c \cdot \text{grad}(\Phi(\vec{x}))$$

oder

$$\nabla(c \cdot \Phi(\vec{x})) = c \cdot \nabla(\Phi(\vec{x}))$$

in äquivalenter Schreibweise.

2) Sei $\Psi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ein weiteres stetig differenzierbares Skalarfeld, so ergibt sich

$$\text{grad}(\Phi(\vec{x}) + \Psi(\vec{x})) = \text{grad}(\Phi(\vec{x})) + \text{grad}(\Psi(\vec{x}))$$

oder

$$\nabla(\Phi(\vec{x}) + \Psi(\vec{x})) = \nabla(\Phi(\vec{x})) + \nabla(\Psi(\vec{x}))$$

in äquivalenter Schreibweise.

3) Sei $\Psi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ein weiteres stetig differenzierbares Skalarfeld, so haben wir für das Produkt $\Phi \cdot \Psi$, dass

$$\text{grad}(\Phi(\vec{x}) \cdot \Psi(\vec{x})) = \Phi(\vec{x}) \cdot \text{grad}(\Psi(\vec{x})) + \Psi(\vec{x}) \cdot \text{grad}(\Phi(\vec{x}))$$

oder

$$\nabla(\Phi(\vec{x}) \cdot \Psi(\vec{x})) = \Phi(\vec{x}) \cdot \nabla(\Psi(\vec{x})) + \Psi(\vec{x}) \cdot \nabla(\Phi(\vec{x}))$$

in äquivalenter Schreibweise gilt.

Beweis. Dies folgt sofort aus den Definitionen. □

Hieran anschließend, stellen wir Folgendes fest.

Bemerkung A.6. Wir bemerken nach diesem Satz insbesondere, dass grad folglich eine lineare Operation darstellt. Dies ergibt sich aus den beiden ersten Formeln.

A.3 Divergenz eines Vektorfeldes

Es soll die Divergenz eines Vektorfeldes definiert werden.

Definition A.7. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $\vec{x} \in \Omega$. Wir definieren eine Abbildung

$$\vec{V}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \vec{x} \mapsto \begin{pmatrix} V_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ V_n(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

mit den Eigenschaften, dass $n \in \mathbb{N}$, $\vec{V}(\cdot) \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ und $V_k(\cdot) \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ für alle $k \in \{1, \dots, n\}$. Dann bezeichnet

$$\text{div}(\vec{V}(\vec{x})) = \nabla \cdot \vec{V}(\vec{x}) := \sum_{j=1}^n \frac{\partial V_j}{\partial x_j}(\vec{x})$$

die *Divergenz* von \vec{V} .

Physikalisch können wir $\text{div}(\vec{V})$ als die Quellstärke pro Volumenelement bezeichnen.

Definition A.8. Gilt für ein Vektorfeld $\vec{V}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, dass

$$\text{div}(\vec{V}(P)) \equiv 0$$

für alle $P \in \Omega$ erfüllt ist, so wird dieses Vektorfeld *quellenfrei* in Ω genannt.

Wie zuvor beim Gradienten geschehen, werden die wichtigsten Rechenregeln für die Divergenz zusammengetragen.

Satz A.9. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $\vec{x} \in \Omega$ und $\vec{V}(\cdot) \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ ein Vektorfeld.

1) Sei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante, dann gilt

$$\operatorname{div}(c \cdot \vec{V}(\vec{x})) = c \cdot \operatorname{div}(\vec{V}(\vec{x}))$$

oder

$$\nabla \cdot (c \cdot \vec{V}(\vec{x})) = c \cdot (\nabla \cdot \vec{V}(\vec{x}))$$

in äquivalenter Schreibweise.

2) Seien $\vec{V}_1 = (V_{11}, \dots, V_{1n})$ und $\vec{V}_2 = (V_{21}, \dots, V_{2n})$ zwei Vektorfelder mit der Eigenschaft, dass $V_1(\cdot), V_2(\cdot) \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ gilt. Damit ergibt sich, dass

$$\operatorname{div}(\vec{V}_1(\vec{x}) + \vec{V}_2(\vec{x})) = \operatorname{div}(\vec{V}_1(\vec{x})) + \operatorname{div}(\vec{V}_2(\vec{x}))$$

oder

$$\nabla \cdot (\vec{V}_1(\vec{x}) + \vec{V}_2(\vec{x})) = \nabla \cdot \vec{V}_1(\vec{x}) + \nabla \cdot \vec{V}_2(\vec{x})$$

in äquivalenter Schreibweise folgt.

3) Sei $\Phi \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ ein stetig differenzierbares Skalarfeld. Dann haben wir, dass sich

$$\operatorname{div}(\Phi(\vec{x}) \cdot \vec{V}(\vec{x})) = \Phi(\vec{x}) \cdot \operatorname{div}(\vec{V}(\vec{x})) + \vec{V}(\vec{x}) \cdot \operatorname{grad}(\Phi(\vec{x}))$$

oder

$$\nabla \cdot (\Phi(\vec{x}) \cdot \vec{V}(\vec{x})) = \Phi(\vec{x}) \cdot (\nabla \cdot \vec{V}(\vec{x})) + \vec{V}(\vec{x}) \cdot \nabla(\Phi(\vec{x}))$$

in äquivalenter Schreibweise ergibt.

Beweis. Dies folgt sofort aus den Definitionen. □

Wir notieren im Anschluss an diese Zusammenfassung noch die nachfolgende Anmerkung.

Bemerkung A.10. Aus den ersten beiden Tatsachen folgt sofort, dass div eine lineare Operation ist.

A.4 Rotation eines Vektorfeldes

Diesen Unterabschnitt möchten wir mit der Definition der Rotation eines Vektorfeldes beginnen. Hier wird die Einschränkung, dass wir uns im \mathbb{R}^n mit der Dimension $n \in \{2, 3\}$ bewegen, wirklich gebraucht. Dabei werden wir uns insbesondere mit dem Fall $n = 3$ befassen. In diesem Abschnitt notieren wir verkürzend, dass

$$\frac{\partial V_j}{\partial x}(\vec{x}) = V_{jx}, \quad \frac{\partial V_j}{\partial y}(\vec{x}) = V_{jy}, \quad \frac{\partial V_j}{\partial z}(\vec{x}) = V_{jz}$$

für $j \in \{1, 2, 3\}$, $\vec{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ und ein Vektorfeld $\vec{V}(\cdot) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ gilt.

Definition A.11. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $\vec{x} = (x, y, z) \in \Omega$ und

$$\vec{V}(\cdot) = \begin{pmatrix} V_1(\cdot) \\ V_2(\cdot) \\ V_3(\cdot) \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^3).$$

Dann definieren wir durch

$$\text{rot}(\vec{V}(\vec{x})) = \nabla \times \vec{V}(\vec{x}) := \begin{pmatrix} V_{3y}(\vec{x}) - V_{2z}(\vec{x}) \\ V_{1z}(\vec{x}) - V_{3x}(\vec{x}) \\ V_{2x}(\vec{x}) - V_{1y}(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

die *Rotation* des Vektorfeldes \vec{V} .

Außerdem interessieren wir uns dafür, wann die Rotation eines Vektorfeldes auf einem bestimmten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ identisch verschwindet.

Definition A.12. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $\vec{x} = (x, y, z) \in \Omega$ und

$$\vec{V}(\cdot) = \begin{pmatrix} V_1(\cdot) \\ V_2(\cdot) \\ V_3(\cdot) \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^3).$$

Falls $\text{rot}(\vec{V}(\vec{x})) \equiv 0$ für alle $\vec{x} \in \Omega$ gilt, so nennen wir das Vektorfeld \vec{V} *wirbelfrei* in Ω .

Die wichtigsten Rechenregeln für die Rotation eines Vektorfeldes sollen ebenfalls in dieser Arbeit vorgestellt werden.

Satz A.13. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $\vec{x} = (x, y, z) \in \Omega$ und

$$\vec{V}(\cdot) = \begin{pmatrix} V_1(\cdot) \\ V_2(\cdot) \\ V_3(\cdot) \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^3).$$

1) Sei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante, dann gilt

$$\text{rot}(c \cdot \vec{V}(\vec{x})) = c \cdot \text{rot}(\vec{V}(\vec{x}))$$

oder

$$\nabla \times (c \cdot \vec{V}(\vec{x})) = c \cdot (\nabla \times \vec{V}(\vec{x}))$$

in äquivalenter Schreibweise.

2) Seien

$$\vec{V}_1(\cdot) = (V_{11}(\cdot), V_{12}(\cdot), V_{13}(\cdot)) \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$$

und

$$\vec{V}_2(\cdot) = (V_{21}(\cdot), V_{22}(\cdot), V_{23}(\cdot)) \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$$

zwei stetig differenzierbare Vektorfelder. Dann ergibt sich, dass

$$\operatorname{rot}(\vec{V}_1(\vec{x}) + \vec{V}_2(\vec{x})) = \operatorname{rot}(\vec{V}_1(\vec{x})) + \operatorname{rot}(\vec{V}_2(\vec{x}))$$

oder

$$\nabla \times (\vec{V}_1(\vec{x}) + \vec{V}_2(\vec{x})) = \nabla \times \vec{V}_1(\vec{x}) + \nabla \times \vec{V}_2(\vec{x})$$

in äquivalenter Schreibweise gilt.

3) Sei $\Phi(\cdot) \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ ein stetig differenzierbares Skalarfeld, so erhalten wir

$$\operatorname{rot}(\Phi(\vec{x}) \cdot \vec{V}(\vec{x})) = \Phi(\vec{x}) \cdot \operatorname{rot}(\vec{V}(\vec{x})) - \vec{V}(\vec{x}) \times \operatorname{grad}(\Phi(\vec{x}))$$

oder

$$\nabla \times (\Phi(\vec{x}) \cdot \vec{V}(\vec{x})) = \Phi(\vec{x}) \cdot (\nabla \times \vec{V}(\vec{x})) - \vec{V}(\vec{x}) \times \nabla(\Phi(\vec{x}))$$

in äquivalenter Schreibweise.

4) Sei $\Phi(\cdot) \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ ein zweimal stetig differenzierbares Skalarfeld. Dann gilt

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad}(\Phi(\vec{x}))) = 0$$

oder

$$\nabla \times (\nabla(\Phi(\vec{x}))) = 0$$

in äquivalenter Schreibweise. Das bedeutet insbesondere, dass Gradientenfelder stets wirbelfrei sind, wobei ein Vektorfeld \vec{V} mit der Eigenschaft $\vec{V}(\vec{x}) = \operatorname{grad}(\Phi(\vec{x}))$ Gradientenfeld genannt wird.

5) Sei $\vec{V}(\cdot) \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Dann haben wir

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}(\vec{V}(\vec{x}))) = 0$$

oder

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{V}(\vec{x})) = 0$$

in äquivalenter Schreibweise.

6) Seien

$$\vec{V}_1(\cdot) = \begin{pmatrix} V_{11}(\cdot) \\ V_{12}(\cdot) \\ V_{13}(\cdot) \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$$

und

$$\vec{V}_2(\cdot) = \begin{pmatrix} V_{21}(\cdot) \\ V_{22}(\cdot) \\ V_{23}(\cdot) \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$$

zwei stetig differenzierbare Vektorfelder. Dann können wir

$$\operatorname{div}(\vec{V}_1(\vec{x}) \times \vec{V}_2(\vec{x})) = \vec{V}_2(\vec{x}) \cdot \operatorname{rot}(\vec{V}_1(\vec{x})) - \vec{V}_1(\vec{x}) \cdot \operatorname{rot}(\vec{V}_2(\vec{x}))$$

oder

$$\nabla \cdot (\vec{V}_1(\vec{x}) \times V_2(\vec{x})) = \vec{V}_2(\vec{x}) \cdot (\nabla \times \vec{V}_1(\vec{x})) - \vec{V}_1(\vec{x}) \cdot (\nabla \times \vec{V}_2(\vec{x}))$$

in äquivalenter Schreibweise folgern.

Beweis. Dies folgt sofort aus den Definitionen. \square

Nach der Präsentation der vorangegangenen Aussagen möchten wir uns an dieser Stelle kurz der Situation widmen, wenn die Dimension des betrachteten Raumes \mathbb{R}^n entsprechend $n = 2$ gewählt wird.

Lemma A.14. Sei $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$, $\vec{y} \in \tilde{\Omega}$ und $\vec{W}(\cdot) = (W_1(\cdot), W_2(\cdot)) \in \mathcal{C}^1(\tilde{\Omega}, \mathbb{R}^2)$. Dann gilt

$$\nabla \times \vec{W}(\vec{y}) := \left(\frac{\partial W_2}{\partial x}(\vec{y}) - \frac{\partial W_1}{\partial y}(\vec{y}) \right)$$

für $\vec{y} = (x, y)$.

Beweis. Dies folgt sofort aus den Definitionen, wenn \mathbb{R}^2 in \mathbb{R}^3 eingebettet wird. \square

B Funktionalanalytische Grundlagen und partielle Integration

Dieser Abschnitt dient der Einführung der wesentlichen Funktionenräume, welche in dieser Dissertation benötigt werden. Ferner werden wesentliche partielle Integrationen, welche zur schwachen Formulierung der partiellen Differentialgleichungen in den Kapiteln 3 - 6 verwendet werden, im Rahmen der Theorie der Funktionenräume vorgestellt. Diese Ausarbeitung stammt überwiegend im direkten Wortlaut aus der Bachelorarbeit [62, Kapitel 1] des Autors. Desweiteren wird die Ausarbeitung um Funktionenräume für Evolutionsprobleme nach [27, Kapitel 7] und [56, Kapitel 2] ergänzt. Die klassische Young-Ungleichung, die klassische Cauchy-Schwarz-Ungleichung in Hilberträumen und sonstige funktionalanalytische Begriffe werden als bekannt vorausgesetzt.

B.1 Sobolevräume

Da die Theorie der Maxwell-Gleichungen und der Navier-Stokes-Gleichungen auf Sobolevräumen von skalarwertigen beziehungsweise vektorwertigen Funktionen beruht, möchten wir hier einige grundlegende Notationen und Ergebnisse dieser Theorie wiedergeben. Insgesamt ist anzumerken, dass wir für den Rest dieses gesamten Kapitels im Wesentlichen dem dritten Kapitel des Werkes [52] folgen werden.

Wir definieren zunächst einige schon bekannte Funktionenräume für eine beliebige offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \in \{1, 2, 3\}$, $1 \leq p \leq \infty$. Mit $\mathcal{C}^k(\Omega)$ bezeichnen wir die Menge der k -fach stetig differenzierbaren Funktionen auf Ω . Ferner notieren wir mit $\mathcal{C}_0^k(\Omega)$ die Menge der Funktionen aus \mathcal{C}^k mit kompaktem Träger in Ω . Weiter stellt $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$ die Menge der Funktionen aus \mathcal{C}^k , welche beschränkte und gleichmäßig stetige Ableitungen bis zur k -ten Ordnung auf $\overline{\Omega}$ besitzen, dar. Zuletzt führen wir mit $L^p(\Omega)$ den Raum der Funktionen φ auf Ω ein, in welchem die Funktionen mit der Eigenschaft

$$\int_{\Omega} |\varphi|^p dx < \infty \quad (\text{B.1})$$

für $1 \leq p < \infty$ liegen. Für $\varphi \in L^\infty(\Omega)$ muss

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |\varphi(x)| < \infty \quad (\text{B.2})$$

gelten.

Desweiteren erinnern wir an die Multiindexschreibweise für Ableitungen. Falls

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)^T \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$$

ist, setzen wir

$$|\alpha|_1 := \sum_{j=1}^N |\alpha_j|$$

für die Länge des Multiindex und wir definieren für $\varphi \in \mathcal{C}^{|\alpha|_1}(\Omega)$

$$\frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|_1} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_N^{\alpha_N}}.$$

Der Raum der Distributionen $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)'$ ist der Dualraum von $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. Dies ist dergestalt zu verstehen, dass ein lineares Funktional

$$T: \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$$

Element von $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)'$ ist, falls für jedes Kompaktum $K \subset \Omega$ ein $C \geq 0$ und ein $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ derart existieren, dass

$$|T(\varphi)| \leq C \cdot \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{K \subset \Omega} |\mathrm{D}^\alpha \varphi| \quad (\text{B.3})$$

für alle $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ erfüllt ist.

Die Ableitung $\partial^\alpha \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ einer Funktion $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)'$ im distributionalen Sinne ist jene eindeutige Distribution, welche

$$\left(\frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x^\alpha}, \psi \right) = (-1)^{|\alpha|_1} \cdot \left(\varphi, \frac{\partial^\alpha \psi}{\partial x^\alpha} \right) \quad (\text{B.4})$$

für alle $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ erfüllt.

Ein Gebiet im \mathbb{R}^N , $N \in \{1, 2, 3\}$ wird als offene und zusammenhängende Menge verstanden.

Mit dem Standardsobolevraum bezeichnen wir $W^{s,p}(\Omega)$, wobei $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $1 \leq p < \infty$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein Gebiet sind. Dieser Raum wird durch

$$W^{s,p}(\Omega) = \{ \varphi \in L^p(\Omega) \mid \partial^\alpha \varphi \in L^p(\Omega) \forall |\alpha|_1 \leq s \} \quad (\text{B.5})$$

charakterisiert. Weiterhin haben wir die Norm

$$\|\varphi\|_{W^{s,p}(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha|_1 \leq s} \int_{\Omega} |\partial^\alpha \varphi(x)|^p \, dV(x) \right)^{p^{-1}} \quad (\text{B.6})$$

und die zugehörige Seminorm

$$|\varphi|_{W^{s,p}(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha|_1 = s} \int_{\Omega} |\partial^\alpha \varphi(x)|^p \, dV(x) \right)^{p^{-1}}, \quad (\text{B.7})$$

die später in der Interpolationsaufgabe mittels Finiter-Elemente-Methoden noch eine Rolle spielen wird. Im Falle $p = \infty$ wird $W^{s,\infty}(\Omega)$ durch die Norm

$$\|\varphi\|_{W^{s,\infty}(\Omega)} := \sum_{|\alpha|_1 \leq s} \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |\partial^\alpha \varphi| \quad (\text{B.8})$$

ein Banachraum.

Wir definieren ferner, dass $W_0^{s,p}(\Omega)$ der Abschluss von $C_0^\infty(\Omega)$ in der Norm (B.6) ist. Der Fall $p = 2$ liefert uns

$$H_0^s(\Omega) = W_0^{s,2}(\Omega)$$

interessante Hilberträume für unsere Betrachtungen. Insbesondere wird für $s = 0$ der Lebesgue-Raum der quadratintegrablen Funktionen gegeben, dessen Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_\Omega$ in den Hauptkapiteln häufig Verwendung findet. Dieses wird auch im folgenden Unterabschnitt benutzt. Sofern das gesamte Gebiet Ω gemeint ist, wird dieser Index am Skalarprodukt weggelassen. Die hier angegebenen Räume lassen sich mithilfe einer Anmerkung des nächsten Unterabschnitts auch auf den vektorwertigen Fall verallgemeinern.

Wir werden die folgende Poincaré-Ungleichung häufiger verwenden.

Theorem B.1. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet. Dann gilt mit einer Konstanten $C_P > 0$, die nur vom Gebiet abhängt, dass*

$$\|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)^N} \leq C_P \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)^{N \times N}} \quad (\text{B.9})$$

für alle $\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^N$.

Beweis. Vergleiche [29, Theorem 3, Seite 265]. □

B.2 Vektorfunktionen mit wohldefinierter Rotation oder Divergenz

Das $L^2(\Omega)$ -Skalarprodukt lässt sich auf Vektorfunktionen erweitern. Seien dementsprechend $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_N)^T \in (L^2(\Omega))^N$ und $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_N)^T \in (L^2(\Omega))^N$ mit $N \in \mathbb{N}$. Dann definiert uns

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} \sum_{j=1}^N u_j \cdot \bar{v}_j \, dx \quad (\text{B.10})$$

das $(L^2(\Omega))^N$ -Skalarprodukt. Entsprechend können dann die vektorwertigen L^p -Räume mittels (B.10) definiert werden.

Im Folgenden beschränken wir uns auf dreidimensionale Vektorfelder. Allerdings lässt sich nach Bemerkung 3.2 die Rotation und das Kreuzprodukt auf den zweidimensionalen Fall übertragen und somit machen die partiellen Integrationen und Raumdefinitionen auch im Zweidimensionalen Sinn. Zunächst definieren wir die Rotation und die Divergenz im distributionalen Sinne. Der Rotationsoperator, angewendet auf eine dreidimensionale Vektorfunktion $\mathbf{v} \in (C_0^\infty(\Omega))'$ mit $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^T$, wird mittels

$$\nabla \times \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right)^T \quad (\text{B.11})$$

definiert, wobei die Ableitungen, wie schon erwähnt, im Distributionensinne zu verstehen sind. Ferner schreiben wir manchmal verkürzend

$$\nabla \times \mathbf{v} = (v_{3,x_2} - v_{2,x_3}, v_{1,x_3} - v_{3,x_1}, v_{2,x_1} - v_{1,x_2}).$$

Wenden wir (B.4) auf jede Komponente der Rotation an, so sehen wir, dass für beliebig gewähltes $\mathbf{w} \in (\mathcal{C}_0^\infty(\Omega))^3$

$$\begin{aligned}
& (\nabla \times \mathbf{v}, \mathbf{w}) \\
&= \int_{\Omega} \{(v_{3,x_2} - v_{2,x_3}) \cdot \overline{w_1} + (v_{1,x_3} - v_{3,x_1}) \cdot \overline{w_2} + (v_{2,x_1} - v_{1,x_2}) \cdot \overline{w_3}\} dx \\
&\stackrel{(B.4)}{=} \int_{\Omega} \{-v_3 \cdot \overline{w_{1,x_2}} + v_2 \cdot \overline{w_{1,x_3}} - v_1 \cdot \overline{w_{2,x_3}} + v_3 \cdot \overline{w_{2,x_1}} - v_2 \cdot \overline{w_{3,x_1}} + v_1 \cdot \overline{w_{3,x_2}}\} dx \\
&= \int_{\Omega} \{v_1 \cdot (\overline{w_{3,x_2}} - \overline{w_{2,x_3}}) + v_2 \cdot (\overline{w_{1,x_3}} - \overline{w_{3,x_1}}) + v_3 \cdot (\overline{w_{2,x_1}} - \overline{w_{1,x_2}})\} dx \\
&= (\mathbf{v}, \nabla \times \mathbf{w})
\end{aligned}$$

gilt, also uns

$$(\nabla \times \mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{v}, \nabla \times \mathbf{w}) \quad (\text{B.12})$$

für alle $\mathbf{w} \in (\mathcal{C}_0^\infty(\Omega))^3$ liefert.

Sei $\mathbf{v} \in (\mathcal{C}_0^\infty(\Omega))'$. Dann wird der Divergenzoperator durch

$$\nabla \cdot \mathbf{v} := \sum_{j=1}^3 \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \quad (\text{B.13})$$

charakterisiert.

Erneutes Anwenden von (B.4) gibt uns für $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, dass

$$\begin{aligned}
(\nabla \cdot \mathbf{v}, \phi) &= \int_{\Omega} \{v_{1,x_1} \cdot \overline{\phi} + v_{2,x_2} \cdot \overline{\phi} + v_{3,x_3} \cdot \overline{\phi}\} dx \\
&\stackrel{(B.4)}{=} \int_{\Omega} \{-v_1 \cdot \overline{\phi_{x_1}} - v_2 \cdot \overline{\phi_{x_2}} - v_3 \cdot \overline{\phi_{x_3}}\} dx \\
&= -(\mathbf{v}, \nabla \phi)
\end{aligned}$$

gilt, also zu

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}, \phi) = -(\mathbf{v}, \nabla \phi) \quad (\text{B.14})$$

führt.

Sei jetzt $p \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)'$. Dann sehen wir ein, dass mit $\mathbf{v} = \nabla p$ in (B.12)

$$(\nabla \times \nabla p, \mathbf{w}) = (\nabla p, \nabla \times \mathbf{w})$$

für alle $\mathbf{w} \in (\mathcal{C}_0^\infty(\Omega))^3$ erfüllt ist, was wegen der distributionalen Definition des Gradienten auf

$$(\nabla \times \nabla p, \mathbf{w}) = (\nabla p, \nabla \times \mathbf{w}) = -(p, \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{w})) = 0$$

führt, da für $\mathbf{w} \in (\mathcal{C}_0^\infty(\Omega))^3$ im klassischen Sinne

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{w}) = 0$$

gilt, also insgesamt

$$\nabla \times (\nabla p) = 0 \tag{B.15}$$

für beliebiges $p \in (\mathcal{C}_0^\infty(\Omega))'$ zeigt.

Sei $\mathbf{v} \in ((\mathcal{C}_0^\infty(\Omega))')^3$ beliebig. Wir betrachten für $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$

$$(\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}), \phi) \stackrel{(B.14)}{=} -(\nabla \times \mathbf{v}, \nabla \phi) \stackrel{(B.12)}{=} -(\mathbf{v}, \nabla \times (\nabla \phi)) = 0,$$

da im klassischen Sinne

$$\nabla \times (\nabla \phi) = 0$$

erfüllt ist, was also

$$(\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v})) = 0 \tag{B.16}$$

beweist.

Wir erinnern uns an einige Integralzusammenhänge für vektorwertige Funktionen.

Theorem B.2. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Lipschitzgebiet mit Rand $\partial\Omega$ und äußerer Einheitsnormalen \mathbf{n} . Sei desweiteren $\mathbf{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld mit der Eigenschaft, dass $\mathbf{F} \in (\mathcal{C}^1(\overline{\Omega}))^3$ gilt. Dann ergibt sich, dass

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} \, dx = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS \tag{B.17}$$

ist.

Beweis. Vergleiche [52, Theorem 3.19]. □

Aus diesem Ergebnis können wir das nachfolgende Korollar gewinnen.

Korollar B.3. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Lipschitzgebiet mit Rand $\partial\Omega$ und äußerer Einheitsnormalen \mathbf{n} .

(1) Falls $\zeta \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ und $\mathbf{u} \in (\mathcal{C}^1(\overline{\Omega}))^3$ sind, erhalten wir, dass sich

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \cdot \zeta \, dx = - \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla(\zeta) \, dx + \int_{\partial\Omega} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{u} \cdot \zeta) \, dS \tag{B.18}$$

ergibt.

(2) Falls $\zeta \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ und $p \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ sind, so gilt, dass wir

$$\int_{\Omega} (\Delta(p)) \cdot \zeta \, dx = - \int_{\Omega} (\nabla(p)) \cdot (\nabla(\zeta)) \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} \cdot \zeta \, dS \quad (\text{B.19})$$

bekommen.

(3) Falls $\zeta \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ und $p \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ sind, so folgt

$$\int_{\Omega} (\zeta \cdot \Delta(p) - p \cdot \Delta(\zeta)) \, dx = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} \cdot \zeta - \frac{\partial \zeta}{\partial \mathbf{n}} \cdot p \right) \, dS. \quad (\text{B.20})$$

(4) Seien $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in (\mathcal{C}^1(\overline{\Omega}))^3$. Dann ist

$$\int_{\Omega} (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \, dx = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) \, dx + \int_{\partial\Omega} (\mathbf{n} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \, dS. \quad (\text{B.21})$$

Beweis. Vergleiche [52, Korollar 3.20]. □

Wir möchten einige Eigenschaften des Raumes $H(\text{div}; \Omega)$ anführen, da dieser im Verlaufe dieser Arbeit benötigt wird. Diese Aussagen werden ohne Beweis angegeben. Für eine ausführlichere Darstellung verweisen wir auf das dritte Kapitel des Werkes [52].

Der Raum der quadratintegrablen Divergenzen wird durch

$$H(\text{div}; \Omega) := \left\{ \mathbf{u} \in (L^2(\Omega))^3 \mid \nabla \cdot \mathbf{u} \in L^2(\Omega) \right\}$$

gegeben, wobei die zugehörige Graphennorm

$$\|\mathbf{u}\|_{H(\text{div}; \Omega)} := \left(\|\mathbf{u}\|_{(L^2(\Omega))^3}^2 + \|\nabla \cdot \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B.22})$$

lautet. Hieraus erkennen wir auch, dass der Raum $H(\text{div}; \Omega)$ mit dem natürlichen Skalarprodukt zu einem Hilbertraum wird.

Theorem B.4. *Sei Ω ein beschränktes Lipschitzgebiet im \mathbb{R}^3 . Dann stellt der Raum $H(\text{div}; \Omega)$ den Abschluss von $(\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}))^3$ in der $H(\text{div}; \Omega)$ -Norm dar.*

Beweis. Vergleiche [52, Theorem 3.22]. □

Für ein $\mathbf{v} \in (\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}))^3$ definieren wir den Normalenspuoperator γ_n mittels

$$\gamma_n(\mathbf{v}) = \mathbf{v}|_{\partial\Omega} \cdot \mathbf{n}, \quad (\text{B.23})$$

wobei \mathbf{n} die äußere Einheitsnormale ist.

Theorem B.5. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Lipschitzgebiet mit äußerer Einheitsnormalen \mathbf{n} .

(1) Die Abbildung γ_n , welche in (B.23) definiert worden ist, kann von $(\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}))^3$ durch Stetigkeit zu einer stetigen linearen Abbildung

$$\gamma: H(\operatorname{div}; \Omega) \longrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Omega)$$

fortgesetzt werden.

(2) Für $\mathbf{v} \in H(\operatorname{div}; \Omega)$ und $\phi \in H^1(\Omega)$ gilt

$$(\mathbf{v}, \nabla(\phi)) + (\nabla \cdot \mathbf{v}, \phi) = \langle \phi, \gamma_n(\mathbf{v}) \rangle_{\partial\Omega}. \quad (\text{B.24})$$

Beweis. Vergleiche [52, Theorem 3.24]. □

Um Problemstellungen, in denen die Normalenkomponente eines Vektorfeldes auf $\partial\Omega$ vorgegeben ist, benötigen wir den Unterraum von $H(\operatorname{div}; \Omega)$, auf welchem γ_n verschwindet. Wir definieren $H(\operatorname{div} 0; \Omega)$ als den Abschluss von $(\mathcal{C}_0^\infty(\Omega))^3$ in der $H(\operatorname{div}; \Omega)$ -Norm.

Theorem B.6. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Lipschitzgebiet. Dann gilt

$$H(\operatorname{div} 0; \Omega) := \left\{ \mathbf{v} \in H(\operatorname{div}; \Omega) \mid \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0 \right\}.$$

Beweis. Vergleiche [52, Theorem 3.26]. □

Ferner interessieren wir uns für den Raum der Funktionen, deren Rotationen messbar sind. Diesen definieren wir mittels

$$H(\operatorname{rot}; \Omega) := \left\{ \mathbf{v} \in (L^2(\Omega))^3 \mid \nabla \times \mathbf{v} \in (L^2(\Omega))^3 \right\},$$

wobei die zugehörige Graphennorm durch

$$\|\mathbf{v}\|_{H(\operatorname{rot}; \Omega)} := \left(\|\mathbf{v}\|_{(L^2(\Omega))^3} + \|\nabla \times \mathbf{v}\|_{(L^2(\Omega))^3} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B.25})$$

gegeben ist.

Ferner definieren wir für $s \geq 0$

$$H^s(\operatorname{rot}; \Omega) := \left\{ \mathbf{v} \in (H^s(\Omega))^3 \mid \nabla \times \mathbf{v} \in (H^s(\Omega))^3 \right\}.$$

Weiterhin nutzen wir den Raum $H_0(\operatorname{rot}; \Omega)$, welcher den Abschluss von $(\mathcal{C}_0^\infty(\Omega))^3$ in der $H(\operatorname{rot}; \Omega)$ -Norm darstellen soll.

Theorem B.7. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Lipschitzgebiet. Dann ist der Abschluss von $(\mathcal{C}_0^\infty(\overline{\Omega}))^3$ in der $H(\text{rot}; \Omega)$ -Norm gerade $H(\text{rot}; \Omega)$.

Beweis. Vergleiche [52, Theorem 3.26]. □

Desweiteren ergibt sich das nachfolgende Lemma.

Lemma B.8. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Lipschitzgebiet und $\mathbf{u} \in H(\text{rot}; \Omega)$ sei derart, dass für $\mathbf{w} \in (\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}))^3$

$$(\nabla \times \mathbf{u}, \mathbf{w}) - (\mathbf{u}, \nabla \times \mathbf{w}) = 0 \quad (\text{B.26})$$

erfüllt wird, so ist $\mathbf{u} \in H_0(\text{rot}; \Omega)$.

Beweis. Vergleiche [52, Lemma 3.27]. □

Als letztes Ergebnis dieses Abschnittes möchten wir eine Charakterisierung des Raumes $H_0(\text{rot}; \Omega)$ angeben.

Theorem B.9. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Lipschitzgebiet. Dann gilt

$$H_0(\text{rot}; \Omega) = \left\{ \mathbf{u} \in H(\text{rot}; \Omega) \mid (\mathbf{u}, \nabla \times \mathbf{w}) = (\nabla \times \mathbf{u}, \mathbf{w}) \forall \mathbf{w} \in (\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}))^3 \right\}.$$

Beweis. Vergleiche [52, Theorem 3.33]. □

Wir bemerken, dass sich durch Dichtheitsargumente die Aussagen auf die entsprechenden Funktionenräume für die schwachen Formulierungen in den Kapiteln 3 - 6 übertragen lassen.

B.3 Funktionenräume für die Differentiation in Banachräumen

Im Wesentlichen verweisen wir für die Begrifflichkeiten des Bochner-Integrals auf [56, Kapitel 2] und für gewisse Eigenschaften der hier eingeführten Funktionenräume auf [27, Kapitel 7].

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ mit $N \in \mathbb{N}$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet, X ein Banachraum von Funktionen auf Ω mit zugehöriger Norm $\|\cdot\|_X$ und $(t_0, t_1) \subset \mathbb{R}$ ein nichtleeres Intervall. Eine Funktion $\mathbf{v}: (t_0, t_1) \times \Omega \rightarrow X$ gehört zum Raum $L^p(t_0, t_1; X)$ für $1 \leq p \leq \infty$, sofern

$$\|\mathbf{v}\|_{L^p(t_0, t_1; X)} := \left(\int_{t_0}^{t_1} \|\mathbf{v}(t)\|_X^p dt \right)^{p^{-1}} < \infty \quad (\text{B.27})$$

im Falle $1 \leq p < \infty$ oder

$$\|\mathbf{v}\|_{L^\infty(t_0, t_1; X)} := \text{ess sup}_{t \in (t_0, t_1)} \|\mathbf{v}\|_X < \infty \quad (\text{B.28})$$

im Falle $p = \infty$ gilt.

Nach [27, Satz 7.1.23 (i)] ist $L^p(t_0, t_1; X)$ für $1 \leq p \leq \infty$ unter diesen Voraussetzungen ein Banachraum. Falls X zusätzlich ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_{X \times X}$ ist, so ist auch $L^2(t_0, t_1; X)$ mit dem Skalarprodukt

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{L^2(t_0, t_1; X)} := \int_{t_0}^{t_1} (\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t))_{X \times X} dt \quad (\text{B.29})$$

nach [27, Satz 7.1.23 (vii)] ein Hilbertraum.

Literatur

- [1] C. AMROUCHE, C. BERNARDI, M. DAUGE, V. GIRAULT, *Vector potentials in three-dimensional non-smooth domains*, Math. Methods Appl. Sci., 21 (1998), 823–864.
- [2] T. APEL, *Anisotropic Finite Elements: Local Estimates and Applications*, Teubner Verlag, Stuttgart, 1999.
- [3] D. ARNDT, H. DALLMANN, G. LUBE, *Local projection FEM stabilization for the time-dependent incompressible Navier-Stokes problem*, Numer. Methods Part. Diff. Equat., Vol. 31, 4 (2015), 1224–1250.
- [4] D. ARNDT, G. LUBE, *FEM with Local Projection Stabilization for Incompressible Flows in Rotating Frames*, NAM Preprint, 2015, http://num.math.uni-goettingen.de/~d.arndt/files/NSE_coriolis.pdf, aufgerufen am: 16.08.2015, 23:20.
- [5] S. BADIA, R. CODINA, *Unified stabilized finite element formulations for the Stokes and the Darcy problem*, SIAM J. Num. Anal. 47 (3), 2009, 1977–2000.
- [6] S. BADIA, R. CODINA, *A nodal-based finite element approximation of the Maxwell problem suitable for singular solutions*, SIAM J. on Numer. Anal., Vol. 50 (2012), 398–417.
- [7] S. BADIA, R. CODINA, R. PLANAS, *On an unconditionally convergent stabilized finite element approximation of resistive magnetohydrodynamics*, J. Comp. Phys., Vol. 234, (2013), 399–416.
- [8] S. BADIA, R. CODINA, R. PLANAS, *Analysis of an unconditionally convergent stabilized finite element formulation for incompressible magnetohydrodynamics*, Arch. Comp. Meth. Engin., 2014.
- [9] S. BADIA, A. F. MARTIN, R. PLANAS, *Block recursive LU preconditioners for the thermally coupled incompressible inductionless MHD problem*, J. Comp. Phys., Vol. 274, (2014), 562–591.
- [10] S. BADIA, R. PLANAS, J. L. GUTIÉRREZ-SANTACREU, *Unconditionally stable operator splitting algorithms for the incompressible magnetohydrodynamics (MHD) system discretized by a stabilized finite element formulation based on projections*, Int. J. Num. Meth. Engin., Vol. 93, (2013), 302–328.
- [11] W. BANGERTH, T. HEISTER AND G. KANSCHAT, **deal.II** - *Differential Equations Analysis Library*, Technical Reference, <http://www.dealii.org>, aufgerufen am: 16.08.2015, 23:40.
- [12] A. BONITO, J. - L. GUERMOND, *Approximation of the Eigenvalue Problem for Time Harmonic Maxwell System by Continuous Lagrange Finite Elements*, Math. Comp., 80(276), 1887–1910, 2011.

- [13] A. BONITO, J. - L. GUERMOND, F. LUDDENS, *An Interior Penalty Method with $C0$ Finite Elements for the Approximation of the Maxwell Equations in Heterogeneous Media: Convergence Analysis with Minimal Regularity*, 34 pages, arxiv identifier 1402.4454.
- [14] M. BRAACK, G. LUBE, *Finite elements with local projection stabilization for incompressible flow problems*, J. Comp. Math. 27, 2009, 116–147.
- [15] D. BRAESS, *Finite Elemente*, Springer Verlag, 2. Auflage, Berlin, 1997.
- [16] S. C. BRENNER, L. R. SCOTT, *The Mathematical Theory of Finite Elements*, Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [17] A. BUFFA, P. CIARLET JR., E. JAMELOT, *Solving electromagnetic eigenvalue problems in polyhedral domains with nodal finite elements*, Numer. Math., 113 (2009), 497–518.
- [18] R. CODINA, *Analysis of a stabilized finite element approximation of the Oseen equations using orthogonal subscales*, Appl. Num. Math., 58 (2008), 264–283.
- [19] M. COSTABEL, M. DAUGE, *Singularities of electromagnetic fields in polyhedral domains*, Arch. Ration. Mech. Anal., 151 (2000), 221–276.
- [20] M. COSTABEL, M. DAUGE, *Weighted regularization of Maxwell equations in polyhedral domains*, Numer. Math., 93 (2002), 239–277.
- [21] H. DALLMANN, D. ARNDT, G. LUBE, *Local projection stabilization for the Oseen problem*, NAM Preprint 2014-09, accepted for: IMA J. Num. Anal., (2015).
- [22] P. A. DAVIDSON, *An Introduction to Magnetohydrodynamics*, Cambridge University Press, 2001.
- [23] Z. DING, *A proof of the trace theorem of Sobolev spaces on Lipschitz domains*, Proc. Amer. Math. Soc., 124 (1996), 591–600.
- [24] D. A. DI PIETRO, A. ERN, *Mathematical Aspects of Discontinuous Galerkin Methods*, Springer Verlag, Heidelberg, 2012.
- [25] G. DUVAUT, J. L. LIONS, *Les inéquations en mécanique et en physique*, Arch. Ration. Mech. Anal., 46 (1972), 241–279.
- [26] H. ELMAN, D. SILVESTER, A. WATHEN, *Finite Elements and Fast Iterative Solvers*, Oxford Publications, 2. Auflage, 2014.
- [27] E. EMMRICH, *Gewöhnliche und Operator-Differentialgleichungen*, Vieweg Verlag, 1. Auflage, Berlin, 2004.
- [28] A. ERN, J. - L. GUERMOND, *Theory and Practice of Finite Elements*, Springer Verlag, 2004.

- [29] L. C. EVANS, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, 1998.
- [30] C. FOIAS, O. MANLEY, R. ROSA, R. TEMAM, *Navier-Stokes Equations and Turbulence*, Cambridge University Press, 2001.
- [31] M. FORTIN, *An analysis of the convergence of mixed finite element methods*, RAIRO Anal. Numer. 11, 1977, 341–354.
- [32] J. - F. GERBEAU, C. LE BRIS, T. LELIÈVRE, *Mathematical Methods for the Magnetohydrodynamics of Liquid Metals*, Oxford University Press, 2006.
- [33] V. GIRAULT, P.A. RAVIART, *Finite element methods for Navier-Stokes equations: theory and algorithms*, Springer Series in Computational Mathematics, Springer Verlag, 1986.
- [34] V. GIRAULT, R. SCOTT, *A quasi-local interpolation operator preserving the discrete divergence*, Calcolo, Vol. 40 (2003), 1–19.
- [35] J. P. GOEDBLOED, S. POEDTS, *Principles of Magnetohydrodynamics*, Cambridge University Press, 2004.
- [36] J. P. GOEDBLOED, R. KEPPENS, S. POEDTS, *Advanced Magnetohydrodynamics*, Cambridge University Press, 2010.
- [37] C. GREIF, D. LI, D. SCHÖTZAU AND X. WEI, *A mixed finite element method with exactly divergence-free velocities for incompressible magnetohydrodynamics*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., Vol. **199**, 2840–2855, **2010**.
- [38] S. GROSS, A. REUSKEN, *Numerical methods for two-phase incompressible flows*, Springer, Vol. 40, 2011.
- [39] J. L. GUERMOND AND J. SHEN, *On the error estimates for the rotational pressure-correction projection methods*, Math. Comp. 73 (2004) 248, 1719–1737.
- [40] F. HECHT, *New development in FreeFem++*, J. Numer. Math., **20 (2012)**, 3-4, 251–265. 65Y15.
- [41] M. HEDWIG, P. W. SCHROEDER, *A grad-div stabilized discontinuous Galerkin based thermal optimization of sorption processes via phase change materials*, NAM Preprint, 2015, submitted to: Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg., <http://num.math.uni-goettingen.de/preprints/files/2015-06.pdf>, aufgerufen am: 16.08.2015, 23:55.
- [42] T. HEISTER, *A Massively Parallel Finite Element Framework with Application to Incompressible Flows*, Doktorarbeit, Georg-August-Universität Göttingen, 2011, <http://hdl.handle.net/11858/00-1735-0000-0006-B6B1-6>, aufgerufen am: 11.09.2015, 00:35.
- [43] R. HIPTMAIR, *Finite elements in computational electromagnetism*, Acta Numer., 11 (2003), 237–339.

- [44] P. HOUSTON, I. PERUGIA, D. SCHÖTZAU, *Mixed discontinuous Galerkin approximation of the Maxwell operator*, SIAM J. Numer. Anal., 42 (2005), 434–459.
- [45] U. KAYA, B. WACKER, G. LUBE, *A nodal-based stabilization Finite Element Method for the Induction Equation*, NAM Preprint, 2015.
- [46] D. H. KOBE, *Derivation of Maxwell's equations from the gauge invariance of classical mechanics*, Am. J. Phys., 48(5):348—353, 1980.
- [47] G. LUBE, *Theorie und Numerik stationärer physikalischer Probleme*, Vorlesungsskriptum, Georg-August-Universität, 2011, http://num.math.uni-goettingen.de/lube/FEM1_11.pdf, aufgerufen am: 19.07.2015, 4:05.
- [48] G. LUBE, G. RAPIN, J. LÖWE, *Local projection stabilization for incompressible flows: equal-order vs. inf-sup stable interpolation*, Elec. Trans. Num. Anal. 32, 2008, 106–122.
- [49] J. S. MARSH, *Alternate “derivation” of Maxwell's source equations from gauge invariance of classical mechanics*, Am. J. Phys., 61(2):177—178, 1993.
- [50] G. MATTHIES, P. SKRZYPACZ, L. TOBISKA, *A unified convergence analysis for local projection stabilization applied to the Oseen problem*, M2AN Math. Model Numer. Anal. 41 (4), 2007, 713–742.
- [51] H.K. MOFFATT, *Magnetic Field Generation in Electrically Conducting Fluids*, Cambridge University Press 1978.
- [52] P. MONK, *Finite Element Methods for Maxwell's equations*, Oxford University Press, 2003.
- [53] U. MÜLLER, L. BÜHLER, *Magnetofluidynamics in Channels and Containers*, Springer Verlag, Berlin, 2001.
- [54] S. NICAISE, *Edge elements on anisotropic meshes and approximation of the Maxwell equations*, SIAM J. Numer. Anal., 39 (2001), 784–816.
- [55] T. OVERHAGEN, R. SCHARK, *Vektoranalysis, Funktionentheorie, Transformationen*, Harri Deutsch Verlag, Frankfurt am Main, 1999.
- [56] M. RŮŽIČKA, *Nichtlineare Funktionalanalysis*, Springer Verlag, 1. Auflage, Heidelberg, 2004.
- [57] J. SCHÖBERL, *Numerical Methods for Maxwell Equations*, Vorlesungsskriptum, 2009, <http://www.asc.tuwien.ac.at/~schoeberl/wiki/lva/notes/maxwell.pdf>, aufgerufen am: 19.04.2015, 23:40.
- [58] L. R. SCOTT, S. ZHANG, *Finite element interpolation of nonsmooth functions satisfying boundary conditions*, Math. Comp., 54 (1990), 483–493.

- [59] M. SERMANGE, R. TEMAM, *Some mathematical questions related to the MHD equations*, Comm. Pure Appl. Math., 36 (1983), 635–664.
- [60] R. TEMAM, *Navier-Stokes Equations and Nonlinear Functional Analysis*, SIAM, 2. Auflage, 1995.
- [61] R. VERFÜRTH, *Numerische Strömungsmechanik*, Vorlesungsskript, Wintersemester 1998/1999, <http://www.ruhr-uni-bochum.de/num1/files/lectures/SM.pdf>, aufgerufen am: 11.08.2015, 21:03.
- [62] B. WACKER, *Stabilisierte Finite-Elemente-Approximation der Maxwell-Gleichung*, Bachelorarbeit, Georg-August-Universität Göttingen, 2010.
- [63] B. WACKER, *Theoretische und numerische Untersuchungen eines Turbulenzmodells nach Vreman*, Masterarbeit, Georg-August-Universität Göttingen, 2012.
- [64] B. WACKER, D. ARNDT, G. LUBE, *Nodal-based finite element methods with local projection stabilization for linearized incompressible magnetohydrodynamics*, submitted to: Comp. Meth. Appl. Mech. Engin., 2015.
- [65] B. WACKER, G. LUBE, *A local projection stabilization FEM for the linearized stationary MHD problem*, Proceed. ENUMATH 2013, Springer LNCSE, 765–774, 2015.
- [66] E. ZEIDLER, L.F. BORON, *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications. II/A: Linear monotone operators*, Springer, New York, 1989.

Lebenslauf

M.Sc. Benjamin Wacker

Persönliche Daten

Geschlecht: Männlich
Geburtsdatum: 08. Januar 1987
Geburtsort: Verden/Aller
Staatsangehörigkeit: Deutsch

Kontaktdaten

Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
Adresse: Georg-August-Universität Göttingen
Lotzestr. 16-18
37083 Göttingen
Telefon: +49/0551/395022
E-Mail: b.wacker@math.uni-goettingen.de

Bildungsweg

06.2012 - 10.2015: Promotionsstudium der Mathematik an der
Georg-August-Universität Göttingen,
Betreuer: Prof. Dr. Gert Lube
10.2010 - 06.2012: M.Sc-Studium der Mathematik an der Georg-August-Universität
Göttingen, Betreuer: Prof. Dr. Gert Lube
10.2007 - 09.2010: B.Sc-Studium der Mathematik an der Georg-August-Universität
Göttingen, Betreuer: Prof. Dr. Gert Lube
10.2006 - 09.2007: B.Sc-Studium der Chemie an der Georg-August-Universität
Göttingen, ohne Abschluss
08.1999 - 06.2006: Allgemeine Hochschulreife am Gymnasium Syke

Lehrtätigkeiten und praktische Tätigkeiten

04.2015 - 09.2015:	Wissenschaftliche Hilfskraft zur Übungsgruppenbetreuung der Vorlesung "Numerische Mathematik II"
10.2014 - 03.2015:	Wissenschaftliche Hilfskraft zur Übungsgruppenbetreuung der Vorlesung "Numerische Mathematik I"
04.2014 - 09.2014:	Wissenschaftliche Hilfskraft zur Übungsgruppenbetreuung der Vorlesung "Mathematik für Informatikanfänger II"
10.2013 - 03.2014:	Wissenschaftliche Hilfskraft zur Übungsgruppenbetreuung der Vorlesung "Mathematik für Informatikanfänger I"
04.2013 - 09.2013:	Wissenschaftliche Hilfskraft zur Übungsgruppenbetreuung der Vorlesung "Mathematik für Informatikanfänger II"
10.2012 - 03.2013:	Wissenschaftliche Hilfskraft zur Übungsgruppenbetreuung der Vorlesung "Mathematik für Informatikanfänger I"
10.2011 - 03.2012:	Studentische Hilfskraft zur Implementation eines Turbulenzmodelles am Institut für Numerische und Angewandte Mathematik der Georg-August-Universität Göttingen
04.2011 - 09.2011:	Studentische Hilfskraft zur Übungsgruppenbetreuung der Vorlesung "Funktionalanalysis"
10.2010 - 03.2011:	Studentische Hilfskraft zur Übungsgruppenbetreuung der Vorlesung "Theorie partieller Differentialgleichungen"
10.2009 - 03.2010:	Studentische Hilfskraft zur Übungsgruppenbetreuung der Vorlesung "Differential- und Integralrechnung I"

Besuchte Konferenzen und Workshops

04.2015:	Workshop über numerische Methoden bei Grenzschichtproblemen, TU Dresden, Deutschland, eigener Vortrag
08.2013:	ENUMATH Konferenz, EPFL Lausanne, Schweiz, eigener Vortrag
10.2012:	Workshop des Graduiertenkollegs 1023, Goslar, Deutschland, eigener Vortrag
06.2012:	Workshop über variationelle Multiskalenmethoden, CAU Kiel, Deutschland, eigener Vortrag

Publikationen

1. B. WACKER, G. LUBE, *A local projection stabilization FEM for the linearized stationary MHD problem*, Proceed. ENUMATH 2013, Springer LNCSE, 765–774, 2015.
 2. B. WACKER, D. ARNDT, G. LUBE, *Nodal-based finite element methods with local projection stabilization for linearized incompressible magnetohydrodynamics*, submitted to: Comp. Meth. Appl. Mech. Engin., 2015.
 3. U. KAYA, B. WACKER, G. LUBE, *A nodal-based stabilization Finite Element Method for the Induction Equation*, submitted to: Math. Meth. in Appl. Sc., 2015.
-