INDIVIDUELLE CURRICULA VON LEHRKRÄFTEN IN DER ALGEBRA

Dissertation

zur Erlangung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Doktorgrades
„Doctor rerum naturalium“
der Georg-August-Universität Göttingen

im Promotionsprogramm „PhD School of Mathematical Sciences“ (SMS)
der Georg-August-University School of Science (GAUSS)

vorgelegt von
Julia Meinke
aus Ludwigslust

Göttingen, 2016

Betreuungsausschuss

Prof. Dr. Stefan Halverscheid, Mathematisches Institut, Georg-August-Universität Göttingen
Prof. Dr. Ina Kersten, Mathematisches Institut, Georg-August-Universität Göttingen
Prof. Dr. Andreas Eichler, Mathematik und Naturwissenschaften, Didaktik der Mathematik, Universität Kassel

Mitglieder der Prüfungskommission

Referent: Prof. Dr. Stefan Halverscheid, Mathematisches Institut, Georg-August-Universität Göttingen
Korreferentin: Prof. Dr. Ina Kersten, Mathematisches Institut, Georg-August-Universität Göttingen
Korreferent: Prof. Dr. Andreas Eichler, Universität Kassel

Weitere Mitglieder der Prüfungskommission

Prof. Dr. Max Wardetzky, Institut für Numerische und Angewandte Mathematik, Georg-August-Universität Göttingen
Prof. Dr. Dorothea Bahns, Mathematisches Institut, Georg-August-Universität Göttingen
Prof. Dr. Eckart Modrow, Institut für Informatik, Georg-August-Universität Göttingen

Tag der mündlichen Prüfung: **16.06.2016**

Inhaltsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Abkürzungsverzeichnis

SuS	Schülerinnen und Schüler
LuL	Lehrerinnen und Lehrer
Z-M-A	Ziel-Mittel-Argumentation
FST	Forschungsprogramm Subjektive Theorien
CAS	Computer-Algebra-System
GTR	Graphikfähiger Taschenrechner

In dieser Arbeit wird sich um eine Schreibweise bemüht, die geschlechtsspezifische Unterschiede berücksichtigt. Aufgrund der Lesbarkeit oder weil es sich um gängige Fachbegriffe, wie zum Beispiel „Schülerorientierung“ handelt, wird auf diese Unterscheidung jedoch verzichtet. Grundsätzlich sind in solchen Fällen aber immer beide Geschlechter bedacht.

1. Einleitung

„Menschen, die von der Algebra nichts wissen, können sich auch nicht die wunderbaren Dinge vorstellen, zu denen man mit Hilfe der genannten Wissenschaft gelangen kann.“ (Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646-1716)[1]

Dieses Zitat drückt die Leidenschaft von Leibniz für die Algebra aus, die sich vor allem auf die Möglichkeiten zu stützen scheint, welche dieselbe ihm eröffnet. Eine andere Perspektive, die vielleicht eher in den Klassenzimmern dieser Welt vorherrscht, könnte die Folgende sein:

„Du wolltest doch Algebra, da hast du den Salat.“ (Jules Verne, 1828-1905)[2]

Die Algebra ist vor allem wegen ihrer Charakteristik als elementar-algebraische Formelsprache der grundlegende Bestandteil der mathematischen Ausbildung in der Sekundarstufe I (Hefendehl-Hebeker & Rezat, 2015). Seitdem sich die mathematikdidaktische Forschung etabliert hat, sind zahlreiche Publikationen erschienen, die sich dem Lernen und der Vermittlung der Algebra widmen (Akinwunmi, 2012; Kieran, 1992, 2007). Dies überrascht wenig angesichts der Tatsache, dass die Algebra seit jeher ein zentraler Bestandteil der Schulcurricula ist und ihr Inhalt sowie ihre verständliche Vermittlung sehr berühmte Mathematiker, wie zum Beispiel Euler (1770) und Klein (1908)[3] schon seit mehr als einem Jahrhundert beschäftigt.
Die bestehende Forschung zur Algebra in der Sekundarstufe I kann den folgenden Bereichen zugeordnet werden[4]:

- Forschungen zum algebraischen Denken der Schülerinnen und Schüler:
    - Denkhürden im Umgang mit der Algebra (Berlin, 2011; Fischer, Hefendehl-Hebeker, & Prediger, 2010; Herscovics, 1989; Hoch & Dreyfus, 2006; Kieran, 2004a),
    - Operieren mit den Variablen (u.a. die mit ihnen verknüpften Grundvorstellungen) und der Formelsprache (Akinwunmi, 2012; Freudenthal, 1983; Macgregor & Stacey, 1997; Malle, 1993; Specht, 2009),
    - Umgang der Schülerinnen und Schüler mit den einzelnen Bereichen und Inhalten der Algebra (Kieran, 2004b, 2007),
    - Sinnstiftung in der Algebra (Bednarz & Janvier, 1996a; Bell, 1996b; Radford, 1996, 2010) und
    - Fehleranalysen (Malle, 1993; Tietze, 1988).
- Forschungen zum Algebraunterricht:
    - Umgang mit der Technologie im Unterricht (Drijvers, 2003; Heid, 1996; Kieran & Yerushalmy, 2004; Kieran, 2007; Thomas, Monaghan, & Pierce, 2004),
    - eine angemessene Propädeutik der Algebra (Berlin, 2011; Kaput, Carraher, & Blanton, 2008; Kieran, 2004a; Steinweg, 2013) und
    - die sinnstiftende Einführung der algebraischen Symbolsprache (Bell, 1996a; Freudenthal, 1983; Malle, 1993).

[1] Zum Beispiel zitiert in: (Staab, 2007).
[2] Zitiert aus „Reise um den Mond“, Kapitel 4 (Vernes, 1969).
[3] Die Originalquellen lagen in diesem Fall nicht vor, allerdings wurden Nachdrucke berücksichtigt, die im Literaturverzeichnis unter: (Euler, 1911; Klein, 1968) zu finden sind.
[4] Die Studien sind als Beispiele aus den jeweiligen Forschungsgebieten zu verstehen und dienen vielmehr der Illustration. Es wird kein Anspruch an Vollständigkeit erhoben.

Bei der Sichtung des Forschungsstandes fällt auf, dass die Lehrkraft als Forschungsgegenstand im Algebraunterricht wenig Beachtung findet. So konstatierte Kieran schon zu Beginn der 90er Jahre, dass es einen Missstand in der Beforschung der Frage gibt, wie Lehrkräfte Algebra unterrichten und welche Konzepte sie im Zusammenhang mit der Algebra besitzen: „[T]he research community knows very little about how algebra teachers teach algebra and what their conceptions are of their own students' learning" (Kieran, 1992, p. 395). Im Jahr 2007 erneuert sie diese Einschätzung und stellt fest, dass es zwar einen Zuwachs an Forschungen, die Lehrkräfte betreffend, gegeben hätte, aber dennoch nur wenig über das Lehren der Algebra bekannt ist. Zudem fehlt es an einer Verbindung zwischen den jeweiligen Forschungen zum Lehren und zum Lernen der Algebra (p. 739).
In verschiedenen Untersuchungen hat sich gezeigt, dass die individuellen Curricula der Lehrkräfte, als theoretisches Konstrukt, maßgeblichen Einfluss auf die Gestaltung des konkreten Unterrichts und damit auch auf das Lernen der Schülerinnen und Schüler nehmen. In den Bereichen der Stochastik, Arithmetik, Geometrie und Analysis gibt es bereits Studien zu den individuellen Curricula, die diesen Einfluss untermauern (Bräunling & Eichler, 2015; Eichler & Erens, 2015; Tietze, Klika, & Wolpers, 1997[5]). Dennoch fehlt es an Untersuchungen, die sich mit den individuellen Curricula der Lehrkräfte im Bereich der Algebra beschäftigen (Erens & Eichler, 2013).
Als individuelles Curriculum wird in Anlehnung an Eichler (2005), der sich zuerst mit den individuellen Curricula der Lehrkräfte im Bereich der Stochastik beschäftigte und damit diesen neuen Forschungsansatz begründete (Eichler & Erens, 2015), „die subjektive Auswahl von Inhalten und die damit verbundenen Ziele von Lehrerinnen und Lehrern" (Eichler, 2005, p. 6) verstanden. Auf diese subjektive Auswahl der Lehrkräfte wirken die Schülerinnen und Schüler in ihrem unterrichtlichen Verhalten sowie das Bild, das die Lehrkraft von ihren Schülerinnen und Schüler hat, ihr Selbstbild, ihre fachliche Kompetenz, ihre Überzeugungen zum Lernen und Lehren und dem Unterrichtsfach, ihre eigenen Unterrichtsziele und Erfahrungen sowie die institutionellen Gegebenheiten, wie der staatlich vorgegebene Lehrplan und zeitliche und organisatorische Ressourcen (Eichler, 2005,vgl. Kapitel 2.1). Eine Analyse der Überzeugungen der Lehrkräfte in Bezug auf diese Faktoren ermöglicht es, die kognitiven und affektiven Bestandteile des professionellen Lehrerhandelns besser zu verstehen, weil sie gerade die alltägliche Unterrichtsgestaltung beeinflussen (Calderhead, 1996).
Zudem gelten die Überzeugungen der Lehrkraft ihren Unterricht betreffend, die in Form der individuellen Curricula abgebildet werden können[6], in Bezug auf Veränderungsprozesse in ihrem Unterricht als entscheidend (Thompson, 1992; Wilson & Cooney, 2002).
Derartige Änderungen betreffen zum Beispiel Modifikationen des staatlichen Curriculums, wie zum Beispiel die Einführung des mindestens graphikfähigen Taschenrechners in den Mathematikunterricht (Niedersachsen, 2006)[7]. Darüber hinaus wurde im Zuge der Einführung der Bildungsstandards auf eine Output-Orientierung im Unterricht gesetzt (Klieme et al., 2003). Dies veränderte die Ziele und die Ausrichtung des Mathematikunterrichts, so dass mehr auf den Lernprozess und die Ergebnisse des Lernens gesetzt wurde und die Fachsystematik nicht mehr der entscheidende Faktor in der Gestaltung des Mathematikunterrichts sein sollte. In diesem Zusammenhang wurde postuliert, den Fokus im Unterricht von den inhaltsbezogenen Kompetenzen zu den allgemeinen mathematischen Kompetenzen hin zu verlagern (Kultusministerkonferenz, 2003). Dies hatte unmittelbare Folgen für den Mathematikunter-

[5] Tietze et al. (1997) sprechen noch nicht von individuellen Curricula, sondern von den Vorstellungen der Lehrkräfte. Dass die individuellen Curricula, so wie sie hier vorkommen aber auf der Arbeit Tietzes basieren, kann in Kapitel 2.1 nachgelesen werden.
[6] Dies ist zum Beispiel bei Bräunling & Eichler (2015) sichtbar. Die begrifflichen Zusammenhänge werden in Kapitel 2 erläutert.
[7] Diese Arbeit entsteht an einer niedersächsischen Universität und wird überwiegend mit an niedersächsischen Schulen unterrichtenden Lehrkräften durchgeführt. Daher liegt die Orientierung am niedersächsischen Kerncurriculum nahe.

richt im Allgemeinen und für den Algebraunterricht der einzelnen Lehrkräfte im Speziellen. Wie staatliche Curricula ihre Umsetzung in den konkreten Unterricht finden, entscheiden aber die Lehrkräfte, beeinflusst durch ihre jeweiligen individuellen Curricula[8] (Stein, Remillard, & Smith, 2007).
Die Notwendigkeit, die individuellen Curricula der Lehrkräfte zu erforschen, ergibt sich dementsprechend aus zwei Gründen:

- Sie stellen die Brücke zwischen dem staatlich überlegten und didaktisch geprägten Curriculum und der individuellen Unterrichtsgestaltung durch die Lehrkräfte her.
- Sie helfen, die Lehrkräfte und ihr professionelles Lehrerhandeln zu verstehen.

Weiterhin konnten durch Eichler und die durch ihn angestoßene Forschung die bereits mehrfach thematisierte Vermutung (Franke, Kazemi, & Battey, 2007; Törner, 2002) nach der Bereichsspezifität der Überzeugungen der Lehrkräfte je nach mathematischer Domäne untermauert werden (Eichler & Erens, 2015). Beispiele für diese Untersuchungen sind die von Girnat (2009, 2016) durchgeführte Analyse der individuellen Curricula der Lehrkräfte im Geometrieunterricht, die von Bräunling (2016) zu den Beliefs der Lehrkräfte in der Arithmetik (Bräunling & Eichler, 2015) oder die Studie von Erens zu den individuellen Curricula der Lehrkräfte in der Analysis (Erens & Eichler, 2013).
Dadurch wurde zum Beispiel festgestellt, dass die individuellen Curricula der Lehrkräfte in der Stochastik eher durch einen Anwendungsbezug geprägt sind, während diese in der Geometrie eher prozessorientiert sind (Eichler & Erens, 2015). Die Herausarbeitung und der Vergleich der domänenspezifischen individuellen Curricula von Lehrkräften gilt als fruchtbar, um einerseits die Unterschiede und Gemeinsamkeiten zwischen den domänenspezifischen individuellen Curricula zu verdeutlichen und um andererseits zur Beforschung der Gefühle und Kognitionen der Lehrkräfte in der Verbindung mit der Mathematik beizutragen (Eichler & Erens, 2015; Eichler, 2005).
Somit resultiert das Forschungsdesiderat die individuellen Curricula von Lehrkräften in der Algebra zu untersuchen, aufgrund der folgenden Punkte:

- Entscheidungen sowie die Art der Sinnstiftung der Lehrkräfte und ihr professionelles Lehrerhandeln in der Algebra zu verstehen,
- die individuelle Unterrichtsplanung der Lehrkräfte in der Algebra (unter Rückbezug auf die staatlichen/curricularen Vorgaben) zu rekonstruieren und
- die Lücke in der Erforschung der bereichsspezifischen individuellen Curricula der Lehrkräfte im Mathematikunterricht durch die Erforschung dieser in der Algebra zu schließen.

Diese Forschungsdesiderate zu schließen, ist das Ziel der vorliegenden Untersuchung. Zu diesem Zweck wird zunächst der theoretische Rahmen in den Kapiteln 2 und 3 dargelegt. Dazu gehören die begriffliche und thematische Einordnung des Begriffs der individuellen Curricula in die nationale und internationale fachdidaktische Forschung (Kapitel 2). Darüber hinaus werden die unterrichtsnahen Erkenntnisse aus der algebradidaktischen Forschung dargestellt, um einerseits die zu untersuchenden Algebra-relevanten Inhalte herauszuarbeiten und um andererseits die Begriffe und die Ergebnisse der Studie besser einordnen zu können (Kapitel 3).
Wird in dieser Arbeit von Algebra gesprochen, so sind damit die algebraischen Inhalte der Schulmathematik in der Sekundarstufe I gemeint. Malle (1993) bricht diese auf den Umgang mit Variablen, Termen und Formeln herunter. Gemäß des in Niedersachsen geltenden Kerncurriculums sollen die Schülerinnen und Schüler bis zum Ende der Klassenstufe 8 mit diesen Inhalten vertraut sein. Da gerade die Einführung der symbolischen Sprache eine Her-

[8] Stein et al. (2007) sprechen von „intended curricula“ anstelle von individuellen Curricula. Die begriffliche Verbindung zwischen diesen Begriffen wird in Kapitel 2.2 hergestellt.

ausforderung darstellt (Hefendehl-Hebeker & Rezat, 2015), wird der Fokus in dieser Untersuchung auf die Algebra in den Klassenstufen 7 und 8 gelegt[9].
Zusammenfassend werden dann in Kapitel 4 die untersuchungsleitenden Forschungsfragen expliziert.
Die methodischen Überlegungen zur Rekonstruktion der individuellen Curricula werden in Kapitel 5 dargestellt. In diesem Zusammenhang wird das Untersuchungsdesign der Interviewstudie vorgestellt, die mit neun Lehrkräften durchgeführt worden ist und durch die das Datenmaterial für die Analyse bereitgestellt wird.
Daran anschließend werden in Kapitel 6 die Ergebnisse der Untersuchung fallspezifisch dargelegt.
Eine Typisierung der untersuchten Fälle, bei der diese gegeneinander in verschiedenen Stufen kontrastiert werden, erfolgt in Kapitel 7.
Abschließend werden Resultate aus den verschiedenen Untersuchungen zu individuellen Curricula mit den Ergebnissen dieser Untersuchung in Kapitel 8 verglichen.
Die Diskussion der Ergebnisse erfolgt in Kapitel 9. Die Forschungsfragen werden vor dem Hintergrund der empirischen Ergebnisse dieser Untersuchung beantwortet und den in den Kapiteln 2 und 3 erarbeiteten theoretischen Überlegungen gegenübergestellt.
Abschließend wird ebenfalls in Kapitel 9 ein Rück- und Ausblick über die Forschungsziele und -ergebnisse der Untersuchung gegeben.

[9] Das bedeutet insbesondere, dass die Oberstufe in dieser Untersuchung keine Berücksichtigung findet.

2. Individuelle Curricula

Zur Einordnung der verwendeten Begriffe, die den theoretischen Rahmen der Arbeit kennzeichnen, wird der durch Eichler (2005) entwickelte Forschungsansatz zur Untersuchung der individuellen Curricula, der in dieser Untersuchung auf die algebraspezifischen Entscheidungen der Lehrkräfte in Bezug auf ihr Unterrichtshandeln angewendet wird, zunächst in seiner Genese beschrieben. Im Zentrum dessen steht die Herausarbeitung des Verhältnisses von „curricularen Begründungsmustern“, „individuellen Curricula“, „subjektiven Theorien“ und „Ziel-Mittel-Argumentationen“.
Im weiteren Verlauf werden die im Zuge der Internationalisierung (vgl. Kapitel 2.2) erweiterten Begrifflichkeiten erklärt und die entsprechenden für diese Arbeit getroffenen Annahmen und Begrifflichkeiten zusammengefasst. Näher beleuchtet wird in diesem Zusammenhang die Einbettung des Begriffs der individuellen Curricula in die Belief-Forschung. Dabei wird sich eng an die inhaltlichen Erweiterungen des Forschungsansatzes gehalten. Das Forschungsfeld der „Beliefs“ ist als Bereich der mathematikdidaktischen Forschung sehr heterogen, weshalb eine klare Verwendung der Begrifflichkeiten notwendig ist (Pajares, 1992; Thompson, 1992).

2.1. Ursprung individueller Curricula

Ziel der qualitativen Untersuchung Eichlers (2005) zu den individuellen Curricula der Lehrkräfte im Bereich der Stochastik war die Erklärung der Diskrepanz zwischen dem, was formal, entweder zum Beispiel staatlich und/oder didaktisch, als im Stochastikunterricht zu behandelnd überlegt worden ist und dem, wie die einzelnen Lehrkräfte im tatsächlichen Stochastikunterricht agieren. Dabei wird die Lehrkraft als entscheidender Faktor sowohl für die Umsetzung staatlich vorgegebener Curricula in den konkreten und real durchgeführten Unterricht sowie für die Gestaltung dessen gesehen (Eichler, 2005):

> “Die Lehrerinnen und Lehrer, ihre Vorstellungen zum Stochastikunterricht bzw. deren individuell ausgeprägten Stochastikcurricula stehen daher im Zentrum dieser Studie. Deren Ziel ist damit die Erforschung des realen Stochastikunterrichts aus der Sicht der Lehrerinnen und Lehrer, die über die Identifizierung allgemeiner Ziele hinaus die detaillierte Struktur der individuellen Curricula aufzeigen soll, um die Diskrepanz zwischen der weit entwickelten didaktischen Theorie und der mangelnden Erforschung der realen Schulpraxis zu verringern“ (p. 5).

Begründet wird dies unter anderem durch die Annahme, die Calderhead (1996) wie folgt formuliert:

> „How teachers make sense of their professional world, the knowledge and beliefs they bring with them to the task, and how teachers’ understanding of teaching and learning, children, and the subject matter informs their everyday practice are important questions that necessitate an investigation of the cognitive and affective aspects of teachers’ professional lives“ (p. 709)[10].

Das Zitat verdeutlicht, dass es um das Verstehen der kognitiven und affektiven Seiten des Berufslebens der Lehrkräfte geht.
Darüber hinaus wird das Denken der Lehrkräfte als entscheidend angesehen, wenn Veränderungsprozesse im Unterricht angestrebt werden, zum Beispiel also die Frage danach, inwiefern Rahmenpläne in den Unterricht integriert werden (Eichler, 2005).

[10] Der Begriff „Beliefs“ taucht in diesem Zusammenhang auf, wird aber erst in Abschnitt 2.2 erklärend aufgegriffen.

Individuelle Curricula werden nach Eichler (2005) als Gesamtheit der subjektiven Überlegungen der Lehrkräfte in Bezug auf die Auswahl und Begründung des Stoffinhalts verstanden.

Die Begründungen hängen mit den durch die Lehrkräfte verfolgten Zielen zusammen, die bei der Auswahl leitend sind. Begrifflich entlehnt ist der Ausdruck von Vollstädt et al. (1999), die ein Modell für die Implementierung von staatlich vorgegebenen Lehrplänen in den Schulalltag entwickelt haben (vgl. Abschnitt 2.2).
Eingebettet werden die individuellen Curricula in die Theorie Tietzes (1990) zu den curricularen Begründungsmustern. Diese werden definiert als:

> „[A]lle Überlegungen und Festlegungen, die sich auf die Erstellung einer Unterrichtssequenz oder eines curricularen Entwurfs beziehen. Zu ihrer Beschreibung gehört die Erfassung bzw. Rekonstruktion wichtiger diesen Prozeß beeinflussender Kognitionen des Lehrers (...) wie Ziele, Präferenzen, Ziel-Mittel-Überlegungen und Subjektive Theorien" (Tietze, 1990, p. 206).

Die genannten Kognitionen betreffen die Bereiche:

- das Bild der Lehrkraft von Mathematik und auf spezifische Bereiche der Mathematik,
- das Lernen und die Lernprozesse der Schülerinnen und Schüler,
- das Selbstbild der Lehrkraft, wie sie sich versteht, ihre professionellen Ziele und ihre Interessen,
- die gegebenen Rahmenbedingungen und
- die Vorstellungen zur inhaltlichen Auswahl (Tietze, 1990).

Eichler passt diese Definition insofern an, als er die individuellen Curricula zwar aus Faktoren aus diesen Bereichen zusammenfügt, diese aber wirklich nur relevant werden, wenn sie mit der Stoffauswahl und deren Zielen zusammenhängen. Insofern werden bei Eichler (2005) die folgenden Kognitionen als entscheidende Einflussfaktoren festgelegt, die auf die individuellen Curricula von Lehrkräften wirken:

- der Stoffinhalt,
- die Ziele des Mathematikcurriculums,
- die Ziele des (in diesem Fall) Algebracurriculums,
- das Lernen der Schülerinnen und Schüler (im Sinne des Nutzens für die Schülerinnen und Schüler) und
- das Lehren von Mathematik (p. 143).

Die Bereiche der gegebenen Rahmenbedingungen und das Bild der Lehrkraft von Mathematik, die Tietze benennt, haben auch bei Eichler einen Einfluss auf die individuellen Curricula der Lehrkräfte[11]. Sie werden aber nicht explizit in Form von Ziel-Mittel-Argumentationen (Z-M-A) dargestellt. Vielmehr fließen die institutionellen Rahmenbedingungen unter der Bedingung der Einflussnahme auf die Auswahl der Unterrichtsziele und Mittel unterstützend mit in die Ziel-Mittel-Argumentationen ein (Eichler, 2005). Dies ist vor allem dann relevant, wenn es zu Widersprüchen zwischen den subjektiven Theorien der Lehrkräfte in Bezug auf beispielsweise die Ziele des Mathematikcurriculums und den curricularen Vorgaben kommt (Clark & Peterson, 1984), da der Umgang mit den Widersprüchen Rückschlüsse auf die Priorisierung der Zielsetzungen der Lehrkräfte zulassen kann.

[11] Eichler leitet die Komponenten, die Einfluss auf die individuellen Curricula nehmen, einerseits aus den Ausführungen Tietzes zu den curricularen Begründungsmustern und andererseits aus dem klassischen didaktischen Dreieck (Eichler, 2005; Tietze et al., 2000) ab. Daraus wird der Stellenwert der institutionellen Rahmenbedingungen als Einflussfaktor auf die individuellen Curricula deutlich ersichtlich.

Das Bild, das die jeweilige Lehrkraft von der Mathematik hält, trägt zur Typisierung der individuellen Curricula bei (Eichler, 2005)[12], die auch in dieser Untersuchung vorgenommen wird (vgl. Kapitel 7). Darüber hinaus fließt das Bild der Mathematik indirekt in die Ziel-Mittel-Argumentation zu den Zielen des Mathematikcurriculums ein.
Auf diese Weise sind die konstituierenden Bestandteile der individuellen Curricula eingegrenzt. Einschränkend wird angemerkt, dass die individuellen Curricula durch diese Faktoren nicht vollständig abgebildet werden können. Es wird aber angenommen, dass die betreffenden Bereiche den wesentlichen Bestandteil der individuellen Curricula ausmachen (Eichler, 2005).

Die Kognitionen der Lehrkräfte zu den folgenden Leitkategorien werden als wesentliche Bestandteile der individuellen Curricula der Lehrkräfte in der Algebra betrachtet: der Stoffinhalt, die Ziele des Mathematikcurriculums, die Ziele des Algebracurriculums, das Lehren von Mathematik und das Lernen der Schülerinnen und Schüler.

Eine weitere Annahme bezieht sich auf die Beobachtbarkeit individueller Curricula. Die Planung von Unterricht und die Handlungsebene der Lehrkräfte sind nicht direkt beobachtbar (vgl. dazu Kapitel 5.1). Sie sind subjektiv durch die jeweilige Lehrkraft geprägt, daher muss eine Perspektivübernahme vom Forschenden auf die Lehrkräfte stattfinden, wenn ein Verstehen ihres Handelns angestrebt wird. Dieser Perspektive kann sich über zum Beispiel hermeneutische Verfahren angenähert werden. Zu diesem Zweck adaptiert Eichler das Konstrukt der subjektiven Theorien und das Forschungsprogramm Subjektive Theorien (FST)[13] (Eichler, 2005).

Subjektive Theorien werden als „relativ überdauerndes System von Kognitionen mit einer zumindest impliziten Argumentationsstruktur, die (...) die Funktion [sic] der Erklärung, Prognose und Technologie erfüllen“ (Eichler, 2005, p. 93) verstanden[14].

Diese enthalten in Anpassung an die individuellen Curricula die subjektiven Konzepte der Lehrkräfte in Form ihrer Ziele, die sie in Bezug auf die fünf Leitkategorien formulieren, die die individuellen Curricula konstituieren. Das bedeutet: die subjektiven Bedeutungszuweisungen in den Kategorien, die Definitionen der Ziele und auch die enthaltenen Beziehungen zwischen diesen Zielen (p. 114). Als spezielle Methode, die subjektiven Theorien darzustellen, wird sich aufgrund der Fokussierung auf die Unterrichtsziele für die aus dem FST entlehnte Ziel-Mittel-Argumentation entschieden[15] (p. 109). Diese werden zu jeder der fünf Leitkategorien erstellt.

Begrifflich lassen sich nun die folgenden Abhängigkeiten beschreiben: Den Rahmen bilden die curricularen Begründungsmuster, in die in einer engeren Definition die individuellen Curricula eingebettet worden sind. Diese werden als latente Konstrukte durch die subjektiven Theorien operationalisiert, die wiederum in Form der Ziel-Mittel-Argumentation auftreten.

Der Einsatz von Ziel-Mittel-Argumentationen setzt zudem voraus, dass Lehrkräfte tatsächlich zielgerichtet und vernunftbasiert handeln. Sie müssen in der Lage sein, einerseits Ziele zu formulieren und diese andererseits aktiv zu verfolgen, indem sie die Rahmenbedingungen zur Erreichung ihrer Ziele analysieren, geeignete Mittel auswählen, einen Plan zur Zielerreichung

[12] Siehe dazu auch Abschnitt 2.2.
[13] Nähere Erläuterungen sind in den Ausführungen zum methodischen Vorgehen in Abschnitt 5 zu finden.
[14] Der Begriff „Technologie“ ist im Sinn der Psychologie als handlungsleitendes Element zu verstehen. Das bedeutet, dass diese die Mittel enthält, um von den Voraussetzungen zu den Zielen zu gelangen (Groeben & Scheele, 2010; Groeben, 1981).
[15] Eichler leitet diesen Forschungsansatz sehr detailliert und ausführlich her. Auch Folgestudien wie zum Beispiel von Girnat (2016) erläutern dies. Da diesem Forschungsansatz in der vorliegenden Untersuchung gefolgt wird und unnötige Dopplungen vermieden werden sollen, wird sich hier auf die wesentlichen Annahmen und Folgerungen des Ansatzes beschränkt.

erstellen und daraus ihr konkretes Verhalten resultieren lassen. Clark und Peterson (1984) wiesen diese Eigenschaften bei Lehrkräften nach. Sie halten fest:

> „The image of a teacher as a reflective professional (...) is not far-fetched. Teachers do plan in a rich variety of ways, and these plans have real consequences in the classroom. Teachers make decisions frequently (...). [They] have theories and belief systems that influence their perceptions, plans, and actions“ (p. 125).

Die Forschung Eichlers brachte unter anderem vier Typen von individuellen Stochastik-Curricula hervor und die Erkenntnis, dass ein neues Forschungsinstrument gewonnen worden ist, mit dessen Hilfe sich die fachspezifischen Überzeugungen der Lehrkräfte, die Planungen ihren konkreten Unterricht betreffend, darstellen lassen (Eichler, 2005). Er formuliert am Ende seiner Arbeit unter anderem die folgenden zwei Forschungsdesiderate:

- die Rekonstruktion der subjektiven Theorien in den anderen mathematischen Teildisziplinen, um fachspezifische Ausprägungen zu vergleichen und
- die Einbettung des neu geschaffenen Forschungsansatzes in die angelsächsische Belief-Forschung (p. 362).

Dem Desiderat der Rekonstruktion der subjektiven Theorien in den Teildisziplinen: Arithmetik, Geometrie und Analysis ist bereits nachgekommen worden (vgl. Kapitel 2.2, 2.3, 8). Die Analyse der individuellen Curricula im Bereich der Algebra wird in dieser Untersuchung durchgeführt und rundet so das Bild der verschiedenen mathematischen Teildisziplinen ab.
Den Grundstein, um das zweite Desiderat zu schließen, legt Eichler selbst. Dies wird im folgenden Abschnitt beschrieben (vgl. Kapitel 2.2).

2.2. Einbettung in die Belief-Forschung

Die Belief-Forschung ist ein sehr komplexes und divergentes Forschungsfeld (Fives & Buehl, 2012; Pajares, 1992; Skott, 2015a). An diesem Punkt der Ausarbeitung soll der Fokus auf die Genese und die Annahmen des Forschungsansatzes von Eichler gelegt werden. Eine differenziertere, kritische Auseinandersetzung mit dem Belief-Begriff und den damit verbundenen Annahmen auch in Bezug auf die angewandten Kriterien erfolgt in Abschnitt 2.4.

Die Grundlage für die Einbettung in die Belief-Forschung legt Eichler (2006b) selbst, indem er die individuellen Curricula den *teachers' beliefs* zuordnet (p. 146) und seinen Forschungsansatz, mit Hilfe des FST die individuellen Curricula domänenspezifisch zu rekonstruieren, als „approach to the research on teachers' beliefs which is based on a psychological framework" (Eichler, 2006a, p. 5) bezeichnet.

Teachers' Beliefs umfassen in einem allgemeinen Verständnis alle Einstellungen der Lehrkräfte, die das Lehren, Lernen, die Schülerinnen und Schüler und die Schule betreffen (Pajares, 1992; Thompson, 1992). In diesem Zusammenhang werden die mit der Belief-Forschung verbundenen Begriffe nicht trennscharf verwendet, wie zum Beispiel: Konzepte, Überzeugungen, persönliche Theorien, Einstellungen, etc. (Pajares, 1992; Thompson, 1992; Voss, et al., 2011). Aus diesem Grund soll das Verständnis der Beliefs, das den jeweiligen Studien zugrunde liegt, klar herausgestellt werden (Thompson, 1992).

Thompson (1992) führt zum Beispiel den Begriff der „concepts" ein, der im Folgenden durch das Wort „Konzepte" übersetzt wird. Dieser ist allgemeiner gefasst als der Begriff der Beliefs und umfasst unter anderem die Beliefs der Lehrkräfte über das Lehren und Lernen der Mathematik, wobei sie selbst sagt, dass die Unterscheidung zwischen Konzepten und Beliefs nicht unmittelbar notwendig ist, ihr aber die Verwendung des Begriffs der Konzepte natürlicher erscheint (p. 130). Sie definiert diese als: „What a teacher considers to be desirable goals of the mathematics program, his or her own role in teaching, the students' role, appropriate classroom activities, desirable instructional approaches and emphases, legitimate mathematical procedures, and acceptable outcomes" (1992, p. 135)[16]. Eichler (2006b) verweist auf diese Definition, die der Beschreibung der individuellen Curricula sehr ähnlich ist.

Weiterhin zeigt er drei Parallelen auf, die zwischen den individuellen Curricula und der Belief-Forschung bestehen[17]:

- Beliefs umfassen das subjektive Wissen eines Individuums einen bestimmten Gegenstand betreffend, einschließlich einer affektiven Komponente (Furinghetti & Pehkonen, 2002; Pehkonen, 1994).
- Beliefs sind nicht direkt beobachtbar (Leder & Forgasz, 2002; Pajares, 1992), haben aber einen Einfluss auf das beobachtbare Verhalten (Furinghetti & Pehkonen, 2002).
- Beliefs sind relativ stabil, insofern keine signifikanten Interventionen stattfinden (Cooney, et al., 1998; Fives & Buehl, 2012) und sie werden durch die eigene Sozialisation geprägt (Cooney et al., 1998).

Im gleichen Jahr beschreibt Eichler (2006a) die individuellen Curricula wie folgt: „In the planning of their classroom practice, individual curricula are understood as teachers' belief systems, within which ‚knowledge and beliefs are inextricably intertwined'[18]" (Eichler, 2006a, p. 2). Hierdurch wird einerseits die Betonung der Planungskomponente von Unterricht deutlich, die sich im Zug der Internationalisierung verstärkt hat. Andererseits taucht der Be-

[16] Auch in späteren Auseinandersetzungen wird die Definition Thompsons als Charakterisierung von Beliefs angenommen (Furinghetti & Pehkonen, 2002).

[17] Da es nicht „die" Belief-Forschung gibt, benennt er diese drei Aspekte als verbindende Elemente der Belief-Forschung.

[18] Eichler zitiert hier (Pajares, 1992, p. 325).

griff „belief system“ auf. Beide Begriffe stellen eine Erweiterung dar, die der Erläuterung bedürfen.
In Bezug auf die Planungskomponente des Unterrichts, unter welche die individuellen Curricula in dieser Definition subsummiert werden, wird zunächst auf den begrifflichen Ursprung der individuellen Curricula bei Vollstädt et al. (1999) verwiesen. Dieser entwickelte das folgende fünfstufige Modell zur Implementierung staatlich vorgegebener Curricula:

Gesellschaft (bildungspolitische Entscheidungen)

↓

staatliche Lehrpläne (grundlegende Bildungsziele, offizieller Lehrplan)

↓

Lehrerinnen und Lehrer (Verknüpfung von individuellen Erfahrungen, Ansprüchen und Situationen - individuelle Interpretation des Lehrplans)

↓

Lehren und Lernen im Unterricht (reale Lehr/Lernprozesse)

↓

Individuelle Lernergebnisse der Schülerinnen und Schüler

Abbildung 1: Konkretionsformen des Lehrplans nach Vollstädt et al. (1999)

Hierin ist erkennbar, dass die Lehrkräfte durch ihre individuelle Interpretation der vorgegebenen Rahmenrichtlinien, die durch ihre Erfahrungen und individuellen Einschätzungen geprägt sind, die Schnittstelle sind, an der sich entscheidet, wie der reale Unterricht gestaltet wird. Vollstädt et al. (1999) stellen fest, dass die alltägliche Bedeutung der staatlichen Curricula für den alltäglichen Unterricht gering ist. Die

> „Lehrpläne treffen auf eine Lehrerschaft, die wissenschaftlich ausgebildet ist, in der Regel über langjährige praktische Erfahrung verfügt und die grundlegenden Vermittlungsstrategien der jeweiligen Unterrichtsfächer beherrscht. (...) Vor diesem Hintergrund sehen sie sich sehr gut in der Lage, den erforderlichen unterrichtlichen Qualitätsstandard zu sichern, in der Regel auch unabhängig von staatlichen Vorgaben in Lehrplänen. Mehrmals wurde uns bestätigt (...) daß ohne Lehrpläne auch kein anderer Unterricht stattfinden würde" (p. 215).

Dies passt zu den von Eichler getroffenen Annahmen, dass individuelle Curricula das Ergebnis des Sozialisationsprozesses (speziell in Bezug auf die Lehrerbildung) und damit auch der im Unterricht gemachten Erfahrungen sind. Sie sind das Resultat einer zuvor stattgefundenen Sozialisation, beschreiben den aktuellen Planungsstand, der dann in der künftigen Lehre umgesetzt wird (Eichler, 2006a). Die staatlichen Lehrpläne scheinen dementsprechend nur ein bedingt einflussreicher Faktor auf die tatsächlichen Unterrichtsplanungen zu sein. Vielmehr haben die Beliefs der Lehrkräfte beispielsweise das Fach betreffend, die wiederum durch ihre Erfahrungen, Sozialisation und Wissen geprägt sind, einen Einfluss auf die Planungsentscheidungen des Unterrichts (Ernest, 1989).
Dieser Gedanke wird 2007 von Stein et al. aufgegriffen, die ein ähnliches Modell wie Vollstädt et al. entwarfen, das einen vierstufigen Transformationsprozess beschreibt, der mit dem

Vorhandensein institutionell vorgegebener Curricula (written curriculum) beginnt und bei dem Lernen der Schülerinnen und Schüler (student learning) endet[19]. Die Curricula umfassen in diesem Rahmen das staatliche Curriculum, die Materialien, Bücher und die schulinternen Curricula (written curriculum). Des Weiteren bezeichnen sie die intendierten Ziele der Lehrkraft (intended curriculum) und die im Klassenraum und im realen Unterricht umgesetzten Curricula (enacted curriculum) (Stein, et al., 2007). Das von Stein et al. entwickelte Modell beschreibt die Transformation der staatlichen Curricula wie folgt:

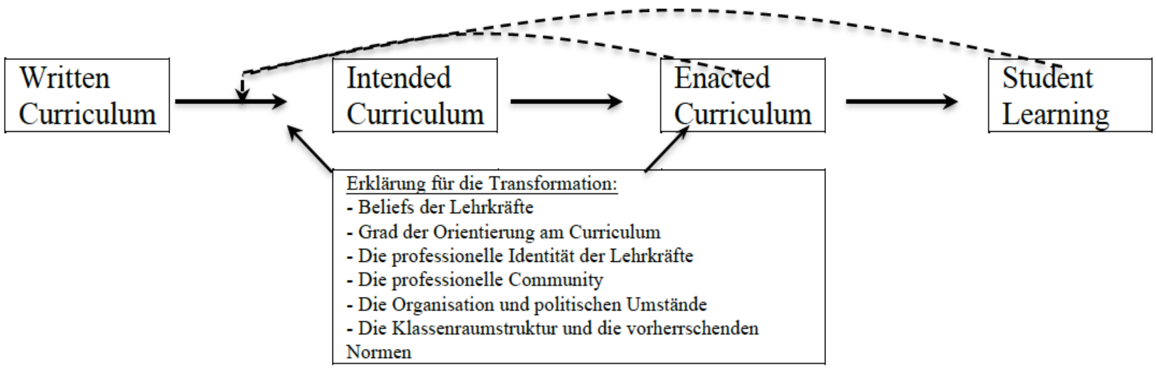


Abbildung 2: Phasen der Curricula nach Stein et al. (2007)

Die Lehrkräfte entscheiden, was auf welche Art unterrichtet wird (Ernest, 1989), entsprechend dem Zitat von Calderhead (vgl. Kapitel 2.1). Das ist die zentrale Annahme, die den Untersuchungen zu den individuellen Curricula zugrunde liegt.

Wird das Modell von Stein et al. in die Überlegungen zu diesen Untersuchungen einbezogen, so machen Stein et al. verschiedene Faktoren aus, die die Planungsentscheidungen der Lehrkräfte, das intendierte Curriculum, beeinflussen. Sie konstatieren, dass die am häufigsten im Kontext mit der Lehrkraft stehenden, untersuchten Faktoren sich mit den Beliefs von Lehrkräften zu der Mathematik als Ganzem, dem Lehren und Lernen, ihren Erfahrungen aus der eigenen Schulzeit und als Lehrkräfte sowie ihrem Wissen beschäftigen. Aber auch die Identität der Lehrkräfte und ihre jeweilige Orientierung an den vorhandenen Materialien sind entscheidend (Stein, et al., 2007). Dies unterstützt die durch Eichler vorgenommene Auswahl der Leitkategorien, nach denen die individuellen Curricula thematisch strukturiert werden (s. Abschnitt 2.1). Angenommen wird in diesem Kontext, dass die *intended curricula* und die sie konstituierenden Faktoren, die von der Lehrkraft gehalten werden, das Lernen der Schülerinnen und Schüler beeinflussen (Stein et al., 2007).

Darüber hinaus wird der durch Stein et al. (2007) festgelegte Begriff der *intended curricula* von nun an in den weiterführenden Studien zu den individuellen Curricula in der Arithmetik (Bräunling & Eichler, 2015) und der Analysis (Erens & Eichler, 2013) sinngleich für die individuellen Curricula verwendet[20]. Girnat und Eichler (2011) beschreiben dazu: „Intended curricula are the ‚blue prints' of individual curricula, that is, the teachers' instructional intentions whether they can be implemented in classroom practice exactly or not“ (p. 76).

[19] Die Modelle sind einander sehr ähnlich. Es werden dennoch beide Modelle aufgeführt, da das Modell von Vollstädt et al. zur ursprünglichen Begriffsdefinition der individuellen Curricula herangezogen worden ist (vgl. Kapitel 2.1) und das Modell von Stein et al. die Grundlage für die begriffliche Erweiterung darstellt.

[20] Dies betrifft vor allem angelsächsische Publikationen. In den deutschen Veröffentlichungen wird zum Beispiel von Bräunling zunächst von subjektiven Theorien (Bräunling, Eichler & Mischo, 2011) und später allgemeiner von den Beliefs der Lehrkräfte gesprochen (Bräunling, 2016). Erens spricht im Deutschen von den curricularen Überzeugungen der Lehrkräfte (Erens, 2013) und im Englischen von Teachers' Beliefs (Erens & Eichler, 2013) und auch Girnat spricht zunächst von den Lehrervorstellungen (Girnat, 2008) und später von den Beliefs der Lehrkräfte (Girnat & Eichler, 2011; Girnat, 2009).

Die vorgenommene Einordnung der *intended curricula* in den Belief-Kontext greift die Idee des Belief-Systems auf. Beliefs werden von den verschiedenen Forschenden in diesem Forschungsansatz einheitlich in Anlehnung an Pajares (1992) als ein individuelles Überzeugungssystem einen spezifischen Bereich betreffend definiert, das die Informationsaufnahme in diesem Bereich beeinflusst und damit auch das Handeln in bestimmten Situationen. Sie werden als eher überdauernd charakterisiert. Dabei helfen sie den Individuen Dingen, Situationen und Eindrücken eine Bedeutung zuzuweisen und diesen einen bestimmten Grad an Relevanz beizumessen (1992, p. 317). Darüber hinaus wird die kognitive Komponente der Beliefs betont (Franke et al., 2007; Thompson, 1992), die eine Fokussierung auf die Argumentationsstrukturen der Lehrkräfte ermöglicht (vgl. dazu auch Kapitel 2.4).
Im Zuge dessen wird angenommen, dass die Auswahl der Unterrichtsinhalte und ihre spezifischen Zielformulierungen die Beliefs der Lehrkräfte widerspiegeln, wie angemessen unterrichtet werden sollte. Da diese Überzeugungen verschiedene Komponenten enthalten (s. die verschiedenen Zieldimensionen), werden sie als Belief-System aufgefasst (Bräunling & Eichler, 2015; Eichler & Erens, 2015). Einheitlich werden Belief-Systeme über die folgenden Annahmen charakterisiert (Green, 1971; Rokeach, 1968):

- Es gibt eine Unterscheidung in zentrale und periphere Beliefs. Zentrale Beliefs haben eine größere Wichtigkeit für das Individuum.
- Zentrale Beliefs sind eher resistent gegenüber Veränderungen.

Weiterhin wird angenommen, dass Beliefs in Clustern bestehen, die in einem quasi-logischen System miteinander verbunden sind, wobei innerhalb eines Belief-Systems einander widersprechende Beliefs auftreten können und die Belief-Cluster nicht zwingend miteinander interagieren müssen (Green, 1971).
Erneut die getroffenen Voraussetzungen bestehender Forschung aufgreifend wird angenommen, dass die Belief-Systeme eine spezifische mathematische Domäne betreffend, in diesem Fall Algebra, konsistent sind (Bräunling & Eichler, 2015). Eine dritte Annahme Greens, die die Unterscheidung der Beliefs in primäre und sekundäre Beliefs[21] betrifft, wird verworfen, weil dafür nach Eichler und Erens (2015) keine empirische Evidenz gefunden werden konnte (p. 183).
Der zentrale Stellenwert der Zielvorstellungen in der Untersuchung der individuellen Curricula, wird im Hinblick auf Beliefs wie folgt begründet: Die Beliefs nehmen Einfluss darauf, wie spezifische Ziele formuliert und erreicht werden (Schoenfeld, 1998). Doch nicht nur die Zielerreichung wird durch Beliefs beeinflusst. Eichler und Erens (2015) berufen sich auf das Rubicon-Modell, wonach zunächst bestimmte Ziele durch eine Person definiert werden und anschließend über den Zeitpunkt und die Art der Realisierung dieser Ziele entschieden wird. Diese beiden Schritte, die vor dem Verhalten liegen, sind nicht direkt beobachtbar. Sie sind Bestandteil des Handelns[22]. Die dritte Phase beschreibt das beobachtbare Verhalten der Person zur Zielerreichung in Form der Umsetzung der zuvor erdachten Entscheidung. In einer letzten Phase erfolgt dann die Evaluation dessen, inwiefern das angestrebte Ziel erreicht werden konnte (Heckhausen & Gollwitzer, 1987). Dieser Argumentation folgend sind die in den individuellen Curricula enthaltenen Ziele eng mit den Beliefs der Lehrkraft verknüpft (Eichler & Erens, 2015).
Schließlich wird die Art der Ziele eng mit der Hierarchie der Beliefs verknüpft. Törner (2002) hierarchisiert Beliefs in drei Stufen:

[21] Im Original erfolgt die Unterscheidung in „primary“ und „derivative“ Beliefs (Green, 1971, p. 47).
[22] In der Terminologie des FST und damit dieser Studie wird ein Unterschied zwischen dem Handeln und dem Verhalten getroffen. Handlungen sind nicht direkt beobachtbar. Sie sind auf die Zielerreichung ausgelegt und werden als planvoll, intendiert und sinnhaft charakterisiert. Einfluss nehmen die individuellen Bedeutungszuschreibungen der handelnden Subjekte. Das Verhalten ist die beobachtbare Manifestierung der Handlungen (vgl. Abschnitt 5.1).

- Die globalen Beliefs umfassen das Lehren und Lernen von Mathematik, das Bild der Mathematik und die Entstehung mathematischen Wissens. Ihnen kommt der Status einer grundsätzlichen Philosophie zu. Es wird betont, dass es unmöglich ist, eine Unterscheidung zwischen einem Belief-System und den globalen Beliefs auszumachen.
- Die fachbezogenen Beliefs beziehen sich grundsätzlich auf alle mathematischen Begriffe, wobei jeder Begriff mit eigenen Beliefs versehen ist, also zum Beispiel die Multiplikation, Winkel, Funktionen, die binomischen Formeln, etc.
- Die domänenspezifischen Beliefs beschreiben die Charakteristika der Überzeugungen, die mit den einzelnen Bereichen assoziiert sind: Geometrie, Stochastik, Arithmetik und Algebra. Beispielhaft ist dafür, wenn jemand Angst vor der Algebra hat.

Die Einflussnahme dieser Arten von Beliefs aufeinander lässt sich wie folgt veranschaulichen (Törner, 2002):

<table><tr><td rowspan="3">Der Einfluss von oben nach unten</td><td rowspan="3">↓</td><td>Globale Beliefs</td><td rowspan="3">↑</td><td rowspan="3">Der Einfluss von unten nach oben</td></tr><tr><td>Domänenspezifische Beliefs</td></tr><tr><td>Fachbezogene Beliefs</td></tr></table>

Abbildung 3: Einflussnahme der Beliefs aufeinander nach Törner (2002)

Dies deckt sich mit der Charakterisierung Eichlers zu den verschiedenen Kategorien, zu denen die subjektiven Theorien entwickelt werden. Die subjektiven Theorien zu den Zielen des Mathematikunterrichts, dem Lernen der Schülerinnen und Schüler und dem Lehren von Mathematik betreffen demzufolge die globalen Beliefs. Die Ziele des Algebracurriculums und der Stoffinhalt bezeichnen die domänenspezifischen Beliefs und die je fachlichen Überzeugungen dazu, was zum Beispiel in der Algebra unter Variablen oder Termen verstanden wird, kann den fachbezogenen Beliefs zugeordnet werden.
Die globalen Beliefs werden in den Arbeiten von Eichler, Girnat, Bräunling und Erens in Anlehnung an Grigutsch, Raatz und Törner (1998) über die durch sie entwickelten Einstellungen gegenüber der Mathematik operationalisiert. Dazu gehören nach Grigutsch et al. (1998):

- die formalistische Sicht, die vor allem Wert auf die exakte, strenge und präzise Formulierung und Verwendung von Begriffen beim Argumentieren, Begründen und Beweisen legt,
- die anwendungsorientierte Sicht, bei der der praktische Nutzen der Mathematik für das Leben der Schülerinnen und Schüler betont wird, indem direkte Anwendungen aufgezeigt werden,
- die prozesshafte Sicht, bei der die Mathematik als Prozess verstanden wird und die Schülerinnen und Schüler Teil des Prozesses sind, indem sie eigene Ideen entwickeln, Dinge erfinden oder auch nach-erfinden und
- die schematische Sicht, die Mathematik als Werkzeugkasten versteht, bei der Algorithmen und Schemata durch zum Beispiel viel Übung gelernt und angewendet werden (p. 17f).

Diese globalen Beliefs zum Bild der Mathematik können als grobe Charakterisierungen gesehen werden, die aber durch die Herausarbeitung der individuellen Planungsgedanken der Lehrkräfte präzisiert werden. So werden die Argumentationsstrukturen der Lehrkräfte in der Formulierung und Begründung ihrer Unterrichtsziele als Strukturen hinter den globalen Beliefs verstanden, als „beliefs behind teachers’ beliefs“ (Eichler, 2006a, 2006b).
Wird schließlich noch einmal das Beispiel Törners zu den domänenspezifischen Beliefs aufgegriffen, bei der von der Angst vor der Algebra gesprochen wird, so wird klar, dass Beliefs eine affektive Komponente besitzen können. Die Einbeziehung der affektiven Komponente in

das Belief-Verständnis ist eine weitere zentrale Annahme, die in den Arbeiten zu den individuellen Curricula getroffen wird.
Sie umfasst nach Hannula (2012) die drei Aspekte: Kognition, Motivation und Emotion. Unter der Kognition wird der Umgang mit Informationen verstanden. Die Motivation lenkt das Verhalten in Form von Zielen und Auswahlmöglichkeiten und die Reaktion auf den Erfolg oder Misserfolg, der aus zielgerichtetem Verhalten resultiert, wird durch die Emotionen beschrieben (M. S. Hannula, 2012). Die Motivation gilt dabei als die zentrale Komponente (M. S. Hannula, 2015). Diesbezüglich fokussiert der Forschungsansatz der individuellen Curricula beziehungsweise der intendierten Curricula auf die Faktoren der Motivation und Kognition. Dies folgt daraus, dass zwar die Auswahl und Begründung von unterrichtlichen Inhalten verknüpft mit den unterrichtlichen Zielen (Motivation) und den damit verbundenen Kognitionen nicht aber die Reaktion der Lehrkräfte auf die Umsetzung ihrer Planungsideen und Planungsziele im Unterricht untersucht werden. In diesem Zusammenhang muss aber klar herausgestellt werden, dass die oft mit Kognitionen verbundene Komponente des Wissens nicht im Zentrum der Untersuchungen stehen. Das Wissen der Lehrkräfte ist zu keinem Zeitpunkt der Untersuchung ein separates Thema. Schoenfeld (1998) erläuterte die Trennung von Beliefs, Zielen und Wissen. In diesem Sinn verweisen Eichler und Erens darauf, dass die Komponente Wissen in ihrem Untersuchungsansatz keine zentrale Rolle spielt (Eichler & Erens, 2015).

2.3. Bisherige Ergebnisse

Neben der Untersuchung zu den individuellen Curricula der Lehrkräfte in der Stochastik wurden die Domänen der Geometrie (Girnat, 2016) und der Arithmetik (Bräunling, 2016) untersucht. Erens beforscht aktuell die individuellen Curricula von Lehrkräften in der Analysis (Erens & Eichler, 2013)[23].
Bisherige Erkenntnisse zeigen, dass es starke Evidenz dafür gibt, dass die individuellen Curricula der Lehrkräfte in Abhängigkeit der jeweiligen mathematischen Domäne variieren (Eichler & Erens, 2015; Girnat & Eichler, 2011). Die Untersuchungen Eichlers und Girnats weisen daraufhin, dass sich die Lehrkräfte in ihrer Unterrichtsplanung vornehmlich am jeweiligen Stoffinhalt orientieren und dabei domänenabhängig denken. Dies schlägt sich in der Auswahl der Aufgaben nieder. Sie konnten zeigen, dass zum Beispiel das Modellieren als übergreifendes Unterrichtskonzept wenig Anwendung findet, wohingegen aber in den einzelnen Domänen Stochastik und Geometrie anhand von konkreten Aufgaben (Finden eines geeigneten Urnenmodells oder Zerlegung einer Figur in bekannte Figuren) modelliert wird (Girnat & Eichler, 2011). Auch der Zugang zu den jeweiligen Domänen variiert. In der Stochastik wurde ein eher anwendungsorientierter Ansatz in den Überzeugungen der Lehrkräfte festgestellt, wohingegen die Anschauungen der Lehrkräfte in der Geometrie eher prozessorientiert und in der Analysis durch eine Mischung der anwendungsorientierten und der formalistischen Sicht geprägt sind[24] (Eichler & Erens, 2015).
Spezifische Ergebnisse von Bräunling und Girnat werden im Folgenden exemplarisch aufgezeigt[25].

[23] Die jeweiligen Untersuchungsdesigns variieren in diesem Zusammenhang, dennoch ist ein Vergleich der individuellen Curricula möglich, weil der gleiche theoretische Rahmen geteilt und die gleiche Frage nach der Rekonstruktion dieser gestellt wird (Girnat & Eichler, 2011).
[24] Törner verweist ebenfalls darauf, dass sich die Beliefs der Lehrkräfte in der Analysis unter anderem mit der Rolle der Logik, der Anwendung oder dem Grad an Exaktheit befassen und plädiert für die domänenspezifische Untersuchung der Beliefs (Törner, 2002).
[25] Diese Beispiele veranschaulichen die Art der erzielten Ergebnisse. Sie sind exemplarisch abgebildet, da ein detaillierterer Vergleich in Kapitel 6 dieser Arbeit vorgenommen wird.

Bräunling (2016) erarbeitete in einer Querschnittstudie die Arithmetik-spezifischen Beliefs der Lehrkräfte in der Grundschule und in der Sekundarstufe I und untersuchte durch eine Längsschnittstudie die Veränderbarkeit dieser Beliefs.
Sie stellt als Ergebnis ihrer Längsschnittstudie fest, dass die als zentral gekennzeichneten Beliefs eher resistent gegenüber Veränderungen sind, als die peripheren Beliefs
Darüber hinaus typisiert sie die Arithmetik-spezifischen Beliefs orientiert an den jeweiligen globalen Beliefs und kennzeichnet auf diese Weise die jeweils zentralen Beliefs der Lehrkräfte. Im Fall der Referendarinnen und Referendare macht sie drei Typen aus, die jeweils zentral durch die globalen Beliefs „Prozess“ (Typ I „Prozess durch Anwendung“), „Anwendung“ (Typ II „Reiner Anwender“) und durch eine Kombination aus „Schema“- und „Anwendungsorientierung“ (Typ III „Anwendung durch Schema“) gekennzeichnet sind. Sie ordnet diesen jeweils eine Lehr- und Lernorientierung zu. So sind die Typen I und II durch eine co-konstruktivistische[26] Lehr-/Lernorientierung gekennzeichnet und Typ III durch eine instruktive Lehr-/Lernorientierung. Sie fasst im Vergleich allgemein zusammen, dass:

- die Anwendung immer als zentrale Überzeugung gilt (bis auf eine Ausnahme),
- der Formalismus-Aspekt immer als periphere Überzeugung gilt (bis auf eine Ausnahme),
- der Prozess-Aspekt bei den Grundschullehrkräften eher zentral ist und bei den Sek-I-Lehrkräften eher peripher,
- der Schema-Aspekt am wenigsten Einigkeit unter den untersuchten Lehrkräften hervorruft (viermal peripher, viermal zentral),
- der Co-Konstruktivismus meistens zentral ist, jedoch mit unterschiedlicher Tendenzrichtung hin zu den Polen Instruktivismus und Konstruktivismus und
- bei den Sek-I-Lehrkräften zwei Fälle auftraten, die den Instruktivismus als zentralen Belief halten, wobei dies bei den Grundschullehrkräften gar nicht vorkam (Bräunling, 2016).

Girnat (2016) untersucht die individuellen Curricula der Lehrkräfte sowohl in der elementaren Geometrie als auch in der analytischen Geometrie. Ein interessantes Ergebnis beschreibt die Zielstrukturen der Lehrkräfte in beiden Bereichen. Während in der elementaren Geometrie zahlreiche Ziele ausgemacht werden können, kann er die subjektiven Theorien der Lehrkräfte zu den Zielen des Curriculums in der analytischen Geometrie in ein Modell zusammenfassen, das von acht der neun interviewten Lehrkräfte gehalten wird. Als übergeordnete Ziele des Curriculums der analytischen Geometrie macht er die folgenden Punkte aus:

- Den schwächeren Schülerinnen und Schülern sollen Algorithmen an die Hand gegeben werden, mit denen sie arbeiten können.
- Die Schülerinnen und Schüler sollen auf ein Studium der Naturwissenschaften oder der Mathematik vorbereitet werden.
- Die Lösung von Problemlöseaufgaben mit Hilfe typischer Verfahren soll ermöglicht werden.

[26] Die Ausprägungen der Lehr-/Lernorientierung lauten: Instruktivismus, Konstruktivismus und Co-Konstruktivismus. Bräunling (2016) beschreibt diese als sich auf einem Kontinuum befindlich, wobei die äußeren Enden der Pole nie in ihrer Reinform erreicht werden. Eine Tendenz der Lehr-/Lernorientierung der Lehrkräfte kann aber dennoch identifiziert werden. Zentral bei der Beschreibung einer instruktiven Lehr-/Lernorientierung sind direkte Instruktionen, Anleitungen und Belehrungen in der kleinschrittig strukturierten Wissensvermittlung. Im Gegenteil dazu ist die konstruktivistische Lehr-/Lernorientierung durch selbstständiges, individuell geprägtes und eigenverantwortliches Lernen charakterisiert. Die Lehrkraft liefert die entsprechenden, auf gegenseitiger Kommunikation basierenden Lernumgebungen. Die co-konstruktivistische Lehr-/Lernorientierung befindet sich zwischen diesen beiden Polen und ist zum Konstruktivismus hin orientiert, begreift aber Instruktionen als notwendigen Bestandteil im Unterricht.

- Die Schülerinnen und Schüler sollen Zugang zu einer Gesamttheorie erhalten (Girnat & Eichler, 2011).

Ein weiteres studienübergreifendes Resultat betrifft den Hinweis darauf, dass zunächst die Domäne und demzufolge die entsprechenden domänenspezifischen Überzeugungen und ihr Inhalt für die Lehrkräfte als planungsleitend erscheinen, im Gegensatz zu den allgemein-mathematischen Kompetenzen, wie durch die Bildungsstandards vorgesehen (vgl. Kapitel 1) (Eichler & Erens, 2015; Eichler, 2006b; Girnat & Eichler, 2011). Dies ist definitiv ein Anlass für die tiefergehende Auseinandersetzung mit den domänenspezifischen Anschauungen der Lehrkräfte (Eichler & Erens, 2015).
Des weiteren wurde ein Zusammenhang zwischen dem intendierten und dem im Klassenraum realisierten Curriculum festgestellt (Bräunling, 2016; Eichler, 2011). Eichler (2008) konnte Hinweise dafür finden, dass sich die Stoffinhalte in der Stochastik zwischen den beobachteten Lehrkräften nicht unterscheiden, wohl aber ihr jeweiliges Bild der Mathematik, im Sinne der globalen Beliefs. Diese Unterschiede konnte er in den jeweiligen bei den Schülerinnen und Schülern implementierten Curricula wiederfinden, was die Verbindung zwischen den drei curricularen Ebenen verdeutlicht.
Dies betrifft einen sensiblen Punkt in der Beschäftigung mit den Beliefs, wenn nach dem Einfluss der Beliefs auf das konkrete Verhalten gefragt wird. Das Antwortspektrum variiert dabei von der Haltung, dass Beliefs keinen Einfluss auf das Verhalten der Lehrkräfte haben (Skott, 2015a) bis hin zu der Annahme, dass Beliefs das Verhalten der Individuen stark beeinflussen (Pajares, 1992). Fives und Buehl (2012) konstatieren, dass die Lehrkräfte in der Formulierung von Zielsetzungen, ihren Anstrengungen diese zu erreichen, ihrer Ausdauer mit der sie diese Ziele verfolgen und ihre Gefühle während der Zielerreichung durch Beliefs beeinflusst werden und damit auch die Qualität des Lehrens von diesen beeinflusst wird. Andererseits halten sie fest, dass es nur wenig Evidenz für den tatsächlichen Einfluss der Beliefs auf das Lehrerhandeln gibt.
Skott begründet seine Ansicht dadurch, dass er die Grundidee der Beliefs als „ill-defined" (Skott, 2015a, p. 25, 2015b, p. 4) bezeichnet und sowohl die Methodik, mit der sich ihnen angenähert wird, als problematisch beschreibt, als auch die grundsätzliche Annahme, dass Beliefs das Verhalten erklären. Gerade diese Auffassung ist seiner Einschätzung nach genauso oft widerlegt wie bestätigt worden. Ergänzend wird angefügt, dass selbst wenn die Beliefs der Lehrkräfte rekonstruiert werden können, die Unterrichtspraxis dennoch abweichen kann und auch häufig abweicht (Skott, 2015a, 2015b).
Neben eindeutigen Positionierungen in die eine oder andere Richtung konnte festgestellt werden, dass es sowohl interne als auch externe Faktoren gibt, die Lehrkräfte daran hindern oder sie darin unterstützen ihre Beliefs in ihr Verhalten zu übertragen (Buehl & Beck, 2015). Beispielsweise gelten die Reflexivität der Lehrkraft und ihr Bewusstsein für das Vorhandensein von Beliefs als solche internen Faktoren (Buehl & Beck, 2015; Wilson & Cooney, 2002).
Die Frage nach der konkreten Wirksamkeit der Beliefs auf das konkrete Verhalten der Lehrkraft im Unterricht oder um in der Terminologie des Forschungsansatzes zu bleiben: die Wirkung des intended auf das enacted Curriculum ist nicht abschließend geklärt. Vermutet wird nach wie vor, dass es diesen Zusammenhang gibt, der Nachweis fehlt aber. So fasst Skott zusammen: „In fact, it is unlikely that research on teachers' beliefs would have attracted more than minimal attention, if they were not believed (!) to impact practice" (Skott, 2015b, p. 6).
In diese Richtung gehen auch die Resultate der bisherigen Forschung zu den individuellen Curricula. Eichler konnte in einer Folgeuntersuchung feststellen, dass die dort untersuchten vier Lehrkräfte ihre als zentral herausgearbeiteten Beliefs über einen längeren Zeitraum umsetzen. Dies konnte nicht zwingend in jeder einzelnen Unterrichtsstunde, aber in Bezug auf den gesamten Beobachtungszeitraum beobachtet werden (Eichler, 2008, 2011). Dennoch halten Eichler und Erens fest, dass der konkrete Nachweis für die Relevanz der individuellen Curricula auf die konkrete Unterrichtsgestaltung fehlt (Eichler & Erens, 2015).

2.4. Weitere Anmerkungen zur Auseinandersetzung mit der Belief-Forschung

Das Feld der Belief-Forschung ist sehr heterogen (Rolka & Roesken-Winter, 2015) und nicht unumstritten. Regelmäßig diskutiert werden Fragen danach, was Beliefs aus definitorischer Sicht sind und wie sich ihnen methodisch genähert werden kann (Skott, 2015a; Voss, et al., 2011). Genereller gesagt, liegt das größte Dilemma in der Belief-Forschung darin, dass ihr Einfluss auf das Verhalten der Lehrkräfte ungeklärt ist, obwohl die Erwartungen an diesen Einfluss der Grund waren, sich mit den Beliefs zu beschäftigen (Skott, 2015a). Skott (2015b) formuliert:

> „The premise of the field of beliefs, then, was - and to some extent still is - that beliefs, understood as relatively stable, reified mental constructs, significantly influence students' and teachers' behaviour, also if they run counter to curricular intentions developed for instance in the research community. The promise of the field was - and still is - to solve, or at least alleviate the ‚problems of implementation', i.e. the lack of congruity between such intentions and instructional practice, by changing the beliefs of prospective and practising teachers" (p. 4).

Die Annahme einer Diskrepanz zwischen staatlichen Vorgaben und dem unterrichtlichen Vorgehen war und ist ein zentraler Forschungsanlass für die Erforschung der individuellen Curricula der Lehrkräfte, genau wie die Idee, dass diese durch ein Verständnis dessen, was die Lehrkräfte glauben (i.S. der Beliefs), abgemildert werden kann (Eichler, 2005). Für Skott steht dabei fest, dass die traditionelle Belief-Forschung große Probleme hat, dieses Versprechen einzulösen (Skott, 2015b). Abschließend beantwortet kann die Frage nach der tatsächlichen Handlungsrelevanz aber nach aktuellem Forschungsstand nicht (vgl. Abschnitt 2.3).

Es scheint ebenso viele Studien zu geben, die eine Verbindung zwischen den Beliefs und der Praxis der Lehrkräfte herstellen wie Studien, die diese widerlegen (Fives & Buehl, 2012). Die Belief-Forschung deshalb zu verwerfen, erscheint jedoch nicht sinnvoll. Vielmehr schlagen Fives und Buehl (2012) vor zu untersuchen, warum das Verhalten der Lehrkräfte von den rekonstruierten Beliefs abweicht und halten diesen Zweig der Forschung für vielversprechend. Außerdem weisen sie den Beliefs die entscheidenden Funktionen als Filter bei der Aufnahme von Informationen, als Rahmung bei der Entscheidungsfindung und als Richtlinie für das Verhalten zu, weshalb ihre Rekonstruktion aus ihrer Sicht immer noch eine sehr hohe Relevanz besitzt.

Auch prominente, aber quantitativ angelegte, Studien, wie zum Beispiel die COACTIV-Studie, beschreiben die Relevanz der Beliefs, wenn auch sehr vorsichtig ausgedrückt, durch ihre strukturierende Funktion bei der „Begegnung mit der Welt", die Wahrnehmung, Zielvorstellungen und Pläne beeinflussen (Voss et al., 2011, p. 235)[27]. Die TEDS-M Studie berücksichtigt Beliefs als wesentliches Element bei der Untersuchung der professionellen Kompetenz von Lehrkräften. Sie werden als Einflussfaktor auf das erfolgreiche unterrichtliche Handeln charakterisiert, indem sie die Informationsaufnahme filtern und als Richtlinie für das Verhalten fungieren (Blömeke, et al., 2008; Blömeke, 2007, 2014). Angenähert werden kann sich den Beliefs sowohl in Form quantitativer Untersuchungen, wie in den gerade genannten Studien, und auch auf qualitative Weise. Ein Überblick über die gängigen Methoden sowohl in Bezug auf die quantitativen und qualitativen Erhebungen enthält: Interviews, Beobachtungen, Checklisten oder die Anwendung von Skalierungen (Likert, Thurstone, Guttman) (Leder & Forgasz, 2002; Schraw & Olafson, 2015). Schraw und Olafson kommen zu dem Schluss, dass Beliefs quantitativ am häufigsten über Fragebögen und qualitativ über Interviewstudien

[27] Wenn Gill und Fives (2015) feststellen, dass die Wichtigkeit der Beliefs der Lehrkräfte und ihrer Untersuchung durch die jahrzehntelange Forschung bewiesen wurde (Gill & Fives, 2015), wird deutlich, wie sehr ein konkreter Beweis dafür fehlt. Schließlich gleicht es nach wie vor einer Gretchenfrage, inwiefern die Relevanz der Beliefs anerkannt wird oder nicht. Die Überzeugungen der einzelnen Forschenden spielen dabei eine große Rolle, weshalb die Frage der Relevanz in dieser Arbeit mit einem „Ja" beantwortet wird.

erfasst werden. Die Ziele, die durch die unterschiedlichen Erhebungsmethoden erreicht werden sollen, variieren dabei. Stehen verschiedene Messungen im Zentrum der quantitativen Erhebungsmethoden, ist das Ziel der qualitativen Erhebung mit Hilfe von Interviews die Beschreibung der Strukturen zwischen den Beliefs, deren Ursprungs und auch des wie auch immer gearteten Einflusses von Beliefs (Schraw & Olafson, 2015). Die Erfassung der individuellen Curricula über Leitfadeninterviews entspricht aufgrund der mit ihr verbundenen Zielformulierung dementsprechend gängigen qualitativen Erhebungsverfahren.
Es wird in der Diskussion um die verwendeten Erhebungsverfahren immer wieder gefordert, dass die verwendeten Konstrukte klar operationalisiert werden müssen und dass vor allem qualitative Forschung auf die detaillierte Beschreibung des verwendeten Forschungsdesigns angewiesen ist (Fives & Buehl, 2012; Olafson, Salinas-Grandy, & Owens, 2015; Schraw & Olafson, 2015). Zudem plädieren Fives und Buehl dafür, dass Fallstudien zwar gewinnbringend bei der Entwicklung des Verständnisses der Beliefs der Lehrkräfte sind, aber auch hinderlich, wenn sie sich nicht mehr an der bestehenden Forschung orientieren. Einzelne, unabhängige Studien mit einer unzureichenden Beschreibung der verwendeten Methodik sind für das Feld der Belief-Forschung ein Problem (p. 489).
Die vorliegende Untersuchung erfüllt die Postulate nach einer eindeutigen Operationalisierung der zu analysierenden Überzeugungen der Lehrkräfte, nach einer Einbettung in die bestehende Forschung und nach der präzisen Beschreibung des angewendeten methodischen Rahmens durch folgende Überlegungen: Der Fokus wird auf die Kognitionen der Lehrkräfte in Bezug auf ihre Planungsentscheidungen gelegt. Operationalisiert werden diese in Form von Argumentationsstrukturen, welche die Handlungsmotivation der Lehrkräfte in Bezug auf ihren Unterricht charakterisieren. Sie werden mit Hilfe des FST in Form von Wenn-dann-Argumentationen herausgearbeitet und stehen im Zentrum der vorliegenden Untersuchung. Die Untersuchung schließt unmittelbar an die bestehende Forschung zu den individuellen Curricula an und folgt einem mehrschrittigen Analyseprozess, der in Kapitel 5 im Detail dargestellt ist.
Weitere strittige Aspekte in der Belief-Forschung betreffen:

- das Verhältnis der Beliefs zum Wissen,
- die Unterscheidung, inwiefern sie als stabil oder dynamisch und damit als veränderbar zu verstehen sind,
- die Frage danach, ob sie explizit oder implizit vorhanden sind und
- ob sie unabhängig oder als System angeordnet sind.

In einer Metaanalyse der bestehenden Forschung fassen Fives und Buehl (2012) zu den einzelnen Punkten zusammen:

- Beliefs sind auf einem Kontinuum der Stabilität, von sehr stabil und gleichzeitig fest verankert bis eher isoliert und sehr unstabil angeordnet[28]. In Bezug auf die Veränderbarkeit gibt es keinen Konsens. Es wird angenommen, dass Beliefs in einer permanenten Beziehung zu dem Umfeld und den Erfahrungen der sie haltenden Lehrkraft stehen und sich dabei gegenseitig beeinflussen (Fives & Buehl, 2012). Dies impliziert, dass die Möglichkeit besteht, dass Beliefs beeinflussbar sind.
- Beliefs können sowohl implizit als auch explizit sind, wobei implizite Beliefs durch Forschung rekonstruiert und dadurch expliziert werden können, was wiederum die Beschaffenheit dieser Beliefs ändern kann.

[28] Skott, der dem Belief-Konzept sehr kritisch gegenübersteht, plädiert für eine Wandlung hin zu einem dynamischeren, durch den Kontext beeinflussten Belief-Verständnis (Skott, 2015b). Es sollen hier aber nur Auszüge gegeben werden, weil ähnlich wie in der Frage zur Relevanz der Beliefs, diese nicht eindeutig geklärt und immer gegenstands- und forschungsabhängig sind.

- Wissen und Beliefs sind eng miteinander verwoben. Eine Trennung erfolgt eher auf theoretischer Ebene und konnte empirisch bisher nicht nachgewiesen werden.
- Relative Einigkeit besteht darüber, dass Beliefs in Belief-Systemen auftreten und nicht isoliert (Fives & Buehl, 2012).

Definitionen zu Beliefs gibt es in der Forschungsliteratur sehr viele, eine im Forschungsfeld konsistent und konsequent genutzte Definition fehlt aber und dies macht das Feld der Beliefs oft zu einem „messy construct“ (Fives & Buehl, 2012; Pajares, 1992).
Es ist als Folge dessen nur möglich, über die verschiedenen Ansätze hinweg einige gemeinsame Punkte herauszuarbeiten als eine allgemeingültige Definition zu geben und so subsummiert Skott: „The core of beliefs concept may, then, be defined as subjectively true, value-laden mental constructs that are the relatively stable results of substantial prior experiences and that have significant impact on practice“ (Skott, 2015b, p. 6).
Ziel dieser Untersuchung ist die präzise Beschreibung der Praxis im Algebraunterricht, indem ein Einblick in die Planungsgedanken der Lehrkräfte ermöglicht wird. Darauf aufbauend kann die didaktische Forschung ansetzen und gemäß des Grundgedankens der „Didaktik als Handlungswissenschaft[,] (...) [die] den Lehrerinnen und Lehrern praktisch folgenreiche Handlungsorientierungen“ (Jank & Meyer, 1991, p. 16) geben soll, agieren. In diesem Sinn:

> „However, regardless of whether one calls teacher thinking beliefs, knowledge, conceptions, cognitions, views, or orientations, with all the subtlety these terms imply, or how they are assessed, e.g., by questionnaires (...), interviews, or observations, the evidence is clear that teacher thinking influences what happens in classrooms, what teachers communicate to students, and what students ultimately learn. (...) In short, (...) we conclude that concern over a precise definition of beliefs pales in importance compared with the issue of understanding the nature of teachers’ thinking“ (Wilson & Cooney, 2002, p. 145).

Das in den Untersuchungen zu den individuellen Curricula gewählte Belief-Verständnis spricht viele der in der Auseinandersetzung genannten Faktoren an, und widerspricht nicht den gängigen Ideen dessen, was dem Belief-Konzept zugeordnet wird. Die Forschung zu den individuellen Curricula hat sich als fruchtbar erwiesen, indem sie präzise Einblicke in die Unterrichtsplanungen liefert. So gibt zum Beispiel die Beschreibung des Ist-Zustandes einen Anlass dafür, über die Rolle und den Stellenwert des Modellierens im Unterricht nachzudenken (vgl. Abschnitt 2.3) oder für eine Gegenüberstellung der fachdidaktischen Theorie mit der Unterrichtspraxis (vgl. Kapitel 9).

2.5. Zusammenfassung

Werden individuelle Curricula von Lehrkräften in der Algebra rekonstruiert, so ist die Anwendung des durch den vorgestellten Forschungsansatz gegebenen theoretischen Rahmens, einschließlich seiner begrifflichen Definitionen und Annahmen plausibel. Ein weiterer Vorteil ist die Möglichkeit, auf Basis der geteilten Annahmen Vergleiche anstellen zu können (vgl. Kapitel 8).
Zur Übersicht werden hier in einer Art Glossar die aus der vorhergehenden Auseinandersetzung folgenden und für die vorliegende Studie geltenden Annahmen, Begriffe und Definitionen dargestellt.

Tabelle 1: Begriffliche Zusammenfassung

Begriff	Erläuterung	Bemerkungen
Individuelles Curriculum (vgl. Kapitel 2.1)	Als individuelles Curriculum werden alle Überlegungen der Lehrkräfte bezeichnet, die die Auswahl des Stoffinhalts und deren Begründung betreffen.	Die Auswahl der Stoffinhalte ist an Ziele geknüpft, die die Lehrkraft mit ihnen verfolgt.
Subjektive Theorie (vgl. Kapitel 2.1)	Subjektive Theorien sind ein relativ stabiles System von Kognitionen mit einer zumindest impliziten Argumentationsstruktur, die parallel zu wissenschaftlichen (‚objektiven') Theorien die Funktion der Erklärung, Prognose und Technologie erfüllen und im Dialog-Konsens rekonstruiert werden können.	Sie enthalten subjektive Konzepte in Form der Ziele der individuellen Curricula. Die rekonstruierten subjektiven Theorien zu den verschiedenen Bereichen Inhalt des Algebracurriculums, Ziele des Algebracurriculums, Ziele des Mathematikcurriculums und zum Lernen und Lehren von Mathematik stellen einen wesentlichen Bestandteil der individuellen Algebracurricula der Lehrkräfte dar.
Ziel-Mittel-Argumentation (vgl. Kapitel 2.1)	Wird als (unter anderem visuelle) Darstellung der impliziten Argumentationsstruktur aus den subjektiven Theorien verstanden, indem die subjektiven Ziele und Relationen durch „Wenn-dann"-Sätze beschrieben werden.	Die Ziel-Mittel-Argumentation ist eine Methode, die subjektiven Theorien darzustellen.
Intendiertes Curriculum (vgl. Kapitel 2.2)	Das intendierte Curriculum beschreibt die Art, wie Lehrkräfte das staatlich vorgegebene Curriculum in Bezug auf Inhalt und Ziele interpretieren und in ihre Planungen umsetzen. Es wird als Belief-System verstanden. Dieses verknüpft die individuelle inhaltliche Auswahl mit den Zielen in einem quasi-logischen System.	Das intendierte Curriculum entspricht dem individuellen Curriculum einer Lehrkraft. Begrifflich ist die Unterscheidung der Internationalisierung und Weiterentwicklung des ursprünglich entwickelten Forschungsansatzes geschuldet. In dieser Studie wird der Begriff des individuellen Curriculums gewählt.
Beliefs (vgl. Kapitel 2.2)	Beliefs sind Überzeugungen, die die Informationsaufnahme und -verarbeitung einen bestimmten Bereich betreffend filtern und damit das Handeln in diesem Bereich beeinflussen. Beliefs besitzen kognitive, motivationale und emotionale Komponenten. Speziell können Beliefs zu dem Bild der Mathematik der jeweiligen Lehrkraft, dem Lernen und Lehren von	Die Beliefs werden innerhalb eines Belief-Systems zur Algebra aufgefasst. Innerhalb des Systems gibt es eine Unterscheidung in zentrale und periphere Beliefs, wobei diese durch quasi-logische Strukturen miteinander verbunden sind. Innerhalb des Belief-Systems gelten die Beliefs als konsistent und überdauernd. Die emotionale Komponente steht nicht im Zentrum der Untersu-

	Mathematik (globale Beliefs), den algebraspezifischen Überzeugungen (domänenspezifische Beliefs) und den fachlichen Inhalte (fachbezogene Beliefs) herausgestellt werden.	chung. Beliefs umfassen Kognition, Motivation, Emotion und sind mit dem Wissen untrennbar verbunden, der Fokus in dieser Untersuchung liegt auf den Kognitionen der Lehrkraft.
Ziele (vgl. Kapitel 2.2)	Ziele werden durch die Lehrkräfte formuliert, begründet und aktiv verfolgt. Die herausgearbeiteten Ziele zum Beispiel in Bezug auf die Ziele des Algebracurriculum werden als die domänenspezifischen Beliefs der Lehrkräfte verstanden.	Ziele werden zunächst als Teil der Handlung formuliert, danach wird die Implementierung der Ziele in das Verhalten noch als Teil der Handlung geplant und schließlich im Verhalten manifestiert und reflektiert.

Der Begriff der individuellen Curricula wird in dieser Arbeit verwendet. Zur Charakterisierung der individuellen Curricula sei auf die folgenden aus der Forschung zum Belief-Konzept adaptierten Eigenschaften verwiesen (vgl. Kapitel 2.2, 2.3):

- dass es mehr oder weniger wichtige Beweggründe für die Lehrkräfte gibt, ihren Unterricht so zu planen, wie sie ihn planen (zentrale vs. periphere Beliefs),
- dass Beliefs in einem Belief-System angeordnet sind,
- dass es einander widersprechende Überzeugungen auf den verschiedenen Ebenen (z.B. globale Beliefs vs. domänenspezifische Beliefs) geben kann, die zu einer bestimmten Entscheidung führen können,
- dass die Beliefs kognitiv geprägt sind und zueinander in einem quasi-logischen Verhältnis stehen, sodass die Herausarbeitung von Argumentationsstrukturen möglich ist,
- dass sie die Informationsaufnahme filtern (Vorgang auf der kognitiven Ebene) und dadurch das Verhalten beeinflussen (können),
- dass sie eine motivationale Komponente in Bezug auf die Zielformulierung besitzen, die wiederum Einfluss auf das Verhalten hat und
- dass als zentral gekennzeichnete Beliefs eher resistent gegenüber Veränderung sind.

Zusammengefasst ergeben sich die weiteren theoretischen Annahmen:

(1) Lehrerinnen und Lehrer entscheiden begründet, welche Inhalte auf welche Weise unterrichtet werden (vgl. Kapitel 2.1).
(2) Lehrkräfte sind reflexive Experten ihres Berufs. Sie sind in der Lage auf Basis ihrer Erfahrungen, ihres professionellen Wissens und ihrer subjektiven Theorien unterrichtliche Ziele zu formulieren, Rahmenbedingungen zu evaluieren und geeignete Mittel zur Erreichung dieser Ziele zu wählen (vgl. Kapitel 2.1).
(3) Die Planungsgedanken der Lehrkräfte die Auswahl und Begründung den Stoffinhalt betreffend werden als individuelle Curricula verstanden (vgl. Kapitel 2.1).
(4) Lehrkräfte halten subjektive Theorien zu den Zielen des Mathematikcurriculums und des Algebracurriculums, zum Stoffinhalt der Algebra und zum Lernen und Lehren von Mathematik (vgl. Kapitel 2.1). (Äquivalent dazu ist die Annahme, dass Beliefs Einfluss auf die Planungsentscheidungen der Lehrkräfte nehmen.)

(5) Die individuellen Curricula können durch das Konstrukt der subjektiven Theorien, das dem FST entlehnt ist, rekonstruiert werden. Beschrieben werden diese durch Ziel-Mittel-Argumentationen gemäß der in Kapitel 5 beschriebenen Methodik (vgl. Kapitel 2.1).
(6) Die individuellen Curricula der Lehrkräfte unterscheiden sich je nach mathematischer Domäne (vgl. Kapitel 2.2 und 2.3).
(7) Die individuellen Curricula der Lehrkräfte lassen sich über ihre globalen Beliefs grob in Typen einteilen. Die durch die subjektiven Theorien beschriebenen individuellen Curricula ergänzen diese Typen durch präzise Beschreibungen der Argumentationsstrukturen (vgl. Kapitel 2.2).
(8) Wenn die Beliefs der Lehrkräfte ihre Planungsentscheidungen beeinflussen, dann haben sie indirekt einen Einfluss auf das Lernen der Schülerinnen und Schüler (vgl. Kapitel 2.2).

3. Die Didaktik der Algebra

Die Algebra ist ein zentraler Bestandteil des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe I und beschäftigt die mathematikdidaktische Forschung seit Jahrzehnten (Akinwunmi, 2012). Zentral beforscht werden zum Beispiel die folgenden Punkte: Die Diskrepanz zwischen der enormen Wichtigkeit der Variablen und der elementar-algebraischen Formelsprache in der Mathematik und den zahlreichen Schwierigkeiten, welche die Schülerinnen und Schüler mit ihrem Verständnis haben (Akinwunmi, 2012; Hefendehl-Hebeker & Rezat, 2015), die in der Algebra besonders große Lücke zwischen dem konzeptuellen und prozeduralen Wissen (Kieran, 2013) und typische Fehler der Schülerinnen und Schüler in der Arbeit mit Termen und Gleichungen (Malle, 1993; Tietze, 1988).

Gründe, die das Lernen von Algebra erschweren, werden seit Langem untersucht. Beispiele dafür sind: der Abstraktionsgrad bei der Einführung der Variablen (zum Beispiel Akinwunmi, 2012; Malle 1993), der schwierige Übergang von der Arithmetik zur Algebra (zum Beispiel Tietze, 1988), das Maß zur Einübung des regelhaften Umgangs mit Termen und Gleichungen (zum Beispiel Hefendehl-Hebeker & Rezat, 2015) und die Schwierigkeit angemessene Anwendungsbezüge zu schaffen (zum Beispiel Fischer et al., 2010). Aus diesen Forschungen resultieren zahlreiche Handlungsempfehlungen an die Lehrkräfte für die Verbesserung des Algebraunterrichts (zum Beispiel: Bednarz, Kieran, & Lee, 1996; Berlin, 2011; Hirscher, 1992; Kieran, 2007; Thorpe, 1989; Vollrath & Weigand, 2007).

Bei diesen Forschungen werden vermehrt die Schülerinnen und Schüler und die Eigenheiten des zu vermittelnden Inhalts in den Fokus genommen. Weniger häufig wurde sich mit den Lehrkräften, ihrem Verständnis und ihren Einstellungen zur Algebra beschäftigt (vgl. Kapitel 1), trotz der Tatsache, dass die Lehrkräfte in der Umsetzung solcher Anregungen oder staatlicher Vorgaben die entscheidende Rolle einnehmen (vgl. Kapitel 2.2). Untersucht wurden, wenn auch unter einem anderen Schwerpunkt zum Beispiel das allgemein mathematische Fachwissen der Lehrkräfte in der COACTIV-Studie (Kunter et al., 2011), die Überzeugungen der Lehrkräfte zur algebraischen Entwicklung ihrer Schülerinnen und Schüler (Nathan & Koedinger, 2000a) und zum Begründen in der Algebra (Nathan & Koedinger, 2000b). Darüber hinaus fehlt aber ein Eindruck darüber, wie die Lehrkräfte Algebra verstehen, welchen Stellenwert sie den jeweiligen Inhalten beimessen und wie sie in diesem Zusammenhang das Lernverhalten ihrer Schülerinnen und Schüler einschätzen. Im Prinzip stellt sich die Frage danach, welche Aspekte der Algebra die Lehrkräfte für wichtig erachten und warum. Dies bietet die Grundlage, um festzustellen was ihnen fehlt und welche Ansatzpunkte sie sich zur Unterstützung ihres Unterrichts wünschen, um das Lernen der Schülerinnen und Schüler zu unterstützen.

Was dabei unter der Algebra ganz generell zu verstehen ist, ist nicht unmittelbar klar, weil die Algebra als Sprache der Mathematik (Hefendehl-Hebeker & Rezat, 2015; Hefendehl-Hebeker, 2007; Usiskin, 1995) in ihrer Charakteristik nicht so leicht von dem allgemein-mathematischen Denken abzugrenzen ist und sich auch in jedem Bereich der Mathematik wiederfindet (Bell, 1996b). So fragte sich Hefendehl-Hebeker (2007), was Algebra sei und endet mit der Frage: „Wenn die Entwicklung der Algebra mit der Entwicklung der neuzeitlichen Mathematik so untrennbar verbunden ist, (...) ist dann eine solche Differenzierung überhaupt möglich?“ (Hefendehl-Hebeker, 2007, p. 151).

Um einen Orientierungsrahmen für die vorliegende Studie zu bilden, werden zentrale algebradidaktische Erkenntnisse erarbeitet, um einerseits die Begriffe und zentrale Bereiche, die mit dem Algebraunterricht zusammenhängen zu klären und die mit ihnen verbundenen Schwierigkeiten darzulegen. Diese werden im Gespräch mit den Lehrkräften angesprochen. Andererseits werden auf diese Weise Hypothesen darüber gebildet, welche Ausprägungen die individuellen Curricula der Lehrkräfte in der Algebra aus algebradidaktischer Sicht aufzeigen können.

Es soll bewusst darauf verzichtet werden, einen Gesamtüberblick über die Algebradidaktik zu geben und die historische Genese der Algebra darzustellen[29]. Diese Studie legt ihren Fokus auf die Unterrichtspraxis der Lehrkräfte und wird sich daher auf die Beschreibung unterrichtsnaher Inhalte und Forschungsergebnisse beschränken. Des Weiteren stehen die Einführung der algebraischen Sprache und Schrift, also die Einführung von Variablen, Termen, Formeln und Gleichungen aufgrund ihrer zentralen Bedeutung in der Algebra (Malle, 1993) und als Herausforderung für das Lehren (Hefendehl-Hebeker & Rezat, 2015) im Zentrum der Arbeit. Die Einführung dieser Themen soll laut niedersächsischem Kerncurriculum bis zum Ende der achten Klassenstufe abgeschlossen sein (Niedersachsen, 2006), weshalb die Anschauungen der Lehrkräfte in Bezug auf die siebte und achte Klassenstufe untersucht werden.
Zunächst wird ein Überblick über die verschiedenen Anschauungen die Algebra und das algebraische Denken betreffend gegeben. Anschließend werden die für die Einführung der Algebra zentralen Bereiche der Variablen, der unterschiedlichen Gewichtung des prozeduralen und konzeptuellen Wissens und die verschiedenen Zugänge zur Algebra diskutiert, bevor abschließend die Lernschwierigkeiten der Schülerinnen und Schüler beim Erlernen der Algebra thematisiert werden.

3.1. Algebra - was ist das?

Die Frage danach, was die Algebra eigentlich ist, wird von verschiedenen Forschenden unterschiedlich beantwortet. Eine Übersicht der verschiedenen Definitionen von Algebra soll helfen einen Überblick[30] zu erlangen. Die Aufstellung erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit und soll auch nicht als Versuch gesehen werden, eine eigene neue Definition der Algebra zu geben[31]:

Tabelle 2: Übersicht über die verschiedenen Aspekte der Algebra

Günther Malle	Zur elementaren Algebra[32] zählt die umfassende Beschäftigung mit *Termen*, *Variablen* und *Formeln* (Gleichungen und Ungleichungen). Malle verbindet die Algebra im Unterricht mit *Tätigkeiten*, wie dem *Aufstellen*, *Umformen* und *Interpretieren* einer Formel, dem *Einsetzen* von Zahlen zur *Berechnung* einer Größe und der *graphischen Darstellung* von Zusammenhängen. Das Ziel der Algebra ist dabei Sachverhalte mit Hilfe der Variablen *allgemein darzustellen*, allgemeine *Probleme zu lösen*, allgemein zu *kommunizieren*, allgemein zu *argumentieren* (beweisen, begründen) und allgemein zu *explorieren* (Malle, 1993, p. 9f).
Carolyn Kieran	Die Algebra ist vor allem als Aktivität zu verstehen. Diese lässt sich in drei Hauptkategorien von Aktivitäten unterteilen: Die *generational activtiy*, die *transformational activity* und die *global/meta-level activi-*

[29] Bei Interesse an der historischen Genese der Algebra wird zum Beispiel auf Hefendehl-Hebeker & Rezat (2015), Sutherland et al. (2001) oder Bednarz et al. (1996) verwiesen.
[30] Zur Auswahl der Forschenden: In der deutschen Lehrerbildung gelten die Werke von Malle und Vollrath & Weigand als Standard, weshalb sie, genau wie Hefendehl-Hebeker, die im aktuellen Handbuch der Mathematik-Didaktik (2015) den Beitrag zur Algebra verfasst hat, in dieser Aufstellung nicht fehlen dürfen. International gilt Carolyn Kieran, die in ihren Ausführungen durch Lee und Bednarz beeinflusst ist, als zentral in der Algebradidaktik. Wheeler, der unter anderem von Hefendehl-Hebeker zitiert wird, fasst schließlich die Bemühungen der internationalen Forschungsgruppe um Bednarz, Kieran, Lee, Radford, Rojano, Mason und anderen zum Thema „Approaches to algebra“ zusammen.
[31] Es handelt sich jeweils um Zusammenfassungen aus den jeweils zitierten Quellen, wobei die Ansicht der jeweiligen Autorinnen und Autoren dargestellt wird. Auf die Verwendung des Konjunktivs wird aufgrund der besseren Lesbarkeit verzichtet.
[32] Malle spricht von elementarer Algebra, meint damit aber die Algebra, die in der Schule unterrichtet wird.

	ty. Die *generational activity* beschreibt das *Aufstellen von Ausdrücken und Gleichungen,* die zum Beispiel Gesetzmäßigkeiten, die Verbindung zwischen Mengen in Form von Problemsituationen oder *Verallgemeinerungen* geometrischer Sachverhalte wie figurierter Zahlen beschreiben. Die *transformational activity* beschreibt die *regelbasierten Verfahren mit denen Terme und Gleichungen umgeformt werden*, wie das Ausklammern, Faktorisieren, Zusammenfassen gleicher Terme, Addition und Subtraktion von Termen, etc. Die *global/meta-level activity* ist Algebra-übergreifend zu verstehen, aber damit insbesondere in der Algebra gültig, dazu gehören das *Argumentieren, Begründen, Beweisen, Problemlösen und Verallgemeinern* (Kieran, 2004b).
Vollrath und Weigand	Algebra umfasst die Bereiche Zahlen, Terme, Funktionen und Gleichungen. Darüberhinaus wird die Algebra durch *die Formelsprache, den verständnisvollen Umgang* mit ihr, die Erkenntnis sich durch diese ausdrücken und damit *argumentieren* und *kommunizieren* zu können, charakterisiert. Die Gleichungen dienen dazu, Zusammenhänge zwischen verschiedenen Größen auszudrücken und können zur *Problemlösung* verwendet werden. Mit den Termen können geometrische Größen beschrieben werden und sie sind die Grundlage für das mathematische *Modellieren* (Vollrath & Weigand, 2007).
Hefendehl-Hebeker (unter anderem mit Prediger und Fischer)	Ein wesentliches Charakteristikum der Algebra ist die *elementarmathematische Formelsprache* (Hefendehl-Hebeker & Rezat, 2015). Durch sie können Gedanken *kommuniziert* und präzisiert werden. Das *regelhafte Umformen* kann das Denken entlasten. Neue Erkenntnisse können durch das regelgeleitete Operieren eruiert werden (Hefendehl-Hebeker, 2007). Eigenschaften des algebraischen Denkens sind eng verbunden mit allgemein mathematischen Denkhandlungen wie dem *Generalisieren, Abstrahieren, Analysieren, Strukturieren* und *Restrukturieren, Deuten* und *Darstellen* (Fischer et al., 2010; Hefendehl-Hebeker, 2007). Als spezifisch algebraisches Denken gelten *das Mathematisieren, das kalkülhafte Umformen, die Entwicklung von Kalkülen* (Auffinden von Regeln und Schemata) und die *Analyse von Veränderungsprozessen* (Wirkung von einer unabhängigen Größe auf eine abhängige Größe) (Fischer et al., 2010).
Usiskin	Algebra wird als die *Sprache der Verallgemeinerung* gesehen und als Mittel, Dinge verkürzt darzustellen. Durch sie können alle Aufgabenstellungen eines bestimmten Fragetyps betreffend gelöst werden. Sie ist die Sprache, *die Beziehungen zwischen verschiedenen Größen darstellen kann*. Sie ist die Sprache der *Problemlösung* und sie dient der *Darstellung* mathematischer Strukturen (Usiskin, 1988, 1995).
Lee	Algebra ist eine Art Minikultur in dem breiten Feld der Mathematik, wobei sie eine Sammlung von Aktivitäten ist, *eine Sprache*. Diese hat *ihre eigenen Regeln*, ihre eigene Art zu *kommunizieren* und Themen zu setzen (Lee, 1996).
Bednarz, Kieran, Lee	Es gibt vier Blickwinkel auf Algebra *den Problemlösenden, den Verallgemeinernden* unter dem *Aspekt der Strukturierung*, den der Algebra *als Sprache* und den der Algebra in Bezug auf *funktionale Zusammen-*

	hänge (Bednarz et al., 1996).
Wheeler	Die Schwierigkeit Algebra zu definieren, liegt darin, dass es immer neue Aspekte gibt, die zu Algebra gehören. Algebra ist nicht nur ein Symbolsystem, nicht nur Kalkül und nicht nur ein System der Repräsentation. Sie ist mehr als das, aber immer *geprägt durch Strukturen*. Die elementare Algebra wird als *System von Aktivitäten* verstanden im Sinn der einer *transformational action* und umfasst sinngleich die Elemente der *transformational activity* (Wheeler, 1996a, p. 319). Aber sie ist mehr als das. Vor allem ist algebraisches Denken nicht dasselbe wie mathematisches Denken, denn sie agieren auf verschiedenen Ebenen und auf unterschiedliche Art. Mathematische Kompetenz bedeutet in diesem Zusammenhang den flexiblen Wechsel zwischen den Denkarten. Betrachtet man die vier Perspektiven von Bednarz et al., so sind sie artifiziell, weil der Blick auf Algebra aller vier Komponenten bedarf[33] (Wheeler, 1996a).

Diese Aufstellung weist in zahlreichen Punkten Übereinstimmungen auf. Die betrifft vor allem die verschiedenen Denkhandlungen und Tätigkeiten, die als zentrale Bestandteile der Algebra gelten: Abstrahieren, Generalisieren, Problemlösen, Strukturieren, Analysieren, Kommunizieren, Darstellen und Interpretieren. Voraussetzung für die Durchführung dieser Prozesse, ist das Erlernen der elementar-algebraischen Formelsprache samt ihrer Grammatik. Gemeint sind: die Verwendung von Variablen in Termen, (Un-)Gleichungen und funktionalen Zusammenhängen, der Umgang mit der Formelsprache, also das Kalkül sowie ihre Lesart.
Die Frage nach der Unterscheidung von mathematischem und algebraischem Denken ist nicht abschließend geklärt.
Insgesamt werden so drei wesentliche Bereiche der Algebra angesprochen, die durch die folgenden drei Fragen zusammengefasst werden können:

1. Welche Aktivitäten sind Bestandteil des algebraischen Denkens?
2. Welches Verhältnis besteht zwischen dem algebraischen und allgemein-mathematischen Denken?
3. Welchen Stellenwert hat die Algebra als Sprache mit eigener Syntax im Algebraunterricht? Und: In welchem Verhältnis steht die Syntax zur Semantik?

Werden die zum Untersuchungszeitraum gültigen Bildungsstandards für den mittleren Schulabschluss betrachtet[34], so finden sich die benannten Bereiche fast wort-wörtlich vor allem in den als allgemein-mathematische Kompetenzen deklarierten Begriffen wieder: Probleme mathematisch lösen, argumentieren können, kommunizieren, mathematische Darstellungen verwenden, mathematisch modellieren und mit symbolischen, formalen, technischen Elementen der Mathematik umgehen[35] (Kultusministerkonferenz, 2004, p. 8). Dies ist ein weiterer Hin-

[33] Wheeler stellt schließlich auch die Frage danach, was der Kern algebraischen Denkens ist. Er findet darauf keine Antwort, sondern konkludiert: „I tend to think this question has not yet been worked on enough (...). We've seen that there is no consensus on the attempt to differentiate algebraic thinking from mathematical thinking in general, or on the attempt to reduce the essential content of algebraic thinking to a set of very elementary operations" (Wheeler, 1996a, p. 322).
[34] Aus diesen leiten sich die jeweiligen Kerncurricula der Länder ab. Weil die Untersuchung auf die Sekundarstufe I abzielt, werden die Bildungsstandards für den mittleren Schulabschluss gewählt.
[35] Dies entspricht dem Umgang mit dem Kalkül und noch etwas darüber hinaus, wenn es in den Erläuterungen heißt: „mit Variablen, Gleichungen, Funktionen, Diagrammen, Tabellen arbeiten; symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache übersetzen und umgekehrt; Lösungs- und Kontrollverfahren ausführen" (Kultusministerkonferenz, 2004, p. 8).

weis darauf, dass das algebraische und allgemein mathematische Denken eng miteinander verwoben sind.
In Bezug auf die konkreten Inhalte der Algebra in der Sekundarstufe I scheint es weniger Dissens zu geben. Die bereits von Euler (1911) in seiner vollständigen Anleitung zur Algebra behandelten Inhaltsbereiche der Algebra[36] können wie folgt zusammengefasst werden: Die Einführung der verschiedenen Zahlbereiche und damit verbunden die Behandlung der Grundrechenarten, daran anschließend die Behandlung arithmetischer Proportionen, figurierter Zahlen und auch das geometrische Wachstum, das mit Hilfe von Variablen und Termen beschrieben wird. In einem zweiten Teil werden verschiedene Gleichungen und ihre Lösung mit einer und mehr Unbekannten thematisiert (Euler, 1911)[37]. Dies entspricht der allgemeinen Darstellung Malles, dass Algebra sich in der Schule mit Variablen, Termen und (Un-)Gleichungen beschäftigt (Malle, 1993)[38]. Das Kerncurriculum in Niedersachsen schreibt vor, dass die Schülerinnen und Schüler am Ende der Klasse 8 die folgenden Kompetenzen erworben haben sollen. Die Schülerinnen und Schüler sollen:

- *Sachverhalte* durch Terme und Gleichungen *beschreiben*,
- Terme *veranschaulichen* und *interpretieren*,
- die *Struktur* von Termen *erkennen* und *vergleichen*,
- Terme und Gleichungen zur *mathematischen Argumentation* nutzen,
- inner- und außermathematische Problemsituationen mit Termen und Gleichungen *modellieren*,
- Terme durch Anwendung der Rechengesetze *umformen*,
- lineare und quadratische Gleichungen *algebraisch lösen*,
- lineare Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten *algebraisch lösen*,
- *heuristische Strategien* zum Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen in Sachzusammenhängen nutzen,
- lineare Gleichungen mit *digitalen Mathematikwerkzeugen lösen*,
- Gleichungen und Gleichungssysteme auf Lösbarkeit hin *untersuchen* und
- die Probe zur *Kontrolle und Beurteilung* der eigenen Ergebnisse nutzen (Niedersachsen, 2006, p. 26ff).

Auf der stoffinhaltlichen Ebene stehen demnach ebenfalls die Beschäftigung mit Termen, Gleichungen und der elementar-mathematischen Sprache im Zentrum[39]. Die Sichtung verschiedener gängiger Lehrwerke, die üblicherweise die Vorgaben des Kerncurriculums abbilden, unterstützt diesen Eindruck[40].
Daraus folgt, dass die konkret als zu unterrichtend geltenden Inhalte entgegen der Auseinandersetzung zu den Charakteristika des algebraischen Denkens eher einheitlich festgelegt sind. Demnach ist eher die Frage nach einem geeigneten Zugang zur Algebra offen, der je nach dem Verständnis der Algebra und des algebraischen Denkens differieren wird (vgl. hierzu Kapitel 3.4).

---

[36] Dabei geht es mehr um die Klassifizierung der Inhaltsbereiche, als die mit ihnen verknüpfte Intensität der Behandlung im Unterricht, gemäß der Frage: „Wie viel Termumformung braucht der Mensch?“ (Hirscher, 1992; Usiskin, 1988).
[37] Ähnliches ist bei Felix Klein nachzulesen, der das Lösen von Gleichungen mit Hilfe von „geometrisch anschauliche[n] Methoden“ (Klein, 1968, X) in den verschiedenen Zahlbereichen und mit Variablen und Parametern als zentrale Elemente der Algebra kennzeichnet (Klein, 1968).
[38] Insofern davon ausgegangen werden kann, dass die Grundrechenarten und auch die Zahlbereichserweiterungen (außer den reellen Zahlen) in der siebten und achten Klassenstufe vorausgesetzt werden können.
[39] Die Kursivdrucke beziehen sich darauf, was als algebraische Denkhandlungen verstanden wird. An dieser Stelle steht der Stoffinhalt im Vordergrund und soll von diesen Tätigkeiten getrennt werden.
[40] In den folgenden Lehrwerken finden sich im Lehrbuch der Klasse 7 Themenblöcke zu Termen und Gleichungen: „MatheNetz“ (Cukrowicz, et al., 2006), „Das Mathematikbuch“ (Affolter, et al., 2011), „Lambacher Schweizer“ (Baum et al., 2006), „mathelive“ (Böer, et al., 2007), „Elemente der Mathematik“ (Griesel, et al., 2006) sowie „Neue Wege“ (Lergenmüller & Schmidt, 2006).

Für die Untersuchung der individuellen Curricula der Lehrkräfte über Algebra lassen sich nun die folgenden Hypothesen generieren:

(A1) Die individuellen Ziele der Lehrkräfte in Bezug auf ihr Algebra- und des Mathematikcurriculum unterscheiden sich nur unwesentlich.
(A2) Die Algebra wird von den Lehrkräften als Sprache mit einem eigenen Regelsystem charakterisiert.
(A3) Der Umgang mit Termen, Variablen und Gleichungen nimmt einen festen Stellenwert im individuellen Algebracurriculum der Lehrkräfte ein.
(A4) Die Beschreibungen des stofflichen Inhalts der Algebra ähneln sich unabhängig von der jeweiligen Lehrkraft sehr.
(A5) Die Unterscheidung in die einzelnen Bereiche des algebraischen Denkens wird durch die Lehrkräfte thematisiert[41].
(A6) Die Umsetzung der genannten algebraischen Tätigkeiten stellt eine Zieldimension des individuellen Algebracurriculums dar.

Vollrath & Weigand (2007) halten auf einer abstrakteren Ebene fest, dass das Lehren und Lernen von Algebra[42] einen wesentlichen Beitrag zu den allgemeinen Zielen des Mathematikunterrichts leistet, weil so „grundlegende Begriffe, Einsichten und Methoden der Mathematik“ vermittelt werden (Vollrath & Weigand, 2007, p. 14). Dies würde im weiteren Sinn zur Allgemeinbildung der Schülerinnen und Schüler beitragen, weil sie neue Wege der Umwelterschließung kennen lernen, ihre Persönlichkeit entfalten und an der Gesellschaft teilhaben können. Zudem wird zur Vermittlung von Normen und Werten beigetragen (Vollrath & Roth, 2012; Vollrath & Weigand, 2007). Insofern wird in Erweiterung zu den generierten Hypothesen ergänzt:

(A7) Als Ziel des Algebracurriculums wird der Beitrag zur Allgemeinbildung formuliert.

3.2. Die Variablen

Die Beschäftigung mit den Variablen und ihren jeweiligen Bedeutungen sowie den Wegen sie zu vermitteln, beschäftigt die Fachdidaktik seit mehreren Jahrzehnten. Ihre Relevanz für die Mathematik gilt als unumstritten, da alle Themengebiete der Mathematik auf ihrer Verwendung basieren. Dennoch fällt es den Schülerinnen und Schüler sehr schwer ein Verständnis dieser aufzubauen (Akinwunmi, 2012). Variablen sind in ihrer Bedeutung sehr facettenreich, was dazu führt, dass es keine umfassende, eindeutige Definition des Begriffs „Variable“ gibt. Malle beantwortet die Frage danach, was Variablen sind, mit den Worten: „Ich glaube, daß diese Frage niemand zufriedenstellend beantworten kann, weil der Variablenbegriff zu schillernd und aspektreich ist. In der mathematischen Literatur werden Variablen meist nur verwendet und nicht definiert“ (Akinwunmi, 2012; Malle, 1993, p. 44).
In Bezug auf die reichhaltigen Bedeutungen, die den Variablen im Unterricht zugeschrieben werden können, haben sich Variablenkonzepte herausgebildet (Akinwunmi, 2012). Diese werden wiederum danach unterschieden, ob sie klären, wofür die Variable in Bezug auf eine gesamte Aufgabe, beziehungsweise auf eine Problemstellung, steht oder unter welchem Blickwinkel sie innerhalb einer Aufgabe betrachtet werden können. Im zweiten Fall wird von

[41] In diesem Kontext werden in der Untersuchung die herausgearbeiteten Bereiche, wie das Argumentieren, Generalisieren, das rein technische Umformen, etc. explizit thematisiert und als eigene Themenbereiche aufgegriffen.
[42] Die Algebra ist hier nach Vollrath und Weigand verstanden, wie in der obig dargestellten Tabelle nachzulesen ist.

Variablenaspekten gesprochen (Specht, 2009). Sie werden in Bezug auf eine Aufgabe betrachtet und Malle (1993) zeigt, dass alle Betrachtungsweisen auf eine Variable bei der Aufgabenlösung zentral sind:

- Unter dem Gegenstandsaspekt wird die Variable als eine unbekannte, nicht näher bestimmte Zahl verstanden.
- Unter dem Kalkülaspekt wird die Variable als ein bedeutungsloses Zeichen betrachtet, mit dem nach bestimmten Regeln operiert wird.
- Unter dem Einsetzungsaspekt wird die Variable als Platzhalter für Zahlen gesehen, für die Zahlen eingesetzt werden dürfen (Malle, 1993, p. 46).

Diese drei Aspekte werden von vom Hofe als Grundvorstellungen der Variablen bezeichnet. Dies impliziert, dass für ein umfassendes Variablenverständnis alle drei Blickwinkel im Unterricht implementiert werden sollen (vom Hofe, 2003).
Die Charakterisierungen dessen, wofür die Variable im jeweiligen Kontext und mit welchem Ziel steht, werden als Variablenauffassungen bezeichnet (Specht, 2009) und zum Beispiel nach Freudenthal oder auch Malle unterschieden[43]:

- Variablen als Unbekannte: Die Variable steht für etwas noch Unbekanntes, hat aber das Ziel berechnet zu werden.
- Variablen als Unbestimmter: Die Variable steht, wie zum Beispiel in Formeln, für beliebige Zahlen, deren Ziel vielmehr die Darstellung allgemeiner Zusammenhänge als deren Berechnung ist.
- Variablen als Veränderliche: Die Variablen bekommen einen dynamischen Charakter und drücken Abhängigkeiten zwischen verschiedenen Variablen aus. Betrachtet wird zum Beispiel die Frage: Wie verhält sich die abhängige Größe, wenn sich die unabhängige Größe verändert[44] (Freudenthal, 1973, 1983)?

Wheeler (1996) hält als Unterrichtsziel der Algebra fest, dass Variablen in jeder Form, also als Unbekannte, als Unbestimmte oder als Veränderliche, von den Schülerinnen und Schüler behandelt werden, als wären sie richtige Zahlen (Wheeler, 1996a). Dies meint also den Rückbezug der Buchstaben zu den konkreten Zahlen. In ähnlicher Form postuliert Freudenthal (1973), dass die jeweilige Bedeutung der Variablen im Unterricht transparent gemacht werden sollte, sowohl wofür sie steht, als auch welche Werte sie annehmen kann.
Insgesamt betrachtet, kommt den Variablen die Bedeutung der Buchstaben, beziehungsweise des Vokabulars in der elementar-mathematischen Formelsprache zu (Hefendehl-Hebeker & Rezat, 2015; Malle, 1993; Usiskin, 1995). Dabei werden durch sie im Unterricht verschiedene Ziele verfolgt. Arcavi (2005) bezeichnet diese als Entwicklung des *symbol sense*. Das bedeutet, dass die Schülerinnen und Schüler einen Sinn für die symbolischen Darstellungsformen in der Algebra entwickeln sollen. Im Einzelnen umfasst der *symbol sense*:

- Das Verständnis dessen zu erlangen, warum Variablen in verschiedenen Situationen verwendet werden müssen. Die Sinnhaftigkeit und Reichweite, zum Beispiel in Verallgemeinerungen soll deutlich werden.

[43] Ainwunmi (2012) und Specht (2009) legen in ihren Arbeiten die Unterscheidung und Herleitung der Variablen und ihren Bedeutungen ausführlich dar. Für diese Arbeit sind die unterschiedlichen Bedeutungen der Variablen aus unterrichtspraktischer Sicht zentral, weshalb auf die erneute literaturbasierte Herleitung verzichtet wird. In Bezug auf die Variablenauffassungen werden die Begriffe Freudenthals verwendet.

[44] Der Vollständigkeit halber werden die Begriffe Malles (Malle, 1993, p. 80) nach einem Konsens in der Forschungsliteratur den Begriffen Freudenthals wie folgt zugeordnet: Einzelzahlaspekt entspricht der Unbekannten, Simultanaspekt entspricht der Unbestimmten und der Veränderlichenaspekt der Veränderlichen (Akinwunmi, 2012).

- Das Bewusstsein dafür zu schaffen, dass erfolgreich symbolische Beziehungen konstruiert werden können, die Informationen beinhalten, um der Problemlösung näher zu kommen.
- Die Fähigkeit zu erlangen, einerseits den Inhalt und die symbolische Gestalt der Terme zu trennen, um effektive Verfahren zur Umformung dieser anzuwenden und andererseits die Fähigkeit Ausdrücke, die Variablen enthalten, in Verbindung mit ihrem Sinn zu sehen, um die Plausibilität der durch Umformungen erzielten Ergebnisse einschätzen zu können.
- Die Fähigkeit zu erlangen, eine mögliche Repräsentationsform für die Variablen zu wählen (zum Beispiel für eine Zahl und ihren Nachfolger n, n+1 oder n-1 und n), diese zu vertreten und gegebenenfalls die Wahl zu revidieren, wenn sie nicht zufriedenstellend war.
- Die Erkenntnis, die der Variablen zugewiesene Bedeutung während des Lösungsprozesses überprüfen zu müssen und in Kontrast zu den Vorannahmen und der Problemstellung zu setzen.
- Die Erkenntnis, dass die gewählten Symbole in verschiedenen Kontexten Unterschiedliches bedeuten können und ein intuitives Verständnis für diese Unterschiede zu entwickeln (Arcavi, 2005).

Dieser letzte Punkt entspricht der geforderten Sensibilität gegenüber den verschiedenen Variablenaspekten und -auffassungen. Deutlich wird in dieser Aufstellung, dass auch der regelhafte Umgang mit den Variablen und Ausdrücken beherrscht werden soll. Regelhaft bedeutet in diesem Zusammenhang zum Beispiel die Anwendung der Rechengesetze, wie dem Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetz und der Rechenregeln, wie dem Punkt- vor Strichrechnen, etc.
Usiskin (1988) formuliert in Bezug auf die Variablen die These: „My thesis is that the purposes we have for teaching algebra, the conceptions we have of the subject, and the uses of variables are inextricably related“ (Usiskin, 1988, p. 9). Damit schlägt er die Brücke zwischen dem, was die Lehrkräfte unter Algebra verstehen, den Zielen, die sie mit ihr verfolgen und dem Gebrauch der Variablen und spezialisiert damit die in Kapitel 2 herausgestellte Bedeutung der Lehrkraft für die Gestaltung des Unterrichts.
Aus diesen verschiedenen Forschungsergebnissen können für die Untersuchung der individuellen Algebra-Curricula die folgenden Hypothesen adaptiert werden:

(A8) Die Bedeutung der Variablen wird von den Lehrkräften als Basis der mathematischen Sprache gesehen.
(A9) Die unterschiedlichen Variablenaspekte werden von den Lehrkräften unterschieden.
(A10) Die unterschiedlichen Variablenauffassungen werden von den Lehrkräften unterschieden.
(A11) Die Beherrschung der Rechengesetze und -regeln wird als zentraler Inhalt angesehen.
(A12) Die Reflexion über die Variablen, ihre Auswahl und Verwendung wird als notwendig angesehen.
(A13) Der Rückbezug der Variablen zu konkreten Zahlen wird als Unterrichtsstrategie verwendet.
(A14) Die Variablen werden im Unterricht in Ermangelung einer umfassenden Definition vor allem verwendet und nicht definiert.
(A15) Die Notwendigkeit der Verwendung von Variablen wird in verschiedenen Kontexten verdeutlicht.
(A16) Zwischen den Zielsetzungen, die mit der Algebra verbunden sind, dem, was unter Algebra verstanden wird und der Nutzung der Variablen wird ein Zusammenhang hergestellt.

3.3. Die Diskrepanz zwischen prozeduralem und konzeptuellem Wissen und die Frage nach dem bedeutungsvollen Lernen von Algebra

Wird die Algebra in ihrer Charakteristik als elementar-mathematische Formelsprache verstanden, so bringt dies das Problem mit sich, die in dieser Sprache geltenden Vokabeln, Regeln und Strukturen, gleich einer Grammatik zu erlernen. Dies wirft das zentrale Dilemma im Lehren der Algebra auf, wenn in diesem Zusammenhang die Unterscheidung zwischen der Syntax und der Semantik vorgenommen wird (Balacheff, 2001). Die Syntax bezeichnet dabei das inhaltsfreie Anwenden von Regeln und meint das rein Kalkül-orientierte Termumformen und Gleichungslösen. Die Semantik meint die In-Bezug-Setzung der Variablen, Terme und dem regelhaften Umgang mit ihnen zum Beispiel zu dem Zahlenrechnen, das Interpretieren der Ergebnisse im Sachkontext und im Prinzip die Kombination des Buchstabenrechnens mit dem jeweiligen Kontext (Akinwunmi, 2012; Kieran, 2013; Malle, 1993; Tietze, 1988).
Diese dichotome Unterscheidung schlägt sich in zwei unterschiedlichen Zugängen zur Algebra nieder: „The structural approach builds meaning internally from the connections generated within the syntactically constructed system. Referential approaches import meaning into the symbol system from external domains of reference“ (Kirshner, 2001, p. 84). Daraus folgt für die Betrachtung der Algebra, dass sie in die Wissenschaft ihrer eigenen Strukturen, Regeln und Formalismen und die Wissenschaft ihrer Anwendung, die ihre Bedeutung und Macht verdeutlicht, unterschieden wird (ebd.; Rojano, 1996). Dabei ist es offensichtlich, dass beide Betrachtungsweisen einander bedingen. Tietze (1988) konnte zudem zeigen, dass die Schülerinnen und Schüler innerhalb des syntaktischen Aspekts der Algebra unterscheiden: Zwischen dem Gleichungslösen, dem sie eher Bedeutung beimessen können und das für sie zum Rechnen gehört und dem Umformen von Termen, bei dem durch die Anwendung von Regeln Zeichenketten manipuliert werden können. Letzteres fällt ihnen dabei nach Tietze (1988) schwerer. Beide Bereiche werden durch die Lernenden strikt voneinander abgegrenzt.
Das Problem ist die Trennung von Inhalt und Form, die als „verhängnisvoll“ (Malle, 1993, p. 15) gilt. So wird die Algebra traditionell als Bereich der Schulmathematik gesehen, „that is dominated by procedures of symbol manipulation and where the presence of the conceptual has been considered all but an oxymoron“ (Bednarz et al., 1996; Kieran, 2013, p. 154). Kieran wirft das Problem der offenbar in der Algebra konkurrierenden Wissensarten, dem prozeduralen und dem konzeptuellen Wissens, auf.
Unter konzeptuellem Wissen wird das, was oft als Verständnis bezeichnet wird, verstanden. Dazu gehören die Richtlinien, die den Inhalt strukturieren, auch als Hintergrundwissen bezeichnet, und auch das Wissen, das es ermöglicht einzelne Bereiche zu verknüpfen. Wohingegen das prozedurale Wissen oft mit Fertigkeiten, Algorithmen oder Strategien verknüpft wird (Rittle-Johnson & Siegler, 1998). Dies ist der Unterscheidung in die Syntax, die dem prozeduralen Wissen und der Semantik, die dem konzeptuellen Wissen zugeordnet werden können, ähnlich.
Für die Umsetzung der Kombination beider Wissensarten im Unterricht gibt es dazu bereits zahlreiche Hinweise. Es wird konstatiert, dass es einerseits ein großer Vorteil sein kann durch den Grad der Formalisierung in der Algebra frei von Interpretationen zu sein, um dadurch die Vorstellung und das Denken zu entlasten und das Operieren zu erleichtern (Hefendehl-Hebeker & Rezat, 2015; Malle, 1993). Andererseits geht dies zum Beispiel nach Fischer et al. (2010) im Unterricht häufig in die Richtung, dass Algebra als sinnfreies Spiel mit Regeln und Gesetzen angesehen wird (Fischer et al., 2010; Kieran, 2013).
Damit wird dem Kalkül zwar eine wichtige Bedeutung zugewiesen, gleichzeitig aber wird die Warnung ausgesprochen dieses mit Vorsicht zu behandeln, um es eben nicht zu einem bedeutungslosen Spiel verkümmern zu lassen.
Hierin besteht aber augenscheinlich die Diskrepanz. Wie im Kapitel zuvor dargelegt wurde, ist es zunächst wichtig, den Umgang mit den „Vokabeln“ und den zugehörigen Regeln zu

erlernen, um sich überhaupt durch die Algebra ausdrücken zu können. Es ist ein Ziel des Algebraunterrichts, die geltenden Regeln sicher zu beherrschen, wobei das Regellernen wiederum ein eigenes kognitionspsychologisches Problem darstellt (Vollrath & Weigand, 2007). Das Regellernen wird mit dem Erlernen von Algorithmen und Schemata verbunden. Freudenthal (1973) bezeichnet die Anwendung von Algorithmen und die Entwicklung von Routinen als „unvermeidlich“ (p. 134) und ergänzt, dass bestimmte Algorithmen einfach gelernt und durch Übung erworben werden müssen (p. 134).
Tietze et al. (2000) definieren ein Schema als:

> „[E]ine spezifische Struktur der Repräsentation von Informationen, die eine Person in ihrem Gedächtnis aufbauen und bei Bedarf aus demselben abrufen kann. Es ist ein organisiertes Wissenssystem, das Objekte, Situationen und Ereignisse beschreibt, und stellt die Repräsentation eines kleinen Ausschnittes der Welt dar. Es enthält Leerstellen (...) die in einer konkreten Situation zu besetzen sind, beim Fehlen dieser Angaben aber aus dem Vorwissen heraus mit typischen Werten gefüllt werden (...). Bezogen auf mathematisches Denken, sind Prozeduren das subjektive Abbild von mathematischen Algorithmen und Regeln; sie kennzeichnen sequentielle Abläufe. Prozeduren können von einem Schema oder einer anderen Prozedur aufgerufen werden“ (p. 66f).

Damit wird auf die Frage des prozeduralen Wissens und der notwendigen Verknüpfung dessen mit dem konzeptuellen Wissen aufgeworfen, denn das „in einem Schema steckende Wissen genügt (...) nicht, man braucht auch ein spezielles Wissen über dieses Schema, also ein Metawissen“ (Malle, 1993, p. 161). Das gilt nicht nur für die Verknüpfung des Schemas mit dem dazugehörigen Metawissen, sondern für die allgemeine Beziehung zwischen dem Kalkül und der zugehörigen Realität (Tietze et al., 2000). Zudem ist es für den Aufbau eines solchen Repräsentationssystems notwendig über das zugehörige konzeptuelle Wissen zu verfügen. Die Notwendigkeit der Verflechtung dieser beiden Wissensarten ist evident. So plädieren Kieran (2013) sowie Rittle-Johnson & Siegler (1998) wiederholt dafür, zu erkennen, dass beide Wissensarten einander bedingen und für den gegenseitigen Erwerb zuträglich sind. Kieran verdeutlicht speziell für die Algebra: „Conceptual understanding serves procedural skills, which in turn provide a foundation for further conceptual development“ (Kieran, 2013, p. 155). Ein Beispiel dafür geben Sfard und Linchevski (1994), wenn sie sagen, dass „the sense of meaningfulnes comes with the ability of ‚seeing’ abstract ideas hidden behind the symbols“ (p. 224). Zu diesem Zweck muss zunächst ein sicherer Umgang mit dem Kalkül gegeben sein, um den von Arcavi (2005) postulierten s*ymbolsense* zu entwickeln.
Die Kombination beider Wissensarten im Unterricht geschieht zumeist über die verwendeten Aufgaben. Zum Beispiel ist das rein schematische Üben eines Verfahrens über die stetige Wiederholung der immer gleichen Prozedur möglich. Dabei zeigt sich, dass die Schülerinnen und Schüler über die Routine den Gebrauch der Prozedur erlernen. Allerdings können sie diese so nicht mit den dahinterstehenden mathematischen Konzepten verbinden (Kieran, 2007; Moyer, 2001). Dabei wird hier in Anlehnung an Kieran (2013) von einem konzeptuellen Verständnis solcher Prozeduren gesprochen, wenn die folgenden drei Merkmale erfüllt sind:

- Die Schülerinnen und Schüler sind in der Lage, spezifische formale Merkmale in Termen und Ausdrücken zu erkennen (zum Beispiel binomische Formeln, quadratische oder lineare Gleichungen).
- Die Schülerinnen und Schüler können Beziehungen zwischen Ausdrücken herstellen (zum Beispiel zwischen ausmultiplizierten und faktorisierten Ausdrücken).
- Sie sind in der Lage die Veränderungen durch die algebraischen Umformungen zu erklären und ihr Verhalten zu rechtfertigen (Kieran, 2013).

Um zu einem solchen konzeptuellen Verständnis zu kommen, müssen die Schülerinnen und Schüler lernen, ihre mit den Manipulationsprozessen verbundenen Handlungen zu reflektieren und sich deren Sinnhaftigkeit klar zu machen (Fischer et al., 2010; Moyer, 2001)[45].
Eine Konkretisierung dieses Zusammenhangs sei in Form der Unterscheidung zwischen manipulativen Fähigkeiten und dem zu erlangenden Struktursinn aufgezeigt:

Exkurs: Struktursinn versus manipulative Fähigkeiten

Zur differenzierten Klärung des Begriffs „Struktursinn" und seiner Abgrenzung zu den klassischen manipulativen Fähigkeiten sollen Hoch und Dreyfus (2006) herangezogen werden. Unter manipulativen Fähigkeiten wird das Lösen einer Gleichung oder die Faktorisierung eines Ausdrucks unter der Hereingabe expliziter Instruktionen verstanden sowie das korrekte Einsetzen in gegebene Formeln. Von einem vorhandenen Struktursinn wird hingegen gesprochen, wenn bekannte Term - und Gleichungsstrukturen erkannt werden und wenn mit zusammengesetzten Termen gearbeitet werden kann. Dies gilt, wenn:

- diese als Einheiten betrachtet werden,
- diese durch geeignete Substitutionen in bekannte Strukturen heruntergebrochen werden, sowohl wenn es sich um zusammengesetzte Terme mit Produkten oder Potenzen, aber ohne Summen oder um zusammengesetzte Terme, die Summen, Potenzen und Exponenten enthalten können, handelt und
- angemessene Umformungen gewählt werden, um die Strukturen am besten wirksam werden zu lassen, also die Struktur so vereinfacht wie möglich darzustellen, bei beiden Arten von Termen ob mit Produkten, Potenzen und Summen oder nur Produkten und Potenzen (Hoch & Dreyfus, 2006, p. 306)

Hoch & Dreyfus (2006) weisen darauf hin, dass beide Arten von Fähigkeiten nicht zwingend miteinander verbunden sind. Die Annahme, dass erhöhte manipulative Fähigkeiten zu einem erhöhten Struktursinn führen, kann nicht bestätigt werden. Vielmehr wird vermutet, dass Schülerinnen und Schüler mit einem hohen Struktursinn eher über manipulative Fähigkeiten verfügen. Es wurde jedoch festgestellt, dass geringe manipulative Fähigkeiten mit einem geringen Struktursinn einhergehen. Dies widerspricht aber nicht der neu erlangten Erkenntnis (Hoch & Dreyfus, 2006)[46]. Würde diese Unterscheidung auf die gegebene Definition Kierans (2013) angewendet werden, so handelt es sich bei dem Struktursinn eher um das konzeptuelle und bei den manipulativen Fähigkeiten eher um das prozedurale Wissen.

Wie der Wert der Kalküls im Unterricht deutlich werden kann, zeigen beispielsweise Fischer et al. (2010) und plädieren für eine eigene „Leitidee", die sich mit der Entwicklung von Kalkülen beschäftigt. Dabei sollen die Lernenden selbst den Wert von Kalkülen erkennen und diese selbst herleiten. Als Beispiel geben sie die Prüfung auf die Gleichwertigkeit von Termen an. Schülerinnen und Schüler sollen anhand figurierter Zahlen Terme entwickeln und deuten. Sie erkennen, dass verschiedene Terme die gleiche Situation beschreiben. Dies sollen sie zunächst durch das Einsetzen prüfen und den Zusammenhang zwischen gleichen Beschreibungen und gleichen Resultaten nach Einsetzung erkennen. Die Schülerinnen und Schüler werden dabei selbst aktiv. Daraus resultierend erfolgt in einem zweiten Schritt, nachdem die Idee der

[45] Ein Beispiel für eine Aufgabe, die das Kalkül mit konzeptuellem Wissen verbindet, zeigt Kieran (2013) ausführlich anhand der Faktorisierung von $x^n - 1$.
[46] An Wegen, wie der Struktursinn der Schülerinnen und Schüler verbessert werden kann, wird als Folge dieser Forschung nun gearbeitet (Hoch & Dreyfus, 2006).

Gleichwertigkeit[47] verstanden worden ist, die Entwicklung eines Kalküls, durch das die Gleichwertigkeit rechnerisch geprüft werden kann. Dabei gilt nach Fischer et al.: „Wenn Lernende selbst in den Prozess des Suchens nach einem geeigneten Kalkül eingebunden sind, werden Termumformungen tiefer verstanden, und eine sinnstiftende Orientierung in dem Themengebiet geboten“ (Fischer et al., 2010, p. 7). Die Eigenaktivität der Schülerinnen und Schüler spielt dabei die zentrale Rolle, sowohl in der Durchführung als auch in der Herleitung der verwendeten Kalküle. Auf diese Weise ist es auch möglich auf einer Metaebene das benötigte Wissen zu diskutieren, zu deuten und anzuwenden.
Die zuvor geführte Diskussion zeigt, dass der Wunsch besteht, die Semantik und Syntax der Algebra sinnvoll zu verbinden. Die Frage nach dem „Wie“ ist dabei nicht abschließend beantwortet. So bleibt die 1985 von Hirscher aufgeworfene Frage nach dem „Wie viel Termumformung braucht der Mensch?“ auch jetzt noch unbeantwortet (Hefendehl-Hebeker & Rezat, 2015).
Die aus dieser Auseinandersetzung generierten Hypothesen für die Untersuchung der individuellen Curricula lauten wie folgt:

(A17) Die Unterscheidung von prozeduralem und konzeptuellem Wissen wird von den Lehrkräften explizit wahrgenommen.
(A18) Die Verbindung beider Wissensarten stellt für die Lehrkräfte eine Herausforderung im Unterricht dar.
(A19) Die Erlangung des Struktursinns wird im Unterricht explizit gefördert.

3.4. Zugänge zur Algebra

Im Zusammenhang mit der Frage nach dem Grad des zu unterrichtenden Kalküls und der Möglichkeit der Sinnstiftung im Algebraunterricht stehen vier durch die Algebra-didaktische Forschung vorgeschlagene Zugänge zur Algebra: Das Generalisieren, das Problemlösen, das Modellieren und der Zugang über die funktionalen Zusammenhänge und ihr jeweiliges Verhältnis zum Kalkül-orientierten Umgang mit der Algebra[48]. Je nach Zugang ergibt sich die Algebra als Lehre einer Sprache mit ihrer eigenen Grammatik, als Lehre des Problemlösens und der Problemlösestrategien, als Lehre von Regeln zur Verallgemeinerung, als Lehre des Beweisens und Validierens oder als Lehre vom Zusammenhang zwischen den Größen und ihrer jeweiligen Abhängigkeit (Bednarz et al., 1996). Bednarz et al. (1996) subsummieren dazu, dass alle Zugänge mit jeweils unterschiedlichen theoretischen Annahmen und epistemologischen Überzeugungen verbunden sind, die aber auch zu jeweils unterschiedlichen, bereits bei den Schülerinnen und Schülern nachgewiesenen Problemen führen (Bednarz et al., 1996). Ein Zugang nur auf eine der Arten wird dabei nicht empfohlen. Vielmehr wird die ausgeglichene Vermittlung aller Komponenten gefordert, mit dem Ziel die Bedeutsamkeit der Algebra zu verdeutlichen. Denn, so die These von zum Beispiel Bell (1988), nur die erlebte Sinnhaftigkeit kann die Schülerinnen und Schüler dazu befähigen, die Relevanz der Algebra, ihrer Strukturen und die mit ihr verknüpften Konzepte wie der Variablen und auch dem Beweisen, tatsächlich zu verstehen (Bell, 1988).
Gleichzeitig sind diese Zugänge nicht trennscharf zueinander. So postuliert zum Beispiel Lee (1996), die sich mit dem generalisierenden Zugang zur Algebra beschäftigt, dass das Genera-

[47] Die beschriebene Leitidee enthält weitere Argumentationsschritte, die in Fischer et al. (2010) nachgelesen werden können. Als Erläuterung sei hinzugefügt, dass unter Gleichwertigkeit die Einsetzungs- und Beschreibungsgleichheit gemeint ist (Fischer et al., 2010).
[48] Das zuvor skizzierte Problem, die Algebra nicht zu einem sinnlosen Spiel verkommen zu lassen, führt zu der Genese dieser Ansätze. Dies ist zum Beispiel daran zu erkennen, dass alle die in diesem Abschnitt benannten Ansätze ihre Auseinandersetzung damit beginnen, wie genau dieses vermieden werden kann.

lisieren, mit dem Ziel allgemeine Formeln zu entwickeln, Bestandteil der anderen Zugänge sei (Lee, 1996) und diese wiederum aber auch benötigt, weil das Generalisieren als solches nicht Kontext-frei existiert. Der Unterschied zwischen dem Generalisieren und dem Problemlösen ist laut Radford (1996) der, dass es beim Generalisieren, um das Auffinden einer allgemeinen Formel (im Zusammenhang mit der Variablen als Unbestimmter stehend) und beim Problemlösen um die Bestimmung einer noch unbekannten Zahl geht (im Zusammenhang mit der Variablen als Unbekannter). In diesem Zusammenhang ist die epistemische Besonderheit, dass bei der analytischen Sichtweise, die dem Problemlösen zu Grunde liegt, davon ausgegangen wird, dass die Variable wie etwas Bekanntes behandelt wird. Dies ist aber rein hypothetisch. Beim Generalisieren hingegen geht es um Begründung und Rechtfertigung von Schlussfolgerungen, was einem Beweisprozess entspricht. Dies geschieht auf einer nicht hypothetischen Ebene. Damit sind aber zwei Ebenen des algebraischen Denkens aufgezeigt, die aber dennoch beide thematisiert werden sollten. Wie die Kombination beider Denkarten aussieht, bleibt offen (Radford, 1996). Das Problem des Generalisierens ist darüber hinaus, dass es ein sehr weiter Begriff ist, der unbestritten ein Ziel und Bestandteil der Algebra ist. Dennoch subsummiert Wheeler (1996), dass zwar viele Beispiele für generalisierende Aufgabenstellungen gegeben werden können, der generalisierende Zugang zur Algebra aber mehr eine Idee ist als ein tatsächlich anwendbarer Ansatz (p. 321).
Zur Anwendbarkeit und Nutzbarkeit eines generalisierenden Ansatzes äußern sich Stacey und Macgregor (2001), die zwei curriculare Ansätze zur Einführung der Algebra unter dem Aspekt des Generalisierens vergleichen. Aus curricularer Sicht gibt es zwei Möglichkeiten sich dem anzunähern: Über den klassischen Ansatz, bei dem zunächst die algebraische Schreibweise vermittelt wird, wobei die Variable als Unbekannte behandelt wird. Primär werden zunächst die Regeln im Umgang mit den Variablen vermittelt, wie das Zusammenfassen, Vereinfachen oder das Gleichungslösen. Im weiteren Verlauf werden diese dann zum Verallgemeinern, zum Beispiel bei funktionalen Zusammenhängen eingesetzt. Im entgegengesetzten Strukturansatz werden die Variablen zuerst als Unbestimmte in Formeln und verallgemeinerten Sachverhalten genutzt. Dies führt dann zu einem Verständnis funktionaler Zusammenhänge und den zugehörigen algebraischen Hintergründen und später dann zum Aufstellen und Lösen von Gleichungen[49]. Aber Stacey und Macgregor (2001) konstatieren: „In published research studies, we have found little evidence that might support the change from the traditional ‚letter-as-specifc-unknown' approach to the pattern-based ‚letter-as-variable' approach" (Stacey & Macgregor, 2001, p. 142). Dennoch bleibt die Idee zunächst mit der algebraischen Formulierung anhand einfacher Problemstellungen zu beginnen, auch wenn diese aufgrund des an der Stelle noch fehlenden Wissens über die Verwendung der algebraischen Sprache eventuell unbeholfen wirken mag (Bednarz & Janvier, 1996a; Janvier, 1996).
Der Ansatz die Algebra über das Modellieren einzuführen wird von Wheeler aber als wenig praktikabel gekennzeichnet (Wheeler, 1996a). Modellieren wird als zweiphasiger Prozess beschrieben, der zunächst die Phase des Formulierens enthält. Hier wird die vorliegende Situation analysiert und es werden Annahmen über die enthaltenen Größen und ihre Beziehungen zueinander getroffen, die wiederum aus Überlegungen, Schätzungen oder Experimenten resultieren. Aus diesen Annahmen werden Folgerungen für die Lösung der Situation abgeleitet. In der zweiten Phase, der Validierungsphase, werden die Annahmen überprüft und getestet, mit dem Ziel sie zu verifizieren. Die Annahmen und Folgerungen sind dabei konkret anhand der Realität abgeleitet und die angestellten Berechnungen, die modellinhärent sind, bleiben auf einer abstrakteren von der Realität unabhängigen Ebene. Auf diese Weise erfolgt eine Kombination beider Ebenen. Diese Art des Modellierens kommt nur sehr selten im Algebraunterricht vor (Janvier, 1996). Das Problem, das Wheeler (1996a) darin sieht, ist ähnlich wie bei dem Ansatz des Generalisierens. Situationen benötigen eine gewisse Komplexität, um

[49] Die Beschreibung des Strukturansatzes bleibt dabei sehr vage (Stacey & MacGregor, 2001).

ein so vorgeschlagenes zweiphasiges Vorgehen sinnvoll zu ermöglichen. Die Schülerinnen und Schüler sind aber Novizen in diesem Feld und verfügen nur über beschränkte Kenntnisse. Es folgt daher, dass es nur möglich ist, die Algebra über das Modellieren einzuführen, wenn die Situationen entsprechend vereinfacht werden (p. 321). Dann wiederum bleibt die Frage nach dem Unterschied zum Problemlösen.
Das Problemlösen ist der durch die Historie geprägte und nach wie vor gängigste Ansatz. Hierbei wird die Algebra direkt mit einem konkret formulierten Problem verbunden (Wheeler, 1996a, 1996b). Generell enthalten diese oft in Textaufgaben vorhandenen Probleme Angaben zu den relevanten Größen, kennzeichnen sie als bekannt oder unbekannt, geben die Beziehung zwischen ihnen und die Beziehungsart an (Bednarz & Janvier, 1996a).
Zentral sind dabei immer das Aufstellen einer Gleichung und deren Lösung über die Anwendung des algebraischen Kalküls (Bell, 1996b). Ein Problem, dass mit der Problemlösung in dieser Form verbunden ist, basiert erneut auf der bereits diskutierten Zweiteilung zwischen diesen beiden Prozessen. Rojano (1993) formuliert dies wie folgt:

> „The well known separation that students tend to make between algebraic manipulation and its' use in problem solving may originate in an educational approach based on this oversimplified vision of algebra, which hides the significance of its origins and the semantic background of its grammar" (p. 55).

Die Überwindung dieses Problems ist möglicherweise über die von Bell geforderte Kombination der Ansätze möglich. Konkrete Forschungsergebnisse bleiben aber ein Forschungsdesiderat. In diesem Kontext steht auch die Problematik des Übergangs von der arithmetischen zur algebraischen Problemlösung, die ein zentrales Problem darstellt, weil dies für die Schülerinnen und Schüler einen großen kognitiven Sprung bedeutet (Bednarz & Janvier, 1996). Wie diese abgemindert werden kann, zum Beispiel durch eine Propädeutik der Algebra schon in unteren Klassenstufen, wird vor allem in der internationalen Fachdidaktik, aber noch sehr wenig in der deutschen Forschung untersucht (Hefendehl-Hebeker & Rezat, 2015)[50].
Der Ansatz über die funktionalen Zusammenhänge hängt sehr eng mit der Einführung der Rechnertechnologie im Unterricht zusammen. Dieser Bereich ist stark beforscht und beschäftigt sich mit deren Einsatz als Unterstützung für den Zugang zur Algebra über das Modellieren und über die Funktionen. Vielfach werden dazu verschiedene Lernumgebungen entwickelt und getestet (Hefendehl-Hebeker & Rezat, 2015). Wird der Zugang zur Algebra über die Funktionen gewählt, sollen die Schülerinnen und Schüler Erfahrungen mit Funktionen und Funktionsfamilien sammeln, die in möglichst realen Kontexten angeboten werden. Es handelt sich um Modellierungsprozesse, wobei es aber immer um Größen und deren Abhängigkeiten geht. Im Fokus steht nicht mehr das händische Umformen von Termen und Gleichungen oder das Lösen dieser. Zu diesem Zweck gibt es die unterstützende Technologie. Der funktionale Ansatz setzt eher auf die Modellbildung und deren Evaluation und Gebrauch. In diesem Punkt ähnelt er dem Modellierungsansatz, allerdings ist die Modellwahl nicht so offen, da im zu wählenden Modell immer Funktionen zentral sind. Auch die Ansätze des Problemlösens und des Generalisierens finden sich in dieser Herangehensweise wieder. Generalisierungen kommen zum Beispiel vor, wenn der Einfluss von Parametern auf den Funktionsgraphen untersucht und dieser in einer allgemeinen Formel festgehalten wird. Problemlösen findet statt,

[50] Die Diskussion über den Übergang von der Arithmetik zur Algebra ist viel untersucht und vor allem als Begründung für Fehler in der Algebra herangezogen worden, weil zum Beispiel aus der Arithmetik eingeprägte Strukturen unreflektiert übernommen werden (z. B. Tietze, 1988). Auf eine Darlegung dieser Forschungsdiskussion soll an dieser Stelle verzichtet werden, da es über die Feststellung des Problems keine weiterführenden Konsequenzen für den hier untersuchten konkreten Algebraunterricht in der siebten und achten Klassenstufe gibt, vielmehr wird auf eine Propädeutik gesetzt, die an dieser Stelle aber nicht weiter untersucht wird. Zur Propädeutik der Algebra im Arithmetik-Unterricht sei zum Beispiel auf das Buch von Cai und Knuth (2011) mit dem Titel „Early Algebraization" oder auf „Algebra in the Early Grades" von Kaput et al. (2008) verwiesen.

indem Lösungsprozesse geplant und reflektiert und diese anhand von konkreten Textaufgaben bearbeitet werden (Heid, 1996). Insofern verbindet dieser Ansatz Teile der dargestellten Zugänge mit dem Zusatz, dass von händischen, symbolischen Umformungen abgewichen wird und die symbolische Formulierung der Probleme im Zentrum steht. Obschon die Bedeutung der Beherrschung des händischen Kalküls schon in Bezug auf den sich in diesem Kontext entwickelnden Struktursinn elementar ist (Kieran, 2007). Bell (1996) ergänzt, dass unabhängig von den jeweiligen Zugängen die Beherrschung des Kalküls essentiell ist[51].

Die Diskussion dazu, welcher Zugang zur Algebra gewählt wird, hängt eng damit zusammen, wie die Algebra, das algebraische Denken und der Stellenwert des Kalküls verstanden und mit welchem Ziel diese vermittelt werden. Darüber herrscht aber kein Konsens[52]. Die Frage nach dem „Wie" ist nicht abschließend beantwortet.

Dennoch sollen die in der Algebra zu vermittelnden Fähigkeiten in Anlehnung an Bell (1996) aufgeführt werden. Für ihn sind die folgenden vier Aspekte beziehungsweise Fähigkeiten zentral[53]:

- mit symbolischen Ausdrücken zu operieren,
- die algebraische Notation korrekt und im Zusammenhang lesen und selbst verfassen zu können,
- Ausdrücke richtig und flüssig umformen zu können und
- das strategische Know-how zu erlangen, um die algebraische Sprache anzuwenden und zum Generalisieren nutzen zu können, im Aufstellen und Umformen von Gleichungen und in der Arbeit mit Funktionen und Formeln (Bell, 1996b, p. 175).

Was die bisherige Auseinandersetzung zudem zeigt, ist, dass ein Ziel der algebraischen Ausbildung in verschiedenen Formen die Verallgemeinerung von numerischen Zusammenhängen und deren zugehörigen Operationen ist, unabhängig vom jeweiligen Zugang. Zudem soll unbedingt vermieden werden, dass die Algebra nur als ein Spiel der Buchstaben und der Zeichen begriffen wird, sondern, dass diese immer einen inhaltlichen Bezug haben soll[54] (Hefendehl-Hebeker & Rezat, 2015). Der Wunsch nach einem sinnstiftenden Zugang wird sehr deutlich. Nach Kieran (2007) kann die Sinnstiftung in der Algebra dabei über drei Punkte entstehen:

- Der Sinn kann aus der Mathematik heraus entstehen, zum Beispiel über die algebraischen Strukturen, die im Umgang mit der symbolischen Darstellung entstehen oder über die verschiedenen mathematischen Darstellungsformen, wenn also zum Beispiel Graphen, Tabellen und Terme miteinander verbunden werden[55].
- Der Sinn kann durch verschiedene externe Problemkontexte entstehen (wie zum Beispiel in den oben genannten Zugängen zu sehen).
- Der Sinn kann auf einer weder mit der Mathematik noch mit den Problemkontexten verknüpften Ebene entstehen, die individuell ist, zum Beispiel in Form von persönlichen Erfahrungen, Gesten, der Körpersprache und dem was die Lernenden mit den behandelten Inhalten verknüpfen.

[51] Vgl. Kapitel 3.3.

[52] Sehr ausführliche theoretische Auseinandersetzungen finden sich zum Beispiel in den Büchern „Perspectives on School Algebra" (Sutherland et al., 2001) oder „Approaches to Algebra" (Bednarz et al., 1996).

[53] An dieser Stelle ist die Parallelität zu den in Abschnitt 3.1 gegebenen Definitionen klar erkennbar. Sie wird dennoch noch einmal aufgeführt, um zu verdeutlichen, dass dem Kalkül eine wesentliche Aufgabe im Erlernen der Algebra zukommt.

[54] Es gibt zahlreiche Analysen dazu, welche Beschaffenheit die verschiedenen Aufgaben im Unterricht zum Generalisieren, Problemlösen oder Modellieren haben sollten und welche Probleme es mit dem aktuellen Aufgabendesign gibt (z.B. Bednarz et al, 1996). Eine Aufgabenanalyse und -klassifikation ist aber nicht Ziel der vorliegenden Untersuchung, daher wird auf diese nicht näher eingegangen. Vielmehr geht es um den Unterrichtsstil der Lehrkräfte, die von den Lehrkräften gewählten oder beispielhaft genannten Aufgaben dienen der Identifikation des Unterrichtsstils.

[55] Hier kann das Beispiel der Kalkülentwicklung von Fischer et al. (2010) hinzugezählt werden.

Daraus werden die folgenden Hypothesen für die Untersuchung der individuellen Curricula der Lehrkräfte abgeleitet:

(A20) Die Sinnstiftung gilt den Lehrkräften als begründendes Element in der Begründung ihrer Unterrichtsstrategie.
(A21) An die verschiedenen Möglichkeiten, Sinn entstehen zu lassen, wird im Unterricht der Lehrkräfte angeknüpft.
(A22) Die unterschiedlichen Zugänge: Algebra als Sprache, Algebra als Problemlöseinstrument, Algebra als Instrument zur Verallgemeinerung, Algebra als Modellierungsinstrument und Algebra als Instrument zur Darstellung verschiedener Größen und ihrer Zusammenhänge lassen sich in den Argumentationsstrukturen der Lehrkräfte wiederfinden.
(A23) Der Ansatz des Problemlösens wird aufgrund seiner Tradition am prominentesten vertreten sein und den Primat gegenüber dem Generalisieren besitzen.
(A24) Die klassische Herangehensweise, bei der zunächst die syntaktischen Grundlagen gelegt und erst später auf die spezifischen Kontexte eingegangen wird, wird präferiert.

3.5. Lernschwierigkeiten in der Algebra

Die zuvor geführte Auseinandersetzung zeigt zentrale Bereiche auf, in denen Schwierigkeiten der Schülerinnen und Schüler im Umgang mit der Algebra erwartet werden können[56]. Beim Übergang von der Arithmetik zur Algebra verändern viele für die Schülerinnen und Schüler gewohnte Zeichen ihre Bedeutung. Beispiele für die Bedeutungsänderungen sind:

- Die Konkatenation, wenn also zuvor der gemischte Bruch 4½ gegeben ist, impliziert das die Addition von 4 und ½ wohingegen 2x die Multiplikation von 2 und x bedeutet.
- Die Operationszeichen, die zuvor eine Handlungsaufforderung darstellten, wenn 2+3 addiert werden sollten, sind jetzt Teil eines Zahlnamens, wenn 3+x beschreibt, dass zu einer unbekannten Zahl 3 addiert wird.
- Das Gleichheitszeichen impliziert in der Arithmetik eine Aufgabe-Ergebnis-Deutung, während es in der Algebra als Vergleichszeichen gesehen wird, das Zahlen, Zustände und Wirkungen vergleicht (Malle, 1993, p. 137f; Tietze, 1988). Dabei erwarten die Schülerinnen und Schüler bei einem Gleichheitszeichen ein geschlossenes Ergebnis, das zum Beispiel keine Operationszeichen mehr enthält (Tietze, 1988).

Darüber hinaus entstehen Fehler in der Anwendung der Prozeduren, zum Beispiel das Anwenden falscher Regeln (Zähler plus Zähler und Nenner plus Nenner - fehlerhafte Anwendung der Regel „Gleiches zu Gleichem“), das Übergeneralisieren oder auch das falsche Linearisieren (Malle, 1993; Tietze, 1988). Zudem können Verständnisprobleme auftreten, wenn die in der Aufgabenstellung gegebenen Informationen nur partiell aufgenommen werden (Malle, 1993). Rein inneralgebraisch wurde festgestellt, dass ein nur rudimentär ausgebildetes Variablenverständnis (zum Beispiel nur der Einsetzungsaspekt) bei Nicht-Standardaufgaben zu fehlerhaftem Verhalten führt (Tietze, 1988). Im Umgang mit Variablen tritt generell ein Unverständnis der Schülerinnen und Schüler auf. Dieses wird aber nicht auf die kognitiven Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler zurückgeführt. Vielmehr werden Variablen auf der Basis der Intuition, von Schätzungen oder basierend auf Bedarfsschemata interpretiert, auf-

[56] Die Untersuchung von Lernschwierigkeiten ist kein Bestandteil der vorliegenden Arbeit. Dennoch können die durch die Lehrkräfte festgestellten Lernschwierigkeiten ihre Entscheidungen im Unterricht beeinflussen. Es ist zudem interessant, worauf die untersuchten Lehrkräfte die jeweiligen Probleme zurückführen, wenn sie Gründe explizieren, im Kontrast zu den durch die Forschung gegebenen Erklärungen. Die Aufstellung erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit.

grund von „misleading teaching materials“ (MacGregor & Stacey, 1997, p. 15), das nicht verdeutlicht, wie konsistent die mathematische Notation im Prinzip ist. Dies löst Fehlkonzepte aus, die oft über Jahre stabil bleiben (Macgregor & Stacey, 1997). Die oft fehlende Verknüpfung der abstrakten Arbeit auf der symbolischen Ebene mit anderen Formen der Repräsentation, die eine Evaluation der eigenen Umformungen erlauben würde, stellt ein weiteres der Algebra inhärentes Problem dar (Kaput, 1989). Zentral ist darüber hinaus die Übersetzung von Textaufgaben in die algebraische Sprache in Form von Gleichungen (Franke & Wynands, 1991; Kieran, 2007). Dabei wurde zudem festgestellt, dass den Schülerinnen und Schülern die Arbeit rein auf der Symbolebene nicht so schwer fällt, wie die Verknüpfung beider Ebenen (Franke & Wynands, 1991). Eine mögliche Erklärung dafür, kann die Hypothese Tietzes (1988) sein, der konstatiert, dass die Schulalgebra für die Schülerinnen und Schüler eine „Kommode mit streng getrennten Schubfächern“ ist (p. 194).
Darin zeigt sich, dass sich die Trennung von Inhalt und Form (s. Kapitel 3.3) direkt in den Fehlern der Schülerinnen und Schüler niederschlägt.
Zur der Bewertung von Fehlern der Schülerinnen und Schüler durch die Lehrkräfte und ihrem Umgang mit diesen halten sowohl Kieran (2007) als auch Tietze (1988) fest, dass es ein großes Problem ist, dass die fachdidaktischen Forschungsergebnisse kaum bis gar nicht an die Lehrkräfte weitergegeben werden. Dies führt dazu, dass sehr viele Fehler in ihrer Genese nicht verstanden werden, weil zum Beispiel Erkenntnisse das Lernen der Schülerinnen und Schüler betreffend nur unzureichend in die Lehreraus- und Weiterbildung integriert werden. Tietze (1988) spitzt dies zu und gibt als Folge an, dass Lehrerinnen und Lehrer oft Begründungen für Fehler bei den Schülerinnen und Schülern suchen. Dabei seien stabile Faktoren, die nicht durch die Lehrperson beeinflusst werden können, wie die Intelligenz oder die Begabung, beliebte Begründungen, wohingegen der eigene Unterricht oder die eigene Rolle als Lehrperson außen vor gelassen wird (p. 197). Aus diesen Erkenntnissen werden die folgenden zwei Hypothesen für die vorliegende Untersuchung abgeleitet:

(A25) Die Lehrkräfte werden als Fehlerursachen vornehmlich die Person und die Eigenschaften der Schülerinnen und Schüler heranziehen.
(A26) Fehler der Schülerinnen und Schüler werden sowohl auf der rein symbolischen Ebene, als auch in der Übersetzungsphase von Textaufgaben in die symbolische Sprache festgestellt.

4. Forschungsfragen

In der vorhergehenden Auseinandersetzung wurde zunächst in Kapitel 2 aufgezeigt, welche Bedeutung individuelle Curricula besitzen und inwiefern es sich lohnt, diese zu erforschen. Die folgenden begrifflichen Festlegungen und Annahmen werden aus den vorangegangenen Ausführungen in Kapitel 2 übernommen:

Als individuelles Curriculum werden alle Überlegungen der Lehrkräfte bezeichnet, die die Auswahl des Stoffinhalts und deren Begründung betreffen.

Subjektive Theorien sind ein relativ stabiles System von Kognitionen mit einer zumindest impliziten Argumentationsstruktur, die parallel zu wissenschaftlichen (‚objektiven') Theorien die Funktion der Erklärung, Prognose und Technologie erfüllen und im Dialog-Konsens rekonstruiert werden können. Sie können durch die Ziel-Mittel-Argumentation dargestellt werden, wobei auf die impliziten Argumentationsstrukturen fokussiert wird, indem die subjektiven Ziele und die Relationen zwischen ihnen durch „Wenn-dann"-Sätze beschrieben werden.

Zentral sind die folgenden Annahmen den Forschungsrahmen betreffend, die in Kapitel 2 literaturbasiert hergeleitet worden sind:

(1) Lehrkräfte sind der entscheidende Faktor bei der Planung und Gestaltung des Unterrichts.
(2) Lehrerinnen und Lehrer entscheiden begründet welche Inhalte auf welche Weise unterrichtet werden.
(3) Lehrkräfte sind reflexive Experten ihres Berufs. Sie sind in der Lage auf Basis ihrer Erfahrungen, ihres professionellen Wissens und ihrer subjektiven Theorien unterrichtliche Ziele zu formulieren, Rahmenbedingungen zu evaluieren und geeignete Mittel zur Erreichung dieser Ziele zu wählen.
(4) Die Planungsgedanken der Lehrkräfte die Auswahl und Begründung den Stoffinhalt betreffend werden als individuelle Curricula verstanden.
(5) Lehrkräfte halten subjektive Theorien zu den Zielen des Mathematikcurriculums und des Algebracurriculums, zum Stoffinhalt der Algebra und zum Lernen und Lehren von Mathematik. (Äquivalent dazu ist die Annahme, dass Beliefs Einfluss auf die Planungsentscheidungen der Lehrkräfte nehmen.)
(6) Die individuellen Curricula können durch das Konstrukt der subjektiven Theorien, das dem FST entlehnt ist, rekonstruiert werden. Beschrieben werden diese durch Ziel-Mittel-Argumentationen gemäß der in Kapitel 5 beschriebenen Methodik.
(7) Die individuellen Curricula der Lehrkräfte unterscheiden sich je nach mathematischer Domäne.
(8) Die individuellen Curricula der Lehrkräfte lassen sich über ihre globalen Beliefs grob in Typen einteilen. Die durch die subjektiven Theorien beschriebenen individuellen Curricula ergänzen diese Typen durch präzise Beschreibungen der Argumentationsstrukturen.
(9) Wenn die Beliefs der Lehrkräfte ihre Planungsentscheidungen beeinflussen, dann haben sie indirekt einen Einfluss auf das Lernen der Schülerinnen und Schüler.

Der Annahme einer Domänenspezifität der individuellen Curricula folgend, wurde sich entschieden die Domäne Algebra zu untersuchen. Aus diesem Grund wurden in Kapitel 3 didaktische Grundlagen den Algebraunterricht betreffend analysiert. Dabei wurden theorie- und literaturgeleitet die folgenden Hypothesen über die mögliche Beschaffenheit der individuellen Curricula der Lehrkräfte in der Algebra generiert:

(A1) Die individuellen Ziele der Lehrkräfte in Bezug auf ihr Algebra- und des Mathematikcurriculum unterscheiden sich nur unwesentlich (vgl. Kapitel 3.1).
(A2) Die Algebra wird von den Lehrkräften als Sprache mit einem eigenen Regelsystem charakterisiert (vgl. Kapitel 3.1).
(A3) Der Umgang mit Termen, Variablen und Gleichungen nimmt einen festen Stellenwert im individuellen Algebracurriculum der Lehrkräfte ein (vgl. Kapitel 3.1).
(A4) Die Beschreibungen des stofflichen Inhalts der Algebra ähneln sich unabhängig von der jeweiligen Lehrkraft sehr (vgl. Kapitel 3.1).
(A5) Die Unterscheidung in die einzelnen Bereiche des algebraischen Denkens wird durch die Lehrkräfte thematisiert (vgl. Kapitel 3.1).
(A6) Die Umsetzung der genannten algebraischen Tätigkeiten stellt eine Zieldimension des individuellen Algebracurriculums dar (vgl. Kapitel 3.1).
(A7) Als Ziel des Algebracurriculums wird der Beitrag zur Allgemeinbildung formuliert (vgl. Kapitel 3.1).
(A8) Die Bedeutung der Variablen wird von den Lehrkräften als Basis der mathematischen Sprache gesehen (vgl. Kapitel 3.2).
(A9) Die unterschiedlichen Variablenaspekte werden von den Lehrkräften unterschieden (vgl. Kapitel 3.2).
(A10) Die unterschiedlichen Variablenauffassungen werden von den Lehrkräften unterschieden (vgl. Kapitel 3.2).
(A11) Die Beherrschung der Rechengesetze und -regeln wird als zentraler Inhalt angesehen (vgl. Kapitel 3.2).
(A12) Die Reflexion über die Variablen, ihre Auswahl und Verwendung wird als notwendig angesehen (vgl. Kapitel 3.2).
(A13) Der Rückbezug der Variablen zu konkreten Zahlen wird als Unterrichtsstrategie verwendet (vgl. Kapitel 3.2).
(A14) Die Variablen werden im Unterricht in Ermangelung einer umfassenden Definition vor allem verwendet und nicht definiert (vgl. Kapitel 3.2).
(A15) Die Notwendigkeit der Verwendung von Variablen wird in verschiedenen Kontexten verdeutlicht (vgl. Kapitel 3.2).
(A16) Zwischen den Zielsetzungen, die mit der Algebra verbunden sind, dem, was unter Algebra verstanden wird und der Nutzung der Variablen wird ein Zusammenhang hergestellt (vgl. Kapitel 3.2).
(A17) Die Unterscheidung von prozeduralem und konzeptuellem Wissen wird von den Lehrkräften explizit wahrgenommen (vgl. Kapitel 3.3).
(A18) Die Verbindung beider Wissensarten stellt für die Lehrkräfte eine Herausforderung im Unterricht dar (vgl. Kapitel 3.3).
(A19) Die Erlangung des Struktursinns wird im Unterricht explizit gefördert (vgl. Kapitel 3.3).
(A20) Die Sinnstiftung gilt den Lehrkräften als begründendes Element in der Begründung ihrer Unterrichtsstrategie (vgl. Kapitel 3.4).
(A21) An die verschiedenen Möglichkeiten, Sinn entstehen zu lassen, wird im Unterricht der Lehrkräfte angeknüpft (vgl. Kapitel 3.4).
(A22) Die unterschiedlichen Zugänge: Algebra als Sprache, Algebra als Problemlöseinstrument, Algebra als Instrument zur Verallgemeinerung, Algebra als Modellierungsinstrument und Algebra als Instrument zur Darstellung verschiedener Größen und ihrer Zusammenhänge lassen sich in den Argumentationsstrukturen der Lehrkräfte wiederfinden(vgl. Kapitel 3.4).

(A23) Der Ansatz des Problemlösens wird aufgrund seiner Tradition am prominentesten vertreten sein und den Primat gegenüber dem Generalisieren besitzen (vgl. Kapitel 3.4).

(A24) Die klassische Herangehensweise, bei der zunächst die syntaktischen Grundlagen gelegt und erst später auf die spezifischen Kontexte eingegangen wird, wird präferiert (vgl. Kapitel 3.4).

(A25) Die Lehrkräfte werden als Fehlerursachen vornehmlich die Person und die Eigenschaften der Schülerinnen und Schüler heranziehen (vgl. Kapitel 3.5).

(A26) Fehler der Schülerinnen und Schüler werden sowohl auf der rein symbolischen Ebene, als auch in der Übersetzungsphase von Textaufgaben in die symbolische Sprache festgestellt (vgl. Kapitel 3.5).

Aus der Verbindung des theoretischen Konstrukts der individuellen Curricula und dem inhaltlichen Bereich der Algebra folgt die Frage danach, welche individuellen Curricula die Lehrkräfte im Bereich der Algebra halten. Dies ist das primäre Interesse der vorliegenden Arbeit und wird in Folge dessen in die folgenden forschungsleitende Fragestellungen aufgegliedert:

1. Welche individuellen Curricula halten die Lehrkräfte in der Algebra der Klassenstufen 7 und 8?

   Dazu werden die subjektiven Theorien der einzelnen Lehrkräfte zu den folgenden Bereichen untersucht und im Einzelnen dargelegt:

   i. Stoffinhalt des Algebracurriculums
   ii. Ziele des Algebracurriculums
   iii. Ziele des Mathematikcurriculums
   iv. Lernen der Schülerinnen und Schüler
   v. Lehren - Wie gelingt guter Unterricht?

2. Wie grenzen sich die individuellen Curricula der einzelnen Lehrkräfte gegeneinander ab?

   Zu diesem Zweck werden die einzelnen Fälle miteinander verglichen und im Zuge der Minimal- und Maximalkontrastierung erfolgt eine Typisierung der Fälle (vgl. Kapitel 7).

3. Welche Gemeinsamkeiten und Unterschiede gibt es bei dem Vergleich der individuellen Curricula der Lehrkräfte in der Algebra mit denen in der Arithmetik, Geometrie, Stochastik und Analysis?

   Der Vergleich bezieht sich sowohl auf die grobe Typisierung der individuellen Curricula in Bezug auf die globalen Beliefs, aber auch auf Vergleiche in Bezug auf punktuelle Planungsentscheidungen (vgl. Kapitel 8).

5. Methodische Überlegungen

Für die Auswahl einer Methode in der empirischen Sozialforschung gilt die Angemessenheit dieser für das jeweilige Material sowie die zu untersuchende Fragestellung als entscheidendes Kriterium (Mayring, 2013). Zur Annäherung an das theoretische Konstrukt der individuellen Curricula wurde bereits mehrfach das Forschungsprogramm Subjektive Theorien (FST) erprobt, das durch Groeben et al. (1988) entwickelt worden ist. Zum Beispiel konnten Eichler (2005) und in der Folge Girnat (2016) die individuellen Curricula von Lehrkräften in der Stochastik und der Geometrie mit Hilfe des FST herausarbeiten. Eichler (2005) stellte heraus, dass sich diese Methode für die Rekonstruktion der individuellen Curricula als angemessen erwiesen hat.

Da diese Arbeit die individuellen Curricula von Lehrkräften in der Algebra herausstellen möchte und zudem der bilaterale Vergleich zu den bestehenden Arbeiten zu individuellen Curricula angestellt werden soll[57], ist die Nutzung derselben Methodik praktikabel und zielführend[58].

Sie und das mit ihr verknüpfte Vorgehen werden im Folgenden knapp erläutert. Dazu gehören: Eine Beschreibung der Grundsätze des FST, die Durchführung der Studie, die Analyse des Datenmaterials mit Hilfe der qualitativen Inhaltsanalyse und ein Analysebeispiel.

Exkurs: Networking als handlungsleitende Begründung

Die mathematikdidaktische Forschung ist geprägt von einer großen Vielfalt an Theorien und theoretischen Hintergründen (Bikner-Ahsbahs & Prediger, 2006). Die Frage nach dem Umgang mit den verschiedenen Theorien, Methoden und Begriffen beschäftigt ganze Arbeitsgruppen und gerät vermehrt in den Fokus der Forschenden (Bikner-Ahsbahs, et al., 2014; Rolka & Roesken-Winter, 2015). Dabei wird das Ziel formuliert, „that the diversity of theoretical approaches can only become fruitful if connections between them are actively established“ (ebd., p. 8). Unterschiedliche Rahmenbedingungen, wie die gewählten Begriffe, Modelle und Annahmen verkomplizieren diesen Prozess. So resümiert die Arbeitsgruppe zu Beliefs, Identity und Knowledge auf der CERME9: „We ultimately hope to contribute to thinking outside of the box in order to break the chains that constrain us, which ultimately restrict the effective potential of the work being developed“ (Ribeiro, et al., 2016). Dies zeigt die Relevanz und vor allem auch den Wunsch nach einem „common ground“. In Bezug auf die vorliegende Arbeit bedeutet das, dass die Begriffe der individuellen Curricula, der subjektiven Theorien, der Ziel-Mittel-Argumentationen und der verwendeten Methodik im Rahmen des FST, einschließlich ihrer besonderen Annahmen, im Vergleich zu den bestehenden Arbeiten einheitlich benutzt werden. Dies soll den bilateralen Vergleich der Forschungsergebnisse ermöglichen.

[57] Partiell wurden bereits bilaterale Vergleiche angestellt, zum Beispiel in Bezug auf die Einstellungen der Lehrkräfte zum Modellieren in Abhängigkeit der Domänen Stochastik und Geometrie (Girnat & Eichler, 2011).

[58] Unnötige Dopplungen sollen in der Darstellung vermieden werden. Ausführlich sind das FST und seine mögliche Verknüpfung mit den individuellen Curricula zum Beispiel in den beiden genannten Arbeiten nachzulesen.

5.1. Das Forschungsprogramm Subjektive Theorien (FST)

Das FST ist ein der Sozialpsychologie entstammendes Programm, dass durch Groeben et al. (1988) zur Erforschung subjektiver Theorien entwickelt worden ist. Subjektive Theorien werden verstanden als:

> „Kognitionen der Selbst- und Weltsicht, die im Dialog-Konsens aktualisier- und rekonstruierbar sind als komplexes Aggregat mit (zumindest impliziter) Argumentationsstruktur, das auch die zu objektiven (wissenschaftlichen) Theorien parallelen Funktionen der Erklärung, Prognose, Technologie erfüllt, deren Akzeptierbarkeit als ‚objektive' Erkenntnis zu prüfen ist“ (p. 22).

Dieser Definition liegen einige Grundannahmen, die das FST trifft, zugrunde. Die entscheidende Besonderheit im FST stellt das angenommene Menschenbild dar. Die Handlungen des Menschen werden als planvoll, intendiert und sinnhaft beschrieben. Sie sind auf die Erreichung von Zielen ausgelegt und basieren auf Interessen und subjektiven Motiven. Das Verhalten ist das manifest beobachtbare Resultat von Handlungen. Die Handlungen selbst sind nicht direkt beobachtbar, da sie Bedeutungszuschreibungen oder Sinnkonstruktionen enthalten, wohl aber über die interpretative Forschung, beziehungsweise über den Dialog zwischen Forschungssubjekt und -objekt, rekonstruierbar. Sollen Handlungen nachvollzogen werden, gilt die subjektive Beschreibung des Forschungsobjektes als Anlaufpunkt. Es wird nach seinen Absichten und Zielen gefragt, um dessen Intention zu verstehen. Damit verbunden ist die Annahme, dass Menschen Handlungsalternativen abwägen, entscheiden, planen und diese kommunizieren können, also reflexiv, potentiell rational, intentional und kommunikativ sind. Auf diese Weise wird die subjektive Theoriebildung des Menschen mit denen objektiver Theorien verglichen. Insofern, als dass der Mensch eigene Theorien seines Handelns schafft, diese in der Realität prüft und anwendet (Schlee, 1988).
Die Definition der subjektiven Theorien impliziert einen mehrstufigen Forschungsprozess, der zunächst die Rekonstruktion der subjektiven Theorien im Dialog-Konsens und in einem zweiten Schritt die Prüfung beschreibt, inwiefern es sich um eine objektive Erkenntnis handelt.
Die Idee des Dialog-Konsenses folgt aus den Annahmen, dass Handlungen nicht direkt beobachtbar sind und aus der Kommunikationsfähigkeit des Gegenübers. Eine Selbstauskunft des Forschungsobjektes, in der Bedingungen und Bezüge der eigenen Handlungen dargestellt werden, stellt einen direkteren Weg zu den Subjektiven Theorien dar, als über Beobachtungen des Verhaltens. Einschränkend wird hinzugefügt, dass die Innenperspektive der handelnden Person selten in Gänze und kausal präzise durch sie ausgedrückt werden kann (Schlee, 1988a). Dementsprechend muss im Forschungsprozess eine verständnisvolle Atmosphäre geschaffen werden, in dem die Forschungsziele transparent gemacht werden, sodass die Gleichberechtigung beider Gesprächspartner unterstützt wird. Die Argumente und Argumentationen des Forschungsobjekts sollen motiviert und anschließend verständnisvoll übernommen werden. Bei den Gesprächen soll auf eine solche Gesprächsatmosphäre geachtet werden[59] (Scheele & Groeben, 1988). Die Gesprächspartner begeben sich in eine argumentative und beidseitige aktive Verständigung, um eine angemessene Beschreibung der subjektiven Theorien des Forschungsobjektes zu erzeugen. Sie werden also zu Dialogpartnern. Dabei wird im Fall eines Widerspruchs zwischen dem Gesagten und dem Verstandenen versucht, immer unter dem Credo der Verständigung, argumentativ einen Konsens herzustellen (Schlee, 1988a).

[59] Ein Beispiel hierfür ist, dass direkte Nachfragen nach Kompetenzen schwierig sind, da sich nicht alle Lehrkräfte mit diesen auseinandergesetzt haben. Dies kann zu Missverständnissen führen, wenn das Gegenüber dies als Überheblichkeit wertet und sich dadurch herabgesetzt fühlt. Dies konnte in der Vorstudie im Fall von Herrn D1 gesehen werden, auch wenn dieser nicht abwehrend reagiert hat: „Also, ich weiß zwar, welche Kompetenzen es gibt, könnte sie jetzt aber nicht aufsagen“ (Anhang 9, 0:05:03-8).

Zur Rekonstruktion der subjektiven Theorien, konkreter zu den subjektiven Theorien in der Algebra verstanden als alltagstheoretische Denkstrukturen der Lehrkräfte, gibt es im Rahmen der Dialog-Konsens-Methodik die Möglichkeit die Methode der Ziel-Mittel-Argumentation (Z-M-A) zur Rechtfertigung von Zielen, Werten und Normen zu nutzen (Scheele & Groeben, 1988). „Die Z-M-A geht davon aus, daß ein Ziel, eine Norm, ein Wert in einem ersten Schritt dadurch begründbar ist, daß man in einem empirischen Satz Folgen, bzw. Wirkungen der Realisierung dieser Präskription angibt“ (Scheele & Groeben, 1988, 84).
So wird im Interview nach Begründungsmustern gesucht, die Kausalzusammenhänge oder Korrelationen andeuten. Signalwörter sind in diesem Zusammenhang „weil“, „um...zu“ oder „da“. Zur Erreichung übergeordneter Ziele - Präskriptionen - können untergeordnete Ziel-Mittel-argumentative Begründungen erfolgen, sodass sich aufsteigende, beziehungsweise absteigende Fragerichtungen ergeben können[60]. Dieser Prozess mündet dann in „Grundwerturteile“ (Scheele & Groeben, 1988).
Bei der „Prüfung“, bezogen auf die Akzeptierbarkeit als objektive Erkenntnis, geht es um die Überprüfung der Gültigkeit der rekonstruierten subjektiven Theorien. Diese erfolgt im Rahmen des FST in zwei Schritten. Zunächst wird geprüft, ob das Forschungssubjekt das Gesagte richtig verstanden hat. Dies erfolgt in der Kommunikation mit dem Forschungsobjekt, in Form der kommunikativen Validierung. Die erfassten Inhalte sind hochkomplex, umfangreich und repräsentieren die Innensicht der Person, sind also individuell und können so auch nur in der Kommunikation mit dem reflexiven Individuum angemessen verstanden werden. Es wird das hermeneutische Wahrheitskriterium angelegt (Scheele & Groeben, 1988). Die Beforschten sollen sich in den Ergebnissen des Analyseprozesses wiederfinden (Mayring, 2002).
Bei der Prüfung auf die Akzeptierbarkeit als objektive Theorie geht es um die explanative Validierung, das heißt, es wird geprüft, ob die rekonstruierte Theorie das Handeln prognostizieren kann. Dies geschieht unter dem falsifikationstheoretischen Wahrheitskriterium durch die Beobachtung von außen. Die subjektive Theorie wird also anhand des Verhaltens der Person auf ihren Wahrheitsgehalt hin überprüft (Scheele & Groeben, 1988).

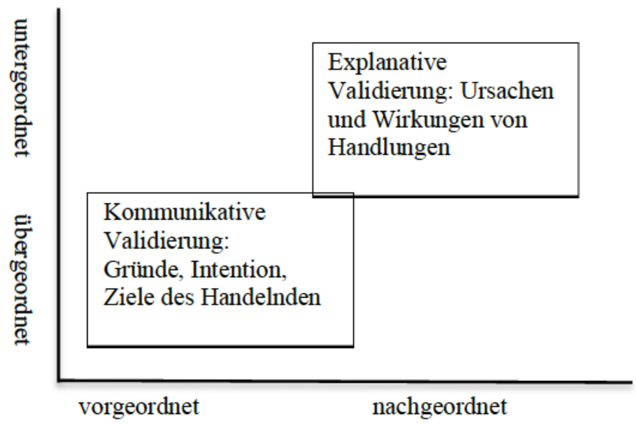


Abbildung 4: Phasen der Validierung

[60] Das zugehörige Auswertungsschema und dessen Lesart sind im Kapitel 5.5 und in Abschnitt 5.6.4 beispielhaft dargestellt.

Daraus lässt sich das folgende zeitliche und methodische Vorgehen ableiten:

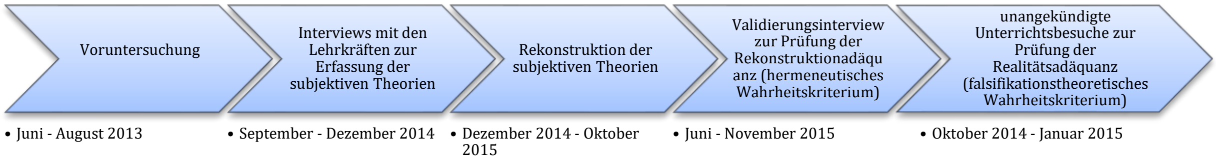
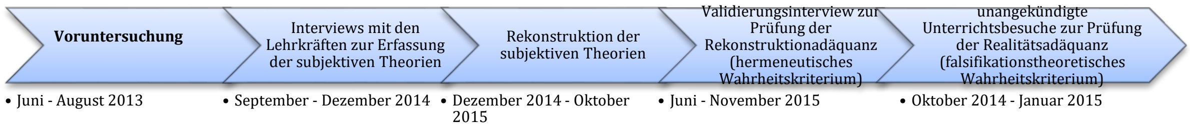


Abbildung 5: Zeitlicher Ablauf der Untersuchung

Die zwei Erweiterungen, in Form der vorgeschalteten Untersuchung und der zeitlichen Überschneidung der Unterrichtsbesuche mit den Erhebungen der ersten Interviews, werden wie folgt erklärt:
Der Zeitraum für die Unterrichtsbeobachtungen liegt zeitlich parallel zu den Interviews und den Auswertungen, weil die Lehrkräfte in ihren siebten, beziehungsweise achten Klassen beobachtet werden sollten[61]. Dies hat den Vorteil die Innensicht in den Unterricht nicht nur über die Unterrichtsbeobachtungen sondern auch über die geschriebenen Klausuren zu erhalten, die ein Abbild der tatsächlich unterrichteten Inhalte ermöglichen. Wären die Beobachtungen erst nach der Auswertung durchgeführt worden, wäre die Wahrscheinlichkeit, die Lehrkräfte im Algebraunterricht zu beobachten aufgrund von zum Beispiel Klassen - oder Themenwechseln gesunken. Die Gefahr, durch dieses Vorgehen die Analyse der Interviews zu verzerren, wurde gegenüber den organisatorischen Rahmenbedingungen abgewogen und es wurde entschieden die Beobachtungsauswertung den Validierungsinterviews nachzuordnen, die Beobachtung aber dennoch zu dem genannten Zeitraum durchzuführen.

5.2. Die Voruntersuchung



Das Ziel der Vorstudie ist es den Leitfadens für die Hauptstudie vorzubereiten. Dazu sollen durch eine Interviewstudie die Begriffe und eventuellen Schwerpunkte eruiert werden, in denen Lehrkräfte über Algebra nachdenken, beziehungsweise die Lehrkräfte in Algebra setzen. Infolgedessen wird diese Untersuchung auch als erster Schritt zur Entwicklung der Codes genutzt, die bei der Auswertung der Interviews zur Erfassung der subjektiven Theorien mit Hilfe der qualitativen Inhaltsanalyse zum Tragen kommt (vgl. Kapitel 5.5).
Die Interviews wurden zu Beginn des Promotionsvorhabens im Sommer 2013 durchgeführt, da die Frage, was Algebra und algebraisches Denken für die Lehrkräfte bedeuten, nicht eindeutig geklärt ist (Hefendehl-Hebeker, 2007).
Der Leitfaden (Anhang 9), auf dessen Basis die Interviews durchgeführt worden sind, wurde innerhalb der Arbeitsgruppe entwickelt. Zunächst erfolgte ein Brainstorming zu den aus unserer Sicht relevanten Aspekten der Algebra. Anschließend wurde das niedersächsische Kerncurriculum (Niedersachsen, 2006) hinzugezogen, um die darin enthaltenen Inhalte miteinfließen zu lassen. Um zu prüfen, ob die Fragen verständlich und inhaltlich klar gestellt waren, wurde der Leitfaden einer erfahrenen Gymnasiallehrkraft vorgelegt. Aus der Diskussion ergaben sich schließlich vor allem sprachliche Änderungen.
Drei inhaltliche Blöcke gliederten den Leitfaden:

[61] Dass die Lehrkräfte zur Zeit des Interviews in siebten beziehungsweise achten Klassen unterrichten, war ein Auswahlkriterium. Nähere Erläuterungen sind unter der Beschreibung der Untersuchungsteilnehmenden unter 5.4 zu finden.

- Fragen zum Algebra-Verständnis der Lehrkräfte,
- Fragen zu den institutionell vorgegebenen Inhalten der Algebra (geprägt durch das Kerncurriculum) und
- Fragen zu imaginären Unterrichtssituationen.

Begonnen wurde das Interview mit Aufwärmfragen zu der Schulform, der jeweiligen Lehrerfahrung und dem eigenen Ausbildungshintergrund.
Die, in ihrer Tendenz provokant gehaltenen, Fragen: „Wie stehen Sie zu der These Günther Malles, dass mehr als 50% der Schülerinnen und Schüler am Ende ihrer Schullaufbahn die Algebra nicht durchdrungen haben? Warum haben Sie diese Position?“ beendeten das Interview. Hier sollten die Ideen der Lehrkräfte dazu erfasst werden, welche Schwierigkeiten es beim Erlernen und Lehren der Algebra gibt, aber auch die Einschätzung dessen, wie viel Prozent ihres Unterrichts bei den Schülerinnen und Schüler hängen bleiben.
Weitere Beispielfragen lauten:

Algebra-Verständnis	Wenn ich den Begriff „Algebra“ benutze, was verknüpfen Sie damit? Wann haben Ihre Schülerinnen und Schüler ihre erste Algebrastunde?
Inhalt	Welche Aspekte der Algebra muss der Unterricht aus Ihrer Sicht umschließen? Termumformungen sind ein zentraler Bestandteil des Algebraunterrichts. Mit welcher Unterrichtsstrategie haben Sie in diesem Zusammenhang die besten Erfahrungen gemacht?
Imaginärer Unterricht	Stellen Sie sich bitte vor, Ihre Schulleitung will ein neues Mathematikbuch einführen und legt Ihnen die folgenden drei Bücher vor. Sie sollen sich für ein Material anhand der vorgeschlagenen Einführung von Variablen, Termen und Termumformungen entscheiden. Bitte sehen Sie sich die Materialien an! Warum haben Sie sich für dieses Lehrwerk entschieden? Warum haben Sie sich gegen die anderen Lehrbücher entschieden?

Gerade die Fragen zum imaginären Unterricht sollten Argumentationsstrukturen verdeutlichen, da angenommen worden ist, dass die Entscheidungen ausführlich begründet werden[62].
Es handelt sich um ein fokussiertes Interview, bei dem der Gegenstand „Algebra“ den Befragten klar ist. Ziel ist es den Themenbereich zu maximieren, in dem die Teilnehmenden die Möglichkeit erhalten bisher nicht antizipierte Aspekte zu thematisieren (Hopf, 2013). Dementsprechend wurde auf die Antworten der Lehrkräfte variabel eingegangen, um so auch Themen aufzugreifen, die sie vertiefen wollten.
Teilgenommen haben sechs Lehrkräfte aus Niedersachsen, Hessen und Mecklenburg-Vorpommern. Dies erlaubt einen erweiterten Blick auf die aus Sicht der Lehrkräfte zur Algebra gehörenden Aspekte aufgrund der verschiedenen Curricula, Bücher und der technischen Ausstattung. Die Teilnehmenden wurden vor allem über ihre Bereitschaft an der Untersuchung teilzunehmen ausgewählt. Einziges Kriterium war, dass sie selbst mindestens einmal in der siebten und/oder achten Klassenstufe unterrichtet haben. Die Dauer der Interviews variierte zwischen 45 und 78 Minuten. Aufgenommen wurden die Interviews durch das Programm Voice Record[63].

[62] Die Fragen den imaginären Unterricht betreffend, waren nicht sehr zielführend. Die Beschäftigung mit den mitgebrachten Materialien fiel sehr knapp aus und es wurden schließlich eher Begründungen gegeben, wie, dass die Farbwahl in den verschiedenen Lehrwerken nicht optimal sei. Dies wurde auch auf Nachfrage nicht vertieft, sodass diese Interviewabschnitte nicht sinnvoll ausgewertet werden konnten. Auf einen erneuten Einsatz dieses Instruments wurde in der Hauptuntersuchung verzichtet.
[63] Die Interviewtranskripte sowie das Codeschema sind in Anhang 9 hinterlegt.

Die Auswertung der Interviews erfolgte nach ihrer Transkription[64] mit Hilfe des Programms MAXQDA und einer Co-Auswerterin. Im Dialog wurden die Interviews analysiert, indem vor allem induktiv und auch oft durch In-Vivo-Codes codiert worden ist. Während der Auswertung wurden dabei Ankerbeispiele bestimmt, die für die weitere Codierung leitend waren.
Das Interview wurde chronologisch und pro Antwort auf die manifesten Inhalte hin analysiert. Die Erfassung der inhaltlichen Dimensionen, in denen über Algebra gesprochen wird, stand im Vordergrund.
Ein Beispiel für die Analyse und der damit verbundenen Codierung lautet:

Interviewerin: *Wenn ich das Wort Algebra benutze, was verknüpfen Sie damit?*
Lehrkraft 5: *Terme, Termumformungen, binomische Formeln zum Beispiel, solche Sachen.*

Codiert wurden dann: „Terme“, „Termumformungen“ und „Binomische Formeln“, als Beispiel für In-Vivo-Codes. Ein weiteres Beispiel lautet:

Interviewerin: *Und welche Aspekte sollten in Ihrem Algebraunterricht behandelt werden?*
Lehrkraft 6: *Ja, in Klasse acht, ne in Klasse neun haben wir nur drei Stunden die Woche. Das ist sehr wenig, sonst haben wir vierstündig. Und in fünf haben wir sogar fünf Stunden.*

In diesem Fall wurde der allgemein gehaltene Code „institutionelle Bedingungen“ für die zu geringe Unterrichtszeit, die den Algebraunterricht beeinflusst, gesetzt.
Beispielhaft seien die folgenden Ankerbeispiele für weitere Codierungen genannt:

Tabelle 3: Codierung Vorstudie - Beispiel

Code	Ankerbeispiel
Entwicklung	„wir haben ganz deutlich gemerkt, dass die Schüler damit [Termumformungen, Anm. JM] Probleme haben, weil die einfach entwicklungstechnisch noch gar nicht so weit sind“ (3:05-8, 6)
Einstellung der Schülerinnen und Schüler	„die Schüler mittlerweile ein Problem, also die lesen sich das [Aufgabenstellungen, Anm. JM] einfach gar nicht durch“ (35:17-3, 3) „Mathe ist für viele nach wie vor immer noch ein Hassfach“ (45:46-5, 6)
Anknüpfen an Bekanntes	„Ich würde erstmal so anfangen, dass ich quasi irgendwas mache, was sie schon kennen, zum Beispiel“ (43:30-7, 3)
Technisches/Schematisches Üben	„gleich, wieder viele Beispiele, also das formale erstmal nur abarbeiten, das (...) entspricht dem, was ich selber mache und, was ich finde, was sich ein bisschen bewährt“ (30:59-1, 1)

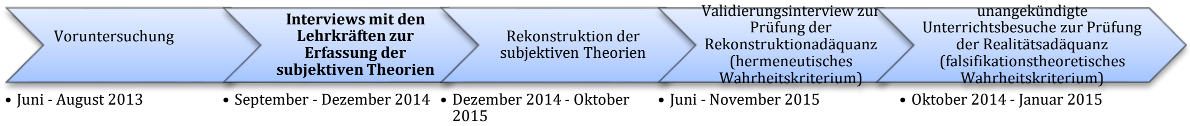
[64] Die Transkriptionsregeln, die sowohl für die Voruntersuchung, aber auch für die Hauptstudie, verwendet werden, sind unter Punkt 5.3 dargestellt.

Die folgenden Resultate fließen direkt oder unterstützend, da ähnlich zu den theoretischen Überlegungen in Kapitel 3, in die Leitfadenentwicklung der in dieser Arbeit zentralen Untersuchung ein:

Tabelle 4: Resultate der Vorstudie und Folgen für Hauptstudie

Ergebnis	Konsequenz für die Hauptuntersuchung
Der Begriff „Variable“ wurde insgesamt nur sehr selten verwendet.	Das Thema „Variablen“ soll als zentraler Bestandteil der Algebra separat angesprochen werden.
Zentrale Inhalte des Algebraunterrichts sind aus Sicht der Lehrkräfte Terme, Termumformungen und Gleichungen - wie diese Inhalte unterrichtet werden, wurde zu knapp behandelt, auch warum sie unterrichtet werden, wurde zu wenig hinterfragt	Begründungen für das eigene Handeln müssen stärker hinterfragt werden. Die Bereiche Terme und Gleichungen werden separat nachgefragt.
Die Übung (vor allem in Bezug auf formale Mechanismen) wird als zentrales Element des Algebraunterrichts dargestellt.	Der Übung und der Art des Übens wird ein eigener Raum gegeben. Begründungen für die Art und Auswahl der jeweiligen Übungsidee werden hinterfragt.
Es ist eine Schwierigkeit die Algebra als relativ trockenen, weil abstrakten Inhalt anschaulich und für die Schülerinnen und Schüler attraktiv zu vermitteln.	Die Charakterisierung der Algebra wird abgefragt und das „Abstraktionsniveau“ als möglichen Code vorgesehen. Die „Schülerorientierung“ und die „Motivation“ werden ebenfalls als Codes vorgesehen.
Die Behandlung der Algebra in der siebten Klassenstufe ist zu früh angelegt, weil dies die Schülerinnen und Schüler kognitiv überfordert.	Die „kognitive Überforderung der Schülerinnen und Schüler“ wird als Code vorgesehen. Es wird geprüft, ob sich diese Begründung wiederfinden lässt.
Eine ablehnende Haltung der Schülerinnen und Schüler gegenüber der Algebra als ein Rechnen mit Buchstaben ist sehr hinderlich in der Vermittlung der Algebra.	Die „Einstellung der Schülerinnen und Schüler“ wird als möglicher Code vorsehen. Zudem soll nach der angenommenen Haltung der Schülerinnen und Schüler gegenüber der Algebra gefragt werden.
Mehr als die Hälfte der Schülerinnen und Schüler erlangen während des Unterrichts kein wirkliches Verständnis der Algebra.	Es wird nach dem vermuteten Lernerfolg der Schülerinnen und Schüler gefragt und Begründungen für die Vermutungen werden eingeholt.

5.3. Die Leitfadeninterviews zur Erfassung der subjektiven Theorien



Für die in dieser Arbeit zentrale Untersuchung zur Erfassung der subjektiven Theorien der Lehrkräfte wurde ein in 13 Unterabschnitte unterteilter Leitfaden erstellt (vgl. Anhang 1).
Die Herkunft der einzelnen Bereiche ergibt sich wie folgt:

Tabelle 5: Herleitung Interviewleitfaden

Bereich	Herleitung
„Einstellung zur Algebra“	Die Einstellung der Lehrkräfte zur Algebra soll in einem ersten Schritt auf die Ziele des Algebracurriculums hinweisen (2.1).
„Inhalt der Algebra“	Hier wird nach dem unterrichteten Stoff-Inhalt gefragt. Dies ergibt sich aus den Abschnitten 2.1 und 3.1.
„Lernen von Algebra“	Die Fragen in diesem Block betreffen die Anschauungen der Lehrkräfte dazu, wie die Schülerinnen und Schüler lernen, welchen Nutzen sie aus dem Algebraunterricht ziehen. Dies unterscheidet sich von der Frage nach dem Nutzen des Mathematikunterrichts allgemein. Da die individuellen Curricula der Lehrkräfte im Bereich der Algebra untersucht werden, wird diese Änderung gegenüber (2.1) als konsistent angesehen.
„Lehren von Algebra“	Die Fragen in diesem Block betreffen die Anschauungen der Lehrkräfte dazu, wie guter Algebraunterricht gelingt. Dies unterscheidet sich von der Frage nach gutem Mathematikunterricht allgemein. Da die individuellen Curricula der Lehrkräfte im Bereich der Algebra untersucht werden, wird diese Änderung gegenüber (2.1) als konsistent angesehen.
„Übung“	Das Thema Übung betrifft die Art des Übens und zielt auf den Umgang der Lehrkräfte mit Schemata, Algorithmen und Regeln ab (vgl. Abschnitt 3.3).
„Aktivitäten im Unterricht“	Die Aktivitäten im Unterricht sind von Kierans „Core of algebra“ abgeleitet. Sie zielen auf die verschiedenen algebraischen Aktivitäten ab (3.1) und damit auf die Frage nach dem Zugang zur Algebra (3.4) und damit einhergehend mit der Frage nach gutem Algebraunterricht (2.1).
„Variablen“	Das Thema Variablen wird aufgrund von Abschnitt 3.2 und Kapitel 5.2 separat aufgegriffen.
„Anwenden“	Die Frage nach dem Grad der Anwendung ergibt sich aufgrund der Kategorisierung der globalen Beliefs (2.2) und aufgrund von Kapitel 3.3.
„Darstellungsformen“	Die Verwendung verschiedener Darstellungsformen leitet sich über die Frage nach der Sinnstiftung her (3.4).

„Text-Term“	Die Übersetzung von Sachzusammenhängen in Terme und Gleichungen wurde als zentrale Komponente algebraischer Tätigkeit im Unterricht herausgestellt (3.1).
„Beweisen, Argumentieren, Problemlösen“	Diese Tätigkeiten wurden über die algebraischen Denkhandlungen und Aktivitäten hergeleitet (3.1).
„Rechner“	Die Rechnertechnologie als zu verwendendes Werkzeug zum Lösen von Gleichungen ist in der Algebra durch das Kerncurriculum vorgeschrieben (vgl. Abschnitt 3.1).
„Algebra-übergreifend“	Hier geht es um die Ziele des Mathematikcurriculums und die thematische Abgrenzung zu den bisherigen algebraspezifischen Fragen (2.1)

Diese lassen sich unter die folgenden Leitkategorien, die zuvor in Kapitel 2 hergeleitet worden sind, wie folgt subsummieren[65]:

- *die subjektiven Theorien zum Inhalt des Algebracurriculums*: „Inhalt der Algebra“, „Variablen“, „Anwenden“, „Darstellungsformen“, „Text-Term“, „Beweisen, Argumentieren, Problemlösen“,
- *die subjektiven Theorien zu den Zielen des Algebracurriculums*: „Einstellung zur Algebra“, „Inhalt der Algebra“,
- *die subjektiven Theorien zu den Zielen des Mathematikcurriculums*: „Algebra-übergreifend“, „Einstellung zur Algebra“,
- *die subjektiven Theorien zum Lehren von Algebra*: „Lehren von Algebra“, „Übung“, „Aktivitäten im Algebra-Unterricht“,
- *die subjektiven Theorien zum Lernen von Algebra*: „Lernen von Algebra“ und
- die subjektiven Theorien zu den institutionellen Rahmenbedingungen, einschließlich des Schulbuches und des Rechners: „Lehren von Algebra“, „Rechner“.

Zum Einstieg wurden die jeweiligen Gesprächspartner darauf aufmerksam gemacht, dass ihre Angaben anonymisiert werden, dass keine politischen Folgen zu befürchten sind und es ausschließlich um ihre individuellen Ansichten geht. Zudem wurden die Ziele der Untersuchung transparent gemacht. Aus der Voruntersuchung ist bereits deutlich geworden, dass keine unnötigen Fachbegriffe verwendet werden sollen, außer sie werden von den Gesprächspartnern angesprochen. Auf inhaltlich tiefergehende Nachfragen wurde verzichtet, um das Gefühl abgefragt zu werden zu vermeiden. Eine solche Entwicklung wäre kontraproduktiv für die durch das FST empfohlene offene und angenehme Gesprächsatmosphäre (vgl. Kapitel 5.1).
Um diese zu schaffen und den Gesprächspartnern die Wahl der zunächst zu vertiefenden Inhalte zu überlassen, wurde mit der folgenden Frage begonnen: „Wie würden Sie Ihre Einstellung zum Algebraunterricht in der Sekundarstufe I allgemein beschreiben?“

[65] Dies sind die Originalüberschriften aus dem Leitfaden und dient dem besseren Nachvollzug. Es ist aber anzumerken, dass die Erkenntnisse zu den einzelnen Bereichen der subjektiven Theorien nicht trennscharf aus diesen Blöcken zu ziehen sind. Im Fall A schwingt zum Beispiel latent die Einstellung zum Lernen der Schülerinnen und Schüler bei der Beantwortung der Fragen mit. Es handelt sich eher um eine grobe Einteilung.

Beispielhaft werden für die genannten Kategorien die folgenden Fragen benannt:

Tabelle 6: Beispielfragen Hauptuntersuchung

Inhalt des Algebracurriculums	Wenn Sie an Ihren Algebraunterricht denken, welche Inhalte behandeln Sie standardmäßig?
Ziele des Algebracurriculums	Was sollte bei Ihren Schülerinnen und Schüler auf jeden Fall nach Ihrem Algebraunterricht hängen bleiben?
Ziele des Mathematikcurriculums	Was sollte aus Ihrer Sicht das Ziel der mathematischen Ausbildung in der Sekundarstufe I sein?
Lehren von Algebra	Wenn ich mir Ihren Algebraunterricht vorstellen wollte: Wie würden Sie diesen charakterisieren?
Lernen von Algebra	Gibt es spezifische Schwierigkeiten, die Sie beim Lernen der Algebra feststellen? Worauf sind diese Schwierigkeiten aus Ihrer Sicht zurückzuführen?
Institutioneller Rahmen	Seit einiger Zeit werden graphikfähige Rechner oder sogar CAS-Systeme im Unterricht eingesetzt. Was halten Sie davon?

Zur Unterstützung wurden Prompts eingesetzt (vgl. Anhang 1). Diese dienen vor allem der zusätzlichen Anregung und vor allem der Fokussierung im Gespräch (Leech, 2002). Der Block „Lehren von Algebra“ wurde zum Beispiel durch die Frage eingeleitet:

> In einer vorhergehenden Untersuchung kristallisierten sich zwei Ansichten zum Thema Algebra heraus: Lehrer A „Also Algebra und dann noch Sek I - „Das ist natürlich das Langweiligste, was es für Lehrer gibt“[66]. Lehrer B: „Die Ordnung und die Struktur, die Algebra vermittelt, machen dieses Thema zu meinem Favoriten in der Sekundarstufe I.“ Wo können Sie sich eher zuordnen? Warum?

Dieser Prompt eröffnet den Lehrkräften die Möglichkeit, auch sozial nicht erwünschte Aussagen[67] zu treffen und sich entweder innerhalb des Spektrums zu positionieren, dieses zu erweitern oder sich jenseits dessen zu positionieren. Es soll den Blick öffnen und verstärkt auf die tatsächlichen Anschauungen der Lehrkraft fokussieren.
Aus der Vorstudie (vgl. Kapitel 5.2) folgt das Interesse, das Variablenverständnis der Lehrkräfte intensiver zu untersuchen. Zu diesem Zweck wurden den Lehrkräften neben allgemeineren Fragen zu ihrem Variablenverständnis drei Beispielaufgaben vorgelegt, die Malle (1993) entnommen sind (p. 45f) und die verschiedenen Variablenaspekte charakterisieren:

- Gegenstandsaspekt: „Denke dir eine Zahl! Addiere 10! Verdopple das Ergebnis! Subtrahiere das Doppelte der ursprünglichen Zahl. Du erhältst 20. Warum funktioniert das für jede erdachte Zahl?
- Einsetzungsaspekt: Setze in die Gleichung 2x+3=11 der Reihe nach die Zahlen von 1 bis 6 ein! Wann ist die Aussage wahr?
- Kalkülaspekt: Löse 3x+8=26.

[66] Die Aussage von Lehrer A stammt aus der Voruntersuchung: Lehrkraft B1 9): 24:15-5. Die Gegenposition ist imaginär.
[67] Zum Problem der sozialen Erwünschtheit als Phänomen der empirischen Sozialforschung: (Mummendey, 1981).

Darüber hinaus wurden den Teilnehmenden nach dem Interview 16 Items (je vier pro globalem Belief) aus dem Fragebogen von Grigutsch, Raatz und Törner (1998) vorgelegt (vgl. Abschnitt 2.2), um das Bild der Mathematik zu erfassen.
Die Interviews variierten in ihrer Länge zwischen 80 und 126 Minuten und wurden über das Programm Voice Record aufgenommen und anschließend in MP4-Dateien umgewandelt und gespeichert.
Aus den Ausführungen zur Ziel-Mittel-Argumentation wird deutlich, dass die Ausarbeitung von Argumentationsstrukturen zentral ist, daher wird großer Wert darauf gelegt, die Lehrkräfte dazu anzuregen Begründungen für ihre Aussagen zu geben, indem vermehrt nach dem „Warum" gefragt worden ist.

5.4. Beschreibung der Probandinnen und Probanden

Teilgenommen haben acht Gymnasiallehrkräfte aus Niedersachen und eine Lehrkraft aus Mecklenburg-Vorpommern, drei Lehrerinnen und sechs Lehrer[68]. Dabei sollte es sich um eine möglichst facettenreiche Fallauswahl handeln (Merkens, 2013). Der Facettenreichtum wird hier von außen und unter theoretischen Überlegungen festgelegt, in Bezug auf die folgenden Kriterien:

- Geschlecht: Teilgenommen haben drei weibliche und sechs männliche Lehrkräfte.
- Lehrerfahrung: Frau D ist erst seit einem Jahr als Volllehrerin an der Schule, Herr G ist Fachleiter mit mehr als 20 Jahren Lehrerfahrung.
- Standort: Nicht alle Lehrkräfte sind aus Niedersachsen, dies soll den Blick öffnen gegenüber verschiedenen staatlichen Curricula und der verfügbaren Technologien im Unterricht

[68] Alle Angaben beziehen sich auf den Erhebungszeitpunkt.

Die folgende Übersicht gibt eine Auskunft über diese Eckpunkte die Teilnehmerinnen und Teilnehmer betreffend:

Tabelle 7: Übersicht Probandinnen und Probanden

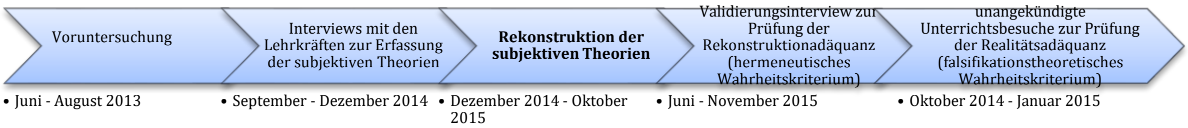
Lehrkraft	Geschlecht	Lehrerfahrung	Lehrwerk	Technologie im Unterricht
A	weiblich	> 20 Jahre	„Elemente der Mathematik“ Schroedel	GTR
B	männlich	15 Jahre	„Mathematik Plus“ Volk und Wissen	Wissenschaftlicher Rechner
C	männlich	12 Jahre	„Lambacher Schweizer“ Klett Verlag	GTR zu CAS
D	weiblich	1 Jahr	„Elemente der Mathematik“ Schroedel	GTR
E	weiblich	7 Jahre	„Lambacher Schweizer“ Klett Verlag	CAS
F	männlich	14 Jahre	„Neue Wege“ Schroedel und „Das Mathematikbuch“ Klett	CAS
G	männlich	> 20 Jahre	„Lambacher Schweizer“ Klett Verlag	GTR zu CAS
H	männlich	5 Jahre	„Lambacher Schweizer“ Klett Verlag	GTR zu CAS
I	männlich	8 Jahre	„Lambacher Schweizer“ Klett Verlag	GTR zu CAS

Wird sich, wie hier, vor allem aus forschungspragmatischen Gründen für die Auswahl des Samplings vor der Untersuchung entschieden, sollten nach Morse (1994) verschiedene Kriterien bei der Fallauswahl beachtet werden: Die Teilnehmenden sollen über das für die Untersuchung relevante Wissen und Erfahrungen verfügen, über diese reflektieren und ihre Gedanken artikulieren können. Darüber hinaus sollen die äußeren Komponenten, wie die Bereitschaft, sowohl zeitlich wie auch motivational, an der Untersuchung teilzunehmen (Morse, 1994), gegeben sein. Die von Morse benannten Kriterien werden vollständig als zutreffend angenommen, da die Mathematiklehrkräfte alle einen mathematischen Ausbildungshintergrund besitzen. Zudem wurde darauf geachtet, dass sie alle mindestens einmal in der siebten Klassenstufe unterrichtet haben. Die Reflexivität der Lehrkräfte wurde in Abschnitt 2.1 diskutiert.

Die Lehrkräfte wurden im Vorhinein über den Inhalt der Untersuchung und die organisatorischen und zeitlichen Besonderheiten (zwei Interviews, 2 Unterrichtsbesuche[69]) informiert, sodass im Fall der Teilnahme an der Untersuchung davon ausgegangen werden kann, dass die zeitliche und motivationale Bereitschaft bei den Teilnehmenden gegeben ist.

[69] Auf die geplanten Unterrichtsbesuche wurden die Lehrkräfte nicht per Mail oder Telefon vorbereitet, sondern im Vorfeld des Interviews im Gespräch. Keine der Lehrkräfte hat ablehnend reagiert.

5.5. Das Analyseverfahren: Von der qualitativen Inhaltsanalyse zu der Ziel-Mittel-Argumentation



Die qualitative Inhaltsanalyse

Die Interviews dienen als Datengrundlage für die Ausarbeitung der Ziel-Mittel-Argumentationen. Sie werden systematisch auf die latent, beziehungsweise manifest vorhandenen Argumentationsmuster hin analysiert. Dabei kommen regelgeleitete Verfahren wie das Paraphrasieren zum Tragen und das theoriegeleitete Codieren, um die Texte so zu zusammenzufassen und nach zuvor festgelegten Kriterien zu strukturieren, sodass die wesentlichen Inhalte erhalten bleiben. Dies entspricht dem Wesen der qualitativen Inhaltsanalyse (Mayring, 2002).
Diese bildet die methodische Grundlage, um die Interviews aufzubereiten und zu strukturieren. Die Voraussetzung zur Anwendung der qualitativen Inhaltsanalyse ist die Transkription der Interviews.
Bei der Auswahl der anzuwendenden Transkriptionsregeln gilt wie auch bei der Methodenwahl, dass die Regeln dem Forschungsinteresse angemessen sein sollen. So handelt es sich bei dem Gespräch über die Einstellung der Lehrkräfte zur Algebra in erster Linie um das Erfassen von Inhalten zu dem spezifischen Thema Algebra. Hier wird die Übertragung in das normale Schriftdeutsch empfohlen (Mayring, 2002). Auf diese Weise zu transkribieren, vernachlässigt die Eigenheiten der gesprochenen Sprache, wie Dialekte und Auslassungen zu Gunsten einer guten Lesbarkeit (Kowal & O'Connell, 2013). Die zu analysierenden Merkmale bewegen sich aber ausschließlich auf der inhaltlichen Ebene, sodass eine weitergehende Erfassung unnötig ist. Für die Transkription wurde daher auf die wortwörtliche, sprachlich-geglättete Darstellung geachtet, bei der auch die Satzzeichen der Rechtschreibung angepasst wurden. Pausen wurden durch das Wort „Pause [Sekundenzahl]" deutlich gemacht[70].
Die qualitative Inhaltsanalyse nach Mayring (2015) ist ein hermeneutisches Verfahren, bei dem, wie bei allen hermeneutischen Verfahren, das eigene Vorverständnis das Verstehen des Textes beeinflusst und auch der Text das bestehende Vorwissen beeinflusst (Mayring, 2002). Visualisiert ist dies in der hermeneutischen Spirale nach Danner (1979).
Unterschieden werden durch Mayring drei Grundformen der qualitativen Inhaltsanalyse:

- die *Zusammenfassung*, bei der das Material auf die wesentlichen Inhalte reduziert wird,
- die *Explikation*, bei der einzelne Textstellen durch zusätzliches Material besser verstanden werden sollen und
- die *Strukturierung*, bei der das Material unter vorher festgelegten Kriterien gefiltert wird.

Die in dieser Arbeit durchgeführte Analyse basiert auf der strukturierten Inhaltsanalyse und nimmt vor allem eine inhaltliche Strukturierung vor[71]. Im Zentrum der inhaltlich strukturier-

---

[70] Die Interviewtranskripte sind in Anhang 2 zu finden. Aufgrund des sehr hohen zeitlichen Aufwands von Transkriptionen wurde die Autorin bei der Transkription der Interviews durch das Unternehmen lengoo GmbH unterstützt, wobei die beschriebenen Vorgaben und Regeln der Transkription angewendet worden sind. Die redaktionelle Überarbeitung wurde durch die Autorin übernommen.

[71] Diese Formen der Inhaltsanalyse werden hier nicht gegenüber allen möglichen Formen der Inhaltsanalyse abgegrenzt. Für eine Übersicht der Verfahren der qualitativen Inhaltsanalyse sei an Mayring (2015) verwiesen.

ten Inhaltsanalyse geht es um die Filterung und Zusammenfassung des Materials nach bestimmten inhaltlichen Kriterien und Themen. Dabei werden zunächst theoriegeleitet Kategorien und Unterkategorien entwickelt. Nach der Textbearbeitung mit Hilfe dieser Kategorien wird das paraphrasierte Textmaterial den Unterkategorien und später zu Hauptkategorien zusammengefasst. Dabei gelten die Grundsätze der zusammenfassenden Inhaltsanalyse. Übersichtlich dargestellt sehen die Verfahren wie folgt aus (Mayring, 2015)[72]:

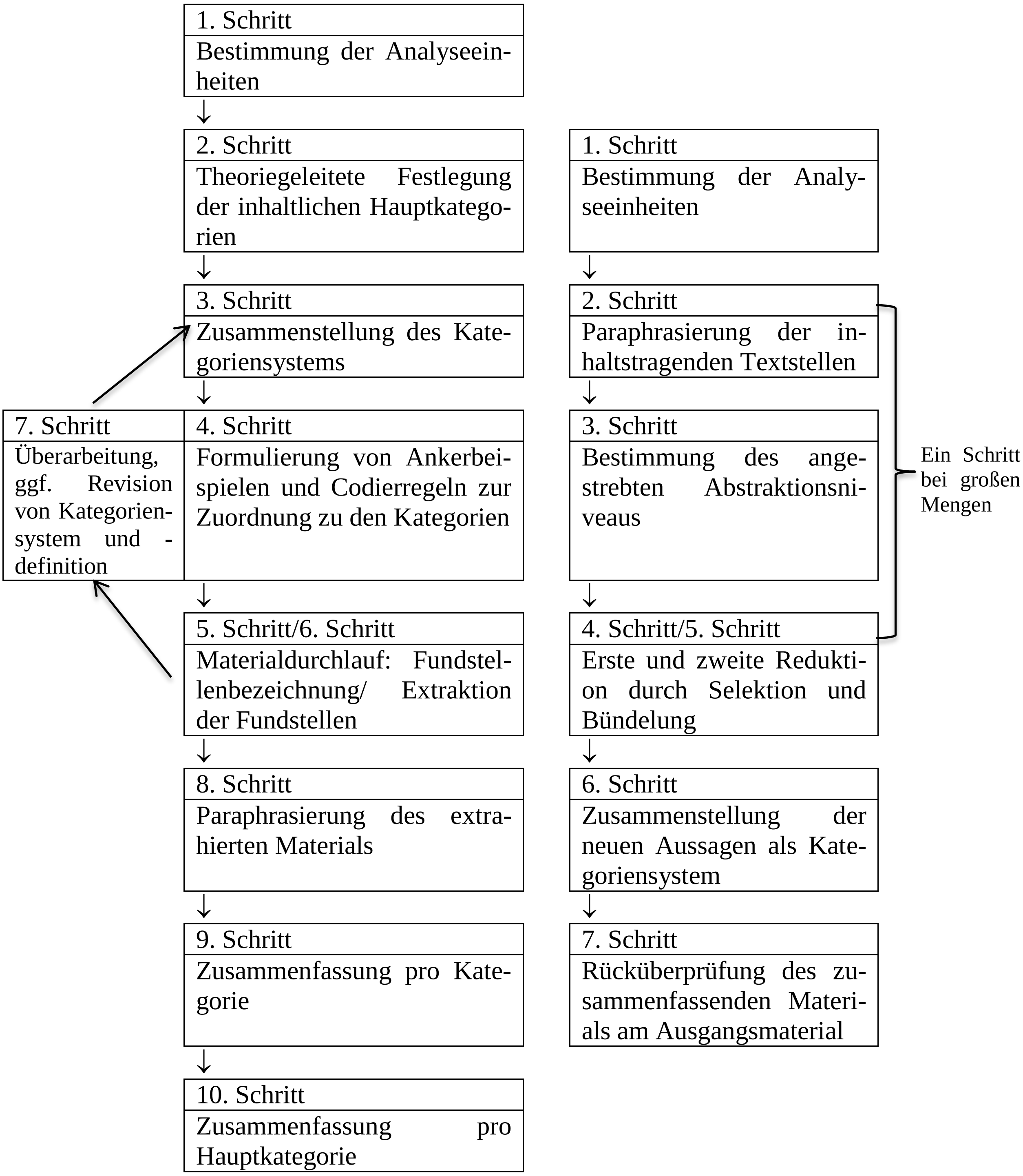


Abbildung 6: Vorgehen qualitative Inhaltsanalyse.

[72] Links: Ablauf der strukturierenden Inhaltsanalyse mit Schwerpunkt der inhaltlichen Strukturierung. Rechts: Ablauf der zusammenfassenden Inhaltsanalyse.

Anpassung der qualitativen Inhaltsanalyse auf das Datenmaterial

Als Analyseeinheiten werden die transkribierten Interviews festgelegt. Die Festlegung der inhaltlichen Hauptkategorien erfolgte vor der Analyse auf Basis der theoretischen Überlegungen in Kapitel 2.1 und der durchgeführten Voruntersuchung (Kapitel 5.2). Darüber hinaus besteht die Möglichkeit Kategorien induktiv aus dem Material abzuleiten (Mayring, 2015). Auf diese Möglichkeit wurde während der Analyse permanent geachtet. Das Kategorienschema mit den zugehörigen Codes und Codememos wurde aus den folgenden Bereichen konstruiert:

1. Block: Inhaltsbezogene Kompetenzen aus dem Kerncurriculum in Niedersachsen
2. Block: Charakterisierung nach Grigutsch, Raatz und Törner (1998) als allgemeine mathematikdidaktische Codes
3. Block: Algebra-Didaktik: Spezielle Algebra-Didaktische Codes
4. Block: Allgemein-didaktische Codes: Didaktisches Dreieck (Lehrperson, Schülerinnen und Schüler, Institution)
5. Block: Resultate aus der Vorstudie

Beispielhaft ist dazu die folgende Tabelle gegeben[73]:

Tabelle 8: Inhaltliche Strukturierung der Blöcke

Block 1	Block 2	Block 3	Block 4	Block 5
Mathematisch argumentieren	Schema: Mathematik als Werkzeugkasten	Malle: verallgemeinern, begründen, argumentieren, Terme aufstellen, Variablenaspekte	Institutioneller Rahmen	Überforderung der Schülerinnen und Schüler , kognitive Fähigkeiten
Probleme mathematisch lösen: z.B. durch Verallgemeinerungen	Formalismus: Strenge, Exaktheit in der Begründung	Kieran: Algebra als Aktivität, regelbasiertes Umformen, Verallgemeinerungen	Schülerbild (Lernen von Algebra, Nutzenorientierung)	Stellenwert der Übung, formales Üben, Gleichungen aufstellen
Mathematisch kommunizieren: z.B. durch das Strukturieren und Interpretieren	Anwendung: Der praktische Nutzen der Mathematik wird betont	Hefendehl-Hebeker: Algebra als Sprache, Gedanken kommunizieren, generalisieren, abstrahieren	Lehrkraft (Lehren von Algebra, Kriterien guten Unterrichts)	Einstellungen der Schülerinnen und Schüler, die eigene Sozialisation

Vor allem innerhalb der Algebradidaktik sind Überschneidungen sichtbar. So benennen die in den Fokus gezogenen Forschenden[74] dieselben Bestandteile algebraischen Denkens unabhängig von ihrem jeweiligen theoretischen Forschungshintergrund: Argumentieren, Abstrahieren, Generalisieren Analysieren, Darstellen und den Kalkül-orientierten Umgang mit Variablen, Termen und Gleichungen. Sie plädieren alle für einen verständnisvollen Umgang mit diesen Komponenten und für den Verzicht auf eine unnötige Trennung von Inhalt und Form[75]

[73] Dies sind nur Auszüge. Eine ausführliche Darstellung der Aufstellung ist in Anhang 3 zu finden.
[74] Vergleiche hierzu Kapitel 3.1.
[75] Eine detaillierte Auseinandersetzung mit dem Forschungsstand zur Algebra ist in Kapitel 3.1 zu finden.

(Akinwunmi, 2012; Arcavi, 2005; Fischer et al., 2010; Kieran, 2004b, 2013; Malle, 1993; Usiskin, 1995; Vollrath & Weigand, 2007). Viele dieser Bestandteile finden sich im Kerncurriculum wieder. Dementsprechend wurden diese nur einmal als Code beschrieben, auch wenn sie verschiedenen Quellen entstammen. Dies lässt es nur wahrscheinlicher werden, dass sie in den Interviews auftauchen.
Kumuliert ergibt sich daraus das in MAXQDA eingespeiste Codier-Schema. Ein Auszug dessen sei durch die folgende Tabelle gegeben[76]:

Tabelle 9: Beispiele in der Codierung der Hauptstudie

Code	Code-Memo
Algebra als verallgemeinernde Tätigkeit	verwenden, wenn Formeln aufgestellt werden, um Zusammenhänge herauszustellen, diese zu interpretieren, Situationen repräsentieren: Ausdrücke, Gleichungen bilden um Verhältnisse, Beziehungen, geometrische Zusammenhänge, numerische Beziehungen und Sinnhaftigkeiten herauszustellen oder wenn Muster dargestellt werden oder Modellbildung
Algebra als kalkülhafte Tätigkeit	verwenden, wenn Algebra über den regelhaften Umgang mit Variablen, Termen und Gleichungen beschrieben wird und wenn die Einhaltung der Rechengesetze betont wird
Abstraktionsniveau	verwenden, wenn es um die Betonung des Abstraktionsgrades der Algebra geht
Schülerüberforderung	verwenden, wenn Argumente gewählt werden, die die Voraussetzungen des Algebraunterrichts auf Schülerseite betreffen - Alter, Entwicklungsstand, zu große Heterogenität oder auch die Einstellung der Schülerinnen und Schüler
Gesamtgesellschaftlicher Nutzen	verwenden, wenn der gesamtgesellschaftliche Nutzenaspekt von Algebra angesprochen wird
Spaß und Motivation	verwenden, wenn es bei der Themenauswahl um den Spaß der Schülerinnen und Schüler geht und die Steigerung der Motivation Grundlage für die Unterrichtsentscheidung ist

Der letzte Code in dieser Tabelle ist ein Beispiel für einen aus der Untersuchung heraus entwickelten Code.
Auf die Frage hin, was Lehrkraft A vermissen würde, wenn die Algebra aus dem Curriculum gestrichen werden würde, antwortete sie:

> „[I]ch würde sagen das geht gar nicht ohne. Also das denke ich schon, dass das ein Fach...dass es nötig ist in der Sekundarstufe eins das einzubringen. Weil wir ja auch in Zukunft Mathematiker, Diplom-Ingenieure und ich weiß nicht was brauchen“ (3:15) und weiter: „Sondern ich finde wirklich, wir unterrichten es [Algebra, Anm. JM], weil wir wie gesagt Leute brauchen, die es später mal können (...) und von daher ist einfach der Nutzen für mich das Allgemeingut, was wir später brauchen. Dass wir Menschen brauchen, die diese Fähigkeiten haben, um uns die Welt zu erhalten so wie sie ist und sie weiter auszubauen“ (4:52).

Das „wir“ kennzeichnet aus ihrer Sicht die Gesellschaft und insofern hat die Algebra einen gesamtgesellschaftlichen Nutzen.

[76] Das gesamte Codier-Schema ist in Anhang 3 gegeben.

Die einzelnen Codes sowie die zugehörigen Memos wurden im Vorhinein ausführlich mit der Co-Codiererin[77] besprochen. Begriffliche Unklarheiten wurden daraufhin beseitigt. Vorbereitend wurden große Teile des ersten Interviews gemeinsam bearbeitet, indem Sinnabschnitte gebildet wurden, innerhalb derer die Codevergabe erfolgt ist.
Bei dem Materialdurchlauf wurde das Interview zunächst grobanalytisch in Sinnabschnitte unterteilt, wobei die Sinnhaftigkeit der Unterteilung im Dialog besprochen worden ist. Die Paraphrasierung der Abschnitte erfolgte getrennt voneinander. Bei diesem Schritt sollte darauf geachtet werden, die wesentlichen Inhalte zu erhalten und Unwichtiges wegzustreichen (Mayring, 2015). Anschließend wurden die Paraphrasen gemeinsam abgeglichen und generalisiert (Mayring, 2015). Hierbei wurde gemeinsam über Besonderheiten wie die latent oder manifest sichtbaren Argumentationsstrukturen der betreffenden Lehrkraft gesprochen.
Die sich anschließende Codevergabe erfolgte in einem zweiten Schritt getrennt voneinander, bevor auch hier wieder dialogisch ein Konsens gefunden worden ist. Die Co-Codiererin und die Autorin verglichen die durch sie vergebenen Codes und diskutierten die auftretenden Abweichungen. Ein Beispiel für eine solche Abweichung war die inkonsistente Zuordnung der Codes, die sich auf die inhaltsbezogenen Kompetenzen aus dem Kerncurriculum bezogen gegenüber dem gröber gefassten Code „Inhalt". Dieser war so allgemein gefasst, dass durch ihn die inhaltsbezogenen Kompetenzen abgedeckt wurden. Bei der Diskussion wurde beschlossen, von da an den weiter gefassten Code zu nutzen, da dieser für die weitere Analyse der stoffinhaltlichen Elemente des Curriculums der Lehrkräfte ausreicht. Die weitere Kommunikation wurde so erheblich erleichtert. Die aus dem Verfahren resultierende Codierung der Interviews ist in Anhang 4 hinterlegt.
Nach der Analyse direkt am Material wurden die Textstellen entsprechend der Codierung sortiert und den übergeordneten Leitkategorien der subjektiven Theorien zu den Inhalten des Algebracurriculums, Zielen des Algebracurriculums, Zielen des Mathematikcurriculums und dem Lehren und Lernen von Algebra zugeordnet (vgl. Kapitel 6.1).
Die Argumentationsstränge der Lehrkräfte wurden extrahiert, indem zum Beispiel sich häufiger wiederholende, nachdrücklich betonte oder affektiv gefärbte Ziele als übergeordnet herausgestellt und die benannten Bedingungen, um diese Ziele zu erreichen, beschrieben worden sind. Ein Analysebeispiel verdeutlicht das Vorgehen.

[77] Bei der Co-Codiererin handelt es sich um eine studentische Hilfskraft, die Germanistik und Politikwissenschaften studiert. Sie ist in der Durchführung qualitativer Sozialforschung geübt, was die tatsächliche Arbeit am Material vereinfacht hat. Der fehlende fachliche Hintergrund führte vor allem in Bezug auf die Unterscheidung der jeweiligen Variablenaspekte zu längeren Diskussionen, dies ermöglichte aber eine bewusstere Codevergabe.

5.6. Analysebeispiel

Als Beispiel für die Analyse wird hier ein Ausschnitt aus dem Interview mit der Lehrkraft A dargestellt[78]. Dabei geht es um das Verhältnis von Frau A zur Verwendung von Schemata und Algorithmen im Algebraunterricht.
In der folgenden Tabelle ist das an der qualitativen Inhaltsanalyse orientierte Vorgehen zu erkennen. In der linken Spalte findet sich ein Auszug aus dem Original-Transkript, der in der zweiten Spalte paraphrasiert worden ist (vgl. Kapitel 5.5). Anschließend erfolgen die an der Forschungsfrage orientierte Zusammenfassung des Materials (Spalte 3) sowie die Übersicht über die Codevergabe. Die Codes wurden textstellenweise und feiner am Material vergeben, wie in Anhang 4 zu sehen ist.

Tabelle 10: Transkript-Auszug, Paraphrase und Beispielcodierung

Originaltext	Paraphrase	Besonderheiten/ Z-M-A	Codierung
[I: Ist denn Algebra aus Ihrer Sicht ein Thema, das vor allem durch Schemata und Algorithmen lebt?] Ich glaube schon... Ja. *[I: Sehen sie Vorteile oder Probleme in der Anwendung von Schemata?]* Nein, sehe ich nicht. Also ich sehe wirklich keine Nachteile, aber wie gesagt diejenigen die Mathe durchdringen, müssen ja auch kein Schema auswendig lernen sondern die begreifen ja, warum das so ist. *[I: Und irgendwelchen speziellе Vorteile? Also, was Sie gesagt haben mit der Struktur?]* Ja. *[Ok. Und es gibt ja gerade in der Fachdidaktik Kritiker der Anwendung von diesen Algorithmen und Schemata, eben dass die Schülerinnen und Schüler sie immer nur unreflektiert verwenden. Ist das überhaupt ein reales Problem im realen Unterricht?]* Ich finde diesen modernen Ansatz, dass alle Schüler alles verstehen sollen einfach absoluten Humbug. Das haben wir nicht getan und das haben wir nicht getan, weil wir dumm waren, sondern einfach, weil wir... Wir haben Stärken und wir haben Schwächen. Das ist ja auch gut so, dass wir das haben. Wer keine Stärken und Schwächen hat, der macht ein Abi mit eins Komma. Ich finde das nicht schlimm, wenn man etwas nicht kann und wenn man Krücken braucht. Ich bin nur... hab nur mein Abitur machen können, weil meine Sprachlehrer mir die Krücke gegeben haben mich bei einem Vokabellernen melden zu dürfen. Aber ich hätte nicht übersetzen können und schon mal gar nicht irgendwie frei schreiben können. Ich brauchte die Krücke Vokabellernen und Grammatik, weil das ist ja logisch. Das kann ich ja als Mathematikerin. Mit dieser Krücke haben sie mir die Vier gegeben. Und warum sollen denn meine anderen... Das hat nichts damit zu tun, dass meine Lehrer schlechte Lehrer waren, ich kann einfach keine Sprachen. Das ist halt einfach so. Ich weiß ein-	Algebra besteht zum größten Teil aus Schemata. Keine Nachteile in der Anwendung von Schemata (für die Schwachen hilfreich, Starke durchdringen diese sowieso). Auseinandersetzung mit den individuellen Voraussetzungen der SuS - alle sind unterschiedlich begabt, der Ansatz „alle sollen alles verstehen“ wird abgelehnt („Humbug“). Eigene Schulzeit war ähnlich - konnte keine Sprachen - mit Vorlieben und Schwächen - wird als gut und wünschenswert („Das ist auch gut so“) bezeichnet. Dies wird als Erkenntnis bezeichnet.	- eigene Sozialisation wird angesprochen - da sie selbst unterschiedlich begabt ist, sieht sie dies auch bei ihren SuS *-schlechte Mathenoten gehen mit schlechten Physiknoten einher* - unterschiedliche Begabung der SuS als Grundlage und Voraussetzung für den Unterricht (Erkenntnis) - „diejenigen, die Mathe durchdringen, müssen ja auch kein Schema auswendig lernen, die begreifen ja, warum das so ist.“ - --> verstehen, wenn flexible Schema-anwendung - „Begabung“ entbindet sie von direkter Verantwortung für Lernerfolg	Schemaaspekt (+2)[79]; Schülerbild (!); kognitive Voraussetzungen; Lehrperson; Lehrerperson; Binnendifferenzierung; verstehen

[78] Die Dokumentation der qualitativen Inhaltsanalysen und geordneten Codeübersichten sind in Anhang 5 und 6 vollständig hinterlegt.
[79] Die „+2“ symbolisiert, dass die Verwendung der Schemata hier sehr positiv konnotiert ist. Das Ausrufezeichen verdeutlicht die Wichtigkeit des Schülerbilds in der Argumentation von Frau A.

fach, dass es diese Schüler gibt, die... Das ist ja das Schöne. Ich bin ja mit meinen anderen Fächern, Geschichts- und Religionslehrerin. Und ich hab sie ja vor mir sitzen. Die in Geschichte eine Eins schreiben und in Mathe eine Fünf. Ich denke das ist vielleicht immer für Kollegen, die Physik und Mathe haben etwas schwerer zu begreifen, weil wer in Mathe die Fünf hat, hat in Physik dann meistens allerhöchstens die Vier minus. Aber ich sehe ja, dass sie unterschiedlich begabt sind. Und ich habe ja auch diejenigen, die in Mathe eine Eins haben und in Religion eine Fünf haben. Das sehe ich ja auch. Das ist halt so.			
[I: Ok, keine Überraschung. Aber das ist ja überhaupt kein Problem, insofern... Einfach realistisch, glaube ich, ja. Und zum Lehren von Algebra in einer wie gesagt vorhergehenden Untersuchung, haben sich mehr oder weniger zwei Ansichten unter den Lehrern herauskristallisiert. Ich zitiere mal die eine Ansicht: „Also Algebra und dann noch Sekundarstufe eins, das ist natürlich das Langweiligste, was es für Lehrer zu unterrichten gibt!“ Und konträr wurde sich in einem anderen Interview geäußert von Lehrer B: „Die Ordnung und die Struktur, die Algebra vermitteln, machen dieses Thema zu meinem Favoriten in der Sekundarstufe eins.“ Können Sie sich in diesem Spektrum irgendwo einordnen und warum?] Nee, also, nee. Zum Beispiel meine Schüler lieben Stochastik. Das lieben sie einfach und von daher liebe ich es natürlich auch. Wenn ich weiß, ich kriege da selbst die Schwächsten mit, die lieben das zu überlegen, wie groß die Wahrscheinlichkeit denn jetzt ist, eine blaue Kugel zu ziehen, oder so. Warum sollte ich da nur Algebra mögen? Und gleichzeitig halt eben, nö, das ist denen nicht langweilig. Also nicht allen, also. Für manche ist es eben auch so... So eine Beruhigung halt zu wissen: „Ach ja, jetzt machen wir halt eben wieder ein paar Übungsaufgaben und da muss ich dann nicht so weit drüber nachdenken.“ *[Das heißt Ihre Vorliebe bezeichnet sich durch die Schüler?]* [Nicken der Befragten, Anm. JM]	Stochastik wird gemocht, weil sehr viele SuS Stochastik mögen und da „kriege [ich] selbst die Schwächsten mit“ Algebra wird gemocht, weil dort viele auch Beruhigung in den Schemata finden - Vorliebe für ein Gebiet durch Vorlieben der SuS bezeichnet	- keine innermathematische Begründung für Vorliebe - Argumentation darüber, möglichst alle mitzunehmen - Algebra als eher trockenes Thema: „nö, das ist denen nicht langweilig. Also nicht allen“ - in Abgrenzung zur Stochastik	Daten und Zufall; Schülerorientierung; Bedeutung der Algebra; Schema; Üben, sture Übungsideologie; prozedurale Anwendung; Lust der SuS
[I: Ja. Ok. Und: Sie hatten es zwar vorher schon einmal angedeutet, aber vielleicht nochmal explizit: Welches Ziel ist das vorrangige bei Ihnen im Algebraunterricht?] Ich möchte eben wirklich, dass ich nahezu alle Schüler mitnehme. *[I: Und wie erreichen Sie das?]* Indem ich, wie ich immer behaupte, einen Realschulunterricht mache. Also einen wirklich sehr strukturierten Unterricht. Ich gebe ihnen wirklich ganz viele Schemata vor, ich wiederhole halt eben ganz bewusst alles hundert Mal. Dass das wirklich den Schülern das in den Ohren klingelt. Auch dem Letzten noch. *[I: Das meinen Sie auch mit konservativem Unterricht?]* Ja, ich denke schon.	Ziel: So viele SuS wie möglich mitnehmen Mittel: Indem „Realschulunterricht“ - sehr strukturierter Unterricht mit zahlreichen Schemata und vielen Wiederholungen.	klare Ziel-Mittel-Formulierung	Schülerorientierung Struktur Sture Übungsideologie Schema-Aspekt Prozedurale Anwendung Instruktiv Lehrperson

Die Darstellung und Interpretation wurden durch die Co-Codiererin bestätigt. Der darauffolgende Analyseschritt betrifft die Zusammenfassung der Textstellen unter die verschiedenen subjektiven Theorien.
Zu den unterschiedlichen subjektiven Theorien ergibt sich die folgende inhaltliche Zusammenfassung für den Fall von Frau A[80]:

5.6.1. Wie gelingt guter (Algebra-) Unterricht?

„Guter Unterricht" gelingt nach Frau A dann, wenn alle Schülerinnen und Schüler mitgenommen werden und sie weiterhin „stolz" sein kann, wenn „am Ende der siebten (...) oder achten Klasse (...) halt eben auch wirklich alle meine Schüler Gleichungen lösen [können]" (7:09). Dies gelingt, „indem ich, wie ich immer behaupte, einen Realschulunterricht mache. Also einen wirklich strukturierten Unterricht. Ich gebe ihnen wirklich ganz viele Schemata vor, ich wiederhole halt eben ganz bewusst alles hundert Mal. Dass das wirklich allen Schülern (...) in den Ohren klingelt. Auch dem letzten noch" (41:46).

<u>Frau A</u> Ziel des Algebra- und Mathematikcurriculums: Alle Schülerinnen und Schüler sollen mitgenommen werden. Ziel des Algebracurriculums: Alle Schülerinnen und Schüler sollen am Ende des Algebraunterrichts die Fähigkeit besitzen Gleichungen zu lösen. Mittel: Ein strukturierter, regelhafter, durch Schemata dominierter Unterricht. Mittel: Zahlreiche Wiederholungen.

Und dies gilt aus Sicht von Frau A insbesondere die *Schwachen*, „dann immer: „‚Komm Äpfel, Birnen, vergiss es und halte sie getrennt' und immer wieder auch ‚bei plus geht nichts, bei mal geht alles'" (36:16). In diesem Kontext verzichtet sie darauf, Inhalte zu unterrichten, die ihr „dann zu fachmännisch" (9:26) sind. Gemeint ist hier zum Beispiel die Bezeichnung von Termen nach ihrer Struktur. „Da versuche ich meine Schüler nicht damit zu belasten" (9:26).

<u>Frau A</u> Ziel das Lehren von Algebra betreffend: Die Schülerinnen und Schüler nicht überfordern. Mittel: Auf unnötige Formalismen verzichten.

Der Algebraunterricht basiert überwiegend auf der Vermittlung von Schemata (38:04) und darin werden „wirklich keine Nachteile" (38:11) gesehen, weil „es für einen Großteil der Schüler gut ist. Für alle Schüler im Dreierbereich und schlechter (...). Die Schüler darüber (...) die finden ihren Weg und dann dürfen die natürlich auch. Für die anderen ist es halt wirklich besser, man macht es Schritt für Schritt" (37:12). Wenn der Schwerpunkt des Algebra-Unterrichts also das „Lösen von Gleichungen" (15:41) ist, dann „gibt es solche Sprüche bei mir wie: ‚Ihr müsst die Zahlen mit dem x auf einer Seite sammeln und zum Schluss müsst ihr immer durch die Zahl teilen, die vor dem x steht'" (42:24). Dies beruht auf der Überzeugung, dass der „Umgang damit (...) einfach [gelernt]" (17:41) werden muss und dass „wir Menschen (...) eben" so sind. „Wir können zwar teilweise schnell begreifen, aber wir brauchen trotzdem genauso viel Zeit Dinge zu üben, wie zu Großmutters Zeiten. Und da liegt die Diskrepanz. Die Leute glauben immer ganz häufig, (...) vieles schneller [zu] begreife[n], (...). Aber das Lernen dauert in jeder Generation gleich lang" (1:19:31). An dieser Stelle wird das Verstehen/Begreifen mit dem Üben gleichgesetzt, was erklärt, dass der Übung ein „wirklich

[80] Auch hierbei sei darauf verwiesen, dass es sich um Ausschnitte handelt, die das methodische Vorgehen illustrieren sollen. Die vollständigen Ausarbeitungen sind in Kapitel 6 zu finden.

groß[er]“ Stellenwert beigemessen wird (47:36), weil „ich denke auch, dass es wirklich nur durch die Übung kommt“ (43:36).

Frau A Unterstützung des Ziels Gleichungen zu lösen. Mittel: Sehr viel Übung und Wiederholung. Zum Lernen der schwächeren Schülerinnen und Schüler: Mittel: Das schrittweise Abarbeiten von Schemata.

5.6.2. Was sind die Ziele des Mathematikunterrichts?

Frau A möchte zudem, dass ihre Schülerinnen und Schüler Spaß und Interesse am Mathematikunterricht haben, auch wenn dazu Themen behandelt werden, denen sie keinen höheren Nutzen zuschreibt: „Stochastik macht ihnen Spaß, aber ob sie dann wirklich was fürs Leben daraus ziehen, das wage ich noch zu bezweifeln. Geometrie können dann viele, einige, aber ob die dann wirklich was nachher im Leben damit machen“ (1:15:12) ist zweifelhaft. Dennoch übernimmt sie dann diese Freude und überträgt diese auf sich: „Die [Stochastik] lieben sie einfach und von daher liebe ich sie natürlich auch. Wenn ich weiß, ich kriege da selbst die Schwächsten mit“ (40:49). Gerade der letzte Satz untermauert ihr Ziel, so viele SuS wie möglich mitzunehmen.

Frau A Ziel des Mathematikcurriculums: Spaß und Interesse bei den Lernenden auslösen. Ziel des Algebra- und Mathematikcurriculums: So viele Schülerinnen und Schüler wie möglich mitnehmen.

5.6.3. Wie gelingt erfolgreiches Lernen?

Die individuellen Voraussetzungen der Schülerinnen und Schüler werden von Frau A anerkannt. Dies ist anhand ihres Schülerbildes ablesbar. Ihre Klassifizierung erfolgt dichotom in „stark“ und „schwach“, sodass auch die Frage nach dem erfolgreichen Lernen zweigeteilt beantwortet werden muss.
Die stärkeren Lernenden „verstehen das dann ja so intuitiv“ (24:46) oder sie „begreifen ja, warum das so ist“ (38:11). Auf diese Schülerinnen und Schüler wird weniger eingegangen, da sie durch ihre Voraussetzungen in der Lage sind, sich die eingeführten Inhalte selbst zu erarbeiten und dann mit einer sehr guten Note abzuschließen (vgl. 4:52). Dennoch müssen auch die Lernenden, die sich ihren Weg suchen, daran denken: „[E]s gibt eine mathematische Fachsprache. Also auch ihr müsst Rechenaufträge schreiben (...). Aber da merkt man es halt eben, die suchen sich ihren Weg und die finden ihren Weg“ (37:12). Wird „erfolgreiches Lernen“ aber so interpretiert, dass die Schülerinnen und Schüler das Optimum aus sich selbst herausholen und auch ab und zu an ihre Grenzen stoßen sollen, dann ist dieses nicht erreicht. Dies ist nicht der Fokus von Frau A, was sie aber für sich akzeptiert hat und mit den Worten „Aber irgendwo tun sie mir schon leid“ (44:45) kommentiert.

Frau A Ziel: Alle Schülerinnen und Schüler mitnehmen Mittel: Die Förderung der stärkeren Schülerinnen und Schüler wird untergeordnet. Als Maßstab für die im Unterricht vermittelten Inhalte, die Methoden- und Aufgabenauswahl gelten die schwächeren Schülerinnen und Schüler.

5.6.4. Die zugehörige Ziel-Mittel-Argumentation

Die Kriterien, wie diese dargestellt werden, sind ausführlich bei Scheele und Groeben (1988) zu finden. Ein „!“ kennzeichnet das jeweils angestrebte Ziel. Die Einleitung „wenn“ bezieht sich auf die vorhergehende Bedingung. Die Lesart verläuft von unten links bis oben rechts. Das Symbol „→“ kennzeichnet den Übergang zur nächsthöheren Argumentationsebene und „+“ das Zusammenspiel von zwei Argumenten auf einer Argumentationsebene[81].
Ein Ausschnitt aus der Z-M-A[82] zum Lehren von Algebra von Frau A illustriert das Vorgehen:

										Wenn den SuS Sicherheit vermittelt und Angst abgebaut wird !Sicherheit !Angstabbau (=die Sicherheit bedeutet hier, dass die SuS die Schule mit dem vermittelten Wissen erfolgreich beschließen können, Angstabbau= zielt darauf ab Versagensängste in den verschiedenen Fächern zu reduzieren)
				Wenn man den Unterricht strukturiert, lehrerzentriert und instruktiv gestaltet !Lehrerzentrierung !Struktur !Instruktion (= Lehrerzentrierung= stark durch die Lehrkraft vorstrukturierter Unterricht, instruktiv= Arbeitsaufträge kleinschrittig und klar, strukturiert= einem Muster folgend)		**Wenn man inhaltlich den Schwerpunkt auf die Vermittlung von Schemata und Regeln legt** !Schema !Rechenregeln (= Schema= Lösungsverfahren von Gleichungen, Regeln zur Termumformungen, Rechenregeln= Regeln zu den Grundrechenarten in den verschiedenen Zahlbereichen)		**Wenn man sehr viel Übungsgelegenheit mit Fokus auf geschlossene Aufgaben gibt** !Übung !geschlossene Aufgaben (=Übung bezieht sich in diesem Fall darauf, dass Lernen nur durch Übung passieren, geschlossene Aufgaben meint, dass es eindeutige Lösungen gibt und die Aufgaben schematisch bearbeitet werden können)	→	**ermöglicht dies den SuS Sicherheit zu vermitteln, Angst zu reduzieren**
Wenn man akzeptiert, dass die SuS mit sehr verschiedenen kognitiven Voraussetzungen an die Schule kommen !unterschiedliche kognitive Voraussetzungen (= Dichotomie in *stark* und *schwach*)	+	**Wenn man keine SuS inhaltlich zurücklassen möchte** !alle SuS mitnehmen (= allen ein Basiswissen an die Hand geben)	→	**wird der Unterricht instruktiv, strukturiert und lehrerzentriert gestaltet**	+	**werden inhaltlich schwerpunktmäßig Schemata und Regeln vermittelt**	+	**wird sehr viel Möglichkeit zur Übung anhand von geschlossenen Aufgaben gegeben**		

Abbildung 7: Ziel-Mittel-Argumentation Frau A

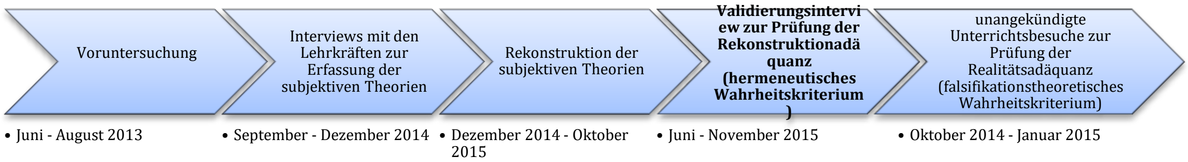
[81] Ein Analysebeispiel, bei dem ein Fall vollständig dargestellt wird, ist bei Eichler (2005) zu finden.
[82] Das Schema endet in der Abbildung mit einem „Wenn“, das ein Mittel beschreibt. Das liegt daran, dass hier nur ein Ausschnitt gegeben ist und nicht die gesamte Z-M-A, die mit einem übergeordneten Ziel endet (vgl. dazu Kapitel 6).

Die Lesart entspricht der Folgenden: „Wenn man akzeptiert, dass die Schülerinnen und Schüler mit sehr verschiedenen kognitiven Voraussetzungen an die Schule kommen und wenn man inhaltlich niemanden zurücklassen möchte, dann wird der Unterricht instruktiv, strukturiert und lehrerzentriert gestaltet, inhaltlich wird auf die Vermittlung von Schemata und Regeln geachtet und es wird sehr viel Gelegenheit zur Übung anhand geschlossener Aufgaben gegeben[83]. Wenn der Unterricht instruktiv, strukturiert und lehrerzentriert gestaltet, inhaltlich auf Schemata und Regeln Wert gelegt und sehr viel Gelegenheit zur Übung anhand geschlossener Aufgaben gegeben wird, kann den Schülerinnen und Schüler Sicherheit vermittelt und die Angst zu versagen, abgebaut werden".
Die Ziel-Mittel-Argumentation kann in Bezug auf die Inhalte des Algebracurriculums nicht in der soeben beschriebenen Form dargestellt werden, weil rein auf der stoffinhaltlichen Ebene kein begründender Zusammenhang zwischen den einzelnen unterrichtlichen Inhalten und einem inhaltsübergreifenden Ziel hergestellt werden kann (Eichler, 2005). So kann zwar ein Inhalt die Voraussetzung für einen Weiteren sein, aber das „Ziel" ist erneut ein Inhalt[84]. Demnach erfolgen die vereinfachte Strukturierung und Darstellung in der Form:

Inhalt A $\rightarrow$ Inhalt B

Die Lesart ist die Folgende: Wenn Inhalt A behandelt ist, kann Inhalt B erreicht werden (Eichler, 2005, p. 143).

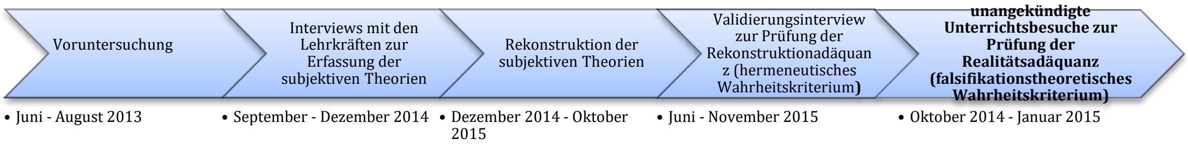
5.7. Das validierende Interview



Zur Validierung der mit Hilfe der Ziel-Mittel-Argumentationen rekonstruierten subjektiven Theorien wurde ein zweites Interview mit den Lehrkräften vereinbart. Diese Gespräche hatten eine durchschnittliche Länge von etwa 25 Minuten und wurden ebenfalls über das Programm Voice Record aufgenommen.
Bei diesem Termin wurde den Lehrkräften das methodische Vorgehen erläutert. Ihnen wurden die graphischen Darstellungen der Ziel-Mittel-Argumentationen vorgelegt, wobei die Lesart der Schaubilder erklärt worden ist. Klar herausgestellt wurde, dass es sich bei dem Gespräch um ein offenes Diskussionsverfahren handelt, bei dem gemeinsam über die Authentizität und den Wahrheitsgehalt der Darstellungen gesprochen werden soll. Im Fokus stand die Klärung der Frage, inwiefern die rekonstruierten subjektiven Theorien im Einklang mit den individuellen Haltungen der Lehrkräfte stehen.

[83] Dass offene Aufgabenstellungen abgelehnt werden, sagt Frau A deutlich an anderer Stelle: „[I]ch meine ich sehe es ja auch am Buch...wie viel, wie offen man da immer letztendlich ran gehen soll und ich glaube eben wirklich nicht, dass Offenheit den, den schwachen Schülern hilft" (46:00).
[84] Die Staffelung der Inhalte unterscheidet sich zum Beispiel in ihrem kognitiven Anspruch an die Schülerinnen und Schüler oder in Bezug auf die logischen, innermathematischen Abhängigkeiten, nicht aber zwingend aufgrund der individuellen Zielsetzungen der Lehrkräfte und ihrer affektiven Belegung.

5.8. Unterrichtsbeobachtungen



Die Unterrichtsbeobachtung fand als teilnehmende Beobachtung statt, weil die Innensicht auf eine Alltagssituation angestrebt worden ist (Mayring, 2002). Die Beobachtungen wurden unangekündigt durchgeführt, um eventuelle, spezielle Vorbereitungen der Lehrkräfte zu vermeiden. Beobachtet werden sollte ein möglichst authentisches Bild des typischen Unterrichts.
Bei einer teilnehmenden Beobachtung ist es wichtig die zu beobachtende Dimension zu bestimmen, im Sinne eines Beobachtungsleitfadens (Mayring, 2002). Da durch die Beobachtung die Wirkungen der Handlungen der Lehrkräfte, also das Verhalten in der Klasse, untersucht werden sollten, war dieses zentral.
Die Leitfragen, welche die Beobachtungen strukturierten, beziehen sich darauf, wie und welche Anweisungen die Lehrkraft gibt, wie und welche Materialien und Medien verwendet werden und wie sie mit den Schülerinnen und Schülern agiert. Zu diesem Zweck wurde bestmöglich versucht, die Sprechakte der Lehrkraft, sowohl Instruktionen, als auch Unterrichtsgespräche, zu protokollieren - diese sind in den Protokollen fett gedruckt. Zusätzlich wurden die verwendeten Materialien abfotografiert und die angewandte Methodik notiert.
Einschränkend müssen einige Anmerkungen zu der Reichweite dieses Verfahrens in Bezug auf die Prüfung der Realitätsadäquanz getroffen werden. Nur ein kleiner Anteil der beobachteten Stunden kann zur Überprüfung herangezogen werden, da der Nachteil unangekündigter Unterrichtsbesuche die Nicht-Planbarkeit der Inhalte der Stunden ist. So wurden zum Beispiel Stillarbeiten während der Notenbesprechung, Klassenarbeitsbesprechungen, Gruppenarbeiten außerhalb des Klassenzimmers und organisatorische Themen in den Stunden beobachtet, die mit dem Algebraunterricht nur bedingt zusammenhingen. Dementsprechend sind für einige Lehrkräfte keine oder nur wenig verwertbaren Aussagen aus den Beobachtungen zu ziehen. In den übrigen Fällen sind aufgrund der geringen Anzahl der beobachteten Stunden nur Tendenzen feststellbar. Es kann festgestellt werden, ob es in der Stunde Aspekte gab, die den rekonstruierten Theorien vollständig widersprechen oder mit ihnen im Einklang stehen. Die Beobachtungen fanden in der Mitte beziehungsweise am Ende des ersten Halbjahres im Schuljahr 2014/2015 statt.
Ein Auszug aus dem Beobachtungsprotokoll[85] aus dem Unterricht von Frau A veranschaulicht das Vorgehen:

Tabelle 11: Beobachtungsprotokoll (Auszug)

Zeit	Lehreraktivität	Sozialform/Bemerkungen
08.10 Uhr	**Beginn mit dem Üben zum Thema: „Multiplikation von Termen“** [das wird angeschrieben] **Bitte denkt daran, dass ihr bei der Multiplikation von Termen das Malzeichen einfach verschwindet. Wer ahnt, was das sein könnte?** auch 8x. **Ja, warum?** Weil die Multiplikation kommutativ ist. **Genau und was für Zahlen gilt, gilt auch für Variablen, weil Variablen sind ja Zahlen.** (L. schreibt verschiedene Zahltermaufgaben an und variiert dabei) **Addition und Subtraktion**	Unterrichtsgespräch (L. schreibt Aufgabe an und notiert die Lösungen der SuS an der Tafel)

[85] Die Beobachtungsprotokolle aller Stunden sind in Anhang 8 hinterlegt.

	sind schwieriger als Multiplikation und Division. Das solltet ihr grundsätzlich auch für die Zukunft lernen. Bei der Multiplikation ist das ganze einfacher, weil man alles zusammenfassen kann, aber nicht bei Plus. Das müsst ihr euch merken. Und warum das so ist, dabei hilft uns, was ihr gerade gesagt habt – ich schreibe hier extra noch einmal die Malzeichen mit hin. Was gilt? Man darf die Zahlen vertauschen. **Genau, die Multiplikation ist kommutativ. Wir dürfen die Faktoren vertauschen, denn 2·3 ist 6 und 3·2 ist 6.** Das darf man? **Genau. Also dann haben wir als nächstes? Multiplikation darf alles zusammenfassen.** **So, ich habe hier einige falsche Antworten gehört, aber warum ist das und nur das richtig.** Das ist Punkt-vor-Strichrechnung. Da darf man nicht alles zusammenfassen. **Genau bei der Multiplikation darf alles zusammengefasst werden und bei der Addition gelten unsere Äpfel und Birnen.** [SuS werden unruhig, die Hälfte beteiligt sich, aber es ist lehrerzentriert und 1/3 wird lauter, dann aber wieder volle Konzentration] **Na, machen wir das mal zusammen (Aufg. 10). Wie viel ist 3x·4y?** 12xy **und 2x·6y?** 12xy **und zusammen?** 24xy. **Genau. Und geht es nach dem Schritt -8xy+6yz weiter?** Nein. **Warum nicht?** Weil das verschiedene Buchstaben sind. **Ok, aber können wir für Buchstaben Variablen sagen?** Ja. **Die nächste Aufgabe lösen wir Schritt für Schritt. Nicht alles auf einmal sagen.** -10xy+12xz+6xy **und weiter?** [S. hat Schwierigkeiten mit den Vorzeichen] **Du hast 10 Euro Schulden und bekommst 6 Euro geschenkt?** -4xy+12xz. **So, wenn ihr euch die letzte Aufgabe und alle Aufgaben davor anguckt. Wer hat noch keine Idee worum es geht?** [keine Meldung dazu. „Können wir das jetzt im Buch machen“]. **Nein, ich werde euch jetzt noch ganz viele Aufgaben anschreiben, bevor wir ins Buch gehen, weil ich euch mit dem Minuszeichen ärgern muss. Aber bevor ihr die Aufgaben löst, schreibt ihr von der Tafel ab und zwar mucksmäuschenstill. Danach löst ihr die Aufgaben, die ich jetzt anschreibe.**	

Zur Auswertung der teilnehmenden Beobachtung wurden die Beobachtungsprotokolle inhaltlich zusammengefasst. Dabei wurde auf die den Unterricht charakterisierenden Kriterien geachtet, die in den vorangegangenen Interviews rekonstruiert worden sind, zum Beispiel das Verhalten der Lehrkraft, die Aufgabenformen oder das Schülerbild betreffend. Auf diese Weise ist der Vergleich zwischen den Ergebnissen aus den Interviewanalysen und den Unterrichtsbeobachtungen möglich.

So ist in dieser Beobachtung des Unterrichts von Frau A zum Beispiel anhand der kleinschrittigen Anweisungen und ihrer hohen Redeanteile die Tendenz zu einem lehrerzentrierten, instruktiven Unterrichtsstil erkennbar. Rechenregeln werden schematisch vermehrt wiederholt. Zudem zeigt sich, dass anhand vieler geschlossener Aufgaben geübt wird.

In Bezug auf das gewählte Analysebeispiel ist dementsprechend zu erkennen, dass die Handlungen, abgebildet durch die subjektiven Theorien, und das Verhalten, in Form der Unterrichtsbeobachtungen von Frau A, miteinander im Einklang stehen. Die subjektiven Theorien wurden vor den Unterrichtsbeobachtungen im Validierungs-Interview validiert (vgl. Kapitel 5.7).

5.9. Analyse der Klausuren

Um die Innensicht auf den tatsächlichen Unterricht zu verfestigen und so die in den Unterrichtsbeobachtungen sichtbar gewordenen Tendenzen durch zusätzliches empirisches Material aus dem Unterricht zu ergänzen, wurden die zum Thema Algebra in den Klassenstufen 7 oder 8 geschriebenen Klausuren erfasst. Auf diese Weise können mögliche Gemeinsamkeiten oder inhaltliche Brüche zu den bisherigen Ergebnissen analysiert werden.
Die in den Klausuren gestellten Aufgaben, das ist dabei die zentrale Annahme, spiegeln die Aufgabenkultur im Unterricht wider (Drüke-Noe, 2014), weshalb sie als Innensicht auf den Unterricht gewertet werden können. Zudem wurden die Klausuraufgaben ohne einen von außen steuernden Einfluss entworfen, sodass sie als besonders authentisch gelten.
Die Analyse der Klassenarbeiten erfolgt nach dem von Drüke-Noe (2014) vorgeschlagenen Verfahren. Dabei werden die Klassenarbeiten ohne Berücksichtigung der Schülerproduktionen rational analysiert, indem die Anweisungen jeder Aufgabe und Teilaufgabe den prozessbezogenen, allgemein-mathematischen Kompetenzen und Anforderungsbereichen zugeordnet werden. Das Ziel ist es, den kognitiven Anspruch der Klausur zu ermitteln (Drüke-Noe, 2015).
Die inhaltliche Dimension zu analysieren, ist dabei nicht zielführend, da in diesem Fall festgestellt wird, dass es um Variablen, Terme und Gleichungen geht. Vielmehr lässt sich über das angewandte Verfahren feststellen, ob die Klausuren Wert auf das Argumentieren, Kommunizieren oder eher auf das technische Arbeiten legen (Drüke-Noe, 2014). Diese prozessbezogenen Kompetenzen sind in den Bildungsstandards für das Fach Mathematik nachzulesen (Kultusministerkonferenz, 2004).
Die Ergebnisse der Analyse der Klassenarbeiten lassen sich wie bereits angedeutet zu den Resultaten der Interviews in Verbindung setzen. Erfasst wurden sieben Klausuren von den Lehrkräfte A-G[86].

Das Beispiel der Klassenarbeit von Frau A verdeutlicht das Vorgehen. Hier sind beispielhaft die Aufgaben 1, 2 und 5 gegeben[87]:

1) **Fasse zusammen** soweit wie möglich:

a) $3x + 4y + 5x + 6 + 7y + 3 + 8x^2$ b) $2x \quad 3y + 4x \quad 5y - 7 \quad 3y \; + 4 \quad 5x$ 03 P /

c) $\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y + \frac{5}{9}x - \frac{3}{8}y - \frac{5}{6}x + \frac{5}{12}y$ 03 P /

03 P /

[86] Herr H ist kurz nach den Interviews in Elternzeit gegangen und hat die Abschlussarbeit zu dem Thema nicht mehr selbst durchgeführt, weshalb sie nicht mit in die Analyse mit einbezogen werden kann. Herr I ist die einzige Lehrkraft, die zum Erhebungszeitpunkt nicht in den Klassenstufen sieben und acht unterrichtet hat. Der beobachtete Unterricht fand in einer zehnten Klasse statt. Thema des Unterrichts war die Einführung von Ableitungen. Wegen der inhaltlichen Nähe zu den Termumformungen und der Verwendung der Variablen im Kontext der Funktionen erscheint es dennoch sinnvoll diesen zu beobachten. Hinzu kommt, dass Herr I gern an der Untersuchung teilnehmen wollte. Die Analyse einer Klausur in diesem Bereich unterscheidet sich aber sehr von den im Interview besprochenen Inhalten und erschwert vergleichende Aussagen über die verschiedenen Klausuren. Aus diesem Grund wird auch diese Klausur von der Analyse ausgeschlossen.
[87] Alle Klausuren sind in Anhang 8 vollständig hinterlegt.

2) **Setze** in den Term die angegebenen Werte **ein** und **berechne** z:

a) z = 4 x – 5xy + 6y   für   x = 2   und   y = 3   03 P /

b) z = 3x – 2y + 3   für   x = - 1   und   y = -2   03 P /

5) Paul hat ein Buch von 250 Seiten in fünf Tagen gelesen. An jedem Tag hat er zehn Seiten mehr als am Vortag gelesen.

a) **Stelle einen Term auf**, um die Anzahl der Seiten zu berechnen! Erläutere die Variable!   03 P /

b) Berechne, wie viele Seiten er an den einzelnen Tagen gelesen hat!   03 P /

Abbildung 8: Klausurauszug Frau A

Das Auswertungsschema in Form der folgenden Tabelle wird in der linken Spalte durch die in chronologischer Reihenfolge gegebenen Anweisungen in den einzelnen Klausuraufgaben versehen. Anschließend wird mit Hilfe einer Lösungsskizze das erwartete Lösungsverhalten der Schülerinnen und Schüler festgehalten und auf Basis der durch Leiß und Blum (2011) beschriebenen Unterscheidung zwischen den verschiedenen Kompetenzen und Anforderungsbereichen den jeweiligen Bereichen zugeordnet[88]:

Tabelle 12: Klausurenanalyse Frau A

Kompetenz(en)	math. argumentieren			Probleme mathematisch lösen			mathematisch modellieren			mathematische Darstellungen verwenden			formal-technisch arbeiten			mathematisch kommunizieren		
Anforderungsbereich	I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II	III
Fasse zusammen														x				
Setze ein													x					
Berechne													x					
Löse														x				
Stelle auf							x									x		
Erläutere																x		
Berechne														x				
Stelle auf							x									x		
Erläutere																x		
Berechne													x					
Erkläre																	x	

In der Bilanz legt diese Klausur ihren Schwerpunkt auf das formal-technische Arbeiten. Die kognitiven Anforderungen bewegen sich überwiegend im Anforderungsbereiche I und in Ansätzen auch in II. Damit weist diese Klausur geringe kognitive Anforderungen auf. Es fehlen Aufgaben im Bereich der prozessbezogenen Kompetenzen des mathematischen Argumentierens und Problemlösens. Auf die Verwendung verschiedener mathematischer Darstellungen wird auch verzichtet. Dieses Bild deckt sich mit den aus dem Interview gezogenen Informationen.

[88] Eine Übersicht über das schrittweise Vorgehen findet sich in Drüke-Noe (2015).

5.10. Methodenkritik

Das FST liefert in Form der Ziel-Mittel-Argumentationen die rekonstruierten subjektiven Theorien. Diese haben in ihrer Aussagekraft eine begrenzte Reichweite. Grundsätzlich geht es darum Handlungen zu erklären und diese gegebenenfalls auch prognostizieren zu können.
Es ist also das Ziel eine Aussage über die Handlungsrelevanz dieser zu treffen, ihre Wirksamkeit zu prüfen. Dabei gilt, dass wenn nur bestimmte, abgegrenzte Handlungen erklärt werden, von Theorien kurzer Reichweite gesprochen wird. Erst die Kombination von Teiltheorien und damit die Erweiterung der Erklärungsschritte erweitern die Subjektiven Theorien zu Theorien mittlerer Reichweite (Scheele & Groeben, 1988). In dieser Arbeit wird das Lehren von Algebra als Handlung der Lehrkräfte untersucht, dabei fließen die verschiedenen Gegenstandsbereiche, wie zum Beispiel die Ziele der Lehrkräfte den Mathematik- und Algebraunterricht betreffend, ihr Selbst- und Schülerbild mit ein. Damit werden die subjektiven Theorien zu den einzelnen Bereichen zu dem individuellen Curriculum der Lehrkraft kumuliert, was diese zu einer Theorie mittlerer Reichweite macht. Dabei wird davon ausgegangen, dass Theorien mittlerer Reichweite

- mehrere Erklärungsschritte umfassen (nicht nur ein Handlungsergebnis, sondern auch weitere Folgen beschreiben),
- Handlungen sich explizieren lassen und
- so differenziert sind, dass inhaltliche Brüche möglich sind. Dennoch sollte zumindest intern Kohärenz herrschen (Scheele & Groeben, 1988).

Die ersten zwei Punkte lassen sich durch die Rekonstruktion und den Dialog-Konsens nachweisen. In Bezug auf die Erklärung von Handlungen muss einschränkend gesagt werden, dass die Handlungsrelevanz in dieser Arbeit nur vermutet werden kann. Dabei stellte Eichler (2005) vier Kriterien zusammen, welche die handlungsleitende Tendenz der subjektiven Theorien wahrscheinlicher machen:

- Je präziser und konkreter die subjektiven Theorien untermauert werden, beispielsweise durch Beispiele aus der Unterrichtspraxis, desto höher ist ihre Wirksamkeit.
- Je weniger Brüche und Inkonsistenzen auftreten, desto höher ist ihre Wirksamkeit.
- Je zentraler die subjektiven Theorien sind, wenn sie zum Beispiel wiederholt und mit Nachdruck wiederholt werden, desto höher ist ihre Wirksamkeit.
- Je größer die Übereinstimmung der subjektiven Theorien der Lehrkräfte und den implizit durch das Curriculum vorgegebenen Entscheidungen, wie die Lehrmaterialien, desto höher ist ihre Wirksamkeit.

Dabei wirken die Unterrichtsbesuche und die Analyse der Klausuren in dieser Arbeit als Konsistenzkriterien, sodass angenommen wird, dass je eher diese manifesten Ausprägungen der Handlungen mit den subjektiven Theorien vereinbar sind, desto wirksamer sie sind.
Dennoch kann keine tragfähige Aussage über die prognostizierende Wirkung der subjektiven Theorien getroffen werden. Dazu wären zum Beispiel umfangreichere Unterrichtsbeobachtungen nötig gewesen, die den zeitlichen und organisatorischen Rahmen der vorliegenden Untersuchung überschritten hätten. Insofern bleibt die Überprüfung der Wirksamkeit der rekonstruierten subjektiven Theorien ein Forschungsdesiderat.
Bei der qualitativen Analyse der Daten werden die von Mayring (2002) aufgeworfenen sechs Gütekriterien qualitativer Forschung berücksichtigt.
Dabei geht es zunächst um die Dokumentation des Verfahrens. Hier gilt es, das eigene Vorgehen transparent zu machen. So wurden alle relevanten Verfahrensschritte in diesem Kapitel dokumentiert. Das gesamte Datenmaterial ist zudem angehängt. Die gemeinsame Durchsicht des verfügbaren Datenmaterials erhöht zudem die Transparenz in der Analyse.

Ein zweites Kriterium ist die Absicherung der Interpretationen durch Argumentationen. Die Argumentation und ihre Nachvollziehbarkeit stehen hier im Vordergrund. Ein wichtiger Punkt ist dabei das bereits vorhandene Vorwissen. Da die qualitative Inhaltsanalyse für sich genommen ein regelgeleitetes, analytisches Verfahren ist, das im Vergleich zu anderen Verfahren der interpretativen Textauswertung weniger interpretativ ist (Mayring, 2002) und sich bewusst für ein deduktives Kategorienschema entschieden worden ist, wurde in Bezug darauf die Entstehung der Kategorien inhaltlich begründet. Auf die Logik in der Argumentation wurde im Dialog mit der Co-Codiererin geachtet. Speziell wurde auf die Trennschärfe der Argumentationsebenen, deren Anordnung und auf die Plausibilität der Interpretationen unter Rückbezug auf das Material geachtet.
Der Vorteil des Verfahrens der qualitativen Inhaltsanalyse liegt in der Nachvollziehbarkeit des Vorgehens und der Nachteil im weniger offenen Charakter der Methode. Dies ist aber in Bezug auf die Fragestellung vertretbar.
Dem dritten Kriterium des regelgeleiteten Vorgehens wird durch die dargestellte Anwendung der qualitativen Inhaltsanalyse entsprochen. Dies gilt auch für das vierte Kriterium der kommunikativen Validierung mit dem Erkenntnis-Objekt. Dies ist ein integraler Bestandteil der Dialog-Konsens-Methodik, weshalb dieses Kriterium per se erfüllt ist. Des Weiteren soll auf die Nähe zum Gegenstand geachtet werden, dass sich also in der natürlichen Umwelt der Beforschten bewegt wird. Dies ist hier ebenfalls gegeben, da mit Lehrkräften über ihren Unterricht gesprochen wird. Schließlich postuliert Mayring die Methodentriangulation. Das bedeutet, dass aus verschiedenen Blickwinkeln auf die Fragestellung geblickt wird. In dieser Untersuchung wird dies durch die Kombination der Dialog-Konsens-Methodik, den Unterrichtsbeobachtungen und der Analyse der Klausuren erreicht.
Darüber hinaus wird der Blickwinkel auf das Thema durch die Co-Codiererin, die am Analyseprozess teilhat und durch die Verbindung der theoretischen Überlegungen aus den verschiedenen Forschungszweigen: die Algebradidaktik, die Mathematikdidaktik und die Sozialpsychologie (als Ausgangspunkt des FST) erweitert.

6. Ergebnisse

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse der Interviewstudie vorgestellt. Die individuellen Curricula werden für jede Lehrkraft vorgestellt. Dies impliziert die Darstellung der fünf jeweiligen subjektiven Theorien, die in den Leitkategorien gebildet worden sind: Ziele des Mathematikcurriculums, Inhalt des Algebracurriculums, Ziele des Algebracurriculums, das Lehren und Lernen von Algebra betreffend verglichen. Diese bilden einen wesentlichen Bestandteil der individuellen Curricula der Lehrkräfte (vgl. Kapitel 2.1).
In Kapitel 7 wird auf Basis der hier gegebenen Darstellung der empirisch entwickelten individuellen Curricula über die Fallkontrastierung eine Typologie erstellt. Diese wird angelehnt an das Verfahren von Kelle und Kluge (2010) zur Typenbildung entwickelt.
Abschließend werden die Ergebnisse dieser Arbeit den Ergebnissen zu den individuellen Curricula der Lehrkräfte in der Stochastik, Geometrie, Arithmetik und Analysis in Kapitel 8 gegenübergestellt.

Individuelle Curricula der Lehrkräfte in der Algebra

Die individuellen Curricula werden fallbezogen dargestellt[89]. Zu diesem Zweck wird pro Lehrkraft eine inhaltliche Zusammenfassung zu den in Kapitel 2 hergeleiteten fünf zentralen Bereichen erstellt, die aus der Analyse der Interviews stammen:

- dem Stoffinhalt der Algebra,
- den Zielen des Algebracurriculums,
- den Zielen des Mathematikcurriculums,
- dem Lehren der Algebra/Mathematik und
- dem Lernen der Algebra/Mathematik.

Diese werden ergänzt durch:

- das Variablenverständnis der jeweiligen Lehrkraft,
- das individuelle Bild der Mathematik
- die jeweiligen Ziel-Mittel-Argumentationen und
- die Resultate der Unterrichtsbeobachtungen sowie der Klausurenanalyse.

Im Fall von Frau A wird ihr Schülerbild als eigener Abschnitt hinzugefügt, aufgrund der besonderen Stellung ihres Schülerbilds in ihrer Argumentation.
Bei der Analyse zum Bild der Mathematik wird sich zunächst an den Codierungen des Interviews zu den globalen Beliefs orientiert[90]. Diese sind deduktiv aus der Studie von Grigutsch et al. (1998) abgeleitet und im Interview auf den Algebraunterricht bezogen. Vergeben wurden die Codes: „Schema“, „Prozess“, „Anwendung“ und „Formalismus“, die jeweils mit den Werten 0, 1 oder 2 gewichtet worden sind. Der Wert 0 entspricht dabei einer Ablehnung des Codes, die 1 entspricht dem neutralen Vorhandensein des Codes und die 2 wird bei explizit positiver Zustimmung vergeben. Von expliziter Zustimmung wird im Zusammenhang mit Worten wie „sehr“ oder selbst gegebenen Beispielen gesprochen.
Für jede Lehrkraft wurden die Summen-Scores für jeden der vier Codes gebildet. Anschließend wurden den Teilnehmenden entsprechend der Summen-Scores die Rangplätze 1 bis 9

[89] Die inhaltlichen Zusammenfassungen sind dabei immer aus der Sicht der jeweiligen Lehrkraft geschrieben und stellen deren Haltung dar. Es wird auf die ständige Verwendung des Konjunktivs verzichtet, da es für die Lehrkräfte Teil ihrer jeweiligen Realität ist und damit für diese als wahr gilt.
[90] In Anhang 7 sind die Codierungen aus den Interviews das mathematische Weltbild betreffend und die ausgefüllten Fragebögen sowie die Auswertung beider zu finden.

zugeordnet[91]. Zur Charakterisierung der individuellen Algebracurricula im Sinn der vier globalen Beliefs wurde die Zugehörigkeit der Rangplätze zu den jeweiligen Terzilen betrachtet.
In einem zweiten Schritt wurde die Beantwortung der Fragen aus der Erhebung von Grigutsch et al. (1998) zum allgemein mathematischen Weltbild, die im Anschluss an das Interview durchgeführt worden ist, analysiert. Die Beantwortung erfolgt auf einer fünfstufigen Likert-Skala (1-5), wobei der Wert 5 der höchsten Zustimmung entspricht. Die Ergebnisse aus dieser Erhebung werden in Form eines Säulendiagramms dargestellt, wobei die absoluten Werte auf einer Summenskala zwischen 4 und 20 abgebildet werden[92]. Diese wurden im Anschluss z-standardisiert.
Ein Vergleich wird vor allem deshalb durchgeführt, um die Beziehung zwischen den beiden Anschauungen zu beschreiben. Es geht darum für jede einzelne Lehrkraft zu prüfen, inwiefern die Angaben im Fragebogen, die sich auf das allgemein-mathematische Weltbilde beziehen, mit dem aus dem Interview gewonnenen algebraspezifischen Eindruck einhergehen.
Für die Darstellung der Ergebnisse ist anzumerken, dass der Code „Prozess“ in den Interviews insgesamt nur viermal vergeben werden konnte. Aus diesem Grund ist kein sinnvoller Vergleich möglich. Werden aber in einzelnen Fällen relativ große Zustimmungswerte für diese Skala erzielt, erfolgt dennoch eine inhaltliche Interpretation des Unterschieds.
Die jeweils vorhandene Argumentationsstruktur in den übrigen Bereichen wird im Einzelnen verdeutlicht. Am Ende der Analysen werden die Ziel-Mittel-Argumentationen abgebildet. Die hier dargestellten Ziel-Mittel-Argumentationen sind die bereits durch die Lehrkräfte validierten Versionen (vgl. Kapitel 5.7). Sie stellen in diesem Sinn die rekonstruktionsadäquaten subjektiven Theorien dar (vgl. Kapitel 5.1).
Die Unterrichtsbeobachtungen und die Analyse der Klausuren runden die durch die Rekonstruktion gewonnenen Deskriptionen der individuellen Curricula ab und geben einen, wenn auch in seiner Reichweite eng begrenzten, Eindruck des realen Unterrichtsgeschehens.

[91] Bei Bindungen wurde durch Mittelwertbildung der entsprechende Rangplatz zugewiesen.
[92] Obwohl die vier Skalen aufgrund der Übersichtlichkeit in einem Diagramm abgebildet werden, wird darauf verwiesen, dass sie nicht miteinander verglichen werden können. Vielmehr erfolgt der Vergleich zwischen den Angaben zu den einzelnen Skalen im Fragebogen und im Interview.

6.1. Frau A

Frau A ist seit mehr als 20 Jahren Lehrerin und unterrichtet an einem niedersächsischen Gymnasium. Sie verwendet das Lehrwerk „Elemente der Mathematik“. An der Schule wird mit graphikfähigen Taschenrechnern gearbeitet.
Die Sichtweisen von Frau A sind einerseits stark durch ihre eigene Sozialisation und Ausbildung geprägt. Dies betrifft vor allem die Unterscheidung der Schülerinnen und Schüler in zwei voneinander getrennte Leistungsgruppen und ihre Einstellung, dass die Auffassungsgabe in den verschiedenen Fächern von der jeweiligen Begabung der Schülerinnen und Schüler abhängig ist, aber auch ihre Vorliebe für einen strukturierten und schematischen Unterricht (vgl. Abschnitte 6.1.1, 6.1.6).

Frau A rechtfertigt viele ihrer Einstellungen durch äußere Einflüsse, die durch das institutionelle Umfeld gegeben sind und die ihr den Rahmen für ihr Handeln ein stückweit vorgeben. Einzelne Punkte dabei sind:

- Die Umstellung von G9 auf G8. Da „haben [die Schülerinnen und Schüler] das [Lösen quadratischer Gleichungen, Anm. JM] automatisch verstanden, das war überhaupt kein Problem“ (25:46), aber die Behandlung jetzt in der Klasse 8, „bringt zu diesem Zeitpunkt nichts“ (26:13).
- Die Behandlung der Algebra nach den Osterferien. „[D]a sind die ausgepowert, die sind in einer Hochphase der Pubertät und die sind natürlich auch trotzdem ein Jahr oder ein halbes Jahr zurück zu dem was früher war. (...) Man kann auch gegen Wände reden“ (25:46).
- Die grundsätzliche Lage der Algebra in der Klasse sieben. Obwohl es „da eigentlich im Grunde auch hingehören [kann], aber ich merke halt eben, dass oft die rationalen Zahlen und die Brüche und so noch gar nicht sitzen und dass dann die Schüler letztendlich bei Gleichungen Fehler machen, die sie aus anderen Schuljahren übernehmen“ (00:16). Sie nennt das Beispiel: „sie sollen (...) drei x minus sieben x nehmen und dann klappt es nicht, weil die nicht wissen, wie viel drei minus sieben ist“ (00:53).
- Die frühe Einführung des Rechners. Denn obwohl „das ja dann immer alles [dauert] (1:11:55), muss ich ihnen dann halt eben aufzeigen, (...) dass das Ding einen Graph zeichnen kann“ (1:13:37).

Allgemein kritisch gesehen werden die Trends des offenen Unterrichtens im Rahmen von MABIKOM[93] (7:09, 42:38, 46:00) und auch die Ansichten, dass „wir ja heute angehalten sind zu sagen: Jede Lösung zählt“ (1:02:01) und „dass alle Schüler alles verstehen“ (38:44).
Positiv bedacht werden hingegen das Lehrbuch (6:55, 54:44, 46:00), die zu Verfügung stehende Zeit im Unterricht (49:50, 49:57) und auch die Freiheit, die ihr in der Gestaltung des Unterrichts gegeben ist (43:16).
In den Ausführungen von Frau A wird, wie im Folgenden beschrieben, immer wieder deutlich, dass sie eine Vielzahl ihrer unterrichtlichen Entscheidungen aufgrund ihres bestehenden Schülerbildes trifft. Aus diesem Grund soll dieses zunächst beschrieben werden und einige der daraus resultierenden Entscheidungen, bevor auf die spezifischen Ziel-Mittel-Argumentationen eingegangen wird. Die dargestellten Entscheidungen fließen in die entsprechenden Z-M-A mit ein.

[93] MABIKOM = Mathematische Binnendifferenzierende Kompetenzentwicklung mit neuen Technologien unterstützen Mathematikunterricht.

6.1.1. Das Schülerbild von Frau A

Das allgemeine Schülerbild von Frau A zeichnet sich durch ein begrenztes Frustrationsvermögen der Schülerinnen und Schüler aus, denn „es ist halt leider so, dass die Schüler heutzutage dann ganz schnell sagen: „Ach ich habe keine Lust mehr“ (50:22) und das, obwohl „wir (...) halt eben wieder Generationen von Schülern [bräuchten], die bereit wären länger an einer Sache zu arbeiten“ (1:19:03). Denn um erfolgreich im Mathematikunterricht zu sein, ist es unablässig, dass die Schülerinnen und Schüler einen gewissen Grad an Eigeninitiative im Bereich der Hausaufgaben zeigen, denn „ins Hirn rein fliegt’s auch nicht“ (34:07).
Weiterhin ist ihr Schülerbild durch ein begrenztes Zutrauen in das Können der Schülerinnen und Schüler gekennzeichnet, wenn sie davon spricht, dass sie davon überzeugt ist, dass es „letztendlich (...) um logisches Denken geht und um den Zuwachse von abstraktem Denken und das denke ich, müssen wir unseren Schülern auch zumuten“ (3:43). Die Wortwahl „zumuten“ - als etwas schwer Erträgliches - untermauert diese Deutung.
Des Weiteren formuliert sie ihre Erwartung, dass es „von einem intelligenten Menschen“ zu „verlangen“ ist, „dass er sich in alle Bereiche soweit einarbeiten kann, dass er halt eben mit einer guten Zensur rauskommen muss“ (4:52), was suggeriert, dass Schülerinnen und Schüler, die von Frau A mit sehr gut, gut oder einem guten befriedigend (28:41) benotet werden, in Mathematik als intelligent gelten.
In Bezug auf das Arbeitsverhalten der Schülerinnen und Schüler stellt sie fest, dass die Bearbeitung von Textaufgaben bei ihnen „Panik“ (27:43) auslöst und sie diese nur sehr ungern lösen, da deutlich abstrakter als einfache Ausrechenaufgaben. Die Schülerinnen und Schüler haben im Allgemeinen aus ihrer Sicht den Wunsch, vieles einfach nur zu berechnen. Auf die Frage, was die Lernenden mögen würden, antwortet Frau A: „Rechnen, einfach rechnen bitte. Nicht überlegen müssen, rechnen“ (27:56).
Zudem bevorzugen die Lernenden den einfachen Weg bei der Bearbeitung von Aufgaben, so untersagt sie zum Beispiel im Bereich der Bruchrechnung die Verwendung des Rechners, „weil die Schüler es sich sonst zu leicht machen (...) [aber] sie haben ja ihre Handys“ (1:11:34) und „dieser Weg (...) der ist so, so schnell da“ (1:11:55), in so einem Fall fehlt den Lernenden die „Disziplin“ zu sagen „ich rechne es doch nochmal mit dem Kopf“ (1:11:34). Dies lässt darauf schließen, dass sie ihren Lernenden ein begrenztes Frustrationsvermögen und nur eine geringe Bereitschaft sich anzustrengen zugesteht.
Besonders ist, dass Frau A ihre Schülerinnen und Schüler in dichotome Gruppen unterteilt, die sie selbst durch die Begriffe „stark“ und „schwach“ charakterisiert. Dabei hat sie konkrete Vorstellungen davon, welche Inhalte die *Starken* und im Gegenzug dazu die *Schwachen* bewältigen können, wie sie lernen und wie diese Unterscheidung zu begründen ist.
Sie sieht den Ursprung dieser Dichotomie darin, dass alle Schülerinnen und Schüler unterschiedlich „begabt sind“ (39:43), was sie in ihrer eigenen Schulzeit und an sich selbst feststellen konnte: „Die haben kein Hirn dafür. So wie ich kein Hirn für Sprachen habe“ (29:23). Es ist gut, dass „wir Stärken und (...) Schwächen haben (...). Ich finde das nicht schlimm, wenn man etwas nicht kann und wenn man Krücken braucht. Ich (...) hab nur mein Abitur machen können, weil mein Sprachlehrer mir Krücken gegeben ha[t]“ (38:44). Sie hat deshalb auch nicht den Anspruch, „dass alle Schüler alles verstehen“ (ebd.). So herrscht eine gewissen Akzeptanz gegenüber der Tatsache, dass „da (...) Schüler einfach nochmal verloren“ (18:21) gehen und nicht mehr alle mitgenommen werden können, wenn mit dem Themengebiet der Algebra begonnen wird und das „hat nichts mit der Methode oder sonst was zu tun, sondern es gibt einfach Dinge, die können manche nicht“ (29:31).
Um das Bild beider Gruppen zu differenzieren, sollen zunächst die stärkeren Schülerinnen und Schüler charakterisiert werden. Bei diesen wird darauf geachtet, Fachvokabular zu verwenden, denn „sie müssen eben begreifen, dass etwas was sie in ihrem Kopf haben, in einen Term umzusetzen ist. Das ist wichtig für gute Schüler, (...) die gut in Mathe sind und (...)

noch besser werden wollen“ (22:58). Es muss bei den guten Schülerinnen und Schüler Wert darauf gelegt werden, dass sie korrekte Notationen verwenden, gerade wenn diese Schritte überspringen, zum Beispiel in der Anwendung von Prozeduren.
Zudem „können meistens wirklich nur die, die nachher in Mathe eben mit der Zensur eins, zwei oder vielleicht noch einer guten drei“ (28:41) rausgehen, Aufgabentexte aus den Textaufgaben in Terme übersetzen. Denjenigen, „denen Mathe halt eben nicht liegt, die scheitern wirklich oft daran“ (ebd.). Bei der Verwendung von Variablen wird bei „den besseren Schülern [versucht] (...) auch das Verständnis nochmal zu wecken und (...) dann verstehen die das“ (36:16), wohingegen das bei den „schwachen Schülern...Da geht es dann da rein und da raus“ (36:16). Das Lernen der stärken Schülerinnen und Schüler wird dadurch beschrieben, dass sie „begreifen (...) warum das so ist“ (38:11) - warum also zum Beispiel ein Schema angewendet wird im Gegensatz zum Auswendiglernen desselbigen. Die „verstehen das dann ja so intuitiv und die denken da gar nicht weiter drüber nach“ (24:46). Zudem wird das Erkennen der Allgegenwart der Mathematik im Alltag nur den besseren Schülerinnen und Schülern zugestanden (vgl. 55:54). Da die *Starken* aber in der Unterzahl sind, „man [hat] zwei oder drei, die das Niveau gehabt hätten bei 25“[94] (44:45), wird individuell reagiert, indem Frau A „die Guten bei Seite“ nimmt und nochmal gesondert zu ihnen kommt, aber „die Konzentration auf diese Schüler [kommt] oft zu kurz“ (1:06:22).
Dem gegenüber steht die Gruppe der *Schwachen*. Diese Schülerinnen und Schüler haben Schwächen in der Mathematik (s. o.). Sie haben in der Folge andere Interessen und Ziele im Mathematikunterricht: „[Diese] Kinder wollten auch überhaupt nicht wissen, warum irgendwie der Beweis von irgendwas ist. Die wollen einfach überleben im Mathematikunterricht“ (11:58). Bei der Einführung der Algebra kommt es im Zuge dessen vermehrt vor, dass die *Schwachen* fragen „Können wir nicht einfach zwei plus zwei rechnen?“ (24:46) oder „Können wir nicht mal wieder Geometrie machen?“ (ebd.), was offenbar Inhalte sind, die diesen Schülerinnen und Schüler nach Frau As Bewertung leichter fallen.
Es wird das Ziel formuliert, ihnen eine „Bedienungsanleitung“ an die Hand zu geben, „dass selbst meine Mathe-Schwachmaten letztendlich dann diesen Strick haben“ (10:38), was ihnen wiederum das „Angstgefühl“ nehmen soll. Frau A möchte nicht, dass sie „in die Schule gehen, weil sie wissen, so eine Fünf ist mir schon mal sicher“ (1:07:04). Sie ist sich dabei darüber bewusst, dass sich die meisten Schülerinnen und Schüler sehr „bemühen (...)[aber] die haben (...) immer wieder dieses Negativerlebnis, dass ihnen das dann alles zu viel wird“ (30:02), weshalb durch die Vermittlung von Schemata und einem großen Anteil schematisch zu lösender Aufgaben, Sicherheit vermittelt werden soll: „Hört mal, wenn ihr die Textaufgaben nicht könnt, kriegt ihr immer noch eine Vier in der Arbeit“ (29:51) und: „[Ich] finde das einfach ganz wichtig, meinen Schülern so eine Grundsicherheit zu geben: Wenn ihr das und das könnt, das ist das noch ausreichend“ (30:02). Dies passt zu der Aussage, dass die Verwendung von Schemata nicht als nachteilig (vgl. 38:11) betrachtet wird.
Frau A empfindet es als sehr wichtig, „dass man denen das Leben nicht schwerer macht, als es ist“ (11:58). Dabei wird die Konsequenz, dass „die [eigentlich] nicht wissen (...), warum man jetzt irgendwie das so macht, wie man es machen soll“ (11:58), in Kauf genommen.
Übliche Fehler dieser schwächeren Schülerinnen und Schüler treten beim Zusammenfassen und Umformen von Termen und Gleichungen auf: „Schwache Schüler, die schreiben in der ersten Reihe noch, fassen sie die x zusammen und dann ist da...passt ihnen das nicht, dass da (...) [noch] 3x+4y steht“ (35:05). Deshalb ist es Frau A wichtig, dass die Schülerinnen und Schüler „kapieren[,] ich kann nicht auf der einen Seite irgendwas weglassen, einfach weil ich es unschön finde, (...) sondern es halt eben (...) nehmen muss, wie es ist“ (15:47). Die Aufgaben mit Rechenschwerpunkt, die schematisch gelöst werden können, haben für diese Schülerinnen und Schüler Priorität, weil Frau A „sie lieber einfach schonmal so in Sicherheit“

[94] Wenn hier von dem Niveau gesprochen wird, dann meint sie ihr eigenes Niveau in ihrer Schulzeit: „Wir waren eben irgendwie neun von neunzehn Schülern, die das Niveau hatten“ (44:45).

(22:27) bringen kann. Ein komplexerer oder abstrakterer Aufgabentyp wird zurückgestellt, weil „das wieder nichts für schwache Schüler ist“ (22:27).
Dennoch formuliert sie den Anspruch, dass „auch der schwächste Schüler begreifen [muss], (...) dass ich nicht nur ein Ergebnis habe, sondern, dass ich mir auch klar darüber werden muss, was heißt das jetzt“ (59:03).
Aufgrund der dichotomen Unterscheidung der Lernenden und aufgrund ihres Ziels „alle Schüler (...) nach oben [mitzunehmen]“ (7:09) wird die bewusste Vernachlässigung der Interessen der stärkeren Schülerinnen und Schüler erklärt, was zusätzlich mit der Zusammensetzung der heutigen Schülerschaft und der eigenen Schulzeit zusammenhängt.

> „Also ich hab in der Siebten, Achten einen Lehrer gehabt, der es so macht wie ich es jetzt mache und den haben meine Mitschüler auch geliebt, weil er eben so strukturiert vorging und dann haben wir (...) einen neuen Kollegen bekommen...die Hälfte unserer Klasse war supergut (...) und der hat dann für uns Unterricht gemacht. Wir haben alles bewiesen (...) naja aber (...) die schwachen Schüler haben bei dem nichts begriffen. Wir haben ihn geliebt, aber die Schwachen haben gesagt: ‚Der Unterricht ist für euch’. Ich find’s dann halt immer schade, dass (...) das, was ich erleben durfte, dass ich das meinen Schülern nicht biete. Aber wir waren (...) eben neun von 19 Schülern, die das Niveau hatten. Und normalerweise hat man zwei oder drei die das Niveau gehabt hätten bei 25. Da würde ich dann schon sagen (...) die kommen halt eben wirklich immer ein bisschen zu kurz (...) irgendwo tun sie mir schon leid“ (44:45).

Die Fokussierung auf die schwachen Schülerinnen und Schüler ist dabei sehr bewusst betrieben worden. Frau A sagt über diese: „Also als Lehrerin war mir das eigentlich immer klar, dass ich so vorgehen würde“ (1:06:53).
Die folgenden Argumentationslinien lassen sich hier bereits ausmachen:

Frau A hat als Lehrerin das Ziel, alle Schülerinnen und Schüler im Stoff mitzunehmen. Dieses Ziel gilt als übergeordnet.
Um dieses Ziel zu erreichen, entscheidet sich Frau A dafür, basierend auf ihrer Überzeugung, dass es eine naturgegebene dichotome Unterscheidung der Schülerinnen und Schüler in *Starke* und *Schwache* mit je unterschiedlichen Bedürfnissen gibt, den Unterricht am Niveau der *Schwachen* zu orientieren, da diese den Großteil der Schülerschaft ausmachen. Dies bedeutet gleichzeitig die bewusste Diskriminierung der Bedürfnisse der starken Schülerinnen und Schüler.
Die *Schwachen* haben wenig Interesse an den Hintergründen der Mathematik und fühlen sich schnell überfordert. Daraus resultiert die Angst zu versagen. Sie möchten den Mathematikunterricht nur überleben.
Frau A hat das Ziel den Schülerinnen und Schülern die Angst zu nehmen, deshalb möchte sie ihnen Sicherheit geben. Zu diesem Zweck wird den Lernenden ein Basiswissen vermittelt, mit dem sie zumindest ein „ausreichend“ bekommen.
Für die Unterrichtsgestaltung bedeutet das, den Unterricht sehr zu strukturieren und viel Wert auf die Vermittlung von Regeln, Strukturen und Schemata zu legen.
Diese müssen von den *Schwachen* nur angewendet und nicht zwingend verstanden werden. Die *Starken* verstehen diese einfach. Bei ihnen wird darauf geachtet, dass sie Fachvokabular und eine korrekte Notation verwenden.
Für die starken Schülerinnen und Schüler besteht das abstrakte Ziel, ihnen zu zeigen, dass die Mathematik Bestandteil ihrer Umwelt ist.
Bereits angesprochene Inhalte sind die Übersetzung von Sachzusammenhängen in die mathematische Symbolsprache und die Verwendung von Variablen. Die Schülerinnen und Schüler sollen erhaltene Ergebnisse im Sachkontext deuten können.
In Bezug auf das Rechnen wird deutlich, dass Frau A konzeptuelle Denkprozesse vom reinen Rechnen trennt.

6.1.2. Was sind die Inhalte des Algebraunterrichts?

Grundsätzlich zählt Frau A die folgenden allgemeinen Inhalte zum Algebra-Curriculum: die Behandlung der Gleichungen, das Lösen von Gleichungen mit Hilfe der pq-Formel oder über die Scheitelpunktform (vgl. 0:16, 10:04, 15:41), das Aufstellen von Termen und Formeln (vgl. 13:51) mit Hilfe von Variablen sowie die Erarbeitung der geltenden Rechenregeln und Rechenvorschriften (vgl. 1:39, 10:38) und das Lösen von Gleichungssystemen (vgl. 2:17).
Voraussetzung für einen erfolgreichen Algebraunterricht ist die Sicherheit in den Zahlbereichen. Dabei führt sie zum einen das Rechnen in den ganzen Zahlen auf: „[S]ie sollen meinetwegen drei x minus sieben x nehmen und dann klappt das nicht, weil sie nicht wissen, wie viel drei minus sieben ist“ (00:53). Zum anderen nennt sie die rationalen Zahlen: „[I]ch merke halt eben, dass oft die rationalen Zahlen und die Brüche und so noch gar nicht sitzen und dann die Schüler letztendlich bei den Gleichungen Fehler machen, die sie aus den anderen Schuljahren übernehmen“ (00:16).
In Bezug auf die spezifischen Inhalte der Algebra fällt ihr in Zusammenhang mit den Termen auf: „[I]ch mach eigentlich gar keine Terme (...). Also ich schreibe immer wirklich dann hin z ist gleich oder y ist gleich“ (54:22). Dennoch sagt sie, dass das Umformen von Termen im Unterricht zentral ist (vgl. 13:51). Dies steht dann aber in direktem Zusammenhang mit dem Umformen von Gleichungen und den damit verbundenen Regeln (vgl. 32:22-34:34), weil „sie [die Termumformungen, JM] müssen die solide Basis bilden für alles was kommt“ (24:10).
Es zählt ebenfalls zum Inhalt der Algebra das „Alltagsgeschehen in einen mathematischen Term umzuformen“ (28:41). Dies ist Frau A insofern wichtig, als dass die Schülerinnen und Schüler merken sollen: „Das kann schon was mit euch zu tun haben“ (57:01). Dennoch haben diese Aufgaben bei ihr keine Priorität (s. 6.1.6).
Sie zählt auch die prozessbezogenen Inhalte als zum Algebra-Curriculum gehörend: „Modellieren müssen wir auch“ (13:51), wobei das Wort „müssen“ darauf schließen lässt, dass sie das Modellieren selbst nicht als wichtig erachtet. Dazu passt, dass sie die Frage nach dem Aufkommen von Modellierungen im Unterricht verneint. Sie begründet, dass es einerseits die schwächeren Schülerinnen und Schüler überfordert und andererseits sehr viel zeit in Anspruch nimmt. Ihr „[fehlen] da dann wirklich die Stunden (...) [weil] ich wirklich bei Adam und Eva anfange (...), dass mir die Schüler das ganz genau erläutern müssen, warum und wieso“ (52:21), während klassische Textaufgaben eindeutige geschlossene Lösungen produzieren wie „x steht halt für die Anzahl von sowieso“ (1:04:50).
Dennoch argumentiert sie, dass Algebra notwendig ist, „die Welt (...) abstrakt [zu] verstehen (...) [und] für die komplexen Probleme (...) Modelle [zu] bauen“ (4:00). Dieser Widerspruch wird im Verlauf des Interviews nicht aufgelöst. Eine mögliche Interpretation ergibt sich daraus, dass sie auf zwei Deutungsebenen argumentiert. Einerseits gibt es die Ebene des konkreten Unterrichts, der in einem gegebenen Rahmen stattfindet und durch den Lehrplan, ihre eigene Vorstellung guten Unterrichts und vor allem durch die jeweiligen Schülerinnen und Schüler und deren Voraussetzungen festgelegt ist. Andererseits findet die Argumentation auf einer normativen Ebene statt, die ihre Vorstellungen dessen enthält, was Mathematik, unabhängig vom Unterricht, leisten kann und sollte.
Das Argumentieren gehört ebenfalls nicht in den Unterricht von Frau A, „aber (...) auch da (...) lasse ich das oft ein bisschen zu sehr schleifen zugunsten von diesen anderen Aufgaben [gemeint sind Kalkül-orientierte Aufgaben, Anm. JM]“ (1:05:52). In diesem Zusammenhang wird die Behandlung von Beweisen verneint (vgl. 1:06:16).
Der Beherrschung von Prozeduren und dem zentralen Punkt, dass „alle meine Schüler Gleichungen lösen“ (7:09) können, sind inhaltliche Ziele des Unterrichts von Frau A. Ihr favorisiertes Verfahren ist dabei die Scheitelpunktform. Damit diese nicht zu kurz kommt, „spare ich [die pq-Formel] immer auf, weil sie mir sonst zu ja sehr schnell zu faul werden, die Scheitelpunktform zu verwenden“ (10:04). Wird danach gefragt, warum das Lösen von Gleichun-

gen im Zentrum ihres Algebraunterrichts steht, antwortet sie, dass nun alle gelernten Rechenregeln wieder zum Tragen kommen und dass das zuvor Gelernte zur Anwendung kommt. Damit verbunden ist die Regel, dass es „zu kapieren [ist,] ich kann nicht auf der einen Seite irgendwas weg lassen“ (15:47), sondern „ich muss (...), was ich auf der einen Seite wegnehme, auch auf der anderen Seite wegnehmen“ (55:08).
Die inhaltliche Schwerpunktlegung auf die Vermittlung von Prozeduren und Schemata erfolgt unter der Begründung des Nutzens. Welchen Zweck haben diese Inhalte in Bezug auf die Schülerinnen und Schüler? So haben die Textaufgaben nicht nur aufgrund der obig durchgeführten Diskussion einen geringeren Stellenwert im Unterricht, sondern auch, weil es den meisten Schülerinnen und Schülern nichts nutzt und „er später nie was mit Mathe zu tun hat, der braucht in seinem Leben keine Textaufgaben“ (30:02). In dieser Argumentationslogik erklärt sich auch die Betonung des Lösens von Gleichungen, wenn davon gesprochen wird, dass dieses in anderen Fächern benötigt wird: „dabei brauchen sie für Chemie wirklich das Formellösen, warum soll ich ihnen das nicht beibringen“ (1:07:04).
Die Einführung von Variablen sowie die Hervorhebung des rechnerischen Umgangs mit diesen wird ebenfalls über den Nutzenaspekt erklärt: „ab Klasse sieben funktioniert ja nichts mehr ohne Variablen (...) Es kommt ja praktisch immer vor (...) [und] dieser Umgang damit, das finde ich, müssen sie einfach lernen“ (17:41). Die im Interview vorgelegten drei Aufgaben betonen die unterschiedlichen Variablenaspekte nach Malle (1993). Dabei symbolisiert die dritte Aufgabe den Kalkülaspekt, der das Rechnen mit der Variablen als bedeutungsloses Zeichen beschreibt. Diese Aufgabenart wird in jedem Fall in Frau As Unterricht thematisiert, weil „das brauche ich, um in Mathe durch die Schule zu kommen“ (22:58). Auch hier ist die Zweckgebundenheit zu betonen.
Rechenbäume, welche die Struktur von Termen aufgliedern, werden außen vor gelassen, weil „Wozu muss ein Schüler das wissen? Das ist dem doch wurscht. Es gilt Punkt vor Strich rechnen und wie das Ding jetzt heißt, wen interessiert das?“ (9:26). Hierbei wird deutlich, dass die Vermittlung der Rechenregeln, wenn auch formal nicht unter den korrekten Namen geführt, Priorität besitzt.
Die Einführung von Termen erfolgt in Kombination mit Gleichungen durch eine stufenweise Näherung. Zunächst „fange ich dann einfach an, [aber] es gibt irgendwann mal Terme, die so kompliziert sind, dass man dafür Rechenschritte braucht“ (53:27). Eine erste Aufgabe könnte sein: $x+5=11$ (53:52). Diese würde über den Einsetzungsaspekt gelöst werden, „dann würden sie alle sagen, da muss sechs hin“ (54:01). Anschließend wird dann der Kalkülaspekt unter der Notwendigkeit des höher werdenden Schwierigkeitsgrades betont: „So, ja. Und dann sag ich: ‚Genau, aber das ist jetzt der Einstieg und man kann es halt eben umstellen. Man kann jetzt eine Strategie entwickeln, weil die Terme einfach noch schwieriger werden“ (54:01). Damit zusammenhängend wird das Prinzip der Gleichungsumformung mit Hilfe des Waagemodells veranschaulicht, dass „es (...) halt eben gleich sein [muss]“ (54:45), „ich muss halt eben das, was ich auf der einen Seite wegnehme auch der anderen Seite wegnehmen“ (55:08), wobei dort die enaktive gegenüber der ikonischen Ebene vernachlässigt wird. Eine Waage wird nicht mitgebracht, denn „im Schulbuch“ ist das immer „so eine nette“ (54:45) Darstellung. Aber „das klappt dann eigentlich immer ganz gut“ (55:14), wenn es dann immer wiederholt wird (vgl. 55:16-55:18).
Das Aufstellen von Termen und Gleichungen ist ein anzustrebendes Unterrichtsziel (vgl. 13:51), aber „[i]ch mache es nicht schwerpunktmäßig [an Realsituationen Terme aufstellen lassen, Anm. JM], [sondern] schreibe einfach einen Term auf, sozusagen, und dieses damit rechnen können“ (14:46), was auf der den Schwerpunkt auf das Rechnen-Lernen legt und damit den prozeduralen Fokus im Unterricht betont.
In Bezug auf den Rechnereinsatz vertritt Frau A die Ansicht, ihn konsequent nicht im Algebraunterricht einzusetzen, weil „er (...) ja eh nicht sieben x plus drei x rechnen [kann]. (...) Das müssten sie ja so wieder verstanden haben. Da hilft er ihnen ja gar nicht“ (1:09:40). „Das

ist dann auch oft so eine Scheinhilfe (...) Und ich bin da super großzügig, also meine Rechenaufgaben gehen auch nicht wirklich über den Bereich ...von 20 plus drei oder so (...) es geht mir einfach wirklich darum, dass sie letztendlich das mit dem plus minus (...) begriffen haben" (1:09:50-1:10:23). Dies schlägt sich auch in den Klassenarbeiten nieder. Diese „werden ohne Taschenrechner geschrieben. Ja, weil sie es sonst gar nicht lernen" (1:08:53). Hier wird erneut der Schwerpunkt auf das Kalkül im Unterricht gelegt.

Frau A ist der Auffassung, dass die Rechengesetze und Rechenregeln in den zuvor kennengelernten Zahlbereichen sicher beherrscht werden müssen.
Diese werden auf Terme und Gleichungen übertragen und dort geübt. Der Kalkül-orientierte Umgang mit den algebraischen Inhalten steht im Zentrum.
Dies schlägt sich in der Benutzung der Variablen wieder, die von Frau A vornehmlich als bedeutungslose Rechensymbole gesehen werden.
Kaum bis gar nicht behandelt Frau A die allgemeinen mathematischen Kompetenzen im Unterricht.
Ihr inhaltliches Ziel ist, dass alle Schülerinnen und Schüler Gleichungen lösen können. Dabei sind verschiedene Lösungsverfahren anzuwenden.
Dazu gehört für Frau A weiter, dass aus Alltagsthematiken heraus Terme und Gleichungen aufgestellt werden können. Üben möchte sie aber vor allem die Rechenprozesse.
Der Rechnereinsatz spielt in ihrem Algebraunterricht keine Rolle.
Für Frau A gibt es eine klare Nutzenorientierung bei der Auswahl der Inhalte (Nutzt der jeweilige Inhalt den Schülerinnen und Schülern in der Schule oder später? Überfordert ein Inhalt unnötig?).

6.1.3. Was sind die Ziele des Algebraunterrichts?

Hier antwortet Frau A, dass der Algebraunterricht keine direkt auf die Schule bezogenen Ziele verfolgt. So reagiert sie auf die Frage nach dem möglichen Nutzen der Algebra für den Schulunterricht mit den Worten: „Ich weiß gar nicht, ob es einen Nutzen für den Schulunterricht gibt“ (4:52). Vielmehr begründet sie, „wir unterrichten es, weil wir (...) Leute brauchen, die es später mal können“ und weiter „von daher ist einfach der Nutzen für mich das Allgemeingut (...) dass wir Menschen brauchen, die diese Fähigkeiten haben, um uns die Welt zu erhalten, so wie sie ist und sie weiter auszubauen“ (4:52). Mit diesen Fähigkeiten meint sie zweierlei: Einerseits bezieht sie es auf das allgemein, *algebraische* Denken, was durch die Adjektive „logisch“ und „abstrakt“ (4:00) charakterisiert wird, denn es geht „um den Zuwachs von abstraktem Denken“ (3:43) und „die Welt (...) abstrakt [zu] verstehen“ (4:00).
Andererseits ist die Algebra als Beitrag zur Allgemeinbildung gemeint, wenn sie sagt „es geht ja eben wirklich darum, unsere Schüler allgemein zu bilden, damit sie entscheiden können, wo sind meine Schwerpunkte und was will ich mal beruflich machen und was will ich weglassen. Und man muss halt von einem intelligenten Menschen verlangen können, dass er sich in alle Bereiche soweit einarbeiten kann“ (4:52), um erfolgreich zu sein. Zu diesem Ziel trägt der Algebraunterricht bei, auch wenn berechtigte Zweifel bestehen, ob in Bezug auf den zweiten Aspekt tatsächlich eine algebraspezifische Aussage getroffen worden ist und nicht vielmehr eine allgemeinmathematische. Diese Vermutung wird dadurch getragen, dass auf die Frage, was die Folge einer Streichung algebraischer Inhalte wäre, mit dem Satz geantwortet wird: „[D]as geht gar nicht ohne (...) weil wir ja auch in Zukunft Mathematiker, Diplom-Ingenieure und ich weiß nicht was brauchen“ (3:15).
In diesem Zusammenhang steht die Bedeutungszuschreibung der Algebra. Diese scheint alles zu sein, was nach der sechsten Klasse dem Zahlenrechnen kommt: „Eigentlich das, was man Mathematik nennt, kommt erst ab der Sieben“ (18:21). Zu ergänzen ist, dass aus ihrer Sicht die Welt ohne Algebra „beim zwei plus zwei hängen bleiben würde“ (4:00). Dies lässt ebenfalls die Vermutung zu, dass die höhere Mathematik - definiert als etwas das über dem Zahlenrechnen steht - nicht wesentlich von der Algebra abgegrenzt wird. Was dennoch durch den Unterricht erreicht werden soll, ist, dass „die Welt mit anderen Augen“ gesehen werden kann, indem das „abstrakte (...) [und] logische Denken“ (1:18:24) gefördert wird.
Anknüpfend an die Diskussion über den Stellenwert von Modellierungen (s. Kapitel „Inhalte des Algebraunterrichts“) misst sie den Textaufgaben als Bestandteil der Algebra auf der Metaebene, in Abgrenzung zu ihren Überzeugungen den konkreten Unterricht betreffend, eine enorme Bedeutung bei, wenn sie sagt: „Also ich kann halt eben, wenn ich Algebra richtig mache, mit diesen Textaufgaben, etc. kann ich erkennen, dass die Welt mathematisch durchstrukturiert ist. Dass sich hinter allem, ja, letztendlich eine mathematische Aufgabe verbirgt“ (1:18:24).
Inhaltlich sollten die Schülerinnen und Schüler neben den algebraischen Inhalten (s. 6.1.2) die aus ihrer Sicht als Konzepte angesehenen Schemata, zum Beispiel das Prinzip, nur gleiche Variablen zusammenzufassen, und die Rechengesetze, erlernen. In diesen Bereichen sollten die Schülerinnen und Schüler sicher sein, „das muss sitzen“ (13:51).

Die Ziele des Algebracurriculums sind durch Frau A eher abstrakt formuliert. So wird die Algebra von ihr als wesentlicher Bestandteil der Allgemeinbildung angesehen, die vermittelt werden muss, da sie dazu beiträgt die Welt zu verstehen. Sie liefert einen neuen Blick auf die Welt, mit Hilfe dessen die Schülerinnen und Schüler Entscheidungen den eigenen Lebensweg betreffend einfacher treffen können. Zu diesem Zweck muss den Lernenden aus Sicht von Frau A ein Basiswissen vermittelt werden.

Hier wird gleichzeitig ein Widerspruch zwischen dem Ziel von Frau A, das sich aus ihrem Bild der Mathematik ableitet, nämlich die Verdeutlichung der Präsenz der Mathematik in der Umwelt und dem Weg dahin über Modellierungen und ihren Unterrichtsplanungen deutlich. In diesen wird das Modellieren vernachlässigt. Die Entscheidung gegen die Modellierungsaufgaben im Unterricht unterstreicht die Wichtigkeit ihres Ziels alle Schülerinnen und Schüler mitnehmen zu wollen und führt zu der Annahme, dass dieses Ziel übergeordnet ist.
Darüber hinaus ist zu beobachten, dass Frau A die Algebra mit logischem und abstraktem Denken verbindet und dass Algebra für sie dort beginnt, wo das reine Zahlenrechnen aufhört.

6.1.4. Was sind die Ziele des Mathematikunterrichts?

Das vehement vertretene Ziel von Frau A ist, „dass alle Schüler (...) nach oben" mitgenommen (7:09) werden sollten. Dabei spielen vor allem die schwächeren Schülerinnen und Schüler die entscheidende Rolle (s. 6.1.1).
Darüber hinaus beschreibt Frau A das allgemeine Ziel des Mathematikunterrichts mit den Worten: „Das Gesamtziel ist letztendlich die Fähigkeiten der Schüler so weit zu fördern, dass sie für das, was sie im späteren Leben brauchen, auf das zurückgreifen können. Und das kann sein, es bleibt nur das abstrakte Denken hängen. Oder es bleiben mathematische Fähigkeiten hängen, die sie später brauchen. Oder aber sie haben einfach eine Überlebensstrategie. Wie geh ich mit Schwächen um? Auch das kann Mathematikunterricht" (1:17:29).
Der Fokus, die Schülerinnen und Schüler so auszubilden, dass sie für ihr späteres Leben gewappnet sind, betrifft die inhaltliche Auswahl der Themen, insofern, als dass auf zu formalistische Aspekte wie die Verwendung von Äquivalenzpfeilen (vgl. 1:02:44), das Beweisen im Unterricht (vgl. 1:06:16) oder die Bestimmung der Termstruktur im Sinne von Termbäumen (vgl. 9:26) verzichtet wird, weil dies die Schülerinnen und Schüler entweder überfordert oder ihnen im schulischen Umfeld nicht direkt nutzt (s. Inhalte des Algebraunterrichts).
Frau A möchte zudem, dass ihre Schülerinnen und Schüler Spaß und Interesse am Mathematikunterricht haben, auch wenn dazu Themen behandelt werden, denen sie keinen höheren Nutzen zuschreibt: „Stochastik macht ihnen Spaß, aber ob sie dann wirklich was fürs Leben daraus ziehen, das wage ich noch zu bezweifeln. Geometrie können dann viele, einige, aber ob die dann wirklich was nachher im Leben damit machen" (1:15:12) ist zweifelhaft. Dennoch übernimmt sie dann diese Freude und überträgt diese auf sich: „Die [Stochastik] lieben sie einfach und von daher liebe ich sie natürlich auch. Wenn ich weiß, ich kriege da selbst die Schwächsten mit" (40:49). Gerade der letzte Satz untermauert ihr Ziel, so viele Schülerinnen und Schüler wie möglich mitzunehmen. Wird diese Sichtweise weiter heruntergebrochen, zeichnet sich ihr Minimalziel ab, dass es „dann immer schön zu merken [ist], wenn Schüler anfangen zu denken, egal in welche Richtung" (1:02:01).
Mathematikspezifisch bedeutet das dann, dass „jeder Mensch letztendlich begreifen muss, dass ich mit Zahlen alles anstellen kann" (59:03). Gleichzeitig argumentiert sie auf der Metaebene, dass es außer dem Umgang mit den Zahlen „andere Dimensionen gibt" (1:17:00).
An dieser Stelle ist die Schlussfolgerung zulässig, dass Frau A die Unterrichtsebene von der normativen Metaebene dessen, was Mathematik im Allgemeinen bedeutet, nämlich, „dass letztendlich in unserer Welt ganz vieles mathematisch begründet ist und ich ganz vieles ausrechnen kann" (55:54), trennt, da ihr Schwerpunkt im Unterricht wiederum auf dem rechnerischen Umgang mit Zahlen, Variablen, Termen und Gleichungen liegt. Hierbei ist der Unterschied zwischen beiden Ebenen nicht so frappierend, denn auch in der allgemeinen Zielbestimmung wird im letzten Teil des Satzes auf das Ausrechnen eingegangen.
Sie charakterisiert die Mathematik ganz allgemein als „Hilfswissenschaft" (13:51) und erläutert in einem Nachsatz: „[D]as ist ja einfach so, das muss sitzen" (ebd.). Gemeint sind damit die Beherrschung des Grundhandwerkszeugs zum Lösen von Gleichungen - die Termumformungen - und das Aufstellen von Termen (ebd.).

Das Ziel des Mathematikunterrichts ist es für Frau A, alle Schülerinnen und Schüler mitzunehmen und ihnen ein Grundhandwerkszeug an die Hand zu geben. Unterrichtlich verzichtet sie deshalb auf die Vermittlung zu abstrakter Kompetenzen wie dem Beweisen oder Problemlösen, auf konstruktivistische Lehr-/Lernmethoden sowie auf einen unnötigen Formalismus.
Die Mathematik soll als Hilfswissenschaft begriffen werden, die den Schülerinnen und Schülern in ihrem späteren Leben in Bezug auf konkrete Inhalte oder auf persönlicher Ebene (Frustrationsvermögen) weiterhilft.
Des Weiteren sollen die Lernenden Spaß und Interesse an der Mathematik entwickeln. Das trägt dazu bei, dass möglichst viele Schülerinnen und Schüler erreicht werden können.
Die Schülerinnen und Schüler sollen erkennen, dass die Mathematik sie umgibt. In diesem Zusammenhang wird auf die Möglichkeit verwiesen, sehr vieles in der Welt berechnen zu können.

Zusätzliche Bemerkungen

Werden die bisherigen Ausführungen von Frau A betrachtet, so sind an dieser Stelle die folgenden Beobachtungen festzuhalten:

- Eine klare Trennung zwischen einem algebraischen und mathematischen Denken wird nicht deutlich.
- Die Argumentation von Frau A findet auf zwei Ebenen statt: einer Metaebene, welche auf die normative Dimension dessen eingeht, was Mathematik leisten kann, wofür diese da ist und was sie bedeutet und wie sie erreicht werden kann und der realen Unterrichtsebene, die auf Schemata, Berechnungen und das Grundhandwerkszeug ausgerichtet ist.
- Diese Unterscheidung basiert auf der Dichotomie der Schülerschaft, die wiederum durch die kognitiven Voraussetzungen dieser bestimmt ist.

6.1.5. Wie gelingt erfolgreiches Lernen?

Die individuellen Voraussetzungen der Schülerinnen und Schüler werden von Frau A anerkannt. Dies ist anhand ihres Schülerbildes ablesbar. Ihre Klassifizierung erfolgt dichotom, sodass auch die Frage nach dem erfolgreichen Lernen zweigeteilt beantwortet werden muss.
Die stärkeren Schülerinnen und Schüler „verstehen das dann ja so intuitiv“ (24:46) oder sie „begreifen ja, warum das so ist“ (38:11). Auf diese Schülerinnen und Schüler wird weniger eingegangen, da sie durch ihre Voraussetzungen in der Lage sind, sich die eingeführten Inhalte selbst zu erarbeiten und dann mit einer sehr guten Note abzuschließen (vgl. 4:52). Dennoch müssen auch die Schülerinnen und Schüler, die sich ihren Weg suchen, daran denken: „[E]s gibt eine mathematische Fachsprache. Also auch ihr müsst Rechenaufträge schreiben (...). Aber da merkt man es halt eben, die suchen sich ihren Weg und die finden ihren Weg“ (37:12). Wird „erfolgreiches Lernen“ aber so interpretiert, dass die Lernenden das Optimum aus sich selbst herausholen und auch ab und zu an ihre Grenzen stoßen sollen, dann ist dieses nicht erreicht. Dies ist nicht der Fokus von Frau A, was sie aber für sich akzeptiert hat und mit den Worten „Aber irgendwo tun sie mir schon leid“ (44:45) kommentiert.
Unter der Voraussetzung, dass die Schülerinnen und Schüler in die zwei Gruppen „stark“ und „schwach“ oder „gut“ und „schlecht“ eingeteilt werden können und das Ziel darin besteht, allen Schülerinnen und Schüler eine Basis zu vermitteln, mit der sie erfolgreich „durch die Schule“ (22:58) kommen, ist es Frau A nicht anders möglich ihren Schwerpunkt zu setzen.
Dies wird durch die Ziele von Frau A unterstützt, den Schülerinnen und Schülern Sicherheit vermitteln zu wollen, indem sie versucht, sie nicht zu überfordern und ihnen dazu das Basiswissen der Algebra, gemeint sind hier die Lösungsverfahren von Gleichungen (vgl. 7:09), zu vermitteln. Die schrittweise Beherrschung der Verfahren trägt zum erfolgreichen Lernen der schwächeren Schülerinnen und Schüler bei, wenn diese zum Beispiel Probleme bei dem Zusammenfassen von Termen haben, in der Form, dass ihnen das errechnete Ergebnis nicht „passt“, weil „da meinetwegen (...) nachdem ich es zusammengefasst habe drei x plus vier y [steht]. Dann haben sie immer das Gefühl, sie müssten noch weitermachen“ (35:05). „Und da versuche ich sie halt eben auch vermehrt drauf aufmerksam zu machen. Ich sag: ‚Wisst ihr, das ist nicht immer eine Lösung, die ihr als schön empfindet’ (...). Ich bin dann manchmal noch großzügig und streiche noch das Untere weg (...), um sie nicht gleich ganz zu frustrieren“ (35:24). In so einem Fall sage „ich immer wirklich: ‚Du vermischst gerade Äpfel und Birnen und das gibt nur Obstsalat, das bringt’s nicht’ [und] dann immer: ‚Komm Äpfel und Birnen (...) halte sie getrennt’ (36:16). Wenn die Schülerinnen und Schüler dies durch ein großes Maß an Übung internalisieren und zudem die Hausaufgaben machen, weil es ja „nicht (...) ins Hirn rein fliegt“ (34:07), gelingt erfolgreiches Lernen. Auf diese Weise wird es für die Schülerinnen und Schüler „eine Beruhigung halt zu wissen: ‚Ach ja, jetzt machen wir halt eben wieder ein paar Übungsaufgaben und da muss ich dann nicht so weit drüber nachdenken’“ (40:49). Zentral ist für das Lernen der, vor allem schwächeren, Schülerinnen und Schüler, Algebra und die Schemata in diesem Bereich „wie so eine Bedienungsanleitung letztendlich zu sehen (...) dann brauche ich mir gar nichts mehr zu merken, denn dann verstehe ich es halt eben einfach“ (10:38) und „wenn man es nicht versteht, es halt einfach auswendig lernen muss“ (51:20).
Zusätzlich gelingt erfolgreiches Lernen, wenn die Schülerinnen und Schüler ein stärkeres Durchhaltevermögen gegenüber der Übung zeigen würden, da diese nötig ist, um die Inhalte zu festigen (vgl. 49:00). Frau A begründet, dass „wir Menschen (...) zwar teilweise schnell begreifen, aber wir brauchen trotzdem genauso viel Zeit Dinge zu üben, wie zu Großmutters Zeiten. Und da liegt die Diskrepanz. Die Leute glauben immer ganz häufig, (...) vieles schneller [zu] begreife[n] (...). Aber das Lernen dauert in jeder Generation gleich lang“ (1:19:31).

Die Anschauung, wie das Lernen gelingt, wird gemäß der dichotomen Anschauung von Frau A, in zwei Teile gegliedert. Entweder man versteht es intuitiv (*die Starken*) oder nach einer gewissen Zeit für das Üben oder durch das Auswendiglernen der relevanten Prozeduren (*die Schwachen*).
Gemeinsam ist allen, dass sie ein Grundhandwerkszeug erlernen/erwerben müssen und dieses sicher beherrschen sollen - durch viel Übung (dazu muss ihnen die Gelegenheit gegeben werden und die Schülerinnen und Schüler müssen die Bereitschaft dazu zeigen).
Die stärkeren Lernenden haben dann die Chance, die Welt beschrieben in Sachsituationen in die mathematische Sprache zu übersetzen. Sie erlangen einen neuen Blick auf die Welt.
Die schwächeren Lernenden sollten Gelegenheit bekommen, den Mathematikunterricht zu „überleben", dazu sollen sie kleinschrittig und wiederholend lernen, um angstfrei zu werden und einen gewissen Grad an Sicherheit zu erwerben. Inhaltlich hat Frau A zusätzlich das Ziel formuliert, dass wenn die Schwächeren auch nicht selbst Sachzusammenhänge in Terme übersetzen können, sie zumindest die erhaltenen Ergebnisse richtig deuten können sollen.

6.1.6. Wie gelingt guter (Algebra-)Unterricht?

Das entscheidende Kriterium guten Unterrichts besteht nach Frau A darin, dass alle Schülerinnen und Schüler thematisch mitgenommen werden können.
In Bezug auf den Algebraunterricht möchte sie weiterhin „stolz" sein, wenn „am Ende der siebten (...) oder achten Klasse (...) halt eben auch wirklich *alle meine Schüler* Gleichungen lösen [können]" (7:09). Dies gelingt Frau A, „indem ich, wie ich immer behaupte, einen Realschulunterricht mache. Also einen wirklich strukturierten Unterricht. Ich gebe ihnen wirklich ganz viele Schemata vor, ich wiederhole halt eben ganz bewusst alles hundert Mal. Dass das wirklich allen Schülern (...) in den Ohren klingelt. Auch dem letzten noch" (41:46). Und dies gilt insbesondere für die *Schwachen*, „dann immer: „‚Komm Äpfel, Birnen, vergiss es und halte sie getrennt' und immer wieder auch ‚bei plus geht nichts, bei mal geht alles'" (36:16).
In diesem Kontext verzichtet sie darauf, Inhalte zu unterrichten, die ihr „dann zu fachmännisch" (9:26) sind. Gemeint ist hier zum Beispiel die Bezeichnung von Termen nach ihrer Struktur. „Da versuche ich meine Schüler nicht damit zu belasten" (9:26).
Ihr Algebraunterricht gelingt, weil überwiegend Schemata vermittelt werden (vgl. 38:04) und darin werden „wirklich keine Nachteile" (38:11) gesehen, weil „es für einen Großteil der Schüler gut ist. Für alle Schüler im Dreierbereich und schlechter (...). Die Schüler darüber (...) die finden ihren Weg und dann dürfen die natürlich auch. Für die anderen ist es halt wirklich besser, man macht es Schritt für Schritt" (37:12).
Wenn der inhaltliche Schwerpunkt des Algebra-Unterrichts also die Lösung von Gleichungen ist, dann „gibt es solche Sprüche bei mir wie: ‚Ihr müsst die Zahlen mit dem x auf einer Seite sammeln und zum Schluss müsst ihr immer durch die Zahl teilen, die vor dem x steht'" (42:24). Dies beruht auf der Überzeugung, dass der „Umgang damit (...) einfach [gelernt]" (17:41) werden muss (vgl. Abschnitt 6.1.5). An dieser Stelle wird dem Verstehen, beziehungsweise dem Begreifen die Übung als Bedingung vorausgesetzt, was erklärt, dass der Übung ein wirklich großer Stellenwert beigemessen wird (vgl. 47:36), weil „ich denke auch, dass es wirklich nur durch die Übung kommt" (43:36). Das Buch liefert ihr dabei zu wenig Gelegenheit zur Übung, sodass sie sehr viele Aufgaben ergänzen muss (vgl. 43:20).
Der Primat der Übung und der damit verbundenen Internalisierung der Schemata tragen dazu bei, den Schülerinnen und Schülern Sicherheit zu vermitteln, was ein unterrichtliches Ziel von Frau A ist (vgl. Abschnitt 6.1.1). Sie formuliert: „Ich versuche sie halt eben erst mal da auf diesen Boden zu holen, dass sie sagen: ‚Ja, das kann ich, ich habe das jetzt verstanden wie das geht. Ich habe das Schema verstanden'" (28:04).

Ebenfalls unter den Sicherheitsaspekt fällt ihre Einschätzung dessen, warum die Schülerinnen und Schüler den Algebraunterricht schätzen. Es ist „so eine Beruhigung halt zu wissen: ‚Ach ja, jetzt machen wir halt eben wieder ein paar Übungsaufgaben und da muss ich dann nicht so weit drüber nachdenken'" (40:49). Damit entkoppelt sie die Anwendung von Routinen von kognitiven Prozessen und stellt diese in Bezug auf den Algebraunterricht in den Hintergrund.
Frau A beschreibt ihren Unterricht als „einen sehr konservativen Unterricht" (7:09) mit den bereits beschriebenen Implikationen, weshalb der übliche Unterrichtshergang als instruktiv charakterisiert wird. Dieser wird durch Frau A wie folgt, beschrieben: „Ich bringe euch heute jetzt das und das bei...und dann sollen sie es alleine üben (...). Und dann irgendwann immer Wiederholungsstunden (...) Damit die Schüler einfach nicht vergessen, was wir gemacht haben" (47:47). Frau A beschreibt weiter: „[D]as ist ja in dieser heutigen Zeit immer so dieses Problem, dass wir immer zu schnell Abwechslung brauchen (...), [obwohl] man wahrscheinlich doch noch ein oder zwei Stunden mehr gebrauchen" (49:00) könnte. „[Aber] man muss dann irgendwie ganz böse sein, zwei Wochen später nochmal die gleiche Aufgabe an die Tafel schreiben und dann (...) muss man nochmal mit der Übung kommen" (50:22). Diese allgemeine Erklärung und die Folgerung für den eigenen Unterricht lassen darauf schließen, dass Frau A weiß, dass ihre Schülerinnen und Schülern Langeweile beim Üben empfinden, sie aber dennoch keinen Anlass sieht, an ihrem Übungskonzept Änderungen vorzunehmen.
Der instruktive Charakter des Unterrichts von Frau A wird weiterhin in ihren Erläuterungen zum unterrichtlichen Vorgehen beim Aufstellen von Termen und Gleichungen deutlich, das sie als wichtig charakterisiert (vgl. 13:51). „Ich mache es nicht schwerpunktmäßig [an Realsituationen Terme aufstellen lassen, Anm. JM], [sondern] schreibe einfach einen Term auf, sozusagen, und dieses damit rechnen können" (14:46), was die Lehrkraftzentrierung hervorhebt.
Die bevorzugte Verwendung geschlossener Aufgabenformate entspricht ebenfalls ihrem Empfinden konservativen Unterrichts und ist bedingt durch die Unterrichtsausrichtung auf die schwächeren Schülerinnen und Schüler: „Ich sehe es ja auch am Buch...wie viel, wie offen man da immer letztendlich rangehen soll und ich glaube eben wirklich nicht, dass Offenheit den, den schwachen Schülern hilft. Und wenn ich den schwachen Schülern nicht durch eine neue Methode helfen kann und es die Guten sowieso begriffen haben (...). Dann weiß ich nicht, wieso ich die neue Methode sozusagen anwenden soll" (46:00). Sie entscheidet sich damit bewusst gegen die „neue Methode".
In diesem Kontext wird der Schwerpunkt auf Aufgaben mit einem prozeduralen Charakter gelegt. Aufgabenformate, die darüber hinausgehen und dazu zählen bereits eingekleidete[95] Textaufgaben (vgl. 55:37), werden nachrangig behandelt. Die Ablehnung erfolgt, weil „ich (...) immer wieder [versuche] bei den Textaufgaben auch Beispiele zu finden, die die Schüler wirklich interessieren" (6:10), aber „man muss sich so verbiegen, damit es noch auf die Lebenswelt der Schüler [passt] (...), das bringt es dann auch nicht mehr". Infolgedessen werden Textaufgaben mit einem Anwendungsbezug „dann einfach (...) [als] Selbstzweck" (57:01) aus dem alltäglichen Unterricht aussortiert. Zudem wird der Nutzen für die Lernenden nicht gesehen, da die meisten diese außerhalb des Unterrichts nicht mehr benötigen (vgl. 30:02).
Ein weiterer Grund, der unter ihr Ziel fällt, den Schülerinnen und Schülern Sicherheit zu vermitteln, ist, dass solche Aufgaben abschreckend und verunsichernd auf die Schülerinnen und Schüler (vgl. 28:04) wirken, weil „die meisten Schüler (...) Textaufgaben [hassen]" (27:39). In Bezug auf die *Schwächeren* stellt sie fest: „Diejenigen, denen Mathe halt eben nicht liegt, die scheitern wirklich oft daran. Die können zwar, wenn man so fünf Mal dieselbe Textaufgabe macht, dann merken sie auch (...), dass es halt eine Struktur gibt" (28:41), aber würde man die Aufgabe ändern, wäre keine Aufgabenlösung mehr möglich. Dies führt dazu, dass im Un-

[95] Das Beispiel, das Frau A nennt, lautet: Ich habe eine eigene Wohnung und möchte diese mit Teppichboden auslegen. Dazu vermesse ich die Seiten des Zimmers, etc. (vgl. 55:37)

terricht von Frau A das Rechnen gegenüber Aufgaben, die in den Bereich Anwendung zählen, nach eigenen Angaben in einem Verhältnis von „80 zu 20“ (48:40) auftreten.
Diese Haltung findet sich auch in Bezug auf die allgemein-mathematischen Kompetenzen, wie dem Modellieren und Problemlösen wieder. Diese werden als nicht entscheidend für guten Unterricht angesehen. Vielmehr empfindet Frau A es als „unfair (...) wenn jemand aufgrund dieser Offenheit, die, glaube ich, schwache Schüler überfordert, [ins Hintertreffen gerät]. Und ich finde Modellieren und Probleme lösen ist halt einfach wirklich immer der wesentlich schwerere Ansatz, als einfach zu sagen, ich begreife das“ (1:07:04). Diese Aussage stützt die These, dass ihr Unterricht sehr instruktiv ist und ist eine Maßnahme ihr Ziel zu erreichen, alle Schülerinnen und Schüler partizipieren zu lassen.
Weil Frau A sich selbst als „Rechenfreak“ (58:04) sieht, gestaltet sie ihren Unterricht weitestgehend ohne die verschiedenen Darstellungsformen, wie Tabellen oder Graphiken, weil „Zahlen waren für mich immer Anschauung genug“ (ebd.), dennoch ermahnt sie sich selbst mit den Worten: „Da muss ich immer auf mich aufpassen“ (57:43). Dies lässt darauf schließen, dass sie die symbolische Darstellungsform im Algebra-Unterricht als sehr geeignet empfindet, sich aber darüber bewusst ist, dass es andere Zugänge gibt, die vielleicht an mancher Stelle für verschiedene Schülerinnen und Schüler angemessener wären.
Die Vermittlung der Rechengesetze und ihre Anwendung stehen im Zentrum erfolgreichen Unterrichts, um „diese Struktur [zu] begreifen“ (10:38), weil „alles [gemeint ist die gesamte Mathematik, JM] eine Struktur hat“ (51:20) und „das ist ja, was ich in der Mathematik so spannend finde, dass Rechenregeln nie aufgehoben werden, (...) immer wieder gelten (...), [und] ja auch ineinander greifen“ (10:38). Hier wird deutlich, dass die Rechenregeln als Basis der Mathematik angesehen werden und „wenn ich Algebra richtig mache“ (1:18:24) trägt das dazu bei einen mathematischen Blick auf die Welt zu entwickeln.
Die Strukturiertheit der Mathematik versucht sie auch auf ihren Unterricht zu beziehen, da für Frau A ein strukturierter Unterricht, guter Unterricht ist. „Ich hab in der Siebten, Achten einen Lehrer gehabt, der es so macht, wie ich es jetzt mache, (...) weil er eben so strukturiert vorging“ (44:15).
An verschiedenen Stellen rechtfertigt Frau A ihren konservativen, instruktiven Unterrichtsstil von sich aus. So ist sie der Auffassung, dass wenn „man es [hier sind die Schemata gemeint, Anm. JM] halt immer gleich macht (...), glaube [ich], (...) brauche [ich] nicht mehr und nicht weniger Zeit als meine MABIKOM Kollegen“ (42:38). Außerdem hat der Lernerfolg der Schülerinnen und Schüler aus ihrer Sicht „nichts mit der Methode oder sonst was zu tun, sondern es gibt einfach Dinge, die können manche nicht. Das ist...da ist einfach die Struktur nicht da“ (29:31).
Zusammengefasst bedeutet guter Unterricht aus der Sicht von Frau A ein Zusammenspiel aus der Vermittlung der mathematischen Struktur, die sich aus den Rechenregeln und Schemata ergibt, Übung, die nötig ist, um diese Struktur zu vertiefen und zu internalisieren und der Betonung von Prozeduren in den Aufgaben, die zur Entlastung der Schülerinnen und Schüler führen und diesen so eine Grundsicherheit vermitteln sollen. Ausgerichtet wird der Unterricht an den Bedürfnissen der schwächeren Schülerinnen und Schüler.
Für die Argumentationsstrukturen wird festgehalten:

Guter Unterricht findet statt, wenn keine Schülerinnen und Schüler zurückgelassen werden. Inhaltlich bedeutet dies: Alle Schülerinnen und Schüler können Gleichungen lösen und beherrschen die Rechengesetze. Schön wäre es, wenn die Lernenden auch Terme und Formeln aufstellen könnten, dies wird aber im Unterricht nicht primär geübt. Der Fokus liegt auf einem lehrkraftzentrierten, strukturierten, stark lenkenden Unterricht, wobei Schemata als Lernhilfen angesehen werden. Auf einen unnötigen Formalismus wird verzichtet, um eine mögliche Überforderung der Lernenden zu vermeiden.

Frau A hält die Überzeugung, dass Lernen Zeit, viel Übung und Wiederholung braucht.
Sie verfolgt weiter das Ziel, den Schülerinnen und Schülern Sicherheit und Beruhigung zu vermitteln und ihnen die Angst vor der Mathematik ein stückweit zu nehmen.
Möglich wird ihr dies durch die Anwendung von Routinen und Prozeduren. Diese werden hauptsächlich in Form geschlossener Aufgaben mit dem Schwerpunkt auf dem Ausrechnen geübt. Aufgrund ihrer Annahme einer dichotomen Schülerschaft und weil alle Lernenden die von ihr formulierten Lernziele erreichen sollen, werden Aufgaben, die die inhaltsbezogenen Kompetenzen „Probleme lösen", „Argumentieren" oder „Beweisen" fördern, bewusst diskriminiert.

6.1.7. Das Variablenverständnis von Frau A

Frau A besitzt kein eindimensionales Variablenverständnis. Dies ist anhand ihrer Reaktion auf die ihr vorgelegten Aufgaben von Malle abzulesen. In allen drei Fällen, die sie alle im Unterricht mit Betonung auf den Einsetzungs- und Kalkülaspekt thematisiert[96], charakterisiert sie die Variable als „Platzhalter" (21:32), wobei dieser bei der Einsetzungsaufgabe am offensichtlichsten zu Tage tritt. Sie definiert die Bedeutung der Variablen dort aufgabenübergreifend als: „[I]ch brauche etwas, was ich hinschreiben kann, was ich benennen kann, um dann letztendlich damit umgehen zu können. (...) Es ist einfach eine Abkürzung für das, was ich mir denke" (21:32). Hierbei wird der Fokus auf die Variable als Unbekannte gelegt, also als Platzhalter für etwas, dessen genaue Benennung noch nicht möglich ist. In diese Richtung geht auch ihre Argumentation, wenn sie erklärt: „Hört mal, die Variable steht jetzt für irgendetwas. Und wenn das x für eins steht und y für tausend. Was passiert dann eigentlich?" (36:16). Auch hier werden die Variablen als etwas gesehen, das für einen konkreten Wert steht, der aber im Nachhinein bestimmt wird. Die Idee konkrete Werte einzusetzen, entspricht dem Einsetzungsaspekt.
Nach eigener Aussage wird auf die Vermittlung von Variablen viel Wert gelegt (vgl. 17:37). Dennoch schränkt sie diese Bedeutungszuschreibung sofort ein, wenn sie sagt: „nur ich mache mir keine Illusionen, dass es trotz alledem bei einigen Schülern nicht ankommt (19:14).
Begrifflich gibt es aber bestimmte Probleme, die ein Verstehen des Begriffskonzeptes bei Frau A erschweren.
Sie führt die Variable zunächst in Abgrenzung zur Konstanten über die Namensherkunft ein. Sie fragt beispielsweise: „Wisst ihr was variieren heißt?" (19:56). Dies ist nur das Fremdwort für etwas, das sich „permanent veränder[t]" (20:30), im Gegenzug zu den Konstanten, die „bleiben halt eben dauernd gleich (...). Das kommt eigentlich bei den Schülern auch an" (20:30). Dies würde ein Verständnis der Variablen als Veränderliche implizieren, wobei die Variable dort als dynamisch betrachtet wird. Dafür sprechen die folgenden Aussagen: „[I]ch sag ihnen halt eben, dass es Dinge gibt, die sich verändern, die halt eben variieren und das man deswegen diese Buchstaben, nachher eben Variablen nennt" (19:56) und ihre Selbsteinschätzung, dass die Variable hauptsächlich als „Veränderliche" definiert werden sollte (20:51).
Als Reaktion auf den Prompt, indem der Lehrer einer Schülerin nur sehr unkonkret antwortet, definiert Frau A die Variable als etwas, das „für alle möglichen Zahlen" steht „und weil ich mich nicht für eine Zahl entscheiden will, schreibe ich da einfach einen Buchstaben hin" (13:04). Diese Deutung entspricht der Variablen als Unbestimmte.
Hier zeichnet Frau A sich dadurch aus, dass ihr die verschiedenen Auffassungen einer Variablen zumindest latent bekannt sind. Dennoch weist sie begriffliche Unsicherheiten auf, wenn

[96] Die Aufgabe, die sich auf den Gegenstandsaspekt bezieht, würde sie nachgelagert behandeln, „weil das wieder nichts für schwache Schüler ist und ich bringe sie lieber einfach schonmal in Sicherheit mit Zwei und Drei" (22:27).

sie sagt, dass die Variablen im Fall des Satzes von Pythagoras „Konstanten“ (17:41) sind. Wichtig ist in diesem Fall aber weniger ob nun von Variablen oder Konstanten gesprochen wird (vgl. 17:41). Vielmehr sollten die Schülerinnen und Schüler lernen: „Da steht ein Buchstabe und ich muss etwas dafür einsetzen“ (17:41). Hierbei wird der Formalismus vernachlässigt zugunsten der Kalkül-orientierten Anwendung der Variablen.
Wenn das die zentrale Aussage zur Bedeutung der Variablen ist, wovon ausgegangen werden kann, weil Frau A diese am meisten betont und durch ein konkretes Beispiel untermauert, dann spricht dies dafür, dass die Variable primär als Unbekannte verstanden wird. Gleichzeitig stellt sie die genauen Begrifflichkeiten und Unterscheidungen zwischen Konstanten und Variablen zumindest an dieser Stelle des Interviews nicht eindeutig klar.
Im Nachsatz zu der obigen Aussage betont Frau A, dass die Schülerinnen und Schüler, unabhängig davon, wie diese Buchstaben nun heißen, den „Umgang damit (...) einfach lernen [müssen]“ (17:41). Dies untermauert erneut die rechnerische Schwerpunktlegung des Unterrichts und unterstützt ihre Aussage, dass sie Aufgaben auswählt, in denen der Kalkülaspekt vornehmlich behandelt wird.
Frau A benennt die verschiedenen Facetten der Variablen. Zentral ist die Bedeutung der Variablen als etwas zu Berechnendes. Der Rechenvorgang steht im Gegensatz zur Verallgemeinerung im Vordergrund.

6.1.8. Das Bild der Mathematik - Frau A

Im Interview wird die Schemaorientierung von Frau A sehr deutlich. Diese wurde mit Abstand am häufigsten codiert. Der Code Formalismus (11) steht in seiner Häufigkeit an zweiter Stelle hinter dem Schema-Aspekt (32). Weniger oft wurden die Anwendung (5) und gar nicht der Code Prozess vergeben. Frau A nimmt damit den ersten Rang in den Skalen Schema und Formalismus und den letzten Rang auf der Skala Anwendung ein.
Die Angaben aus der Selbsteinschätzung von Frau A ergeben die höchste Ausprägung der Skala Formalismus (15). Minimal weniger ausgeprägt ist die Skala Anwendung (14). Am geringsten sind die Skalen Schema (11) und Prozess (11) ausgeprägt.
Daraus ergibt sich die folgende Graphik:

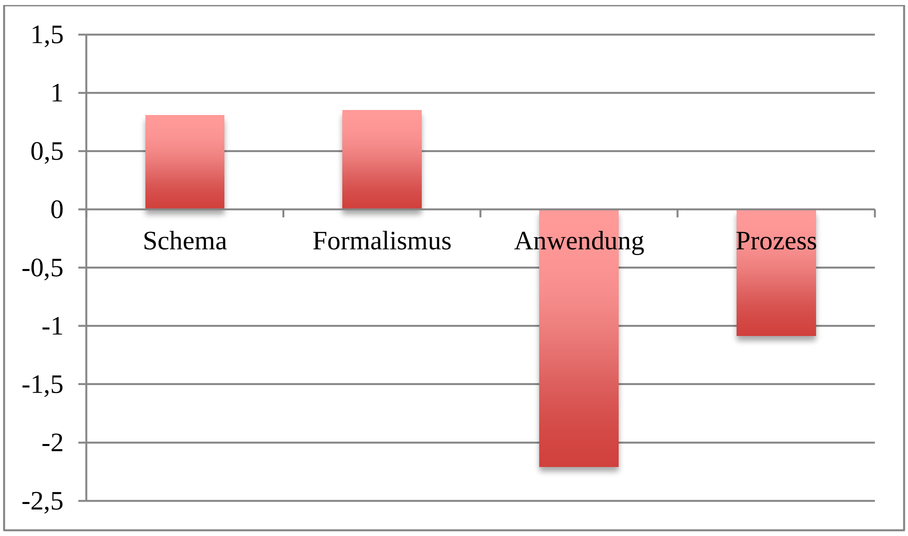


Abbildung 9: Das Bild der Mathematik - Frau A

Es zeigt sich eine grundsätzliche Übereinstimmung zwischen den Ergebnissen des Interviews und des Fragebogens. Insbesondere wird die vergleichsweise geringe Betonung der Anwendung deutlich.

6.1.9. Ziel-Mittel-Argumentationen - Frau A

Tabelle 13: Inhalte des Algebra-Curriculums, Frau A

wenig bis gar nicht: Modellieren, Problemlösen, Beweisen, Argumentieren	↔	Das Lösen von Gleichungen mit Hilfe der Scheitelpunktform, den verschiedenen Lösungsverfahren, der pq-Formel	↔	aus Alltagsthematiken Terme und Gleichungen aufstellen/ableiten und die gebildeten geschlossenen Aufgaben berechnen
		↑		
		Übertrag auf Terme - Termumformungen		
		↑		
		Rechnen und regelgeleiteter Umgang mit Variablen	↔	Variable in Aufgaben schwerpunktmäßig unter dem Kalkülaspekt, in Bezug auf die Variablenauffassung schwerpunktmäßig als Unbekannte
		↑		
		Sicherheit im Rechnen und in Umgang in den verschiedenen Zahlbereichen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$. Das bedeutet das Beherrschen der Rechenregeln in diesen Zahlbereichen (Punkt- vor Strichrechnung, Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetz).		

Tabelle 14: Ziele des Algebra-Curriculums, Frau A

												!Abstraktes Denken !Logisches Denken (=mit abstrakt ist das symbolische Rechnen gemeint, logisches und abstraktes Denken gemeinsam beziehen sich auf eine Metaebene dessen, was sich auf den durch die Algebra geschulten Blick bezieht)		!Verstehen der Struktur in der Welt (= mit der Welt ist hier die Welt außerhalb der Schule gemeint, die aber strukturiert ist und mit den Grundfähigkeiten zumindest anders erkannt werden kann)
								Wenn die Schülerinnen und Schüler Schemata flexibel anwenden können	+	**Wenn die Schülerinnen und Schüler ihre Gedanken in Terme und Gleichungen umsetzen und ihre Ergebnisse verstehen können**	→	**wird das abstrakte und logische Denken gefördert**	+	**wird die Grundlage geliefert, um die Welt und Probleme in ihr zu verstehen**
								!flexible Schemaanwendung (=wenn Schemata nicht mehr Schritt für Schritt angewendet werden und erkannt wird, wann welches Schema angemessen ist, ist von Verstehen die Rede)		!Umsetzen von Gedanken in Terme und Gleichungen (=gemeint ist hier die Übersetzung nicht mathematischer Kontexte in Mathematische)				
				Wenn den Schülerinnen und Schülern Sicherheit vermittelt und die Versagensangst abgebaut wird	+	**Wenn ihnen die handwerklichen Grundlagen vermittelt werden**	→	**können sie die Schemata flexibel anwenden**	+	**können ihre Gedanken in Terme und Gleichungen umsetzen und ihre Ergebnisse verstehen**				
				!Sicherheit !Versagensangst (=die Sicherheit bedeutet hier, dass die Schülerinnen und Schüler die Schule mit dem vermittelten Wissen erfolgreich beschließen können, Angstabbau= zielt darauf ab Versagensängste in den verschiedenen Fächern zu reduzieren)		!handwerkliche Grundlagen (=beziehen sich auf die prozeduralen Grundlagen wie Rechenregeln und Lösungsverfahren)								
Wenn der Unterricht klar strukturiert und nachvollziehbar ist	+	**Wenn auf einen hohen inhaltlichen Anspruch, unnötige Formalisierungen und die Vermittlung der Kompetenzen Probleme mathematisch lösen, argumentieren und modellieren verzichtet wird**	→	**gibt man den Schülerinnen und Schülern Sicherheit und nimmt ihnen die Versagensangst**	+	**vermittelt ihnen die handwerklichen Grundlagen**								
!Struktur !Nachvollziehbarkeit (=Struktur bedeutet das musterhafte		!kein hoher inhaltlicher Anspruch !Verzicht auf zu viel Formalisierung												

		Vorgehen: neuer Inhalt, Übung, Nachvollziehbarkeit= ist hier die Verständlichkeit, die vermittelt wird durch den immer gleichen Ablauf)		!kein Problemlösen !kein Argumentieren !kein Modellieren (=Es wird aufgrund der Fokussierung auf die schwächeren Schülerinnen und Schüler auf die Vermittlung komplexer Inhalte zugunsten von Basiskompetenzen verzichtet, darunter fällt auch der Verzicht des Problemlösens, Beweisens und Modellierens sowie der Formalismus im Fall von z.B. Äquivalenzpfeilen)
Wenn man die Algebra inhaltlich so aufbaut wie beschrieben	→	**ist der Unterricht klar strukturiert und nachvollziehbar**	+	**wird auf einen hohen inhaltlichen Anspruch, unnötige Formalisierungen und die Vermittlung der Kompetenzen Probleme mathematisch lösen, argumentieren und modellieren verzichtet**
!Behandlung algebraischer Inhalte				

Tabelle 15: Ziele des Mathematik-Curriculums, Frau A

Wenn alle Schülerinnen und Schüler thematisch mitgenommen werden können

!Alle mitnehmen
(=gemeint ist, dass wirklich alle Schülerinnen und Schüler die behandelten Inhalte verstehen)

\+

Wenn die Schülerinnen und Schüler anfangen zu denken

!Anfangen zu denken
(=es geht Frau A darum, die Schülerinnen und Schüler dazu zu bewegen, selbstständige Gedankengänge zu entwickeln)

→

!Fähigkeiten
!späteres Leben
!Nutzen
(=die Schülerinnen und Schüler sollen nicht nur rein mathematische Fähigkeiten aus dem Mathematikunterricht, sondern auch Soft Skills wie das Frustrationsvermögen oder sich selbst einschätzen zu können, mitnehmen, um diese bei der Berufswahl oder späteren Entscheidungen nutzen zu können)

haben die Schülerinnen und Schüler die Möglichkeit die erlernten Fähigkeiten in ihrem Leben zu nutzen

\+

!gesamtgesellschaftlicher Nutzen
!Beitrag leisten
(=gesamtgesellschaftlicher Nutzen= hier wird darauf plädiert die Schülerinnen und Schüler auszubilden, um weiteren Nachwuchs - Mathematikerinnen und Mathematiker, Ingenieurinnen und Ingenieure - zu schaffen, der dafür sorgt, dass die Gesellschaft so weiter bestehen kann, wie sie es aktuell macht)

sind die Schülerinnen und Schüler fähig gesamtgesellschaftlich einen Beitrag zu leisten

---

Wenn die Schülerinnen und Schüler den Willen haben durchzuhalten

!Durchhaltewillen
(= gemeint ist die Auffassung, dass Lernen dauert und manchmal lange Übungsphasen benötigt, die auch bei aufkommender Monotonie bearbeitet werden sollten)

\+

Wenn man das Grundhandwerkszeug erlernt hat

!Grundhandwerkszeug
(=gemeint ist das Grundwissen, in diesem Fall die Rechengesetze und Schemata)

\+

Wenn schülernahe, interessante Themen gewählt werden und die Schülerinnen und Schüler Spaß haben

!Interesse
!Spaß
(=werden Gebiete, wie Stochastik oder Geometrie behandelt, haben die Schülerinnen und Schüler Spaß und Freude und sehen im Fall von Anwendungsaufgaben in der Algebra, dass Mathematik sie in ihrem Alltag umgibt)

\+

Wenn die Schülerinnen und Schüler sich sicher fühlen und keine Angst haben

!Sicherheit
!Angst abbauen
(=die Sicherheit bedeutet hier, dass die Schülerinnen und Schüler die Schule mit dem vermittelten Wissen erfolgreich beschließen können, Angstabbau= zielt darauf ab Versagensängste in den verschiedenen Fächern zu reduzieren, Routineaufgaben vermitteln auch Sicherheit)

→

können alle Schülerinnen und Schüler thematisch mitgenommen werden

\+

fangen die Schülerinnen und Schüler an zu denken

Tabelle 16: Das Lernen der stärkeren Lernenden, Frau A

						!Intuitives Verstehen !Umsetzen von Gedanken und Ideen in Terme und Gleichungen (=gemeint ist hier die Übersetzung nicht mathematischer Kontexte in Mathematische, dies geschieht „automatisch“, da die stärkeren Schülerinnen und Schüler die kognitiven Voraussetzungen dazu haben)		!Mathematik in Welt erkennen !Mathematik in Welt berechnen (=mit der Welt ist hier die Welt außerhalb der Schule gemeint, die aber strukturiert ist und mit den Grundfähigkeiten zumindest anders erkannt werden kann und die Probleme in ihr können auch mit den erlernten Kenntnissen berechnet werden)
				Wenn sie das Basiswissen und das Grundhandwerkszeug erlangt haben	→	**können sie intuitiv ihre Ideen und Gedanken in Terme und Gleichungen umsetzen**	+	**haben die Möglichkeit zu erkennen, wie mathematisch ihre Welt ist und können diese mit Hilfe ihrer Kenntnisse berechnen**
				!Basiswissen !Grundhandwerkszeug (=gemeint ist das Grundwissen, in diesem Fall die Rechengesetze und Schemata)				
Wenn die Rechenregeln und ihre Wichtigkeit begriffen sind	+	**Wenn die Schülerinnen und Schüler Hausaufgaben machen und ausreichend üben**	→	**erlangen die Schülerinnen und Schüler ein Basiswissen und Grundhandwerkszeug**				
!Durchhaltewillen (= gemeint ist die Auffassung, dass Lernen dauert und manchmal lange Übungsphasen benötigt werden, die auch bei aufkommender Monotonie bearbeitet werden sollten)		!Übung !Hausaufgaben (=die Eigeninitiative der Schülerinnen und Schüler wird betont, da diese den vermittelten Inhalt eigenständig durch aktives üben und Hausaufgaben machen unterstützen)						

Tabelle 17:Das Lernen der schwächeren Lernenden, Frau A

!Ergebnisse verstehen
(=auf der inhaltlichen Seite ist es für alle Schülerinnen und Schüler wichtig, nicht nur das Schema anzuwenden, sondern auch das errechnete Ergebnis in Zusammenhang mit der gestellten Aufgabe zu bringen)

→ **können sie ihre errechneten Ergebnisse verstehen**

Wenn die Schülerinnen und Schüler angstfrei sind und sich sicher fühlen

!Angstfreiheit
!Sicherheit
(=beide Punkte werden als eigenes Ziel im Unterricht formuliert, die Schülerinnen und Schüler sollen sich nicht überfordert oder ängstlich wegen zu schlechter Noten fühlen)

→ **fühlen sich sicher und haben keine Angst**

!Schule bewältigen
!Überleben
(=ihnen sollen nicht künstlich Steine in den Weg gelegt werden, auf der Basis des Grundwissens wird es ihnen gelingen das Abitur zu erlangen und durch die Sicherheit werden sie durch den Mathematikunterricht nicht vollständig demoralisiert)

\+ **können sie durch die Schule kommen und den Mathematikunterricht überleben**

Wenn sie das Basiswissen und das Grundhandwerkszeug erlangt haben
!Basiswissen
!Grundhandwerkszeug
(=gemeint ist das Grundwissen, in diesem Fall die Rechengesetze und Schemata)

\+ **Wenn sie das Grundhandwerkszeug schrittweise anwenden und vertiefen**
!schrittweises Vorgehen
(=die Schülerinnen und Schüler können kleinschrittig die Inhalte nachvollziehen und sie dadurch auswendig lernen und verstehen)

Wenn die Rechenregeln und ihre Wichtigkeit begriffen sind

!Durchhaltewillen
(= gemeint ist die Auffassung, dass Lernen dauert und manchmal lange Übungsphasen benötigt werden, die auch bei aufkommender Monotonie bearbeitet werden sollten)

\+ **Wenn die Schülerinnen und Schüler Hausaufgaben machen und ausreichend üben**
!Übung
!Hausaufgaben
(=die Eigeninitiative der Schülerinnen und Schüler wird betont, da diese den vermittelten Inhalt eigenständig durch aktives üben und Hausaufgaben machen unterstützen)

→ **erlangen die Schülerinnen und Schüler ein Basiswissen und Grundhandwerkszeug**

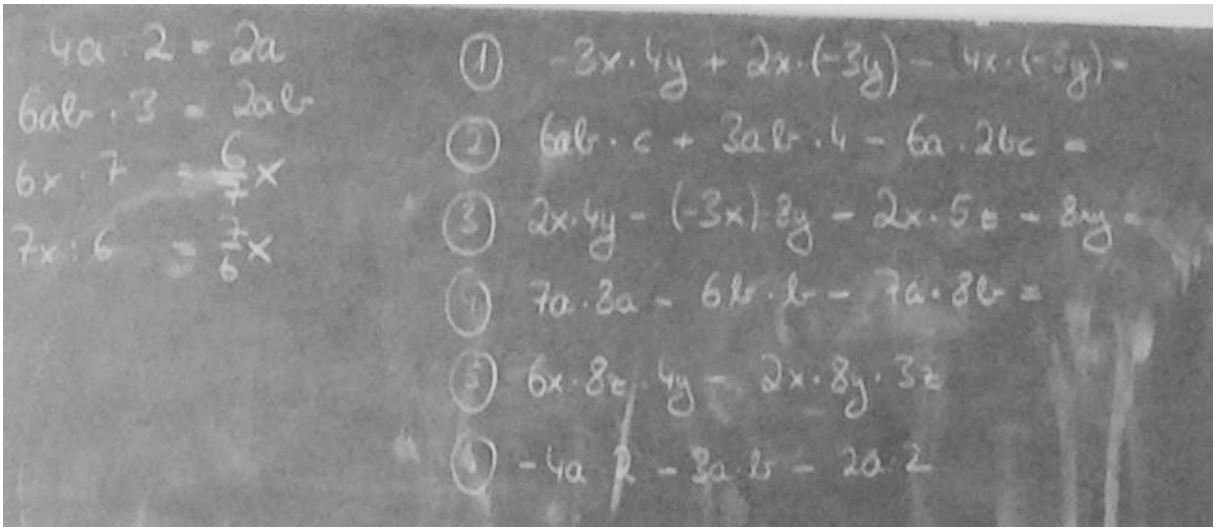
\+ **können dieses Grundhandwerkszeug schrittweise anwenden und vertiefen**

Tabelle 18: Lehren von Algebra, Frau A

														!Verstehen der Mathematik als Hilfswissenschaft (=das meint hier, dass Prozeduren zunächst sicher sitzen müssen, um dann in Folgesituationen mit komplexere Sachverhalte bearbeiten zu können)		!Verstehen der Struktur in der Welt (= mit der Welt ist hier die Welt außerhalb der Schule gemeint, die aber strukturiert ist und mit den Grundfähigkeiten zumindest anders erkannt werden kann)
										Wenn den Schülerinnen und Schülern Sicherheit vermittelt und Angst abgebaut wird !Sicherheit !Angstabbau (=die Sicherheit bedeutet hier, dass die Schülerinnen und Schüler die Schule mit dem vermittelten Wissen erfolgreich beschließen können, Angstabbau= zielt darauf ab Versagensängste in den verschiedenen Fächern zu reduzieren)	+	**Wenn Basiswissen vermittelt wird** !Basiswissen (=gemeint ist hier das Grundhandwerkszeug, also die sichere Anwendung der Schemata in den verschiedenen Situationen)	→	**wird ein Verstehen der Mathematik/Algebra als Hilfswissenschaft erreicht**	+	**wird die Grundlage geliefert, um die Welt und Probleme in ihr zu verstehen**
				Wenn man den Unterricht strukturiert, lehrkraftzentriert und instruktiv gestaltet !Lehrkraftzentrierung !Struktur !Instruktion (= Lehrkraftzentrierung= stark durch die Lehrkraft vorstrukturierter Unterricht, instruktiv= Arbeitsaufträge kleinschrittig und klar, strukturiert= einem Muster folgend)	+	**Wenn man inhaltlich den Schwerpunkt auf die Vermittlung von Schemata und Regeln legt** !Schema !Rechenregeln (= Schema= Lösungsverfahren von Gleichungen, Regeln zur Termumformungen, Rechenregeln= Regeln zu den Grundrechenarten in den verschiedenen Zahlbereichen)	+	**Wenn man sehr viel Übungsgelegenheit mit Fokus auf geschlossene Aufgaben gibt** !Übung !geschlossene Aufgaben (=Übung bezieht sich in diesem Fall darauf, dass Lernen nur durch Übung passieren, geschlossene Aufgaben meint, dass es eindeutige Lösungen gibt und die Aufgaben schematisch bearbeitet werden können)	→	**ermöglicht dies den Schülerinnen und Schülern Sicherheit zu vermitteln, Angst zu reduzieren**	+	**wird Basiswissen vermittelt**				
Wenn man akzeptiert, dass die Schülerinnen und Schüler mit sehr verschiedenen kognitiven Voraussetzungen an die Schule kommen !unterschiedliche kognitive Voraussetzungen (= Dichotomie in *stark* und *schwach*)	+	**Wenn man keine Schülerinnen und Schüler inhaltlich zurücklassen möchte** !alle Schülerinnen und Schüler mitnehmen (= allen ein Basiswissen an die Hand geben)	→	**wird der Unterricht instruktiv, strukturiert und lehrkraftzentriert gestaltet**	+	**werden inhaltlich schwerpunktmäßig Schemata und Regeln vermittelt**	+	**wird sehr viel Möglichkeit zur Übung anhand von geschlossenen Aufgaben gegeben**								

6.1.10. Unterrichtsbeobachtungen und Klausurenanalyse - Frau A

Ein Auszug aus den Unterrichtsbeobachtungen und der Klausurenanalyse von Frau A ist in den Kapiteln 5.8 und 5.9 zu finden. Die Protokolle sind in Anhang 8 hinterlegt.
In Bezug auf die Unterrichtsbeobachtungen, die in der siebten Klasse durchgeführt worden sind, lässt sich das Folgende festhalten:
Das Tafelbild von Frau A ist beispielhaft für den beobachteten Unterricht:



Frau A reichert ihren Unterricht in beiden beobachteten Stunden durch eine Vielzahl derartiger, ausschließlich auf symbolischer Ebene präsentierten, Übungsaufgaben an, die sie nicht dem Buch entnimmt, sondern „zufüttert“ (43:20), wie in Kapitel 6.1.6 geschildert.
Die Lösungsidee wird mit Hinweisen durch die Lehrkraft im Vorhinein eindeutig skizziert. Die Anweisungen und auch die Kontrolle der Aufgaben werden lehrkraftzentriert und kleinschrittig vorgenommen, wobei die geltenden Rechenregeln und -gesetze stetig wiederholt werden. In beiden Stunden ist dieses Vorgehen zu beobachten. Als Ermüdungserscheinungen bei den Schülerinnen und Schülern auftreten, sagt die Lehrkraft: „Es nutzt nichts, auch wenn ihr in Physik heute auch nur gerechnet habt, ihr müsst heute im Unterricht auch wieder viel rechnen.“ Dies ist ein eindeutiger Hinweis auf die in den subjektiven Theorien herausgestellte Fokussierung auf Kalkül-orientierte Aufgaben.
Die Unterscheidung ihrer Schülerinnen und Schüler in zwei Gruppen wird auch im Unterricht sichtbar, wenn sie sagt: „Hört mal (...) die Klasse teilt sich gerade in zwei Hälften. Die einen, die gar keine Fehler mehr machen und die andere Hälfte, die gar nicht weiß was sie macht. Deshalb müssen wir das noch einmal an der Tafel gemeinsam machen“. Hieraus wird einerseits die Konsequenz deutlich, dass im Fall des Nicht-Verstehens ein Eingreifen der Lehrkraft notwendig wird, bei dem das Vorgehen schrittweise und detailliert erklärt wird. Andererseits wird hier die Vernachlässigung der Interessen derjenigen, die keine Fehler gemacht haben, sichtbar.
Die beobachteten Stunden bilden nur sehr kleine Ausschnitte aus dem Unterricht ab. Anhand dieser wird aber festgestellt, dass das beobachtete Unterrichtsverhalten, in Bezug auf das Instruktionsverhalten, die Aufgabenform und das Schülerbild von Frau A mit den rekonstruierten subjektiven Theorien im Einklang steht.
Die Analyse der zugehörigen Klausur ergibt (vgl. Kapitel 5.9), dass Frau A ihren Schwerpunkt auf das formal-technische Arbeiten legt. Die Klausur weist ein geringes kognitives Anforderungsniveau auf (vgl. Kapitel 5.9). Ihre Struktur ist konsistent zu den rekonstruierten subjektiven Theorien.

6.2. Herr B

Herr B[97] ist seit fünfzehn Jahren Lehrer an einem mecklenburgischen Gymnasium. Er nutzt das durch die Schule vorgegebene Buch „Mathematik Plus“ und einen wissenschaftlichen Taschenrechner.

Herrn B ist die Anwendungsorientierung wichtig, was nach eigenen Angaben durch seinen Werdegang begründet ist. Bevor er als Lehrer tätig war, arbeitete er fünf Jahre in einer Kistenfabrik tätig. Gelernt hat er dort vor allem, dass es wichtig ist, sich in verschiedene Situationen hineindenken und diese verallgemeinern zu können (vgl. 3:44, 3:58).

Auf institutioneller Ebene konstatiert Herr B, dass zu viele Schülerinnen und Schüler an das Gymnasium kommen (vgl. 25:33-1-26:23-1) und dass es so Schwierigkeiten gibt, „das gymnasiale Niveau von Mathematik zu bewältigen“ (26:06-1). Infolgedessen hat er seinen eigenen inhaltlichen Anspruch gesenkt (vgl. 31:37-1).

Was die Schülerinnen und Schüler in ihrer Zukunft brauchen und wie Sinnstiftung funktioniert, werden als komplizierte Problemstellungen aufgefasst. So besitzt das Argument, der Wichtigkeit verschiedener Inhalte und deren Nutzen im Studium, nicht mehr die Wirkungskraft wie noch vor einigen Jahren, weil „wir (...) bei dem Thema was machen die Schüler irgendwann mal mit dem Unterricht oder mit dem Schulabschluss, den sie hier erreichen“ (35:36-2) keine Klarheit haben, „weil ja (...) nur, weiß ich nicht, 50 bis 60 Prozent studieren“ (31:37), da „nimmt die Bedeutung ab“ (35:57-2).

Er sieht die hauptsächliche Motivation der Schülerinnen und Schüler darin, „nur noch [im Matheunterricht] (...) durchzukommen“ (40:09-2) und „durchs Abitur“ (33:31-1) zu kommen. Dies erschwert die Erreichung seiner eigentlichen unterrichtlichen Ziele (vgl. 40:09-2) (vgl. Abschnitte 6.2.2 und 6.2.3).

6.2.1. Was sind die Inhalte des Algebraunterrichts?

Intensiver werden, wenn auch als „langweilige Sache“ (34:47-1) bezeichnet, „abstrakte Termumformungen (...) als notwendiges Handwerkszeug“ (ebd.) behandelt. Die reinen, abstrakten Termumformungen werden aber unter der Frage: „[W]ie weit muss man das treiben“ (17:54-1) nicht mehr so tiefgründig behandelt. Vielmehr liegt der Fokus zunächst auf der „Termbelegung, Termwerte bestimmen zu lassen um den Umgang mit diesem Term an sich ohne Umformung erstmal zu üben“ (17:54-1) und den Schülerinnen und Schülern zu verdeutlichen, „dass dann ein Wert dabei rauskommt und dass man mehrere Variablen belegen kann“ (19:29-1). Hierbei entsteht die Schwierigkeit, dass den Schülerinnen und Schülern die Grundlagen im Rechnen in den Zahlenräumen fehlen, so „dass es [die Bruchrechnung, Anm. JM] für manche Schüler (...) schwerer als die ganze Termgeschichte [ist]“ (33:11-2). Terme definiert Herr B als „etwas, wo enthalten sein kann: (...) Zahlen, Rechenzeichen, Variablen“ (15:26-2).

In Zusammenhang mit den Termen und Gleichungen steht die Behandlung von Variablen und speziell die „Variablenbelegung von praktischen Dingen“ (1:00-1) im Zentrum. Diese sind als Basis zu betrachten, da „sie ein sehr wichtiges Mittel [ist], ja um überhaupt mit Mathematik umgehen zu können“ (9:45-2). Sie wird verstanden, als „eine im Moment nicht bekannte oder nicht genau benannte Zahl“ (7:48-1). Die Formulierung „im Moment“ impliziert das Ziel, dass diese berechnet wird und die Singularform „Zahl“ stützt die Vermutung, dass es sich genau um eine Zahl handelt. Dieses Verständnis entspräche dem Verständnis der Variablen als Unbekannte (Freudenthal, 1973). So wird diese auch in den Zahlenrätseln verstanden, die nach dem Schema „Denke dir eine Zahl“ (12:47-2) ablaufen. Hierbei wird die Variable als

[97] Da die Aufnahme zweigeteilt ist, wird hinter den Zeitangaben eine 1 für den ersten Aufnahmeteil und eine 2 für den zweiten Aufnahmeteil vermerkt. Dies dient der übersichtlicheren Darstellung.

konkrete, noch unbekannte Zahl verstanden (vgl. 12.47-12:57-2). Im Aufgabenkontext entspricht dies dem Gegenstandsaspekt (Malle, 1993). Diese Art der Aufgabe gehört zum Standardinhalt des Unterrichts von Herrn B (13:53-14.24-2). Gerade weil diese die „Schüler noch anspricht“ (14:24-2).

Unterrichtet wird die Variable im Kontext von Termen: „das fließt mit ein in den Termbegriff, Variablenbegriff, Termbegriff, Variablenbelegung und in dem Zusammenhang wird es dann: Terme aufstellen, Variablen belegen und Termwerte ausrechnen“ (16:06-1). Hierbei ist der Einsetzungsaspekt (Malle, 1993) der Variablen zentral, wenn gesagt wird „für die Variable [setze ich] eine Zahl ein und der Term, und aus dem Term wird was“ (11:44-2). Dies untermauernd fängt er „nicht unbedingt immer (...) zwanghaft mit x und y [an], sondern ich lasse sie da auch Kreis und Dreieck addieren oder so was oder Äpfel und Birnen (...) so zum Thema Platzhalter“ (15:24-1).

Zum konkreteren Vorgehen werden am „Anfang (...) dann wirklich die Rechenregeln für die Variablen“ (23:52-1) vermittelt und es wird darauf geachtet, diese „auch einzuhalten, [und] eben nur gleiche Variablenkombinationen zu addieren und zu subtrahieren“ (ebd.). Die Einhaltung der Rechenregeln betrifft dabei neben dem Variablenrechnen auch das „Termwertberechnen“ (19:29-1).

Ziel der Vermittlung der Variablen ist es die „Fähigkeit zu entwickeln (...) irgendwelche praktischen Probleme zu mathematisieren und dann da die Variablen gezielt einzusetzen“ (10:16-2). Dennoch wird anerkannt, dass die Variablen „einigen (...) immer nur schematisch zum Abarbeiten einer Aufgabe dienen“ (8:59-2). Die Aufgaben, die den Rechenfokus - ohne die Einbindung praktischer Inhalte - setzen, gemäß dem Kalkülaspekt von Malle werden als „0815 Aufgabe“ (15:02-2) beschrieben, die standardmäßig behandelt wird.

Er hat sein Vorgehen bei der Einführung von Termen verändert und legt einen größeren Wert auf die „Termstruktur. (...) aus der Erkenntnis heraus, dass ja beim Gleichungen lösen diese Termstruktur rückwärts abgearbeitet wird (...). Das (...) wird einem beim Studium ja nicht beigebracht“ (17:22-2). So wird von der gründlicheren Erarbeitung der Termstrukturen auf die Regeln zum Umformen der Gleichungen geschlossen.

Intensiver werden dann praktische Inhalte in Verbindung mit Gleichungen unterrichtet: „was fällt mir ein, irgendwelche Zeitdauern zu berechnen, einfache Dinge, die man mathematisieren muss, um sie lösen zu können“ (0:33-1). Das ist für das Verständnis der Schülerinnen und Schüler „ein bisschen besser“ (23:08-1). Es geht aber auch um die Lösungsverfahren der Gleichungen. „Zumal es sich ja immer wieder, [wie] ne didaktische Spirale immer wieder wiederholt (...) lineare, quadratische, immer wiederholt“ (7:04-1). Die Gleichungen selbst werden „im Umkehrschluss zur Termbelegung [eingeführt]. (...) setze Zahl ein, und Umkehrung dann, welche Zahl einsetzen um diesen Wert zu bekommen“ (15:48-2).

Eingeschränkt unterrichtet werden Bruchterme und deren Gleichnamigkeit (vgl. 5:22-1), die technische Seite der Termumformungen (22:55-1) und die Ungleichungen und Ungleichungssysteme (vgl. 23:08-1). Begründet wird die Rückstellung dieser Inhalte durch die mangelnde Anwendbarkeit in realen und praktischen Kontexten. Auch wenn den Ungleichungen eine Bedeutung in Bezug auf das Zahlenverständnis der Schülerinnen und Schüler beigemessen wird, „für kleiner - größer, für Intervalle (...) für sowas ist eine Ungleichung schon mal nicht schlecht (...) das würde ich nicht ganz rausnehmen“ (10:12-1).

Zusammengefasst sind die Variablen die Grundlage, um Terme aufzustellen. Diesen kommt „die Bedeutung zu, dass sie notwendig sind, um dann auch die Gleichungsthematik bearbeiten zu können“ (ebd.).

Der inhaltliche Aufbau des Algebraunterrichts folgt der Argumentation, dass zunächst die grundlegenden Rechenregeln in den bekannten Zahlbereichen erlernt werden müssen. Dies verhindert Fehler bei der Umformung von Termen.

Zunächst werden die Terme über verschiedene Termwertbelegungen eingeführt. Das bedeu-

tet, dass für die enthaltenen Variablen unterschiedliche Werte eingesetzt werden, um ein Gefühl dafür zu vermitteln, dass je nach Wert der Variablen derselbe Term unterschiedliche Werte annehmen kann. Daran anschließend werden Termumformungen einschließlich der für sie geltenden Rechenregeln auf symbolischer Ebene eingeführt. Diese zu beherrschen ist notwendig für die Behandlung von Gleichungen. Sie werden im Unterricht von Herrn B überwiegend mit Sachzusammenhängen verknüpft. Dabei steht die Variable beispielsweise für eine Zeit, ein Gewicht oder eine Dauer. Das Ziel ist die Berechnung der Variablen.
Weniger unterrichtet Herr B Ungleichungen, Ungleichungssysteme und Bruchterme, da bei diesen Themen ein Anwendungsbezug fehlt.
Herr B merkt an, dass das Thema „Gleichungen“ gegenüber der Behandlung von Termen und Termumformungen von den Lernenden bevorzugt wird (vgl. Abschnitt 6.2.4).

6.2.2. Was sind die Ziele des Algebraunterrichts?

Grundsätzlich wird der Algebra eine „extreme Bedeutung“ (35:36-2) innerhalb der Mathematik beigemessen: „Ich halte den Algebraunterricht für besonders wichtig als Grundlage der Mathematik in der Oberstufe und ich halte den Algebraunterricht für wichtig, um eben Probleme des Alltags zu mathematisieren“ (0:13-1). Kein anderes Stoffgebiet der Sekundarstufe I wird von Herrn B als wichtiger erachtet (vgl. 35:08-2). Illustrierend werden die Bereiche der Stochastik und die Variablenverwendung in diesem Mathematikfeld (vgl. 2:01-1), der analytischen Geometrie in der man die „Gleichungslösungsstrategien [anwendet], sonst kriege ich die Parameter nicht raus“ (44:05-2) oder der Analysis (vgl. 43:51-2) sowie der Trigonometrie (vgl. 37:42-2) in der „alle möglichen Gleichungslösungsstrategien angewendet werden“ (43:51-2) genannt. Dabei geht es um die speziellen Fähigkeiten, wie das Gleichungen lösen, was als „substantiell“ (20:21-1) aufgefasst wird, die Behandlung der „Terme [als] notwendige Grundlage“ (6:29-1) und als „nötiges Handwerkszeug“ (34:47-1) und die Vermittlung der Variablen, denn „irgendwo tauchen immer Variablen auf. Egal in welchem Thema, mit denen man dann hantieren muss“ (34:36-2).
Dieser eher auf das Handwerkszeug geprägten Anschauung steht die Zielsetzung auf einer konzeptuellen Ebene entgegen, die für Herrn B eine sehr große Bedeutung hat. Dies ist anhand der folgenden Formulierungen zu sehen. Es geht Herrn B um das „Abstraktionsvermögen [als] das Wichtigste, das bei der Algebra geschult wird“ (2:14-1). Dieses Vermögen spielt in „anderen (...) Naturwissenschaften“ und überhaupt „unabhängig von der Algebra und von dem, was man in Mathematik wieder braucht“ (2:25-1) eine entscheidende Rolle. Dabei soll „die Fähigkeit (...) entwickelt [werden], dass sie bestimmte Dinge einfach durchdringen und versuchen, (...) abstrakter zu sehen. (...) Aber irgendwelche, ja, praktischen Probleme zu mathematisieren“ (10:16-2).
In diesem letzten Punkt wird deutlich, inwiefern die beiden Ebenen - prozedural und konzeptuell - zusammenwirken müssen, um die Ziele von Herrn B zu verwirklichen. Es geht um die Verknüpfung von „irgendwelchen praktischen Inhalten“ mit den Gleichungen (6:12-1). Letzteres sind die „Grundlage (...), [um] auch praktische Beispiele dann schneller lösen“ (38:28-2) zu können und „das macht so Mathematik für mich aus“ (6:12-1). Konkret wird die Gleichung „als ein sehr wichtiges Mittel [verstanden], ja, um überhaupt mit Mathematik umgehen zu können. Oder sagen wir mal so, (...) ja, die praktischen Zusammenhänge in die Mathematik zu bekommen“ (9:45-2). Es wird diesbezüglich eine Reihenfolge festgelegt: „Erstmal den Schritt davor, die Mathematisierung vollbringen und dann eben das Algebraschema abarbeiten“ (36:42-1). Unter der Mathematisierung versteht er das „vor dem Algorithmus kommende“ (32:58-1). Dies ist aber dann auch „Das Ziel des Ganzen“ (24:33-2), „einen praktischen Zusammenhang durch eine Gleichung zu beschreiben“ (ebd.) und dabei „die Variablen gezielt einzusetzen“ (10:16-2). Hier erfolgt aber sofort die Einschränkung: „Das erreiche ich natür-

lich nicht bei so vielen“ (35:55). Herr B sieht es „für die Masse der Schüler nicht mehr als problematisch an. Es ist für mich immer noch erstrebenswert, dass sie das Problem durchdringen und mathematisieren können und dann das Schema eigentlich nur noch als Werkzeug nutzen, aber es ist für eine große Zahl der Schüler genauso wichtig, einfach zu wissen, jetzt wende ich das Schema an und (...) komm damit durchs Abitur“ (33:31-1).
Die Schülerinnen und Schüler sollen zudem den Nutzen „algebraischer Lösungsvarianten“ aus innermathematischer Sicht verstehen, dass sie also „schneller auf eine Lösung komm[en] als durch Probieren oder so was. Aber das ist ein schwieriges Unterfangen“ (38:23-2). Obschon dies als Motivation betrachtet wird, algebraische Verfahren anzuwenden.
Als „hehres Ziel“ (8:21-2) gilt es für Herrn B, die Algebra innermathematisch als „Mittel zum Argumentieren“ (ebd.) zu verwenden, dies wird aber mit den Worten „nicht erreichbar“ (ebd.) abgetan, „weil wir einfach die Fähigkeiten nicht so weit entwickeln können“ (7:52-2). Zu diesem Zweck werden dennoch vereinzelt Beweise durchgeführt, „also ich versuche das“ (28:00-2), auch wenn Herr B sich zum Zeitpunkt des Interviews an kein Beweisbeispiel erinnert. Das Ziel, das mit dem Beweisen im Unterricht verfolgt wird, ist den Schülerinnen und Schülern „das Schema und die Logik, die dahinter steckt“ (28:51-2) näher zu bringen.
Schließlich wird das innermathematische Ziel formuliert, dass das Zahlenverständnis der Schülerinnen und Schüler durch die Algebra, speziell durch die Behandlung der Ungleichungen geschult werden kann und sollte (vgl. 10:12-1).

Herr B verfolgt das übergeordnete Ziel das Abstraktionsvermögen seiner Schülerinnen und Schüler zu schulen. Das meint sich flexibel in die verschiedensten Situationen hineindenken zu können. Zu diesem Ziel trägt die Fähigkeit des Mathematisierens bei. Die Lernenden sollen Alltagssituationen und Anwendungen aus ganz verschiedenen Bereichen in Gleichungen übersetzen können und diese lösen. Zu diesem Zweck müssen sie wiederum zunächst Sicherheit im Umgang mit Termen und Variablen erlangen und die verschiedenen Lösungsverfahren beherrschen. Strategien zum Mathematisieren werden den Lernenden dann vermittelt und viel geübt.
Hierin wird die Zweiteilung in das Mathematisieren und die Lösung der mathematisierten Situation deutlich. Definitiv trägt Algebra dazu bei mit Hilfe der vermittelten Verfahren die Lösung der mathematisierten Situation herbeizuführen. Inwiefern das Mathematisieren ein allgemein-mathematisches oder ein Algebra-spezifisches Ziel ist, kann nicht klar unterschieden werden.
Die Algebra wird als Grundlage für die Oberstufenmathematik betrachtet. Das bedeutet sie soll die Schülerinnen und Schüler auf die Oberstufe und das Abitur vorbereiten.
Ineralgebraisch wird als Ziel des Algebraunterrichts das Beweisen im Mathematikunterricht genannt. Dadurch, dass Herr B es als „hehres“ Ziel formuliert, wird aber angenommen, dass dies kein Standardinhalt des Algebraunterrichts ist.
Die Beherrschung des Handwerkszeugs bezieht sich in den Ausführungen von Herrn B eher auf die Beherrschung von Prozeduren. Die Übersetzung von Sachzusammenhängen in Gleichungen gilt eher als eigene Denkhandlung. Beide Bestandteile zusammen machen für Herrn B den Algebraunterricht aus.

6.2.3. Was sind die Ziele des Mathematikunterrichts?

Die Ziele des Mathematikunterrichts werden in drei Ebenen unterschieden:
Erstens das innerschulische Ziel in der Form, dass die Schülerinnen und Schüler befähigt werden „das Abitur, die Mathematik der Oberstufe zu bewältigen“ (40:09-2).
Zweitens das gesamtgesellschaftliche, zur Allgemeinbildung gehörende, Ziel, dass die praktischen Fähigkeiten vermittelt werden, sodass die Schülerinnen und Schüler in eventuellen

Ausbildungen, aber auch im Alltagsleben zurechtkommen und nicht in eine Situation geraten, „an der Kasse nicht 3,50 +2,70 ausrechnen [zu können] (...) [was] bedauerlich [ist], aber eigentlich auch nicht Sinn des gymnasialen Mathematikunterrichts“ (40:09-2). Dennoch werden zur Vermeidung solch einer Situation vereinzelt bis in die Oberstufe hinein Kopfübungen gemacht (42:47-2 - 43:35-2). Gleichzeitig wird der Grundkonflikt aufgeworfen, „wozu (...) sie es können [müssen]“ (43:35-2), denn auch in der Kassen-Situation wird diese dadurch aufgelöst, dass die Kasse die Berechnung des Restgeldes übernimmt (41:17-2). Aus Sicht von Herrn B „widersprechen sich eben die Schulziele mittlerweile“ (40:09-2). Dies bezieht sich auf die Formulierung der geforderten Fähigkeiten und Fertigkeiten im Abitur, den Anforderungen der Gesellschaft nach der Beherrschung basaler Rechenfertigkeiten - „wir werden zum Teil auch daran gemessen, dass irgendeiner sagt, man die können ja nicht mal drei halbe mal zwei Drittel“ (42:06-2) - und der Einstellung der Schülerinnen und Schüler, die „eben nur noch versuchen durchzukommen“ (40:09-2). Trotz allem formuliert er das Ziel, den „sicheren Umgang mit den Grundlagen der Mathematik“ (1:10-2) gewährleisten zu wollen und alle Schülerinnen und Schüler „möglichst (...) auf ein Mindestniveau zu bekommen“ (ebd.).
Drittens soll die Mathematik als „Grundlagenwissenschaft“ (31:37-1) verstanden werden, die auch in fast jedem Studium in irgendeiner Form Anwendung finden wird (vgl. ebd.). Doch nicht nur im späteren Studium hat die Mathematik ihren Nutzen; die Schülerinnen und Schüler sollen dadurch motiviert werden, dass sie die Mathematik „nicht nur für sich, den Selbstzweck betreib[en]“ (18:14-2), sondern, dass es „halbwegs realistische Bezüge gibt (...), [dass] man in solche Richtungen weitergeht, das ja etwas mit erreicht“ (ebd.) wird. Dieser Punkt wird am ausführlichsten diskutiert, weshalb diesem Ziel die höchste Bedeutung zukommt. Detaillierter wird darauf eingegangen, dass „das Lösen von Gleichungen an sich und das Verknüpfen mit irgendwelchen praktischen Inhalten, das macht so Mathematik für mich aus. Und man braucht es immer wieder“ (6:12-1). Anwendungsbezüge spielen deshalb im Unterricht eine große Rolle. Die „verwende ich auf jeden Fall. Ich denke, immer noch nicht genug, aber ich versuch’s“ (18:06-2). Das „rührt [daher,] dass ich erkenne, dass das wichtig ist für ganz andere Anwendungsgebiete“ (3:58-1). Die Bedeutung der basalen Inhalte, wie dem Lösen von Gleichungen, wird für die weiteren Inhalte der Mathematik betont.
Dabei wird klar herausgestellt, dass Schemata zwar der Problemlösung als „Werkzeug“ (33:31-1) dienen, den Prozessen des „Durchdringens eines Problems“ und dessen „Mathematisierung“ (ebd.) aber im Sinne dessen, was im Mathematikunterricht erreicht werden soll, nachgeordnet sind. Demgegenüber steht die Einschätzung von Herrn B, dass „Schema (...) aber für eine große Zahl der Schüler genauso wichtig [sind], einfach zu wissen, jetzt wende ich das Schema an und, ich sag jetzt mal ganz salopp, komm damit durchs Abitur. Punkt“ (ebd.). Zudem entlasten diese die Schülerinnen und Schüler, denn „viele sind sehr froh, wenn es denn zum Beispiel beim Gleichung-lösen-Thema dann soweit ist, dass sie das Schema abarbeiten können. Dass sie also nicht darüber nachdenken müssen (...) [und] dann sind einige wieder im Boot (...) für die das dann zu viel war“ (30:21-1). In diesem letzten Punkt wird der Vorteil deutlich, den die Anwendung von Schemata im Algebraunterricht mit sich bringt. Er relativiert aber auch, dass ein Schema „für so eine Standardgleichung [anwendbar ist] (...). Hält [aber] nicht lange an, weil dann kommen die komplizierteren Gleichungen (...) aber erstmal sind die über dieses Schema sehr froh“ (30:21-1).
Insgesamt herrscht eine gewisse Nüchternheit gegenüber den durch den Mathematikunterricht erreichbaren Zielen, so wird in Bezug auf die Schülerinnen und Schüler festgestellt: „Ich hab nicht mehr das Ziel, hier Mathematiker zu generieren“ (31:37-1), wobei das Ziel nicht ganz verworfen sondern eher eingeschränkt worden ist, da es Herrn B wichtig ist, zumindest „auch erfolgreiche Mathematiker da ran [zu kriegen]“ (2:34-2). Für sich und für die breite Schülerschaft kommt Herr B zu der Schlussfolgerung: „dann bin ich mittlerweile auch dabei, dass es um grundlegend wichtige Dinge geht, aber wenn ein Schema dann dazu reicht, gut, dann reicht es eben, dann muss ich nicht das Tiefenverständnis bei allen erreichen“ (32:05-1).

Ganz allgemein soll zudem die Abstraktionsfähigkeit der Schülerinnen und Schüler geschult werden, diese wird als für das Leben der Schülerinnen und Schüler bedeutend angesehen (vgl. 2:25-1) und ist dadurch begründet, dass auf dem eigenen Lebensweg festgestellt worden ist, wie wichtig es ist „sich reindenken [zu können] (...) [und] ein bisschen in der Lage ist, Dinge zu abstrahieren und zu durchschauen“ (3:58-1).
Die Verwendung des wissenschaftlichen Taschenrechners (Die Schule hat sich gegen CAS/GTR in der Sek I entschieden, wobei er die Funktion des Fachleiters innehat - „da sind wir wieder von ab“ (30:03-2)..) gehört nicht zu den Zielen des Algebracurriculums. „Ich wähle dann auch oft die Aufgaben so, dass er eigentlich nicht sehr sinnvoll ist, weil es macht ja die Aufgaben nur künstlich schwerer, wenn ich da jetzt irgendwelche Koeffizienten, an denen liegt’s ja, da rein setze (...). Wenn ich natürlich schwerere Koeffizienten nehme, muss ich den Taschenrechner zulassen, ist aber für’s Grundverständnis völlig unerheblich aus meiner Sicht“ (30:44-2).

Die Ziele des Mathematikcurriculums sind auf drei Ebenen feststellbar:

1. Die innerschulische Ebene. Auf dieser sollen die Schülerinnen und Schüler auf das Abitur vorbereitet werden und auf die Bewältigung der Oberstufe. Dabei hilft gerade bei den Lernenden mit einem begrenzten Abstraktionsvermögen die Vermittlung von Schemata.
2. Die gesellschaftliche, allgemeinbildende Ebene. Auf dieser Ebene sollen die Lernenden auf das Leben außerhalb der Schule vorbereitet werden, indem sie Sicherheit im Bereich des Kopfrechnens erlangen. Dies soll ihnen in alltäglichen Situationen helfen.
3. Die abstrakte, gesamtmathematische Ebene. Hier geht es um die generelle Bedeutung der Mathematik als Grundlagenwissenschaft. Der Nutzen der Mathematik im Leben der Schülerinnen und Schüler soll erkannt werden. Sie können ihre Alltagswelt mit Hilfe der Mathematik modellieren und das im Mathematikunterricht geschulte abstrakte Denken flexibel in verschiedenen Situationen einsetzen.

Für Herrn B ist das Lösen von Gleichungen der Kern der Algebra und die Verknüpfung der Gleichungen mit den verschiedenen Anwendungsbezügen der Kern der Mathematik. Ersteres wird als Werkzeug benötigt, um die Ziele des Mathematikunterrichts zu erreichen.
Beobachtung: Herr B empfindet einen Zielkonflikt zwischen dem, was das Abitur an Fähigkeiten und Fertigkeiten voraussetzt, den gesellschaftlichen Anforderungen an die Schülerinnen und Schüler und dem, was die Schülerinnen und Schüler von dem Mathematikunterricht erwarten, nämlich die Vorbereitung auf das Abitur.
Er verbindet die zu den verschiedenen Zielen gehörenden Maßnahmen in seinem Unterricht miteinander. Die Vorbereitung auf das Abitur wird mehrfach als Grund genannt, einen bestimmten Inhalt zu unterrichten.
Das gesamtgesellschaftliche Ziel wird insofern mitberücksichtigt, als dass weiterhin Kopfübungen durchgeführt werden. Darüber hinaus macht er keine Angaben.
Sein gesamt-mathematisches Ziel verfolgt er durch die Schwerpunktlegung auf Anwendungsbezüge im Unterricht, um den Nutzen der Mathematik auf diese Weise zu verdeutlichen.
Inhaltlich wird deutlich, dass durch die Unterscheidung in die Algebra als technische Seite, das Handwerkszeug der Mathematik, und die Mathematik als die inhaltlich gebundene Arbeit eine enge Verknüpfung zwischen den Zielen des Algebra- und Mathematikcurriculums sichtbar wird.
Die Verwendung des Taschenrechners hat keine Bedeutung in der Formulierung der Ziele des Algebra- und Mathematikcurriculums.

6.2.4. Wie gelingt erfolgreiches Lernen?

Aus den zuvor dargelegten Ausführungen erklärt sich das Lernumfeld, das für Herrn B erfolgversprechend ist.
So ist das erfolgreiche Lernen durch die Aspekte Spaß, Freude, Motivation, die Möglichkeit Erfolge zu erzielen, viel Übung, Anschauung, die aktive Teilnahme am Unterricht, in Form von Ausprobieren, Strategieentwicklung oder auch die Partizipation an Mathematikwettbewerben gekennzeichnet.
Lernen gelingt aber primär, wenn den Schülerinnen und Schülern der Sinn dessen klar wird, warum sie die mathematischen Inhalte erlernen, die sie erlernen (vgl. 9:36-1), was durch die häufige Wiederholung des zentralen Punktes der Verknüpfung von praktischen Inhalten mit den Gleichungen durch Herrn B untermauert wird (vgl. 6:12-1). Dies dient vor allem der Motivation der Schülerinnen und Schüler (vgl. 18:14-2), zu erkennen, dass die Mathematik im Allgemeinen und die Algebra im Speziellen kein Selbstzweck ist.
Sind die Schülerinnen und Schüler motiviert (26:08-2), gelingt das Lernen der Algebra. Diesem Punkt werden Maßnahmen wie ein anschaulicher Unterricht (vgl. 6:12-1, 15:24-1), das Ermöglichen verschiedener Zugänge über die verschiedenen Darstellungsformen (vgl. 20:06-2, 20:24-2), die Verwendung schülernaher Beispiele (vgl. 6:40-2) und die Möglichkeit für die Schülerinnen und Schüler sich an verschiedenen Aufgaben auch ausprobieren zu können (vgl. 14:19-1) zugeordnet. Gleichzeitig wird ein aktiver Unterricht mit einem hohen Schülereigenarbeitsanteil propagiert (vgl. 5:38-2), da diese in zahlreichen Übungsphasen neues Wissen vertiefen können und so auch ein Mindestniveau erreicht werden kann (vgl. 25:33-1, 1:10-2).
Herr B legt keinen Wert auf unnötige Formalisierungen, was am geringen Stellenwert expliziter mathematischer Definitionen in seinen Ausführungen abzulesen ist (vgl. 16:47-1). Vielmehr sollte der Unterricht anwendungsbezogen sein, mit praktischen Beispielen angereichert, wobei aber auf die Einhaltung der Rechenregeln und deren Einübung Wert gelegt wird (vgl. 19:29-1, 23:52-1).
Gleichzeitig wird das unterschiedliche Leistungsniveau der Schülerinnen und Schüler anerkannt, das vor allem aus einem unterschiedlichen Abstraktionsvermögen resultiert (vgl. 20:10-1). Eine differenziertere Darstellung seines Schülerbilds hilft, diese Unterscheidung zu verstehen:
In Bezug auf die Algebra wird trotz des Eindrucks, dass diese von den Schülerinnen und Schülern „ganz gut angenommen“ (34:47-1) wird, sehr früh darauf hingewiesen, dass die Schülerinnen und Schüler „sehr schnell die Abstraktionsgrenzen“ (19:54-1) erreichen „und sie dann nachher ganz (...) schnell wieder dabei [sind] die falschen Dinge zu tun“ (18:49-1). Der Eindruck, dass die Algebra gut angenommen wird, stützt sich einerseits darauf, dass sie denjenigen Schülerinnen und Schülern, die das „Abstraktionsvermögen [besitzen], sehr viel Spaß [macht]. Für die ist, so wie für mich dann auch Gleichungen lösen was Substanzielles, Grundlegendes und Wichtiges, was auch Spaß macht“ (20:10-1). Andererseits bieten die Schemata zum Lösen von Gleichungen den Schülerinnen und Schülern Sicherheit: „[V]iele sind sehr froh (...), dass sie das Schema abarbeiten können“ (30:21-1).
Insofern werden die Schülerinnen und Schüler unterschieden in diejenigen, die das nötige Abstraktionsvermögen besitzen, als etwas Natürliches und nicht Erlernbares (vgl. 25:33-1) und in diejenigen, denen dieses fehlt. Dies äußert sich zum Beispiel in der diesen beiden Schülergruppen zugestandenen Leistungsfähigkeit: „Wenn es darum geht, dass ich verlangen muss, Terme aufzustellen aus irgendwelchen Sachzusammenhängen, Gleichungen aufzustellen, dann erkenne ich schnell, dass das für einige Schüler schwer wird und ja die Termumformung an sich macht dann einigen Schülern keinen Spaß mehr, auch Gleichungen lösen. Aber ich denke da den Zusammenhang zwischen denen, denen das Abstraktionsvermögen fehlt, die die das haben, denen macht das sehr viel Spaß“ (20:10-1). Dadurch wird das Unterrichtsziel von Herrn B deutlich, dass die Lernenden Spaß am Unterricht entwickeln sollen.

Allgemein wird festgestellt, dass die „reine Termumformung [den] Schülern schwerer [fällt], leichter oder für viele oder für mehr dann doch besser verständlich ist die Gleichung Thematik“ (22:55-1). Diese Feststellung erfolgt auch in Abgrenzung zu den anderen Stoffgebieten der Mathematik in der Sekundarstufe I, zum Beispiel im Vergleich zur Stochastik: „Weil das grundlegend anders [ist] (...) weil sie eben mit diesen abstrakten Rechenvorschriften nicht so konfrontiert sind“ (24:56-1). Mit dem Abstraktionsgrad ist zum Beispiel das Erkennen des Unterschieds „zwischen zwei Mal x und x hoch zwei oder x mal x und das ist genau das Problem“ (26:59-1).
Aus diesem Grund werden in Ansätzen unterschiedliche Zugänge und Aufgabenschwierigkeiten angeboten (vgl. 21:02-1, 20:10-1, 20:21-1), um die Schülerinnen und Schüler nicht zu frustrieren. Die Leistungsgrenzen werden in diesem Zusammenhang anerkannt und respektiert (vgl. 25:33-1). So wird den Schülerinnen und Schülern mit einem geringeren Abstraktionsvermögen die Gelegenheit geboten mit Hilfe von Strategien (vgl. 23:08-2) und Schemata ihr Abitur zu erreichen, auch wenn dann der Inhalt der Algebra dann nur noch schematisch angewandt wird (vgl. 33:31-1). Schülerinnen und Schüler mit einem höheren Abstraktionsvermögen wird die Möglichkeit zugestanden, die Algebra als etwas Substantielles anzusehen (vgl. 20:10-1), die Belegung und Bedeutung der Variablen zu verstehen (8:59-2) und daran Spaß zu haben (vgl. 20:10-1).

Herr B unterteilt die Schülerschaft in zwei Gruppen, wobei das Kriterium für die Unterscheidung das Vorhandensein eines ihnen gegebenen oder nicht gegebenen Abstraktionsvermögens ist.
Insgesamt fällt den Schülerinnen und Schülern der Umgang mit abstrakten Themen, wie den Rechenvorschriften auf der symbolischen Ebene, schwer.
Für das erfolgreiche Lernen gilt dennoch, dass die Schülerinnen und Schüler nur das Lernen, was ihnen sinnvoll erscheint. Zu diesem Zweck werden die algebraischen Inhalte vor allem im Bereich der Gleichungen mit Anwendungsbezügen verknüpft, um die Relevanz dieser im Alltag der Schülerinnen und Schüler zu verdeutlichen.
Die Lernenden müssen dazu motiviert werden, sich mit den verschiedenen Inhalten zu beschäftigen. Daher werden ihnen verschiedene Darstellungsformen angeboten, die Möglichkeiten sich auszuprobieren, binnendifferenziert zu lernen und durch viel Übung Erfolgserlebnisse zu erlangen. Ihnen wird verdeutlicht, dass sie Rechenregeln und das Handwerkszeug benötigen, um später Anwendungsbezüge in Form von Gleichungen zu bearbeiten. Auf diese Weise können sie Spaß am Unterricht entwickeln.
Für ihn besteht das Ziel der Schülerinnen und Schüler in erster Linie darin, den Mathematikunterricht und das Abitur zu bewältigen (vgl. Abschnitt 6.2).

6.2.5. Wie gelingt guter (Algebra-)Unterricht?

Als klares Ziel wird von Herrn B formuliert: „Motivation. Dass Schüler sehen, wenn man denn findet, dass es so halbwegs realistische Bezüge gibt (...) und da ja etwas mit erreicht“ (18:14-2). Zu diesem Zweck muss der Unterricht durch Anwendungsbezüge „interessanter (...), lebendiger [gestaltet werden]“ (20:24-2), auch „um die Schüler, ja, wieder zu kriegen (...) um zu motivieren“ (ebd.). Dies lehrt ihn die „Erfahrung der Unterrichtsjahre“ (ebd.). Dazu gehört auch eine Variation in den verschiedenen Darstellungsformen wie die Verwendung von Bildern, Graphiken, Tabellen und so weiter (vgl. 20:06-2, 20:24-2).
Die Motivation der Schülerinnen und Schüler wird als wichtig erachtet, um Lernprozesse zu initiieren (vgl. Abschnitt 6.2.4). Zum Beispiel begründet er die Verwendung des Äpfel- und Birnen-Schemas unter dem Aspekt, dass es den Schülerinnen und Schülern „Spaß [macht] (...) da ihre Äpfel und Birnen [zu malen]“ (15:24-1). Treten Schwierigkeiten im Verständnis der

Schülerinnen und Schüler auf, gerade in Bezug auf den zu hohen Abstraktionsgrad der sich steigernden Inhalte wird auf die Binnendifferenzierung vor allem deshalb zurückgegriffen, weil die zu dem Zeitpunkt abgehängten Schülerinnen und Schüler durch das Üben einfacherer Aufgaben „Erfolge [erzielen und so] etwas motivierter wieder bei der Sache [sind]“ (21:02-1). Daher legt Herr B sehr großen Wert darauf, dass der Zweck des Unterrichts den Schülerinnen und Schülern klar wird. „Schüler [kommen] ja immer mit der Ansicht (...), ja wenn ich aber das und das mache, brauche ich das nie wieder. Richtig, das ist wohl so, aber dann fallen einem ja zu manchen Dingen noch Beispiele ein, die fast jeder mal braucht“ (9:36-1). Wird ihnen aber der Zweck des Unterrichts klar, sind sie motivierter und verstehen auch eher, dass die Mathematik kein „Selbstzweck“ ist (18:14-2). So wird zum Beispiel begründet, dass Ungleichungen und Ungleichungssysteme sehr knapp behandelt werden, „weil es im Folgenden keine große Rolle spielt“ (8:55-1), denn „wo taucht das mal auf, ein bisschen bei Grenzwerten (...) [und] (...) mir [fallen] jetzt wenig praktische Dinge ein (...), wo man Ungleichungssysteme und ne Lösungsmenge von einem Ungleichungssystem bräuchte“ (9:21-1). Ein weiteres Beispiel sind „reine Termumformung[en], [die sind] erst mal schwerer zu begründen“ (23:08-1). Denn: „Warum muss man das [können]?“ (ebd.), dies untermauert die Bedeutung dessen, dass dem Stoffinhalt ein Sinn vermittelt werden muss.

Daher empfindet Herr B Gleichungen, „das Verknüpfen mit irgendwelchen praktischen Inhalten“ (6:12-1) und ihre Lösungen als etwas „Substantielles, Grundlegendes und Wichtiges, was auch Spaß macht“ (20:10-1). Dies wird auch im Gegensatz zu den Termumformungen abgegrenzt: „die reine Termumformung fällt glaube ich Schülern schwerer, leichter und für viele oder für mehr dann doch besser verständlich ist die Gleichungsthematik“ (22:55-1). Die Behandlung der Gleichungen bietet zudem eine größere Gestaltungsmöglichkeit im Unterricht, da es möglich ist, „auch mal eine einfachere Aufgabe wieder ein[zu]streu[en]“ (23:08-1). Der Aspekt der Anschauung kommt bei der Vermittlung der Variablen ebenfalls zum Tragen, wenn diese neben der Variablenbelegung in Termen und der Verknüpfung mit praktischen Inhalten (s. Inhalt des Algebraunterrichts) anhand des Äpfel- und Birnenschemas vermittelt werden, „es macht ihnen Spaß, sie malen da ihre Äpfel und Birnen und ich erzähle ihnen auch immer wieder, dass sie dann irgendwann anfangen werden, Äpfel und Birnen zu multiplizieren“ (15:24-1).

Unter diesem Gesichtspunkt legt Herr B Wert auf das Problemlösen und das Modellieren. In beiden Fällen wird dies aber grob gefasst definiert, als „einen praktischen Zusammenhang durch eine Gleichung zu beschreiben“ (24:33-2). Darunter fällt zum Beispiel auch eine Aufgabe des Formats: „Ja (...) Brötchen (...) von der Sorte und von der Sorte, und was kostet die Sorte und was kostet die Sorte“ (14:55-1, vgl. 24:46-2, 25:09-2). Dies dient der Motivation „Zu sehen: Ah, das ist ein Problem. Das kann ich dann mit irgendeiner, oder ich kriege eine mathematische Strategie vermittelt, um das zu lösen. (...) ist mal ne Abwechslung“ (26:08-2).

Zudem ist es ein Ziel von Herrn B „Freude an diesem Gleichungen-lösen zu vermitteln, weil das ist so für mich die Grundlage, um irgendwas anderes damit erreichen zu können“ (35:55-1). Die positive Rückkopplung der Schülerinnen und Schüler wertet er als das „Entscheidende“ (2:25-2). Er versucht auch die Schülerinnen und Schüler für die verschiedenen Mathematikwettbewerbe zu interessieren (vgl. 38.33-1-39:09-1), weil „es hat mich für Mathematik begeistert“ (38:33-1).

Zu dieser Schwerpunktlegung auf die Motivation, Anschauung und Anwendung im Unterricht passt der Unterrichtsstil von Herrn B. Er legt Wert darauf, dass im Unterricht immer ein „direkte[r] Schülerkontakt“ (6:40-2) hergestellt wird, zum Beispiel durch „irgendwelch[e] Beispiele“ (ebd.). Herr B grenzt diesen Unterrichtsstil klar von dem Bild „Lehrer steht da vorne und schreibt an, Schüler schreiben ab und üben“ (ebd.) ab. Er ist sich nicht sicher, „ob mir das immer gelingt“ (ebd.), dennoch versucht er dies. Aufbauend auf dieser Einstellung lässt er den Schülerinnen und Schülern Raum sich an Aufgaben „auszuprobieren“ (14:42-1). Dies zeigt sich zum Beispiel in der Einführung der Gleichungen: „Dass dann gar nicht erstmal eine Glei-

chung steht, sondern irgendeine Aufgabe und die durch Probieren durchaus erstmal gelöst wird, (...) manchmal lasse ich dann auch wirklich (...) Probierstrategien [zu]“ (14:19-1).
Dem selbstentdeckenden Lernen wird aber eine Absage erteilt: „Die Möglichkeit sehe ich in dem Thema eher nicht. Mag ja sein, ihr habt tolle Sachen. Aber ich sehe da nicht so die Chance das zu versuchen“ (5:56-2). Dieser eher konservative Zug deckt sich mit seiner Grundhaltung, dass die Vermittlung neuer Inhalte über den Vortrag der Lehrkraft geschieht (vgl. 6:20-6:24-2). Auch wenn diese Aussage dadurch relativiert wird, „dass der Schülerarbeitsanteil da doch relativ hoch ist (...). Die Vermittlung ist da nicht so lang und umfangreich“ (5:38-2).
Abgehängte Schülerinnen und Schüler sollen durch den Unterrichtsaufbau von leicht zu schwer bei „kleinen, neuen Them[en] (...) wieder zurück ins Rennen“ (21:02-1) gebracht werden. Eine weitere Methode ist die bereits genannte Binnendifferenzierung und die damit verknüpfte Motivation (vgl. ebd.). Die Konsequenz dessen ist, dass es zwar „klappt[,] (...) sie üben dann einfach mehr einfache Aufgaben (...) aber sie erreichen natürlich durch den geringeren Übungsaufwand oder die geringere Übungszeit für die schwereren Aufgaben nicht dasselbe Niveau“ (ebd.). Schließlich herrscht aber gegenüber der Tatsache, dass nicht alle Schülerinnen und Schüler mitgenommen werden können Akzeptanz: „Ansonsten ist das eben auch die bittere Erkenntnis, dass ich Schüler auf ihrem Entwicklungsstand zurücklassen muss. Es geht einfach nicht anders (...) es liegt in der Natur der Sache“ (25:33-1).
Aber „für viele wird das [gemeint sind die Variablen, Anm. JM] nicht mehr von Bedeutung sein in ihrem Leben“ (10:05-2). In diesem Fall „wird [die Variable, Anm. JM] immer nur schematisch zum Abarbeiten einer Aufgabe dienen“ (8:59-2). Auf der anderen Seite gibt es die Schülerinnen und Schüler, denen das „Abstraktionsvermögen“ (20:10-1) nicht fehlt, „denen macht das Spaß“ (ebd.) und sie „verstehen, dass das immer in irgendeiner Belegung“ (8:59-2) auftritt und eine „Bedeutung dahinter steckt“ (ebd.).
Formalen Definitionen wird offenbar kein großer Stellenwert beigemessen. Dies ist daran erkennbar, dass zwar davon gesprochen wird, dass „tolle Definition[en] raus[ge]zauber[t] werden“ (16:47-1). Während des Interviews kann Herr B sich aber an keine erinnern. Dies entspricht auch der Rückstellung der rein Kalkül-orientieren Termumformungen (s. 6.2.1). Es wird mehr Wert auf den „Umgang mit diesem Term an sich“ (17:54-1) gelegt, auch wenn bei diesem Umgang auf die Einhaltung der „Rechengesetze“ (19:29-1, 23:52-1) geachtet wird. Zusammenfassend richtet Herr B seinen Fokus eher auf die Anwendung als auf formalistische Aspekte.
Herr B konstatiert, dass ein großes Problem bei der Vermittlung algebraischer Inhalte und ihrer Verknüpfung mit praktischen Inhalten entsteht, speziell dem Prozess des „Mathematisierens“, weil einigen Schülerinnen und Schüler das Abstraktionsvermögen fehlt, denn „wie mache ich jetzt aus, ja, aus dem Saft und dem Saft irgendwelche Variablen und bastel die dann auch richtig zusammen“ (22:41-2). Er hat seine Erwartung bezüglich des Mathematisierens eingeschränkt, wenn er die Verwendung der Schemata mit den Worten begleitet: „Es ist für mich immer noch erstrebenswert, dass sie das Problem durchdringen und mathematisieren können und dann das Schema eigentlich nur als Werkzeug nutzen, aber es ist für eine große Zahl der Schüler genau so wichtig, einfach zu wissen, jetzt wende ich das Schema an und (...) komm damit durchs Abitur (33:31-1). Dies zeigt gleichzeitig, dass er sein Ziel die Schülerinnen und Schüler auf das Abitur und die Mathematik der Oberstufe vorzubereiten (s. Ziele des Mathematikcurriculums), auch auf Kosten seiner normativ gesetzten Ziele verfolgt.
Ein Weg, dennoch zu versuchen, mehr Schülerinnen und Schüler dazu zu befähigen, zu mathematisieren, ist es zum Beispiel einen „Schritt zurück [zu gehen] und wieder [zu] üben, wenn es denn zeitlich möglich ist“ (25:33-1).
Das Thema Übung spielt in Bezug auf den erfolgreichen Unterricht eine entscheidende Rolle. „Grundlegende Dinge sind ganz wichtig, (...) die übe ich viel“ (17:54-1). Dazu zählen zum Beispiel die „abstrakte[n] Termumformungen“ und deren Übung (34:47-1) oder „Addition, Subtraktion, Zusammenfassen, Multiplizieren von Termen, was darf ich multiplizieren, was

darf ich zusammenfassen“ (18:41-1). Aber „das ist jetzt nicht so, dass ich [das Üben] jetzt auf Algebra auslegen würde. Es [das Lernen, Anm. JM] funktioniert generell nur mit Übung“ (0:14-2). Daher ist der Anteil der Übung im Unterricht „sicherlich relativ hoch (...) weiß ich nicht, 60, 70 Prozent“ (0:48-2). Die Übungsphasen und ihre Bedeutung im Unterricht werden als ersatzlos angesehen: „Ich sehe jetzt auch keine Alternative“ (5:07-2) und „ich wüsste jetzt nicht, was das Üben ersetzen sollte, um die nötigen Fertigkeiten zu erreichen“ (4:16-2). Das Problem der Monotonie, die beim Üben auftreten kann, ist Herrn B bewusst: „[I]ch versuche es mal irgendwie abwechslungsreich zu gestalten mit, (...) einer Kopfrechenübung dazwischen (...). Aber ansonsten...“ (4:16-2). Da keine weiteren Variationen genannt werden, ist davon auszugehen, dass sich „für Übungen und Hausaufgaben (...) am Lehrbuch (...) [und an der] Erfahrung“ (3:10-1) orientiert wird. Unter Erfahrung wird gefasst, womit „sich irgendwas gut mit dann erarbeitet hat“ (4:56-1), eine konkretere Erläuterung erfolgt nicht. Das Buch gilt neben den Übungen auch in der Vermittlung als wegweisend: „da nehme ich dann auch Anregungen draus, die ich dann im Unterricht für die, vor allem für die Vermittlung nutze“ (4:30-1).
Bei den Übungen wird dann vereinzelt darauf geachtet, binnendifferenziert vorzugehen: „Da kann man ja dann ein bisschen mehr differenzieren, wenn man da mal ein bisschen auswählen kann: der das, der das, der das“ (1:43-2). Die Verwendung der unpersönlicheren Form „man“ und die Einschränkung durch das Wort „bisschen“ können darauf hinweisen, dass diese Form der binnendifferenzierten Aufgaben im Unterricht von Herrn B eher seltener auftreten. Dies wird durch die Selbsteinschätzung von Herrn B zum Thema Übung im Unterricht unterstützt, wenn er sagt: „ich bin nicht der, ja was sind das, so der experimentierfreudig[e], nicht übermäßig“ (2:06-2), „da bin ich sehr stinknormaler Lehrer“ (1:31-2).
Die starke Präsenz der Übungsphasen im Unterricht kennzeichnet den typischen Unterrichtsaufbau, da „der Schülerarbeitsanteil da doch relativ hoch ist. Einfach, ja durch das Üben an sich. Die Vermittlung ist da nicht so lang und umfangreich“ (5:38-2).
Neben der Übung wird versucht, den Schülerinnen und Schülern Strategien an die Hand zu geben, die ihnen helfen sollen, zu mathematisieren: „Man versucht es ja immer wieder zu erklären und Strategien da zu vermitteln. Zum Beispiel zu bestimmten Gleichungstypen erstmal eine Tabelle anzulegen, was wofür steht (...), weil es eben gerade bei komplizierten Sachverhalten den Schülern schwer fällt oder den wenigsten gelingt, gleich aus der Aufgabe eine Gleichung zu machen“ (23:08-2).
Der Unterrichtsaufbau von Herrn B steigert sich innerhalb eines Themas von einfach zu schwierig - „man steigert sich ja (...)“ (21:02-1) und wird ab und zu durch „ein kleines neues Thema (...) [ergänzt], wenn es dann wieder ein bisschen leichter wird“ (21:02-1). Dies beschreibt seine Unterrichtslogik.
Ein weiteres Beispiel für die Struktur seines Unterrichts ist seine Prioritätensetzung. Sein Ziel ist es: „Erstmal den Schritt davor, die Mathematisierung vollbringen und dann eben das Algebraschema abarbeiten“ (36:42-1) zu können. Dazu wird mit dem Handwerkszeug begonnen: „Erstmal die mathematischen Fähigkeiten entwickeln und dann auf konkrete Dinge anwenden. Klar, gibt ja dieses andere Vorgehen: Immer erst irgendein Problem schaffen und dann gucken wie es, mit welcher Variante ich das dann gelöst kriege. Aber mir fehlt dann auch die Struktur der Sache“ (19:40-2).
Dies spricht für einen begründeten Unterrichtsaufbau. Auch wenn diesem dann die Motivation der Schülerinnen und Schüler untergeordnet werden muss: „Ich sage jetzt mal problemorientierter Unterricht fängt ja (...) erst mal [mit dem] Problem [an und man] entwickelt dann die Strategie dazu. Eigentlich in der Masse sieht’s eher so aus: mathematische Fähigkeiten entwickeln, dann das Problem lösen. Ist natürlich vom motivatorisch[en her] nicht die günstigere Variante, aber für mich die für mich praktikablere“ (25:12-2). Die Authentizität spielt hier die entscheidende Rolle, denn das ist die Herangehensweise, „mit der ich mich wohler fühle (...) es geht ja letztendlich im Unterricht auch um mich“ (25:44-2). Der Anteil des Unterrichts, in

dem Schemata und damit zusammenhängend das Handwerkszeug unterrichtet wird, steht im Vergleich zu den Anwendungsaufgaben im Verhältnis 60 zu 40 (vgl. 32:46-1-33:08-2).

Herr B bezeichnet die Motivation der Schülerinnen und Schüler als übergeordnetes Ziel seines Unterrichts.
Zu diesem Zweck wird bei jedem behandelten Themenbereich versucht, den Sinn dessen zu verdeutlichen, indem die Frage „Wozu brauche ich das?“ beantwortet wird. Als Mittel werden dazu Anwendungsbezüge geschaffen. Am einfachsten gelingt das beim Thema Gleichungen. Gleichungen können die Realität repräsentieren, indem praktische Beispiele aus dem Alltag, wie der Brötchenkauf mit einem limitierten Budget, durch sie modelliert werden. Gleichungen werden überwiegend in Sachzusammenhängen generiert, wobei die konkrete Lösung dieser im Zentrum steht. Auf diese Weise erscheinen sie den Schülerinnen und Schülern als nützlich. In diesem Zusammenhang werden den Schülerinnen und Schülern verschiedene Repräsentationsformen und Modelle (wie die Verwendung unterschiedlicher Obstsorten für unterschiedliche Variablen) angeboten, um einen anschaulichen Zugang zu gewährleisten.
Es ist für Herrn B schwierig bei abstrakteren Themen, wie den Termumformungen, Sinn zu erzeugen. Diese werden aber als notwendiges Handwerkszeug für die spätere Lösung von Gleichungen benötigt.
Viel Gelegenheit zur Übung, die Grundlage jedes Lernprozesses ist, sowie unterschiedlich schwierige Aufgaben sollen die Lernenden auf ihrem jeweiligen Lernstand abholen und so jedem die Gelegenheit geben Erfolgserlebnisse zu erreichen. Dies führt auch in schwierigeren Bereichen zur Motivation der Lernenden. Das Buch liefert ihm entsprechende Aufgaben.
Der Unterrichtsstil von Herrn B ist bei der Vermittlung und Formulierung neuer Unterrichtsinhalte durch Lehrervorträge gekennzeichnet. Dennoch lehnt er die Idee des stetig dozierenden Lehrers ab, bei dem die Lernenden eine passive Rolle einnehmen. Vielmehr priorisiert er die Arbeit mit den Schülerinnen und Schülern. Diese ist durch schülernahe Beispiele und die Eigenarbeit der Lernenden, zum Beispiel beim Auffinden von Lösungsstrategien, charakterisiert. Autonomere Lernformen, wie das entdeckende Lernen, lehnt er ab, weil sie für ihn nicht zielführend sind, gerade bei abstrakteren Themen. Auch der problemorientierte Zugang zur Algebra wird abgelehnt. Er bewertet ihn zwar als motivationssteigernd, aber gleichzeitig nicht praktikabel und seinem Unterrichtsverständnis entsprechend.
Seine Bemühungen, den Unterricht anschaulich und nachvollziehbar zu gestalten und die Lernenden zu motivieren, sprechen dafür, dass er möglichst viele Lernende an seinem Unterricht teilhaben lassen möchte.
Seinem Ziel, die Anwendung ins Zentrum des Unterrichts zu stellen, wird die Verwendung formal korrekter Definitionen untergeordnet. Die Begriffe (Term, Variable, Gleichung) werden in der Algebra eher verwendet, als formal definiert.
Durch das bei einigen Lernenden nicht vorhandene Abstraktionsvermögen macht Herr B Abstriche in Bezug auf das inhaltliche Niveau. Er möchte das Interesse am Unterricht bei möglichst vielen Lernenden halten. Dafür muss er aber das inhaltliche Niveau und den Grad an Abstraktion für diese Schülerinnen und Schüler senken. Sie bekommen leichtere Aufgaben, werden aber auf dieser Weise nicht den inhaltlichen Stand derjenigen erreichen, die sich mit anspruchsvolleren Aufgaben auseinandersetzen.

6.2.6. Das Variablenverständnis von Herrn B

Wie in den Betrachtungen zum Inhalt der Algebra deutlich, wird die Variable vornehmlich als Unbekannte, als zu bestimmende Zahl gesehen, die im jeweiligen Aufgabenkontext bestimmt wird.
In den drei als Prompt vorgelegten Aufgaben, die an Malle und seinen Variablenaspekten orientiert sind: Kalkülaspekt, Einsetzungsaspekt und dem Gegenstandsaspekt, charakterisiert Herr B die Variable jedes Mal als „eine Zahl" (13:00-2, 13:20-2), die ermittelt wird.
Dies unterstreicht die Bedeutung der Variablen als Unbekannte, unabhängig vom Aufgabentyp, da impliziert wird, dass genau eine noch unbekannte, konkrete Zahl gesucht wird.

6.2.7. Das Bild der Mathematik - Herr B

Aus der Codierung des Interviews ergibt sich das folgende Bild: Der Anwendungs-Aspekt ist mit Abstand am häufigsten codiert worden (25), wohingegen der Schema-Aspekt (6) deutlich weniger häufig auftritt. Die anderen Aspekte konnten im Interview nicht codiert werden.
Herr B nimmt damit in Bezug auf den Aspekt Anwendung den ersten Rangplatz ein, während er in Bezug auf die Codes Formalismus und Schema den letzten, beziehungsweise den vorletzten Rang einnimmt. Dies weist auf eine relative Ablehnung beider Codes hin.
Die Auswertung des Fragebogens ergibt, dass die Skala Anwendung (19) am stärksten ausgeprägt ist. Weniger stark, aber auf ähnlichem Niveau sind die übrigen drei Aspekte ausgeprägt: Schema (11), Formalismus (11) und Prozess (10).
Daraus ergibt sich das folgende allgemein-mathematische Weltbild:

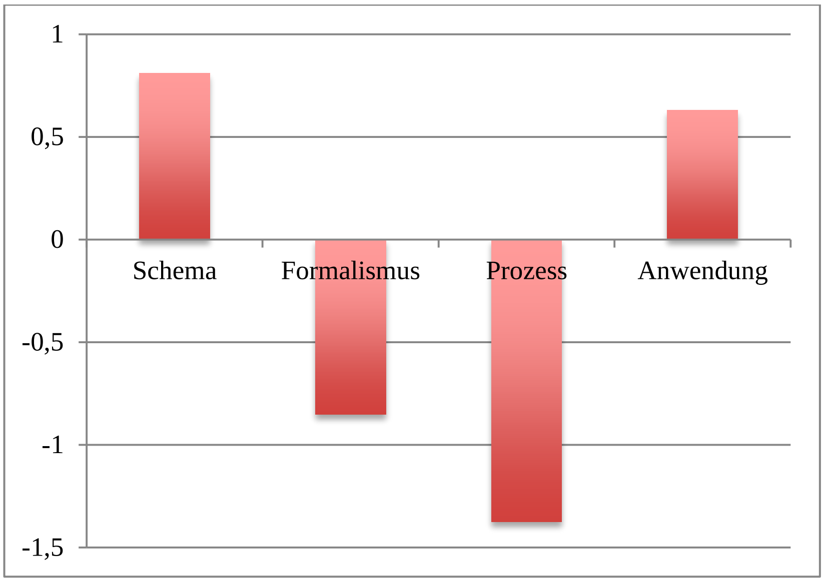


Abbildung 10: Das Bild der Mathematik - Herr B

Da im Interview die globalen Beliefs Formalismus und Prozess durch Herrn B nicht thematisiert worden sind, ist ein Vergleich hier nicht zielführend.
Im Fragebogen wird die schon aus der Analyse hervorgehende Verknüpfung des Anwendungs- und des Schema-Aspekts untermauert. Dies wird durch die Zuordnung zu den Rangplätzen nicht eindeutig abgebildet, was darauf zurückzuführen ist, dass im Interview relativ wenig über den Schema-Aspekt gesprochen wird.

6.2.8. Ziel-Mittel-Argumentation - Herr B

Tabelle 19: Inhalte des Algebra-Curriculums, Herr B

mit Hilfe der Algebra beweisen (selten)	…	Praktische Inhalte aus dem Alltag und Umfeld der SuS in Gleichungen übersetzen lassen (wird verstanden als modellieren, Probleme lösen)		
		↑		
weniger das Lösen und Bearbeiten von Ungleichungen und Ungleichungssystemen. Ungleichungen werden zum Aufbau des Zahlgefühls genutzt	…	Aufbau eines schematischen Werkzeugkastens zum Lösen von Gleichungen aufbauend auf zuvor erlernten Termstrukturen und -umformungen	↔	Handwerkszeug als Mittel zum Zweck vermitteln
		↑		
wenig Bruchterme	…	Termumformungen - Anwendung der bekannten Rechenregeln auf Terme	↔	Kalkülhafte Tätigkeit, aber mit dem Vermerk dies nicht ausarten lassen zu wollen
		↑		
		Termstrukturen		
		↑		
		Termwertbelegung, praktischer Umgang mit Termen durch die unterschiedliche Belegung von Variablen und Aufbau der Erkenntnis, das in Abhängigkeit der gewählten Variablen unterschiedliche Werte herauskommen können	↔	Variable hier unter dem Einsetzungsaspekt
		↑		
		Termdefinition als etwas das „Zahlen, Rechenzeichen und Variablen“ enthält, in diesem Zusammenhang Einführung der Variablen als etwas Beispielhaftes, das für Größen, Preise, etc. steht, also für noch unbekannte Größen	↔	Die Variable als Unbekannte
		↑		
		Grundlegende Beherrschung der Rechenregeln in den chen $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$		

Tabelle 20: Ziele des Algebra-Curriculums, Herr B

								!Abstraktionsvermögen schulen !Situationen analysieren (=gemeint ist hier die Fähigkeit auch außermathematische Situationen auf einer abstrakten Ebene analysieren zu können und diese zu verstehen mit Hilfe der in der Algebra erworbenen Fertigkeiten)
				Wenn die SuS Algebra als Instrument begreifen, um Alltagsprobleme zu mathematisieren	+	**Wenn Algebra als innermathematische Grundlage für die Oberstufenmathematik dient**	→	**kann das Abstraktionsvermögen der SuS geschult werden, und sie können Situationen auf einer abstrakteren Ebene analysieren**
				!Algebra als Instrument !Alltagsprobleme mathematisieren (=Algebra als Grundlage und notwendige Sprache der Mathematik, mit der reale Probleme übersetzt und gelöst werden können)		!Grundlage für Oberstufenmathematik (=als Beispiele werden die Notwendigkeit der Verwendung von Gleichungen und ihren Lösungsstrategien in der analytischen Geometrie, der Trigonometrie oder der Stochastik genannt)		
		Wenn praktische Inhalte aus der realen Welt mit den Gleichungen verknüpft werden können und Anwendungsbezüge geschaffen worden sind	→	**können die SuS Algebra als Instrument begreifen Alltagsprobleme zu mathematisieren**	+	**die Algebra kann als innermathematische Grundlage für die Oberstufenmathematik dienen**		!Mittel zum Argumentieren (=gemeint ist das sehr abstrakte Ziel die Algebra für innermathematische Beweise zu nutzen und dabei die Struktur und Logik des Vorgehens zu erkennen)
		!Einbeziehung praktischer Inhalte !Verknüpfung mit Gleichungen (=gemeint ist hier die Modellierung von Alltagsbezügen durch Gleichungen und Terme)					→	**kann die Algebra als Mittel zum innermathematischen Argumentieren und Beweisen genutzt werden**
Wenn die notwendigen handwerklichen Fertigkeiten und	→	**können praktische Inhalte aus der realen Welt mit Gleichungen**						

								Schemata beherrscht werden !handwerkliche Fähigkeiten !Schemata (=beziehen sich auf die prozeduralen Grundlagen wie Rechenregeln und Lösungsverfahren)	**verknüpft werden und Anwendungsbezüge geschaffen werden**
		Wenn Variablen als etwas vermittelt werden, mit dem umgegangen werden muss !Variablen !Umgang (=Variablen seien hier als die Sprache und die nötige Syntax zu verstehen, die in unterschiedlichen Kontexten zum Tragen kommt und jeweils flexibel eingesetzt werden soll)	+	**Wenn Terme und Termumformungen als notwendiges Handwerkszeug angesehen werden** !Terme und Termumformungen !notwendiges Handwerkszeug (=Terme und Termumformungen werden hier unter dem Gesichtspunkt der abstrakten, regelgeleiteten, nicht an Sinn gebundenen, Umformung verstanden)	+	**Wenn verschiedene Gleichungslösungsstrategien vermittelt werden** !Gleichungslösungsstrategien (=hierunter seien die Strategien zur Lösung von Gleichungen, Gleichsetzungsverfahren, etc.)	→	**können die notwendigen handwerklichen Fertigkeiten und Schemata erlernt und beherrscht werden**	
Wenn man die Algebra inhaltlich so aufbaut wie beschrieben !Behandlung algebraischer Inhalte	→	**werden Variablen vermittelt, als etwas mit dem umgegangen werden muss**	+	**werden Terme und Termumformungen als notwendiges Handwerkszeug angesehen**	+	**werden die verschiedenen Gleichungslösungsstrategien vermittelt**			

Tabelle 21: Ziele des Mathematik-Curriculums, Herr B

!Mathematik der Oberstufe
!Abitur bestehen
(=hier ist das tatsächliche Bestehen des Abiturs gemeint und die fachliche Vorbereitung auf die Inhalte der Oberstufenmathematik)

\+ **Wenn mindestens entweder Schemata erlernt werden oder wenn das Abstraktionsvermögen der SuS entsprechend geschult worden ist** → **kann man die Mathematik der Oberstufe bewältigen und das Abitur bestehen**

!Schemata erlernen
!Abstraktionsvermögen schulen
(=hier geht es darum die Voraussetzungen der mathematischen Fertigkeiten und Fähigkeiten der SuS zu schulen, dies gelingt je nach den kognitiven Voraussetzungen der SuS indem entweder Schemata aufgebaut und angewendet werden, deren Nutzung aber im unteren Fähigkeitsbereich angesiedelt ist oder aber durch die Schulung des Abstraktionsvermögens der SuS insoweit als dass die Verständnisgrundlagen gelegt werden, um die Belegung der Variablen, Terme und Gleichungen zu erkennen und verstehen)

!praktische Fertigkeiten
!Alltagsbewältigung
(=mit den praktischen Fertigkeiten sind die Kopfrechenfertigkeiten gemeint, die in Alltagssituationen, z.B. an der Kasse gebraucht werden und zum Beispiel auch das Zahlgefühl)

!Mindestniveau
!Grundfertigkeiten
(=Dieses Mindestniveau bezieht sich auf die mathematischen Grundfertigkeiten der jeweiligen Thematik, ist aber auch allgemeiner auf die basalen mathematischen Fähigkeiten wie das Kopfrechnen und die Grundrechenarten bezogen)

Wenn der Unterricht schülernah, anschaulich und mit einem Schwerpunkt auf praktischen, anwendungsbezogenen Inhalten unterrichtet wird + **Wenn der Unterricht strukturiert und logisch aufgebaut ist** + **Wenn bis in die Oberstufe Kopfübungen durchgeführt werden und viel geübt wird** → **können die praktischen Fertigkeiten erworben werden, um den Alltag zu bewältigen** + **können alle SuS auf ein Mindestniveau im Umgang mit den Grundlagen der Mathematik gebracht werden**

!Kopfübungen
!Übungen
(=gemeint ist hier das themenspezifische Üben sowie das Üben der Grundlagen, das im Unterricht einen großen Stellenwert und Zeitanteil einnimmt sowie auch die Kopfübungen, um die Rechenfähigkeit der SuS zu schulen)

!Schülernah
!Anschaulich
!Praktische, anwendungsbezogene Inhalte
(=Der Unterricht sollte sich an praktischen, schülernahen Beispielen orientieren, die anschaulich präsentiert werden, um die SuS zu motivieren und sie zu interessieren)

!Struktur
!Logischer Unterrichtsaufbau
(=dies geschieht im Sinn zunächst die nötigen mathematischen Fertigkeiten aufzubauen und diese dann auf konkrete Beispiele anzuwenden)

!Mathematik als Grundlagenwissenschaft
!vielfältige Nutzbarkeit
(=die vielfältige Nutzbarkeit bezieht sich auf die Fähigkeiten auf der Metaebene Probleme jeglicher Art durchdringen zu können, sich in Situationen hineinzudenken und diese dann mit Hilfe von Mathematik lösen zu können oder zumindest Schritte der Problemlösung zu übernehmen (z.B. in verschiedenen Studienfächern)

!kein Selbstzweck
(=die Mathematik gelangt so auf eine Metaebene in der sie von der konkreten Schulmathematik abgekoppelt wird und zur allgemeinen Anwendung in vielen Lebensbereichen befähigt)

\+ **Wenn die SuS die Mathematik als Möglichkeit begreifen, Probleme in ihrer Umwelt lösen** → **kann die Mathematik als Grundlagenwissenschaft verstanden werden, die in vielfältiger Weise in den unterschiedlichen Lebensbereichen auch außerhalb der Mathematik genutzt werden** + **kann die Mathematik als mehr als nur innerschulischer Selbstzweck begriffen werden, der Spaß macht**

!Mathematik als Chance
!Probleme lösen
(=hier ist die Fähigkeit gemeint, die Mathematik abstrakter zu sehen und mit ihr Alltagsprobleme lösen, die Probleme sind dabei innermathematisch bezeichnet als Dinge, die durch Gleichungen der Schulmathematik modellierbar sind)

Tabelle 22: Das Lernen, Herr B

Zur Lesbarkeit: Der obere Zweig beschreibt das Lernen für die Schülerinnen und Schüler mit dem nötigen Abstraktionsvermögen, der untere für diejenigen ohne dieses.

																!Spaß !Algebra substanziell (=die Bedeutung der Algebra als absolutes Basiswissen wird verstanden und es wird Spaß in der Anwendung empfunden)
												Wenn die Bedeutung der Variablen und ihrer Belegung verstanden wird	+	**Wenn Algebra als Basiswissenschaft mit deren Hilfe praktische Probleme der Welt mathematisch modelliert werden können, verstanden wird**	→	**kann Spaß am Lösen von Gleichungen und der Algebra als etwas Substanziellem empfunden werden**
												!Bedeutung der Variablen (=hier ist primär die Belegung der Variablen mit der jeweiligen kontextabhängigen Belegung gemeint)		!Basiswissenschaft !Probleme modellieren (=in diesem Zusammenhang wir die Algebra als Mittel zum Zweck der Problemlösung realer, praktischer Probleme verstanden)		
										Wenn die SuS durch schülernahe, praktische Beispiele motiviert sind	→	**kann die Bedeutung der Variablen und ihrer Belegung verstanden werden**	+	**kann Algebra als Basiswissenschaft verstanden werden mit deren Hilfe praktische Probleme der Welt mathematisch modelliert werden**		
										!Motivation !schülernahe Beispiele !Praxisorientierung (= die Motivation bezieht sich darauf, dass sie Beispiele aus ihren Leben mit Hilfe der Algebra bearbeiten können)						!Abitur bestehen (=das ist aus Sicht dieser Schüler das Ziel, nämlich das Abitur zu bestehen)
Wenn Rechenregeln als notwendiges Handwerkszeug verstanden werden	+	**Wenn auf unnötige Formalisierung verzichtet wird**	+	**Wenn den SuS ein hoher Eigenarbeitsanteil am Unterricht zugestanden wird, in Form verschiedener Übungen**	+	**Wenn den SuS verschiedene Zugänge angeboten werden, sowohl in den Darstellungsformen als auch binnendifferenziert und so nieveauangepasst**	+	**Wenn die SuS die Möglichkeit erhalten sich im Unterricht auszuprobieren**	→	**kann Motivation durch die Bearbeitung schülernaher, praktischer Beispiele hervorgerufen werden**		**Wenn die SuS Strategien und Schemata zur Lösung der Beispiele erlernen**	+	**Wenn die SuS die Inhalte der Algebra schematisch anwenden**	→	**bestehen die SuS ihr Abitur**
!Rechenregeln als notwendiges Handwerkszeug (=die basalen Grundfertigkeiten wie die Rechenregeln in den Zahlbereichen müssen erlernt werden, um spätere Anwendungen bewältigen zu können)		!auf unnötige Formalisierung verzichten (=Die Formalisierung soll bei der Einhaltung von Rechenregeln beachtet werden, aber nicht in Bezug auf mathematische Definitionen)		!hoher Eigenarbeitsanteil !viele Übungen (=die SuS sollen sehr viel selbst in längeren Übungsphasen arbeiten, da Übung als Basis des Lernens angesehen wird)		!verschiedene Zugänge !visuell !Binnendifferenzierung (=um den verschiedenen kognitiven Voraussetzungen zu entsprechen und die SuS zu motivieren, soll viel Anschauung geboten werden, die Binnendifferenzierung wird durch Übung erreicht)		!sich ausprobieren (=die SuS sollen die Möglichkeit erhalten selbstständig Strategien zu entwickeln und sich auszuprobieren)		!Motivation !schülernahe Beispiele !Praxisorientierung (=die Motivation bezieht sich darauf, dass sie Beispiele aus ihren Leben mit Hilfe der Algebra bearbeiten können)		!Lösungsstrategien !Schemata (=da beim Mathematisieren Schwierigkeiten auftreten, werden Strategien und Schemata, die manchmal zur Bearbeitung ausreichen an die Hand gegeben)		!Inhalte schematisch anwenden (=durch das An-die-Hand-Geben von Schema und das Vertrauen darauf werden die Inhalte der Algebra, wie die Variablen nur noch schematisch angewandt)		
										Wenn die SuS durch schülernahe, praktische Beispiele motiviert sind	→	**erlernen die SuS Strategien und Schemata zur Lösung der Beispiele**	+	**wenden die Inhalte der Algebra schematisch an**		

Tabelle 23: Lehren von Algebra, Herr B

												!Motivation !Freude !Spaß (=die SuS können so Spaß am Unterricht haben und sind so motivierter teilzuhaben und sich mit der Mathematik zu beschäftigen)		!Partizipation (=der Unterrichtsaufbau, das Anbieten zahlreicher Zugänge sowie die Gelegenheit viel zu üben bieten die Möglichkeit auch SuS die zwischenzeitlich verloren gegangen sind, wieder mit zu integrieren)
						Wenn die Sinngebung gelingt und die Mathematik nicht als Selbstzweck verstanden wird	+	**Wenn Unterrichtsinhalte anschaulich und binnendifferenziert vermittelt werden**	+	**Wenn der Unterricht interaktiv und authentisch gestaltet wird**	→	**sind die SuS motiviert, entwickeln Freude und Spaß am Unterricht**	+	**entsteht die Möglichkeit viele SuS partizipieren zu lassen**
						!Sinngebung !Mathematik nicht als Selbstzweck (=dies bezieht sich auf die von den SuS gestellte Frage „Wozu machen wir das", die so oft wie möglich beantwortet werden sollte)		!Anschaulichkeit !Binnendifferenzierung (=hier geht es einerseits um die Verwendung lebensnaher Beispiele, die Darstellung der Inhalte auf verschiedenen Repräsentationsebenen und das Anbieten von Aufgaben auf verschiedenen Anforderungsniveaus sowie unterschiedlichen Strategien)		!interaktiver Unterricht !Authentizität (=hierbei ist gemeint, dass neue Inhalte zwar lehrkraftzentriert eingeführt werden, diese aber durch lange Eigenarbeitsphasen und das Ausprobieren eigener Strategien und Ideen begleitet werden sollten, die grobe Lenkung und Strukturvorgabe durch die Lehrkraft wird als authentisch charakterisiert)				
Wenn der Unterricht strukturiert gestaltet wird	+	**Wenn Gleichungen/allgemein mathematische Inhalte mit Anwendungsbezügen verknüpft werden und dies geübt wird**	+	**Wenn nicht zu formal vorgegangen wird**	→	**kann die Sinngebung gelingen und die Mathematik wird nicht als Selbstzweck verstanden**	+	**können Unterrichtsinhalte anschaulich und binnendifferenziert vermittelt werden**	+	**kann der Unterricht interaktiv und authentisch gestaltet werden**				
! Struktur (=mit Struktur ist einerseits die inhaltliche Struktur gemeint, dass zunächst Grundfertigkeiten erworben werden, bevor diese auf konkrete Inhalte angewendet werden und andererseits die methodische Seite, dass neue Inhalte durch die Lehrkraft präsentiert werden, aber durch ausgedehnte Schülereigenarbeitsphasen begleitet und vertieft werden)		!Verknüpfung mathematischer Inhalte mit praktischen Anwendungsbezügen !Übung (=hier geht es um Prozesse des Mathematisierens von Alltagsproblemen, diese Prozesse müssen verstärkt geübt werden, da hier der Schwierigkeitsgrad erhöht ist und allgemein das Lernen nur durch Übung erreicht werden kann)		!kein unnötiger Formalismus (=dies bezieht sich vornehmlich auf mathematische Definitionen, in Bezug auf Rechenregeln gilt die Einhaltung formaler Regeln)										

6.2.9. Unterrichtsbeobachtungen und Klausurenanalyse - Herr B

Die Unterrichtsbeobachtungen, die in einer achten Klasse durchgeführt worden sind, deuten auf einen sehr angeleiteten, lehrkraftzentrierten Unterricht hin. Beide Stunden waren durch einen hohen Schülerarbeitsanteil in Form von Übungen gekennzeichnet, die durch an der Tafel gegebene Aufgaben (Abbildung 12) und das Lehrbuch vorgegeben waren.

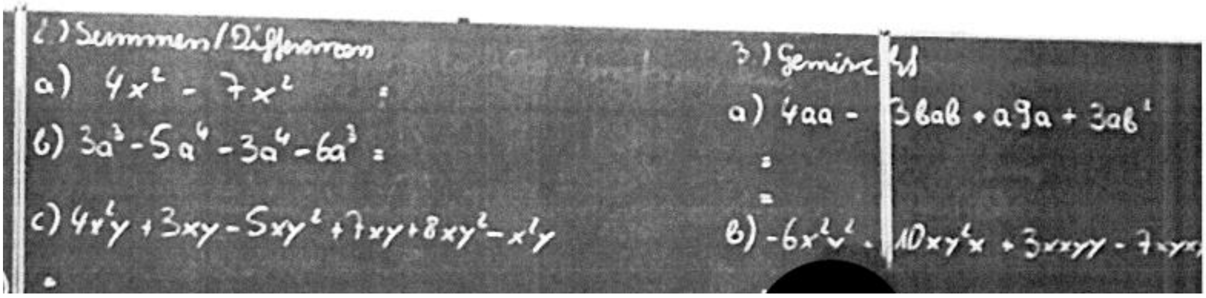


Abbildung 11: Tafelbild 1, Herr B

Es ging um das Einüben von gerade gelernten Regeln zur Zusammenfassung von Termen und der Erarbeitung zum Umgang mit Minusklammern (Abbildung 13).

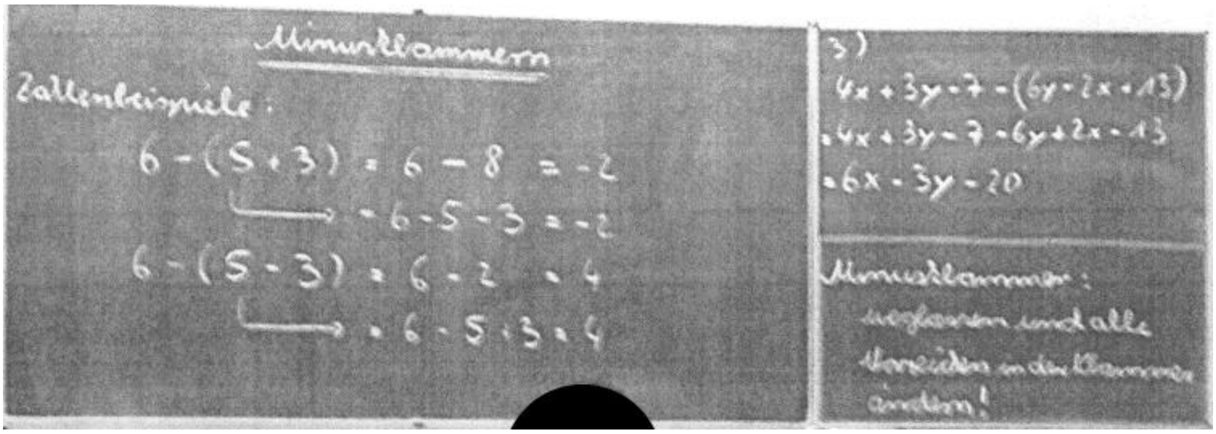


Abbildung 12: Tafelbild 2, Herr B

Die erste beobachtete Stunde begann mit einer abfragenden Wiederholung der Begriffe „Variable“ (Unbekannte Zahl, Größen, Mengen, Preise, Alter), „Term“ (Ausdruck in dem Variable auftaucht) und „Gleichung“ (In Termen fehlt das Gleichheitszeichen, wenn es eins gibt, dann heißt das Gleichung) sowie den Begriffen „abziehen“ und „vermehren“ und der Wiederholung der Strategie, wie die Termstruktur erkannt werden kann (durch Unterstreichungen).
Anschließend übten die Schülerinnen und Schüler die Identifikation von Termstrukturen. Der Vergleich erfolgte im Klassenverband, wobei die Lernenden ihre Lösungen an die Tafel schrieben. Es war zu beobachten, dass je mehr falsche Lösungen gegeben worden sind, desto mehr griff Herr B in den Vergleich ein.
Anschließend wird eine Anwendungsaufgabe gestellt, die sich mit Handyverträgen beschäftigt, wobei die SMS-Anzahl durch die Variable gegeben ist. Es folgt ein Unterrichtsgespräch über die Bedeutung der Variablen. Es werden sehr viele Werte für diese eingesetzt. Anschließend wird mit Hilfe des Buchs geübt und die Antworten werden mündlich verglichen.
In der zweiten beobachteten Stunde werden zunächst die Hausaufgaben verglichen. Auftretende Probleme werden im Klassengespräch gelöst. Ein stark-lehrkraftzentriertes Unterrichtsgespräch wiederholt die Regeln zur Klammersetzung. Daran anschließend folgt die Überleitung zu den Minusklammern. Herr B macht den Lernenden die Unterrichtsstruktur deutlich,

indem zunächst Zahlenbeispiele gefunden werden sollen (Abbildung 13), die dann auf ein allgemeines Vorgehen schließen lassen. Dies wird durch Herrn B als Regel an der Tafel formuliert. Anschließend folgt die Übungsphase, die sich aus Aufgaben aus dem Buch und der Tafel zusammensetzt. Beim gemeinsamen Vergleich wirkt Herr B frustriert: „Ihr habt alles vergessen, was wir schon gemacht haben. Da sind auch Plusklammern drin. Wer kriegt das mal fehlerfrei hin?“. Eine Antwort wird gegeben und durch Herrn B langsam wiederholt.
Darauf folgt eine weitere Übungsphase, die zu Hause beendet werden soll.
Der beobachtete Unterricht zeigt, dass zentrale Inhalte durch Herrn B lehrkraftzentriert vermittelt werden. Zahlreiche Übungsphasen (etwa 52% der Zeit Eigenarbeit), in denen die Schülerinnen und Schüler selbstständig arbeiten, werden für die Festigung der Inhalte genutzt. Dies steht im Einklang zu der rekonstruierten subjektiven Theorie von Herrn B zu dem was guter Unterricht für ihn bedeutet.
Die Erarbeitung des Handwerkszeugs steht im Mittelpunkt beider Stunden. Auch dies widerspricht inhaltlich nicht den rekonstruierten Curricula. In Bezug auf die Vermittlung der Rechenregeln auf rein abstrakter Ebene werden zwar Zahlenbeispiele zur Illustration eingesetzt, andere Elemente, die zur Motivierung eingesetzt werden können, fehlen aber. Die Datenlage kann dies nicht erklären. Eine mögliche Erklärung ist die aus den Interviews rekonstruierte Haltung Herrn Bs, dass er es als Zwang, beziehungsweise notwendiges Übel empfindet, die Regeln zur Termumformung zu unterrichten, weil ihm bei diesem Thema der Anwendungsbezug fehlt, der für ihn wichtig ist.

Die Klassenarbeit unterstützt die thematische Festsetzung der beobachteten Stunden. Sie ist im Ganzen in Anhang 8 hinterlegt. Die Analyse der Klausur ergibt die folgende Übersicht:

Tabelle 24: Klausurenanalyse, Herr B

Kompetenz(en)	math. argumentieren			Probleme mathematisch lösen			mathematisch modellieren			mathematische Darstellungen verwenden			formal-technisch arbeiten			mathematisch kommunizieren		
Anforderungsbereich	I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II	III
Formuliere																x	x	
Bestimme													x					
Berechne													x					
Vereinfache													x					
Multipliziere aus														x				
Fasse zusammen													x					
Berechne													x	x				

Diese Arbeit bewegt sich vorwiegend im Bereich des formal-technischen Arbeitens und weist in ihrem Anspruch ein geringes kognitives Anforderungsniveau auf.
Dieses Resultat entspricht den rekonstruierten subjektiven Theorien. Herr B formulierte mehrfach, dass zunächst das Handwerkszeug erlernt werden müsste, bevor Mathematisierungen vorgenommen werden können. Die Klausur ist ausschließlich Kalkül-orientiert strukturiert. Dies spricht für die Trennung beider Bereiche.
Die Betonung des Anwendungs-Aspektes wird in den beobachteten Stunden nur am Beispiel der SMS-Aufgabe deutlich. In der Klausur wird dieser nicht aufgegriffen. Erklärungen für die fehlende Übereinstimmung können aufgrund des erhobenen Materials nicht gegeben werden. Möglicherweise ist der Zeitpunkt der Erhebung eine erklärende Variable. Herr B legte auch im Interview die Beherrschung der Rechenregeln bei den Termumformungen als Ziel fest. Die beobachteten Inhalte unterstützen dies. Vielmehr gibt es Hinweise darauf, dass der Unterrichtsstil instruktiver ist, als beschrieben.

6.3. Herr C

Herr C[98] ist seit 12 Jahren Lehrer. Er unterrichtet an einem niedersächsischen Gymnasium. An seiner Schule wird der Lambacher Schweizer als Lehrwerk verwendet. In Bezug auf den Rechner wird in der Schule gerade der Wechsel vom GTR zum CAS durchgeführt.

6.3.1. Was sind die Inhalte des Algebraunterrichts?

Als zentrale Inhalte des Algebraunterrichts werden das „Rechnen mit Variablen. Gleichungen lösen. Lineare Gleichungssysteme (…) und eben immer wieder Termumformungen" (0:45-1) genannt. Die Einführung von Termen in Formeln wird verknüpft mit dem Baustein „Flächeninhalte[n], Rauminhalte[n] (…). Dass man so ein bisschen auch sehen kann, erkennen kann, ja, stimmt, die Formel zusammengefasst, so ist [es] viel einfacher" (5:45-1).
Variablen werden für den Algebraunterricht im Speziellen und den Mathematikunterricht im Allgemeinen als elementar angesehen, da dieser ohne Variablen auf das Rechnen reduziert wäre, was für Herrn C wiederum „keine Mathematik" (33:34-1) mehr wäre, das „wäre ja so, (...) verzichte in der Musik auf die Mehrstimmigkeit, in der Kunst auf die Perspektive" (ebd.).
Die Variable soll auf zweierlei Weise verstanden werden. Einerseits als Instrument zahlreiche Einzelfälle in einer verallgemeinernden Formel oder einem Term zusammenzufassen, dabei „möchte man gerne ohne jetzt die Zahl schon vielleicht zu kennen, irgendeinen Ausdruck haben und dann ihn schon mal rechnen können. Schon mal abschätzen können mit den Ergebnissen, die man hat: Was da eben ist" (36:00-1). Ergänzend dazu sei die folgende Passage benannt: „Gerade bei linearen Zusammenhängen kann man da wirklich zeigen. Das ist unheimlich praktisch, dieses x. Denn wir können ohne zu wissen, um welche Zahl das eigentlich dann wirklich geht, einfach schon damit rechnen (...) wenn man bestimmte Regeln sich einfach gemerkt hat" (16:26-1). In diesem Fall zeigt sich bei Herrn C das Verständnis der Variablen als Unbestimmte.
Kommt dann aber ein konkreter Aufgabenkontext hinzu, wie zum Beispiel die Bestimmung des noch unbekannten „Stundenlohn[s]", „kann [ich] einfach trotzdem schon mal rechnen (...) [und] am Ende habe ich dann meinetwegen 4x+5 und kann dann eben, je nachdem (...) rauskriegen, durch verschiedenes Einsetzen von Zahlen" (16:26-1), welcher Wert gesucht ist. Hier wird zunächst eine allgemeine Situation modelliert, die aber dann auf die Bestimmung eines konkreten Wertes abzielt (s. auch 33:55-1), womit sich das Verständnis der Variablen als Unbestimmter wandelt, hin zu der Variablen als Unbekannter. Dieses Zusammenspiel beider Deutungen wird näher erläutert, wenn er sagt: „erst mal für eine beliebige Zahl (…) [die] soll dann eine feste Zahl sein. (…) wir kennen sie noch nicht, wir rechnen jetzt mal mit dem x. Und gucken, wenn am Ende 3x rauskommt, weiß ich, super, also ich habe immer das Dreifache von dem" (36:00-1), aber „[k]lar eben konkret" (36:34-1).
Die Definition der Variablen erfolgt nicht explizit vor Behandlung der Einheit, da die Notwendigkeit nicht erkannt wird. „Ich weiß nicht, wie man jetzt definieren sollte x ist jetzt eine (...) man definiert in der Grundschule auch nicht, was eine Zahl ist" (40:16-1), daher wird die Variable je nach „Sachkontext" (ebd.) definiert, in dem Sinn „x [als] Anzahl der Marienkäfer" (ebd.). Herr C unterscheidet darüber hinaus Variablen und Formvariablen, letztere werden als Parameter verstanden, „Formvariablen sind wirklich a,b,c meinetwegen jetzt $a \cdot x+b$ (…). Also zwei Zahlen, die für die ganze Funktion immer die gleichen bleiben" (34:56-1), im Gegensatz dazu sind Variablen definiert, als „das x mit dem man rechnet" (ebd.). Herr C folgt nach eigenen Angaben den begrifflichen Vorgaben des Buches (vgl. ebd.).

[98] Da die Aufnahme zweigeteilt ist, wird hinter den Zeitangaben eine 1 für den ersten Aufnahmeteil und eine 2 für den zweiten Aufnahmeteil vermerkt. Dies dient der übersichtlicheren Darstellung.

Zum Unterricht gehören für Herrn C Beweise. „Ich meine wichtige Sätze, da kriegen sie mindestens mal gezeigt wie das geht[,] (...) [sonst] wäre dann vieles Black Box (...) wir nehmen den Satz einfach, wissen aber nicht warum der gilt. (...) Das fände ich schon unbefriedigend. Also das wäre dann irgendwo eigentlich kein Mathematikunterricht mehr“ (2:24-1). Der letzte Satz untermauert die Bedeutung, die das Beweisen für Herrn C als integraler Bestandteil des Mathematikunterrichts besitzt. Zumal innermathematische Beweise als Rechtfertigung für das Erlernen der mathematischen Sprache, um sich also „in dieser Sprache (...) ausdrücken zu können“ (ebd.), gesehen werden. Denn „wir [haben] wirklich jetzt ein Verfahren (...) die Möglichkeit mit unseren neuen Kenntnissen jetzt hier zu begründen“ (24:54-2). Andernfalls würden die Schülerinnen und Schüler denken: „Komisch, dann ist das, dann formt der Rechner das irgendwie für uns um, aber wieso ist denn das so“ (1:47-1, vgl. 2:04-1).
Das Lösen von Gleichungen hingegen ist „ja fast noch wichtiger für die Anwendung, die man dann hat“. Zuvor müssen aber „Termumformung[en] (...) regelmäßig wiederhol[t]“ (1:23-1) werden, „dieses Umformen erst mal, dass sie kapieren, wie gesagt 3x+4, dass man da nicht 7x draus machen darf“ (14:16-1). Dennoch ist das Lösen von Gleichungen „für viele Schüler auch die typische Schulmathematik“ (46:46-2) und das zumeist in Zusammenhang mit der Geometrie und der Analysis (vgl. ebd.). „Dann kommen die Gleichungen und im Rahmen der Gleichung kommen dann eben auch diese Aufgaben, wo man erst mal die Gleichung überhaupt aufstellen muss. (…) Das x steht zwar für eine ganz konkrete Zahl dann, die man sucht“ (38:22-1). In diesem Zusammenhang wird die Gleichung auch vom Term abgegrenzt, denn der Term wird verstanden als „Ausdruck, der mit Glück dann eine bestimmte Zahl ist, wenn man ihn ausrechnen kann“ (42:47-1). „Ein Term ist ein Rechenausdruck (…) auch im Prinzip so was wie (…) 2·5+8“ (19:22-1). Und Gleichung ist klar, da haben wir eben eine Aussage drin“ (42:47-1). Zur Lösung der Gleichungen „können sie sich aussuchen welches rechnerische Verfahren sie können [in den Arbeiten, Anm. JM]. Entweder eben das mit der quadratischen Ergänzung oder die Lösungsformel“ (23:14-1). Geht es um das Lösen linearer Gleichungen, müssen die Schülerinnen und Schüler erlernen, „wie man eine Gleichung schrittweise auflöst“ (52:45-1). Das gehört zu den Standards, dass man eine „Gleichung (…) wohl einfach so lösen können“ (22:42-2) muss. Bei den Termen werden dann Überlegungen angestellt, wie: „Und wenn ich jetzt den einen verdopple oder den nur oder drei weniger mache“ (41:37-2), was passiert?
Lineare Gleichungen tauchen dann über das Bestimmen des Schnittpunkts im Zusammenhang mit der Idee der Lösungsmenge auf (vgl. 23:14-1).
Zudem müssen die Schülerinnen und Schüler die „handfesten Regeln [üben]. Die müssen ja wirklich sitzen. Da übt man wahrscheinlich dann eben auch ein bisschen mehr dran“ (20:11-1). Dazu gehören das „Multiplizieren, Dividieren von Produkten (…) das Ausmultiplizieren“ (8:55-1), das „[A]ddieren und Subtrahieren“ (11:18-1). Dazu dienen die Kopfübungen im Unterricht, „dass sie da eben echt immer wieder gestoßen werden, ja, ach Mist, ich muss das hier können. 2·(x-1) ist ja auch wirklich nicht schwer“ (41:20-1). „Na gut, sie brauchen’s dann auch noch kaum mehr. Denn schriftlich multiplizieren muss man dann ja wirklich nicht mehr in Mathearbeiten ab Klasse 7 aufwärts“ (27:32-1), dennoch sollten die Schülerinnen und Schüler diese Regeln für die Algebra beherrschen.
Die Bestimmung der zu unterrichtenden Inhalte orientiert sich nach Herrn C am Lehrbuch. Dieses bietet neben einem „bestimmten Übungspool“ (20:29-1) die inhaltliche Orientierung: „Und wenn man das [den Inhalt des Lehrbuchs, Anm. JM] dann so einigermaßen gemacht hat, hat man glaube ich auch so das Sinnvolle mit den Leuten erarbeitet“ (ebd.).
Ungleichungen werden aufgrund curricularer Vorgaben nur am Rand unterrichtet (vgl. 9:59-1, 10:40-1).

Grundlage für die Behandlung der Algebra bildet die Sicherheit im Umgang mit den verschiedenen Rechengesetzen und -regeln. Anschließend wird die Variable in Anlehnung an das Bekannte als „x-beliebige" Zahl eingeführt, mit der im Kontext von Flächenberechnungen umgegangen wird. Daher kennen die Lernenden auch die Arbeit mit Formeln, an die angeknüpft wird. Herr C betont, dass er die Variable nur im Sachkontext definiert, in dem Sinn dass die Variable in diesem Fall für zum Beispiel die Anzahl der Marienkäfer steht.
Darauf aufbauend wird der regelhafte Umgang mit Variablen in Termen und Gleichungen erlernt. Dies ist nötig, um Gleichungen lösen zu können. Durch diese wiederum können Sachzusammenhänge modelliert werden. Dies betont die Anwendungsorientierung im Unterricht.
Die Variable taucht im Aufgabenkontext eher als Unbekannte mit dem Ziel auf bestimmt zu werden auf.
Das Beweisen spielt für Herrn C eine wichtige Rolle im Mathematikunterricht, um den Lernenden nicht nur fertiges Wissen zu präsentieren. Allerdings führt er diese wenn, dann nur selbst durch und lässt seine Ausführungen von den Lernenden nachvollziehen.
Algebra, als Themengebiet, in dessen Rahmen Variablen eingeführt werden, bedeutet für Herrn C den Übergang vom Zahlenrechnen hin zur eigentlichen Mathematik.

Bemerkung

Es fällt auf, dass Herr C sowohl die Inhalte seines Unterrichts, als auch die einzelnen Definitionen und Übungen anhand des Schulbuchs festlegt. Begrenzungen des Inhalts sowie das Gefühl ein Thema ausreichend behandelt zu haben, werden aufgrund der thematischen Festlegungen des Lehrbuchs getroffen.

6.3.2. Was sind die Ziele des Algebraunterrichts?

Die Schülerinnen und Schüler sollen in die Lage versetzt werden, „Muster [zu] erkenn[en]" (54:10-2), „Schemata [zu] überschau[en] und eben [zu] übertragen" (ebd.), aber auch die Grenzen deren Anwendbarkeit zu erkennen. Dieses Vorgehen ist für die Bewältigung der Oberstufe elementar (vgl. ebd.). Ziel ist es, „dass sie eben diese Schemata beherrschen, aber eben zur Not auch mal abweichen können davon" (30:01-2). Auf der einen Seite sollen sie wissen, „natürlich kann ich die bekannten Sachen anwenden, aber eben nicht immer gleich" (ebd.). Zu diesem Zweck sollen die Schülerinnen und Schüler an das Problemlösen im Unterricht herangeführt werden. Herr C „biete[t] (...) es gerne mal an" (26:43-2), wobei er die „Gefahr [sieht], dass es standardmäßig, man einfach da so nach Schema f durchgeht. Einfach nur die Rechenfertigkeiten hat" (25:58-2), dennoch ist es wichtig, dass „die Sachen auch mit Inhalt gefüllt werden" (44:03-2). Um die Anwendbarkeit der Schemata zu überprüfen, „müssen [wir] sie eben zu Genauigkeit erziehen" (49:51-1). Dies ist in der Algebra elementar, weil hier eine neue Sprache gelernt wird und dann ist es „einfach so diese Unachtsamkeit (...). Geht mir im zweiten Fach Latein ja auch so. (...) Und da [in der Algebra, Anm. JM] ist es dann eben auch so" (ebd.).
Zu den Zielen des Algebraunterrichts gehört, die Fähigkeit des Verallgemeinerns zu schulen, „dass sich eben auf eine höhere Stufe stellen können und das Ganze bisschen allgemeiner betrachten können" (52:09-2). Dies werden die Schülerinnen und Schüler in ihrem späteren Berufsleben benötigen (vgl. ebd.). Dazu sollen die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass man nicht „100 Rechnungen machen [muss] für die verschiedenen Möglichkeiten. Sondern man kann mit diesem x wirklich für richtig, für beliebig viele Zahlen auf einmal die Sache lösen" (16:28-1). Im Zusammenhang mit den linearen Gleichungen gilt die Erkenntnis auch, denn „dank dem x können wir jetzt wirklich für alle möglichen Fälle uns das angucken. (...)

Sonst müsste man ewig lange probieren und da kann man dann eben direkt hinterher mit dem Gleichungenlösen die Zahl herauskriegen“ (17:48-1). Herr C ist überzeugt, „dass die Mehrheit dann doch merkt, das ist ein wirklich schlaues und geniales Konzept, was das Rechnen wirklich vereinfacht“ (31:30-1). Dies betrifft auch das Aufstellen für Formeln im Zusammenhang mit geometrischen Inhalten, wie dem Berechnen von Flächeninhalten oder Dreiecksberechnungen, auch dort sollen die Schülerinnen und Schüler „erkennen, ja, stimmt, die Formel zusammengefasst, so ist viel einfacher“ (5:45-1). Die Variablen stehen „dann eben einfach für die Größen, die sie dann erst mal einsetzen. Dass man eben eine Formel für alle hat“ (33:55-1). Ein weiteres Beispiel bringt Herr C, wenn er sagt: „wir könnten jetzt Halbkreise und Dreiecke zeichnen noch und nöcher. Die Schüler sehen auch, unendlich viele können wir nicht zeichnen (...). Reicht die Lebenszeit nicht aus. Und jetzt haben wir die tolle Möglichkeit, in dem wir einfach mal so ein beliebiges Dreieck nehmen, das keine weiteren Eigenschaften hat als die Gewünschten. Wenn wir jetzt daran zeigen können, dass der Satz stimmt, dann ist er wirklich für alle Dreiecke richtig. Das erleben die das so zum ersten Mal“ (30:44-2).
Die Schülerinnen und Schüler sollen zudem durch die Algebra die Möglichkeit erhalten, „den reinsten Blick auf die wissenschaftliche Mathematik mal werfen [zu] können. Natürlich nur in ganz kleinen Ausschnitten, aber dass sie eben doch sehen, also so Ausdrücke zusammenfassen, vereinfachen, so gewisse Tricks aus einen Nenner bringen (...). Dass man eben mit solchen Dingen, so reine Mathematik, also wirklich ganz rein ohne Anwendung, dass man damit dann eben auch arbeitet“ (3:55-1). Aus diesem Zitat wird deutlich, dass Herr C die reine Mathematik mit Algebra und diese wiederum mit den formalen Termumformungen und den geltenden Regeln - Algebra als „dieses Termding“ (5:45-1) mit „allgemeine[n] Regeln“ (ebd.) - und gleichzeitig mit einer Abwesenheit von Anwendungsbezügen verbindet. Dies entspricht seiner Deutung der Algebra als eigener Sprache, deren Vokabeln zunächst erlernt werden müssen, bevor man mit ihnen hantiert.

Die Lernenden sollen im Algebraunterricht zur Genauigkeit erzogen werden.
Dies ist nötig, wenn sie die Möglichkeiten und Grenzen bei der Verwendung von Schemata abwägen sollen.
Des Weiteren sollen die Lernenden lernen zu abstrahieren und Muster in verschiedenen Situationen zu erkennen. In verschiedenen Aufgabenbeispielen erkennen sie die Nützlichkeit verallgemeinern zu können. Diese Fähigkeit hilft ihnen in ihrem Berufsleben weiter.
Eine Möglichkeit sich dem anzunähern sind Problemlöse-Aufgaben.
Herr C formuliert es als Ziel, dass die Lernenden während der Behandlung der Algebra einen neuen Blick auf die Mathematik erhalten. Sie erleben zum Beispiel zum ersten Mal Allgemeingültigkeit, wenn bewiesen wird, dass eine Formel gilt, im Gegensatz zur Überprüfung dieser anhand vieler Fälle (vgl. Abschnitt 6.3.1). Er hält es für erstrebenswert, dass die Lernenden einen Blick auf die „reine“ Mathematik erhalten, indem sie sich der Mathematik auf rein symbolischer Ebene ohne konkrete Anwendungsbezüge nähern. Algebra wird von Herrn C als Sprache betrachtet.

6.3.3. Was sind die Ziele des Mathematikunterrichts?

Durch den Mathematikunterricht soll auf einer Metaebene das Gefühl erlangt werden, dass „die Mathematik (...) auch für den Alltag oder für die Wissenschaft. Für die Technik gut ist“ (4:39-2). Die „Schüler sollen (...) einen vertieften Einblick kriegen, welche wichtige Rolle Mathematik in vielen Bereichen der Gesellschaft spielt“ (52:09-2). Die Schülerinnen und Schüler sollen „schon eine Form von ja Geistesbildung“ (52:09-2), in Form einer „Schulung (...) im Nachdenken, im Abstrahieren“ (ebd.) erhalten. Auch die Macht und die Möglichkeiten der Mathematik sollen vermittelt werden, wenn darauf verwiesen wird, dass es Probleme in 4

und 5 Dimensionen gibt, bei denen „unsere Vorstellung sofort zu Ende ist, aber die Mathematik kann das noch packen“ (9:34-2).
Zudem soll der Spaß, den Herr C an der Mathematik hat, auf die Schülerinnen und Schüler übertragen werden, „dass zumindest ein großer Teil der Schüler da eben auch sagt, oh Mensch ja, das ist was Schönes. Und wenn ich es nicht so mag, zumindest [dann zu sehen], das kann man gut gebrauchen. Man kann da viele Probleme aus dem Alltag oder aus der Wissenschaft mit lösen“ (23:02-2, vgl. 13:29-1). „Manchmal (…) kommen richtig interessierte Fragen, da hat man mal mit einer Klasse richtig viel Spaß“ (13:03-1) und es gibt irgendwo „diese Aha-Erlebnisse“ (56:34-2). Welcher Nutzen dies konkret ist, wird offen gelassen, daher die Deutung auf der Meta-Ebene. Dies wird durch die Worte von Herrn C untermauert, wenn er formuliert, „dass die Schüler das Gefühl haben, macht nicht nur Spaß, sondern es steckt ein Nutzen dahinter“ (00:42-2), dass es eben auch „einige [gibt], die eben wirklich sagen, ach Mensch, ja, das ist eigentlich richtig toll. Richtig schön, so was zu machen. Dann hier die x auf die eine Seite bringen und so zack zack haben wir eben so ein Problem“ (1:36-2). Er selbst möchte dabei den Spaß am Unterricht auch nicht verlieren (vgl. 55:00-2).
Innermathematisch wird das Ziel verfolgt, den Schülerinnen und Schülern die ineinandergreifenden Strukturen der Mathematik aufzuzeigen, „wie da bestimmte Dinge ineinander greifen“ (1:36-2) und auch „Interesse“ zu wecken (ebd.). So wird bei der freiwilligen Behandlung der Ungleichungen darauf verwiesen, dass die „Erfahrung“ gemacht werden kann, „dass diese mathematischen Regeln, die sie kennengelernt haben, Gleichungen und so Äquivalenzumformungen, und die kann man auch darauf anwenden“ (10:40-1). Oder auch, wenn sie verschiedene Sachaufgaben zu linearen Zusammenhängen lösen, dass „die Schüler erkennen, dass in ganz verschiedenen Kontexten (...) eigentlich immer wieder (...) dies lineare (...) dahinter steckt“ (38:58-2). Dies entspricht der Mathematik als „Kunst Wissen zu schaffen (...), dann eben echt so die Entdeckung von Zusammenhängen, die vielleicht vorher nicht so deutlich da waren“ (56:34-2).
Es ist Herrn C wichtig, dass die Schülerinnen und Schüler „die Vielfalt der Mathematik“ (30:44-2) erkennen, „dass es da eben nicht immer nur um’s Ausrechnen geht. Oft, ja doch, aber dass man da auch wirklich dann eben neues Wissen gewinnen kann. Neues Wissen beweisen kann“ (ebd.).

Das Ziel des Mathematikunterrichts wird durch Herrn C auf einer Metaebene formuliert. So sollen die Lernenden den Nutzen der Mathematik in ihrem Alltag erkennen. Ihr Interesse an der Mathematik soll geweckt werden.
Dies gelingt, indem den Lernenden vermittelt wird, dass Mathematik einerseits Spaß machen kann. Andererseits soll sie als Wissenschaft verstanden werden, die neues Wissen generieren kann und zwar durch die Rückführung auf sich allgemeingültige Strukturen in der Mathematik (zum Beispiel lineare Gleichungssysteme).
Darüber hinaus bietet die Mathematik Gelegenheit das eigene Nachdenken und Abstrahieren zu schulen, was bereits als Nutzen für das spätere Leben deklariert worden ist.

6.3.4. Wie gelingt erfolgreiches Lernen?

Herr C teilt die Schülerinnen und Schüler in drei Leistungsgruppen ein: Stark, Schwach und das Mittelfeld. Diese Einteilung[99] erfolgt auf Basis dessen, was diese Schülerinnen und Schüler im Unterricht erreichen können. Charakterisiert, werden die Starken als „Cracks“ (29:49-1), die in der Lage sind „richtig intelligente Fragen“ (31:30-1) zu stellen und die neue Inhalte

[99] Im Gegensatz zu Frau A erwähnt er diese Einteilung zwar, begründet aber seine Unterrichtsentscheidungen nicht explizit auf Basis dieser Unterteilung. Er weist nur darauf hin, dass er sich am Mittelfeld orientiert, was durch die mit den jeweiligen Gruppen verknüpften Leistungserwartungen begründet wird.

von selbst erlernen (vgl. 10:34-2). Die Schwachen lernen die Unterrichtsinhalte auswendig und „bleiben vielleicht immer auf diesem einfachen Niveau, wo sie eben einfach stur dann auswendig lernen“ (31:30-1). Diese Schülerinnen und Schüler brauchen sehr viel Struktur, Schemata und Frontalunterricht (vgl. 10:34-2).

Das Mittelfeld benötigt ebenfalls einen strukturierten Unterricht, erreicht aber durch viel Fleiß und Übung einen Zustand, in dem es die Chance erhält „vielleicht (...) irgendwann ja auch ein Verständnis [zu erlangen], wenn die echt eben wissen, welche Äquivalenzumformungen sie machen müssen, dass sie dann irgendwann weiß nicht, also vielleicht bedingt sich das gegenseitig, das Anwenden und Verstehen“ (31:30-1).

Das Abstraktionsniveau in der Algebra wird nicht als zentrales Problem beim Erlernen der Algebra angesehen (vgl. 50:01-1), vielmehr „mögen (…) die Schüler ja Abstraktionen“ (50:51-1), obwohl der Abstraktionsgrad der Algebra, in dem Sinn, als dass „es nicht konkret“ (15:58-2) ist und die Frage entsteht „was mache ich hier gerade“ (ebd.), in Bezug auf die rein technischen Fähigkeiten, durch Herrn C anerkannt wird. Dies führt aber eher dazu, dass die Algebra von den Schülerinnen und Schülern als „ziemlich trockene Kiste“ (ebd.) angesehen wird. Aber Herr C ist davon überzeugt, „dass einige Schüler doch erkennen, dass es einfach auch schön ist, in dieser Sprache sich ausdrücken zu können. Und dann eben solche Dinge, solche eleganten Lösungen vielleicht auch zu finden“ (0:42-2) und zu erkennen, „dass es wirklich einen unheimlichen Nutzen hat“ (1:36-2, vgl. 37:44-2), dass „das Rechnen viel einfacher [wird]. Es bietet uns die Möglichkeiten statt jetzt ganz viele Probleme zu lösen, die jetzt mit einem Schritt allgemein zu haben“ (00:42-2). Dazu ist es aber nötig, zunächst die Sprache der Terme und Variablen, als „notwendiges Übel“ (ebd.) zu erlernen, „auch wenn man das vielleicht erst mal gar nicht mag diese Umformung“ (1:36-1), im Prinzip „ähnlich wie Vokabeln in den Sprachen“ (ebd.). Doch er betont, „dass es aber nicht nur ist, so (...) ich frage mich jetzt so Vokabeln ab“ (41:20-1), sondern, „dass die Schüler auch sehen, dass es was Sinnvolles“ (ebd.) ist, das macht sie „ein Stück kundiger, fähiger“ (ebd.). Dazu wird beim Aufstellen der Terme schrittweise gelernt, wie alltagssprachliche Formulierungen in die mathematische Sprache übersetzt werden, „wir stellen einen Term auf, was ist denn, wenn ich die Fünffache Menge habe und dann noch acht dazu. Also diese Idee 5x+8“ (38:22-1). Dann ist es für die Schülerinnen und Schüler elementar genau zu arbeiten, immer „ein zweites Mal hin[zu]gucken“ (49:51-1) und „nicht [alles] durcheinander [zu] schmeißen“ (21:14-1), „dass sie da eben sauber differenzieren“ (48:52-1). Es werden eben erst „diese Grundlagen verstanden (…), [bevor] dann wirklich gut weitergemacht“ (3:27-2) werden kann.

Auch das „Erleben“ (30:44-2) der Mathematik und ihrer Möglichkeiten spielt eine entscheidende Rolle, wenn zum Beispiel die Schülerinnen und Schüler „zum ersten Mal (...) erleben“ (ebd.), wie über die Verallgemeinerung eines Falls ein Satz bewiesen werden kann, der dann für jeden Einzelfall gilt (vgl. 30:44-2), wenn sie mit Hilfe von Veranschaulichungen „erkennen (...) ach ja, da kann man es ja sehen, dass es so funktioniert“ (7:51-1) oder wenn sie durch die Algebra „den Aufbau vielleicht sogar die Schönheit der Mathematik. Was dann eben wissenschaftlich gemacht wird. Was eben Leute so über Jahrhunderte bewiesen, erarbeitet (...) entdeckt haben, (...) erleben“ (4:54-1).

Das Lernen der Algebra wird mit einem gewissen Zeitaufwand verbunden und mit der kontinuierlichen Arbeit im Unterricht. Dieser gelingt nämlich nur, „wenn die Frau und der Mann einigermaßen mitarbeiten dabei“ (22:47-1). Dazu gehört auch die Erledigung der Hausaufgaben (18:04-2). Herr C ist davon überzeugt, dass Lernen dauert, „dass es so eine Weile braucht, sich zu setzen bis man so wirklich dieses System, diese Systeme verstanden hat“ (6:26-2).

Ein Beispiel dafür ist die Bearbeitung von Textaufgaben, die über die Modellierung von „Flächenproblem[en]“ (46:50-1) hinausgehen. Diese werden „den Schülern zunächst schwierig erscheinen“ (ebd.), vielleicht auch weil „einige so generell so eine gewisse Scheu vor Textaufgaben haben“ (43:24-2). „Da müssen einige schon ein bisschen schlucken bis [sie] dann so das Gefühl haben, da komm ich ran“ (ebd.). Es ist wichtig, dass die Schülerinnen und Schüler „wirklich reflektiert an Probleme rangehen (...), verschiedene Lösungsstrategien ausprobier[en] [und] nicht gleich auf[geben] [sollten], wenn die erste nicht funktioniert“ (52:09-2), dann können sie auch „sehen, ja stimmt, kann man hinkriegen“ (20:27-2). Zudem erkennen sie während des Arbeitens an Modellierungsaufgaben den Nutzen der Algebra, „war auch ganz wichtig für die Schüler zu sehen. Da kann man eben modellieren (...). Die Mathematik kann die Zukunft auch nicht voraussagen“ (45:14-2), dennoch sind Prognosen möglich (vgl. ebd.). Zudem tragen Modellierungen „zur Auflockerung [bei], dass auch wirklich wieder eine andere Perspektive“ (ebd.) eingenommen werden kann, und die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass „Mathematik eine Rolle [für sie] spielen“ (ebd.) kann.

Die Dauer und die Kontinuität sind aber entscheidend für den Lernprozess, denn „vielleicht bringt das dann irgendwann ja auch ein Verständnis, wenn die echt eben wissen, welche Äquivalenzumformungen sie machen müssen, dass sie dann irgendwann weiß nicht, also vielleicht bedingt sich das gegenseitig, das Anwenden und Verstehen“ (31:30-1). Bei der Charakterisierung der behandelten Inhalte verweist Herr C dann auch darauf: „Also ganz wichtig, was man beliebig wiederholen kann“ (0:45-1). „[M]an muss immer regelmäßig wieder dran gehen“ (41:20-1). Die Schülerinnen und Schüler aus dem Mittelfeld, die „fleißig“ (31:30-1) sind und „die eben richtig viel üben“ (ebd.), haben dann „irgendwann“ (ebd.) auch die „Chance“ (ebd.) die Inhalte zu verinnerlichen. „Mit der Übung sind natürlich auch die Hausaufgaben“ (17:22-2) gemeint.

Grundsätzlich gelingt das Lernen in Abhängigkeit dessen, welche Voraussetzungen die Schülerinnen und Schüler mitbringen. Herr C spricht von den Starken, den Schwächeren und dem Mittelfeld. Den stärkeren Schülerinnen und Schüler wird zum Beispiel die Eigenschaft der Kreativität zugestanden, insofern als, dass sie „nochmal anders rangehen und gucken, kann man es auch anders machen“ (56:14-1). „Gute Leute können sich das auch selbst echt mit so, keine Ahnung, Lernstraßen (...) beibringen. Aber das Gefühl ist dann doch so, (...) dass dann die Schwächeren leicht auf der Strecke bleiben [wenn nicht frontal unterrichtet wird, Anm. JM]. Oder auch so das Mittelfeld. Das (...) [ist] immer ganz wichtig. Die muss ich erreichen. Also die Leute, die wirklich eine Chance haben, das hin zu kriegen“ (10:34-2). Hier wird die Unterteilung in drei Gruppen deutlich, die „Guten“, denen „kannst du alles Mögliche vorsetzen, die kriegen’s hin“ (5:45-1), das Mittelfeld, dass die Chance zur Entwicklung hat und die Schwächeren, die „erst mal ganz stur diese Sachen auswendig lernen, wie sie da vorgehen müssen. Ist ja auch legitim“ (31:30-1), aber „einige bleiben vielleicht immer auf diesem einfachen Niveau, wo sie eben einfach stur dann auswendig lernen“ (ebd.). Herr C selbst hat auch zuerst einmal Strategien gelernt, „Erst mal stur das machen, wie das läuft. Und das Verständnis kommt dann später irgendwo“ (31:30-1).

Insgesamt spricht Herr C häufig davon, dass die Schülerinnen und Schüler vieles „sehen“ und „erkennen“ können, als Mittel des Lernens: „Manchmal (...) können die auch einfache Sachen dann selbst beweisen. Wenn die eben so das Schema mal gesehen haben“ (2:24-1) oder „dass die dann eben echt sehen, ja stimmt, statt ewig den Rechner dann zu füttern“ (3:04-1) und dass sie „erkennen (...) da kann man es ja sehen, dass es so funktioniert“ (7:51-1)[100]. Auf diese Weise können die Schülerinnen und Schüler dadurch „später irgendwo“ verstehen, indem sie kontinuierlich unterrichtet werden, „vielleicht bringt das dann irgendwann ja auch ein Verständnis, wenn die echt eben wissen, welche Äquivalenzumformungen sie machen müssen“ (31:30-1), dabei die gelernten Inhalte anwenden, viel üben und dann über das Zusammenspiel von „Anwenden und (...) Verstehen“ (ebd.) die Inhalte verinnerlichen. Wie dies konkret geschieht, wird nicht gesagt. Es wird eher akzeptiert, dass einige es schaffen und einige nicht. Der Einfluss seiner Person wird dabei nicht thematisiert.

[100] Weitere Beispiele unter: 14:16-1, 16:26-1, 7:51-1, 21:59-1, 41:20-1, 25:48-1.

Erfolgreiches Lernen gelingt zudem dann, wenn „für die Schüler immer irgendwas (…) passiert, (…) wo sie das Gefühl haben (…) hier lerne ich was, hier kann ich meine Fähigkeiten ausbauen“ (21:50-2), hier habe ich „Handlungsmöglichkeiten“ (23:02-2) und habe Aufgaben, die ich „bewältigen“ (ebd.) kann.

Herr C unterteilt die Schülerinnen und Schüler in drei Gruppen: Stark, Mittelfeld und Schwach. Mit jeder Gruppe sind unterschiedliche Leistungserwartungen verknüpft. Das Mittelfeld hat Entwicklungschancen hin zur Gruppe der Starken. Die Lernenden sollen als übergeordnetes Ziel den Sinn der Mathematik erkennen und den Nutzen der Behandlung mit ihr. Geschieht dies, können sie Freude an der Arbeit mit der Mathematik und den mit ihr verknüpften Möglichkeiten erleben.
Voraussetzung dafür ist, dass sie ein solides Grundlagenwissen im Umgang mit der mathematischen Sprache erwerben. Sonst ist es ihnen nicht möglich Alltagsbezüge in die mathematische Sprache zu übersetzen (Modellierungen zum Aufzeigen des Nutzens der Mathematik im Alltag).
Grundsätzlich ist Herr C davon überzeugt, dass Lernen Zeit braucht. Erfolgreich kann demnach nur gelernt werden, wenn die Schülerinnen und Schüler ihre Hausaufgaben machen, den Willen zeigen durchzuhalten und nicht aufgeben. Über die kontinuierliche Beschäftigung mit der Mathematik und den Umgang mit ihr wird irgendwann ein Verständnis erlangt. Der Unterricht muss den Lernenden immer die Gelegenheit geben, sich zu betätigen, und selbstwirksam zu werden.
Das Lernverhalten und die Möglichkeiten der Lernenden werden je nach Gruppe der Lernenden unterschieden. Die stärkeren Schülerinnen und Schüler bringen sich vieles selbst bei und können die Dinge von selbst. Dem Mittelfeld wird die Chance gegeben durch die kontinuierliche Übung ein Verständnis der behandelten Inhalte zu erlangen. An dieser Gruppe richtet Herr C seinen Unterricht aus. Die schwächeren Lernenden sollen unterstützende Hilfen bekommen, wie Regeln und Algorithmen, sodass sie den Unterricht bestehen können und ihre Angst vor der Mathematik reduzieren. Sie bleiben auf einem schematischen Verständnis der Mathematik.
Herr C versteht den Lernprozess als etwas nicht direkt Greifbares. Vielmehr geschieht der Vorgang, indem ihm Zeit und Übung zur Verfügung gestellt werden. Je nach Einteilung der Schülerschaft gelingt dies den Lernenden besser oder schlechter. Lernen wird durch das Wechselspiel von Anwendung und Verstehen charakterisiert.

6.3.5. Wie gelingt guter (Algebra)-Unterricht?

Algebra kann den Schülerinnen und Schülern vermittelt werden, indem sie an die Besonderheit der Algebra als „so eine Geheimschrift [herangeführt werden], wo man dann die Regeln anwendet“ (44:56-1). Diese Regeln müssen beherrscht werden. Dazu wird, wenn „nach den ersten beiden Wochen, dann immer noch so was passiert [es wird auf einen Fehler im Umformen verwiesen, Anm. JM]. Dann merke ich, ok Leute, also (…) noch mal richtig deutlich. Entweder so finde (…) Fehlersachen an der Tafel (…) und so ähnliches“ (18:55-2).
Zudem ist es für Herrn C elementar „erst mal deutlich zu machen, dass es wirklich einen unheimlichen Nutzen hat“ - gemeint ist damit die Anwendung der Algebra in der Bearbeitung von Sachkontexten, nachdem die Termumformungen erlernt worden sind, „ähnlich wie Vokabeln in den Sprachen“ (1:36-2). Dieser Vorteil bezieht sich darauf, Sachverhalte verkürzt und verallgemeinert darstellen zu können: „Ich versichere euch, hinterher der Term ist viel kürzer als der Text (...). Ist mathematisch dann wirklich so drei, vier Zahlen mit Rechenzeichen“ (43:24-2). Und „in wirtschaftlichen Zusammenhängen (...) [oder] in der Wissenschaft

oder so, da hat man also immer mit irgendwelchen Prozessen zu tun, die man beschreiben möchte. Und da sind die Terme einfach unschlagbar“ (44:56-1).
Um diesen Nutzen zu erfahren, wird den Schülerinnen und Schülern die Gelegenheit geboten, eigene Heuristiken anzuwenden. „[D]ie Schüler probieren ja wenn, ja auch schlau, die probieren ja vielleicht schon (...). So natürlich sage ich ihnen auch, so zur Not, probieren geht natürlich immer. Aber eventuell viel Spaß. Eventuell dauert das sehr lange“ (1:36-2). Es geht darum, den Schülerinnen und Schülern eine Situation aufzuzeigen, in der sie selbst nicht weiter kommen, „dass die Schüler dann selbst nicht zufrieden sind. (...) wir wollen doch richtig was raushaben und richtig was rechnen (...). Und dann ist eben [die Frage], wie helfen wir uns weiter? Wir brauchen eine Variable...“ (28:06-2). So entsteht dann aus den Schülerinnen und Schülern heraus die Notwendigkeit Variablen zu verwenden.
Zum Unterricht in der Algebra gehört die Vermittlung von Schemata, weil in der „Algebra (...) sehr viel Struktur drin[steckt]. Natürlich bildet sich diese Struktur (...) in den Schemata ab“ (56:42-1) und „wenn’s ein Rezept gibt, wo ich das Gefühl habe, damit kommen sie sehr häufig durch in den meisten Fällen, dann gebe ich ihnen das ganz gerne“ (54:17-1). Diese dienen einerseits der „Vereinfachung des Lernens“ (56:42-1), denn es „sind eben gewissen Hilfen, so gewisse Krücken, mit denen wir besser klar kommen“ (ebd.). Andererseits trägt es dazu bei, dass die Schülerinnen und Schüler „Erfolgserlebnis[se]“ (54:17-1) erlangen können, „was jeder auch mal braucht“ (ebd.). „Es gibt Lerntypen von Schülern, die einfach sehr gern so ein Rezept an der Hand haben. Wo sie wirklich erst mal die Standardaufgaben lösen können“ (ebd.), eben „erst mal so was zum Festhalten“ (ebd.). Dies ist gerade in der Algebra wichtig, weil die Schülerinnen und Schüler gerade zu „Beginn ein bisschen Bammel [vor] diesem Buchstabenrechnen“ (0:10-1) haben. Die Angst vor diesem „Buchstabenrechnen“ (0:10-1) soll dadurch gemildert werden, dass gesagt wird, das „x kommt da erst mal ganz harmlos als eben (…) x-beliebige Zahl mit der wir rechnen“ (33:55-1, vgl. 34:56-1) können.
Diese sind jedoch mit Vorsicht zu behandeln, weil „wir da doch oft auch mal wirklich auf Sachen stoßen, die wir eben nicht mit Schema f machen können. Wo wir zusammen dann noch mal drauf gucken“ (26:13-2). „Es ist eben erst mal nur eine Krücke und...Manchmal den Berg rauf hilft die Krücke dann nicht“ (57:49-1). Es soll also die Aufmerksamkeit gegenüber den Fällen geschult werden, „wo es dann anders geht“ (54:17-1) und „welche Regel [hier] an[ge]wendet“ (48:52-1) werden darf, weil „ätsch, am Ende bleibt x=x über, was ist denn jetzt und so“ (57:49-1, vgl. 30:01-2).
Dies bereitet die Schülerinnen und Schüler „sogar auf nicht-mathematische Studiengänge wie Jura oder Psychologie oder so vor“ (ebd.). Die Anwendung der Schemata ist für Herrn C solange tragbar, wie er das „Gefühl [hat], dass sie [die Kreativität, Anm. JM] eben trotzdem bei den Leuten, die gerne auch ein bisschen kreativ sind (...) nicht abgetötet wird“ (56:14-1). Der Vorteil der Schemata ist aber, dass die Schülerinnen und Schüler, die nur diese auswendig lernen oder fleißig üben, „vielleicht vom Verständnis (…) ja nicht so riesig vorne sind. Aber die haben dann eben wirklich verinnerlicht, wie man umgeht mit Variablen. Und vielleicht bringt das dann irgendwann ja auch ein Verständnis“ (31:30-1). In diesem Zusammenhang bieten Schemata die Basis für alle, um bei kontinuierlicher Anwendung zu einem Verständnis zu gelangen.
Ein für die Algebra typisches Beispiel ist das Zusammenfassen von Termen und Gleichungen, weil „[w]enn ich jetzt einfach irgendwie zusammenfasse, mache ich vielleicht was, was ich gar nicht machen darf. (...) Also müssen wir wirklich dann Schritt für Schritt, das ist dann (...) dieses Waagemodell (...) so die Sachen Schritt für Schritt wegräumen, sage ich immer. Das wird dann eben so gemeinsam eingeübt“ (52:45-1), wenn die Schülerinnen und Schüler lernen können „x+x+x+x, ist schön, dass wir da eben 4x schreiben können“ (15:41-1). Hierin zeigen sich sowohl die schematische Arbeit, als auch die Bedeutung der Übung im Unterricht von Herrn C. Das Wort „gemeinsam“ lässt Ansätze eines eher instruktiven Unterrichtsstil vermuten.

Der Unterricht soll in Bezug auf die verwendeten Darstellungsformen vielfältig gestaltet werden. Darüber ist sich Herr C bewusst: „Was man wahrscheinlich gar nicht oft genug machen kann, sage ich mir eben auch, sind diese Veranschaulichungen. Dass man also ein geometrisches Bild hat (...). Das ist glaube ich doch für viele eine ganz gute Hilfe eben. So wie zu erkennen, dass man das Gefühl hat, ach ja, da kann man es ja sehen, dass es so funktioniert" (7:51-1). Dies betrifft ebenfalls die Verwendung verschiedener Darstellungsformen, zum Beispiel „Tabellen (…) erst mal so Wert[e] einsetzen (…). Da verstehen viele also gerade bei diesen (…) was linear eigentlich bedeutet" (36:24-2). Diese Anschaulichkeit betrifft ebenfalls die inhaltliche Ausgestaltung des Unterrichts.
Zu Gunsten dieser Anschaulichkeit und eines schülernahen Zugangs wird auf die formale Korrektheit an einzelnen Stellen verzichtet, wobei diese grundsätzlich einen hohen Stellenwert einnimmt. So wird begründet, dass das Buch sehr geschätzt wird, „weil die eben auch von dem Begriffen, klar es ist alles auf die Schule runtergebrochen, aber eben doch so ein bisschen zeigen, die Fachsprache soll stimmen" (5:45-1). Um aber zu vermeiden, dass die Schülerinnen und Schüler beim Zusammenfassen der Terme Fehler machen, wird gesagt: „[D]as ist mathematisch nicht ganz sauber Leute, aber tut erst mal so als ob da jetzt eine Einheit stehen würde. Meter, das könnt ihr machen. Das (...) erklärt, warum 2x+2y nicht zusammengeht. Weil Meter und Kilogramm, da können wir nichts mit machen" (50:51-1). So, jetzt nur Form, um der Form willen, [das] muss ja nicht sein" (0:42-2). Dies untermauert diese Deutung.
Andererseits betrifft es die gewählten Aufgaben, denn „klar löst du manchmal einfach wirklich Gleichungen eben ohne jetzt einen großen Hintersinn zu haben. Aber das man doch immer wieder erkennt, oh guck mal, ich kann jetzt hier, keine Ahnung, kann jetzt hier irgendwelche Handytarife (...) ausrechnen" (37:44-2), „dass man eben wirklich mal mit so richtig sexy Anwendungen interessant auch für Schüler wird" (38:58-2) und Fragen provoziert, wie „Was kommt denn jetzt wirklich raus? Dann wollen die's richtig wissen, wenn man Glück hat" (ebd.). Das Interesse der Schülerinnen und Schüler spielt demnach eine entscheidende Rolle für den Unterricht und ist durch „Anwendung" (39:55-2) anzustreben, denn sonst „wäre [es] viel zu trocken" (ebd.). Aber es „ist auch gar nicht immer so leicht sich gute Anwendungen zu überlegen, die für Schüler auch plausibel sind" (4:39-2).
Gleichzeitig darf das Abstrahieren nicht zu kurz kommen, wobei man „sieht, oh guck mal hier gibt es Strukturen, die in der Anwendung erst mal nicht vorkommen" (ebd.). Dies betrifft die wissenschaftlichen Strukturen in der Algebra, die es aber „in der Schule natürlich sehr eingeschränkt" (0:45-1) gibt, da ist es „eben wirklich hauptsächlich Rechnen mit Variablen" (ebd.) und „natürlich hauptsächlich Termumformung" (0:10-1). Die Ambivalenz, die Herr C zwischen dem Bedürfnis nach Anwendung und der Betonung der mathematischen Korrektheit sieht, wird auch an der Stelle deutlich: „Klar für die Anwendung ist nur die positive sinnvoll [ein Gleichungssystem bringt zwei Lösungen, eine Positive und eine Negative, Anm. JM], aber mathematisch tatsächlich ist diese Minus drei ist auch eine absolut gültige Lösung. (...) Dass man da auch vielleicht so ein bisschen thematisieren kann, so auf der einen Seite die Anwendungen und dann die reine Mathematik" (38:58-2).
Das Buch bietet aber „eine große Breite von Aufgabentypen. Also eigentlich findet man immer irgendwas (...). Sei es mal so ein bisschen Knobeln, mal andersrum ein bisschen divergent denken. Oder mal richtig schöne Anwendung" (4:39-2). Zudem ist es „vom Aufbau (…) sehr strukturiert. Das kommt, denke ich auch, schwächeren Schülern entgegen. (…) gerade so die Schwächeren sollen auch vom Buch ruhig mal so ein bisschen an die Hand genommen werden" (5:45-1). Guter Unterricht wird grundsätzlich mit der starken Einbindung des Lehrbuchs verknüpft. Dieses bietet neben einem „bestimmten Übungspool" (20:29-1) eine gute Orientierung. „Und wenn man das dann so einigermaßen gemacht hat, hat man glaube ich auch so das Sinnvolle mit den Leuten erarbeitet" (ebd.). Dabei wird erfolgreiches Lehren mit der Abarbeitung der Buchkapitel verknüpft. „Es ist vielleicht nicht die optimale Lösung [weil

zu wenige Übungen vorhanden sind, vgl. 22:47-1, Anm. JM], aber so wie es da jetzt aufgebaut ist, kann man zumindest in Klasse 7, 8 das vernünftig an die Frau und den Mann bringen“ (22:47-1).
Nicht optimal ist, wenn die Schülerinnen und Schüler zum Beispiel den Begriff „Term“ noch nicht aus den unteren Jahren kennen, dann wird im Buch der Funktionsterm mit der Funktionsgleichung und der Funktionsvorschrift eingeführt, da müssen sie „ziemlich kämpfen“ (42:47-1). Herr C legt Wert darauf, dass die Schülerinnen und Schüler nicht das Gefühl von Überforderung haben, z.B. wenn Variablen zunächst als „harmlose“ (33:55-1) Zahlen, Schema als „Krücken“ (56:42-1) vermittelt werden und wenn vermieden werden soll, dass wie im Buch, „dann gleich drei Formeln auf einmal“ (21:14-1) auftauchen, sodass „die das nicht durcheinander schmeißen“ (ebd.).
Grundsätzlich berücksichtigt guter Unterricht aus der Sicht von Herrn C die unterschiedlichen Voraussetzungen der Schülerinnen und Schüler. So geht er häufig auf die Notwendigkeit der Differenzierung in den Aufgabenstellungen ein, weil man „ja gern dieses divergente Denken bei den Schülern lassen“ (26:43-1) will. Dies zeigt sich, wenn er sagt die „handfesten Regeln. Die müssen ja wirklich sitzen. Da übt man wahrscheinlich dann eben auch ein bisschen mehr dran, sucht sich dann vielleicht ein paar nette Sachen für die Starken raus (...). Die, die vielleicht schon am ersten Tag kapiert haben“ (20:11-1).
Allgemein sieht das Übungskonzept von Herrn C so aus: „Die fangen oben mit ganz simplen Trainingsaufgaben an“ (14:32-2). Da „sollen sie erst mal möglich[st] die Erfolgserlebnisse haben. Dass sie mit dem Schema standardmäßig ran können“ (15:58-2) und unten kommen echt so ein paar kniffligere. (…) Ich sage immer so Pflicht eben sind diese beiden Aufgaben. Und dann Wahl, wer will kann eben noch mehr Übungen machen und wer, ja, wer eben nicht kann hat unten irgendein kniffligeres Problem (…). Aber so gesehen, aber so klar ein Mindestmaß an Übungen muss eben da sein. (…) Das kann auch nicht wegfallen“ (14:32-2). Die Übung wird insgesamt als sehr wichtig erachtet, weil „das Mittelfeld oder die Schwächeren (…) einfach eine gewisse Routine brauchen“ (14:03-2).
Die Übungsaufgaben stammen entsprechend vornehmlich aus dem Lehrbuch. Manchmal werden aber auch Arbeitsblätter der Homepage *lehreronline* entnommen (vgl. 4:39-2). Und „ansonsten, von den Vertiefungen, mache ich das eigentlich wirklich sehr ähnlich wie im Buch“ (21:14-1). Es soll eher häufiger geübt werden, als einmal zu lange (vgl. 20:57-2). Die Abwechslung im Übungsbetrieb ist zum Beispiel dadurch gegeben, dass die Schülerinnen und Schüler sich vereinzelt selbst überprüfen können (vgl. 20:57-2).
Den stärkeren Schülerinnen und Schüler wird die Gelegenheit eingeräumt „was Kniffliges (...) ja, ja eben so Knobeln“ (23:14-1) zu bearbeiten, während allgemein der Wunsch geäußert wird, „einfach mehr (...) Übung (...) für die schwächeren Schüler, also mehr Zeit“ für diese zu haben (ebd.). Auf die Art der Aufgaben wird nicht näher eingegangen. Herr C betont, das „mach ich auch längst nicht für alle, aber so, Mensch, ok. Wer Lust hat, kann hier mal versuchen. Das, dass sie eben sehen, natürlich es gibt auch wirklich Probleme, wo ich nicht mit Schema f ran kann. Aber dass sie eben doch wissen, ok ein Teil in diesem Baustein ist dieses Schema f (...). Da kann ich die Standards mit bewältigen“ (54:17-1), das ist dann für die „Cracks“ (29:49-1) geeignet. Die Erklärung dafür liefern die unterschiedlichen Voraussetzungen der Schülerinnen und Schüler: „Bei manchen ist es eben echt so, dass die dann eben, bis zur Arbeit vielleicht sogar einige auch: Ach ja, stimmt, ganz klar, so und so läuft das. Und einige bleiben vielleicht immer auf diesem einfachen Niveau, wo sie eben einfach stur dann auswendig lernen. So und so muss ich vorgehen“ (ebd., vgl. 31:30-1). Zudem sind „die Klassenarbeiten (…) dann (…) so gestrickt (…), dass eben eine vier erreicht werden kann durch Reproduktion. Die Chance soll da sein“ (31:30-1). Gerade für die schwächeren Schülerinnen und Schüler ist es unerlässlich, eine gewisse Struktur zu vermitteln, die einerseits durch die Orientierung am Lehrbuch gegeben ist und andererseits durch den Primat des Frontalunterrichts. So wird bei der Einführung neuen Stoffes erklärt, „wie geht [das] denn hier Schritt für

Schritt. Dann haben sie hinterher so auf einem Blatt echt mal eine Musterlösung. Das berühmte Schema an das sie sich, wenn sie wollen erst mal halten können. (...) ich habe damit ganz gute Erfahrungen gemacht. Dass man da eben erst mal auch die mit ins Boot kriegt, die jetzt nicht so brillant sind“ (10:34-2). Herr C selbst reflektiert: „Bei kniffeligen Einführungen „mache ich wahrscheinlich aus didaktischer Sicht eher zu viel frontal“ (10:34-2), aber wenn er das Gefühl hat „hier brauchen wir alle Aufmerksamkeit. Hier will ich’s fokussiert haben“ (13:13-2), dann wird frontal unterrichtet. Die Gefahr „alles nur noch frontal“ (ebd.) zu machen, ist ihm bereits im Referendariat bewusst geworden. Herr C hält es da aber mit seinem „Ausbilder (…), [der] hat gesagt, wer immer offen ist kann nicht ganz dicht sein“ (10:34-2). Er bemüht sich aber um offeneren Unterricht in den „Arbeitsphasen (…). Ich mache dann Mitmach-Blätter zum gemeinsamen Ausfüllen. Ich vorne mit der Folie und die Schüler dann gemeinsam“ (ebd.). Die Lehrkraftzentrierung im Unterricht wird dabei deutlich. Er sieht das Problem, die schwächeren Schülerinnen und Schüler mit zu offenem Unterricht zu verlieren (vgl. ebd.).
In den Übungsphasen ist die Struktur dann etwas gelockert: „in Arbeitsphasen können sie gern in Gruppen, bunt gemischt sein, können sie dann eben sich nach verschiedenen Niveaus zuteilen, wie sie möchten. (…) Aber irgendwie so, dass man ihnen da viel Wahlfreiheit bietet“ (12:21-2). Hier wird aber darauf verwiesen, dass es „mir (...) wichtig ist, dass [wenn] alle echt dabei [sein sollen]. Das läuft dann wahrscheinlich klassisch gesehen eher frontal (…) also auch so (…) von der Tafel was abschreiben“ (12:21-2).
Dieser Unterrichtsstil dient vor allem seinem Ziel, dass die Schülerinnen und Schüler „immer das Gefühl haben, (…) sie haben irgendwelche Handlungsmöglichkeiten. Also sie haben Aufgaben, die sie bewältigen können. Oder es gibt Phasen, wo sie wirklich nochmal nachfragen können. Sie können sich zusammensetzen und noch mal mit, (…) paar Schülern zu Experten gemacht“ (23:02-2).
Der Rechnereinsatz wird als neutral eingestuft, die Schülerinnen und Schüler nutzen ihn, aber es sollte dennoch das Ziel sein, dass die Schülerinnen und Schüler „statt jetzt ewig den Rechner dann zu füttern mit den Dingen, wenn ich einmal das x ausklammer, weiß ich schon die erste Nullstelle und der Rest ist dann auch klar“ (3:04-1). Der an der Schule übliche GTR, kann „ja eben die richtige Algebra nicht“ (28:31-1), die Algebra „ist da sicherlich deutlich weniger betroffen [vom Rechnereinsatz, Anm. JM]“ (ebd.) im Vergleich zu den anderen Gebieten der Schulmathematik (ebd.). Wenn der Rechner zum Einsatz kommt, müssen die Schülerinnen und Schüler aber „erst mal verstehen (…) was dahinter steckt“ (25:48-1) und „in der Klassenarbeit will ich eben den Lösungsweg sehen“ (23:14-1).
Grundsätzlich möchte Herr C gemäß der Idee einer didaktischen Spirale vorgehen, die er wie folgt beschreibt: „[E]ben [mit] ein bisschen Abstand, das Gleiche wieder sieht und dann eben von einer höheren Warte aus“ (12:43-1). „Ich glaube schon, dass die da auch das Gefühl kriegen, stimmt hier baut sich was nach und nach auf, was eben in sich stimmig ist“ (3:27-2).
Zwei Probleme beim Erlernen der Algebra sind einerseits falsch eingeprägte Fehlvorstellungen, „wenn echt jemand immer unbedingt 2x+y zu 2xy zusammenfasst, das wird ganz schwierig das eben wieder abzugewöhnen“ (47:17-1). Hier wird versucht, eine offene Fehlerkultur einzurichten. Da „mache ich auch wirklich immer auch so (…) Fehler (…) [und] jemand, der den entdeckt, wenn’s an der Tafel oder so war, kriegt er ein Ü-Ei hinterher. Das lockt dann auch mal so (…) und das führt vielleicht dazu, dass die gut hingucken. Und dann hofft man eben solche Fehler zu vermeiden“ (47:14-1-47:56-1). Zum anderen ist der Einfluss des Elternhauses zu nennen. Dort bekommen sie vermittelt, dass Algebra „ganz wichtig“ (17:48-1) ist und gleichzeitig die Angst „Oh Gott Algebra, mit Buchstaben rechnen“ (44:56-1). Dagegen wird versucht „ganz unbedarft, ganz neutral ran[zu]gehen“ (ebd., vgl. 19:22-1).

Algebra wird als Sprache verstanden. Dabei gilt, dass die Regeln dieser Sprache und ihre Vokabeln erlernt werden müssen.
Der Gedanke diese als „Geheimschrift“ zu erlernen, wird den Lernenden als Lernanlass angeboten. Weiterhin wird ihnen der Nutzen der Algebra durch ihre verkürzende Darstellungsform, aber auch durch die Möglichkeit inner- und außermathematische Sachverhalte zu beschreiben, verdeutlicht.
Herr C verfolgt das Ziel, dass die Lernenden selbst den Sinn darin erkennen, sich mit der Algebra zu beschäftigen. Zu diesem Zweck setzt er anwendungsorientierte Aufgaben im Unterricht ein, um das Interesse der Schülerinnen und Schüler zu wecken. Herr C möchte den Lernenden zudem die rein mathematische, wissenschaftliche Seite der Algebra in innermathematischen Argumentationen zeigen, weiß aber, dass diese im Schulkontext nur rudimentär behandelt wird. Insofern beschränkt er sich auf das „Rechnen“ mit Variablen in Anwendungskontexten.
Guter Algebraunterricht bietet den Lernenden verschiedene Zugänge und Darstellungsformen an und ist binnendifferenziert strukturiert, um jedem Lernenden die Gelegenheit zu bieten im Rahmen seiner Möglichkeiten zu partizipieren.
Seinen Lehrstil beschreibt Herr C als eher lehrkraftzentriert. Er bündelt die Aufmerksamkeit auf sich bei der Einführung neuer Inhalte und auch wenn die Arbeitsphasen der Lernenden offener gestaltet sind, insofern, als dass sie selbst knobeln und sich ausprobieren können, werden diese angeleitet durch ihn verglichen und strukturiert.
Er unterscheidet in seinem Unterricht die verschiedenen durch ihn eingeteilten Schülergruppen. Dabei möchte er den Starken Gelegenheit zum Knobeln geben und dem Mittelfeld sowie den schwächeren Lernenden Übungszeit und Struktur. Er ist der Auffassung, dass ein zu offener Lehrstil die schwächeren Lernenden überfordern würde. Unter den Strukturaspekt und zur Vermeidung von Überforderung fällt die Vermittlung von Schemata. Diese ist grundsätzlich positiv, als Stütze und Möglichkeit Erfolge zu erreichen, konnotiert. Des Weiteren tragen sie, zum Beispiel beim regelhaften Umgang mit Termen und Variablen, wenn auch nicht zum Verständnis, dann doch zu einem geübteren Umgang mit diesen bei. Dies wiederum bildet den Grundstein für einen möglichen weiteren Verständnisprozess. Herr C betont die Grenzen der Schemata beim Transfer auf verschiedene Aufgaben. Diesbezüglich möchte er die Aufmerksamkeit der Lernenden bei der Analyse von Situationen schulen. Diese hilft ihnen auch in anderen Situationen des Lebens (Allgemeinbildungsaspekt).
Das Lehrbuch dient als inhaltliche Orientierung des Unterrichts und legt fest, wann das Thema Algebra inhaltlich abgeschlossen ist. Es dient den schwächeren Lernenden als Orientierung und Strukturrahmen. Für einen Umgang mit dem Buch müssen die durch das Buch vorausgesetzten Begriffe erlernt sein. Dies stellt ihn vor Herausforderungen. Um die Lernenden damit nicht zu überfordern wird entsprechend langsamer vorgegangen. Die Fachbegriffe sollten die Lernenden zumindest einmal gehört haben, wenn sie im Buch erwähnt sind. Auf einen Formalismus, des Formalismus wegen, wird aber verzichtet (Statt der Variablen x und y werden bekannte Einheiten verwendet kg und km um zu verdeutlichen, dass sie nicht zusammengefasst werden können).
Schließlich pflegt er eine offene Fehlerkultur in seinem Unterricht. Das heißt, dass Fehler als Lernanlass thematisiert werden.

6.3.6. Das Variablenverständnis von Herrn C

Die Äußerungen von Herrn C zu den Beispielaufgaben Malles (1993) lassen die folgenden Schlussfolgerungen zu:

- In Aufgabe 1 steht das x für eine beliebige Zahl, weil „jeder hat eben seine gedachte Zahl, das x steht für genau diese“ (39:40-1) – Die Variable wird als Unbekannte, unter dem Gegenstandsaspekt erkannt: „[A]uch ohne die Zahl dazu zu kennen, kann ich auch die Rechenschritte machen“ (37:27-1) – In diesem Satz wird die Bedeutung der Variablen als Unbestimmter deutlich. Die Durchführung von Rechenschritte ohne die Bedeutung der Variablen zu kennen, weist auf den Kalkülaspekt hin.

- „[D]as Zweite (…). Da steht x eben für eine ganze Reihe von Zahlen (…). [Es] kann auch alles Mögliche eingesetzt werden. Aber die Lösung ist dann eben das gewünschte x“ (39:40-1) – Herr C identifiziert eindeutig den Einsetzungsaspekt.
- „Im dritten (…) da steht x dann für die gesuchte Lösung der Gleichung (…) durch die Äquivalenzumformung ist es dann eben die ganz eindeutige Lösung“ (37:27-1) - Der Kalkülaspekt wird erkannt.

Später bei „den Funktionen (….) steht das x ja wirklich für die gesamte Zahlengerade“ (36:34-1). Hierin erkennt Herr C die Bedeutung der Variablen als Veränderliche.
Dies weist insgesamt auf ein sehr differenziertes Variablenverständnis von Herrn C hin.

6.3.7. Das Bild der Mathematik - Herr C

In der Auswertung des Interviews zeigt sich, dass der Schema-Aspekt (28) deutlich am häufigsten codiert worden ist. Der Anwendungs-Aspekt (20) wurde weniger, aber insgesamt immer noch häufig codiert. Deutlich weniger Bedeutung haben der Formalismus (4)- und der Prozess-Aspekt (1). Herrn C wird der zweite Rang in Bezug auf den Schema-Aspekt zugeordnet, was eher einer Zustimmung zu diesem Aspekt entspricht. In Bezug auf den Code Anwendung liegt Herr C auf dem dritten Rang, was ebenfalls eher zustimmend gewertet wird. Er befindet sich bezüglich des Formalismus-Aspekts im Mittelfeld und erhält dort Rang 5,5.
Diese Deutung findet sich in den subjektiven Theorien wieder, indem für Herrn C die schematischen Aspekte der Mathematik Voraussetzung dafür sind die Anwendungsorientierung sinnvoll zum Tragen kommen zu lassen.
Im Fragebogen ist die Skala Anwendung (19) am stärksten ausgeprägt. Die Skalen Prozess (17) und Formalismus (16) sind etwas weniger stark ausgeprägt. Der Schema-Aspekt (6) ist am wenigsten stark ausgeprägt.
Die zugehörige Abbildung sieht wie folgt aus:

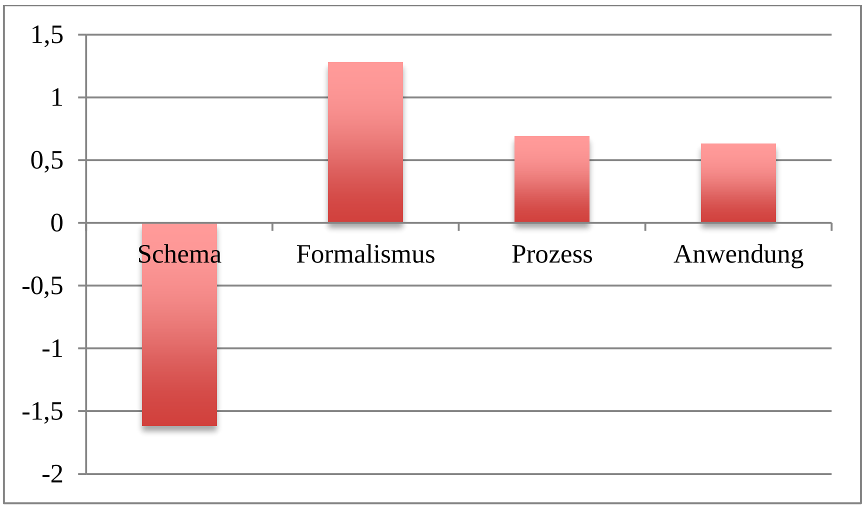


Abbildung 13: Das Bild der Mathematik - Herr C

Übereinstimmungen sind in Bezug auf die Bereiche Prozess und Anwendung zu finden. Die Diskrepanz zwischen der Fragebogen-Skala und dem Rangplatz Schema ist sehr groß. Diese kann ansatzweise dadurch begründet werden, dass Herr C im Interview die Wichtigkeit der Schemata als Grundlage allen mathematischen Arbeitens sieht, sie aber nicht als Selbstzweck

begreift. Dies impliziert die häufige Erwähnung dieser in Verbindung mit der Thematisierung der unterrichtlichen Inhalte und Ziele. Im Fragebogen lehnt er den Schema-Aspekt stark ab. Diese extreme Abweichung ist endgültig nicht zu klären.
Der Skala Formalismus wird im Fragebogen stark zugestimmt. Auch hier ist eine Abweichung zum Interview gegeben, die auf der vorhandenen Datenlage nicht erklärbar ist.
Auffällig ist, dass die Angaben von Herrn B zu Schema und Formalismus weit auseinandergehen, was unüblich in Hinsicht auf die allgemeinen Ergebnisse ist, da diese beiden Aspekte eine Korrelation zeigen (Grigutsch et al., 1998, p. 31).

6.3.8. Ziel-Mittel-Argumentationen - Herr C

Tabelle 25: Inhalte des Algebra-Curriculums, Herr C

die technische, regelhafte Seite, die auch für die weitere Mathematik benötigt wird	↔	Lösung linearer Gleichungssysteme	Beweisen wichtiger Sätze	↔	Hintergrund und Zusammenhänge der Mathematik erfahren, Verallgemeinerungen entdecken
		↑	↑		
		Gleichungen schrittweise lösen		↔	Verfahren wird algorithmisch vermittelt
		↑			
		Gleichungen selbst aufstellen		↔	Variable wird im jeweiligen Sachzusammenhang festgelegt
		↑			
		Gleichungen zunächst graphisch als Schnittpunkt zweier Geraden			
		↑			
		Termumformungen mit Schwerpunkt auf den Regeln (was zusammenfassen, ausklammern,...)		↔	Terme und Variablen als Sprache der Algebra, die auf Basis von Regeln erlernt werden soll
		↑			
		Terme im Zusammenhang mit den Variablen in Formeln in Zusammenhang mit der Geometrie eingeführt		↔	Veranschaulichungen durch Geometrieverbindung - Ausschneiden der Flächen etc.
		↑			
		Variable als x-beliebige Zahl mit der gerechnet wird		↔	Variable nicht explizit definier - zu Beginn Variable als Unbestimmte (in Formeln), in spezifischen Aufgabenkontexten dann als Unbekannte
		↑			
		Sicherheit im Rechnen und im Umgang in den verschiedenen Zahlbereichen und den geltenden Rechenregeln			

Tabelle 26: Ziele des Algebra-Curriculums, Herr C

!Oberstufe bewältigen
(=hier ist die rein auf schulische Inhalte bezogene Bewältigung der Oberstufe gemeint)

Wenn die SuS bewusst unterscheiden können, wann welches Schema angewendet wird → **können sie die Mathematik der Oberstufe bewältigen**

!Nutzbarkeit der Fähigkeiten im Berufsleben
(=diese Fähigkeiten werden den SuS auch in verschiedenen Studiengängen nutzen und auch in vielen der zu ergreifenden Berufe)

!Blick auf wissenschaftliche Strukturen der Mathematik
(=hier wird auf die rein mathematische Seite abgezielt, dass die Mächtigkeit der Algebra gesehen wird, wie lange Zusammenhänge durch die Anwendung fester Regeln verkürzt werden können, dass die SuS sehen, wie praktisch es ist, diese Strategien anzuwenden)

!Abgrenzung der Schemata in Bezug auf die Anwendbarkeit
(= hier ist gemeint, dass eine kritische Distanz aufgebaut wird, gegenüber dem blinden Vertrauen in die Schemata, sondern dass man diese als ersten Schritt sieht Probleme zu bewältigen, aber immer selbst überlegen sollte)

Wenn die SuS ihr Abstraktionsvermögen und die Fähigkeit zu verallgemeinern geschult haben → **können sie diese Fähigkeiten in ihren Studien und im späteren Berufsleben nutzen** + **können innermathematisch einen Blick auf die reine Mathematik ohne Anwendungen sondern mit Fokus auf die wissenschaftlichen Strukturen werfen und deren Praktikabilität erfahren**

!Abstraktionsvermögen
!Fähigkeit zu Verallgemeinern
(=gemeint ist, wenn die SuS lernen Beweise nachzuvollziehen und aus Einzelfällen allgemeine Regeln aufzustellen)

Wenn die SuS die vorherrschenden Muster erkennen und strukturieren + **Wenn die SuS die notwendigen Schemata als Regelgrundlage erlernt haben** → **können die SuS bewusst unterscheiden, wann welches Schema angewendet werden kann** + **schulen dadurch ihr Abstraktionsvermögen und die Fähigkeit zu verallgemeinern**

!Muster erkennen und strukturieren
(=gemeint sind hier Ideen, wie zum Beispiel wann es um Linearität geht, wie man auf die gleichen Inhalte immer wieder schaut, nur immer aus einer höheren Warte, i.S.

!Schemata erlernen
!Regelgrundlage
(=Die Regelgrundlage, also die Umgangsregeln mit Termen und Gleichungen müssen erlernt werden)

						der didaktischen Spirale)		
		Wenn die Algebra als eigene Sprache verstanden wird	+	**Wenn die SuS zur Genauigkeit erzogen sind**	→	**können die SuS die vorherrschenden Muster erkennen und strukturieren**	+	**können die notwendigen Schemata erlernen, die als Regelgrundlage dienen**
		!Algebra als eigene Sprache (= gemeint ist dass die Algebra nun mit Variablen und Termen als Vokabeln einer neuen Sprache auftritt, deren Regeln erlernt werden müssen)		!Genauigkeit (=gemeint ist die Aufmerksamkeit gegenüber der Anwendung von Regeln und Schemata, dort nichts zu verwechseln, sondern lieber doppelt zu prüfen, wasa gilt)				
Wenn man die Algebra inhaltlich so aufbaut wie beschrieben !Behandlung algebraischer Inhalte	→	**wird die Algebra als eigene Sprache verstanden**	+	**werden die SuS zur Genauigkeit erzogen**				

Tabelle 27: Ziele des Mathematik-Curriculums, Herr C

						!Nutzen der Mathematik in der Gesellschaft (=hier wird vermehrt auf den Nutzen der Mathematik und vor allem die Modellierung von Problemen aus diesen Bereichen durch Gleichungen und Terme angespielt)		!Mächtigkeit der Mathematik erfassen (=gemeint ist, dass die Mathematik Dinge fassen kann, die die Vorstellungskraft nicht mehr bewältigen kann)
		Wenn die SuS Spaß an der Mathematik entwickeln	+	**Wenn die SuS die ineinandergreifende Struktur der Mathematik erkennen**	→	**können die SuS den Nutzen der Mathematik in Wissenschaft, Wirtschaft und Technik verstehen**	+	**können die Mächtigkeit der Mathematik in Ansätzen erfassen**
		!Spaß (=die SuS sollen durch den Umgang mit Mathematik deren Notwendigkeit erkennen und auch selbst das Bedürfnis entwickeln mit ihr umzugehen und daran Spaß zu entwickeln)		!Struktur der Mathematik (=die Struktur meint, dass Gleichungen immer wieder in verschiedenen Kontexten auftreten, dass Inhalte einander bedingen und in verschiedenen Kontexten wieder auftreten)				
Wenn die SuS im Nachdenken und Abstrahieren geschult worden sind !Schulung im Nachdenken und Abstrahieren (=gemeint ist, dass die SuS durch den Mathematikunterricht gelernt haben, Dinge von einem höheren Standpunkt aus zu betrachten und Dinge detailliert zu analysieren)	→	**können die SuS Spaß an der Mathematik entwickeln**	+	**können die ineinandergreifende Struktur der Mathematik erkennen**				

Tabelle 28: Das Lernen, allgemein, Herr C

												!Spaß (=die SuS sollen schließlich selbst die Notwendigkeit der Algebra begreifen und Spaß an der Modellierung von Situationen und Problemen erlangen)
								Wenn die SuS die Mathematik in ihrer Mächtigkeit erleben	+	**Wenn die SuS den Sinn der Algebra erleben, mathematisch und im Alltag**	→	**können Spaß an der Algebra haben**
								!Macht der Mathematik (=gemeint ist, dass die SuS die Strukturen der Mathematik und die Macht, in dem Sinn dass die Mathematik Dinge modellieren und darstellen kann, für die die eigene Vorstellungskraft nicht ausreicht)		!Sinn der Algebra !Alltag !innermathematisch (=gemeint ist, dass die SuS den Nutzen der Mathematik in ihrer Umwelt, aber auch innermathematisch begreifen, also komplexe Zusammenhänge darzustellen und zu verallgemeinern)		
Wenn die SuS genau und differenziert arbeiten	+	**Wenn die SuS die Notwendigkeit erkennen Algebra als Sprache zu verstehen**	+	**Wenn die SuS im Unterricht einer erhöhten Selbstwirksamkeit erhalten**	+	**Wenn die SuS kontinuierlich an der Arbeit bleiben und viel üben**	→	**können sie die Mathematik in ihrer Mächtigkeit erleben**	+	**können den Sinn der Algebra im Alltag und mathematisch erleben**		
!Genauigkeit !Differenzieren (= gemeint ist dass die SuS aufmerksam die Aufgaben bearbeiten und gerade in der Algebra aufmerksam sind darin, welche Regel sie wann anwenden und wann nicht)		!Algebra als Sprache (=die SuS sollen verstehen, dass man die Regeln der Algebra als Vokabeln einprägen muss, um diese später als Grundlage nutzen zu können)		!Selbstwirksamkeit (=gemeint ist, dass den SuS die Gelegenheit gegeben werden muss, aktiv im Unterricht zu arbeiten und ihnen so das Gefühl zu geben, ihre Fähigkeiten Erfolg bringend einzusetzen)		!Kontinuität !Übung (=gemeint ist, dass die SuS über ihre (manchmal extern gebildete) ablehnende Haltung gegenüber Textaufgaben oder Algebra als Ganzes hinweg sehen und durch die kontinuierliche Arbeit an der Algebra diese schließlich verstehen, dazu müssen die basalen Fähigkeiten geübt werden)						

Tabelle 29: Das Lernen, stärkere SuS, Herr C

				!Selbst erschließen (=gemeint ist, dass die SuS sich neue Inhalte schnell selbst erschließen und diesbezüglich nicht lange etwas vermittelt werden muss)		!Verständnis (=gemeint ist, dass die SuS das Potenzial der Algebra und schließlich auch der Mathematik erkennen, vor allem die Stellung der Algebra als Basis für die künftige Mathematik)
Wenn die SuS im Unterricht gefordert sind	+	**Wenn SuS den Nutzen der Algebra innermathematisch und im Alltag sehen**	→	**können sich die SuS die Inhalte selbst erschließen**	+	**können zu einem vertieften Verständnis der Algebra und der Mathematik kommen**
!Gefordert sein (=gemeint ist, dass diesen SuS reichlich Knobel- und kniffelige Aufgaben gegeben werden müssen, um deren Kreativität zu fördern und nicht verkümmern zu lasse)		!Nutzen (=gemeint ist, dass die SuS den Nutzen der Mathematik in ihrer Umwelt, aber auch innermathematisch begreifen, also komplexe Zusammenhänge darzustellen und zu verallgemeinern)				

Tabelle 30: Das Lernen, schwächere SuS, Herr C

								!Bestehen (=die Arbeiten sind so konzipiert, dass die SuS nur durch reproduzierbares Wissen zumindest eine vier in der Arbeit erreichen können)		!Sicherheit (=die SuS können sich an den Rezepten festhalten und so einerseits Erfolgserlebnisse erlangen und andererseits Sicherheit)
						Wenn sie die Schemata auswendig lernen	→	**können sie die Arbeiten bestehen**	**+**	**können mit einem Gefühl der Sicherheit in den Unterricht gehen**
						!auswendig lernen (=die SuS können stur die Regeln und Schemata rezeptartig auswendig lernen)				
Wenn der Unterrichtsstoff sehr strukturiert vermittelt wird	+	**Wenn frontal und auf Schemata fokussiert unterrichtet wird**	+	**Wenn die SuS fleißig üben**	→	**können die SuS die Schemata auswendig lernen**				
!Struktur (=gemeint ist, dass die Struktur durch die Lehrkraft und das Buch vorgegeben sind, sodass es eine Orientierung gibt)		!Frontal !Schematisch (=die Eigeninitiative der SuS wird betont, da diese den vermittelten Inhalt eigenständig durch aktives üben und Hausaufgaben machen unterstützen)		!Fleiß !Übung (=gemeint ist, dass die SuS aktiv in den Stunden und auch zu Hause die Arbeit im Unterricht unterstützen)						

Tabelle 31: Das Lernen, Mittelfeld, Herr C

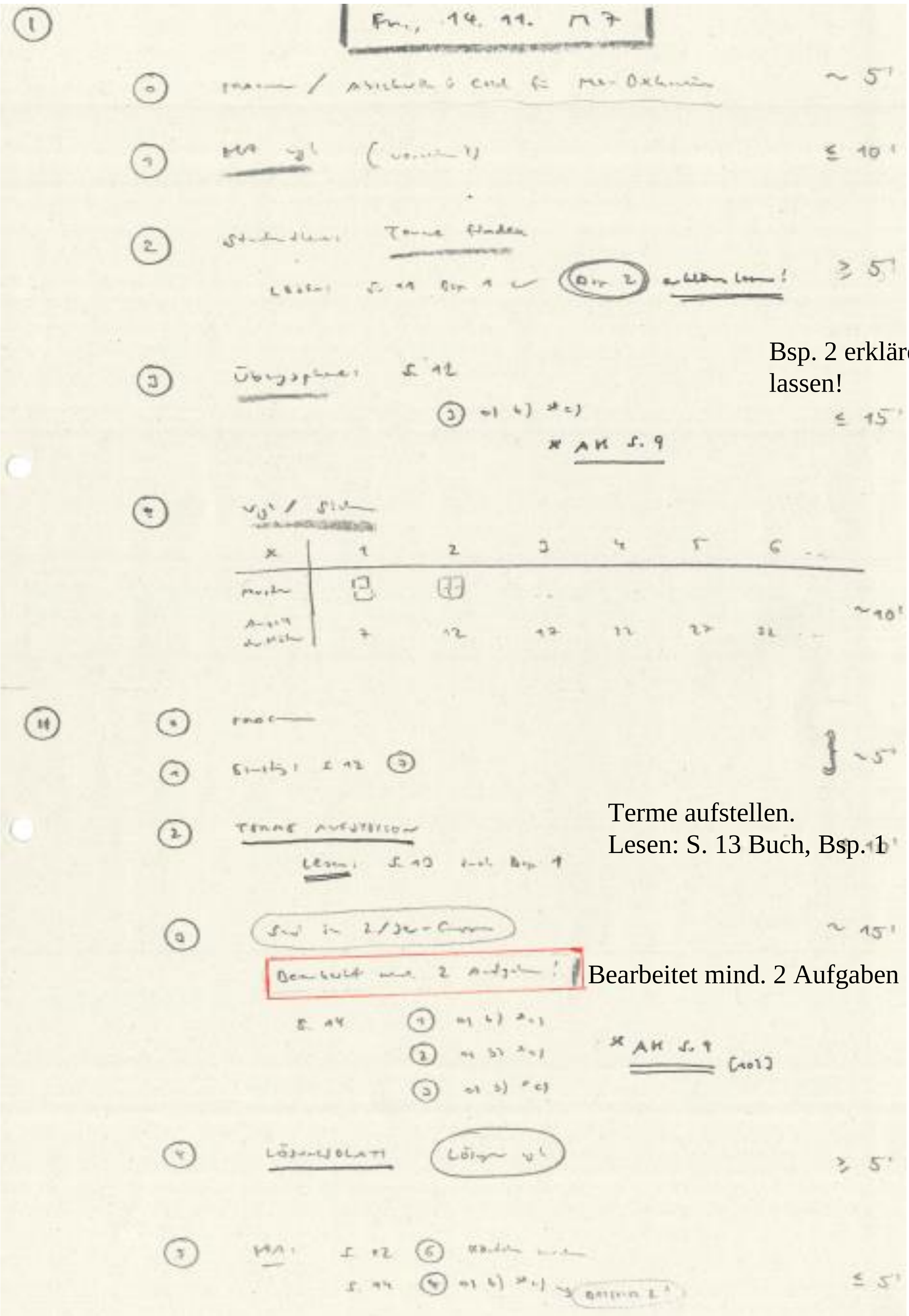
								!Verständnis (=diesen SuS wird das Potenzial zugestanden, durch ausreichende Anwendung ein Verständnis der vermittelten Inhalte zu erlangen)		!Nutzen der Algebra (=die SuS sollen schließlich selbst die Notwendigkeit der Algebra begreifen und Spaß an der Modellierung von Situationen und Problemen erlangen)
Wenn der Unterrichtsstoff sehr strukturiert vermittelt wird	+	**Wenn frontal und auf Schemata fokussiert unterrichtet wird**	+	**Wenn die SuS fleißig üben**	+	**Wenn die SuS sich im Unterricht ausprobieren können**	→	**haben die SuS die Chance ein Verständnis der vermittelten Inhalte zu erlangen**	**+**	**können den Nutzen der Algebra erkennen**
!Struktur (=gemeint ist, dass die Struktur durch die Lehrkraft und das Buch vorgegeben sind, sodass es eine Orientierung gibt)		!Frontal !Schematisch (=die Eigeninitiative der SuS wird betont, da diese den vermittelten Inhalt eigenständig durch aktives üben und Hausaufgaben machen unterstützen)		!Fleiß !Übung (=gemeint ist, dass die SuS aktiv in den Stunden und auch zu Hause die Arbeit im Unterricht unterstützen)		!Ausprobieren (=gemeint ist, dass den SuS Gelegenheit gegeben wird, eigene Strategien auszuprobieren und sich an manchen Aufgaben auszuprobieren)				

Tabelle 32: Lehren von Algebra, Herr C

														!Umfassendes, strukturiertes Unterrichtskonzept (=gemeint ist, dass inhaltlich umfassend unterrichtet wird und die am Buch orientierte Struktur abgearbeitet worden ist)		!Algebra als Grundlagenwissenschaft (=die Notwendigkeit die Algebra für alle weiteren Bereiche der Schulmathematik, aber auch in der Modellierung von innermathematischen und Alltagsproblemen zu nutzen, wird erkannt)
										Wenn inhaltliche wie allgemeine Fehlvorstellungen abgebaut sind und die Angst vor der Algebra verloren ist	+	**Wenn die SuS Erfolgserlebnisse erlangt haben und ein Interesse an der Algebra entwickelt haben**	→	**wird ein umfassendes, strukturiertes Unterrichtskonzept umgesetzt**	+	**wird die Notwendigkeit erkannt die Algebra als Grundlagenwissenschaft anzuwenden**
										!Fehlvorstellungen !Angst abbauen (=SuS können inhaltliche Fehlvorstellungen abbauen, z.B. beim Zusammenfassen von Termen und können ihre z.B. durch Eltern oder Geschwister geprägte Angst vor der Algebra verlieren)		!Erfolgserlebnisse !Interesse (=die SuS können selbstwirksam werden und Erfolge erreichen, sie entwickeln eigene Fragen und benutzen die Algebra zur Problemlösung)				
Wenn Algebra als eigene Sprache mit zu erlernenden Vokabeln und Regeln vermittelt wird	+	**Wenn die SuS entsprechend ihres Niveaus differenziert gefördert werden**	+	**Wenn strukturierter, am Buch orientierter Frontalunterricht, der gleichzeitig einen rein mathematischen, als auch die Anwendungsfokus legt mit einem hohen Aktivitätsgrad in den Übungsphasen verbunden wird**	+	**Wenn inhaltlich auf einen schülernahen, anschaulichen Unterricht geachtet und auf unnötige Formalisierung verzichtet wird**	+	**Wenn eine offene Fehlerkultur gepflegt wird**	→	**können inhaltliche, wie allgemeine Fehlvorstellungen behoben werden und die Angst vor Algebra verlieren**	+	**können die SuS Erfolgserlebnisse haben und Interesse an der Algebra entwickeln**				
!Sprache !Vokabeln und Regeln (=gemeint ist, dass den SuS vermittelt wird, dass in der Algebra zunächst Regeln gelernt werden müssen und dass das manchmal trocken sein kann)		!Differenzierung !Förderung (=den stärkeren SuS sollen Knobelaufgaben, den schwächeren SuS einfachere Schema F Aufgaben gegeben werden, sodass jeder die Möglichkeit hat Aufgaben erfolgreich zu bearbeiten)		!Struktur !Frontalunterricht !Anwendung !Mathematik !hoher Aktivitätsgrad !Übung (=die reine Mathematik und der Nutzen, der ohne Anwendungsbezug erzielt wird, soll neben den Anwendungsbeispielen stehen, zugleich wird die Struktur des Buches als Orientierung gewählt und durch den Frontalunterricht wird die Vermittlung gesichert. In den Übungsphasen sollen die SuS zur Aktivität animiert werden)		!Schülernaher Zugang !Anschaulichkeit !auf unnötige Formalisierung verzichten (=es soll zum Beispiel durch geometrische Bezüge, verschiedene Darstellungsformen, aber auch durch die mathematisch nicht ganz korrekte Verwendung von Einheiten zur Unterscheidung der Variablen ein schülernaher Zugang gewählt werden)		!offene Fehlerkultur (=gemeint ist, dass absichtlich Fehler an der Tafel gemacht werden, um die Aufmerksamkeit zu schulen, aber auch um zu zeigen, dass Fehler in Ordnung sind. Fehler der SuS werden als Anlass genommen Fehlvorstellungen zu thematisieren)								

6.3.9. Unterrichtsbeobachtungen und Klausurenanalyse - Herr C

Inhalt der ersten beobachteten Unterrichtsstunde in der siebten Klassenstufe war die Erarbeitung von Termen, die figurierte Zahlen beschreiben sollen.
Hierzu liegt der handgeschriebene Unterrichtsplan der Lehrkraft vor:



Zunächst erfolgte der lehrkraftgeführte Vergleich der Hausaufgaben. Die Lösungen werden durch die Schülerinnen und Schüler vorgetragen werden, aber Herr C erklärt und betont die Besonderheiten der bearbeiteten Aufgaben, wenn die Lernenden diese nicht konkret benennen.
Anschließend wird eine neue Aufgabe gemeinsam bearbeitet. Herr C geht in der Klasse herum und hilft einzelnen Schülerinnen und Schülern. Dies nimmt sehr viel Zeit in Anspruch. Die Besprechung der Aufgabe erfolgt sehr ausführlich, wobei den Lernenden der Vortritt gelassen wird (s. „erklären lassen“ in Abbildung 15). Herr C fragt dabei die zentralen Schritte nach: „Ok, kann das noch genauer erklären, dieses minus eins?“.
Nach einer Pause erlesen sich die Lernenden dann die Grundlagen zum Aufstellen von Termen. Dies unterstützt die Annahme der zentralen Bedeutung des Lehrbuchs für den Unterricht.
Die Übungsgestaltung steht im Einklang mit den rekonstruierten Theorien. So weist Herr C an:
„So, die Experten sehen, der Term sieht dem aus der ersten Stunde ähnlich. Es ist jetzt also das Ziel Terme selbst aufzustellen. Also so aus dem Text einen Term zu entwickeln. Gern auch so in Kleingruppen wie zuvor. Aber zunächst bitte jeder einmal in Ruhe das Beispiel 1 anschauen. Gibt es Fragen zum Beispiel 1? (...) So und nun gibt es eine kleine Übungsphase. Ich habe auch ein Lösungsblatt erstellt, mit dessen Hilfe ihr euch selbst kontrollieren könnt. Und dass sich also am Ende jeder selbst kontrollieren kann. Ich habe auch wieder Sternchen-Aufgaben mit drin für die Experten. Die Experten können sonst auch gern wieder rumgehen und den anderen helfen. Das seid ihr ja gewohnt.“
Diese Anweisung ist klar angeleitet und gibt die Gelegenheit binnendifferenziert zu üben. Den „Experten“ werden extra Aufgaben erteilt.
In der Besprechung spricht Herr C davon, dass die Vokabeln wie die „Multiplikation“ wiederholt werden müssten (eine Lernende fragt nach, ob Mal-Nehmen multiplizieren sei).
In der zweiten beobachteten Stunde wird der neu erarbeitete Stoff - das selbstständige Aufstellen von Termen - wiederholt. Diese verläuft ähnlich angeleitet auf Basis des Buchs. Herr C betont im Kontext der figurierten Zahlen die Bedeutung der Variablen und Terme beim Verallgemeinern. Hier sind keine wesentlichen Abweichungen vom Vorgehen der ersten Stunde erkennbar.
Zusammenfassend wird eine Konsistenz zwischen den Unterrichtsbeobachtungen und den subjektiven Theorien in Bezug auf die unterrichteten Inhalte und die Interaktion mit den Lernenden erkannt. Herr C legt Wert darauf, dass die „Vokabeln“ in der Algebra gründlich erlernt werden. Er unterrichtet eher lehrkraftzentriert, bemüht sich aber darum, die Lernenden in den Arbeitsphasen eigenverantwortlich lernen zu lassen. Dies ist anhand der selbstständigen Vergleichsmöglichkeit am Arbeitsblatt zu sehen. Es finden Übersetzungsprozesse ausgehend von den figurierten Zahlen statt. Die Förderung der „Experten“ und auch das kleinschrittige Vorgehen für das Mittelfeld und die schwächeren Lernenden werden in den Unterrichtsbeobachtungen deutlich.

Aus der Analyse der Klausur resultiert die folgende Übersicht:

Tabelle 33: Klausurenanalyse, Herr C

Kompetenz(en)	math. argumentieren			Probleme mathematisch lösen			mathematisch modellieren			mathematische Darstellungen verwenden			formal-technisch arbeiten			mathematisch kommunizieren		
Anforderungsbereich	I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II	III
Fülle aus													x					
Stelle auf							x									x		
Vereinfache													x					
Berechne													x					
Vereinfache													x					
Löse auf														x				
Löse														x				
Beschreibe							x										x	
Führe ein														x				
Bestimme														x				
Ermittle													x			x		
Untersuche				x										x				
Untersuche				x										x				

Diese Klausur legt den Fokus auf das formal-technische Arbeiten und bewegt sich im ersten und zweiten Anforderungsbereich. Die inhaltliche Schwerpunktsetzung auf das formal-technische Arbeiten entspricht dem Vorgehen in den beobachteten Stunden, in denen das Erlernen der Regeln zum Umgang mit der symbolischen Formelsprache im Vordergrund stand.
Die ersten vier Aufgaben beschäftigen sich mit den Regeln der Termumformungen. Die Aufforderungen „Beschreibe“ und „Untersuche“ leiten eine Aufgabe ein, die sich mit dem Aufstellen von Termen beschäftigt und in einen Sachkontext gesetzt ist.
Die letzte Aufgabe ist innermathematisch gestellt und zielt darauf ab, anhand einer gegebenen linearen Gleichung, die den Parameter „a“ und die Variable „x“ enthält, eine allgemeine Aussage darüber zu treffen, für welche Zahl „a“ keine Lösung existiert. Darin wird die Motivation von Herrn C deutlich, auch rein innermathematische Aufgaben ohne einen konkreten Anwendungsbezug zu bearbeiten.
Insgesamt lässt sich in der Tendenz Übereinstimmung zwischen den rekonstruierten subjektiven Theorien und dem unterrichtlichen Verhalten von Herrn C festhalten.

6.4. Frau D

Frau D hat vor kurzem ihr Referendariat abgeschlossen und ist erst seit einem Jahr Lehrerin an einem niedersächsischen Gymnasium. An ihrer Schule wird mit graphikfähigen Taschenrechnern und mit dem Buch Elemente der Mathematik gearbeitet.
Frau D schätzt ihre Erfahrungen, die sie im Verlauf ihrer Sozialisation erworben hat, als sehr wertvoll ein: Das Referendariat, hinsichtlich der Methodenvielfalt und der inhaltlichen Ausrichtung auf das Problemlösen (vgl. 1:28:59), ihre Studienerfahrungen, denn dort hat sie gelernt, „dass ich natürlich sehr souverän (...) mit Termen hantieren kann. Und (...) auch mit riesigen Gleichungen (...) und ich kann auch mit Indizes umgehen (...) mit Summen. (...). Die Beweisführung, also logische Beweisführung (...) [ist] von Bedeutung“ (1:27:46) und auch ihre eigene Schulzeit, in der das Bedürfnis danach aufkam, die Frage nach dem „Wozu“ zu beantworten (vgl. 1:29:33).

6.4.1. Was sind die Inhalte des Algebraunterrichts?

Zunächst müssen die Schülerinnen und Schüler die verschiedenen Zahlenräume kennen lernen (vgl. 0:11) und in diesen Bereichen, „die verschiedenen Rechengesetze (...) die Rechenoperation jeweils, also Distributivgesetze, die verschiedenen Rechengesetze“ (4:47) beherrschen.
Aufbauend darauf findet die Behandlung der Variablen als Teil des inhaltlichen Curriculums statt. Wichtig ist Frau D in diesem Zusammenhang, dass die Schülerinnen und Schüler nicht künstlich Hürden im Umgang mit dem Buchstabenrechnen aufbauen, sondern dass das Verständnis der Variablen intuitiv aufgebaut wird. „Ich nehme mir jetzt für das, was ich nicht kenne, was mir unbekannt ist, da nehme ich einen Buchstaben und sage, das kenne ich noch nicht“ (28:53). Dabei ist es ihr sehr wichtig, dass die Buchstaben flexibel gewählt werden, denn „Ich hab das wirklich schon gemerkt, wenn man Schüler übernimmt von einem Lehrer, der das immer als x bezeichnet hat, die sind vollends verwirrt wenn man das als s und u plötzlich bezeichnet“ (ebd.). Aber „wenn man auch mal anknüpft an das, was die Schüler schon wissen, dann ist das immer gar nicht so das große Problem, finde ich (...). Wenn man wirklich, diese Platzhalterlogik [nimmt] (...), [dann] übersetze einen Satz, wo (...) irgendwann nicht bekannt ist, mit irgendwie s, t, u, v, x, schön passend zum Kontext“ (ebd., vgl. 31:02). „Da ist es mir wirklich wichtig, dass auf jeden Fall deutlich wird, es gibt nicht nur die eine und die andere, es gibt nicht nur x und y sondern es gibt alle möglichen“ (37:58). Im nächsten Schritt geht es ihr dann unter Berufung auf die Transparenz (vgl. 35:32) darum, den Schülerinnen und Schülern zu verdeutlichen „was es so für Notationen und Absprachen gibt in der Mathematik“ (ebd.). In diesem Fall bedeutet das, „für die Schüler [zu] thematisieren, (...) in der Mathematik [hat] man sich geeinigt (...) auf eine Notation von x und y, dass aber auch alle anderen Buchstaben funktionieren“ (31:03) und „[d]as ist jetzt eine Festlegung (...), damit wir uns international gut verstehen (...). Das verstehen die Schüler“ (ebd.).
Dies betrifft ebenso die Notation, das Malzeichen zwischen der Variable und der Zahl wegzulassen. Frau D sieht eine Gefahr hierin, weil „es geht dann gleich noch mal einen Schritt schneller für die Schüler. Einen Schritt, den sie nicht so direkt nachvollziehen können“ (40:31). Die Schülerinnen und Schüler kommen „damit nicht so klar“ und haben „dann eben Schwierigkeiten (...) beim Hantieren mit den Buchstaben, den Variablen“ (1:01:31). Deshalb wird dieses zu Beginn beibehalten, um „dann (...) zu sagen, wir haben das jetzt geübt, wir wissen jetzt, wie das geht. Dann wieder dieses: ‚Die Mathematiker haben sich darauf geeinigt, dass...’, so“ (42:15). Unter die gleiche Frage fällt die Anordnung, zuerst die Konstante und dann die Variable zu setzen, denn „das sind ja alles Notationen“ (42:15).

Die Betonung der Notationen und der Verständnishilfen in der Übersetzung von fehlenden Begriffen durch bestimmte Variablen weisen darauf hin, dass die Algebra als Sprache der Mathematik gesehen wird. Dies wird dadurch untermauert, dass Frau D die Übersetzung von einer Sachsituation/einem Problem in einen Term mit den Worten beschreibt: „Mathe ist eine Sprache, die, wenn wir einen Text sehen und da herausfinden, was ist hier gerade das Problem, was wird gesucht, was ist unbekannt, dass wir übersetzen können“ (1:24:45, vgl. 31:03). Hierbei wird zwar allgemeiner die Mathematik und weniger die Algebra im Speziellen beschrieben, dennoch folgt in einem Nachsatz die Erläuterung, „Dass wir das mit Variablen handhabbar machen können“ (ebd.). Die Variablen werden von ihr an anderer Stelle als elementarer Inhalt der Algebra gekennzeichnet, „zur Algebra gehört für mich (...) erst mal mit Variablen, mit Unbekannten rechnen lernen“ (4:47). Die verweist auf einen Zusammenhang zwischen der Algebra und der Mathematik, in dem die Algebra das Vokabular und die Grammatik für die Sprache der Mathematik bereitstellt.
Grundsätzlich wird die Variable hier als Unbekannte gesehen (vgl. Abschnitt 6.4.6). Dieses Verständnis der Variablen vertieft sich, da ihr die Wertberechnung der Variablen unter dem Aspekt der Sinngebung sehr wichtig ist, da „eine Variable (...) für mich im Prinzip ein Symbol was für etwas unbekanntes und gleichzeitig etwas auch noch zu Bestimmendes steht“ (49:28) und „eigentlich ganz am Anfang klar [werden soll], das x oder u oder so was ist das, was für uns dafür steht, das ist unbekannt, das wollen wir rauskriegen“ (31:03). Frau D spricht aber davon, dass die Unterscheidung der Variablen in die verschiedenen Begrifflichkeiten - Unbekannte, Variable, Platzhalter - von Lehrerinnen und Lehrern „auch nicht ganz sauber“ (42:59) vonstatten geht.
Inhaltlich ist es das „Kernziel“ von Frau D, „dass man dann auch wirklich irgendwie Probleme lösen kann (...), dass Schüler die Möglichkeit bekommen mit mathematischen Hilfsmitteln Probleme aus verschiedensten Bereichen lösen zu können“ (0:11). „Ja das wäre (...) zentral wirklich das Übersetzen von Inhalten in mathematische Gleichungen“ (4:47). Um dieses Ziel zu erreichen, müssen die Schülerinnen und Schüler zunächst in der „Handhabe“ (ebd.) geschult werden, also „irgendwie so die Grundlage, mit Variablen umzugehen, Terme aufzustellen (...), dass sie bestimmte Inhalte in mathematische Zeichen und auch Rechenoperationen umsetzen können und das ist für mich der Kernpunkt von Algebra und Matheunterricht“ (ebd.). Hier wird die Bedeutung der Algebra als Werkzeug zur Erreichung ihrer Ziele im Mathematikunterricht verdeutlicht. Im Prinzip wird die Algebra hier als „Handhabe“ charakterisiert.
Zudem „gehört für mich dazu, mit Termen und Gleichungen umzugehen (...). Also auch da die Rechenoperationen kennen lernen, wie das funktioniert und dann im zweiten Schritt Gleichungen lösen“ (4:47). Das auch „nochmal geklärt wird, die Rechengesetze die wir kennen, distributiv, assoziativ und so weiter, die gelten auch für Terme, das wir das komplett auch machen dürfen“ (33:08). Und „Gleichungssysteme und so weiter, das sind ja alles Sachen, die wir für Modellierungen immer brauchen werden“ (6:39). Dabei legt sie Wert darauf, dass „Dinge, wo es nur darum geht stumpf die Rechenoperatoren zu verinnerlichen, das steht für mich immer nur in einer kurzen Übungsphase, so dass sie dann merken, ok jetzt habe ich das Handwerkszeug“ (11:57). Ihr Ziel ist es langfristig „Kompetenzen aufzubauen“ (3:41), daher ist das Problemlösen das oberste Ziel und die Vermittlung des Handwerkszeugs das notwendige Mittel, um dieses Ziel zu erreichen.
Es ist deshalb bei Frau D nicht möglich nur mit der sturen Schemaanwendung eine Klausur zu bestehen. Sie macht aber die Einschränkung, dass „das eine Problem ist etwas, was ganz analog zu Problemen, die wir geübt haben [ist] und die wir wirklich, wirklich geübt haben. Wo es im Prinzip auch schon fast wieder fast ein Schema ist. Also da (...) veräppele [ich] mich ein bisschen selbst, wenn ich sage, dass das Probleme lösen fördert“ (1:15:49).
Die Behandlung der Gleichungen wird häufig mit der graphischen Anschauung verknüpft, „wir haben zwar jetzt eine Gleichung, auf der einen Seite x, auf der anderen Seite x, das könn-

te ja eigentlich auch interpretiert werden als ein Schnittpunkt von zwei Geradengeleichungen. Also, immer diesen Rückbezug, damit die Schüler sich da drunter auch was vorstellen können“ (13:02), „dass man das immer noch mal ein bisschen verknüpft, also was bedeutet das? (...) Aber da bin ich häufig in dieser Richtung, eben nicht nur algebraisch sondern dann eben auch grafisch das zu lösen“ (52:23). Das „ganze Hantieren mit den Gleichungen kommt dann im Prinzip direkt mit den Gleichungen“ (47:23), „das mit den Gleichungen einfach irgendwie rechnen, ist auch schön, weil man es auch bei ganz komplizierten Gleichungen immer hingekriegt hat“ (26:12).
Die Termumformungen werden in direktem Zusammenhang mit den Gleichungen behandelt und nicht als einzelner Block, wobei das Aufstellen eines Terms dazugehört, aber einen anderen Stellenwert genießt, als das Umformen von Termen (vgl. 20:50). Die Termumformungen bringen das Problem mit sich, bei den Schülerinnen und Schülern das Gefühl der Sinnlosigkeit auszulösen, „was mache ich hier eigentlich (...). Ich kann irgendwie nichts machen damit“ (47:46). Der Fokus muss auf das Lösen von Problemen und das Herausbekommen von Ergebnissen gelegt werden und das „ist ja erst bei den Gleichungen der Fall“ (44:32), also „ich gehe dann direkt zu den Gleichungen und dann mache ich die ganzen Umformungen“ (56:28). Die Schülerinnen und Schüler „sehen“ (57:02) dann, „aha das ist das jetzt (...) und dann kann ich es herausbekommen“ (ebd.), „das hilft denen“ (ebd.). Ihr geht es dabei zusätzlich um das Konzept der Äquivalenzumformung, [d]ass wir sie auf beiden Seiten machen (...), dass wir daran nichts verändern an dem Gleichgewicht der Waage (...), dass sie das irgendwie im Kopf haben (...) dieses Gefühl, es ist eben wirklich elementar, dass sie keine Umformung machen, die die Gleichung und das Gleichgewicht verändern“ (1:09:29).
Beweise spielen für Frau D in ihrem Unterricht eine nicht übermäßig präsente Rolle, „also ich beweise häufig auch mal über geometrische Beweise, finde ich immer ganz gut für die Schüler. Aber sie sind eben häufig (...) meistens nicht so haltbar, wie wir uns Beweise vorstellen“ (33:46). Es geht dabei mehr darum, dass durch die Struktur der Beweise das logische Denken der Schülerinnen und Schüler gefördert wird (vgl. 35:32). Inhaltlich werden die Schülerinnen und Schüler so an ihre Grenzen geführt, „wenn man merkt, irgendwo gibt es mal Grenzen (...), weil die Schüler da dann auch merken wir dürfen nicht einfach so annehmen, wir können [nicht] immer alles mit allen Zahlen machen“ (ebd.). Zudem erleichtern sie das Verständnis mathematischer Inhalte, wenn das Problem angesprochen wird, zwischen „a+a+a+a“ (1:07:15) und „a·a·a“ (1:08:41) zu unterscheiden. Dabei verweist sie selbst darauf, dass es sich eher um die Veranschaulichung des Rechnung als um den Beweis derer handelt (vgl. ebd.).
Frau D orientiert sich inhaltlich am schulinternen Curriculum, bedient sich aber nicht nur am eigenen Lehrbuch (Elemente) (vgl. 15:06). Dieses ärgert sie oft, weil die Aufgaben „halt so eingekleidet sind. (...) das sind häufig so Sachen, wo ich mir denke: ‚Mensch da muss ich mir jetzt wieder selber Aufgaben ausdenken'“ (26:12), weil die zu „konstruiert wirken“ (15:06).
Ungleichungen würden, bzw. sind am ehesten aus dem Curriculum gestrichen, obwohl auch diese Anknüpfungspunkte für „viele reale Probleme“ (22:15) bieten.

Die Schülerinnen und Schüler sollen zunächst Sicherheit in den bis dato kennengelernten Zahlbereichen erworben haben und die jeweils geltenden Rechenregeln und -gesetze beherrschen. Dies bildet die notwendige Grundlage für die Behandlung von Termen und Variablen.
Die Variablen werden möglichst niedrigschwellig und intuitiv über ihre Platzhalterfunktion eingeführt. Dabei werden sie bei der Übersetzung von Sachzusammenhängen in die mathematische Sprache kontextabhängig übersetzte („w“ für Weg), um die flexible Verwendung dieser zu gewährleisten.
Daran anschließend müssen die Lernenden mit den geltenden Notationen im Umgang mit der algebraischen Formelsprache vertraut gemacht werden, um Verwirrungen zu vermeiden.
Die Variable wird vornehmlich als Unbekannte charakterisiert. Die Betonung liegt auf der

Variablen als etwas zu Berechnendes und Konkretes. Sie wird in den einzelnen Aufgaben zunächst unter dem Gegenstandsaspekt handhabbar gemacht, indem sie als etwas noch Unbekanntes im jeweiligen Kontext definiert wird.
Die Terme und Gleichungen werden inhaltlich nicht voneinander getrennt. Vielmehr werden sie bei der Übersetzung von Sachzusammenhängen in mathematische Zeichen benutzt. Die geltenden Rechenregeln bei der Termumformung und dem Gleichungenlösen werden zusammen behandelt. Dies wird als das nötige Handwerkszeug gesehen. Das reine Termumformen führt bei den Lernenden zu einer erlebten Sinnlosigkeit. Erst wenn diese im Kontext von Gleichungen eingesetzt werden, wird eine konkrete Lösung erzeugt, was diesem Gefühl entgegenwirkt. Zentral ist die Gleichgewichtsidee, die sie zum Beispiel über das Waagemodell veranschaulicht.
Gleichungen werden über graphische Abbildungen veranschaulicht. Auf diese Weise werden die verschiedenen Darstellungsformen in der Sinnkonstituierung genutzt.
Die Erarbeitung des Handwerkszeugs führt zur Erreichung ihres Kernziels: das Lösen von Problemen mit mathematischen Hilfsmitteln und durch Modellierungen.
Innermathematische Probleme wie Beweise werden nachrangig behandelt und wenn dann zur Veranschaulichung von Rechenregeln oder geometrischen Sachverhalten.
Frau D vergleicht die Algebra mit der Sprache der Mathematik.

6.4.2. Was sind die Ziele des Algebraunterrichts?

Die Algebra soll den Schülerinnen und Schülern dazu dienen, „dass sie später in der Lage sind in den Naturwissenschaften, in anderen Bereichen, irgendwelche elementaren Probleme aus dem Alltag oder aus dem Bereich wo sie dann später arbeiten zu übersetzen in eine Gleichung und diese dann zu lösen (...) [und] Modellierungsvorgänge können dann eigentlich alle nicht stattfinden, denn die Schüler hätten ja dann keine Vorstellung davon, wie kann ich eigentlich x+3=1/2 (...) eigentlich lösen“ (6:39, vgl. 0:11). Zu diesem Zweck sollen sie „in der Lage sein sowohl in den verschiedenen Zahlenräumen sicher hantieren zu können mit den Rechenoperationen (...) sie müssen dann Probleme jeglicher Art modellieren und mit dem Handwerkszeug, das sie gelernt haben, lösen können“ (1:52:21). Hier wird die Betonung der Algebra als Werkzeug zur Erreichung der allgemein mathematischen Kompetenzen deutlich.
Ein Ziel der algebraischen Ausbildung ist es für die Schülerinnen und Schüler, zum Beispiel durch die Durchführung von Beweisen oder deren Nachvollzug ihr „logische[s] Denken[,] im Sinne von: ‚Was habe ich eigentlich, was will ich und wie kann ich das jetzt zusammen bringen’“ (35:32) zu schulen. Diese werden dann mit den Schülerinnen und Schülern gemeinsam erarbeitet, wobei der Anfang und das Ziel des Beweises vorgegeben werden (vgl. 35:03, 35:16).
Zudem führt die Beherrschung von Strategien des Problemlösens und des Modellierens dazu, Situationen „aus dem Alltag, aus den Berufswelten“ (1:21:22) bewältigen zu können. Frau D führt zusätzliche Beispiele aus dem Berufsalltag, z.B. ihres Schwagers, an (vgl. ebd.). In diesem Zusammenhang entstehen „so diese Aha-Erlebnisse. Dieses: ‚Hey, ich kann damit was wirklich machen (...). Und das ist ein Gewinn für mich und für andere“ (1:52:56). Dies führt zu Freude an der algebraischen Arbeit, zum Beispiel „das mit den Gleichungen einfach irgendwie rechnen, ist auch schön, weil man es auch bei ganz komplizierten Gleichungen immer hingekriegt hat“ (26:12).
Die Schülerinnen und Schüler sollen dazu befähigt werden „die Werkzeuge, die sie von mir erlernen in geeigneten Kontexten hervorzuholen und anzuwenden“ (1:41:29). Es soll „hängen bleiben (...), dass sie bestimmte Inhalte, Kontexte, Probleme übersetzen können. Dass sie wirklich lernen, Mathe ist eine Sprache, die, wenn wir einen Text sehen und da herausfinden, was ist hier gerade das Problem, was wird gesucht, was ist unbekannt, dass wir das übersetzen

können“ (1:24:45). Sie nennt zum Beispiel das Sparen oder ähnliche alltägliche Kontexte, in denen die Algebra „sie dann kompetent macht, im Umgang mit Alltagsproblemen“ (6:39). Zusätzlich betont sie: „Die grundlegenden Termumformungen müssen für mich schon nach einem vernünftigen Algebraunterricht da sein“ (1:24:45).
Die Algebra soll als Instrument zum „Argumentieren, also Algebra als Argumentieren und Problemlösen“ (1:43:49) verstanden werden. Dies entspricht dem bereits herausgearbeiteten Werkzeugcharakter der Algebra. Wird die Handhabe mit den algebraischen Inhalten erlernt, kann dies zum Argumentieren und Problemlösen, verstanden als allgemein mathematische Ziele, eingesetzt werden.

Die Schülerinnen und Schüler sollen zunächst Sicherheit in den bis dato kennengelernten Zahlbereichen erworben haben und die jeweils geltenden Rechenregeln und -gesetze beherrschen. Dies bildet die notwendige Grundlage für die Behandlung von Termen und Variablen.
Die geltenden Rechenregeln bei der Termumformung und dem Gleichungenlösen werden zusammen behandelt. Dies wird als das nötige Handwerkszeug gesehen.
Die Erarbeitung des Handwerkszeugs führt zur Erreichung ihres Kernziels: das Lösen von Problemen mit mathematischen Hilfsmitteln und durch Modellierungen.
Frau D möchte, dass ihre Schülerinnen und Schüler mit Hilfe der erlernten Hilfsmittel verschiedene alltagsrelevante Probleme lösen können. Weiterhin möchte sie das logische Denken der Lernenden schulen, indem diese zum Beispiel Beweise führen oder verschiedene Situationen strukturieren.

6.4.3. Was sind die Ziele des Mathematikunterrichts?

Frau D möchte ihre „Schüler zu eigenständigen Menschen heranziehe[n] und bilde[n]“ (1:41:29). Zu diesem Zweck ist es ihr wichtig, dass „die Kinder einfach auch zu Erwachsenen im Laufe ihres Lebens [werden], die auch in der Lage sind selbst ihren Kenntnisstand einzuschätzen, sich realistisch einzuschätzen“ (1:41:29).
Innermathematisch soll klar werden, „was ist das eigentlich für ein Konstrukt, die Mathematik. Jetzt nicht wirklich in Gänze (...), aber dass sie so ein bisschen was ahnen können. Dass sie so ein bisschen lernen, da kann man also mit den Sachen, die wir schon kennen jetzt neue Sachen herausfinden und belegen, dass das wirklich so geht“ (35:32)? Zu den Sachen, die die Schülerinnen und Schüler schon kennen, zählen auch die verschiedenen Schemata, „denn letzten Endes sind viele Dinge, also komplexe Algorithmen, nichts anderes als Rezepte. Also der Gauß-Algorithmus ist nichts anderes als ein Rezept“ (1:13:30). Die Schülerinnen und Schüler sollen sehen, dass ihnen Algorithmen und Schemata helfen zu Lösungen zu kommen, diese aber im Kontext von Problemen auftreten, die zunächst modelliert werden müssen (vgl. ebd.). Nichtsdestotrotz ist „es mir schon auch wichtig, dass man so etwas verinnerlicht (...) eben diese Routine“ (1:30:27).
Dies ist das grundsätzliche Vorgehen in der Mathematik, zunächst das Handwerkszeug zu erlernen, um dann Probleme zu untersuchen und „das kommt eben daher, dass man die Welt wie sie ist, in mathematischen Zahlen, oder in mathematischen Gleichungen häufig gut beschreiben kann. Vereinfacht zwar, aber man kann sie beschreiben, um dann Lösungen zu finden“ (6:39). Dabei ist es Frau D wichtig, dass die Schülerinnen und Schüler im Umgang mit dem Werkzeug themenübergreifend flexibel agieren können, „nehme ich das, nehme ich das, nehme ich was aus der Geometrie, kann ich das mit einer Konstruktion lösen oder kann ich das mit Algebra lösen oder mit was anderem“ (1:41:29).
Durch die Bewältigung interessanter Aufgaben und mathematischer Rätsel soll Mathematik den Schülerinnen und Schülern auch einfach Spaß machen (vgl. 53:53).

Frau D möchte ihre Lernenden zu eigenständigen Menschen erziehen, zu diesem Zweck muss ihnen vermittelt werden, sich realistisch einzuschätzen. Dazu trägt der Mathematikunterricht bei.
Die Lernenden sollen eine Idee vom grundsätzlichen Aufbau der Mathematik erhalten. Sie erlernen im Unterricht das Handwerkszeug verknüpft mit dem Nutzen dieses in Anwendungskontexten zur Lösung verschiedener Probleme einzusetzen. Dieses Vorgehen - mit Bekanntem zu verbinden und dabei Neues herauszufinden - soll den Lernenden als Abbild der Mathematik bewusst werden. Dies und die Möglichkeit mit Hilfe der Mathematik die reale Welt zu beschreiben, sollen zu Interesse und Spaß bei den Schülerinnen und Schülern führen.

6.4.4. Wie gelingt erfolgreiches Lernen?

Frau D konstatiert bei ihren Schülerinnen und Schüler eine Vorliebe für Schemata und Algorithmen, „Ja, schön finden die das! Schüler mögen Rezepte und das kann ich ihnen auch nicht verübeln“ (1:13:30). Faktisch existiert „ja häufig auch (...) diese[r] Drang (...) Algorithmen oder diese einfachen Rechenoperationen so handhabbar zu bekommen und da ganz sicher zu sein, bevor sie [die Schülerinnen und Schüler, Anm. JM] überhaupt weiter gehen“ (13:02). Diesem „Drang“ wird insofern nachgegeben, als dass „manchmal zu lange“ (ebd.) dabeigeblieben wird, anstelle früher zu Projekten mit Modellierungsprozessen überzugehen, denn dieses steht eigentlich im „Vordergrund“ (ebd.), weil es „den Kindern natürlich auch [Spaß macht], die Rechenwege erstmal zu üben“ (26:12).
Die Schülerinnen und Schüler sollen sich dem Thema Algebra gegenüber offen zeigen, denn oft sind die Schülerinnen und Schüler der Algebra gegenüber vorgeprägt, „ich erlebe schon ganz häufig, dass Schüler so Sachen von höheren Jahrgängen ganz oft schon erzählt bekommen“ (44:32). Frau D sieht bei ihren Schülerinnen und Schüler die eventuell dadurch hervorgerufene „Furcht davor“ (42:59), die sicherlich auch inhaltlich bestimmt ist, denn „dann kommt diese Angst oder die Schwierigkeit, ich weiß nicht, was ich damit machen soll“ (47:46). Dies bezieht sich vor allem auf Inhalte, an die kein Sinn geknüpft ist, wie die Termumformungen. Vielmehr ist es einfacher, wenn konkrete Lösungen erzeugt werden sollen (ebd.). Die Schülerinnen und Schüler müssen aber gleichzeitig „sicher mit den Umformungen der Terme und (...) Gleichungen“ (1:30:27) sein, sodass sie „dann nicht beim Problemlösen (...) Angst davor haben“ (ebd.). Zum Erlernen der Termumformungen werden interaktive Methoden genutzt, wie das Gruppenpuzzle, in dem die Gruppen dann verschiedene Umformungen durchführen und die vorherrschenden Regeln selbst erarbeiten können“ (vgl. 58:30).
Im Prinzip ist das Lernen erfolgreich, wenn die Schülerinnen und Schüler „sehen: ‚So kann ich nicht damit umgehen, aber wenn ich es übersetze in einen Term, kann ich damit umgehen, aber wenn ich es übersetze in einen Term und das dann nach den Rechenregeln die wir erarbeitet haben, nach den Gesetzen und so weiter, nach Klammern auflöse und so weiter kann ich das alles machen“, und sie lösen was und sie haben diesen ersten Schritt erreicht. ‚Aha ich kann damit umgehen’, so ein Erfolgserlebnis“ (8:39). Dazu sollte den Schülerinnen und Schülern klar werden, „‚Algebra, das fliegt einem nicht zu, man muss es auch üben’, dass also auch klar wird, gewisses Handwerkszeug bedarf bei jedem Routine und einer Übung, egal wie clever man ist“ (44:32). Zu diesem Zweck werden zum Beispiel Merkhefte gepflegt (vgl. 39:35).
Ein weiteres Charakteristikum für erfolgreiches Lernen ist die eigenverantwortliche Arbeit der Schülerinnen und Schüler und die Anerkennung dessen, die sie motiviert (vgl. 58:30). Die Schülerinnen und Schüler streben nach der Präsentation ihrer Ergebnisse, „also die wollen dann eh auch immer alle an die Tafel“ (35:16). Die Gelegenheit dazu muss ihnen gegeben werden, zum Beispiel zusätzlich zu eigener Tafelzeit in eigenständig vorbereiteten Präsentationen (vgl. 1:36:23).

Die Lernenden sollen zunächst ausreichend Zeit bekommen, sich mit dem Handwerkszeug der Algebra auseinanderzusetzen und dort Sicherheit zu gewinnen. Es wird vornehmlich auf konkrete Ergebnisse hin gearbeitet, die für die verschiedenen interessanten Situationen gefunden werden.
Dies führt dazu, dass eventuelle Vorurteile gegenüber der Algebra, die durch externe Einflüsse geprägt sind, abzubauen und offener gegenüber dem Thema zu agieren. Durch die Arbeit mit konkreten Zielen kann der Sinn in der Beschäftigung mit der Algebra gesehen werden und es können Erfolgserlebnisse bei der Lösung der Aufgaben erzielt werden.
Die Verwendung interaktiver, aktivierender Unterrichtsmethoden, bei denen die Schülerinnen und Schüler eigenverantwortlich und aktiv agieren können, kann zu Freude und Spaß im Unterricht führen.

6.4.5. Wie gelingt guter (Algebra-)Unterricht?

Frau D ist es wichtig, anzuerkennen, dass die Einführung in die Algebra einen kognitiven Sprung für die Schülerinnen und Schüler bedeutet. „Sie durften immer auch Klammern auflösen, alles miteinander machen, was sie durften und jetzt auf einmal ist da irgendwo ein Buchstabe den sie nicht einfach so mit rein nehmen dürfen. Und das ist wirklich, ich glaube das erschließt sich für die Schüler nicht, dass das eigentlich das gleiche System ist, sondern für sie ist es etwas völlig Neues. (...) Also ich glaube das ist wirklich die Hauptschwierigkeit“ (1:05:07). Das ist etwas, „[d]as muss man sich schon mal klar machen (...). Rechengesetze, die sie bisher immer verwendet haben, laufen da ins Leere“ (44:32). Zudem ergibt sich ein Problem dadurch, „wenn sie da x+3 oder x+3+2x haben, was sollen sie da machen? Also ganz häufig ist auch das Verständnis nicht da, gerade bei Termen, deswegen finde ich das manchmal auch ein bisschen schwierig, weil bei Termen ja nicht das Ziel die Lösung ist“ (ebd.), „Schüler [aber] auf das Ausrechnen gepolt“ (1:05:07) sind. Dieses „ist ja erst bei den Gleichungen der Fall“ (44:32). Aus diesem Grund entscheidet sich Frau D dafür „im Prinzip ziemlich schnell zu Gleichungen [zu] kommen“ (ebd.).
„Ja also natürlich sind sie erstmal irritiert, erstmal ist das immer eine Hürde [die Einführung von Variablen, An. JM]“ (40:31). Um diese „Hürde“ abzubauen, konzentriert sich Frau D darauf, zunächst an das Vorwissen der Schülerinnen und Schüler anzuknüpfen, denn „wenn man auch mal anknüpft an das, was die Schüler schon wissen, dann ist das immer gar nicht so das große Problem, finde ich“ (28:53). Dies wird vor allem auf die Idee der Variablen als Platzhalter bezogen, wenn es um die erste Annäherung an zu bearbeitende Probleme geht, dass man dann „so wie Platzhalter aus der Grundschule (...) wenn man daran anknüpft und dann eben in diesem Kontext macht, ich übersetze einen Satz, wo mir irgendwas nicht bekannt ist, mit irgendwie s, t, u, v, x, schön passend zum Kontext“ (ebd.).
Grundsätzlich ist es für Frau D wichtig, den Schülerinnen und Schülern die Frage nach dem „Wozu“ zu beantworten (vgl. 1:24:10, 1:45:25). „Das ist für mich irgendwie, für mich ist immer der Ansporn: Was brauchen sie dann fortlaufend und was hilft ihnen bestimmte Kompetenzen aufzubauen, die mir persönlich für sie halt wichtig sind, so Probleme lösen, modellieren“ (3:41). So verknüpft sie die Behandlung der Variablen direkt mit Sachkontexten, „das eigentlich ganz am Anfang klar wird, das x oder u oder sowas ist das, was für uns dafür steht, das ist unbekannt, das wollen wir rauskriegen“ (31:03). Dies spricht dafür, dass der Unterricht auf die Schülerinnen und Schüler ausgerichtet und an ihnen orientiert ist und zudem möglichst konkret die Fragen der Schülerinnen und Schüler beantworten soll. In der Algebra „findet man Anknüpfungspunkte wo die Schüler aufspringen können“ (26:12). Dennoch „finde [ich] es aber manchmal schwierig, wirklich so reale [Kontexte] zu finden“ (1:44:10). Manchmal reicht es aber sogar eingekleidete Aufgaben zu verwenden, „sei es auch nur eine Fläche von einem Garten berechnen (...) wo die Schüler schon früh sehen, ah, ich kann jetzt, wenn

ich das mir übersetze in einen Term, kann ich damit umgehen (...) und sie lösen was“ (8:39). Im Fall, dass es nicht reicht, greift sie auf Materialien, zum Beispiel von MABIKOM (vgl. 1:44:22, 1:39:27, vgl. 1:24:10), LEMAMOP oder CALIMERO[101] (vgl. 15:06) zurück oder arbeitet „auch immer mit den Parallelbüchern“ (14:56).

MABIKOM ermöglicht es ihr, binnendifferenziert zu unterrichten und „das Potenzial der Klasse [zu nehmen] und [auch] die richtig Guten“ (1:39:37) zu fördern. Die dem Potenzial ihrer Schülerinnen und Schüler entsprechende Förderung ihrer Schülerinnen und Schüler ist Frau D sehr wichtig. Grundsätzlich erachtet sie die Binnendifferenzierung als sehr wichtiges Instrument, „immer für die Schüler auch einen unterschiedlichen Zugang zu haben“ (15:06) und dabei immer zu fördern und zu fordern (vgl. ebd.), als Beispiel nennt sie Beweise, die verstärkt für „die, die mal weiter denken wollen und die die Logik ein bisschen weiter aufbauen wollen“ (35:32) gedacht sind, auch wenn sie „da (...) wirklich ein paar Schüler [verliert]“ (ebd.). Ihr ist bewusst, dass es schwer ist, alle Schülerinnen und Schüler mitzunehmen (vgl. 16:45), ist aber davon überzeugt, dass dies mit dem entsprechenden Material gelingt (vgl. ebd., 1:39:37).

Beschreibt Frau D, warum die Schülerinnen und Schüler aus ihrer Sicht die Algebra mögen, wird deutlich, welche Charakteristika guten Algebraunterricht auszeichnen. Sie sieht drei Dinge, „die eben wirklich für Schüler motivierend wirken. Zum einen dieses simple Erfolgserlebnis, wenn man mit dem, was man als Werkzeug hat etwas lösen kann und etwas rausbekommt und sich auch selber kontrollieren kann. Das ist ja auch das Tolle, sie können (...) die Probe selber machen. (...)“ (58:30). Zweitens „haben sie da Möglichkeiten eigenständig zu arbeiten. [Gibt] man Schülern mehr Eigenverantwortung (...), sind sie auch motivierter“ (ebd.). Schließlich, „weswegen ich glaube, dass das wirklich ein hohes Motivationspotenzial hat ist tatsächlich, dass man schnell mal sinnvolle Modellierungen machen kann. Und das einfach den Schülern zeigt, das kann ich wirklich gebrauchen“ (ebd.). Es wird klar, dass sie ihre Schülerinnen und Schüler motivieren möchte, indem sie ihnen den Sinn der unterrichteten Inhalte transparent machen möchte und ihnen ein möglichst eigenständiges Arbeiten ermöglicht, das Erfolgserlebnisse ermöglicht.

Bezüglich der verwendeten Aufgaben im Unterricht, möchte sie „Aha-Erlebnisse“ (8:39) erzeugen. Dies funktioniert z.B. über die Zahlenrätsel (vgl. ebd.) oder über „Knobeleien“ (ebd.). Diese erzeugen Spaß bei den Schülerinnen und Schülern und auch Verständnis, wenn es darum geht wie vereinfachend Äquivalenzumformungen wirken können (vgl. ebd.) und „so ein Erfolgserlebnis (...) ‚Aha, ich kann damit umgehen'“ (ebd.). Zudem zeigen die verschiedenen Anwendungsaufgaben die Nutzbarkeit der Algebra in den verschiedenen Kontexten (vgl. 1:19:20). Sie können auch begründen, warum es notwendig ist, diverse Inhalt zunächst üben zu müssen, denn „alleine, wenn man mit einem Satz einsteigt und sagt wir hatten ja jetzt Probleme, und jetzt müssen wir uns das Handwerkszeug schaffen und einfach üben“ (ebd.).

Weil die schematische Behandlung der Terme, die nicht mit konkreten Inhalten verknüpft ist, den oben genannten Charakteristika entgegenwirkt, unterrichtet sie „das Aufstellen von Termen so wenig, (...) sondern eben gleich mit den Gleichungen“ (58:30). Zudem ist es ihr bisher nicht gelungen, das Thema der Termumformungen „mit einem richtigen Problem an[zu]fangen, also ich habe noch nichts gefunden, wo es am Anfang noch nicht zu komplex ist um dann direkt auf Terme zu kommen“ (55:19).

Der erlebten Sinnlosigkeit bei den Termumformungen wird entgegengewirkt, denn es „darf in der Algebra nicht durch einfach nur stumpfes Anwenden der Umformungen eben zu der Lösung kommen, sondern das muss noch gefüllt sein mit Inhalt“ (1:13:30). Dieses Credo legt Frau D auch an ihre Bewertung des Vorhandenseins von Schemata im Unterricht an. Diese sind nötig und es ist „auch einfach falsch, es zu verteufeln, weil ohne kommen die Schüler eben nicht auf Lösungen“ (ebd.). „Aber, das ist jetzt der Kernpunkt, das Rezept darf nicht ein

[101] LEMAMOP = Lerngelegenheiten für Mathematisches Argumentieren, Modellieren und Problemlösen
CALIMERO = Computeralgebra im Mathematikunterricht: Entdecken, Rechnen, Organisieren

Selbstzweck sein“ (ebd.). Die Schülerinnen und Schüler sollen erkennen, „‚Wir brauchen das dafür.’ Für die kommenden oder für die Probleme, die wir im Einstieg hatten. Oder für die, die wir vielleicht noch nicht lösen konnten, die wir am Ende lösen“ (1:19:20), sozusagen „als entscheidendes Werkzeug für das Modellieren von Problemen und das Lösen [dieser]“ (1:21:22). Festgehalten werden diese, zum Teil selbst erarbeiteten Regeln (vgl. 58:30) in Merkheften (vgl. 39:35).

Um diese zu üben, wird eine gewisse Zeit benötigt, weil die Übung als elementar für erfolgreiches Lernen angesehen wird (vgl. 1:30:27). Die Zeit dafür wird sich im Zweifelsfall genommen (vgl. 1:33:19). Bei der Modellierung hat Frau D die Erfahrung gemacht, nicht zu schnell voranzugehen, „also manchmal bin ich in der ersten Etappe über das Ziel hinaus geschossen. Und dann kommt es nicht gut an“ (1:01:31). Aufgrund des Abstraktionsgrades bei der Modellierung muss ein angemessenes Tempo gewählt werden, damit die Motivation dann nicht verloren geht (vgl. ebd.).

Das Thema Übung wird methodisch ebenfalls binnendifferenziert und vielfältig angegangen (vgl. 1:31:51, 1:36:23), zum Beispiel in Gruppenarbeiten mit unterschiedlichen Niveaustufen (vgl. 16:45) oder durch die Bearbeitung von Aufgabensets, wobei die Aufgaben mit unterschiedlich vielen Sternchen versehen sind und „dann müssen sie innerhalb der nächsten zwei Doppelstunden so und so viele Sternchen sammeln (...) und die Schüler sind alle dabei, weil sie frei wählen dürfen, weil sie sich selbstständig vertiefen dürfen“ (1:32:24). Die Methoden Think-Pair-Share, Gruppenpuzzle, oder Kugellager werden dabei häufiger verwendet (vgl. 1:36:23).

Das Kernziel des Unterrichts ist für Frau D das Problemlösen und die Heranführung der Schülerinnen und Schüler an dieses Thema. Dabei strebt sie danach vereinzelt auch „ein größeres Projekt“ (1:33:19) zu bearbeiten, „wo die Schüler tatsächlich mal Probleme lösen“ (ebd.), denn sie ist sich aufgrund des Zeitmangelns darüber bewusst, dass sie sich Problemlöseaufgaben, wie sie diese im Referendariat kennengelernt hat, im Alltagsunterricht nur annähert (vgl. ebd.). Ob der Wichtigkeit des Problemlösens ist sie der Auffassung, dass wenn sie „zu sehr auf die komplexen Probleme geht (...) manche [verliert] (...). Aber man kann auch da, durch Unterstützung direkt im Unterricht, ja das auch immer hinkriegen, dass man immer mal wieder den Schwächeren mal einen kleinen Schubs gibt und sagt: ‚Hier, so könntet ihr eine Modellierung’, und dann dürfen sie sozusagen die Algebra erstmal wieder üben“ (16:45). Hier zeigt sich erneut der binnendifferenzierende Ansatz, der den schwächeren Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit gibt, Sicherheit in Form der Übung zu erlangen.

Zum Zweck der Modellierung wird der Problemlösekreislauf als Orientierung auf einer Metaebene thematisiert. Und „wenn man das vereinfacht, auf Schülerebene runterbricht, dann haben die da auch so ein bisschen was im Kopf, wo sie sagen, ah, ich kann mich da auch daran lang hangeln“ (19:37). Dies trägt zu einem gewissen Sicherheitsgefühl der Schülerinnen und Schüler bei. Es ist ihr wichtig, „dass wir uns nochmal über das Vorgehen Gedanken machen“ (38:33), deshalb „hab [ich] häufig so eine Metaebene (...) in meinem Unterricht“ (ebd.). Diesem Ziel wird auch die Inhalts- und Methodenwahl untergeordnet, „weil im Prinzip würd ich eher dann (...) die Inhalte [auswählen], die dann wieder Möglichkeiten bieten wo die Schüler auch mal in einer längeren Phase an einem Projekt arbeiten können, das dann mit mathematischen kleinen Modellierungsprozessen so zu sagen in eine Gleichung übersetzt wird“ (13:02). Die Schülerinnen und Schüler möchten gefordert werden, denn sie sind „eher motiviert durch solche komplexeren Aufgaben als immer nur durch das einfache Abarbeiten von Aufgaben“. Und obwohl es in der Algebra „häufig (...) so eine klare Aufgabe [gibt]: ‚Löse auf’, ja ok, dann weiß ich was ich machen muss, so dieses Rezeptartige. Aber wenn sie sich daran erst mal gewöhnt haben ist es manchmal schwierig das aufzubrechen“ (16:45). Dies begründet für sie zusätzlich die Notwendigkeit des Problemlösens.

Die Anwendung und Heranführung der Schülerinnen und Schüler an eine Metaebene hält Frau D für sehr wichtig, gerade auch bei der Behandlung von Fehlern, „und wenn man das auf einer Metaebene noch mal reflektiert und mit den Schülern darüber redet, wie sind wir vorgegangen, warum? (...) Das finde ich immer ganz nett“ (1:11:17). „[D]as hilft, also wirklich das mal verbalisieren, was ist da eigentlich schief gelaufen? Das ist, was Fehlvorstellungen dann auch aufdeckt“ (1:12:30). Diese gibt es in der Algebra vor allem in Bezug auf die Regeln des Termumformens, „dass ich zum Beispiel so etwas wie a^2 und a nicht zusammenfassen dürfte, obwohl da das a steht“ (1:03:33).

Behandelt sie Variablen, ist es ihr wichtig, den Schülerinnen und Schülern auf der Metaebene Transparenz zu vermitteln: „ ‚x bedeutet das, y bedeutet das.' Oder ‚z und irgendwas bedeuten das'“ (56:46) und „Das ist die Unbekannte, mit der dürfen wir das uns das machen und sie steht da und dafür“ (38:33), sodass die Schülerinnen und Schüler sich darüber bewusst sind worüber geredet wird. Dabei wird auf die formale Schreibweise geachtet, „Ja, mit Doppelpunkt und das gilt sozusagen“ (56:57). Die Transparenz bezieht sich auch darauf, den Schülerinnen und Schülern die Struktur des Unterrichts zu verdeutlichen, sodass sie wissen wozu sie zum Beispiel die Regeln im Unterricht erlernen und erkennen „Wir sind ja von da schon gekommen“ (1:19:20), wenn beispielsweise ein Einstiegsproblem erneut aufgegriffen wird. „Zumindest hoffe ich das sozusagen, dass ich wenigstens transparent sage, worum es geht, ja, dass zumindest der rote Faden dann bleibt. (...) Also ein Einstieg, der irgendwie klar macht (...) ‚So, das ist heute das Ziel'“ (1:36:26).

Der Unterricht soll den Schülerinnen und Schülern verschiedene Zugänge anbieten. Dabei legt Frau D Wert darauf anschaulich zu unterrichten, zum Beispiel durch den Wechsel der Darstellungsformen, „der eine kann das gerade über einen Graphen, der andere über eine Wertetabelle (...) und so weiter“ (1:44:33). Bei der Behandlung der Gleichungen wird dabei die Vorstellung der „Gleichung im Gleichgewicht“ (50:57) und der Idee der durch das Gleichheitszeichens initiierten „wahren Aussage“ (ebd.). Unterstützt wird dies durch das Bild des „in der Waage sein“ (1:01:31) unterstützt.

Die Verwendung des Rechners dient als weitere Begründung für die Reduzierung der Einübung der Rechenfertigkeiten, denn da die „Schüler (...) in der Lage sein [sollen] das [Aufstellen einer Gleichung, Anm. JM] ohne die Systeme hinzubekommen“ (1:47:04) und der Fokus auf dieser Kompetenz liegt, können sie auf ein zu langes Üben des „stupide[n] Rechnen[s]“ (ebd.) verzichten. „Weil ich das eigentlich als die Zukunft sehe (...), weil wir wissen, das können wir auch ersetzen, irgendwann durch den Taschenrechner“, es ist wichtiger, die „Lösung interpretieren [zu] können“. Deswegen eben auch die Verknüpfung zum Grafischen und der Weg vom Problemlösen hin zum Term oder zur Gleichung. Das sind so die zentralen Sachen“ (25:08). Zumal „der Taschenrechner nicht -‚die Sprache jetzt übersetzen in Terme und damit umgehen [kann]'. Da würd ja nur CAS helfen und das wiederrum würde ich nicht machen, weil dann damit (...) den Schülern die Möglichkeit [genommen wird] auch ohne CAS mal im Alltag irgendwie eben eine Gleichung umzubauen“ (1:47:04). Auch widerspricht die Rechnerverwendung zu Beginn ihrem Anliegen die Variablen verschieden zu nennen, da „man eigentlich immer nur das x“ (1:49:21) verwendet bei der Rechnernutzung.

Ihr Unterrichtsstil ist zusammenfassend darauf ausgelegt, den Schülerinnen und Schülern zu ermöglichen, eigenständig zu lernen. Sie möchte das Interesse der Lernenden wecken und sie an diesem neuen Aspekt selbstständig lernen lassen, wobei dies immer „mit Hilfsstrukturen durch die Lehrkraft“ (1:36:23) begleitet wird. Dies kennzeichnet einen co-konstruktivistischen Unterrichtsstil, der durch die im Unterricht vorhandene Metaebene gestützt wird.

Guter Algebraunterricht basiert zunächst auf der Anerkennung des erhöhten kognitiven Niveaus, das die Behandlung der Algebra mit sich bringt. Ein Problem ist die Argumentation auf einer abstrakten Ebene und die Verlagerung des Ausrechnens auf eine abstraktere Ebene ohne konkrete, meist eindeutige Zahlergebnisse.

Aus diesem Grund muss an das Vorwissen der Lernenden angeknüpft werden und es müssen

Anknüpfungspunkte im Leben der Schülerinnen und Schüler gefunden werden. Die Bearbeitung von sinnvollen Sachkontexten (variierend im Grad des Realitätsbezugs) untermauert die Sinnstiftung bei der Behandlung des neuen Themas. Hierbei werden Materialien aus verschiedenen Quellen herangezogen: Das Schulbuch, das Schulcurriculum und die Materialien von MABIKOM, LEMAMOP und CALIMERO.
Bei der Arbeit mit der neuen Sprache muss eine Meta-Ebene in den Unterricht implementiert werden. Auf dieser wird die Verwendung von Variablen reflektiert und der bewusste Einsatz der verschiedenen Algorithmen und Schemata.
Darüber hinaus ist Frau D ein binnendifferenzierter Unterricht, mit verschiedenen Aufgabenkonzepten und Darstellungsformen wichtig. Dies soll die Lernenden motivieren und sie optimal fordern und fördern. Frau D möchte das Potenzial der Klasse ausschöpfen.
Weiterhin soll die eigenständige und aktive Mitarbeit der Lernenden unterstützt werden. Dies gelingt zum Beispiel beim Kalkül-orientierten Umgang mit Termen und Gleichungen. Hierbei können sich die Schülerinnen und Schüler selbst überprüfen und Erfolgserlebnisse erreichen. Dies wiederum motiviert die Lernenden.
Dazu müssen den Lernenden die notwendigen Fähigkeiten und Fertigkeiten, im Sinne des Handwerkszeugs vermittelt werden.
Schließlich sollen möglichst viele Lernende am Unterricht partizipieren können. Ermöglicht wird dies durch die binnendifferenzierten Zugänge und durch die reichhaltigen Motivationsmaßnahmen.
Übergeordnet formuliert sie das Ziel die Anwendbarkeit der Algebra in verschiedenen Kontexten aufzuzeigen, was durch den Einsatz der verschiedenen Sachkontexte, Modellierungen und Problemlösungen gelingen soll.

6.4.6. Das Variablenverständnis von Frau D

Definiert werden die Variablen einerseits allgemein als „Eine Unbekannte, deren Wert wir noch nicht kennen" (40:00) und andererseits über den jeweiligen Kontext: „ich lasse sie tatsächlich hinschreiben: ‚X bedeutet das, Y bedeutet das'" (56:46).
Bei der Thematisierung der typischen Variablenkonzepte entsprechend der drei Aufgabenbeispiele erläutert Frau D: „Die Variable in der ersten Aufgabe, steht (...) für die erdachte Zahl. Die am Ende dann auch ganz konkret eine Zahl sein wird. Aber klar, für jede erdachte Zahl. Aber eben für diese gedachte Zahl. X würde da für die gedachte Zahl stehen. Oder y oder z oder was auch immer. Z hatten wir ja gesagt Zahl. So beim Zweiten. Beim Zweiten würde x für die Zahl stehen, bei der die Gleichung im Gleichgewicht ist, würde ich für die Schüler formulieren. Oder bei der das Gleichheitszeichen eine wahre Aussage darstellt (...).Und bei drittens würde x für die Lösung der Gleichung stehen, die Lösungsmenge also sein" (50:57, 52:11). Die konkrete Unterscheidung in die Variablenaspekte ist nicht möglich, da sie in Bezug auf Aufgabe drei nicht auf die Umformungsprozesse eingeht und bei Aufgabe zwei nicht die Einsetzungen thematisiert. Am ehesten ist noch davon auszugehen, dass sie den Gegenstandsaspekt in der Aufgabe eins sieht.
Zu Beginn wird aber die Variable unter dem Gegenstandsaspekt betrachtet, wenn gesagt wird: „[I]ch übersetze einen Satz, wo mir irgendwas nicht bekannt ist, mit irgendwie s, t, u, v, x, schön passend zum Kontext" (28:53) und dabei der Platzhalter betont wird, als etwas das für etwas Unbekanntes gesetzt wird, „es ist zwar noch nicht ganz passend, (...) wir könnten mit dem Platzhalter nicht rechnen, wir können ihn nicht verschieben und so weiter, das ist der Nachteil" (ebd.), aber dennoch wird die Variable erst einmal für etwas Unbekanntes eingesetzt, was dem Gegenstandsaspekt entspricht.

6.4.7. Das Bild der Mathematik - Frau D

Im Interview ist der Anwendungs-Aspekt (17) am höchsten ausgeprägt. Weniger stark sind der Schema (10)- und der Formalismus-Aspekt (4) ausgeprägt. Der Prozess-Aspekt (1) ist am wenigsten stark ausgeprägt. Dies spiegelt sich in der durch Frau D ausgerückten Anwendungsorientierung ihres Unterrichts wider. In Bezug auf die Rangplatzverteilung bewegt sich Frau D in den drei Bereichen Schema (Rang 6), Formalismus (Rang 5,5) und Anwendung (Rang 4) im Mittelfeld.
Aus dem Fragebogen ergibt sich die folgende Ausprägung der Skalen: Anwendung (19), Formalismus (15), Prozess (15) und Schema (11).
Daraus ergibt sich die folgende Übersicht über das allgemein-mathematische Weltbild:

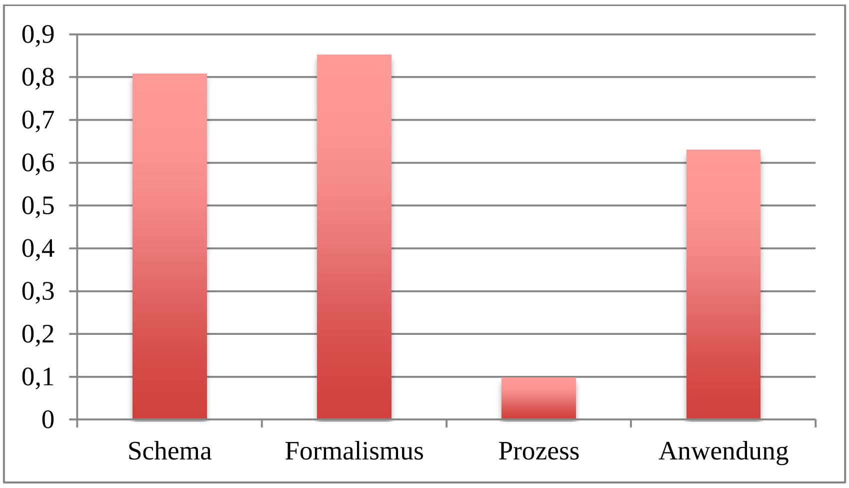


Abbildung 14: Das Bild der Mathematik - Frau D

In den drei Aspekten Schema, Formalismus und Anwendung weist sie starke Ausprägungen im Fragebogen auf. Im Interview liegt sie hingegen auf mittleren Rangplätzen. Damit zeigt sich in allen Aspekten eine stärkere Annahme im Fragebogen als im Interview.
Ihre Angaben im Fragebogen sowie im Interview kennzeichnen den Schema- und Formalismus-Aspekt als relativ wichtige Bestandteile ihres anwendungsorientiert geprägten Weltbildes.

6.4.8. Ziel-Mittel-Argumentationen - Frau D

Tabelle 34: Inhalte des Algebra-Curriculums, Frau D

		Probleme lösen → mit mathematischen Hilfsmitteln (Gleichungen, etc.) Probleme aus den verschiedensten Bereichen, beschreiben, modellieren und lösen	→	vereinzelt, vor allem geometrische Beweise (als innermathematisches Problemlösen), mathematisch nicht perfekt, aber die Logik des Vorgehens soll vermittelt werden
		↑		
Waagemodell, Äquivalenzumformungen; anschauliche und möglichst eigenständige Befassung der SuS mit den geltenden Regeln	↔	Umgang mit Gleichungen und Termen in Bezug auf das Umformen, die anzuwendenden Rechenoperationen und Rechenregeln erlernen, Lösung von Gleichungssystemen	↔	Kalkülhafte Tätigkeit, Kalkülaspekt
			↔	Verknüpfen mit graphischen Anschauungen
		↑		
		Terme und Gleichungen im Zusammenhang aufstellen, Inhalte in mathematische Zeichen übersetzen		
		↑		
		Variablen handhabbar machen indem die jeweilige Bedeutung im Kontext geklärt wird	↔	Variable als Unbekannte
		↑		
		mit den üblichen Notationen vertraut machen und nach längerer Übung begründet anwenden (z.B. Verkürzung des Malzeichens)		
		↑		
		intuitives Annähern an Variable, aufbauend auf die Platzhalteridee aus der Grundschule (Buchstabenwahl kontextgebunden, z.B. w für Weg)	↔	Variable unter dem Gegenstandsaspekt
		↑		
		in 5./6. Klasse Zahlenräume und die entsprechenden Rechengesetze und Rechenoperationen kennen lernen → Besonderheiten in den jeweiligen Zahlbereichen (Grenzen und Möglichkeiten) erlernen		

Tabelle 35: Ziele des Algebra-Curriculums, Frau D

										!Algebra als universell einsetzbares Problemlöseinstrument (=gemeint ist hier vor allem der Aspekt, dass die Algebra auch in den anderen Naturwissenschaften, aber auch in fast allen Lebensbereichen nutzbar ist, um Probleme zu modellieren und zu bewältigen)
								Wenn die SuS die Algebra als Instrument zum Argumentieren und Problemlösen verstehen	→	**können die SuS die Algebra in den verschiedenen Bereichen ihres Lebensalltags als Problemlöseinstrument nutzen**
								!Instrument zum Problemlösen und Argumentieren (=die Algebra bietet das Handwerkszeug um in einem weiteren Schritt Probleme lösen zu können.)		
		Wenn die SuS sich sicher in den verschiedenen Zahlenräumen bewegen und dort agieren	+	**Wenn die SuS algebraische Probleme jeglicher Art modellieren und mit dem erlernten Handwerkszeug lösen können**	+	**Wenn die SuS im logischen Denken geschult sind**	→	**können die Algebra als Instrument zum Argumentieren und Problemlösen verstehen**		
		!in Zahlenräumen agieren (=gemeint ist, dass sie die Rechenregeln und ihre Möglichkeiten und Grenzen in Bezug auf die verschiedenen Zahlsysteme kennen)		!Probleme modellieren !Handwerkszeug (=mit dem Gelernten, den Regeln zur Termumformung, etc. können die SuS Probleme im algebraischen Kontext bearbeiten)		!logisches Denken (=gemeint sind die Denkstrukturen, was sind die Voraussetzungen, was ist mein Ziel und wie komme ich da mit Hilfe meiner Voraussetzungen hin)				
Wenn man die Algebra inhaltlich so aufbaut wie beschrieben	→	**können sich die SuS sicher in den verschiedenen Zahlenräumen bewegen und dort agieren**	+	**können die SuS algebraische Probleme jeglicher Art modellieren und mit dem erlernten Handwerkszeug lösen**	+	**sind die SuS in logischem Denken geschult**				
!Behandlung algebraischer Inhalte										

Tabelle 36: Ziele des Mathematik-Curriculums, Frau D

!Eigenständige Menschen
(=dies ist das Ziel der mathematischen Ausbildung einen Beitrag dazu zu leisten, dass die SuS eigenständige Menschen werden)

Wenn die SuS gelernt haben, sich richtig einzuschätzen → **kann ein Beitrag dazu geleistet werden, die SuS zu eigenständigen Menschen zu erziehen**

!sich richtig einzuschätzen
(=die SuS sollen lernen sich und ihre Leistungen realistisch einzuschätzen)

!Spaß
(=gemeint ist, dass die SuS an der Arbeit mit der Mathematik Spaß und intrinsische Freude entwickeln können)

Wenn im Unterricht eine hohe Schüleraktivität gefördert wird + **Wenn verstanden worden ist, dass ein gewisses Handwerkszeug zur Problembewältigung notwendig ist** → **können die SuS lernen ihren Kenntnisstand richtig einzuschätzen**

Wenn die SuS die Mathematik als Wissenschaft begreifen, die es ermöglicht die Welt mathematisch zu beschreiben und Probleme in ihr mathematisch zu lösen → **können die SuS Spaß und Freude an der Mathematik haben**

!hohe Schüleraktivität
(=gemeint ist, dass die SuS die Gelegenheit haben eigenständig zu arbeiten, in vielen Gruppenarbeiten und Sozialformen, dass sie selbst Präsentationen erstellen und sich selbst und ihren Kenntnisstand einschätzen)

!Handwerkszeug
!Problembewältigung
(=gemeint ist, dass die SuS die Rechenregeln und Algorithmen erlernen, weil sie anerkennen, dass sie diese benötigen, um voran zu kommen)

!Welt beschreiben
!Probleme lösen
(=die SuS können das Konstrukt der Mathematik in Ansätzen begreifen, dass sie also mit dem Erlernten auch bereichsübergreifend neue Dinge herausfinden können und damit Probleme in der Umwelt bearbeiten können)

Wenn die SuS Algorithmen als Problemlöseinstrumente verstehen, deren Sinn sich durch das jeweilige Problem erschließt → **können die SuS die Mathematik als Wissenschaft begreifen, die es ermöglicht die Welt mathematisch beschreiben und Probleme in ihr mathematisch lösen**

!Algorithmen als Problemlöseinstrument
!Sinn
(=die SuS müssen begreifen, dass der Sinn sich des Erlernens und der Anwendung von Regeln und Algorithmen über die Kontextgebundenheit ergibt)

Wenn im Unterricht eine hohe Schüleraktivität gefördert wird + **Wenn verstanden worden ist, dass ein gewisses Handwerkszeug zur Problembewältigung notwendig ist** + **Wenn im Unterricht interessante Aufgaben und Rätsel gestellt werden, die den Rätselcharakter der Mathematik herausstellen** → **können die SuS Algorithmen als Problemlöseinstrumente verstehen, deren Sinn sich durch das jeweilige Problem erschließt**

!hohe Schüleraktivität
(=gemeint ist, dass die SuS die Gelegenheit haben eigenständig zu arbeiten, in vielen Gruppenarbeiten und Sozialformen, dass sie selbst Präsentationen erstellen und sich selbst und ihren Kenntnisstand einschätzen)

!Handwerkszeug
!Problembewältigung
(=gemeint ist, dass die SuS die Rechenregeln und Algorithmen erlernen, weil sie anerkennen, dass sie diese benötigen, um voran zu kommen)

!interessante Aufgaben
!Rätselcharakter
(=gemeint sind zum Beispiel Knobelaufgaben oder auch die beliebten Zahlenrätsel, dies entspricht auch dem Rätselcharakter der Mathematik)

Tabelle 37: Das Lernen, Frau D

						Wenn die SuS eigenverantwortlich und aktiv lernen !eigenverantwortlich und aktiv (=die SuS möchten zeigen, was sie können und sich ausprobieren, dies soll ihnen in einer entsprechenden Lernumgebung ermöglicht werden, durch Präsentationen, eigene Tafelzeiten, zahlreiche Gruppenarbeiten)	+	**Wenn die SuS ihre eventuellen Vorurteile und Ängste vor dem „Buchstabenrechnen“ verlieren** !Vorurteile und Ängste abbauen (=wenn die SuS aus höheren Jahrgängen oder aus ihrem Umfeld oder auch durch die ersten Aufgaben, die ihnen durch das vermeintlich neue System begegnen negative Gefühle erzeugt haben, können diese nun abgebaut werden)	→	!Erfolgserlebnisse (=die SuS können durch eigenständige Arbeit, durch das Erzielen von konkreten Ergebnissen und das Bewältigen von Problemen Erfolgserlebnisse erzeuge) **können die SuS Erfolgserlebnisse erreichen**	+	!Spaß (=die SuS können schließlich selbst die Notwendigkeit der Algebra begreifen und Spaß an der Modellierung von Situationen und Problemen erlangen) **können Spaß an der Algebra und der Mathematik haben**
Wenn man den SuS ausreichend Zeit gibt, Algorithmen bis ein gewisser Grad an Sicherheit erlangt ist zu erlernen und immer konkrete Ergebnisse ermöglicht !Zeit !Algorithmen !Sicherheit !konkrete Ergebnisse (= gemeint ist dass die SuS den „Drang“ haben, zunächst die Algorithmen regelrecht zu internalisieren und sich darin sicher zu fühlen, diesem Bedürfnis soll bis zu einem gewissen Grad nachgegeben werden und es soll darauf geachtet werden, konkrete Ergebnisse zu erzielen, sodass das Bedürfnis der SuS nach dem Ausrechnen bedient wird)	+	**Wenn man die SuS durch interessante Probleme und eine anschauliche Vermittlung dazu bewegt, gewohntes Terrain zu verlassen** !interessante Probleme !anschauliche Vermittlung !gewohntes Terrain (=die SuS sollen durch Rätsel, schülernahe Aufgaben, komplexere Probleme und dabei auf anschauliche, sinngebende Art und Weise (Graphiken, Bilder, Tabellen...) dazu bewegt werden, sich von den Algorithmen zu lösen und selbst das Bedürfnis haben sich den Problemen zu stellen)	+	**Wenn man den SuS klar die Unterrichtsstrukturen und Entscheidungen begründet** !begründetes Vorgehen !Unterrichtsstrukturen (=gemeint ist, dass die SuS die um den Unterricht gespannte Klammer verstehen, dass also zunächst ein Problem aufgeworfen wird, dann das nötige Handwerkszeug erlernt und geübt werden muss, um dann zu dem Problem zurück zu kommen und dieses mit dem Erlernten zu bewältigen)	→	**können die SuS eigenverantwortlich und aktiv lernen**	+	**können eventuelle Vorurteile und Ängste über das „Buchstabenrechnen“ abbauen**				

Tabelle 38: Das Lehren, Frau D

														!Potenzial (=die SuS können durch das Prinzip des Forderns und Förderns bestmöglich geschult werden)		!Partizipation (=die Binnendifferenzierung und die Art des Unterrichts erlauben die größtmögliche Teilhabe)		!Anwendbarkeit (=der inhaltliche Nutzen der vermittelten Inhalte wird verstanden)
								Wenn der Unterricht binnendifferenziert ist	+	**Wenn der Unterricht durch die eigenständige, aktive Mitarbeit der SuS, gestützt durch die Lehrkraft bei diesen Erfolgserlebnisse hervorruft**	+	**Wenn der Unterricht die SuS mit den notwendigen Fertigkeiten ausstattet**	→	**kann das Potenzial der Klasse bestmöglich ausgeschöpft werden**	+	**können möglichst viele SuS am Unterricht partizipieren**	+	**kann die Anwendbarkeit der Algebra im Leben der SuS erkannt werden**
								!Binnendifferenzierung (=die Binnendifferenzierung bezieht sich auf das verwendete Material (Blütenaufgaben), aber auch auf die Inhalte (Schema, Beweis) und tritt vor allem in den umfangreichen Übungsphasen auf)		!eigenständiges, aktives Arbeiten !Unterstützung durch Lehrkraft !Erfolgserlebnisse (=gemeint ist, dass die Verantwortung für das Lernen größtenteils den SuS übergeben wird und die Lehrkraft durch Hilfsstrukturen unterstützend und zusammenfassend wirkt)		!notwendige Fertigkeiten (=den SuS muss das Handwerkszeug gegeben werden, die angestrebten Probleme bewältigen zu können, sodass die Hürde eher die Übersetzung der Inhalte ist und nicht die Lösung auf mathematischer Seite)						
		Wenn an das Vorwissen der SuS angeknüpft wird	+	**Wenn der Sinn des Neu-Erlernten mithilfe von Sachkontexten anschaulich verdeutlicht worden ist**	+	**Wenn im Unterricht eine Metaebene implementiert worden ist**	→	**soll der Unterricht binnendifferenziert durchgeführt werden**	+	**soll der Unterricht durch die eigenständige, aktive Mitarbeit der SuS, unterstützt durch die Lehrkraft, zu Erfolgserlebnissen führen**	+	**soll der Unterricht die SuS mit den notwendigen Fertigkeiten ausstatten**						
		!Vorwissen (=hier wird vor allem die Platzhalteridee der Variablen aufgegriffen, also zunächst noch unbekannte Lücken durch Buchstaben zu ersetzen, ohne erst mal damit zu agieren)		!Sinngebung !anschaulich !Sachkontexte (=den SuS muss die Bedeutung und Nützlichkeit der Variablen so in realen Kontexten anschaulich verdeutlicht werden)		!Metaebene (=gemeint ist hier vor allem die Reflexion darüber, was mache ich mit den Variablen, warum und wofür stehen diese, einerseits für das Verständnis, andererseits um Fehler aufzudecken)												
Wenn anerkannt wird, dass die Einführung der Algebra einen kognitiven Sprung für die SuS darstellt	→	**muss an das Vorwissen der SuS angeknüpft werden**	+	**muss der Sinn des Neuen anschaulich und mithilfe von Sachkontexten verdeutlicht werden**	+	**muss im Unterricht eine Metaebene implementiert werden**												
!kognitiver Sprung																		

(=gemeint ist der Sprung in Bezug auf die anwendbaren Regeln, dass diese nicht uneingeschränkt anwendbar sind, sobald Variablen enthalten sind und auch die Unterscheidung der Variablen)

6.4.9. Unterrichtsbeobachtungen und Klausurenanalyse - Frau D

Das Thema der ersten beobachteten Stunde in einer siebten Klasse, ist die Einführung von Termen zur Beschreibung von Sachverhalten. Zunächst wird die Stunde mit einem nicht bewerteten Kurztest begonnen, der sich mit Rechenregeln in den verschiedenen Zahlenräumen beschäftigt. Dieser dient der Sicherung und Auffrischung der Rechenregeln. Die Korrektur erfolgt gemeinsam an der Tafel, dabei korrigieren sich die Lernenden gegenseitig und Frau D korrigiert, wenn die Schülerinnen und Schüler nicht weiterkommen.

Begonnen wird das neue Thema mit einem Zahlenrätsel der Form „Ich denke mir eine Zahl...“. Frau D errät nach kurzer Zeit alle erdachten Zahlen und fragt dann die Lernenden im Unterrichtsgespräch: „Wie bin ich drauf gekommen?“. Sie strukturiert die Diskussion durch Fragen wie: „Kennt ihr Platzhalter?“ und „Was ist denn dann x?“. Es entsteht ein lebhaftes Unterrichtsgespräch, wobei alle Lösungsvorschläge an der Tafel festgehalten werden. Frau D regt an: „Und nun wollen wir mal gucken, wie wir mit unseren bekannten Rechenregeln das hier an der Tafel so vereinfachen können, dass wir hinter mein Geheimnis kommen“. Gemeinsam wird der Term auf $10 \cdot x$ verkürzt und gemeinsam gedeutet.

Anschließend werden die wichtigsten Schritte und Begriffe im Merkheft festgehalten. Frau D definiert: „Ein Term ist eine nicht ausgerechnete Rechenaufgabe“, „Eine Variable ist ein Zeichen als Platzhalter für eine beliebige, unbekannte Zahl“. Der Schwerpunkt wird in beiden Fällen auf die Berechnung gelegt, was das Verständnis der Variablen als Unbekannter untermauert.

Darauffolgend üben die Lernenden gemeinsam und stellen sich gegenseitig Zahlenrätsel. Der Ergebnisvergleich erfolgt stärker angeleitet durch Frau D, wobei sie immer wieder auf die richtige Verwendung der Klammern verweist.

Als letzte Aufgabe wird die Aufstellung eines Terms für ein Mobile gestellt. Angeregt wird dies durch die Worte: „wollen wir uns jetzt mal angucken, wo wir das mit den Termen noch brauchen“.

Diese Stunde zeigt die Betonung der geltenden Rechenregeln als Voraussetzung, der Platzhalter-Idee, die Fokussierung auf das spätere Ausrechnen und die Bemühungen von Frau D ihre Lernenden zu motivieren und sie in die Unterrichtsgestaltung mit einzubeziehen.

Die zweite beobachtete Stunde war im Gegenzug zur ersten beobachteten Stunde aufgrund von organisatorischen Umständen nur 45 Minuten lang.

Begonnen wurde mit einer Kopfübung mit gemischten Aufgaben. Es entsteht das Problem des richtigen Umgangs mit Einheiten. Dies wird zunächst im Klassenverband geklärt. Daran anschließend fragt Frau D die Definitionen von Termen und Variablen ab. In Folge dessen werden ein Term mit den Variablen x und y und verschiedene Werte für x und y gegeben und die Termwerte sollen durch die Lernenden bestimmt werden. Dabei entstehen vor allem bei der Einsetzung des Wertes 0 Probleme. Frau D animiert die Schülerinnen und Schüler sich gegenseitig zu helfen und lässt verschiedene Schülerinnen und Schüler die getätigten Aussagen wiederholen und umformulieren bis die aus ihrer Sicht letzten Unklarheiten beseitigt sind. Auf Basis des Buchs sollen die Lernenden weiter daran arbeiten selbstständig Terme aufzustellen. Diese werden abschließend verglichen. Diese Stunde war insgesamt mehr angeleitet, beinhaltete aber auch Eigenarbeitsphasen. Die Betonung der Grundlagen und der geltenden Regeln war präsenter.

Durch die inhaltliche Charakterisierung der Variablen, die Betonung der geltenden Rechenregeln sowie die auf die Motivierung der Lernenden ausgelegten Interaktionen kann davon gesprochen werden, dass beide Unterrichtsstunden den rekonstruierten subjektiven Theorien entsprechen.

Die Analyse der Klausur von Frau D ergibt die folgende Übersicht:

Tabelle 39: Klausuranalyse - Frau D

Kompetenz(en)	math. argumentieren			Probleme mathematisch lösen			mathematisch modellieren			mathematische Darstellungen verwenden			formal-technisch arbeiten			mathematisch kommunizieren		
Anforderungsbereich	I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II	III
Stelle auf							x									x		
Berechne durch Einsetzen													x					
Berechne													x					
Vereinfache													x	x				
Finde													x			x		
Stelle auf							x									x		
Berechne													x					
Gib an							x									x		
Berechne														x				

Die Klausur legt den Schwerpunkt auf das formal-technische Arbeiten und das mathematische Kommunizieren, jeweils eher im unteren Anforderungsbereich. Eines ihrer Unterrichtsziele ist es den Lernenden das Modellieren näher zu bringen. Dies wird durch die Klausur abgebildet. Die Aufgabenstellungen „Gib an“ und „Berechne“ sowie „Stelle auf“ und „Berechne“ hängen jeweils zusammen. Dies kennzeichnet die Beschreibung ihrer Unterrichtsstrategie, dass nämlich die Kalkül-orientierten Aufgaben nicht als Selbstzweck behandelt werden sollen, sondern immer im Kontext einer konkreten Problemlösung. Der Schwerpunkt liegt aber dennoch auf dem formal-technischen Arbeiten. Die Gründe für diese Abweichung sind nicht erhoben worden.

Da es sich aber um eine Überbetonung eines Bereichs handelt, dem sie nach eigenen Angaben einen größeren Raum im Unterricht einräumt als eigentlich intendiert, liefert dieses Ergebnis keinen Grund die rekonstruierten subjektiven Theorien zu widerlegen.

Die Klausur kann insgesamt mit den rekonstruierten subjektiven Theorien von Frau D in Einklang gebracht werden.

6.5. Frau E

Frau E[102] ist seit 7 Jahren als Lehrerin an einem niedersächsischen Gymnasium tätig. Sie unterrichtet mit dem Lambacher Schweizer und setzt in ihrem Unterricht CAS als Rechnertechnologie ein. Sie war zwischen ihrem Referendariat und ihrer Tätigkeit als Lehrerin einige Jahre selbstständig außerhalb des Schulsektors tätig.

6.5.1. Was sind die Inhalte des Algebraunterrichts?

Auf die Frage, was mit dem Begriff „Algebra“ verknüpft wird, antwortet Frau E spontan: „[A]lles, was (...) mit Zahlen zu tun hat, Rechenfertigkeiten und (...) mit [der] Verknüpfung von Zahlen“ (0:33-1). „[K]lar Bruchrechnung müssen sie natürlich auch zu Fuß können“ (19:28-4). Sie ergänzt Terme und Gleichungen (vgl. 1:07-1): „[A]uf jeden Fall (...) Termumformungen, Gleichungen, ja mit Geradengleichungen umformen, und so weiter und natürlich auch mit Modellierungen und alltagsbezogenem Lösen von (...) Formeln“ (0:18-2) als grundlegende Inhalte. Das Lösen von Gleichungen stellt ihr Lieblingsgebiet in der Algebra dar (vgl. 7:20-1), weil „das eigentlich eines der grundlegendsten Sachen [ist], die man in der Mathematik braucht“ (1:07-1). Dieses muss aber nicht nur deswegen am intensivsten behandelt werden, sondern auch, „weil’s da so auch so viele unterschiedliche Fälle gibt, die man da beachten muss und die den Schülern auch schwerfallen, dass man da wirklich ohne Ende üben muss“ (2:40-4). Die Variablen werden zu Beginn der Einheit unterrichtet, „weil es das Schulbuch ja auch so gemacht hat“ (5:42-1). Sie werden als „ein wichtiger Kern des Mathematikunterrichts“ (5:53-4) betrachtet.
Eine Variable wird durch Frau E definiert als „Platzhalter für Zahlenwerte“ (6:52-4).
Eingeführt werden diese über die Idee, dass es Situationen gibt, in denen die Schülerinnen und Schüler selbst die Notwendigkeit sehen, Variablen zu verwenden. „[D]a habe ich das so ähnlich wie mit so einem Handytarif. (...) Quasi dieser Term, den ich ja aufstelle, wo die Variable nachher erst einmal gar nicht vorkommen, der hat eine bestimmte Struktur und dann stelle ich immer die Frage. Gleich (...) wie kann ich das jetzt, auch wenn ich jetzt 500 [habe], wie sieht es denn dann aus? Und dann theoretisch (...) haben sie schon einmal wenigstens begriffen, dass es Sinn macht, jetzt da etwas einzusetzen und das umzuformen. Denn da komme ich dann auch auf diese Gleichung dann auch wieder zurück. Und das ist dann bei mir immer dieses ‚x’ oder ‚a’ oder ‚b’ oder was auch immer“ (6:52-2). Es „ist mir wichtig, dass die eben nicht nur wie das in den Schulbüchern geschieht, ganz oft nur immer dieses x benutzen“ (6:12-4). Die Struktur des Terms bezieht sich darauf, dass sich in vielen Fällen immer nur eine Zahl ändert, und die anderen Zahlen konstant bleiben.
Da Frau E den Fokus auf das Ausrechnen legt und darauf, dass die Schülerinnen und Schüler handfeste Ergebnisse erhalten, liegt der Schwerpunkt auf der Variablen als Unbekannter. Dies wird untermauert durch ihr Vorgehen, wenn die Variable als „Platzhalter (...) erst einmal gar nicht für eine Zahl, sondern für irgendwas“ (6:52-2) verstanden wird, also als Leerstelle, die je nach Fall gefüllt wird (s. obiges Beispiel). Schließlich wird diese Leerstelle dann durch einen Buchstaben ersetzt, der aber dann je nach Bedarf berechnet wird. Die Verallgemeinerungsprozesse, in der die Variable als Unbestimmte verstanden werden kann, werden von Frau E nicht angesprochen. In ihrem Fall wird die Variable in Abhängigkeit des Sachkontextes belegt und schließlich berechnet.

[102] Die Aufnahme ist in fünf Abschnitte geteilt, daher wird hinter die jeweiligen Zeiten durch einen Bindestrich und die entsprechende Zahl zwischen 1 und 5 der jeweilige Abschnitt gekennzeichnet, sodass die Nachvollziehbarkeit gegeben ist.
Darüber hinaus sei angemerkt, dass syntaktische und semantische Fehler aus den Transkriptionen übernommen und nur in manchen Fällen geglättet werden können, da das Originaltranskript verwendet wird.

Terme zu unterrichten, wird als schwierig angesehen, weil diese sehr abstrakt sind und es infolgedessen kaum möglich ist, Erfolgserlebnisse zu vermitteln. So kommt Frau E zu dem Schluss „ich [würde] das mit den Termen erst mal (...) nicht so extrem aufwendig machen. Sondern relativ einfach halten“ (5:35-2), „eben wirklich nur erst einmal (...) Aufbau eines Terms und das Aufstellen, aber diese ganzen Termumformungen später, also das, da merke ich dann auch immer, also bis der Schüler überhaupt erst einmal überblickt hat, wie man mit umgeht, das kostet so viel Zeit“ (4:34-1), wobei es „denen glaube ich schwerfällt: Dieses abstrakte Denken wie man einen Term aufstellt“ (6:16-2), „sich was drunter vorzustellen“ (12:10-2).

Das Erlernen des Handwerkszeugs, „wie man mit Termen umgeht und Termumformungen und Gleichungenlösen“ (12:53-3) wird in Form von Merkheften festgehalten (vgl. 7:03-3). Dabei wird zusätzlich auf die formal richtigen Begriffe geachtet, „[d]ie müssen bei mir dann sogar auch wissen, was ist ein Dividend und ein Divisor“ (0:51-3). Es geht darum, „ein vernünftiges Rüstzeug zu schaffen, also vernünftige Grundlagen (...), um Probleme zu lösen“ (2:06-5).

Beweise werden vornehmlich behandelt, „wenn ich eine etwas leistungsstärkere Truppe habe (...). Weil ich finde, durch diese Beweisverfahren, ja das ist so eine andere Denkform, die man dadurch erlernt. Das hat bestimmt auch Vorteile. Aber wenn das jetzt wirklich leistungsschwächere Klassen [sind], das ist dann wirklich so, dass da viele eben dann nicht mitkommen“ (17:45-4). Diese werden dann in jedem Fall vorgeführt und der Anspruch wird formuliert: „[I]ch bin schon froh, wenn ihr die Schritte jetzt nachvollziehen könnt, ihr müsst das nicht selbstständig erarbeiten“ (18:08-4). Dennoch erfolgt die Reflexion über die durchgeführten Schritte im Dialog mit der Klasse (vgl. ebd.).

Das Problemlösen ist Bestandteil des Unterrichts von Frau E ebenso wie das Modellieren, „eben um den Schülern das, den Stoff näher zu bringen. Den Bezug herzustellen zu ihrem Alltag“ (15:46-4). Das „alltagsbezogene (...) Lösen von auch Formeln“ (0:18-2) ist für sie fester Bestandteil des Unterrichts. Die Verwendung von Termen und Gleichungen ist dabei unerlässlich, aber dies wird erst durchgeführt „wenn wir dann soweit sind (...). Aber das dauert natürlich. Das sind dann Sachen, die ich, glaube ich, dann zum Ende hin machen würde. Wo sie dann wirklich so fit sind, dass sie das für sich selber dann einsetzen können“ (16:15-4).

Ungleichungen „würde ich noch am ehesten streichen (...) weil das auch, finde ich, erst einmal, gerade in Klasse 7, für mich da auch noch nicht so viel Sinn macht“ (4:05-1).

Das Beherrschen der Rechengesetze und -regeln in den verschiedenen Zahlenräumen bilden verknüpft sie mit der Behandlung der Algebra. Diese werden beim späteren Umformen der Terme und Gleichungen benötigt.

Zu Beginn wird die Variable in Sachkontexten als Platzhalter für zu bestimmende Zahlenwerte eingeführt. Der Einsatz verschiedener Buchstaben ist ihr in diesem Kontext wichtig. Die Variablen werden von Beginn an in Term- und Gleichungsstrukturen eingebettet, in denen die Notwendigkeit sie zu verwenden deutlich wird. Die Behandlung der Terme wird knapp gehalten, insofern als dass auf den Termaufbau und die Strukturen in Kürze eingegangen wird. Schnell wird dann zum Lösen von Gleichungen übergegangen. Dies ist das Lieblingsthema von Frau E in der Algebra. Sie liefern konkrete Lösungen und bieten Möglichkeiten Anwendungskontexte mit einzubinden. Für die Schülerinnen und Schüler führt das rein abstrakte Arbeiten mit den Termen zu Frust, wohingegen beim Lösen von Gleichungen eine gewisse Selbstwirksamkeit erreicht werden kann, wenn konkrete Ergebnisse erzielt werden.

Das Ziel des Algebraunterrichts ist infolgedessen die Bearbeitung von Problemlöse- und Modellierungsaufgaben wofür zunächst das Handwerkszeug, wie die Rechengesetze, die Regeln zur Gleichungs- und Termumformung erlernt werden müssen.

Die Variable wird von Frau E überwiegend als Unbekannte aufgefasst, die in den verschie-

denen Kontexten mit dem Ziel eingeführt wird, berechnet zu werden.
Das Beweisen spielt im Unterricht von Frau E eine untergeordnete Rolle und wird nur bei stärkeren Gruppen durchgeführt. Bei den übrigen Gruppen wird es von den Lernenden nur nachvollzogen und nicht aktiv durchgeführt.
Mit der Variablen zu beginnen, begründet Frau E durch die Stellung dieser im Lehrbuch.

6.5.2. Was sind die Ziele des Algebraunterrichts?

Algebra wird als Grundlage „für viele weitere Dinge“ (0:20-1) betrachtet. Konkretisiert wird, dass „der größte Nutzen (...) in der Struktur überhaupt [liegt] und ich finde auch das Denken verändert sich auch“ (2:31-1). Gemeint sind einerseits das „abstraktere Denken“ (2:52-1) und andererseits „diese algebraischen Strukturen“ (1:30-1). Ersteres wird beschrieben, indem gesagt wird: „Es löst einen Knoten irgendwann, wenn es denn klappt“ (2:52-1), wenn man „plötzlich auch mit Platzhaltern umgehen muss (...), das man wirklich versucht, sich eben nicht auch sich immer was darunter vorzustellen“ (ebd.).
Es geht also um den Übergang von dem konkreten Zahlumgang hin zu einem abstrakten Umgang mit etwas zunächst Unbekanntem im Rahmen der Verallgemeinerungen bei der Bearbeitung von Anwendungskontexten (vgl. 6:52-2).
„Das konkrete Ziel ist einmal, dass sie wirklich ein Verständnis dafür entwickeln. Was hat dieses x überhaupt. Dass sie diese Angst vor dem x verlieren und dieses nicht mehr so abstrakt sehen. (...) [E]in andere[r] Aspekt ist eben auch wirklich dieses Handwerkszeug, wirklich beherrschen wie man mit Termen umgeht und Termumformungen und Gleichungslösen umgehen kann. Und eben ihnen auch zeig[t], wozu brauche ich das. Also diesen Alltagsbezug irgendwo herstellen. Dass es auch so Sinn macht, da eben auch irgendwas auszurechnen“ (12:53-3). Hier werden drei Ziele berücksichtigt: Die Schülerinnen und Schüler sollen ihre Angst vor dem Abstrakten verlieren, sollen das prozedurale Verständnis in Bezug auf die Term- und Gleichungsumformungen erlangen und schließlich den Nutzen und die reale Anwendbarkeit des Erlernten in ihrem Alltag erkennen. Dabei helfen die Variablen, denn „durch die Variablen [kann] auch de[r] Aspekt des Problemlösens gut dar[ge]stell[t]“ (4:09-5) werden.
Um die Angst vor dem Abstrakten abzubauen und entsprechend das Abstraktionsniveau zu reduzieren, achtet Frau E darauf, dass ein Merkheft geführt wird, indem die Schülerinnen und Schüler die Inhalte „in eigenen Worten formulieren (...) Und das hat sich echt bewährt“ (16:17-2). Die Schülerinnen und Schüler „müssen die ganzen Formeln (...) durch eigene Worte erklären. Was ist das? Wozu brauche ich das? Wie muss ich das umformen?“ (14:57-2). Terme und Gleichungen werden als „eines der grundlegendsten Sachen [beschrieben], die man in der Mathematik braucht“ (1:07-1, vgl. 2:05-1).
Die Algebra wird insgesamt als Rechenfertigkeit betrachtet und als Instrument zum Problemlösen (vgl. 4:48-4), „wenn man irgendwann verstanden hat wie man da rangehen muss“ (2:06-5). Dies vereint die von Frau E angesprochenen Dimensionen, zunächst das Handwerkszeug zu beherrschen, um dieses dann in Aufgaben mit einem Alltagsbezug zu setzen, und in diesem Zusammenhang deren Sinn zu erfahren.
Zudem liegt ein Nutzen in der Vorbereitung auf das Abitur, denn „ohne Algebra, ist [man] da hoffnungslos verloren“ (0:15-5).

Durch den Algebraunterricht sollen die Schülerinnen und Schüler das nötige Handwerkszeug erlernen, wie mit Variablen, Termen und Gleichungen hantiert werden muss. Der Übergang von dem konkreten Zahlenrechnen zum abstrakteren Arbeiten mit Variablen soll so gestaltet werden, dass die Lernenden keine Angst vor dem Umgang mit den Variablen haben und dass sie den Nutzen der Variablen in der Modellierung realer Anwendungsbezüge begreifen.

Dies schult einerseits das abstrakte und logische Denken der Lernenden und entwickelt bei ihnen die Vorstellung des Handwerkszeugs als Instrument um Alltagsprobleme lösen zu können.
Darüber hinaus bereiten diese Fähigkeiten und Fertigkeiten die Schülerinnen und Schüler auf das Abitur und die Oberstufe vor.

6.5.3. Was sind die Ziele des Mathematikunterrichts?

Es ist ihr Ziel „einmal ein vernünftiges Rüstzeug zu schaffen, also vernünftige Grundlagen (...), um Probleme zu lösen. Und gerade mit der Mathematik und der Algebra kann man ja wirklich richtig schöne Probleme lösen, wenn man irgendwie verstanden hat, wie man da rangehen muss“ (2:06-5). Dies ist das „allerschönste an der Mathematik, (...) dass sie so vielseitig ist und dass man mithilfe der Mathematik eben wirklich viele Probleme des Alltags beschreiben und auch lösen kann“ (4:47-5). Dies ist nicht einfach zu bewerkstelligen, aber „wenn man das dann geschafft hat und die Schüler diesen Weg verstanden haben, dann ist das für mich also, ja dann hat man viel erreicht, glaube ich“ (ebd.).
Frau E betont, wie wichtig es ihr ist, „dass die eben überhaupt begreifen, wieso forme ich denn überhaupt Gleichungen um, was für ein Bezug steht dahinter? Weil ich ja, wenn ich in die anderen Naturwissenschaften gucke, auch Physik und Chemie, wenn ich keine Gleichungen lösen kann, dann stehe ich halt auf dem Schlauch“ (1:02-2). „Also Ziel ist für mich auf jeden Fall auch möglichst viele Schüler für das Fach Mathe natürlich zu begeistern. Und ihnen auch zu vermitteln, dass Mathe eben nicht nur ein Fach ist, was losgelöst ist von allem anderen, sondern das man Mathe benutzen kann, um ganz viele andere Dinge auch eben verstehen und lösen zu können“ (2:45-5).
Darüber hinaus lautet ihr Credo: „Mathe muss Spaß machen und es soll möglichst auch jeden erreichen. Ansonsten geh ich in die Rente“ (4:23-4). Darin enthalten sind ihre Ziele, möglichst viele Schülerinnen und Schüler zu erreichen und Spaß an der Mathematik zu erzeugen. Die Schülerinnen und Schüler sollen „auch die Angst verlieren [vor der Mathematik, Anm. JM] und dass sie wirklich ja eben auch sehen, das kann auch wirklich Spaß machen. Das hat auch einen Sinn, dass man das macht. Und das ist eben nicht nur trocken, sondern das kann auch eben echt spannend sein“ (18:07-3). Mathematik ist für Frau E mehr als nur das sture Ausrechnen (vgl. 1:44-5).

Frau E möchte ihren Schülerinnen und Schülern zum einen das nötige Handwerkszeug vermitteln, um die Grundlage für das Lösen von Problemen zu schaffen. Zum anderen sollen die Lernenden wirklich verstehen, dass es sich um ein Werkzeug handelt, um Probleme des Alltags zu lösen. Der Nutzen und der Sinn des Lösens von Gleichungen, der Mathematik als solcher, soll erkannt werden.
Sie möchte den Schülerinnen und Schülern Spaß und Freude an der Mathematik vermitteln, indem sie ihnen anschauliche Lernumgebungen anbietet, in denen die Lernenden ein Selbstwirksamkeitsgefühl entwickeln können. Dies soll dazu führen, dass möglichst viele Schülerinnen und Schüler am Unterricht teilhaben können.

6.5.4. Wie gelingt erfolgreiches Lernen?

Den Schülerinnen und Schülern kommt die Struktur in der Algebra entgegen, diese macht das Themengebiet für sie beliebter (vgl. 11:26-3) und die Schülerinnen und Schüler fühlen „sich einfach eben auch sicher“ (ebd), was als „sehr angenehm“ (ebd.) empfunden wird. Frau E legt jedoch Wert darauf, regelmäßig die Strukturen aufzubrechen, indem zum Beispiel auf einer Metaebene Aufgaben gestellt werden, in denen die Schülerinnen und Schüler „Fehler finden“

(ebd.) müssen, diese dann „präsentieren, berichtigen und [herausstellen] wie muss man es denn richtig rechnen“ (ebd.). Dazu gehört auch das Führen eines Merkheftes, in dem die Schülerinnen und Schüler mit eigenen Worten den Nutzen, Inhalt und die Anwendbarkeit neuer Einträge kommentieren sollen (vgl. 14:57-2).
Den Schülerinnen und Schülern sollen in der Algebra Schemata angeboten werden, da diese dem Lerneffekt zuträglich sind (vgl. 7:38-3) und helfen, sich das notwendige Handwerkszeug anzueignen. Dies gilt für alle Schülerinnen und Schüler, die nicht zu den Begabten, „die das eben schon so können“ (7:38-3), gezählt werden. „[U]nd ganz wichtig finde ich auch bei den Kleinen immer so Eselsbrücken (...). Aber sonst merken die sich das nicht“ (17:19-2). Durch die Erklärung der Schemata und die Verwendung eigener Worte im Merkheft soll die bewusste Auseinandersetzung mit den Inhalten gefördert werden (vgl. 14:57-2).
Zentral ist die Erkenntnis, „wenn man ihnen wirklich den Raum lässt, und (...) erlaubt, die dürfen da eigentlich relativ viel machen. Da bin ich immer erstaunt, was die Schüler für tolle Sachen da rausfinden“ (12:36-4). Zumal es „ja vielleicht auch besser hängen“ (12:49-4) bleibt. Den Schülerinnen und Schülern muss die Freiheit zur Entfaltung eigener Ideen im Unterricht gelassen werden.
Es muss den Schülerinnen und Schülern in der Behandlung der Algebra die Gelegenheit gegeben werden, ein Ergebnis zu generieren. „Das ist immer so ein Schülerding, wo die sagen, ach super. Ich kann jetzt, auch wenn ich vielleicht in Mathe nicht so, also nicht so der Mathecrack bin, aber wenn ich ein Thema habe, wo ich auch wirklich was rauskriege, wie es bei den Gleichungen ist, dann hilft das unheimlich“ (4:09-5).
Die Schülerinnen und Schüler „verstehen erst ganz spät, das wirklich, wenn man jetzt mehrere x in einer Gleichung hat, dass das dann wirklich der gleich[e] Platzhalter ist für dasselbe Element“ (6:12-4) und zu „begreifen überhaupt, was für Unterschiede gibt es? Was darf ich überhaupt zusammenfassen? Was ist vor allem xy - ist glaube ich so ganz furchtbar, weil dann ist [es] nicht nur eine Variable und die stehen auch noch zusammen“ (10:06-4).

Grundlage für das erfolgreiche Lernen ist die aktive Einbindung der Lernenden in den Lernprozess. Sie sollen motiviert werden, permanent am Lernprozess zu partizipieren und sich selbst darum zu bemühen. Beitragen können dazu ein strukturierter Unterricht, dessen Aufbau transparent gemacht wird, insofern als dass der Nutzen der unterrichteten Inhalte verdeutlich wird und die Möglichkeit greifbare Ergebnisse zu erzielen. Dies verleiht den Schülerinnen und Schülern Sicherheit und ermöglicht ihnen Erfolgserlebnisse.
Die Schülereigenaktivität wird durch das Führen eines Merkheftes unterstützt, in dem die Arbeitsschritte mit eigenen Worten festgehalten werden. Auf einer Metaebene sollen die Schülerinnen und Schüler Fehler und ihr Vorgehen reflektieren, dies schafft ein Bewusstsein für das eigene Verhalten und reduziert Fehlkonzepte.
Insgesamt können die Lernenden so Spaß am Unterricht entwickeln, was das Hauptziel der unterrichtlichen Maßnahmen von Frau E ist.
Frau E betont, dass es begabtere Lernende gibt. Dies wird aber an keiner Stelle als Grund für Planungsentscheidungen angeführt.

6.5.5. Wie gelingt guter (Algebra-)Unterricht?

Frau E sieht eine große Überforderung ihrer Schülerinnen und Schüler durch die Einführung der Thematik Algebra in der Klasse 7, da diese für ihre Schülerinnen und Schüler sehr abstrakt ist (vgl. 1:35-2, 6:16-2) und das genau dieses Abstraktionsniveau „echt das Hauptproblem“ (13:15-2) darstellt. Deshalb schiebt sie das Thema entweder an das Ende der Klasse 7 oder in die achte Klassenstufe (vgl. 1:26-2, 1:35-2, 5:53-2), da ist sie „schmerzfrei“ (14:06-2) und sagt „‚Cut’. Wir lassen das. Wir machen erst einmal was anderes“ (13:52-2).

Sie stellt aber fest, dass das Lösen von Gleichungen durch Umformungen bereits in der siebten Klassenstufe gut klappt (vgl. 5:53-2). Das Lösen von Gleichungen macht den Schülerinnen und Schülern viel mehr Spaß als die Behandlung der Termumformungen, weshalb es von ihnen vorgezogen wird (vgl. 8:53-2). Begründet wird dies dadurch, dass ein konkretes Ergebnis erzeugt wird. Zudem fällt es ihr beim Thema Gleichungen einfacher sinnhafte, anschauliche Kontexte mit einfließen zu lassen: „Genau da hatte ich das mit den ‚Handytarifen, mit diesen Preisvergleichen. Dann haben sie selber was mitgebracht. (...) hat ja jeder ein Handy (...). Und da haben wir dann vergl[ichen], was ist dann jetzt besser und dann kam dann sogar raus, der eine sagte dann, so ich sag Zuhause Bescheid, diesen Vertrag müssen wir kündigen" (11:00-2). Es ist eines ihrer Unterrichtsziele, die Frage nach dem „Wozu" zu klären (vgl. 1:02-2, 8:53-1) und Aufgaben dieser Art, „was aus dem Internet (...) wo man dann auch weiß, das interessiert die dann auch so ein bisschen" (10:45-2) tragen dazu bei, „das war eigentlich schon immer so mit dem Anwendungsbezug. Das habe ich eigentlich immer von vorneherein gemacht" (18:38-3). Dies führt auch zu einem höheren Lernerfolg (vgl. 11:45-2) und in der Folge zu einer höheren Motivation der Lernenden (vgl. ebd.).
Der Unterricht von Frau E ist auf den Dialog mit den Schülerinnen und Schülern und deren Interessen ausgelegt. Ihr ist es sehr wichtig, dass die Schülerinnen und Schüler Spaß am Unterricht haben. Ihr Credo in Bezug auf den Faktor „Spaß" lautet, „Mathe muss Spaß machen und es soll möglichst auch jeden erreichen. Ansonsten geh ich in die Rente" (4:23-4).
Frau E legt Wert darauf den Unterrichtsstoff anschaulich zu vermitteln und auf die Wünsche der Schülerinnen und Schüler einzugehen. So beantwortet sie die Frage danach, was sie machen würde, wenn ihr Unterricht als langweilig empfunden würde: „Ja, dann muss ich meinen Unterricht arg verändern" (1:15-5).
Probleme werden so im Unterricht von Frau E gemeinsam bearbeitet. Dem auftretenden Problem, die Regeln der Termumformungen zu begreifen und diese richtig anzuwenden und zum Beispiel nicht falsch zusammenzufassen, wird zum Beispiel wie folgt begegnet: „Da haben wir einfach so einen Term in die Mitte der Tafel geschrieben (...) und ich habe einfach mal Schüleräußerungen an die Tafel geschrieben, was fällt euch irgendwie dazu ein? Sagt euch das was? Gibt's da Probleme? Und das war sehr aufschlussreich. (...) [D]ie Schüler haben eben geantwortet, solche Sachen wir: Darf ich da für x und y das Gleiche einsetzen?" (10:06-4-10:46-4). Dies verdeutlicht ihren Ansatz, die Probleme der Schülerinnen und Schüler durch deren eigene Aktivität zu verstehen.
Dass Frau E Anschauung wichtig ist, zeigt sich zum Beispiel durch den Hund Fridolin[103]. Dieser versteckt Knochen und möchte zum Beispiel „den Knochenverzehr für (...) 20 Wochen haben" (10:01-1), wobei später die Knochenanzahl durch die Variable ersetzt wird (vgl. ebd.). An anderer Stelle wird zum Beispiel gesagt: „X und y sind jetzt Fridolin und sein Knochen (...). Da kommt es fast nie vor, dass die dann plötzlich x und y zusammen führen" (3:42-3).
Im Optimalfall unterrichtet Frau E am liebsten im Projektformat, obwohl die Zeit dafür in der Jahrgangsstufe 7 zu knapp ist. Aber der Vorteil am Projektunterricht ist, dass „man an einem Thema wirklich ganz viele Aspekte durchleuchten kann. (...) Weil dann merken sie (...) da haben sie am meisten gelernt" (2:37-2), zudem ist es „anwendungsbezogen (...) und sie können selber ziemlich viel (...) erstellen" (3:37-2). Die Eigenarbeit der Schülerinnen und Schüler spielt eine große Rolle für Frau E. Dabei recherchiert sie dabei sehr viel nach geeigneten Materialien, wobei sie „bei den Schweizern (...) immer relativ gut fündig wird (...) weil die auch so schön Bezüge herstellen zwischen den ganzen einzelnen Sachen" (14:25-3). Die Art der gewählten Aufgaben und Methoden unterliegt der Zielvorstellung, dass deren Einsatz „auch nicht ermüdend ist, sondern auch echt sehr viel Spaß machen kann" (3:11-4). Das Lehrbuch der Schule wird vornehmlich für die Übungsaufgaben verwendet, „[d]a sind zum Teil auch

[103] Frau E zeichnet Fridolin wird an, ist aber auch ein Kuscheltier und wird manchmal als Anlass für verschiedene Probleme gesehen, zum Beispiel: Fridolin, „der irgendwelche Knochen verzehrt und der Knochen steht nachher für das ‚x'" (10:01-1). Er begleitet den Unterricht.

wirklich ganz brauchbare Aufgaben drin“ (19:43-3), „man muss ja (...) Aufgaben raussuchen, wo man meint, dass sie geeignet sind“ (13:38-3).
Bei dem Ansatz die Eigenarbeit der Schülerinnen und Schüler vielfältig zu fördern, wird der den Schülerinnen und Schülern eigene Ehrgeiz mit berücksichtigt. So erläutert Frau E, das war „so ein Schülerwunsch. Da haben wir erst einmal geschätzt was raus kommt [beim Auflösen von Gleichungen, Anm. JM]. Die durften dann auch schätzen. Und dann haben wir [die] (...) Klasse in drei Hälften geteilt und dann einen richtigen Wettbewerb aus diesem ganzen Zeug gemacht. Und das fanden die [toll] weil sie eben erstens richtig sich selber kontrollieren konnten. Dass sie das verstanden haben und dass sie, also ich glaube das ist echt ein Erfolgserlebnis, was sie dann haben“ (9:39-2).
Grundsätzlich versucht Frau E bei der Einführung neuer Themen „auf jeden Fall irgendwie anschaulich und alltagsbezogen“ (8:57-4) vorzugehen und die Frage nach dem Wozu zu klären (vgl. 16:59-3). Bei der Einführung von Gleichungen bringt sie zum Beispiel eine Waage mit, mit Säckchen voller Schokobons und lässt die Schülerinnen und Schüler überlegen, was geschehen müsste, um die Waage auszutarieren (vgl. ebd.). Sie lehnt den Unterrichtsstil ab, der die Einführung über den durch die Lehrkraft vorgegebenen Satz an der Tafel wählt (vgl. 20:05-3). Vielmehr möchte sie die Inhalte mit den Schülerinnen und Schülern erarbeiten und lässt diese dann mit eigenen Worten die Sätze formulieren.
Werden die Inhalte formaler und abstrakter, wird es schwerer die Schülerinnen und Schüler zu motivieren. Dort sind „sie dann so frustriert (...), weil das so abstrakt“ (10:06-2) ist. Anders ist es bei Gleichungen und den zugehörigen Umformungen, die über das Waagemodell anhand von Tüten gefüllt mit Schokobons eingeführt werden (vgl. 8:53-2, 7:38-1, 7:51-1). Frau E bekommt dort das Feedback: „Da krieg ich ein Ergebnis raus und dann weiß ich, ja ich hab’s. Geschafft“ (8:53-2). Auch können die Schülerinnen und Schüler sich dort selbst kontrollieren (vgl. 9:39-2). Dies führt bei den Schülerinnen und Schülern zu erlebten Erfolgserlebnissen (vgl. ebd.).
Sie gibt den Lernenden dann Regeln vor, in der Form: „[Dann] sag ich Äpfel und Birnen kann man auch nicht zusammenfassen und dann kommt eben mein Formelbuch und dann sage ich so: „Nur Gleiches mit Gleichem zusammenfassen“ (4:45-3). Dabei wird mit Vergleichen, wie den Äpfeln und Birnen gearbeitet, um dennoch den Charakter der Anschauung beizubehalten. Werden dann Aufzeichnungen erstellt, geschieht dies selbstständig und mit eigenen Worten in einem Merkheft (vgl. 14:57-2, s. Ziele des Algebraunterrichts). Eventuellen Unklarheiten begegnet sie wie folgt: „[S]agt der Eine: Ja, wie ist das bei 2x und x^2? Das ist für [den] dann auch erst einmal nichts Ungleiches (...). Dann erklären wir das auch noch einmal, richtig schön im Block, so (...) ganz viele Terme, dann mache ich die ganze Tafel voll. (...) Das sind so eine Art Schablonen. (...) Und dann x+x und auf der anderen Seite steht dann 2x (...) Und was gehört dann zusammen? Und dann sind die da am basteln und puzzeln ohne Ende. (...) Und da merkt man dann eben, da muss man echt am Ball bleiben. (...) Ich finde auch so Sachen, dass man dieses elementare Handwerkszeug, diese[s] ‚warum kann ich das eigentlich auch gar nicht zusammenfassen’, dass man denen das wirklich klar macht. Und wirklich immer wieder übt“ (4:45-3). Daran ist erneut die gemeinsame, spielerische Art der Bewältigung von Fehlvorstellungen erkennbar.
Dadurch wird der Fokus auf Regeln, Schemata und die Übung gelenkt. Ihre Ansicht zu Schemata hat sich im Laufe ihrer Lehrzeit geändert. „Zuerst fand ich es eigentlich nicht so gut, weil ich immer dachte, das ist so (...) ja, wirklich wie so ein Rezept. Aber es gibt ja eben wirklich viele Schüler, die können das nicht anders“ (7:38-3), „mittlerweile (...) denke ich (...) [ist das] für die Schüler wirklich am praktikabelsten“ (8:58-3) und auch „schülernah“ (8:46-3). Die Schülerinnen und Schüler „finden das super“ (7:03-3) und „dann gibt es eben auch eine ganze Reihe, die brauchen solche Schemata, um das wirklich lernen zu können“ (7:38-3). Zu dem Begriff „Schema“ gehören für Frau E, „die ganzen Rechengesetze und dieses ganze Zeug. Dass man, wie man zusammenfasst“ (0:51-3). Bei der Vermittlung dieser wird erneut

die Schwerpunktlegung auf und die Orientierung an den Schülerinnen und Schülern deutlich: „Man kann auch so schöne Gruppenarbeiten draus machen, dass man eben wirklich verschiedene Gleichungen denen gibt und die sollen sich da selber auch so ein Schema zu ausdenken. Oder wie erklärst du denn der Gruppe jetzt, was du das gemacht hast. Und dann fangen die auch selber an mit ‚also zuerst musst du' oder ‚du kannst aber auch erst mal'" (8:19-3). „Ich erlaube dann auch wirklich alles. Ich sag, ihr könnt auch Comics malen, die sich das gegenseitig erklären (...) [auch] Theaterstücke haben sie nachher aufgeführt. Wir hatten das ganze Spektrum" (19:04-3). Eine Herangehensweise, die auf die Sicherung eingeht, ist die Folgende: „Da schreibe ich eine Gleichung an die Tafel. Wie löse ich das genau nach x auf. Und da sage ich, das möchte ich schriftlich in Worten haben. Und daneben, also ich mache dann immer Tabelle mit 1., 2., 3. und daneben dann das Beispiel. Ja und dann habe ich auch wieder die schöne Frage. Sage ich, und wie seht ihr das? Ist das gut, wenn wir das so machen. Und dann haben gleich alle gesagt, ja, super, das ist wie ein Rezept" (7:03-2).
Dennoch steht für sie fest: „ich meine sonst bin ich ja immer dafür, dass man viel anschaulich macht. Aber es gibt für mich auch Sachen, wo ich auch sage, das muss man wirklich: üben, üben, üben" (0:51-3). Um das notwendige Handwerkszeug zu beherrschen, „hilft, gerade bei solchen Sachen, echt, finde ich auswendig lernen" (ebd.). Beispielsweise: „Assoziativgesetz, Distributivgesetz, das machen wir, bis euch das aus den Ohren raus quillt (...). Und die haben das jetzt bestätigt (...) ‚Danke Frau E, dass Sie das so schlimm mit uns gemacht haben.' - Da müssen sie durch" (14:57-2).
Ein Unterrichtsprinzip von Frau E bezieht sich darauf, dass die Schülerinnen und Schüler in jedem Fall darüber reflektieren, „was kommt da für eine Lösung raus. Kann das überhaupt sein?" (9:28-3). Als Beispiel nennt sie die Überlegung, ob negative Ergebnisse bei Fragen nach Gewichts- oder Streckenangaben in Frage kommen können (vgl. ebd.). Intensiviert werden die Reflexionen nach der Einführung des Rechners, wenn er durch Frau E in der 8. Klasse zugelassen worden ist (vgl. 10:17-3), „weil die tippen ja nachher wirklich jeden Mist da drin ein. Und dann denke ich, Leute, das könnt ihr doch. (...) Und dann spuckt der Taschenrechner ein Ergebnis aus und dann wird das dahin geschrieben" (10:17-3). Es ist ihr wichtig, dass „sie wirklich erst einmal komplett das [Rechnungen in der Algebra, Anm. JM] selber machen (...) [denn] man kann die Zahlen ja auch so [entsprechend einfach, Anm. JM] wählen, mir geht's ja darum, dass sie das Verständnis für diese Terme und Gleichungen haben" (19:28-4).
Das Prinzip der Binnendifferenzierung spielt für Frau E vor allem in den Übungsphasen, die „auf jeden Fall ein wichtiges Element" (0:12-4) darstellen, eine große Rolle, da „es (...) ja auch immer verschiedene Typen an Schülern [gibt]" (1:09-4). Daher gibt es eine „ganze Bandbreite von Übungsaufgaben (...) da muss man (...) einmal so richtig Schema F. Was dann hoffentlich jeder kann. Dann eben aber auch weiterführende Übungsaufgaben, wo man neue Probleme erkennt" (ebd.). „Also es gibt dann auch gestaffelte Übungsaufgaben. Leicht und wenn sie das dann durch haben, dürfen die schwereren nehmen. (...) Die Schwächeren sitzen sowieso an den Leichten auch meistens dann schon sehr lange und die schaffen es zeitlich dann auch gar nicht (...) die wirklich schwereren Sachen dann nochmal durchzukauen" (1:40-4). Auch „Klappaufgaben, wo die dann sich selber kontrollieren können" (3:28-4) werden verwendet.
Sinn der Übung ist es, neben der Vertiefung neue Lernanlässe zu schaffen, „[t]oll finde ich solche Sachen, wo sie dann plötzlich mit dem, was sie gemacht haben nicht mehr weiterkommen. Und dann überlegen, warum geht das jetzt nicht? Was ist jetzt anders? Und jetzt brauchen wir was Neues" (22:01-3).
Die Verwendung der verschiedenen Darstellungsformen sind für Frau E elementar, denn es soll „für jeden Schüler irgendwie ein (...) Zugang [ge]schaffen" (12:04-4) werden.
Frau E verweist sehr häufig darauf, dass die Schülerinnen und Schüler mit der Einführung der Variablen und dem Aufstellen von Termen in der siebten Klasse überfordert sind (vgl. 1:35-2, 6:16-2, 13:15-2, 5:53-2). Die technische Seite, „klappt (...) witzigerweise" (5:20), aber „die

haben dann echt Probleme gehabt jetzt weiter zu denken“ (12:10-1). Das Schulbuch in der Klasse 7 unterstützt die Überforderung in der Klassenstufe durch Aufgabenformate wie die „figurierten Zahlen“ (8:15-2) und durch „Veranschaulichungen [die] auch da nicht hilfreich“ waren (13:05-4). Daher würde sie gern einige der Inhalte aus der Algebra lieber erst in der Jahrgangsstufe 8 vertiefen (vgl. 5:53-2). Die Schwierigkeiten ergeben sich einmal aus den kognitiven Voraussetzungen der Schülerinnen und Schüler, da „sich im Gehirn noch einmal was ändern“ (8:33-2, vgl. 4:34-1) muss beim Übergang zur Klasse 8. Zum anderen kommen die Schülerinnen und Schüler aus ganz „verschiedenen 6. Klassen“ (12:10-2) und bringen sehr unterschiedliche Kenntnisse auch in Bezug auf die Rechengesetze mit (vgl. ebd.). Die Schülerinnen und Schüler da auf denselben Stand zu führen, kostet demnach auch Zeit.
Bereits die Verschiebung der Inhalte vom Beginn der Klasse 7 ans Ende des Schuljahres „ist schon auf jeden Fall deutlich besser“ (5:29-4).

Frau E stellt fest, dass die Behandlung der Algebra, aufgrund des erhöhten Abstraktionsgrades eine kognitive Hürde für ihre Lernenden darstellt. Deshalb entscheidet sie sich, bei zu großen Schwierigkeiten diese thematisch entweder ans Ende der Klasse 7 oder an den Anfang der Klasse 8 zu verschieben.
Sie stellt fest, dass die Behandlung der Gleichungen gegenüber den Termumformungen durch sie und die Lernenden vorgezogen wird, weil es ihr in diesem Themengebiet einfacher fällt anschauliche, anwendungsbezogene und sinnstiftende Aufgaben zu finden. Die Schülerinnen und Schüler präferieren konkrete Ergebnisse, daher bevorzugen sie das Lösen von Gleichungen gegenüber der Beschäftigung mit den Termen.
Es ist Frau E wichtig anwendungsorientierte, schülernahe und anschauliche Aufgabenkontexte zu finden, denn diese führen zu einem höheren Lernerfolg, was die Schülerinnen und Schüler motiviert. Eine hohe Schüleraktivität, gern auch in Projekten, gehört für Frau E zu gutem Unterricht.
Dazu gehört die Implementierung einer Metaebene in den Unterricht. Auf dieser wird einerseits das Bewusstsein für Fehler geschult und andererseits wird über die Möglichkeiten und Grenzen bei der Anwendung von Rechenregeln, Algorithmen und Schemata reflektiert. Dies hilft Fehlvorstellungen zu beseitigen.
Die Sicherheit im Umgang mit den wesentlichen Rechenregeln und Rechengesetzen sowie dem damit verbundenen Formalismus ist Frau E wichtig. Um zu dieser Sicherheit zu gelangen wird unter Umständen sehr lange und eindringlich geübt. Festgehalten werden diese, wie auch Schemata, die als praktikable und hilfreich bewertet werden, in einem Merkheft. Die Erarbeitung dieser erfolgt gemeinsam und durch eine aktive Beteiligung der Lernenden.
Ein binnendifferenzierter über verschiedene Zugänge führender Unterricht ist Frau E wichtig, um möglichst viele Lernende am Unterricht teilhaben zu lassen.
Bei der Auswahl der Aufgaben greift sie vor allem auf das Internet zu, während das Lehrbuch flankierend genutzt wird. Es dient nicht als primäre Quelle.
Die zeitliche Verschiebung der Algebra auf einen späteren Zeitpunkt würde das Gelingen des Unterrichts positiv beeinflussen.

6.5.6. Das Variablenverständnis von Frau E

Bei der Vorlage der drei Aufgaben nach Malle (1993), die beispielhaft für die verschiedenen Variablenaspekte sind, antwortet Frau E wie folgt: „Also in der ersten Aufgabe ist das quasi ja (...) meine Variable. Das ist diese Unbekannte. Und das Ganze ist in so ein Zahlenrätsel eingebettet. (...) Bei der zweiten ist es (...) die Variable in die was eingesetzt wird. (...) Und es geht, da es eine Gleichung ist, eben auch noch um die Geschichte, wann ist diese Aussage wahr? (...) Und ‚Löse’ (...) da kriege ich für x ein ganz spezielles Ergebnis raus, indem ich das

ganze eben (...) umformen muss“ (7:18-4). Dabei zeigt sich, dass Frau E die Aufgaben nach dem unterschiedlichen Vorgehen unterscheidet und somit über die verschiedenen Vorstellungen verfügt. Alle Aufgabenarten werden im Unterricht verwendet (vgl. 8:10-4), wobei sie die Aufgabe mit dem Zahlenrätsel gern als Einstieg verwendet (vgl. 8:16-4). „Die zweite ist [da], um das Verständnis der Schüler zu erreichen, dass sie eben für x mehrere Zahlen einsetzen können“ (8:16-4). „Und die dritte ist eine typische Übungsaufgabe, um Gleichungen zu lösen“ (8:16-4).
Grundsätzlich steht die Auffassung der Variablen als Unbekannte im Zentrum des Unterrichts (vgl. Abschnitt 6.5.1).

6.5.7. Das Bild der Mathematik - Frau E

Das Bild der Mathematik von Frau E zeichnet die Mathematik als anwendungsorientierte Wissenschaft nach, bei der verschiedene Regelsysteme eingehalten werden müssen.
Bei der Codierung des Interviews ergibt sich die stärkste Ausprägung beim Schema-Aspekt (12). Weniger stark ausgeprägt sind der Anwendungs (9)- und Formalismus- Aspekt (7). Am wenigsten stark ausgeprägt ist der Prozess-Aspekt (0). Frau E bewegt sich in den Bereichen Schema (Rang 3) und Anwendung (Rang 2) im oberen Drittel und stimmt diesen eher zu, während sie in Bezug auf den Formalismus im unteren Drittel (Rang 7) liegt und diesen Aspekt dementsprechend eher ablehnt.
Bei der Auswertung des Fragebogens ergibt sich die höchste Ausprägung bei der Anwendungs-Skala (19). Minimal weniger stark ausgeprägt ist die Prozess-Skala (18). Am wenigsten stark sind der Formalismus-Aspekt (13) und der Schema-Aspekt (9) ausgeprägt.
Daraus ergibt sich die folgende Übersicht:

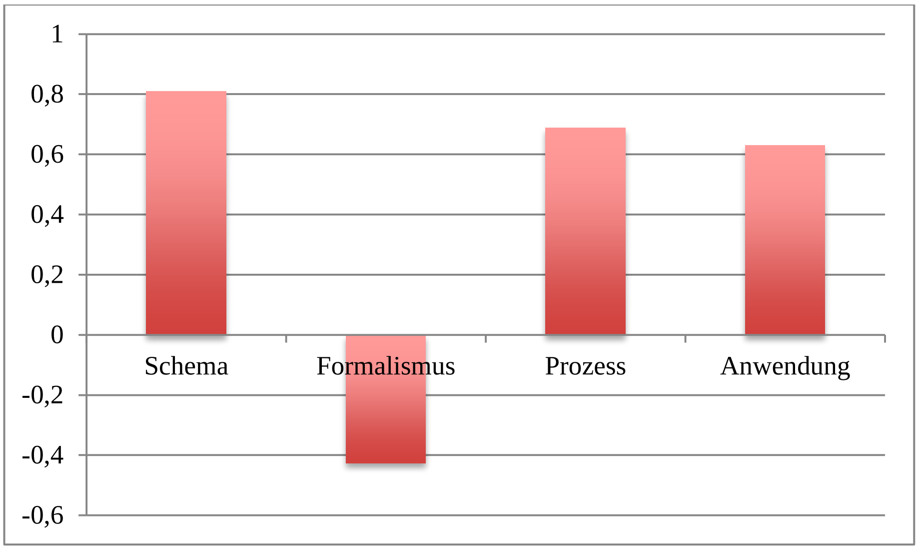


Abbildung 15: Das Bild der Mathematik - Frau E

Die drei Skalen Schema, Formalismus und Anwendung stimmen im Wesentlichen überein. In Bezug auf den Prozess-Aspekt ist eine deutliche Abweichung festzustellen. Eine mögliche Erklärung kann sich aus der bereichsspezifischen Unterrepräsentation des Codes in der Algebra ergeben, weil Frau E gerade dort nicht das von ihr präferierte Lernen in Projekten durchführt (vgl. Abschnitt 6.5.5), das ihrem Zuspruch zum Prozess-Aspekt im Fragebogen entsprechen würde. Insofern entspricht die Codierung im Interview nicht zwingend dem allgemeinen mathematischen Weltbild von Frau E. Aufgrund der Datenlage kann dazu keine finale Erklärung gegeben werden.

6.5.8. Ziel-Mittel-Argumentationen - Frau E

Tabelle 40: Inhalte des Algebra-Curriculums, Frau E

Beweise werden vereinzelt, vornehmlich in stärkeren Gruppen, um die Art zu denken zu zeigen	↔	Modellierungen, Problemlösen (Alltagsbezüge herstellen)		↔	Global/Meta-Level-Aktivität
		↑			
		Termumformungen, Gleichungsumformungen, regelhafter Umgang mit den geltenden Rechengesetzen, hierbei Schwerpunkt auf der Reflexion der Vorgehensweise		↔	Kalkülhafte Tätigkeiten sowie Global/Meta-Level-Aktivität
		↑			
		Termaufbau und Termstrukturen thematisieren (etwas knapper)			
		↑			
		Variable als Platzhalter für Zahlenwerte, werden im Kontext belegt - Strukturen in Termen (flexible Buchstabensetzung)	erste Term- und Gleichungsstrukturen aus Sachkontexten - Strukturen, was ist konstant, was variiert; Notwendigkeit die Variable einzusetzen	↔	Variable unter dem Einsetzungsaspekt, Variable als Unbekannte
		↑			
		Kenntnis über die verschiedenen Zahlenräume und die Verknüpfungen zwischen den Zahlen - Rechengesetze und Rechenregeln			

Tabelle 41: Ziele des Algebracurriculums, Frau E

												!Instrument zum Problemlösen (=Algebra wird verstanden als Stütze, um Probleme in anderen Fächern, aber auch im Alltag zu bewältigen, dies betrifft die Sinnstiftung)		!Oberstufe bewältigen (=hier ist die rein auf schulische Inhalte bezogene Bewältigung der Oberstufe und des Abiturs gemeint)
										Wenn die Algebra als Instrument/kalkülhafte Tätigkeit verstanden ist	→	**kann die Algebra als Instrument zum Problemlösen gesehen werden**	+	**können sie die Mathematik der Oberstufe bewältigen**
										!Algebra als Instrument !kalkülhafte Tätigkeit (=die Beherrschung der Prozeduren in der Algebra soll unter dem Aspekt des Handwerkszeugs verstanden werden)				
						Wenn die SuS im abstrakten Denken geschult worden sind	+	**Wenn die SuS die Angst vor dem „x“ verloren haben**	→	**kann Algebra als Instrument/kalkülhafte Tätigkeit verstanden werden**				
						!abstraktes Denken (=gemeint ist zu erkennen, welche Strukturen in der Algebra vorkommen, diese zu verstehen und damit umgehen zu können, zum Beispiel selbstständig Terme aufzustellen)		!Angstabbau (=die SuS sollen durch die Arbeit mit der Variable und der Thematisierung der Belegung dieser die Angst vor der Abstraktion verlieren)						
		Wenn das notwendige Handwerkszeug anschaulich und im Dialog mit den SuS vermittelt worden ist	+	**Wenn die SuS den kognitiven Sprung vom Konkreten ins Abstrakte geschafft haben**	→	**können das abstrakte Denken der SuS geschult werden**	+	**können die SuS die Angst vor dem „x“ verlieren**						
		!Handwerkszeug !Dialog (=gemeint ist, dass den SuS beigebracht wird, wie mit Termen und Gleichungen umzugehen ist, wobei dabei die Regeln selbstständig formuliert werden sollen und deren Anwendung reflektiert wird)		!kognitiver Sprung (=gemeint ist dass die SuS sich von dem zuvor kennengelernten konkreten Zahlenrechnen hin zum Umgang mit Platzhaltern entwickeln sollen)										
Wenn man die Algebra inhaltlich so aufbaut wie beschrieben	→	**kann das notwendige Handwerkszeug im Dialog mit den SuS verstanden werden**	+	**die SuS können den kognitiven Sprung vom Konkreten ins Abstrakte schaffen**										
!Behandlung algebraischer Inhalte														

Tabelle 42: Ziele des Mathematikcurriculums, Frau E

								!möglichst hohe Partizipation (=gemeint ist, dass so viele SuS wie möglich für die Mathematik begeistert werden sollen und diesen die Möglichkeit gegeben wird zu partizipieren)		!Vielfalt der Mathematik erfassen (=gemeint ist, dass die SuS sehen, dass Mathematik nicht nur Ausrechnen und trocken ist, sondern dass durch Mathematik Dinge verstehbar und lösbar werden, die es ohne sie nicht wären)
				Wenn die SuS Spaß an der Mathematik entwickelt und Angst abgebaut haben	+	**Wenn die SuS den Nutzen der Mathematik in anderen Fächern und in ihrem Alltag begreifen**	→	**können möglichst viele SuS für die Mathematik begeistert werden**	+	**kann die Vielfalt der Mathematik erkannt werden**
				!Spaß (=die SuS sollen durch den Umgang mit Mathematik deren Notwendigkeit erkennen und auch selbst das Bedürfnis entwickeln mit ihr umzugehen und daran Spaß zu entwickeln)		!Nutzen der Mathematik in anderen Fächern !Alltag (=hier wird vermehrt auf den Nutzen der Mathematik und vor allem die Modellierung von Problemen im Alltag durch Gleichungen und Terme angespielt sowie auf die Nützlichkeit in Bezug auf die anderen Fächer)				
Wenn den SuS das notwendige Rüstzeug vermittelt wird	+	**Wenn der Unterricht anschaulich und orientiert und nah an den Lernenden schülerorientiert und schülernah gestaltet wird**	→	**können die SuS Spaß an der Mathematik entwickeln**	+	**können die Nutzbarkeit der Mathematik sowohl für andere Fächer als auch in ihrem Alltag begreifen**				
!Rüstzeug (= gemeint sind die grundlegenden Rechengesetze und Rechenregeln und jeweils die prozeduralen Fertigkeiten im jeweiligen Kontext)		!Schülernah !Schülerorientierung !Anschaulichkeit (=der Unterricht sollte an den Interessen der SuS orientiert und durch zahlreiche Methoden und Darstellungsformen anschaulich gestaltet sein, gleichzeitig die Vorschläge und Ideen der SuS berücksichtigen und ihnen Eigenständigkeit erlauben)								

Tabelle 43: Das Lernen, Frau E

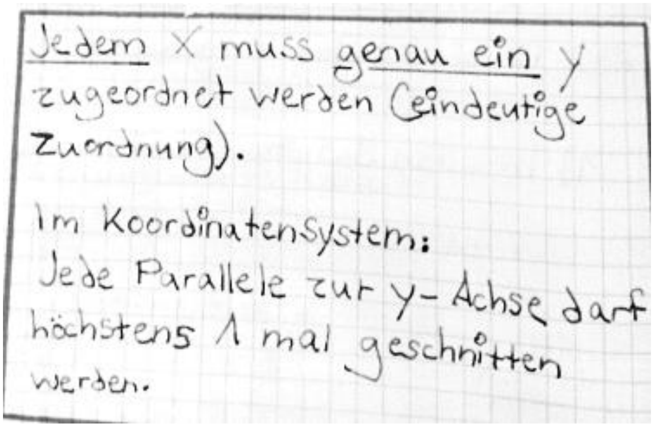
								Wenn den SuS Sicherheit im Umgang mit den algebraischen Inhalten vermittelt wird !Sicherheit (=gemeint ist, dass die SuS die Angst vor den Variablen verlieren und vor dem neuen Inhalt einfach dadurch, dass sie sich aktiv damit beschäftigen)	+	**Wenn auftretende Schwierigkeiten in Bezug auf das Abstraktionsniveau reduziert werden** !Schwierigkeiten !Abstraktionsniveau (=treten Probleme auf, weil die neuen Inhalte zu abstrakt scheinen, so werden diese durch die kontinuierliche Arbeit und Reflexion über die Inhalte sowie durch die Verwendung eigener Worte reduziert)	→	!Spaß (=die SuS sollen schließlich selbst die Notwendigkeit der Algebra begreifen und Spaß an der Modellierung von Situationen und Problemen erlangen) **können Spaß an der Algebra haben**
Wenn den SuS das notwendige Rüstzeug vermittelt wird !Rüstzeug (= gemeint sind die Regeln zur Term- und Gleichungsumformung sowie die Rechengesetze und Rechenfertigkeiten im Zusammenhang mit Variablen)	+	**Wenn die SuS motiviert werden am Ball zu bleiben** !Motivation !am Ball bleiben (=die SuS sollen verstehen, dass es notwendig ist, die Regeln permanent zu wiederholen, sodass sie sich einprägen)	+	**Wenn den SuS kontinuierlich Gelegenheit gegeben wird das zu Lernende eigenständig zu erarbeiten und formulieren** !Eigenständigkeit (=gemeint ist, dass den SuS die Gelegenheit gegeben wird, Merksätze und Inhalte mit eigenen Worten zu formulieren und zu reflektieren, was wird warum wie entwickelt, die SuS sollen sich aktiv mit dem Stoff beschäftigen)	+	**Wenn den SuS die Gelegenheit gegeben wird, sich frei zu entfalten** !Selbstwirksamkeit !Freiheit (=gemeint ist, dass die SuS eigene Ideen ausleben dürfen und sich in Projekten ausprobieren, aber auch deren Wettbewerbsgeist auszunutzen)	→	**kann den SuS Sicherheit im Umgang mit den algebraischen Inhalten vermittelt werden**	+	**können auftretende Schwierigkeiten in Bezug auf das Abstraktionsniveau reduziert werden**		

Tabelle 44: Lehren von Algebra, Frau E

		!Verlegung der Algebra im Curriculum (=gemeint ist die flexible Themensetzung und die Verschiebung der Themen, sodass die Algebra erst am Ende der 7. oder am Anfang der 8. Klasse behandelt wird)												!hohe Partizipation (=gemeint ist, dass so viele SuS wie möglich für die Mathematik begeistert werden sollen und diesen die Möglichkeit gegeben wird zu partizipieren)		!Spaß (=die SuS sollen durch den Umgang mit Mathematik Spaß und Freude daran entwickeln)
Wenn man akzeptiert, dass die Algebra ein sehr hohes Abstraktionsniveau erfordert	→	**wird die Algebra zeitlich so weit wie möglich nach hinten verlegt**								**Wenn inhaltliche wie allgemeine Fehlvorstellungen abgebaut sind und die Angst vor der Algebra verloren ist**	+	**Wenn die SuS Erfolgserlebnisse durch ihre Selbstwirksamkeit erlangt haben**	→	**werden möglichst viele SuS erreicht**	+	**wird Spaß an der Algebra/im Unterricht vermittelt**
!hohes Abstraktionsniveau (=gemeint ist, dass der Sprung vom Konkreten zum Abstrakten, in Form von Variablen schwer verständlich ist und dass dies Berücksichtigung finden muss)										!Fehlvorstellungen !Angst abbauen (=SuS können inhaltliche Fehlvorstellungen abbauen, z.B. beim Zusammenfassen von Termen und können eventuelle Ängste vor der Algebra verlieren)		!Erfolgserlebnisse !Selbstwirksamkeit (=die SuS können selbstwirksam werden und Erfolge erreichen, sie entwickeln eigene Fragen und benutzen die Algebra zur Problemlösung)				
Wenn im Unterricht Anwendungsbezüge geschaffen werden und die Sinnstiftung gelingt	+	**Wenn die SuS entsprechend ihres Niveaus differenziert gefördert werden**	+	**Wenn der Unterricht die SuS mit den notwendigen Fertigkeiten und Schemata ausstattet und konkrete Ergebnisse erlaubt**	+	**Wenn inhaltlich auf einen schülernahen, anschaulichen, schülerorientierten Unterricht geachtet, aber auch auf notwendige Formalisierungen geachtet wird**	+	**Wenn in den Unterricht eine Metaebene implementiert wird**	→	**können inhaltliche, wie allgemeine Fehlvorstellungen behoben werden und die Angst vor Algebra verlieren**	+	**können die SuS durch Selbstwirksamkeit Erfolgserlebnisse haben**				
!Anwendungsbezüge !Sinnstiftung (=gemeint ist, dass der Unterricht Anwendungsgebiete des Erlernten aufzeigen soll und dadurch dem Erlernten Sinn verleiht, dabei soll dieser von den SuS selbst bei der Bearbeitung der Aufgaben erkannt werden, etwa wenn sie mit ihrem bisherigen Wissen neue Aufgaben nicht bewältigen können und dazu weitere Fertigkeiten benötigen)		!Differenzierung (=den SuS wird durch binnendifferenzierte Übungsaufgaben die Möglichkeit gegeben ihrem Niveau entsprechend zu lernen)		!notwendige Fertigkeiten !Schemata !konkrete Ergebnisse (=den SuS muss das Handwerkszeug gegeben werden, die angestrebten Probleme bewältigen zu können und sich sicher in der Thematik bewegen zu können, dazu gehören Rechenregeln und Schemata und auch die Möglichkeit z.B. bei den Gleichungen konkrete Ergebnisse, i.S. von Zahlergebnissen zu erlangen)		!Schülernaher Zugang !Anschaulichkeit !Formalisierung !Schülerorientierung (=gemeint ist, dass die Verantwortung für das Lernen größtenteils den SuS übergeben wird, an den Interessen der SuS orientiert und durch zahlreiche Methoden und Darstellungsformen anschaulich gestaltet wird, gleichzeitig die Vorschläge und Ideen der SuS berücksichtigt, aber auch auf eine gewisse formale Strenge in Bezug auf Begrifflichkeiten verfolgt)		!Metaebene (=gemeint ist hier vor allem die Reflexion darüber, was mache ich mit den Variablen und den Rechenregeln, warum und wofür stehen diese, einerseits für das Verständnis, andererseits um Fehler aufzudecken)								

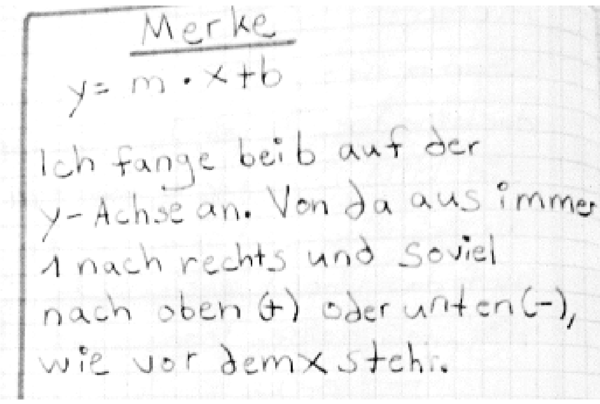
6.5.9. Unterrichtsbeobachtungen und Klausurenanalyse, Frau E

Der besuchte Unterricht von Frau E, der in einer achten Klasse stattfindet, beschäftigte sich mit den Eigenschaften linearer Funktionen und bereitete die Klassenarbeit zu diesem Thema vor.
In der ersten Stunde regt Frau E zur Reflexion über die letzten Gruppenarbeiten an und teilt dazu Motivationskärtchen aus. Sie teilt mit, was aus ihrer Sicht bei künftigen Gruppenarbeiten verbessert werden müsste. Die Lernenden beteiligen sich sehr aktiv.
Anschließend wird zum Thema der Stunde übergeleitet, indem verschiedene Schülerproduktionen vorgelesen werden, die sich mit der Definition einer Funktion beschäftigen. „Bevor wir da einen Satz gemeinsam formulieren, möchte ich wissen, ob ihr überhaupt wisst, was ich von euch will.“ Daraufhin legt Frau E Graphen auf und lässt die Schülerinnen und Schüler unter Zuhilfenahme der gerade vorgelesenen Definitionen bestimmen, wann es sich um eine Funktion handelt. Dabei tauchen verschiedene Probleme auf, die im Unterrichtsgespräch ausgeräumt werden. Frau E betont immer wieder, dass sie möchte, dass die Lernenden ihre Entscheidungen begründen können. Nach circa 15 Minuten wird dann der folgende Merksatz mit der Aufforderung ihn ins Merkheft zu übertragen an die Tafel gebracht:


Jedem x muss genau ein y zugeordnet werden (eindeutige Zuordnung).

Im Koordinatensystem:
Jede Parallele zur y-Achse darf höchstens 1 mal geschnitten werden.

Veranschaulicht wird die Idee der eindeutigen Zuordnung in Zusammenarbeit mit den Schülerinnen und Schülern. Dazu werden die Geburtstage erfragt und es entwickelt sich eine Diskussion darüber, wann die Zuordnung eindeutig ist.
Anschließend folgt eine Arbeitsphase, bei der die Lernenden eine Wertetabelle ausfüllen müssen. Diese wird in Zusammenarbeit mit der Klasse verglichen. Schließlich lässt Frau E sich erklären wie die Funktionsvorschrift in ein Koordinatensystem übersetzt wird. Sie fordert die Lernenden nach einem kurzen Klassengespräch dazu auf einen „Erklärtext“ für den Nachbarn zu verfassen.


Merke
$y = m \cdot x + b$

Ich fange bei b auf der y-Achse an. Von da aus immer 1 nach rechts und soviel nach oben (+) oder unten (−), wie vor dem x steht.

In der zweiten Stunde wird zunächst ein Wiederholungstest geschrieben, um relevantes Wissen für die Klassenarbeit zu aktivieren. Dies wird den Lernenden durch Frau E erläutert. In

einem lehrkraftzentrierten Unterrichtsgespräch fasst Frau E die relevanten Regeln zusammen: „Das ist immer das Rezept mit dem man aus zwei Punkten zu einer Funktionsgleichung kommt“. Sie erklärt, welche Bestandteile des Funktionsterms als „Variablen stehen gelassen werden“ und welche als „Zahlen geschrieben werden“ können. Daran anknüpfend teilt Frau E ein Memory aus, bei dem Terme mit Graphen verknüpft werden. Nach einiger Zeit erfolgt der Vergleich gemeinsam an der Tafel. Es folgen weitere Übungsphasen aus dem Buch.
Der Unterricht ist über beide Stunden hinweg durch die Kombination aus einem hohen Schülereigenarbeitsanteil und der ständigen Wiederholung der geltenden Regeln geprägt.
Aufgaben, die über das Handwerkliche hinausgehen, konnten nicht beobachtet werden. Auf den ersten Blick scheint dies im Widerspruch zu den rekonstruierten subjektiven Theorien zu stehen. Eine mögliche dem entgegenstehende Begründung ist, dass es sich um Stunden handelt, die sich mit der Erarbeitung neuer Inhalte beschäftigt haben. Gemäß der rekonstruierten Überzeugungen von Frau E müssen zunächst die technischen Elemente eines Inhalts behandelt werden, bevor anwendungsorientierte Aufgaben bearbeitet werden können.
Wird dieser Argumentation gefolgt, ist eine Übereinstimmung zwischen den rekonstruierten Überzeugungen und dem Unterrichtsverhalten von Frau E in Bezug auf die Aufgabenformate sowie auf die verwendeten Unterrichts- und Sozialformen feststellbar.
Die Analyse der Klausur von Frau E ergibt die folgende Übersicht:

Tabelle 45: Klausurenanalyse, Frau E

Kompetenz(en)	math. argumentieren			Probleme mathematisch lösen			mathematisch modellieren			mathematische Darstellungen verwenden			formal-technisch arbeiten			mathematisch kommunizieren		
Anforderungsbereich	I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II	III
Löse													x					
Stelle dar										x			x					
Gib an													x					
Löse							x							x		x		
Entscheide													x				x	
Wie viel													x			x		
Löse														x				
Löse														x				

Überwiegend bewegen sich die Aufgaben im Bereich des formal-technischen Arbeitens. Das Verhältnis zwischen dem Anforderungsbereich I und II ist eher ausgewogen. Die allgemeinmathematischen Kompetenzen werden in Teilaufgaben im unteren Anforderungsbereich thematisiert. Kognitiv ist die Klausur insgesamt eher im unteren Anforderungsbereich angesiedelt. Eine Aufgabe der Arbeit beschäftigt sich mit einem Sachkontext, die übrigen fünf Aufgaben betreffen das innermathematische Arbeiten. Eine dieser fünf Aufgaben verlangt von den Schülerinnen und Schülern die begründete Entscheidungsfindung, wohingegen die übrigen vier Aufgaben sich mit der Durchführung von Lösungsverfahren beschäftigen.
Insgesamt fällt auf, dass das Problemlösen anhand von Sachkontexten einen begrenzten Stellenwert einnimmt, obwohl dies als übergeordnetes Unterrichtsziel formuliert worden ist.
Der Fokus der Klausur liegt auf dem formal-technischen Arbeiten. Frau E formulierte das Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen als ein Unterrichtsziel. Insofern wird dies nicht als Widerspruch zu den formulierten inhaltlichen Zielen der Algebra begriffen. Gründe für die Gestaltung der Klausur wurden nicht erfasst, deshalb kann auch die Priorisierung des formal-technischen Arbeitens gegenüber den Anwendungs-orientierten Aufgaben nicht begründet werden.

6.6. Herr F

Herr F[104] ist seit 14 Jahren Lehrer und unterrichtet an einem niedersächsischen Gymnasium. In seiner Klasse arbeitete er sowohl mit dem Lehrwerk „Das Mathematikbuch“ als auch mit Neue Wege. An seiner Schule werden als Rechnertechnologie Computer-Algebra-Systeme verwendet.

6.6.1. Was sind die Inhalte des Algebraunterrichts?

Die Voraussetzung für das erfolgreiche Arbeiten in der Algebra ist erfolgreiches Struktur-Sehen, das bereits in der Arithmetik vorbereitet werden muss. Dies bezieht sich auf das Kopfrechnen und das Zulassen verschiedener Lösungsstrategien in diesem Zusammenhang sowie den flexiblen Umgang mit den geltenden Rechengesetzen (vgl. 28:56-1).
Das Aufstellen und Umformen von Termen, die als „Zusammenstellung von Zahlen, Buchstaben, Rechenzeichen“ (22:42-2) definiert werden, gehört zum Algebraunterricht. Es wird auf eine nicht zu formalistische Herangehensweise an Begriffe geachtet (vgl. 20:08-1), denn das würde zu einer verständnislosen Anwendung der Begriffe führen. Es muss immer geklärt werden, wofür die Terme stehen und welche Bedeutung ein Term im jeweiligen Kontext hat. Dazu gehört die Erklärung der Variablenbelegung, um zu gewährleisten, dass eine inhaltliche Verbindung und so ein Sinn hergestellt werden (vgl. 13:05-3, 27:35-1). Der Zweck wird über die Funktion der Terme als Mittel zur Lösung konkreter Probleme verdeutlicht (vgl. 13:05-3). Die Variablen werden dabei einfach verwendet, als etwas, das für eine Zahl steht. Eine explizite Definition erfolgt nicht (vgl. 56:34-1). Ein Verständnis davon, was eine Variable ist, als Grundlage für die Arbeit mit Termen, erlangen sehr viel Schülerinnen und Schüler aus Sicht von Herrn F nicht (vgl. 14:18-2).
Das Aufstellen von Gleichungen ist „oft so das Ziel“ (11:06-3). Zum Beispiel in Bezug auf funktionale Zusammenhänge zeigt sich, dass es für ihn sehr wichtig ist, zu verstehen, welcher Zusammenhang durch die Gleichung beschrieben wird und damit dann auch die Anschauung im Koordinatensystem zu verbinden (vgl. ebd.). Außerdem ist das Lösen von Gleichungen in nahezu allen Bereichen zentral - den Naturwissenschaften, der Wirtschaft, und natürlich auch der Oberstufenmathematik. Daher müssen die Schülerinnen und Schüler die Kompetenz zum Lösen von Gleichungen erwerben (vgl. 15:30-1). Dabei müssen die Regeln zum Auflösen von Gleichungen und insbesondere die Äquivalenzumformungen von den Schülerinnen und Schülern verstanden werden, auch wenn diese Schwierigkeiten damit haben, zu verstehen, dass Umformungen für beide Seiten und auch für alle enthaltenen Terme gelten (vgl. 33:09-1). Dies erfordert sehr viel Übung (vgl. 6:33-2). Hier muss dann zum Beispiel das Waagemodell hinzugezogen werden, damit die Techniken zum Lösen der Gleichungen nicht zu formal erlernt werden, sondern dass immer das Verständnis gegeben ist von der Idee des Gleichgewichts auf beiden Seiten der Gleichung (vgl. 10:55-1). Auch die Struktur der Gleichungen soll beschrieben werden können (s.o.).
Das Argumentieren kommt in seinem Unterricht vor, allerdings nicht im Sinne des klassischen Beweises, obwohl er anmerkt, dass dies in der Algebra sehr gut möglich wäre (vgl. 18:45-3). Er bezieht sich dann zum Beispiel auf die Zahlenrätsel und auf die Gelegenheit dort allgemeingültige Aussagen nachzuweisen, in dem Sinn, dass Gleichartigkeiten von Termen nachgewiesen werden (vgl. 19:11-3). Dies ermöglicht es aber auch schon „allgemeine Strukturen (...) durchschaubar zu machen und darüber nachzudenken, wie hängen die Dinge zusammen?“ (19:25-3). Ähnliches gilt für das Modellieren und das Problemlösen. Er erachtet es für sehr wichtig, ein Problem durch mathematische Hilfsmittel beschreiben und ausdrücken zu können (vgl. 16:37-3). Dies hilft den Schülerinnen und Schülern im späteren Leben in verschiedenen Studiengängen und auch in der Oberstufe (vgl. 17:57-3). Es ist sein „Hauptziel“,

[104] Die Aufnahme ist dreigeteilt. Die Zeitangaben sind nach dem Bindestrich mit dem jeweiligen Teil versehen.

dass die Schülerinnen und Schüler Probleme dahingehend analysieren, ob sie diese in irgendeiner Form mathematisch modellieren und später auch lösen zu können. Aber in erster Linie geht es um die Beschreibung des Problems (8:25-3).
Die Übersetzung von Sachtexten in Terme ist im Unterricht von Herrn F relevant. Dabei geht es vor allem darum, „dass man also irgendeinen Text hat (...), ich habe da irgendeine unbekannte Zahl herauszufinden und (...) ich kann das mit mathematischen Mitteln eben als Gleichung aufschreiben“ (2:11-3). Die anhaltende Rückkopplung des Terms zum Text und des Texts zum Term sind dabei elementar und dabei auch das Einsetzen eigener Zahlenwerte zur Überprüfung der aufgestellten Rechnungen (vgl. 15:02-3). Gleichzeitig lässt er Gleichungen auch wieder in Text umformen (vgl. 19:45-2).
Die quadratischen Gleichungen und die zugehörigen Lösungsverfahren (pq-Formel, quadratische Ergänzung) und die binomischen Formeln sind Bestandteil des Stoffs der Klasse 8. Gerade bei den binomischen Formeln ist Herrn F der konkrete Rückbezug zu der geometrischen Vorstellung wichtig. Er möchte, dass seine Schülerinnen und Schüler verstehen, wo der Ursprung der Formeln liegt. Die verschiedenen Lösungsverfahren werden vermittelt, um in verschiedenen Situationen das jeweils angemessene Verfahren auswählen zu können (vgl. 21:26-1).
Ungleichungen und die inhaltliche Arbeit mit dem Rechner, abgesehen von den Anschauungen, die in der Behandlung der Graphen und Funktionen vermittelt werden, treten im Unterricht in den Hintergrund (vgl. 9:16-1). Die Arbeit mit dem Rechner vermindert die Kopfrechenfertigkeiten der Schülerinnen und Schüler, diese sind ihm aber wichtig, daher geringer Einsatz des Rechners (vgl. 20:19-3).

Eine grundlegende Sicherheit in den Rechenregeln und -gesetzen in bekannten Zahlbereichen ist die Voraussetzung, um ein Struktursehen vorzubereiten. Struktursehen bedeutet, dass die Lernenden ein Gefühl für das geschickte Kopfrechnen, die Möglichkeit verschiedene Lösungswege gegeneinander abzuwägen und für die flexible Anwendung von Rechenregeln entwickeln.
Variablen und Terme werden in anschaulichen Lernumgebungen (z.B. Gleisanlagen) im Sachkontext eingeführt. Die Lernenden erkennen selbst den Sinn Variablen zu nutzen. Zentral ist für Herrn F die Belegung der Variablen und die Termstruktur zu erklären (z.B. dass 3x das Dreifache einer beliebigen Zahl bedeutet).
Darauf aufbauend werden Gleichungen aufgestellt und Lösungsverfahren eingeübt. Bei der Erarbeitung der Verfahren nutzt er das Waagemodell um das Prinzip der simultanen Veränderung auf beiden Seiten der Gleichung zu veranschaulichen. Die Struktur der Gleichung soll durch die Lernenden erklärt werden können, da dies das Umformen der Gleichungen im Sinn der Umkehr der Operationen erleichtert. Der Rückbezug auf konkrete Zahlen ist immer präsent. Zur Behandlung der Gleichungen gehört der Bezug zu den graphischen Darstellungen bei den funktionalen Zusammenhängen.
Ziel der Behandlung algebraischer Inhalte ist die mathematische Beschreibung inner- und außermathematischer Probleme. Der Zusammenhang zwischen verschiedenen „Dingen“ und Strukturen soll verdeutlicht werden. Dies umschließt die in Kapitel 6.6.5 angestrebten verallgemeinernden Tätigkeiten im Algebraunterricht.
In der Klassenstufe 8 thematisiert Herr F quadratische Gleichungen und ihre Lösungsverfahren thematisiert.

6.6.2. Was sind die Ziele des Algebraunterrichts?

Insgesamt betrachtet er die Algebra als „das Umgehen mit Buchstaben und das, im Grunde genommen, das allgemeine Umgehen mit Rechnungen, wo man sich von konkreten Zahlen löst“ (1:54-1).
Sie soll als Mittel zum Problemlösen verstanden werden. Sie zeichnet sich durch die vielfältige Einsetzbarkeit aus. Die Schülerschaft spaltet sich angesichts des hohen Abstraktionsniveaus (vgl. 34:23-3, 42:30-1).
Es soll den Lernenden klar werden, dass die Algebra ein Mittel zur Vereinfachung ist und dass sich daraus ihr Nutzen ergibt, denn „wenn ich das alles was die Algebra ganz kurz und knapp ausdrücken kann, versuchen wollte in langen Sätzen zu formulieren, wird das unglaublich schwierig“ (4:12-1). Er versucht in diesem Zusammenhang deutlich zu machen, „dass das eigentlich total spannend ist“ (0:25-1). Herr F verknüpft mit der Algebra das „Umgehen mit Buchstaben (...), das allgemeine Umgehen mit Rechnungen“ (1:54-1). Dabei können Erkenntnisse auch das konkrete Zahlenrechnen betreffend gewonnen werden. Es ist durch die Algebra möglich, allgemeine Ergebnisse zu generieren und durch die abstraktere Ebene allgemeingültige Gesetze zu formulieren (vgl. ebd.). Damit verbunden ist eine verallgemeinernde Sicht auf die Dinge, die gleichzeitig eine einheitliche Kommunikation ermöglicht (vgl. 4:12-1). Algebra wird von Herrn F als Instrument zur Verallgemeinerung charakterisiert (vgl. 11:38-2). Zentral dabei ist die Verwendung von Variablen, da durch sie die Möglichkeit eröffnet wird „eine unglaubliche Vielzahl von Zahlen letztendlich zu ersetzen. Und die Strukturen, die zwischen den verschiedenen Zahlen bestehen, damit sichtbar zu machen“ (15:26-2). Die Mittel der Algebra ermöglichen es, Zusammenhänge zwischen den Dingen sichtbar zu machen (vgl. 19:25-3).
Der Algebraunterricht soll die Schülerinnen und Schüler befähigen Probleme lösen zu können, gerade durch die Übersetzung von Situationen in die mathematische Welt und deren Lösung dort. Wichtig ist in diesem Kontext, dass nicht nur auf das schematische Lösen und Berechnen der Terme Wert gelegt wird (vgl. 13:05-3). „Ich glaube nicht, dass es so sehr unglaublich wichtig ist, dass sie dann jede Gleichung da jetzt lösen können, aber dass sie einfach wissen: Mithilfe der Algebra kann ich solche Probleme, solche Gleichungen sehr effektiv angehen“ (50:07-1). Und dass sie auch wissen: „Ok also wenn ich schwierige Probleme habe, dann ist das ganz hilfreich, das als Gleichung erst einmal hinzuschreiben (...) und dann ja diese Mittel, diese Hilfsmittel anzuwenden“ (51:27-1). Gerade das damit verbundene Gefühl soll ebenfalls transportiert werden, also die Nützlichkeit zu verdeutlichen, damit dies auch an die Familien und Freunde transportiert wird. Herr F betont, dass es schwierig ist gegen die Vorerfahrungen anzugehen, die durch Eltern, Geschwister oder Freunde zuvor über das Buchstabenrechnen transportiert worden sind (vgl. ebd.).
Rein innerschulisch soll der Algebraunterricht die inhaltlichen Grundlagen schaffen, um die Oberstufe erfolgreich zu meistern (vgl. 3:08-1, 27:42-3). Die Inhalte der Algebra werden darüber hinaus auch noch im Studium benötigt (vgl. 3:47-1).
Er formuliert das Ziel, dass die Lernenden generell im Mathematikunterricht Spaß daran entwickeln sollen „mathematisch zu denken, mathematische Zusammenhänge zu erkennen“ (33:21-3) (vgl. Kapitel 6.6.3). Der Algebraunterricht soll zu diesem Ziel beitragen und zeigen wie spannend das algebraische Denken sein kann und die algebraischen Handlungen, wie das Lösen von Gleichungen (vgl. 34:23-3).

Innerhalb der Schule soll der Algebraunterricht die Schülerinnen und Schüler auf das Abitur vorbereiten und auch auf ein eventuelles späteres Studium.
Ganz generell und für sich genommen verfolgt Herr F das Ziel den Schülerinnen und Schülern die Algebra als Problemlöseinstrument mit vielfältigen Einsatzgebieten näher zu bringen. Dazu wird die Algebra als Instrument der Vereinfachung aufgefasst. Ihre Eigenschaft

als Sprache wird betont, die es ermöglicht sich kurz und knapp auszudrücken und gleichzeitig die Basis einer gemeinsamen Kommunikation ist. Verschiedene Strukturen und Zusammenhänge können durch die algebraische Sprache beschrieben werden und es ist möglich allgemeingültige Gesetzmäßigkeiten auszudrücken. Im Kontext des Problemlösens bedeutet das die Beschreibung von Sachkontexten mit Hilfe mathematischer Ausdrücke.
Die Voraussetzung dafür ist ein Verständnis der Variablen als Möglichkeit simultan sehr viele Fälle abdecken zu können und in verschiedenen Situationen flexibel eingesetzt zu werden.
Herr F stellt bei seinen Lernenden Ressentiments gegenüber der Algebra in Form von Angstgefühlen und Vorurteilen fest. Ein Unterrichtsziel ist es diese abzubauen. Dazu wird der Nutzen der Algebra in der Modellierung verschiedener Situationen verdeutlicht.
Auf einer abstrakteren Ebene möchte Herr F den Lernenden zeigen, dass die Beschäftigung mit dem algebraischen Denken Freude machen kann.
Algebra wird als Umgehen mit Buchstaben und als Rechnen ohne konkreten Zahlbezug beschrieben.

6.6.3. Was sind die Ziele des Mathematikunterrichts?

Ein Ziel des Mathematikunterrichts ist die Vermittlung der Universalität der Mathematik, gemeint ist damit zum Beispiel ihre Anwendbarkeit in anderen Naturwissenschaften oder der Wirtschaft - die Fähigkeit mit einer Gleichung Zusammenhänge ausdrücken zu können (vgl. 15:30-1). Er konkretisiert dies, wenn er sagt: „Dass ich so viele unterschiedliche Problemsituationen eigentlich mit denselben Mitteln bearbeiten kann“ (37:30-3). Es ist ein unheimlich gutes Gefühl für Herrn F, wenn er „irgendwann ein Problem geknackt [hat]“ (37:12-3). Der sinnvolle Einsatz der Mathematik ist ihm sehr wichtig und dabei auch den Schülerinnen und Schülern das Gefühl der Wirksamkeit zu vermitteln (vgl. 33:21-3). Er ergänzt: „Für mich ist ein anderes wichtiges Ziel, dass die einfach merken, wie viel Spaß das machen kann. Wie interessant das sein kann mathematisch zu denken, mathematische Zusammenhänge zu erkennen“ (33:21-3). Ihm geht es nicht darum „Mathematik nur als Rechenfertigkeit zu vermitteln. Das wird der Mathematik überhaupt nicht gerecht“ (12:00-2). Vielmehr geht es um die allgemeineren „Zusammenhänge“ (ebd.) dahinter. Dazu gehört für Herrn F die Kommunikation als zentrales Element des Unterrichts. Es wird Wert auf das gemeinsame Finden von Lösungen, die Diskussion von Ideen und der Austausch darüber in den Vordergrund gerückt. Dies dient zugleich als Quelle der Motivation der Schülerinnen und Schüler (vgl. ebd.).
Im Sinne der Allgemeinbildung geht es darum, dass die Schülerinnen und Schüler lernen, verschiedensten Problemen zu begegnen und diese eventuell mathematisch modellieren zu können und dann auch eruieren zu können, welchen Weg gehe ich (vgl. 17:57-3).

Herr F möchte den Schülerinnen und Schülern zeigen, wie universell die Mathematik eingesetzt werden kann, weil mit Hilfe bestimmter Problemlösestrategien zahlreiche Situationen bearbeitet werden können. Die Wirksamkeit der Mathematik soll den Lernenden klar werden. Weiterhin sollen sie selbst Freude und Spaß am mathematischen Arbeiten entwickeln. Dazu tragen ein interaktives und kommunikatives Lernumfeld bei genauso wie die Arbeit an anwendungsorientierten, schülernahen Aufgaben.

6.6.4. Wie gelingt erfolgreiches Lernen?

Manchen Schülerinnen und Schüler fällt die Übersetzung von Texten in mathematische Formulierungen sehr schwer (vgl. 14:26-3). Anhand der Algebra spaltet sich die Schülerschaft, in diejenigen, die sagen: „ja das finde ich ja mal richtig, das packt mich, da jetzt mathematisch,

algebraisch irgendetwas einfach zu machen. Gleichungen zu lösen“ (34:23-3). Sie werden Spaß dabei haben, sich mit Problemen auseinanderzusetzen (vgl. 33:21-3). Diese Schülerinnen und Schüler können dann entdecken, wie spannend die Algebra sein kann. Für andere kann es, „wenn es zu abstrakt wird, problematisch“ (ebd.) werden. Die bleibende Abneigung gegen die Algebra ergibt sich einerseits aus den Einflüssen aus der Umwelt und andererseits aus den bestehenden „Verständnisbarrieren“ (28:56-1).
Schwer fällt es den Schülerinnen und Schülern auch, die erlernten Regeln bis in die Oberstufe zu behalten. So sieht Herr F das Problem, dass sie bis in die Oberstufe die Regeln der Multiplikation für die Addition übernommen haben, im Sinn der Übergeneralisierung (vgl. 33:40-1) Sein Gegenmittel ist auch da der Rückbezug zu den konkreten Zahlen (vgl. ebd.). Diesen Gedanken verfolgt er auch in Bezug auf das Verallgemeinern und die Vorstellung, dass ein aufgestellter Term nun für alle möglichen Fälle gelten soll. „Das muss für jede Einsetzung [gelten]...Ich finde das unheimlich spannend, dass dann Schüler auch, das sind dann meistens mit die Findigeren auch, die dann sofort auf die Suche gehen, nach dem ‚ja wann könnte es denn stimmen'“ (42:04-1).
Die Vermittlung von Inhalten anhand von Kontexten ist „so für die große Masse der Schüler (...) wichtig das sehr lange auch zu tun“ (7:24-3), dies dient auch der sehr wichtigen Sinnstiftung (vgl. 13:05-3).
Außerdem, wenn den Schülerinnen und Schülern gezeigt werden kann, wie effektiv das Hilfsmittel des Lösens von Gleichungen sein kann und wenn ihnen gezeigt wird, was für Vorstellungen mit den algebraischen Inhalten verknüpft sind, dann ist Herr F zufrieden (vgl. 14:05-1).
Den Schülerinnen und Schülern müssen verschiedene Darstellungsformen, wie z.B. durch das Lehrbuch „Das Mathematikbuch“ möglich, angeboten werden. Sie können so zwischen den Darstellungen wechseln und behalten die dadurch entstehenden Zusammenhänge im Blick, z.B. zwischen der Funktionsgleichung und der graphischen Darstellung (vgl. 10:14-3, 11:06-3). Zudem wird ihnen die Möglichkeit gegeben, sich selbst zu überprüfen, indem sie errechnete Ergebnisse in anderen Darstellungen sehen und vergleichen können (vgl. 11:06-3).
Bei der Übung bevorzugt Herr F „Das Mathematikbuch“, da dieses den Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit bietet, selbst zu entscheiden, wie viel sie üben möchten/können/sollten (vgl. 26:50-1).

Der Rückbezug[105] auf die konkreten Zahlen ist für die Lernenden ein wichtiges Mittel, um sich selbst zu überprüfen, Fehlvorstellungen zu entdecken und damit eigenverantwortlich Einfluss auf ihren Lernprozess zu nehmen. Den Schülerinnen und Schülern soll die Gelegenheit gegeben werden aktiv am Unterricht zu partizipieren, zum Beispiel bei Gruppen- und Partnerarbeiten und bei den Hausaufgaben. Wichtig ist, dass die Lernenden aktiv mit den Lerninhalten umgehen. Ihnen muss Raum gegeben werden, ihre Gedanken und Ideen zu entfalten und diese zu kommunizieren. Anwendungsorientierte Aufgaben helfen, den Sinn des Erlernten zu veranschaulichen. Über den Einsatz verschiedener Darstellungsformen gelingt es den Zusammenhang zwischen den erlernten Inhalten (Funktionsgleichung, Funktionsterm) herzustellen und die Sinnstiftung zu unterstützen.
Herr F spricht davon, dass die Schülerschaft sich in diejenigen aufteilt, die Spaß entwickeln werden, weil sie einen Zugang zur Algebra finden und denjenigen, die Verständnisbarrieren aufweisen. Ob es eine Möglichkeit gibt, die Barrieren überwinden zu können, wird nicht besprochen.

[105] Bei der Beschreibung dessen, was Herr F für erfolgreiches Lernen hält, finden sich Überschneidungen zu den vorhergehenden Bereichen. Es sei vor allem auf die Zusammenfassung von Kapitel 6.6.5 verwiesen.

6.6.5. Wie gelingt guter (Algebra-)Unterricht?

Bei der Einführung des Themas Algebra ist es für Herrn F elementar diesen „Übergang von dem rein Rechnen mit Zahlen wirklich hinzubekommen, zu verstehen ich kann das jetzt auch mit Buchstaben machen und eigentlich ist das nichts Neues“ (15:30-1). Die Schülerinnen und Schüler sollen dabei die Verbindung zu dem sehen, was sie bereits kennen und dass alle Regeln, die sie im Folgenden erlernen, im Prinzip auf dem basieren, was sie schon gelernt haben (vgl. ebd.). Dies „gelingt leider oft nicht“ (ebd.).

Das Ziel von Herrn H ist die Reduzierung des Abstraktionsniveaus bei der Behandlung von Variablen und Termen. Dabei versucht er „den Schülern zu vermitteln, dass [der Übergang] von Zahlen zu Buchstaben eigentlich gar nicht so schwierig ist“ (0:25-1). Dies erreicht er durch den ständigen Rückbezug auf die Zahlen. So zum Beispiel, wenn er Fehlern in der Zusammenfassung von Termen begegnet, „dann setzt man eine Zahl für x, y, z jeweils ein und dann sieht man ja in den allermeisten Fällen“ (41:29-1) wo der Fehler liegt oder dass ein aufgestellter Term eben nicht für alle Fälle gilt. Dies entspricht auch seinem Vorgehen beim Überprüfen von Lösungen. Da bietet das Einsetzen der konkreten Zahllösung zur Prüfung eine gute Basis, um wieder den Rückbezug zu den Zahlen zu bilden. Dies wird regelmäßig vergessen (vgl. 38:40-1), ist aber nötig, „damit diese Verbindung erhalten bleibt, zu dem, ich sage mal, etwas Konkreteren“ (21:00-1).

Im Algebraunterricht steht unter anderem das Verallgemeinern im Zentrum. Herr F betont mehrfach das Ziel „allgemeine Strukturen auch durchschaubar zu machen und darüber nachzudenken, wie hängen die Dinge zusammen?“ (19:25-3). Dabei helfen ihm zum Beispiel Zahlenrätsel im Unterricht, wenn dabei Erkenntnisse gewonnen werden, wie - es entsteht „immer das Doppelte“ (19:11-3.).

Der Vermittlung von Schemata steht er ambivalent gegenüber. Er betrachtet es als hilfreich, dass die Schülerinnen und Schüler etwas haben, woran sie sich entlang hangeln können, sieht aber gleichzeitig die Gefahr, „wenn man eben nicht mehr erkennt, wo passt es jetzt. Und wo passt es eben aber nicht mehr“ (43:59). Die Idee des nicht mehr darüber Nachdenkens ist dabei entscheidend und auch die unreflektierte Anwendung der Regeln, obwohl sie nicht passen (vgl. ebd., 36:49-1). Grundsätzlich gehören aber Algorithmen und ein formales Arbeiten zur Algebra, „weil dann die Sache ja insgesamt noch viel einfacher wird“ (46:45-1), dabei muss aber darauf geachtet werden, dass immer klar wird, wofür die jeweiligen „Buchstaben“ (ebd.) stehen. Er ergänzt, dass wenn „man diese Fehler auch nicht mehr macht [bei der Anwendung der Schemata, Anm. JM], dann beschränkt es [der Unterricht, Anm. JM] sich irgendwann ja auch darauf. Aber dann wird es auch ein Stück weit langweilig. Wenn ich dann nur noch dieses formalistische Vorgehen mache“ (47:34-1). Zudem helfen Schemata, „Strukturen (...) viel viel leichter erkennbar [zu] machen. Und damit umgehen kann und das ja auch auf ganz ganz viele Bereiche dann anwenden kann“ (48:04-1). Algebra lebt nur indirekt durch ein schematisches, formalistisches Vorgehen, eher basiert sie auf der inhaltlichen Verbindung zwischen dem Formeln und Schematischen zu den entsprechenden Sachkontexten (vgl. 46:45-1).

Dementsprechend sieht er Probleme in der zu formalen Vermittlung von Formeln und Schemata und in der Betonung der Besonderheit dieser Formeln. So führt er am Beispiel der binomischen Formeln an, dass die Schülerinnen und Schüler „deshalb auch nicht mehr in der Lage sind, wenn sie die eine Formel vielleicht vergessen haben, nochmal wieder für sich selber herauszufinden, wie würde man denn a+b zum Quadrat berechnen“ (12:10-1). Dies betrifft auch seine Haltung in Bezug auf Definitionen, die sich aus dem Referendariat ergibt: „ich sage mal, viel zu formalistische[s] Nachdenken (...) nach dem Motto: ich muss erst mal definieren, was eine Variable ist, bevor ich damit umgehen kann. Das hat mich eher in die Richtung beeinflusst, dass ich sage: Nein, das will ich nicht“ (56:34-1). Komplizierte Formulierungen führen eher dazu, dass ein Umgehen mit den Gegenständen behindert wird, weil man sich fragen muss: „was nimmt der Schüler jetzt wirklich davon mit, außer dass er jetzt komplizierte Sätze gelesen hat“ (ebd.). Deshalb werden die „einfach irgendwann mal verwendet, die Buchstaben“ (25:01-1). Für ihn steht die Planung einer Unterrichtsstunde, die sich der reinen Definition widmet, nicht auf der Agenda. Vielmehr „lernen die Stück für Stück, was das ist“ (ebd.). Dahingegen ist er „pingelig“, wenn es darum geht, zu erklären, was die Variable im jeweiligen Kontext bedeutet (vgl. 27:35-1, 17:34-1) und auch in der Thematisierung dessen, was die Termschreibweise meint. Als Beispiel führt er auf, dass thematisiert wird, was das Vierfache einer Zahl bedeutet und auch andersrum, was die Schreibweise 2x meint (vgl. 28:15-1). Zu verbalisieren, hilft den Schülerinnen und Schülern aus seiner Sicht auch die Umkehroperation zu verstehen, wenn ich also lese, ich verdopple eine Zahl und addiere 3, dann muss ich entsprechend zunächst subtrahieren und dann halbieren (vgl. 21:48-2). Dinge auswendig zu lernen, kommt deshalb für ihn nicht in Frage, da sie neben der Tatsache, dass sie nicht mit Inhalt verknüpft werden, auch noch falsch auswendig gelernt werden (vgl. 12:10-1).

Sehr gerne werden schülernahe, anwendungsorientierte Kontexte ausgewählt, wie beispielsweise in „Das Mathematikbuch“. Eingeführt werden zum Beispiel die Terme über das Beispiel der Lernumgebung „Gleisanlagen“. Dabei wird versucht das Bedürfnis für Termumformungen aus der Aufgabe heraus zu generieren. Die Schülerinnen und Schüler kreieren Terme zur Bestimmung der Gleislänge und sollen die Verbindung selbst verstehen, dass alle Terme dasselbe beschreiben, und deshalb auch gleich sein müssen. Die Erkenntnis entsteht dabei aus den Schülerinnen und Schülern heraus. Dabei legt er wieder Wert darauf zur Überprüfung Zahlen einzusetzen und auf die Kommunikation der Schülerinnen und Schüler (vgl. 23:41-2, 0:07-3). Die Kommunikation der Schülerinnen und Schüler zu fördern, um dadurch Prozesse des gemeinsamen Nachdenkens und Problemlösens in Gang zu setzen, ist ein Unterrichtsziel von Herrn F (vgl. 12:00-2). Dabei entsteht das Problem, dass es ein gemeinsames Vokabular geben muss, das eine Kommunikation ermöglicht. Für diesen Fall sieht er die Notwendigkeit ein Regelheft zu führen und darin auch die Definitionen wie zum Beispiel von Produkttermen und Summentermen aufzuführen, „einfach um miteinander reden zu können, dieses kommunizieren“ (22:55-2).

Grundsätzlich präferiert er solche Kontextaufgaben, wie die Gleisanlagen, aber auch innermathematische Kontexte, wie zum Beispiel die Frage nach den Folgen der Verdopplung der Seitenlänge, „das finde ich auch sehr wichtig, dass man immer wieder diese Kontexte hat und vielen Schülern hilft es tatsächlich auch immer wieder solche geometrischen Sachen dahinter zu sehen“ (5:03-3, vgl. 29:16-3). Die Anwendung von Kontexten führt dazu, dass ein roter Faden entsteht, weil so Sinn verliehen wird, auch wenn Herr F formuliert: „Ideal wäre es vielleicht tatsächlich, wenn die Schüler irgendwann zu dem Punkt kommen und sagen, das ist mir eigentlich völlig egal, was da für ein Kontext dahinter steht“ (7:24-3). Das bedeutet für ihn aber mehr, dass Anwendungen eine Hilfestellung sind, um Verständnis aufzubauen, dass aber ein richtiges Verstehen erst vorherrscht, wenn jeder Kontext zu bewältigen ist (vgl. ebd.).

Bei der Vermittlung gilt die Verbindung zu einem Kontext daher als zentral. So zum Beispiel wenn Gleichungen und Term- bzw. Gleichungsumformungen unterrichtet werden, da greift er auf das Waagemodell zurück, weil er „sehr darauf bedacht [ist], dass man da das Verständnis davon (...) beibehält. Dass das nicht so ein rein technisches Umformen wird“ (10:55-1). Das Waagemodell führt dazu, dass die Schülerinnen und Schüler eine Vorstellung haben, die sie mit der Gleichheit verbinden (vgl. ebd.). Er bringt dann eine richtige Waage mit oder zeichnet sie an, dies bewertet er aber als nicht so anschaulich (vgl. 3:18-3). Das bedeutet aber nicht, dass er technische Verfahren ablehnt, vielmehr plädiert er für die allmähliche Einführung dieser Strategien, die immer an eine konkrete Vorstellung geknüpft sein sollten. Denn es wäre „natürlich schön, wenn die das auch hinkriegen würden, das als ein Verfahren zu benutzen. Aber wenn das zu schnell passiert, glaube ich, dann ist das sehr sehr fehleranfällig“ (10:55-1).

Das Beispiel der Gleisanlagen wird von Herrn F als Problemlösen verstanden. Dies dient den Schülerinnen und Schülern dazu, „eine Verbindung [zu] haben zu dem, wofür Terme da sind.

Nämlich zum Lösen von konkreten Problemen“ (13:05-3). Dies zeigt die angestrebte Anwendungsfokussierung im Unterricht.

Ausgewählt werden die Inhalte orientiert am Curriculum, aber eher noch am Schulbuch (vgl. 5:27-1, 53:56-1). Er präferiert „Das Mathematikbuch“, weil dieses kürzere Unterrichtseinheiten behandelt, und die behandelten Inhalte wieder aufgreift. Das verhindert das abgeschlossene Themenlernen, bei dem die Schülerinnen und Schüler normalerweise denken, dass sie die Inhalte nach einer langen Unterrichtseinheit vergessen könnten, weil ein neues Thema kommt. Auf die Art sehen sie eher die Zusammenhänge zwischen den einzelnen Themenbereichen (vgl. 7:32-1). Auch verkürzt es den Schülerinnen und Schülern die Zeit, wenn ihnen Themen sehr schwer fallen, dass sie wissen, sie müssen nur kurz durchhalten, dann kommt erst einmal was anderes (vgl. 30:26-3). Dieses wird dann auch in jeder Unterrichtsstunde verwendet (vgl. 58:44-1). Auch das Übungskonzept aus „Das Mathematikbuch“ wird präferiert, weil dieses die Schülerinnen und Schüler zum Nachdenken und Reflektieren anregt (vgl. 1:18-2). Angesichts der zeitlichen Restriktionen die Übung betreffend muss wenn, dann effektiv geübt werden und effektiv kann nur geübt werden, wenn die Aufgaben einen Reflexionsanteil besitzen (vgl. 3:09-2). Unter dieser Art der Übung versteht er die enge Anbindung an die Zahlen. Das bedeutet, dass das Verständnis für die abstrakte Algebra nur durch die Idee, dass die Variablen für konkrete Zahlen stehen, erlangt werden kann, zum Beispiel durch das stetige Wiedereinsetzen dieser (vgl. 57:51-1). Das Üben, beziehungsweise Training, gehören zum Erlernen der Algebra (vgl. 0:15-2). Herr F ist der Überzeugung, dass die Lernenden beim Üben selbstständig mit den Inhalten umgehen und dabei Erfahrungen sammeln müssen, da diese für den Nachvollzug der Inhalte notwendig sind (vgl. 7:13-2).

Für seinen Unterricht teilt er die Überzeugung, dass die Schülerinnen und Schüler aktiviert werden müssen, „sonst lernen die gar nichts. Sie müssen das mit eigenem Nachdenken, mit eigenen Erfahrungen machen“ (4:43-2). Das bedeutet, dass er zwar Gruppen- und Partnerarbeiten hoch schätzt, schon allein wegen des Kommunikationsanteils, „aber es muss auch Phasen gebe[n], wo jeder Schüler seine ganz eigenen Überlegungen anstellen muss“ (ebd.). Gerade weil die Schülerinnen und Schüler die Inhalte mit ihrem eigenen Denken und den eigenen Erfahrungen verknüpfen müssen, soll dem viel Raum gegeben werden, sonst wird bei dem einzelnen Schüler/der einzelnen Schülerin nicht viel hängen bleiben. Deshalb haben Hausaufgaben auch einen sehr hohen Stellenwert, da die Schülerinnen und Schüler dort Gelegenheit haben sich allein ohne ihre Mitschüler oder ihn als Lehrer mit den Aufgaben zu beschäftigen (vgl. ebd.). Die Kommunikation der Schülerinnen und Schüler untereinander, also auch das „miteinander Lösungen finde[n] und miteinander sich darüber austauscht wie sind so die unterschiedlichen Herangehensweisen gewesen und was kann man insgesamt dann vielleicht auch Neues daraus entwickeln“ (12:00-2). „Aber generell braucht es natürlich diese Phasen, wo man auch einmal als Lehrer für alle etwas erklärt“ (7:52-2), diese sind aber kurz gehalten (vgl. ebd.) und dabei wird jedoch versucht die Schülerinnen und Schüler miteinzubeziehen, wenn z.B. einige sehr viel schneller sind im Begreifen der Dinge, können sie es ihren Mitschülern erklären. So kann man die schnelleren Schülerinnen und Schüler auch sinnvoll beschäftigen (vgl. ebd.) und die anderen Schülerinnen und Schüler verstehen es eher, wenn ihnen noch eine andere Formulierung angeboten wird (vgl. 9:51-2).

Weiterhin folgt er dem Prinzip, dass er individuell auf Probleme eingehen möchte. Werden zum Beispiel Probleme beim Umhergehen in der Klasse erkannt, dann werden diese gemeinsam im Unterrichtsgespräch besprochen. Dies hat dann auch Priorität gegenüber dem Aufgabenvergleich. Die Besprechung von Fehlern hilft, grundlegende Dinge zu sichern, dass also auch das Übergeneralisieren vermieden werden kann (vgl. 45:38-1).

Herr F erkennt an, dass die Einführung der Algebra für die Lernenden eine kognitive Hürde darstellt, weil das Abstraktionsniveau steigt. Er möchte diese Hürde überwinden, indem er den Lernenden immer wieder die Parallelen zu schon Bekanntem aufzeigt.

Er stellt zum Beispiel heraus, dass die Variablen immer für konkrete Zahlen stehen. Aus diesem Grund lässt er immer wieder Zahlen für diese einsetzen - zur Probe, als Strategie zur Findung einer Lösung, oder zur Behebung von Fehlvorstellungen. Zudem achtet er sehr darauf, dass sich die Lernenden bei der Verwendung von Variablen klar über deren Sinn sind. Das bedeutet, dass er die Variablen im Sachzusammenhang definieren lässt, wofür sie also im jeweiligen Kontext stehen. Auf formale Definitionen wird in seinem Unterricht eher verzichtet. Sein Credo lautet, dass die Lernenden die Begriffe/Inhalte verwenden sollen und darüber ein Verständnis ihrer Bedeutung erlangen.
Terme und Termumformungen betrachtet er als Werkzeug. Sie helfen, Anwendungsprobleme zu lösen. Die Bedeutung, die Terme im Sachzusammenhang haben, wird klar herausgestellt.
Die Vermittlung von Schemata und Algorithmen hält er einerseits für hilfreich, da sie das Lernen erleichtern, und Strukturen verdeutlichen können, er warnt aber davor, diese unreflektiert anzuwenden. Deshalb achtet er darauf, dass seine Schülerinnen und Schüler ihre Ergebnisse reflektieren und auf ihre Sinnhaftigkeit hin überprüfen. Zugleich wertet er die Arbeit mit Schemata und Algorithmen als formalistisch. Dies lehnt er ebenso wie die Hereingabe von Definitionen ab. Er plädiert vielmehr dafür, die Verwendung von Schemata und Algorithmen an Anwendungskontexte zu knüpfen. Ihm ist die Verwendung schülernaher, anwendungsorientierter Kontexte im Unterricht wichtig, damit die Schülerinnen und Schüler aktiviert und zum Nachdenken und Reflektieren angeregt werden. Nur wenn sie aktiv mit den Inhalten umgehen und diese praktizieren, sammeln sie eigene Erfahrungen, was die Grundlage für den Lernprozess bildet.
Eine gemeinsame Kommunikation über die behandelten Inhalte ist ein Kernelement guten Unterrichts. Dies fördert das Nachdenken über die erlernten Inhalte, setzt aber auch ein gemeinsames Vokabular voraus. Das bedeutet für Herrn F, dass ein Regelheft geführt wird, in dem die verwendeten Begriffe festgehalten werden.
Neben den Phasen der Schüleraktivität und kurzen lehrkraftzentrierten Phasen hält er die Hausaufgaben für wichtig, weil diese Gelegenheit bieten allein ohne äußere Einflüsse über die Inhalte nachzudenken.
„Das Mathematikbuch“ dient ihm als Inspiration für die Übungsaufgaben und die Unterrichtsstruktur. Er ist davon überzeugt, dass die Struktur des Buchs ein Schubladendenken verringert.
Weiterhin lehnt er einen unnötigen Formalismus aufgrund seiner Erfahrungen im Referendariat ab. Dabei scheint es widersprüchlich zu sein, formale Definitionen abzulehnen und gleichzeitig die Notwendigkeit eines Regelheftes zu betonen.

6.6.6. Das Variablenverständnis von Herrn F

„Also einerseits indem ich von Anfang an versuche das klar zu machen. Das eine Variable für unglaublich viele Zahlen auch immer stehen kann. Dass man auch als Schüler immer wieder versuchen sollte, gerade da wo es schwierig wird, Zahlen wieder einzusetzen. Diese Rückbindung auch im Kopf zu haben. Und andererseits auch, ja indem man so, bei so Fehlern, die auftauchen bei diesem Einblick da vorhin, dass man da immer wieder auch Zahlen benutzt und immer wieder sagt: Ich prüfe das, indem ich jetzt Zahlen einsetze. Das ist genau dieser Punkt, wo ich das auch immer wieder mit ins Spiel versuche zu bringen. Das Nachdenken darüber. Eigentlich steht es für eine Zahl. Aber es ist ein viel allgemeineres Nachdenken möglich, wenn ich jetzt einen Buchstaben nehme, weil ich dann alle Zahlen gleichzeitig da betrachte, im Blick habe und die Zusammenhänge auch sozusagen auf einen Schlag dann ausdrücken kann. Ich muss nicht sagen, ich kann bei einer Addition von drei und vier auch vier und drei rechnen. Sondern ich kann das ganz allgemein formulieren. Also da an der Stelle

kann man das, glaube ich, mit Schülern immer wieder auch ansprechen. Dass man da für jeden Buchstaben immer wieder Zahlen einsetzen kann“ (15:49-2).
Die simultane Betrachtung verschiedener Zahlen durch die Variablen entspricht dem Verständnis dieser als Unbestimmte. Der konkrete Rückbezug auf die Zahlen eher derjenigen als Unbekannte verbunden mit dem Einsetzungsaspekt in der jeweiligen Situation. Die Sinnstiftung steht in diesem Kontext über allem. Er legt auch Wert darauf, dass das x immer im Kontext bestimmt wird. Dies spricht eher für ein Verständnis der Variablen als Unbekannter (vgl. 17:34-1).
Bei der Vorlage der drei Aufgaben zur Beschreibung der drei Variablenaspekte, antwortet er, dass die Variable in allen Fällen „für eine unbekannte Zahl von der ich gerne wissen möchte, wie genau sie aussieht“ (18:01-2) steht, nur die jeweilige Art der Annäherung würde sich ändern - durch einsetzen, durch Lösungsverfahren, etc. (vgl. ebd.). Dies unterstützt die zuvor gegebene Einschätzung, dass die Variable vornehmlich als Unbekannte genutzt wird. Die Beschreibung der unterschiedlichen Herangehensweise zur Bestimmung der Variablen in Abhängigkeit des Aufgabenkontextes weist dabei darauf hin, dass Herr F die verschiedenen Variablenaspekte unterscheidet.

6.6.7. Das Bild der Mathematik - Herr F

Im Interview wies der Code Schema (12) die höchste Ausprägung auf. Weniger stark ausgeprägt sind die Aspekte Anwendung (9), Formalismus (7) und Prozess (2). Herr F bewegt sich damit in Bezug auf die Skalen Schema (Rang 5) und Formalismus (Rang 4) im Mittelfeld, während er sich in Bezug auf die Skala Anwendung im unteren Drittel (Rang 8) befindet und diesen damit relativ ablehnt.
Im Fragebogen weist die Skala Anwendung (19) die höchste Ausprägung auf. Leicht weniger ausgeprägt ist der Prozess-Aspekt (18). Weniger stark ausgeprägt sind die Aspekte Formalismus (13) und Schema (9).
Es ergibt sich die folgende Übersicht:

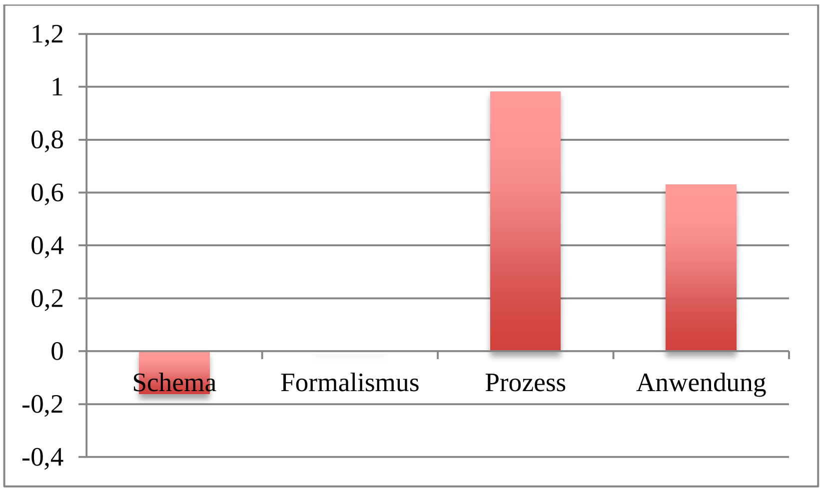


Abbildung 16: Das Bild der Mathematik - Herr F

Die Skalen Schema und Formalismus zeigen eine gute Übereinstimmung. Die Skala Prozess wird im Fragebogen deutlich angenommen.
Im Fragebogen ist die Ausprägung der Skala Anwendung größer als im Interview. Hier lässt sich diese Diskrepanz nicht sinnvoll erklären, da die Anwendungsorientierung von Herrn F auch in den rekonstruierten subjektiven Theorien zeigt.

6.6.8. Ziel-Mittel-Argumentationen - Herr F

Tabelle 46: Inhalte des Algebra-Curriculums , Herr F

		Problemlösen (argumentieren, modellieren) in Form der Übersetzung von realen Problemsituationen in die mathematische Sprache	↔	generalisierende Tätigkeiten, dabei immer Reflexion über die Belegung der Variablen
		↑		
in Klasse 8 quadratische Gleichungen unter Berücksichtigung der verschiedenen Lösungsverfahren	↔	Aufstellen, Umformen und Lösen von Gleichungen, Äquivalenzumformungen (verschiedene Lösungsverfahren)	↔	Einsatz des Waagemodells, Üben, Rückbezug zu konkreten Zahlen, kalkülhafte Tätigkeit
		↑		
		Aufstellen und Umformen von Termen, dabei Verwendung von Variablen	↔	Terme und Variablen werden explizit nur im Kontext bestimmt - Variable als Unbekannte
		↑		
		Struktursehen, das sich durch verschiedene Lösungswege und geschicktes Kopfrechnen ergibt		
		↑		
		Grundlegende Sicherheit im Rechnen und im Umgang mit den Rechengesetzen in $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$		

Tabelle 47: Ziele des Algebra-Curriculums, Herr F

												!Vorerfahrung (=Algebra als Idee des vorbelasteten Buchstabenrechnens als etwas sehr schweres soll gemindert werden, auch in der Außenwirkung)		!Spannung und Spaß (=die SuS sollen merken, dass es Spaß machen kann Zusammenhänge zu entdecken und ein stückweit das Interesse am mathematischen Denken entwickeln)
										Wenn sie die Algebra als Instrument zur Vereinfachung und Problemlösung erkennen	→	**können die SuS eventuelle Vorerfahrungen ausgleichen**	+	**können die SuS die Spannung, die die Algebra mit sich bringt, erfahren und Spaß entwickeln**
										!Vereinfachung !Problemlösung (= dies bezieht sich auf die Möglichkeit sowohl Gesetzmäßigkeiten zu generalisieren, z.B. in Bezug auf Zahlenrätsel, als auch allgemein Probleme zu modellieren und auch auf die Möglichkeit die mathematische Sprache zur Kommunikation und zur vereinfachten Darstellung zu nutzen)				
								Wenn die SuS eine verallgemeinernde Sichtweise auf Situationen entwickelt haben	→	**können sie die Algebra als Instrument zur Vereinfachung und Problemlösung begreifen**				
								!verallgemeinernde Sicht (=bezieht sich darauf, dass die SuS allgemeine Ergebnisse generieren können, wie zum Beispiel die Zusammenhänge zwischen Zahlen allgemein zu beschreiben und so Zusammenhänge sichtbar zu machen)				!Oberstufe !Abitur		
											→	**können die Schülerinnen und Schüler auf das Abitur und die Oberstufe vorbereitet werden.**		
		Wenn Variablen als etwas vermittelt werden, mit dem umgegangen werden muss	+	**Wenn Terme und Gleichungen vorrangig zur Beschreibung von Situationen genutzt werden**	+	**Wenn verschiedene Gleichungslösungs-strategien vermittelt werden**	→	**können die SuS eine verallgemeinernde Sichtweise auf Situationen entwickeln**						
		!Variablen !Umgang (=Variablen seien hier als die Grundlage, die Buchstaben, verstanden, die in unterschiedlichen Kontexten in Termen zum Tragen kommt und jeweils flexibel eingesetzt werden sollen)		!Terme und Gleichungen !Situationsbeschreibung (=Terme und Gleichungen werden in erster Linie eingesetzt, um Sachsituationen zu beschreiben und diese so in die mathematische Sprache zu übersetzen)		!Gleichungslösungs-strategien (=hierunter seien die Strategien zur Lösung von Gleichungen, Gleichsetzungsverfahren gemeint, die eine adäquate Lösung der Gleichungen ermöglichen)								
Wenn man die Algebra inhaltlich so aufbaut wie beschrieben	→	**werden Variablen vermittelt, als etwas mit dem umgegangen werden muss**	+	**werden Terme und Gleichungen vorrangig zur Beschreibung von Situationen genutzt**	+	**werden verschiedene Gleichungslösungs-strategien vermittelt**								
!Behandlung algebraischer Inhalte														

Tabelle 48: Ziele des Mathematik-Curriculums, Herr F

										!Spaß und Spannung (=die SuS sollen merken, dass es Spaß machen kann Zusammenhänge zu entdecken und ein stückweit das Interesse am mathematischen Denken entwickeln)
						Wenn die Mathematik als Instrument zum Verallgemeinern und Problemlösen begriffen wird	+	**Wenn die SuS die Universalität der Mathematik begreifen**	→	**können die SuS erfahren, dass Mathematik spannend ist und Spaß machen kann**
						!Mathematik als Instrument zum Verallgemeinern und Problemlösen (= dies bezieht sich auf die Möglichkeit sowohl Gesetzmäßigkeiten zu generalisieren, z.B. in Bezug auf Zahlenrätsel, als auch Probleme in der Umwelt zu bearbeiten, aber auch im Mathematikunterricht, indem sie in die mathematische Sprache übersetzt werden)		!Universalität (=gemeint ist, dass erkannt wird, dass sich zahlreiche Probleme, auch naturwissenschaftliche und wirtschaftliche, mit den immer wiederkehrenden grundlegenden mathematischen Hilfsmitteln lösen lassen)		
				Wenn die SuS Problemlösestrategien entwickelt haben	→	**können sie die Mathematik als Instrument zum Verallgemeinern und Problemlösen begreifen**	+	**können die SuS die Universalität der Mathematik begreifen**		
				!Problemlösestrategien (=gemeint sind hier heuristische Strategien wie zum Beispiel auch das systematische Probieren und auch das ständige Überprüfen der Hypothesen und Ergebnisse anhand konkreter Zahlen)						
Wenn der Unterricht schülernah, anschaulich und mit einem Schwerpunkt auf dem aktiven und entdeckenden Lernen anhand von praktischen, anwendungsbezogenen Inhalten gestaltet wird	+	**Wenn der Unterricht auf Kommunikation basiert**	→	**können die SuS Problemlösestrategien entwickeln**						
!Schülernah !Anschaulich !Praktische, anwendungsbezogene Inhalte !entdeckend, aktiv (=Der Unterricht sollte sich an praktischen, schülernahen Beispielen orientieren, die anschaulich präsentiert werden, um die SuS zu motivieren und sie zu interessieren. Dabei sollten sie die Möglichkeit haben selbst Zugänge zu den Aufgaben zu finden und neue Inhalte aufzudecken)		!Kommunikation (=die gegenseitige Kommunikation der SuS, um Ideen zu diskutieren, Lösungen zu entwickeln und gemeinsam an Problemen zu arbeiten, um zu motivieren)								

Tabelle 49: Das Lernen, Herr F

								Wenn die SuS die notwendigen Grundlagen als Vorbereitung auf die Oberstufe erreicht haben !Grundlagen !Oberstufe (=gemeint ist, dass sie die notwendigen Fertigkeiten zur Lösung von Gleichungen sowie die Idee der Äquivalenzumformungen erlernt haben)	+	**Wenn Algebra als wirksames Instrument zur Lösung von Problemen verstanden wird** !Instrument zur Problemlösung (=treten Probleme auf, sollen die SuS eine Strategie kennen, sich den Problemen zu nähern, diese in der mathematischen Welt fassbar zu machen und im besten Fall zu lösen, der Schwerpunkt liegt in der Beschreibung des Problems, auch in außermathematischen Zusammenhängen)	→	!Spaß (=die SuS sollen merken, dass es Spaß machen kann Zusammenhänge zu entdecken und ein stückweit das Interesse am mathematischen Denken entwickeln) **können Spaß an der Algebra haben**
Wenn auf die Fehler der SuS in angemessener Weise eingeht !Fehler (= gemeint ist, dass Fehler, die in Bearbeitungen entstehen im Kontext geklärt werden müssen, dies hat Vorrang vor dem Vergleich der bearbeiteten Aufgaben)	+	**Wenn man den SuS die Gelegenheit gibt, sich aktiv und eigenverantwortlich am Unterricht zu beteiligen** !Aktive Partizipation (=den SuS wird die Möglichkeit eingeräumt, die Intensität der Übungen durch entsprechende Lernumgebungen selbst festzulegen, auch Erklärungen im Unterricht werden durch eigene Formulierungen ergänzt)	+	**Wenn den SuS Raum für eigene Gedanken in Kombination mit einer produktiven Kommunikationsebene gelassen wird** !Raum für eigene Gedanken !Kommunikation (=gemeint ist, dass die SuS neben Partner- und Gruppenarbeiten, in denen sie sich gemeinsam Problemen und deren Lösung annähern, Raum für eigene Gedanken gelassen werden muss, z.B. in Hausaufgaben oder in stillen Einzelarbeitsphasen)	+	**Wenn den SuS die Gelegenheit gegeben wird, sich selbst zu überprüfen** !Überprüfung (=gemeint ist, dass die SuS ihre Ideen und Lösungen zum Beispiel anhand der Einsetzung konkreter Zahlen oder der verschiedenen Darstellungsformen selbst überprüfen können sollen)	→	**erreichen sie die notwendigen Grundlagen als Vorbereitung auf die Oberstufe**	+	**kann Algebra als wirksames Instrument zur Lösung von Problemen verstanden werden**		

Tabelle 50: Lehren von Algebra, Herr F

								Wenn die Sinngebung gelingt und die Algebra nicht als Selbstzweck verstanden wird !Sinngebung !Algebra nicht als Selbstzweck (=dies bezieht sich auf die Idee, dass die Prozeduren in der Algebra mit Kontexten verknüpft zu einem sinnvollen Arbeiten führen und die Frage nach dem Wozu in Ansätzen geklärt wird)	+	**Wenn der Unterricht durch die eigenständige, aktive Mitarbeit der SuS, gestützt durch die Lehrkraft bei diesen Verständnis hervorruft** !eigenständiges, aktives Arbeiten !Unterstützung durch Lehrkraft !Verständnis (=gemeint ist, dass die Verantwortung für das Lernen größtenteils den SuS übergeben wird - in Gruppen- und Partnerarbeiten, aber auch Einzelarbeit und die Lehrkraft durch Hilfsstrukturen unterstützend und zusammenfassend wirkt. Die eigenständigen Erfahrungen führen dazu, dass sich die Inhalte setzen)	→	!Motivation !Freude !Spaß (=die SuS können so Spaß am Unterricht haben und sind so motivierter teilzuhaben und sich mit der Mathematik zu beschäftigen) **sind die SuS motiviert, entwickeln Freude und Spaß am Unterricht**	+	!inhaltliches Potenzial !Lebenswelt (=die SuS können so auch auf inhaltlicher Ebene Spaß und Spannung empfinden und den Nutzen dessen erkennen, was ihnen vermittelt worden ist, indem sie die Strategien zur Einordnung von Problemen aller Art variabel einsetzen) **können das inhaltliche Potenzial des Unterrichteten in ihrer Lebenswelt erkennen**
Wenn der Unterricht darauf ausgelegt ist, das erhöhte Abstraktionsniveau in der Algebra fassbar zu machen !Abstraktionsniveau !Fassbarkeit (=das erhöhte Abstraktionsniveau, das mit der Einführung der Buchstaben einhergeht, soll durch das Aufzeigen der Strukturparallelität zwischen dem Bekannten (Arithmetik) und dem Neuen verdeutlicht werden. Dazu wird auf den Rückbezug auf die Zahlen durch Einsetzung geachtet)	+	**Wenn Gleichungen, Terme und Variablen in einen Anwendungskontext gesetzt werden und dies geübt wird** !Verknüpfung mathematischer Inhalte mit praktischen Anwendungsbezügen !Übung (=hier geht es um Prozesse des Mathematisierens von Alltagsproblemen, diese Prozesse müssen verstärkt geübt werden, da hier der Schwierigkeitsgrad erhöht ist und allgemein das Lernen nur durch Übung erreicht werden kann. Dabei wird sehr viel Wert auf die Bestimmung der Variablen im Kontext gelegt)	+	**Wenn nicht zu formal vorgegangen wird** !kein unnötiger Formalismus (=dies bezieht sich vornehmlich auf mathematische Definitionen, auf deren konkrete Formulierung nicht so viel Wert gelegt wird, in Bezug auf Rechenregeln gilt eher die Einhaltung formaler Regeln, z.B. bei Äquivalenzumformungen)	+	**Wenn Schemata als Hilfsmittel mit einem Bewusstsein für die Grenzen dieser vermittelt werden** !Schemata !Grenzen (=gemeint ist, dass Schemata als hilfreich angesehen werden können, diese aber immer bewusst und im Rahmen der jeweiligen Möglichkeiten verwendet werden sollen. Dabei ist der Sinn dieser als Hilfe zur Lösung der Probleme zu verstehen)	→	**kann die Sinngebung gelingen und die Algebra wird nicht als Selbstzweck verstanden**	+	**kann der Unterricht durch die eigenständige, aktive Mitarbeit der SuS, unterstützt durch die Lehrkraft, zu Verständnis führen**				

6.6.9. Unterrichtsbeobachtungen und Klausurenanalyse - Herr F

In der ersten beobachteten Stunde in einer achten Klasse hat Herr F eine Klassenarbeit zurückgegeben und die Noten besprochen. Da kein Inhalt behandelt worden ist, fließt diese Stunde nicht mit in die Auswertung ein.

Beim zweiten Unterrichtsbesuch wird zunächst eine Schülerin zur Präsentation der Hausaufgabe an die Tafel gebeten. Es geht um die Zusammenfassung von Termen. Dabei fordert Herr F sie explizit auf, ihre Lösungen zu erklären. Nach kurzer Zeit erinnert er sie daran, ihre Gedanken zu verbalisieren. Er hinterfragt, wann Terme zusammengefasst werden können, woraufhin die Schülerinnen sagt: „Wenn die gleich aussehen“. Herr F antwortet: „Naja, wir wollen ja Fachwörter lernen, wie Vokabeln“. Daraufhin verwendet die Schülerin das Wort „gleichartig“.

Hier wird der in Kapitel 6.6.5 aufgezeigte Widerspruch zwischen dem Bedürfnis einen unnötigen Formalismus zu vermeiden und der Verwendung eines gemeinsamen Vokabulars deutlich. Dieses Problem wird im weiteren Unterrichtsverlauf noch einmal deutlich, als Herr F das neue Thema: „Binomische Formeln“ einführt.

Dies geschieht mit den Worten: „[D]ann kommen wir jetzt zu einem weiteren Kapitelchen, das in jedem Buch auftaucht, was ich aber gar nicht so ausführlich behandeln will. Die binomischen Formeln. (Er schreibt die drei Formeln untereinander an die Tafel) A und b sind willkürliche Buchstaben, da könnte alles stehen, aber das hat sich so eingebürgert. Wenn ihr irgendwelche Erwachsenen fragt, dann werden die euch das mit a und b sagen“.

Hierbei wird offenbar bewusst auf die Verwendung von Fachvokabular verzichtet. Entsprechend seiner Auffassung guten Unterrichts steht dies im Einklang mit seinem Bedürfnis abstrakte Inhalte fassbar zu machen.

Im Verlauf des Unterrichts werden zunächst die Hausaufgaben im Unterrichtsgespräch besprochen, wobei den Lernenden ein großer Redeanteil zugestanden wird. Ein Vorzeichenfehler kann nicht aufgeklärt werden, weshalb Herr F eine Skizze zur Erklärung heranzieht (eine Rechteckfläche) und in einem eher lehrkraftzentrierten Unterrichtsgespräch den Zusammenhang erklärt.

Hierin zeigt sich der Rückbezug der Terme und Gleichungen an konkrete Gegenstände (in diesem Fall die Fläche), der für Herrn F ein Mittel ist die algebraische Inhalte fassbar zu machen.

Anschließend werden die binomischen Formeln wie bereits angesprochen thematisiert. Nach der Einleitung werden sie zunächst im gemeinsamen Gespräch ausgerechnet und so bestätigt. Herr F verweist auf das Kommutativgesetz und hinterfragt die einzelnen Rechenschritte. Schließlich betont er: „Ihr könnt mit Hilfe der binomischen Formeln Zeit sparen“. Dies sollen die Lernenden in einer Übungsphase selbst erfahren. Nach zwei weiteren kurzen Arbeitsphasen und Vergleichen stellt Herr F den Lernenden ein Rätsel und fragt nach der Erklärung eines Rechentricks bei der Berechnung von $21 \cdot 19$ unter Berücksichtigung der binomischen Formeln.

Durch den Verweis auf die mögliche Zeitersparnis verdeutlicht Herr F unmittelbar den Nutzen des neuen Inhalts, was sich in seinen unterrichtlichen Zielen wiederfindet (vgl. 6.6.2).

Insgesamt lassen sich Entsprechungen des Unterrichtsverhaltens von Herrn F in Bezug auf den Stellenwert des Formalismus, den Rückbezug auf konkrete Inhalte und die Nutzenorientierung in seinen subjektiven Theorien wiederfinden.

Die Klausur[106] von Herrn F verbindet in den ersten drei Aufgaben geometrische Inhalte, Flächeninhaltsberechnungen, mit dem Aufstellen und Umstellen von Termen. In vier weiteren

[106] Die erste Aufgabe ist mit dem Wort „Basiswissen“ gekennzeichnet und befasst sich mit der Prozentrechnung. Sie ist explizit nicht an das Thema gebunden, weshalb diese Aufgabe nicht mit in die Analyse einfließt.

Aufgaben wird das formal-technische Arbeiten mit Termen und den Regeln der Termvereinfachung thematisiert. Zusammengefasst ergibt sich das folgende Kompetenzprofil:

Tabelle 51: Klausurenanalyse, Herr F

Kompetenz(en)	math. argumentieren			Probleme mathematisch lösen			mathematisch modellieren			mathematische Darstellungen verwenden			formal-technisch arbeiten			mathematisch kommunizieren		
Anforderungsbereich	I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II	III
Berechne														x				
Beschrifte				x										x		x		
Notiere							x										x	
Vereinfache													x	x				
Löse auf													x					
Fasse zusammen													x					
Löse auf														x				
Klammere aus														x				
Zusatz: Überprüfe													x			x		
Zusatz: Zeige	x													x				

In der Zusatzaufgabe wird die Überprüfung der Gleichwertigkeit zweier Terme durch Einsetzen von Zahlen für „Buchstaben“ gefordert. Hierin wird deutlich, dass Herr F den Begriff der Variablen vermeidet.
Die Klausur legt den Fokus auf das formal-technische Arbeiten. Überwiegend bewegen sich die Aufgaben auf einem niedrigen kognitiven Niveau. Darüber hinausgehende kognitive Anforderungen werden fast ausschließlich im Bereich des formal-technischen Arbeitens erreicht. Die komplexeren prozessbezogenen Kompetenzen finden nur in Form von Standardaktivitäten Berücksichtigung. Reflexionen und Verallgemeinerungen fehlen in der Arbeit vollständig.
Die Verknüpfung der Terme mit geometrischen Figuren und den mit ihnen verbundenen Eigenschaften sowie die Verwendung des Wortes „Buchstaben“ statt Variablen stehen im Einklang mit den rekonstruierten subjektiven Theorien. Dass der überwiegende Teil der Arbeit eher auf das formal-technische Arbeiten fokussiert, entspricht nicht den Aussagen von Herrn F, das rein formale Arbeiten ohne inhaltlichen Bezug nur sehr knapp thematisieren zu wollen. Die vorliegenden Daten liefern dafür keine Erklärung.

6.7. Herr G

Herr G ist seit mehr als 20 Jahren Lehrer und unterrichtet an einem niedersächsischen Gymnasium. Er ist zusätzlich in der Ausbildung der Referendarinnen und Referendare tätig. An seiner Schule wird der Lambacher Schweizer verwendet. Die im Unterricht verwendete Technologie befindet sich im Wechsel von GTR zu CAS.
Herr G hat seine Staatsexamensarbeit über die Polynomdivision im Bereich der Algebra geschrieben (vgl. 12:40-12:52). Er beantwortet die Fragen zunächst auf einer rein fachlichen Ebene, so zum Beispiel auf die Frage danach, was er mit Algebra verknüpft: „Gruppen, Ringe, Körper" (1:53).
Besonders geprägt hat ihn nach eigenen Aussagen seine Studienzeit (vgl. 53:51) und schließlich seine Zeit als Lehrer, in der er sich verstärkt mit der Didaktik auseinandergesetzt hat (vgl. 54:17). Er hat beispielsweise selbst an der Entwicklung des Lehrbuchs Elemente der Mathematik mitgearbeitet (vgl. 8:15).

6.7.1. Was sind die Inhalte des Algebraunterrichts?

Grundlage zum Erlernen der Algebra ist ein sicheres Umgehen mit den Rechengesetzen (vgl. 19:19) und -regeln in den Zahlbereichen, wie der Bruchrechnung (vgl. 37:43). Ein Fehlen dieser Sicherheit gibt immer wieder Anlass zu Fehlern, zum Beispiel dem Übergeneralisieren von Regeln der Multiplikation auf die Addition. Auch die Idee, was negative Zahlen eigentlich sind und welche Bedeutung das Minus hat, ist in diesem Kontext wichtig. Ein belastbares Verständnis der Grundrechenarten ist für Herrn G wünschenswert (vgl. 16:40, 16:56, 17:07-17:10, 37:43).
Weitere Inhalte sind Gleichungen und mögliche Lösungsstrategien. Zentral sind darüber hinaus der Funktionsbegriff und die zugehörigen Funktionsgleichungen (vgl. 17:19-17:29).
Wegen der Komplexität und des Abstraktionsgrads wird darauf geachtet, dass die Variable immer im Kontext bestimmt wird (vgl. 21:24), „wenn's ein Sachzusammenhang ist, dann muss ich auch sagen welche...ob das jetzt eine Zeit, oder ein Weg oder was [ist]" (21:13).
Das Thema wird im Zusammenhang mit Flächenberechnungen in einem Baustein eingeführt. Terme, bzw. Formeln zur Flächenberechnung werden dort durch die Lernenden bereits genutzt. Anhand dieser wird im Anschluss das Thema Terme eingeführt (vgl. 1:14:43, 1:11:59), wenn zum Beispiel die Formeln für die Berechnung des Flächeninhalts von Trapezen hergeleitet werden. Dort entstehen unterschiedliche Varianten bei den Lernenden. Durch die Verschiedenheit der Terme, die alle dasselbe beschreiben, ist der Anlass zum Umformen von Termen gegeben (vgl. 10:29-10:36). Allerdings werden diese im Vorhinein nicht so benannt, obwohl implizit schon Termumformungen durchgeführt werden (vgl. 1:15:50-1:16:14).
Zunächst werden dabei Wortvariablen benutzt, wie Höhe, die dann auf Variablen reduziert werden. Dann gelangt man aus Sicht von Herrn G automatisch zu den Termen (vgl. 11:00-11:03). Die Variablen werden in diesem Kontext einfach benutzt und nicht definiert. Das ist auch nicht möglich, ein Punkt wird schließlich auch nicht definiert, sondern einfach als Grundlage benutzt (vgl. 30:38). Sie werden im „laufenden Geschäft" (29:21), im Sachzusammenhang bestimmt (vgl. ebd.). Zudem stellt er die Frage, „muss man den Begriff ‚Variable' überhaupt benutzen im Unterricht? Eigentlich ja nicht. Eigentlich braucht man den erst in der Sek II" (30:10).
Der Begriff des Terms selbst wird zunächst nicht eingeführt, da dieser ja erst am Ende der Einheit zu den Flächen kommt und die Schülerinnen und Schüler im Vorhinein genügend Vokabeln (Höhe, Parallelogramm...) erlernt haben. Dies geschieht erst, wenn sich das zuvor Gelernte gesetzt hat (vgl. 1:12:36). Eine andere Möglichkeit besteht darin, Terme über Zahlenrätsel einzuführen (vgl. 1:09:00). Da die Schülerinnen und Schüler mit dem Distributivge-

setz große Schwierigkeiten haben, werden Termumformungen zunächst über die Definition der Gleichartigkeit (vgl. 45:47), als solche „die dieselben Buchstaben in derselben Häufigkeit verwenden“ (ebd.), definiert. Anschließend wird dann konkreter gesagt: ‚Das sind Terme mit gleichem Nachnamen’ (ebd.). Terme werden in ihre Vornamen (Zahlen) und Nachnamen (Variablen) unterteilt, auf diese Weise wird auch Ordnung in die Terme gebracht und damit das Kommutativgesetz angewandt (vgl. 46:12-46:39).

Die Struktur von Termen im Sinne von Termbäumen steht nicht im Vordergrund. Herr G argumentiert, dass es ja nur lineare und später quadratische Terme gibt. Bei den linearen Termen sieht der Baum dann immer gleich aus (vgl. 1:17:45-1:18:13). Die reduzierte Komplexität ist für Herrn G der Grund sich in diesem Bereich kürzer zu fassen (vgl. 24:16). Das Aufstellen und Interpretieren der Terme aus Sachzusammenhängen ist für ihn eher ein inhaltliches Unterrichtsziel (vgl. 28:35).

Etwas später folgen dann lineare Zuordnungen. Diese werden anhand von Anwendungen wie Prepaid-Tarifen oder Strompreisen eingeführt. Die Schülerinnen und Schüler stellen dann Tabellen auf und werden auf die Veränderungen pro Zeiteinheit hingewiesen. Danach entsteht die Frage, wie man das graphisch und schließlich über einen Term darstellen kann (vgl. 1:24:11). Herr G sieht ein Problem darin, dass die Zuordnungen schon auf Gleichungen führen (vgl. 1:14:43), zum Beispiel: „Was kostet das Taxi, wenn ich so und so lange unterwegs bin?“ (ebd.), man es da aber noch nicht Gleichung nennt, obwohl es sich um das Lösen von Gleichungen handelt. So wird der Begriff für etwas, das man schon einige Zeit unterrichtet, nachgelagert eingeführt.

Das führt aus Sicht von Herrn G dazu, dass die Schülerinnen und Schüler ein Verständnis von Gleichungen erlangen, das immer eine Lösung dieser impliziert und dabei die Vorstellung gestärkt wird, dass die Variable immer einen bestimmten Wert annehmen muss (vgl. 1:15:18). Dies wird zu einem Problem, wenn Funktionsgleichungen eingeführt werden und die Schülerinnen und Schüler versuchen, diese zu lösen. Dies ist für die Schülerinnen und Schüler schwer zu fassen, der Unterschied zwischen: $5=3x+4$ und $f(x)=3x+4$ (vgl. 17:19-17:29). Sie „verstehen nicht (...) wieso das ne ganze Funktion beschreibt“ (17:36).

Neu ist bei der Behandlung der Gleichungen, dass die Begriffe der Lösung und der Lösungsmenge benutzt werden. Dies führt zu der Argumentation, dass sich bei allen Umformungen die Lösungsmenge nicht ändern darf. Das bietet den Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit sich selbst zu kontrollieren (vgl. 1:16:16-1:16:36).

Lineare Zusammenhänge bilden einen inhaltlichen Schwerpunkt, weil sie die Inhalte über die Variablen, Terme und Gleichungen vereinen und auch später eine Basis für die Analysis darstellen (vgl. 23:24) und weil Anwendungskontexte sehr gut durch lineare Zusammenhänge modelliert werden können. Dies dient der besseren Verknüpfung der Anwendungsbezüge mit den mathematischen Inhalten (vgl. 1:19:01, 1:19:17). Das gilt auch für das Thema Funktionen (16:17). Die Schülerinnen und Schüler sollen am Ende der Klasse 8 eine Idee von dem Begriff der „Funktion“ haben. Insofern, als sie verstehen, „was der Taschenrechner da macht, wenn der so einen Graphen zeichnet, das der eben ganz viele Werte einsetzt und dafür die y-Werte berechnet. Und sie den Unterschied kennen zwischen x- und y-Werte[n]“ (18:50).

Die Anwendungskontexte können auf verschiedene Arten unterrichtet werden. „Also es gibt die eigekleideten Aufgaben, das mache ich dann (...) [weil] ich das Ergebnis überprüfen [kann], ich kann mir was drunter vorstellen“ (1:20:27). Bei der Bearbeitung von diesen Textaufgaben kann die Bearbeitung dieser gut geübt werden. Weiterhin können innermathematische oder anwendungsorientierte Modellierungen im Unterricht genutzt werden. Gerade die Verwendung der letzten beiden Aufgabentypen wird im Kerncurriculum verlangt. Sie haben die Aufgabe die Reichhaltigkeit und Anwendbarkeit der Mathematik zu zeigen und so zur Allgemeinbildung beizutragen, um sie nicht eindimensional wirken zu lassen (vgl. 1:20:27-1:20:47).

Das Modellieren fällt den Schülerinnen und Schülern aber schwer, weil dort verschiedene Bestandteile in eine Gleichung einfließen und eine Bedeutung haben und es dadurch nicht mehr so eindimensional ist, wie zum Beispiel bei Zahlenrätseln (vgl. 1:25:12).

Wenn dann noch Zeit ist, werden Gleichungssysteme behandelt, aber nur ein Lösungsverfahren (vgl. 22:08). In der achten Klasse werden quadratische Funktionen anhand des Funktionsterms erkannt und die Eigenschaften bestimmt. Die Scheitelpunktform gehört dort zum Unterrichtsinhalt (vgl. 22:29).

Insgesamt und etwas gröber fasst er unter die Inhalte der Algebra neben der Arithmetik den Umgang mit Variablen (vgl. 2:40), Termen und Gleichungen und dies zum Zweck der inner- und außermathematischen Problemlösung (vgl. 1:39:59, 1:40:07).

Der Einsatz des Taschenrechners unterstützt die Schülerinnen und Schüler durch die Tabellenkalkulationsfunktion darin, zum Beispiel die Bedeutung des Begriffs „Definitionsbereich" besser zu verstehen (vgl. 1:32:29). Die graphisch unterstützende Funktion erkennt Herr G an. Er ist aber der Meinung, dass zentrale Eigenschaften der Funktionen auch ohne den Rechner durch die Schülerinnen und Schüler erkannt werden sollen. Angestrebt wird das Training sowohl der händischen als auch der technischen Fähigkeiten der Lernenden (vgl. 1:34:21). In der Algebra der Klasse 7 wird der Rechner nicht benutzt (vgl. 1:30:22), wenn dann nur für graphische Darstellungen. Herr G sieht das Problem: „[N]och extremer als die Schemata (...) man kann ja sagen Verständnis, Schemata und Auslagern an den Taschenrechner. Und der Weg muss ja erst mal begangen (...) werden. Also was nutzt denen das, wenn sie das mit dem Taschenrechner so auf Befehl können, aber nicht wissen, was der da tut" (1:37:27). Begründend wird angeführt, dass das händische Vorgehen im Kerncurriculum verankert ist (vgl. ebd.).

Der Begriff der Irrationalität wird sehr knapp gehalten, weil das für die Schülerinnen und Schüler schwer zu fassen ist in der Jahrgangsstufe (vgl. 25:13-25:37).

Das Kerncurriculum dient ihm häufig als Argumentationsgrundlage und wird von ihm als Begründung für verschiedene inhaltliche Festlegungen aufgeführt (7:33, 13:42, 14:25, 22:29, 52:48, 1:31:58).

Grundlage für die Behandlung der Algebra bilden der sichere Umgang mit den Rechengesetzen und -regeln und die Kenntnis der besonderen Gegebenheiten in den bis zur Klasse 7 bekannten Zahlbereichen.

Die Einführung der Terme, Variablen und Gleichungen erfolgt in Anknüpfung an das Thema Flächenberechnungen. Dort leiten die Schülerinnen und Schüler selbst Terme und Formeln zur Flächeninhaltsberechnung her und verwenden zunächst Wortvariablen, wie die „Höhe", bevor sie zu Variablen verkürzt werden. Vermeintlich verschiedene Terme für die Berechnung derselben Fläche geben Anlass sich den Termumformungen anzunähern. Die Variable wird hier kontextgebunden verwendet.

Unter der zu erlernenden Termkompetenz versteht Herr G die Fähigkeiten Termwerte zu berechnen und Terme zusammenfassen zu können. Die Regeln für die Termumformungen werden eher Kalkül-orientiert und regelhaft erarbeitet. Eselsbrücken, wie die Verwendung von Vor- und Nachnamen für Zahlen und Variablen, sollen das strukturelle Verständnis der Schülerinnen und Schüler unterstützen.

Anschließend werden Terme, Variablen und, wenn auch ohne explizite Begriffsbezeichnung, Gleichungen für die Beschreibung linearer Zusammenhänge genutzt. Das Lösen von Gleichungen im Sinn der Bestimmung der Variablen (Variable als Unbekannte im Sachzusammenhang) ist hier zentral. Herr G vermutet, dass sich hier eine Fehlvorstellung der Variablen als stets konkret zu bestimmendes Objekt einprägt, was zu einem erschwerten Verständnis des Funktionsbegriffs führt.

Das Aufstellen und Interpretieren von Gleichungen und Termen in verschiedenen inner- und außermathematischen Anwendungskontexten in Form von Modellierungs- und Problemlöse-

aufgaben bildet ein Unterrichtsziel der Klasse 7. Die Variable wird hierbei als Unbekannte betrachtet. Die Verwendung „eingekleideter Aufgaben“ bereitet diesen Unterrichtsinhalt vor. Herr G stellt fest, dass die Modellierungsprozesse den Schülerinnen und Schülern schwer fallen, rechtfertigt deren Behandlung aber über ihren Nutzen. Diese Art von Aufgaben trägt dazu bei, die Bedeutung der Algebra in der Lebenswelt der Lernenden zu verdeutlichen.
Bis zum Ende der Klasse 8 werden Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme, die quadratischen Gleichungen und der Funktionsbegriff, einschließlich der verschiedenen Darstellungsformen, behandelt. Die Bedeutungsveränderung der Variablen beim Übergang von Gleichungen zu Funktionen ist Herrn G bewusst.
Herr G betrachtet Algebra als Umgang mit Variablen, Termen und Gleichungen auf Basis arithmetischer Grundlagen mit dem Ziel des inner- und außermathematischen Problemlösens. Das Kerncurriculum wird explizit als Rahmen für die Auswahl der unterrichteten Inhalte bezeichnet.

6.7.2. Was sind die Ziele des Algebraunterrichts?

Die Algebra spielt eine wichtige Rolle (vgl. 0:18), weil sie „immer wieder auftaucht und weil bestimmte Dinge eben sehr verallgemeinerbar (...) sind“ (52:00). Sie ist curricular gesehen ein Schwergewicht (0:32-0:35), obwohl inhaltlich „gar nicht so viel verlangt“ (0:42) wird. Terme und Gleichungen und deren Behandlung gehören für Herrn G zur Allgemeinbildung, im Sinne von Anknüpfungspunkten im Leben der Schülerinnen und Schüler, auch im Zusammenhang mit der Lösung spannender Probleme (vgl. 34:03). Zum Beispiel soll den Schülerinnen und Schülern klar sein, was gemeint ist, wenn die Zeitungen von prozentualem Wachstum sprechen, sowohl in Bezug auf den Funktionsterm als auch in Bezug auf den Funktionsgraphen (vgl. 1:23:08), ganz im Sinn der Allgemeinbildung (vgl. 1:20:47). Zu diesem Zweck müssen die Schülerinnen und Schüler „ne gewisse Termkompetenz“ (18:34) erlangen, was bedeutet, dass sie selbst erkennen sollen, wie Terme zusammengefasst werden und auch die Termwerte bestimmen können, indem sie für die Variablen Zahlen einsetzen (vgl. ebd., 18:46).
Insgesamt soll die Algebra als Instrument zur Verallgemeinerung genutzt werden. Ideal ist die Idee sie als Instrument zum Argumentieren zu nutzen, aber „ein Schüler, der sauber algebraisch argumentieren kann, das passiert nicht so oft“ (1:05:11). Eher sind anschauliche, geometrische Beweise möglich, auch mit Hilfe der verschiedenen Darstellungsformen, dabei spielen aber rein algebraische Verfahren eine untergeordnete Rolle. Diese könnte man zwar antrainieren, dabei wird aber die Gefahr gesehen, schnell wieder ins reine Kalkül zu verfallen (vgl. ebd). Es sei denn der Nachweis, dass zwei Terme gleich sind, zählt zu den Beweisen (vgl. 1:25:27).
Die Algebra ist wichtige Grundlage für die Oberstufe, vor allem für die Analysis (vgl. 1:05).
Herr G schätzt die Leistungen der Schülerinnen und Schüler und vor allem das, was sie tatsächlich begreifen, sehr pessimistisch ein (vgl. 35:34) und fragt sich manchmal, „warum wir das machen“ (4:33). Allerdings hält er die Modellierungskompetenz der Schülerinnen und Schüler für sehr erstrebenswert und sieht die Algebra als entscheidende Grundlage für das Modellieren an (vgl. 4:49-5:06) und auch für das Problemlösen (vgl. 1:20:47).

Wenn Variablen, Terme, Gleichungen und der Kalkül-orientierte Umgang mit ihnen als Handwerkszeug begriffen werden, ist es möglich die Algebra als Instrument zur Verallgemeinerung zu begreifen, das im Kontext vom Problemlösen und Modellieren genutzt werden kann. Diese Fähigkeiten und Fertigkeiten benötigen die Schülerinnen und Schüler als Vorbereitung für die Mathematik der Oberstufe.
Auf einer übergeordneten Ebene kann ein verständiger Umgang mit Variablen, Termen und Gleichungen zur Allgemeinbildung der Lernenden beitragen. Dies ist der Fall, wenn sie in

ihrem Alltag, zum Beispiel beim Lesen der Zeitung, mit Gleichungen, Graphiken und Termen konfrontiert sind und diese verstehen müssen.
Anmerkung: Herr G würde die Algebra gern als Instrument zum Argumentieren benutzen, sieht die Möglichkeit aber angesichts des gegebenen Potenzials der Schülerschaft nicht.

6.7.3. Was sind die Ziele des Mathematikunterrichts?

Wenn die Schülerinnen und Schüler modellieren, stärken sie damit ihre Modellierungskompetenz (vgl. 1:25:30), was ein Ziele des Mathematikunterrichts ist. Begründet wird dies dadurch, dass die Einbindung realer Situationen in den Unterricht und deren Modellierung dabei helfen, „die Rolle [aufzuzeigen], die Mathematik in unserer Welt heute spielt“ (1:25:36).
Darüber hinaus soll das Ziel der mathematischen Ausbildung in der Sekundarstufe I sein, dass die Schülerinnen und Schüler einen Einblick in die drei Bereiche der Schulmathematik: Geometrie, Stochastik und Algebra, erhalten. Sie sollen die Struktur sehen, dass die Gebiete zusammenhängen und aufeinander aufbauen. Zudem sollen sie auch ein Gefühl der Selbstwirksamkeit entwickeln (vgl. 1:38:32). Zusätzlich sollten sie das Werkzeug dazu erlernt haben, das sie zum Bestehen der Oberstufe benötigen (vgl. 1:39:02).
Die Mathematik geht bei Weitem über das sture Ausrechnen hinaus und das sollte den Schülerinnen und Schülern vermittelt werden (vgl. 1:37:36).

Der Mathematikunterricht der Sekundarstufe I soll den Schülerinnen und Schülern einen Einblick in die drei Bereiche der Mathematik geben und ihnen Verbindungslinien zwischen diesen Bereichen aufzeigen. Die Lernenden sollen Gelegenheit bekommen, Selbstwirksamkeitserfahrungen im Umgang mit der Mathematik zu sammeln.
Gelingt dies sind die Schülerinnen und Schüler gut auf die Oberstufe und das Abitur vorbereitet.
Erwerben sie im Unterricht zudem die Fähigkeiten und Fertigkeiten mit Hilfe der mathematischen Werkzeuge zu modellieren, werden sie die Rolle der Mathematik in ihrer Umwelt begreifen.

6.7.4. Wie gelingt erfolgreiches Lernen?

Das Erlernen abstrakter Inhalte fällt den Schülerinnen und Schülern besonders schwer, weil die Algebra auf eine Weise nicht zu begrenzen ist und damit auch schwer im Kopf der Schülerinnen und Schüler zu ordnen ist. In der Algebra sind zahlreiche Vernetzungsmöglichkeiten gegeben, zwischen den einzelnen Bereichen und auch inneralgebraisch. Die Möglichkeit besteht zudem, diese Strukturen stetig zu erweitern. Dies wirkt auf die Schülerinnen und Schüler unübersichtlich, weil sie es nicht lokal ordnen können (vgl. 5:24).
Im Unterricht werden sehr fassbare Ergebnisse angeboten, so zum Beispiel bei der Berechnung der Nullstellen, diese sind meist ganzzahlig (vgl. 13:32).
In der Algebra trennt sich die Schülerschaft in diejenigen, die „sich für Mathematik interessieren, die das spannend finden (...). Die finden so was solche Fremdwörter wie ‚irrationale Zahlen’ ganz spannend“ (36:33). Diese Schülerinnen und Schüler rechnen gern mit Algorithmen und manche versuchen sogar mit diesen zu experimentieren (vgl. 33:21). Auf der anderen Seite stehen diejenigen, die „sagen: ‚Wofür...so...muss ich denn so was Abstraktes hier machen’ (...) die stören sich an Dingen, wo wir wirklich über das alltagsmäßige Rechnen hinausgehen“ (36:59). Positiv an der Verwendung der Verfahren ist, dass durch die Anwendung von Rechenverfahren, zum Beispiel von Verfahren zur Lösung von Gleichungen, die Motivation der Schülerinnen und Schüler gesteigert werden kann: „als man lineare Gleichungssysteme

gelöst hat. das haben einige gemocht (...). Wenn das dann so richtig flutscht, dann hat man viele Erfolgserlebnisse und das baut einen ja auch auf“ (47:27).
Problematisch ist das Übergeneralisieren von Regeln, wenn also Regeln, die Multiplikation betreffend auch auf die Addition angewendet werden (vgl. 39:43). Dies liegt daran, dass die Schülerinnen und Schüler auf einem assoziativen Niveau bleiben und über Analogien sehen, als das große Ganze im Auge zu behalten (vgl. 40:09). Als Lösung wird vorgeschlagen, die Schülerinnen und Schüler ihre Behauptungen durch das Einsetzen konkreter Zahlen zu konkretisieren, gemäß dem Motto „Setz doch einfach mal ganz einfache Zahlen ein und probier[e] das aus“ (40:51). Dies hilft den Schülerinnen und Schülern eine konkretere Vorstellung davon zu bekommen, was sie zuvor mit Buchstaben ausgedrückt haben. Sie müssen auf dieser konkreten Ebene die Fehler erkennen, bevor es ihnen möglich ist, diese zu beheben (vgl. 41:06).
Eine weitere Möglichkeit sind Übungsmaterialien, die auf einer Metaebene arbeiten und zum Beispiel typische Schülerfehler zeigen, die dann von den Schülerinnen und Schülern korrigiert werden müssen (vgl. 41:26, 41:55).
Ein weiteres Problem besteht dann, wenn Inhalte durch lineare Zusammenhänge ausgedrückt und diese dann zusätzlich graphisch veranschaulicht werden sollen. Der Schwerpunkt wird dann auf die Untersuchung der Einflussfaktoren einzelner Termbausteine auf den Graphen gelegt. Manche Schülerinnen und Schüler zeigen großen Probleme bei dem Wechsel zwischen diesen Darstellungsformen (vgl. 1:24:11-1:24:45).

Viele der Punkte, die aus Sicht von Herrn G erfolgreiches Lernen ermöglichen, sind auch in Kapitel 6.7.5 dargestellt. Dazu gehört die Anknüpfung der Unterrichtsinhalte an konkrete Vorstellungen und Inhalte, der Verzicht auf unnötige Formalisierungen, das Anbieten verschiedener Zugänge, ein vielfältiges, binnendifferenziertes Übungskonzept und eine hohe Eigenaktivität der Lernenden, die durch anschauliche, motivierende Lernumgebungen unterstützt wird. Sind diese Faktoren gegeben, können die Lernenden sich und mögliche Fehler und Fehlkonzepte erkennen und beheben, ihr Verständnis vertiefen und an Selbstsicherheit gewinnen.
Die erfolgreiche mathematische Arbeit führt zur Möglichkeit Erfolgserlebnisse zu erreichen und Begeisterung am Unterricht zu entwickeln. Auch können dadurch eventuelle Ängste vor dem „Buchstabenrechnen“ abgebaut werden.
Herr G unterscheidet seine Schülerschaft danach, ob sie sich für Mathematik interessieren oder nicht. Davon sind die Ziele und die Motivation der Schülerinnen und Schüler abhängig.

6.7.5. Wie gelingt guter (Algebra-)Unterricht?

Die Algebra wird als abstraktes Thema charakterisiert, das den Schülerinnen und Schülern schwerfällt (vgl. 0:18). Das ist das Hauptproblem im Erlernen der Algebra (vgl. 38:57-39:43). Besonders herausgestellt wird dabei der Übergang zu den Funktionen. Dort stellt Herr G fest: „also meine These ist, dass die Mehrheit der Schüler, die das Gymnasium verlässt, am Ende (...) nicht weiß (...) was eine Funktion ist“ (4:08). Obwohl es bei den Funktionen sehr schön möglich ist, Darstellungswechsel und Anwendungsbezüge zu schaffen, weshalb er dieses Thema am liebsten behandelt (vgl. 16:10-16:17).
Schemata werden als sehr beliebt bei den Schülerinnen und Schülern angesehen, weil diese nach einer gewissen Übungszeit einfach funktionieren und zu Erfolgserlebnissen führen können (vgl. 47:20-47:24). Herr G selbst äußert sich weder positiv noch ablehnen zu den Schemata. Er möchte aber eine Simplifizierung vermeiden und die Algebra oder sich selbst nicht durch seine Vorliebe für Ordnung in die Ecke drängen lassen, in der eine Präferenz für Schemata verordnet ist (vgl. 52:00). Vielmehr plädiert er bei der Vermittlung der Schemata dafür,

diese nicht zu schnell einzuführen, sondern zunächst die Grundlagen des Themas - bei Gleichungen zum Beispiel über das Waagemodell oder über die Idee der Operatoren und Gegenoperatoren - zu festigen und dann auf Basis dieser Idee die Schemata zu entwickeln. Erst danach soll dann eine schematische Schreibweise eingeführt werden. Er ist gegen die sofortige Einführung von Schemata, wenn nicht gewusst wird, worauf diese basieren (vgl. 47:46-48:46). Dazu kommt, dass die Grenzen der Schemata verdeutlicht werden sollen, indem immer gefragt wird: „Warum darfst du das so machen?“ (49:56).
Sein Unterrichtsstil hat sich diesbezüglich auch geändert. Er legt nun unter anderem durch die sich ändernden curricularen Vorgaben viel weniger Wert auf Kalküle und Schemata im Besonderen. Möglicherweise pendelt das aber auch noch einmal zurück. Wichtiger ist ihm in diesem Zusammenhang, dass er die Fehler der Schülerinnen und Schüler rechtzeitig erkennt und auch präventiv besser auf diese eingehen kann. Ein gutes Verständnis für die Fehler der Schülerinnen und Schüler hält er für sehr wertvoll (vgl. 55:01).
Die inhaltliche Gestaltung des Unterrichts richtet sich nach den curricularen Vorgaben, die sich aber eher auf die groben inhaltlichen Richtlinien beziehen. Herr G sieht sich in der konkreten Unterrichtsgestaltung in der Verantwortung. So kann er die Schwerpunkte beliebig setzen, ob es zum Beispiel mehr um mathematische Gegenstände oder die mathematische Sprache gehen soll oder um die verschiedene Betonung der prozessbezogenen Kompetenzen (vgl. 52:48). Bei der Auswahl orientiert er sich dann daran, was im „Erfahrungshorizont“ (7:42) der Schülerinnen und Schüler liegt und wovon es möglich ist, sich eine Vorstellung zu machen. Dabei unterscheidet er, dass die Schülerinnen und Schüler nicht täglich mit den Inhalten zu tun haben, sich aber unter diesen etwas vorstellen können sollen. Dazu recherchiert er in den verschiedenen Schulbüchern (vgl. 7:42-7:53). Geeignete Unterrichtseinstiege spielen für ihn eine besondere Rolle (vgl. 8:22).
Der Unterricht soll die Schülerinnen und Schüler für Algebra begeistern, dabei wird versucht über die Aufgaben Anwendungen und auch Herausforderungen zu schaffen, zum Beispiel über innermathematische Untersuchungsaufträge, wenn dort eine lineare Funktion gegeben ist, die mit einer Normalparabel addiert wird und die Frage nach den Folgen gestellt wird (vgl. 33:51-34:31) oder auch über die Flächeninhalte, wenn bei unterschiedlichen Figuren nach dem Flächengrößten gefragt wird (vgl. 35:09).
Der Wille die Schülerinnen und Schüler zu begeistern, stößt dabei auf Grenzen, denn die Vermittlung der Variablen und Terme ist eine Gratwanderung: „Man muss da abwägen zwischen dem, was noch relevant ist für die Schüler und was notwendig ist und was die gerne machen möchten. Also die Motivation ist relativ schwach, weil häufig auch von zu Hause kommt: ‚Hach, das mit dem Buchstabenrechnen hab ich früher auch schon nicht gekonnt. Und guck mal aus mir ist auch was geworden’“ (15:51). Damit schreibt er äußeren Faktoren einen nicht unerheblichen Einfluss auf die Motivation der Schülerinnen und Schüler zu. Dies ist auch der Grund, warum er Terme und Termumformungen nicht so gern unterrichtet. Es bereitet ihm nicht so viel Spaß, wie zum Beispiel lineare und quadratische Funktionen (vgl. 15:31-15:41). Hier fällt es Herrn G leichter Anwendungsbezüge zu schaffen. Dennoch strebt er auch bei den Termen durch spannende Probleme danach, „dem Ganzen (...) einen Sinn zu verleihen (...) im Sinne der Allgemeinbildung, also: ‚Wo braucht man das?’ (34:03).
Bei der Einführung bzw. der Herleitung eines Anlasses für die Termumformungen bemüht er sich darum, die Schülerinnen und Schüler zu aktivieren. Sie sollen zunächst eigene Ideen entwickeln, wie sie den Flächeninhalt eines Parallelogramms oder Trapezes bestimmen können. Einige zerlegen die Figur lieber in Bekanntes, andere ergänzen. Dabei entstehen dann verschiedene Terme (vgl. 1:13:37). Er betont dann gegenüber den Schülerinnen und Schülern: „Hier ist es ja eigentlich völlig klar, dass das dasselbe sein muss, weil das ist ja das gleiche Trapez. Und wenn nicht einer von euch einen Fehler gemacht hat, muss es alles stimmen“ (1:14:04). Dabei aktiviert er bei den Schülerinnen und Schülern eigene Denkprozesse.

Seine Idealvorstellung von Unterricht ist, dass es eine hohe Schüleraktivität gibt und nicht der klassische Unterricht, in dem Sinn: Ich „führ' vor und ihr macht nach“ (vgl. 1:04:04). Er beobachtet sich aber dabei, dass er manchmal einen sehr hohen Redeanteil einnimmt (vgl. 1:03:32).
In seinem Unterricht bietet er die verschiedenen Darstellungsformen an, „weil man ja am besten lernt durch vernetzen (...) und weil man damit ja hoffentlich dann auch Leute, die auf unterschiedlichen Lernkanälen angesprochen werden auch alle mit im Boot hat“ (1:22:01). Ein weiteres Unterrichtsziel ist demnach, möglichst viele Schülerinnen und Schüler partizipieren zu lassen.
Eine für ihn wirksame Methode des Lernens und Lehrens ist die Anfertigung von Lernprotokollen, die er gern noch viel häufiger anwenden würde. Diese dienen der Sicherung zum Beispiel in Bezug auf die Schemata. Zunächst erfolgt eine Identifikationsaufgabe: Welches Schema wird angewendet? Anschließend wird eine Realisierungsaufgabe gestellt: Führe das Schema durch! Zuletzt folgt eine Metakognitionsaufgabe: Was sind die Vorteile des Schemas, welche Gefahren seht ihr? Dies kann er nicht immer umsetzen, bemüht sich aber darum sein Übungskonzept nach diesen Aufgabentypen zu strukturieren (vgl. 50:00, 50:44). Die Übung spielt für ihn als Mittel des Lernens eine große Rolle, denn „ich hab Mathematik auch nur gelernt, dadurch dass ich das übe“ (59:19). Denn ohne, dass die Schülerinnen und Schüler je selbst gerechnet haben, ist ein Erlernen nicht möglich. Die Alternative wäre den Schülerinnen und Schülern die Inhalte nur zu erklären, gemäß des sauberen Erklärens und dann davon auszugehen, dass sie es verstanden haben, dies ist aber eine Illusion. Deshalb gehört zu jedem neuen Inhalt ein Merksatz und das eigene Behandeln und Operieren mit dem neuen Inhalt. Dies geschieht in der Übung und trägt zu drei Zielen bei: Die Schülerinnen und Schüler gewinnen Verständnis, Selbstsicherheit und können selbst ihren Kenntnisstand einschätzen (vgl. ebd.). Zudem trägt die Übung dazu bei, den Schülerinnen und Schülern die Verknüpfung zwischen den Themen zu verdeutlichen, weil „man bestimmte Dinge (...) immer mal wieder aufgreift und das auch übt“ (57:09). Neben dem Zweck der Aufgaben (s.o.) werden diese nach Dauer unterschieden, z.B. kurzweilige Aufgabensets oder Langzeithausaufgaben (vgl. 1:00:13). Wenn es mal Päckchenaufgaben gibt, dann werden diese durch eine metakognitive Ebene ergänzt, indem die Schülerinnen und Schüler die Aufgaben nach ihrem Schwierigkeitsgrad ordnen sollen (vgl. 1:02:48).
Zu Übungszwecken bei Hausaufgaben orientiert er sich am Lehrbuch, weil die Schülerinnen und Schüler dort ein Arbeitsheft zu haben, an dem sie selbst Ergebnisvergleiche durchführen können. Dies erleichtert den Unterricht, weil dann gezielter Probleme besprochen werden können (vgl. 55:57). Die Besprechung der Fehler erfolgt im Unterrichtsgespräch (vgl. 20:05).
Zusätzlich führt er Kopfübungen durch, um die Inhalte zu wiederholen und zu vertiefen (vgl. 58:06). Übungen bieten ihm allgemein die Möglichkeit auch zu differenzieren, damit einigen Schülerinnen und Schüler das Angebot gemacht wird, schon weiter zu denken (vgl. 58:06). Das Problem dabei ist ein Gefühl der eintretenden Sättigung. Wenn die Schülerinnen und Schüler aufhören zu üben, weil sie meinen, dass sie es schon können, aber eigentlich noch Zeit bräuchten. Dann geht es „nicht mehr weiter, dann muss man wieder aufhören und muss es irgendwann wieder neu aufgreifen“ (1:00:39).

Guter Algebraunterricht gelingt, indem zunächst das erhöhte Abstraktionsniveau des neuen Themas für die Lernenden anerkannt wird. Ein Mittel den Übergang zu erleichtern, ist die Verknüpfung der abstrakteren symbolischen Formelsprache mit konkreten Inhalten, wie den Flächenberechnungen.
Herr G bemüht sich die Fehler der Schülerinnen und Schüler zu verstehen und mögliche Fehlkonzepte von Beginn an zu erkennen. Dies ist ihm in seinem Unterricht sehr wichtig.
Ein Charakteristikum des Unterrichts von Herrn G ist die Auswahl von aktivierenden, am Erwartungshorizont der Schülerinnen und Schüler orientierten Aufgaben. Die Lernenden

sollen sich etwas unter den im Unterricht vermittelten Themen vorstellen können. Sie sollen zu einer aktiven Beschäftigung mit den Unterrichtsinhalten angeregt werden. Lernen findet nur statt, wenn die Lernenden mit den Unterrichtsgegenständen umgehen und sie nutzen. Die Schülerinnen und Schüler zu motivieren ist dementsprechend ein Unterrichtsziel von Herrn G.

Eine Möglichkeit dazu bietet neben der Aufgabenauswahl ein reichhaltiges Übungskonzept. Ausreichend, binnendifferenziert und sinnvoll zu üben, indem zum Beispiel über die geübten Inhalte reflektiert wird oder bei Sättigung über neue Übungskonzepte nachgedacht wird, ist ein wesentlicher Bestandteil guten Unterrichts. Übung ermöglicht und vertieft das Verständnis der Inhalte, hilft den Lernenden sich selbst einzuschätzen und gibt ihnen Sicherheit.

Bei dem Thema der regelgeleiteten Term- und Gleichungsumformung stellt es für Herrn G einen Balanceakt dar, das Maß zwischen dem zu finden, was inhaltlich nötig ist und wozu die Schülerinnen und Schüler motiviert sind, weil ihm dort anwendungsorientierte Kontexte fehlen, die Schülerinnen und Schüler motivieren können. Die Möglichkeit innermathematische Arbeitsaufträge zu geben erscheint ihm als Lösungsansatz sinnvoll (Gleichartigkeit von Termen bei Flächenberechnungen).

Schemata als Bestandteil der Algebra werden unter der Voraussetzung unterrichtet, dass sie begründet und reflektiert genutzt werden. Die Lernenden sollen den gedanklichen Ursprung der Schemata kennen (Operatoren und Gegenoperatoren) und sich der Grenzen ihrer Anwendbarkeit bewusst sein. Positiv an der Vermittlung und Nutzung der Schemata ist das Sicherheitsgefühl, das sie bei den Lernenden auslösen und, dass nach einem gewissen Maß an Übung auch Erfolgserlebnisse bei den Schülerinnen und Schülern erreicht werden. Dies wirkt motivierend.

Schließlich bietet sein Unterricht den Lernenden verschiedene Zugänge (im Sinn der verwendeten Darstellungsformen) an, um verschiedene Lerntypen anzusprechen und so möglichst viele Lernende zu erreichen.

In Bezug auf seinen Unterrichtsstil merkt Herr G an, dass er gern mehr Schüleraktivität und weniger eigene Redeanteile in seinem Unterricht hätte, als es momentan der Fall ist.

6.7.6. Das Variablenverständnis von Herrn G

Beim Variablenverständnis geht es Herrn G vor allem darum, dass die Schülerinnen und Schüler den Unterschied erfassen zwischen der Bedeutung der Variablen in Termen und Gleichungen, bei der es um die Bestimmung der Lösungsmenge geht (vgl. 1:15:18) und der Variablen in Funktionsgleichungen, wo sie „wirklich eine Veränderliche ist, die viele Werte annehmen kann und wo ich einfach irgendwas für einsetzen kann“ (31:08). Er sieht es als gravierend an, wenn die Schülerinnen und Schüler nur ein Verständnis von Variablen aufbauen. Sie sehen diese wenn überhaupt als Platzhalter, dessen Wert bestimmt werden muss. Dies verhindert die Vorstellungen einer Funktion (vgl. 38:57, 38:00).

Ein weiteres Problem, das er immer wieder feststellt ist, dass die Schülerinnen und Schüler im „schlimmsten Fall (...) für jedes x auch noch ne andere Zahl ein[setzen]“ (17:47, vgl. 1:06:30). Dies erfordert die sorgfältige Bearbeitung des Themas (vgl. ebd.).

Bei Vorlage der Aufgaben nach Malle unterscheidet Herr G klar zwischen den drei Variablenaspekten. Er beschreibt den Gegenstandaspekt als Platzhalteraspekt (vgl. 1:08:28) was vermutlich der Variablen als Unbekannte entspricht. Den Einsetzungsaspekt benutzt er direkt (vgl. 1:08:32). Bei der dritten Aufgabe schließt er den Kalkülaspekt aus, weil man dort keine Termumformungen durchführen muss. Dabei nennt er diesen Aspekt einen „Aspekt als eigenes Objekt“, meint damit aber eindeutig den Kalkülaspekt (vgl. 1:08:36). Alle Aufgabentypen kommen in seinem Unterricht vor. Zuerst das Zahlenrätsel, da damit Terme eingeführt werden können (vgl. 1:09:00). Der Einsetzungsaspekt hilft die Idee einer Lösungsmenge zu verdeutlichen und tritt vornehmlich bei den Gleichungen auf. Der Kalkülaspekt ist die logische Konsequenz, wenn die Schülerinnen und Schüler Lösungsverfahren erlernt haben, denn dann müssen sie diese auch durchführen (vgl. 1:09:12). Dies spricht für ein sehr umfassendes Variablenverständnis.

6.7.7. Das Bild der Mathematik - Herr G

Die Codierung des Interviews ergibt die deutlich am stärksten ausgeprägte Skala Anwendung (16). Die übrigen Aspekte sind deutlich weniger ausgeprägt: Schema (5), Formalismus (1) und Prozess (0). Diese starke Anwendungsorientierung drückt sich in den rekonstruierten subjektiven Theorien von Herrn G aus. Relativ gesehen bewegt sich Herr G in Bezug auf die Anwendung (Rang 5) im Mittelfeld und bei den Skalen Schema (Rang 9) und Formalismus (Rang 8) im unteren Drittel, was eher auf eine Ablehnung beider Skalen hindeutet.
Die Auswertung des Fragebogens ergibt die stärkste Ausprägung in den Bereichen Anwendung und Prozess mit je 18. Weniger stark ausgeprägt ist die Skala Formalismus (10). Am wenigsten stark ausgeprägt ist der Schema-Aspekt (6).
Für das allgemein-mathematisch Bild von Herrn G resultiert die folgende Übersicht:

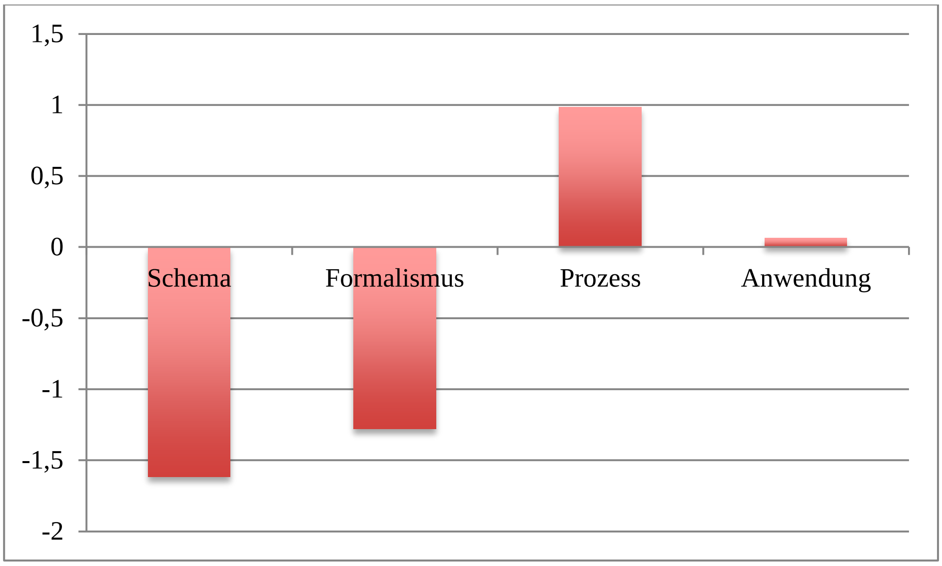


Abbildung 17: Das Bild der Mathematik - Herr G

Die Skalen Schema, Formalismus und Anwendung weisen eine gute Übereinstimmung auf.

6.7.8. Ziel-Mittel-Argumentationen - Herr G

Tabelle 52: Inhalte des Algebra-Curriculums, Herr G

zum Ende der Klasse 8:		quadratische Gleichungen erkennen, lösen und in Kontexten nutzen	Funktionsbegriff - Funktionsgleichung, Wertetabelle, Funktionsgraph	↔	Variable als Veränderliche
		↑			
		lineare Gleichungssysteme, wobei zu deren Lösung mindestens ein Verfahren vermittelt wird		↔	Variable unter dem Kalkülaspekt
		↑			
Modellierungen sowohl zunächst in eingekleideten Aufgaben (erste Hilfestellungen, schaffen Vorstellung) als auch in inner- und außermathematischen Kontexten	↔	Terme und Gleichungen aufstellen und interpretieren in verschiedenen Anwendungskontexten - modellieren, problemlösen		↔	Variable als Unbekannte
		↑			
Variable als Platzhalter. Sie wird im jeweiligen Kontext bestimmt.	↔	Lineare Zusammenhänge werden im Kontext behandelt - Anlass zur Verknüpfung von Termen, Variablen und linearem Wachstum	Gleichungen werden unterbewusst bei der Behandlung linearer Zusammenhänge mit behandelt	↔	Variable als Platzhalter. Sie wird im jeweiligen Kontext bestimmt.
		↑			
Verschiedene Terme beschreiben dieselbe Fläche	↔	Gibt Anlass zum Umformen der Terme, Erarbeitung Termkompetenz (Zusammenfassung und Belegung von Termen)		↔	Variable hier unter dem Kalkülaspekt, Terme unter dem Stichwort der Gleichartigkeit schülernah (Vor- und Nachnamen) zusammenfassen
		↑			
		Über Flächeninhaltsberechnungen in Formeln und das selbstständige Herleiten von Termen zur Berechnung von Flächen, Annäherung an Terme		↔	Die Variable wird über Wortvariablen in diesem Kontext benutzt
		↑			
		Grundlegende Beherrschung der Rechengesetze und -regeln in den Zahlbereichen $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ mit Schwerpunkt auf der Kenntnis der besonderen Eigenschaften in den einzelnen Zahlräumen			

Tabelle 53: Ziele des Algebra-Curriculums, Herr G

							!Allgemeinbildung (=gemeint ist, dass die SuS Alltagsbezüge in Zeitungen wiederfinden und diese auf Basis ihrer algebraischen Fähigkeiten deuten können)
					Wenn die SuS Algebra als Instrument zur Verallgemeinerung verstehen !Instrument zur Verallgemeinerung (=Algebra als Grundlage, um Zusammenhänge zu verallgemeinern und Sachverhalte, wie die Flächenberechnungen, allgemein darzustellen)	+ **Wenn Algebra als innermathematische Grundlage für die Oberstufe dient** !Grundlage für Oberstufenmathematik (=als Beispiel wird die Algebra als Basis für die Analysis angegeben)	→ **kann zur Allgemeinbildung der SuS beigetragen werden**
					→ **kann die Algebra als Instrument zur Verallgemeinerung verstanden werden**	+ **kann die Algebra als innermathematische Grundlage für die Oberstufe dienen**	
				Wenn die notwendigen handwerklichen Fertigkeiten und Schemata, in Verbindung zu einem Kontext, bewusst beherrscht werden !handwerkliche Fähigkeiten !Schemata !bewusste Nutzung (=beziehen sich auf die prozeduralen Grundlagen wie Rechenregeln und Lösungsverfahren, die aber in Bezug zu einem inhaltlichen Verständnis stehen und reflektiert werden)			
	Wenn Variablen als etwas vermittelt werden, mit dem umgegangen werden muss !Variablen !Umgang (=Variablen werden im Kontext verschiedener Sachsituationen verwendet und in diesen expliziert)	+ **Wenn Terme und Termumformungen als notwendiges Handwerkszeug angesehen werden** !Termkompetenz (=hier geht es darum Terme aufstellen und die Termwerte bestimmen zu können)	+ **Wenn Gleichungen zur Modellierung verschiedener Kontexte genutzt werden** !Gleichungen !Modellierung (=Gleichungen werden genutzt, um lineare Zusammenhänge und außermathematische Situationen zu modellieren)	→ **können die notwendigen handwerklichen Fertigkeiten und Schemata erlernt, in Verbindung zu einem Kontext gesetzt und bewusst beherrscht werden**			
Wenn man die Algebra inhaltlich so aufbaut wie beschrieben !Behandlung algebraischer Inhalte	→ **werden Variablen vermittelt, als etwas mit dem umgegangen werden muss**	+ **werden Terme und Termumformungen als notwendiges Handwerkszeug angesehen**	+ **werden Gleichungen zur Modellierung verschiedener Kontexte genutzt**				

Tabelle 54: Ziele des Mathematik-Curriculums, Herr G

!Mathematik der Oberstufe
!Abitur bestehen
(=hier ist die fachliche Vorbereitung auf die Inhalte der Oberstufenmathematik gemeint)

Wenn die SuS die grundlegenden Werkzeuge in jedem Bereich erlernen und ein Gefühl der Selbstwirksamkeit entwickeln → **kann die Mathematik der Oberstufe bewältigt und das Abitur bestanden werden**

!Rolle der Mathematik in der Welt
(=gemeint ist, dass die SuS die Mathematik in ihrer Umwelt wahrnehmen, indem sie Probleme aus ihrem Erfahrungshorizont bearbeiten können)

!Werkzeug
!Selbstwirksamkeit
(=die SuS sollen durch das aktive Agieren in den verschiedenen inhaltlichen Bereichen die Grundfertigkeiten erlernen, dabei haben sie die Möglichkeit das Gefühl der Selbstwirksamkeit zu entwickeln)

Wenn die SuS die Modellierungskompetenz erworben haben → **können die SuS die Rolle der Mathematik in der Welt erkennen**

!Modellierungskompetenz
(=gemeint sind die Fertigkeiten und Fähigkeiten der SuS, die für die Übersetzung von Sachsituationen in die mathematische Welt nötig sind, um sie dort zu lösen und später zu validieren und zu interpretieren)

Wenn der Unterricht schülernah, anschaulich und mit einem Schwerpunkt auf praktischen, anwendungsbezogenen Inhalten unterrichtet wird + **Wenn ein Einblick in die drei Grundbereiche der Mathematik erlangt und diese inhaltlich verknüpft werden** → **können die SuS die grundlegenden Werkzeuge in jedem Bereich erlernen und ein Gefühl der Selbstwirksamkeit entwickeln** + **können die SuS Modellierungskompetenz erwerben**

!Schülernah
!Anschaulich
!Praktische, anwendungsbezogene Inhalte
(=Der Unterricht sollte sich an praktischen, schülernahen Beispielen orientieren, die anschaulich präsentiert werden, unter anderem durch Modellierungsaufgaben)

!Einblick
(=gemeint ist hier, dass die SuS in den Bereichen Stochastik, Geometrie und Algebra Erfahrungen sammeln sollen. Dabei soll ihnen die inhaltliche Verbindung zwischen den Bereichen verdeutlicht werden)

Tabelle 55: Das Lernen, Herr G

														!Erfolgserlebnisse (=die SuS können durch eigenständige Arbeit, durch das Erzielen von konkreten Ergebnissen und das Bewältigen von Problemen Erfolgserlebnisse erzielen)		!Vorurteile und Ängste abbauen !Begeisterung (=wenn die SuS aus höheren Jahrgängen oder aus ihrem Umfeld oder auch durch die ersten Aufgaben, die ihnen durch das vermeintlich neue System begegnen negative Gefühle erzeugt haben, können diese nun abgebaut werden und die SuS erlangen die Möglichkeit Freude am neuen Inhalt zu entwickeln)
										Wenn Fehler konkret behandelt werden	+	**Wenn die SuS ihr Verständnis vertiefen und an Selbstsicherheit gewinnen die Möglichkeit zur Selbstdiagnostik erhalten**	→	**können die SuS Erfolgserlebnisse erreichen**	+	**können sie Begeisterung entwickeln und eventuelle Vorurteile und Ängste über das „Buchstabenrechnen“ abbauen**
										!Fehler konkret behandeln (=den SuS soll die Möglichkeit gegeben werden sich auf einer konkreten Ebene mit gemachten Fehlern auseinanderzusetzen, nur hier sind sie für die SuS nachvollziehbar und behebbar)		!Verständnis !Vertiefung !Selbstsicherheit !Selbstdiagnostik (=die Übung trägt dazu bei, dass die SuS durch eigenes aktives Operieren mit den Inhalten und dem Nachdenken auf der Metaebene neben dem inhaltlichen Verständnis auch ein Gefühl für ihre Leistungen entwickeln)				
Wenn den SuS konkrete Zugänge geboten werden	+	**Wenn auf unnötige Formalisierung verzichtet wird**	+	**Wenn den SuS verschiedene Zugänge angeboten werden, sowohl in den Darstellungsformen als auch binnendifferenziert**	+	**Wenn die SuS Gelegenheit zur Übung bekommen**	+	**Wenn den SuS eine hohe Eigenaktivität im Unterricht zugestanden wird**	→	**können Fehler konkret angegangen werden**	+	**können sie ihr Verständnis vertiefen und an Selbstsicherheit gewinnen. Zudem erhalten sie die Möglichkeit zur Selbstdiagnostik**				
!konkrete Zugänge (=den SuS sollen fassbare Ergebnisse angeboten werden und auch immer der Rückbezug zum Konkreten durch Einsetzen von Zahlen)		!auf unnötige Formalisierung verzichten (=Die Formalisierung soll bei der Einhaltung von Rechenregeln beachtet werden, aber nicht in Bezug auf mathematische Definitionen)		!verschiedene Zugänge !Binnendifferenzierung (=um den verschiedenen Lerntypen entgegen zu kommen, sollen vielfältige Darstellungsformen genutzt werden und auch die Möglichkeit geschaffen werden für die Besseren sich auszuprobieren)		!Übung !Metaebene (=mit Übung sind alle Prozesse der Vertiefung gemeint, bei denen die SuS aktiv werden. Spezielles Augenmerk wird auf Aufgaben gelegt, die eine Metaebene zur Reflexion mit einbeziehen, beispielsweise Lernprotokolle)		!hohe Eigenaktivität !viele Übungen (=die SuS sollen die Möglichkeit bekommen selbst Ideen zu entwickeln und sich aktiv mit den neuen Inhalten auseinandersetzen, dazu bekommen sie spannende Aufgaben und Kontexte)								

Tabelle 56: Lehren von Algebra, Herr G

												!Erfolgserlebnisse !Begeisterung (=gemeint ist, die SuS für den Unterricht und die mathematischen Inhalte zu begeistern und ihnen Interesse zu vermitteln)		!Partizipation (=das Anbieten zahlreicher Zugänge sowie attraktiver, spannender Themen ermöglichen es, viele SuS am Unterricht partizipieren zu lassen)
								Wenn vielfältige Übungskonzepte zur Verständnissicherung und zur Stärkung der Selbstsicherheit angewendet werden	+	**Wenn Fehler der SuS sensibel behandelt**	→	**können die SuS Erfolgserlebnisse erlangen und für die Inhalte begeistert werden**	+	**werden möglichst viele SuS erreicht und können partizipieren**
								!vielfältige Übung !Vertiefung !Selbstsicherheit (=die Erstellung von z.B. Lernprotokollen und das selbstständige Operieren mit den Inhalten, dabei auch die Selbstkontrolle der SuS ermöglichen Selbstwirksamkeitserfahrungen, eine Vertiefung des Verständnisses, geben die Möglichkeit zur Selbstdiagnostik und machen die Strukturen deutlich, wenn Übungen themenübergreifend gestaltet sind)		!Fehlersensibilität (=gemeint ist damit, dass die Fehler der SuS gezielt besprochen werden und Fehlkonzepte zum Beispiel durch das Rückeinsetzen konkreterer Zahlen bearbeitet werden)				
				Wenn die Eigenaktivität der SuS durch schülernahe Kontexte und Aufgaben gefördert wird	+	**Wenn Schemata als Hilfsmittel vermittelt worden sind**	→	**werden vielfältige Übungskonzepte zur Verständnissicherung und zur Stärkung der Selbstsicherheit angewendet werden**	+	**werden Fehler der SuS sensibel behandelt**				
				!Schülereigenaktivität !schülernahe Kontexte !Aufgabenarten (=den SuS soll die Gelegenheit gegeben werden sich aktiv im Unterricht zu beteiligen, indem eigene Ideen eingebracht und Denkprozesse der SuS initiiert werden. Dabei helfen Aufgaben, die an den Erwartungshorizont der SuS anknüpfen, damit sie sich eine Vorstellung machen können. Dazu tragen auch verschiedene Darstellungsformen bei)		!Schemata als Hilfsmittel (=Schemata werden als hilfreiche Unterstützung angesehen, die zur Motivation der SuS beitragen, dabei müssen diese schrittweise und reflektiert eingeführt werden, sodass auch die Grenzen ihrer Anwendbarkeit bewusst werden)								
Wenn die abstrakten Inhalte mit einem konkreten Sinn	+	**Wenn die Inhalte auf fassbare Konzepte reduziert werden und auf**	→	**muss die Schülereigenaktivität durch schülernahe Kontexte und Aufgaben geför-**	+	**werden Schemata als Hilfsmittel vermittelt**								

		verknüpft werden !Sinn (=hier geht es darum Kontexte zu wählen, die im Erfahrungshorizont der SuS liegen, in denen dann Variablen oder Terme auftauchen. Der Sinn des neu zu Erlernenden wird damit unter den Aspekt der Allgemeinbildung gestellt)		**unnötigen Formalismus verzichtet wird** !fassbare Konzepte !kein unnötiger Formalismus (=Beispiele hierfür sind das Waagemodell für die Gleichungen - Gleichgewicht, die Verbindung der Terme zu den Flächeninhalten oder der Variablen in den konkreten Sachzusammenhängen, zum Beispiel als Weg oder als Zeit. Der Verzicht auf den Formalismus bezieht sich auf die sofortige Definition der Terme oder Variablen)	**dert werden**
Wenn anerkannt wird, dass Algebra ein abstraktes Thema ist, das viele Lernschwierigkeiten mit sich bring !Abstraktes Thema !Lernschwierigkeiten (=gemeint ist, dass der Abstraktionsgrad der Algebra durch die Verwendung von Buchstaben für die SuS zahlreiche Schwierigkeiten mit sich bringen, wie das Verständnis dafür dass für eine Variable nicht unterschiedliche Zahlen eingesetzt werden dürfen oder die verschiedenen Bedeutungen einer Variablen)	→	**werden die abstrakten Inhalte mit einem konkreten Sinn zu verknüpft**	+	**werden die Inhalte auf fassbare Konzepte reduziert, wobei auf unnötigen Formalismus verzichtet wird**	

6.7.9. Unterrichtsbeobachtungen und Klausurenanalyse - Herr G

In der ersten beobachteten Stunde in einer siebten Klasse geht es um das Aufstellen von Termen zur Beschreibung figurierter Zahlen. Es wird mit einer zum Stundenritual gehörenden zehnminütigen Kopfübung begonnen, die im Unterrichtsgespräch an der Tafel besprochen wird. Anschließend wird über die Hausaufgabe das Thema der Stunde übergeleitet, weil die Lernenden einen Term für ein Perlenmuster finden sollten. Während der Besprechung der Hausaufgaben, die in Form eines lehrkraftzentrierten Unterrichtsgesprächs stattfindet, leitet Herr G seine Schülerinnen und Schüler an. Fragen im Verlauf des Gesprächs bezogen sich auf: die Sinnstiftung („So und angenommen wir wollen das für 20 Reihen rauskriegen ohne das zu malen. Wie viele Perlen wären das?"), die Definition der Fachbegriffe („Was ist denn ein Term? (...) Ein Rechenausdruck ist also ein Term. Rechenausdruck ist das deutsche Wort und Term ist das Fachwort") und die Bedeutung der Variablen („ne Variable gibt es trotzdem, wo? (...) Ja, genau und da ist es wichtig, das auch immer zu sagen, was das x ist").

Bei der Bestimmung der Bedeutung der Variablen haben die Lernenden Schwierigkeiten. Herr G lässt unterschiedliche Schülerinnen und Schüler darauf antworten. Bei der weiteren Hausaufgabenbesprechung taucht die Frage auf, ob das im Buch angegebene Muster zu dem angegebenen Term passt. Eine Prüfung erfolgt über das Einsetzen einzelner Zahlen.

Anschließend sollen die Schülerinnen und Schüler an weiteren Mustern üben, die Herr G auf einem extra Arbeitsblatt austeilt. Er leitet die Arbeitsphase mit den Worten ein: „Und jetzt zu gucken, ob ihr das verstanden habt (...). Jeder sollte sich jetzt selbst überprüfen, ob er das hinbekommt". Als Herr G sieht, dass die Lernenden gleich den Term aufstellen wollen und damit Schwierigkeiten haben, anstatt weitere Stufen zu visualisieren, weist er sie darauf hin, mit dem einfacheren Teil der Aufgabe zu beginnen, weil dies die Arbeit erleichtern würde.

Nach einer Pause werden die erhaltenen Terme verglichen. Es tauchen große Probleme beim Einsatz der Variablen auf. Herr G weist immer wieder darauf hin, was die Variable und was der Term beschreibt. Er betont in diesem Zusammenhang, dass die Variable nicht immer x, sondern auch „n oder Egon" heißen kann. Nach der weiteren Aufgabenbesprechung hält Herr G an der Tafel fest, dass immer geklärt werden müsste, „Wofür steht der Term?", „Wofür steht die Variable". Zur Übung werden vier Aufgaben gegeben, wobei Herr G darauf verweist, dass alle Schülerinnen und Schüler mindestens eine Aufgaben schaffen müssten, dass die „Schnellen" weitere drei Aufgaben bewältigen und sich alle Lernenden vorn am Lösungsheft selbst kontrollieren können. Zur Sicherung wird der Kasten im Buch angeboten.

In dieser Stunde wurde die Betonung von Regeln, Definitionen und Beschreibungen des eigenen Vorgehens (aus Sicht der Lernenden) beobachtet. Problemen bei der Verwendung der Variablen wird durch Erläuterung der Gedankengänge entgegengewirkt. Trotz der Präsenz der Lehrkraft gibt es längere Phasen der Schüleraktivität.

Die zweite beobachtete Stunde verläuft ähnlich und behandelt die Gleichwertigkeit von Termen. Nach der obligatorischen Kopfübung wird über die Aussage von Herrn G: „Es gibt nämlich die Situation, dass verschiedene Leute unterschiedliche Terme aufgestellt haben. (...) Deshalb frage ich euch nun, welcher Term stimmt?"

Im lehrkraftzentrierten Unterrichtsgespräch, das durch kürzere Arbeitsphasen der Lernenden unterbrochen ist, zeigt Herr G auf, dass das Einsetzen von Zahlen als Überprüfungsstrategie nicht ausreicht. Er sagt: „Genau und wenn ich wollte, könnte ich euch 2 Terme nennen, die in 100 Werten übereinstimmen und im 101. Wert nicht mehr. Aber niemand hat Lust 100 Werte einzusetzen. (...) Hat jemand Vorschläge wie das ohne Wertetabelle gehen kann?" In der sich anschließenden Diskussion betont er explizit die Namen der Rechengesetze, die durch die Schülerinnen und Schüler verwendet worden sind und erklärt auf Nachfrage das fehlende Rechenzeichen bei dem Ausdruck 4n.

Für diese Stunde liegt die Unterrichtsplanung von Herrn G vor (siehe unten). Die beobachtete Stunde entspricht sowohl in Bezug auf die Aktivitäten von Herrn G als auch von den Lernenden dem Plan. Es ist aber anzumerken, dass die Unterrichtsgespräche eher lehrkraftzentriert gestaltet waren.

1. Thema: Wann beschreiben Terme das gleiche?
2.1. Vorrangig geförderte Kompetenz: Formen überschaubare Terme hilfsmittelfrei um, um Wertgleichheit nachzuweisen.
2.2. Lernziel(e) der Stunde: Die Schüler vergleichen zwei Terme anhand der Tabelle auf Wertgleichheit und verwenden diesen Begriff zum Vergleich.
4. Hausaufgabe zu dieser Stunde: Einsetzen verschiedener Werte in die Variable von Termen und Berechnung des Wertes.

Phase	Inhaltliche Aspekte („Was ist dran?")	Lernaktivitäten der SuS	Method. Aspekte	Material, Medien
Hausaufgabe	Klärung, was im Vertretungsunterricht gemacht wurde	Stellen Fragen zum Abschnitt „Bist du sicher"		
Einstieg	Überprüft für die verschiedenen Terme, ob sie zum Sachverhalt passen!	-schlagen eine Herleitung oder das Prüfen von Beispielen vor.	Unterrichtsgespräch	Folie
Erarbeitung	Ausführen der Überprüfung.	-Setzen verschiedene Werte für x ein und vergleichen. -legen dazu eine Wertetabelle an. -Versuchen eine Herleitung durch Zerlegen oder Ergänzen.	GA	Arbeitsblatt
Ergebnissicherung	Verifikation und Falsifikation der Terme. Vergleich der Wertetabelle. Definition von Wertgleichheit/Äquivalenz als vollständige Übereinstimmung in allen möglichen Werten..	-Konstatieren die Notwendigkeit einer Übereinstimmung aller Werte bei korrekten Termen. -Problematisieren die Anzahl der notwendigen Einsetzungen.	Präsentation und Unterrichtsgespräch	Folie Sicherung an der Tafel
Anwendung	Überprüfung weiterer Terme auf Wertgleichheit	-Wenden den Vergleich in Tabellen zur Überprüfung an.	EA	Arbeitsblatt
Vertiefung	„Wie viele Werte muss man prüfen , um ganz sicher zu sein?" Welche Möglichkeiten gibt es noch zur Überprüfung der Wertgleichheit?	-Benennen die Problematik des Beweisens mit Beispielen. -Formen in einfachen Fällen Terme um.	Unterrichtsgespräch	
Information	Ordnen der Terme und Zusammenfassen	-Notieren Beispiel. -Prüfen Verständnis an weiteren Beispielen.	Lehrerinformation	
Übung	s.o.	-Üben die Termumformungen. -Benennen die verwendeten Rechengesetze.	EA	Buch S.19 Nr.3-5, AH S.12,13
Hausaufgabe	„Bist du sicher" S.20			

Abbildung 18: Unterrichtsplanung - Herr G

Es fällt auf, dass Herr G in den Unterrichtsgesprächen auf die Verwendung des Fachvokabulars achtet, obwohl er im Interview betont, dass die Variable ein Werkzeug ist, mit dem umgegangen wird. Eine Definition ist in ihrem Fall nicht sinnstiftend. Insofern scheint dies aber nur den Begriff der Variablen zu betreffen, da er bei der Benennung und Verwendung der Rechengesetze und der Terme auf deren korrekte Bezeichnung achtet. Es handelt sich dennoch um eine Abweichung von den rekonstruierten subjektiven Theorien.

Darüber hinaus stehen die rekonstruierten subjektiven Theorien von Herrn G im Einklang mit seinem unterrichtlichen Verhalten, was sich im Umgang mit den Lernenden, der Betonung der Regeln, dem Bedürfnis nach Sinnstiftung und der Definition der Variablen im Kontext gezeigt hat.

Die Klausur von Herrn G ergibt das folgende Kompetenzprofil:

Tabelle 57: Klausurenanalyse, Herr G

Kompetenz(en)	math. argumentieren			Probleme mathematisch lösen			mathematisch modellieren			mathematische Darstellungen verwenden			formal-technisch arbeiten			mathematisch kommunizieren		
Anforderungsbereich	I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II	III
Gib an							x			x			x					
Gib an													x					
Berechne													x					
Fasse zusammen													x					
Gib an													x					
Klammere aus													x					
Multipliziere aus													x					
Bestimme				x									x			x		
Gib an							x											
Fasse zusammen													x					
Entscheide																x		
Begründe	x																	
Notiere										x								
Notiere										x								
Entscheide													x				x	
Zeige													x					

Die Klausur beinhaltet vorwiegend Aufgaben deren kognitive Anforderungen sich auf geringem Niveau bewegen (AFB I). Darüber hinaus werden die kognitiven Anforderungen, die höchstens den Anforderungsbereich II erreichen, nur im Wechsel der Darstellungsformen auf ein mittleres Niveau gehoben. Die übrigen, komplexeren Kompetenzen, wie das Argumentieren, Problemlösen und Modellieren werden nur im Rahmen von Standardaktivitäten berücksichtigt. Reflexionen und Verallgemeinerungen fehlen vollständig.

Anhand der Klausur ist erkennbar, dass Herr G die formal-technischen Grundlagen mit den Schülerinnen und Schülern erarbeitet hat und diese hier abgefragt werden. Dies entspricht den Darstellungen zu den Inhalten des Stoff-Curriculums. Über die darüberhinaus gehenden Ziele seines Unterrichts kann auf Basis der Datenlage keine Aussage getroffen werden.

6.8. Herr H

Herr H[107] ist seit fünf Jahren als Lehrkraft an einem niedersächsischen Gymnasium beschäftigt. Das verwendete Lehrbuch ist der Lambacher Schweizer. In seiner Schule wird gerade der Wechsel von dem graphikfähigen Taschenrechner zu CAS-Rechnern durchgeführt.
Das Vorgehen von Herrn H ist durch das Referendariat und die Praxiserfahrungen geprägt (vgl. 1:13:12-1), wobei ihn das Lehramtsstudium in Bezug auf die Fokussierung auf einen strukturierten Unterricht, der auch die Strukturen in der Mathematik hervorhebt, vorbereitet hat (vgl. 1:11:49-1). Im Referendariat hat er die Lernumgebung „Knack-die-Box“[108] als Examensreihe unterrichtet (vgl. 8:43-1). In seiner eigenen Schulzeit wurde er eher frontal unterrichtet einschließlich der Verwendung zahlreicher Kästchenaufgaben (vgl. 1:14:24-1). Er empfand diese Art des Unterrichts für sich als passend und er zieht die Schlussfolgerung: Dies „intendiert ja häufig dann auch schon, dass mich diese Anwendungskontexte nicht so ansprechen. Aber ich finde schon, dass sie auch den Algebraunterricht durchaus bereichern“ (21:33-2). Er betrachtet sich selbst in Abgrenzung zu diesem Vorgehen und in Anlehnung an seine Selbstwahrnehmung als *reinen* Mathematiker.
Zudem sagt er, dass er Mathematik als Fach studiert hat, weil ihn der klassische, eher instruktiv geprägte Unterrichtsstil nicht gestört hat. Dennoch vermerkt er: „Aber ich begreife das schon, oder sehe das schon ein, dass das wichtig ist. Ja, dass die auch aktiv selber lösen“ (1:14:24-1). Dies zeigt, dass er diesen für sich nicht als nötig erachtet hat, um Dinge zu verstehen. Für diese Erkenntnis führt er an, dass er zum Beispiel die Lösungsverfahren von Gleichungssystemen arbeitsteilig in Gruppenarbeiten erarbeiten lässt. Dennoch betont er, dass die Sicherung eher durch lehrkraftzentrierte Übungsphasen durchgeführt wird. Oder, dass er selbst dann zum Beispiel das Additionsverfahren noch einmal vorrechnet, auch wenn es vorher von den Schülerinnen und Schülern erarbeitet worden ist (vgl. ebd.).
Eine weitere Besonderheit ist die Unterscheidung der Schülerinnen und Schüler in das Mittelfeld, die Starken und die Schwachen. Er stellt heraus, dass die „Leistungsstarken ganz andere Qualität abliefern“ (4:36-2) würden als die Schwächeren. Für diese und das Mittelfeld seien Orientierungs- und Strukturierungshilfen sehr wichtig (vgl. 56:16-1). Den stärkeren Schülerinnen und Schüler sollten dann eher Knobelaufgaben gegeben werden und die Möglichkeit die Verantwortung für den eigenen Lernprozess zu übernehmen (zum Beispiel durch die Verkürzung der Lösungswege). Er konstatiert, dass die starken Schülerinnen und Schüler das „auch gut hinbekommen, das sind auch die, die würden’s dann wirklich auch auf diese klassische Methode da hinkriegen“ (35:21-1). Er begründet über den Fokus auf das Mittelfeld und die schwächeren Schülerinnen und Schüler, dass im Unterricht weniger auf klassische Begrifflichkeiten und auf klassischen Unterricht geachtet wird. Dieser wäre nur was für die stärkeren Schülerinnen und Schüler, die nicht so viel Anschauung bräuchten (vgl. ebd.). So etwas, wie „Knack die Box“, da hat er den Eindruck, „dass das schon noch ein paar mehr, auch schwächere teilweise mitgenommen hat“ (38:02-1). Weil es eben sehr anschaulich und händisch war (vgl. ebd.).

6.8.1. Was sind die Inhalte des Algebraunterrichts?

Zuerst erlernen die Schülerinnen und Schüler den Aufbau der Zahlbereiche und der zugehörigen Grundrechenarten. Die Rechenregeln spielen dabei eine besondere Rolle. Diese müssen beherrscht werden. Oft geschieht dies in Kochrezepten, wie „[s]o etwas wie Klammern werden halt zuerst aufgelöst“ (43:02-1), die aber immer kritisch hinterfragt werden sollen. Das

[107] Die Aufnahme ist dreigeteilt. Die Zahl nach dem Bindestrich in den Zeitangaben gibt den jeweiligen Abschnitt an.
[108] Dabei handelt es sich um eine Lernumgebung aus „Das Mathematikbuch“ (Affolter, et al., 2011).

kritische Hinterfragen von vermeintlichen Tatsachen wird als hilfreich für das weitere Leben betrachtet (vgl. 1:03:05-1, 43:02-1).
Herr H betont besonders die Bruchrechnung und die fehlende Kenntnis der Rechenregeln in diesem Bereich, weil diese immer wieder bei den Schülerinnen und Schülern zu Problemen führen, auch noch im Abitur (vgl. 16:11-3, 4:02-1). Zu den von Herrn H benannten Standardinhalten der Algebra gehören neben dem Zahlbegriff, die funktionalen Zusammenhänge, Terme und Gleichungen sowie deren Umformung als auch die Lösung von Gleichungen mit Hilfe der Äquivalenzumformungen (vgl. 1:37-1-2:19-1). Die Termumformungen und Rechenregeln sollten dabei kein „Selbstzweck" sein, sondern als Hilfsmittel dazu dienen zu verallgemeinern und Sachzusammenhänge zu bearbeiten (vgl. 11:52-2). Die Termstrukturen werden explizit thematisiert. Gemeint ist, ob es sich also um eine Minusklammer, um Terme mit verschiedenen Exponenten oder ähnliches handelt. Dies dient der Erkennung der Gleichwertigkeit der Terme (vgl. 20:03-2).
Aufbauend auf der Betrachtung von Flächen und Flächenberechnungen wird dann über Formeln, Gleichungen und auch deren Umstellung gesprochen (vgl. 20:35-1).
Inhaltlich gehören für ihn die Übersetzung von mathematischen Sachsituationen und deren Beschreibung durch Terme und Gleichungen zum Kern des Algebraunterrichts. Das charakterisiert er gerade im Hinblick auf das Hinterfragen und das Interpretieren als „total wichtig" (24:51-2). Hierbei sollen Ergebnisse in Rückbezug zum ursprünglichen Kontext gesetzt werden. Dies dient auch der Abgrenzung gegenüber der Arbeit mit dem Taschenrechner und soll dazu führen eher eine Sensibilität gegenüber den erzeugten Lösungen zu erhalten. Ein Hinterfragen von Situationen soll geschult werden, damit man auch im Alltag reflektiert sein kann (vgl. 24:51-2). Grundlage für die Bearbeitung solcher Aufgaben und Anwendungen ist die Beherrschung von Termen, Gleichungen, der Äquivalenz- und Termumformungen, „weil ohne diese, diese beiden Punkte funktioniert kein Anwendungskontext" (17:46-1). Gemeint sind zum Beispiel die Verfahren zum Auffinden von Nullstellen, oder das Auflösen von Gleichungssystemen (vgl. ebd.).
Variablen und Terme hat er bis jetzt über die Lernumgebung „Knack-die-Box" eingeführt, wobei die Schülerinnen und Schüler dort selbst aktiv werden können und erst nach und nach abstrahiert wird. Dort wird dann später für die Box die Variable eingesetzt. Gleichungen führt er über das Waagemodell ein, so dass die Schülerinnen und Schüler eine Idee der Äquivalenz erhalten. Ihnen diese einfach vorzugeben wäre fatal (vgl. 7:08-1, 9:16-1). Die Idee des Platzhalters für eine zu bestimmende Zahl soll sich in Bezug auf die Variable bei den Schülerinnen und Schülern setzen (vgl. 37:21-1), auch wenn dieser für manche Schülerinnen und Schüler nicht zu fassen sein wird (vgl. 13:11-2). Ursprünglich wird an die Idee des Platzhalters aus der Grundschule durch leerstehende Kästchen angeknüpft, dann erfolgt der Übertrag auf Sachsituationen, in denen die Variable für etwas zu Suchendes gesetzt wird (vgl. 18:49-1). Eine weitere Definition erfolgt nicht (vgl. 15:08-2).
Termumformungen werden über den Wunsch eingeführt, etwas Kompliziertes einfacher zu gestalten. Er bezeichnet es als das Bedürfnis: „Ich möchte vereinfachen" (17:53-2). Dabei gilt dann der Grundsatz: wenn etwas auf der einen Seite der Gleichung geändert wird, dann muss dies auf der anderen Seite ebenfalls gemacht werden. Dies wird durch das Gleichheitszeichen betont in Verbindung mit der Waage. Er schätzt dabei ein, dass dies für die Schülerinnen und Schüler am leichtesten zu verstehen ist (vgl. 17:53-2).
Auf Beweise wird im Algebraunterricht verzichtet, da diese für die Schülerinnen und Schüler zu abstrakt sind. „Das geht eigentlich überhaupt nicht" (11:14-1). Wenn, dann führt er den Beweis zur Irrationalität der Wurzel 2 im Unterricht vor (vgl. ebd.). Beweise gehören aus seiner Sicht auch nicht in den Unterricht, die Schule hat ihren Schwerpunkt in der Anwendung und weniger in der Herleitung und Beweisführung (vgl. 4:04-3). Es würde auch das in der Schule vermittelte Verständnis übersteigen, da es beim Beweisen noch viel mehr auf die

Formalia ankommt, was ein tiefgreifendes Verständnis voraussetzt, das im Unterricht aber nicht vermittelt wird. Zudem sind diese im KC auch nicht verankert (vgl. 3:19-3).
Schemata bilden für Herrn H einen Schwerpunkt des Algebraunterrichts, vor allem die Strukturierung, die dahinter steckt. Sie sind Bestandteil jeden Inhalts der Algebra (vgl. 59:38-1). Die Schemata bilden ein Hilfewerkzeug, das den Schülerinnen und Schülern an die Hand gegeben werden kann. Dies ist vor allem für die Schwächeren und das Mittelfeld wichtig. Der Vorteil ist, dass diese auswendig gelernt werden können und bei korrekter Anwendung zum Ziel führen. Nachteilig werden sie insofern gesehen, als dass sie die guten und sehr guten Schülerinnen und Schüler manchmal hindern, wenn sie Gleichungen sehr schnell zusammenfassen könnten ohne die einzelnen Schritte nachzuvollziehen. Dabei wird dann aber den besseren Schülerinnen und Schüler die Möglichkeit gegeben, nach eigenem Ermessen zusammenzufassen, aber dann auch für Rechenfehler die Verantwortung zu übernehmen (vgl. 56:16-1). Zudem dürfen zu komplexe Schema nicht zu früh vermittelt werden, sonst führt dies zur Überforderung der Schülerinnen und Schüler (vgl. 1:00:16-1).
Modellierungen und Problemlösen sind Bestandteil des Algebraunterrichts. Diese stellen den Lebensweltbezug für die Schülerinnen und Schüler her (vgl. 0:16-3-1:03-3[109]). Um zu modellieren, müssen zunächst die technischen Grundlagen, wie das Lösen und Umstellen von Termen und Gleichungen erlernt werden (vgl. 28:53-1). So kann dann auch gezeigt werden, wie das zuvor schematisch Gelernte eingesetzt werden kann (vgl. 2:29-3). Zudem sollten Modellierungen für ihn hinreichend komplex sein, um die Struktur zu verdeutlichen, welche Bestandteile für die Lösung nötig sind (vgl. 33:51-1) [Beispiel Bremswege berechnen (vgl. 34:30-1)].
Auf der abstrakten Ebene Begriffe einzuführen, macht für ihn keinen Sinn. Denn es kostet aus seiner Sicht Zeit, Begriffe auf anschaulichen Ebenen einzuführen, zum Beispiel Zuordnungen. Diese werden über einen Roboter eingeführt, in den Dinge reingeworfen werden und der nach einer bestimmten Vorschrift etwas produziert (vgl. 35:21-1, 9:16-1) - wäre es abstrakter und dort würde nur der Funktionsterm stehen, dann „kriegen (...) viele [den Schritt] nicht hin" (35:21-1). Vielmehr ist er der Ansicht, dass die Bedeutung der formalen Einführung von Begriffen rückläufig ist, zugunsten der Anwendungsaufgaben im Unterricht. Begriffe, wie Variable und Term werden mehr oder weniger nur noch genutzt, aber nicht mehr definiert (vgl. 36:22-2).
In der Klasse 8 werden dann quadratische Funktionen und Zusammenhänge behandelt (vgl. 22:09-1). Ungleichungen werden nicht mit betrachtet (vgl. 32:11-1).
Dem Rechnereinsatz steht er kritisch gegenüber. Er nutzt ihn, weil er vorgeschrieben ist, legt aber großen Wert darauf, dass die Schülerinnen und Schüler alles zunächst händisch lernen und auch die Grundrechenarten regelmäßig im Kopf wiederholt werden (vgl. 5:33-3-6:54-3). Dennoch plädiert er vereinzelt für die Mischung aus Übungen mit dem Rechner, um den Aufgabenkontext breit zu halten. Dies gilt aber vor allem für die Oberstufe (vgl. 10:54-3).
Er verweist darauf, dass die Einführung von Termen und Variablen für viele der Schülerinnen und Schüler zu früh kommt. „Die können dieses Abstrahieren, auf einmal habe ich da nicht mehr nur Zahlen, sondern es geht doch um Variablen irgendwie, noch nicht leisten, obwohl sie vielleicht ein halbes Jahr später schon leisten könnten" (46:20-1).

Die Grundlage für die Beschäftigung mit der Algebra bildet der sichere Umgang mit den Rechengesetzen und -regeln in den bisher behandelten Zahlenräumen. Dazu gehört es, die Rechenregeln reflektiert anwenden zu können und diese zu hinterfragen.
Der Variablenbegriff wird anknüpfend an das Vorwissen der Lernenden über die Platzhalteridee eingeführt, als etwas, das zu bestimmen ist. Der Begriff der Variablen wird ebenso wenig wie der Termbegriff im Unterricht definiert. Herr H ist davon überzeugt, dass die Schul-

[109] Die Beispielaufgabe laute: „Ziege Alma will irgendwie, ihr Gehege (...) abgrasen und dann will man das Gehege möglichst groß haben, hat aber nur soundso viel Draht" (0:30-3).

mathematik den Fokus eher auf die Anwendung als auf formale Kriterien legt. Aus diesem Grund sind Beweise kein regulärer Bestandteil des Algebraunterrichts. Unter der Bedingung die Anwendung in den Vordergrund zu stellen, werden Terme und Variablen in einem enaktiven, anschaulichen Aufgabenkontext eingeführt („Knack die Box"). Wurde sich der Idee der Terme, Gleichungen und Variablen über so einen Kontext genähert, steht das Umgehen mit diesen Inhalten im Vordergrund. Herr H bezeichnet sie als Hilfsmittel, um im späteren Verlauf Sachkontexte modellieren zu können und Probleme zu lösen. Dazu muss der regelhafte Umgang mit ihnen erlernt werden.
Die Termumformungen werden unter dem Gesichtspunkt der vereinfachten Darstellungsmöglichkeit, die Gleichungsumformungen unter dem Gedanken der Gleichheit rechts und links vom Gleichheitszeichen behandelt. Dazu führt Herr H Schemata (Strategien) ein. Sie sind für ihn ein zentraler Bestandteil des Algebraunterrichts. Der bewusste und reflektierte Einsatz der Schemata ist ihm wichtig. Wenn es möglich ist, sollen sich die Schülerinnen und Schüler aktiv mit den geltenden Regeln auseinandersetzen oder an der Erarbeitung mitwirken.
Beherrschen die Lernenden dieses Handwerkszeug können sie mit dessen Hilfe Probleme lösen, Sachsituationen darstellen, interpretieren und erhaltene Lösungen validieren. Dieser Unterrichtsinhalt ist für Herrn H übergeordnet, weil die Schülerinnen und Schüler dadurch zur Reflexivität erzogen werden. Dies steht in Verbindung zu seinen Unterrichtszielen (Kapitel 6.8.2 und 6.8.3).

6.8.2. Was sind die Ziele des Algebraunterrichts?

Herr H betrachtet die Algebra als etwas Ursprüngliches und als den „Kern der Mathematik" (0:18-1), weil viele Inhalte darauf aufbauen, in Abgrenzung zur Stochastik und Geometrie, die für ihn eher anwendungsbezogen sind (vgl. 0:52-1). Für die Schülerinnen und Schüler sieht er im Erlernen der Algebra das große Problem, dass sie in der siebten Jahrgangsstufe „kognitiv noch nicht so in der Lage sind" (0:18-1) die Inhalte zu begreifen.
Die Algebra wird von Herrn H wie eine Fremdsprache gesehen. Das Erlernen dieser, vor allem ihrer Regeln und Strukturen, fällt den Schülerinnen und Schülern aus seiner Sicht deutlich schwerer als noch vor einigen Jahren, obwohl dies wichtig ist (vgl. 13:37-2). „Algebraunterricht funktioniert nur erfolgreich, wenn man sich auf diese Strukturen einlässt und da die Schüler hinzukriegen, ist ein ganzes Stück Arbeit. Und es ist in meinen Augen sogar schwieriger geworden (...) weil sie diese Strukturen auch (...) in Deutsch (...) nicht mehr so mitbringen" (ebd.).
Dies zeigt aber gleichzeitig den Grundlagencharakter, den die Algebra für ihn besitzt. Sie gehört im gewissen Maß zur Allgemeinbildung der Schülerinnen und Schüler, da in ihr „strukturierte, geordnete Denkstrukturen [angelegt werden] (...), um dann auch einen logisch-schlussfolgerndes, kausales Denken daraus abzuleiten. Also ich denke, das ist dann die Hauptaufgabe der Algebra (...) die dann auch für andere Fächer (...) Relevanz besitzt" (6:34-1). Die Schülerinnen und Schüler zu einem strukturierten Arbeiten zu bringen, stellt ein Ziel des Algebraunterrichts dar (vgl. 13:37-2).
Algebra ist für ihn ein Instrument der Verallgemeinerung. Sie als reine Rechenfertigkeit zu betrachten, erscheint ihm verkürzt, da sie dann zum Selbstzweck verkümmern würde. Vielmehr ist dies die Basis für das spätere Problemlösen (vgl. 11:52-2). Algebra trägt zur Entwicklung des mathematisierenden Denkens bei. Dies hilft dabei, Mathematikaufgaben einen Sinn zu verleihen, verallgemeinern zu können, den Sinn hinter Formeln und die Bedeutung von Gleichungen zu verstehen (vgl. 2:58-1). Sie hilft auch innermathematische Probleme zu lösen (vgl. 23:33-1). Damit wird sie zu einem der wichtigsten Themen in der Sek I (vgl. 12:44-3). Sie ist ja auch Grundlage für die Geometrie oder die Stochastik (vgl. 12:30-3). Zu-

dem tragen die in ihr erlernten Fähigkeiten dazu bei, dass die Schülerinnen und Schüler die Oberstufe erfolgreich bewältigen können, wie zum Beispiel, dass sie einfach irgendwann eine Gleichung lösen können müssen (vgl. 15:04-3, 12:44-3).
Das Ziel des Algebraunterrichts in der Sekundarstufe I beschreibt er damit, dass die Schülerinnen und Schüler den strukturierten Aufbau der Mathematik erkennen sollen, dass also durch einige wenige Rechengesetze sehr viele Fragen der Algebra bearbeitet werden können und das „neuere“ Regeln auf diesen bestehenden Regeln basieren (vgl. 1:06:35-1).

Werden den Lernenden die beschriebenen Inhalte vermittelt, ist es ihnen möglich das strukturierte und geordnete Denken zu schulen und daraus kausale Denkstrukturen zu entwickeln. Gemeint ist, dass, wenn sie die Algebra als Instrument verstehen, durch das sie Situationen verallgemeinern und dementsprechend Probleme lösen können, sie die Fähigkeit erlernen, Situationen nach der Ausgangssituation, den zu Verfügung stehenden Mitteln und den zu erreichenden Zielen strukturieren und die erhaltenen Ergebnisse auf ihre Plausibilität überprüfen können. Diese Fähigkeiten leisten in der Folge einen Beitrag zur Allgemeinbildung der Schülerinnen und Schüler.
In Bezug auf die Sinnstiftung trägt sie im Mathematikunterricht insgesamt dazu bei, Formeln verständlich zu machen. Sie kann insgesamt zum Verständnis von mathematischen Ausdrücken beitragen.
Mehr auf den Unterricht bezogen können sie die erlernten Hilfsmittel, wie beispielsweise das Lösen von Gleichungen, auch für innermathematische Probleme, für andere Fächer und insbesondere als Vorbereitung für die Oberstufe nutzen.
Algebra wird als der Kern der Mathematik bezeichnet. Sie steht für ihn in Abgrenzung zur Geometrie und Stochastik, die eher anwendungsbezogen sind. Algebra ist eine eher abstrakte Sprache mit Regeln und eigenen Denkprozessen.

6.8.3. Was sind die Ziele des Mathematikunterrichts?

„Mathematik ist mehr als eine Maschine zu bedienen“ (5:40-1). Es geht darum die erhaltenen Ergebnisse zu interpretieren und zu validieren. Ergeben sie in diesem oder jenem Kontext Sinn oder nicht. Dabei hilft die Algebra, durch die Schulung des logischen Denkens (vgl. ebd.). Ansonsten wird die Mathematik aus Sicht von Herrn H nur noch als „Hilfsdisziplin“ oder „Hilfswissenschaft“ begriffen, die zur Lösung von Problemen aus anderen Fächern wie der Physik benutzt wird. Dass aber die Mathematik selbst einen Wert hat, der gerade in Bezug auf die Reflexivität gegenüber Ergebnissen deutlich wird, wird dann nicht mehr gesehen (4:33-1). Auch der eigene Wert der Mathematik wird vermittelt, wie wertvoll die innermathematische Problemlösung ist, und was innermathematische Probleme sind - zum Beispiel Löcher im Zahlenstrahl, die dann durch die irrationalen Zahlen gefüllt werden müssen (vgl. 22:53-1-23:33-1) oder auch einfach das Verstehen von Gleichungen (vgl. 1:06:35-1).
Die händische Komponente, also tatsächlich das Umformen von Termen und die Anwendung von Äquivalenzumformungen gehören für ihn zu den Grundlagen der Mathematik (vgl. 2:19-1). Es sollte vermittelt werden, inwiefern die Mathematik aufeinander aufbaut und in sich schlüssig ist. Gemeint ist hier die Anwendung von Rechengesetzen, die man schon im Grundschulalter erlernt, wie die Punkt- vor Strichrechnung, die immer gültig sind. Und auch die Erkenntnis, dass bei Einhaltung dieser ein Ergebnis erzeugt werden kann (1:06:35-1).
Letztendlich soll die Mathematik auf die Erlangung von „Grundfertigkeiten und (...) Grundkenntnissen“ (15:04-3) abzielen, um die Schülerinnen und Schüler für die Oberstufe und das Abitur vorzubereiten (vgl. ebd.).
Die Vermittlung der Eigenschaften der Mathematik, ihrer Klarheit, Struktur und ihres logischen Aufbaus ist ein Ziel des Mathematikunterrichts (18:36-3).

Die Lernenden sollen die innermathematischen Strukturen erkennen. Dazu gehört das Erkennen ihres logischen Aufbaus und ihrer Struktur (Konsistenz), dass sich also viele Inhalte auf basale Gesetzmäßigkeiten zurückführen lassen.
Die Schülerinnen und Schüler sollen die Mathematik nicht als Selbstzweck oder nur als Hilfswissenschaft für andere Fächer begreifen, sondern auch den ihr eigenen Wert verstehen. Sie erlernen logische Denkstrukturen, was wiederum einen Wert für die Allgemeinbildung besitzt.
Sie verstehen, dass es nicht nur um das Ausrechnen oder Bedienen einer Maschine geht, sondern um die Validierung und Interpretation von Ergebnissen. Sie können mathematische Probleme, wie vorhandene Löcher im Zahlenstrahl, verstehen und lösen.
In der Argumentation von Herrn H wird der Unterschied zwischen den Zielen des Mathematik- und Algebraunterrichts nicht deutlich.

6.8.4. Wie gelingt erfolgreiches Lernen?

Die Schülerinnen und Schüler benötigen zum Erlernen der Algebra Anhaltspunkte im Konkreten. Das bedeutet, dass die Variable nicht unnötig nebulös gehalten wird, sondern, dass sie immer konkret behandelt wird (vgl. 18:49-1).
Beim Erlernen der Algebra helfen selbstständige Arbeitsphasen, in denen die Schülerinnen und Schüler lernen zu reflektieren. Hier bieten sich unter anderem Diskussionen in größeren Gruppen und in Unterrichtsgesprächen an (vgl. 26:27-2).
Ein weiterer wichtiger Punkt ist die korrekte Analyse der jeweils gegebenen Aufgabenstellung. Diese kommt seiner Erfahrung nach zu kurz. Die strukturierte Überlegung dessen, was will diese Aufgabe eigentlich bezwecken? Wonach ist gesucht? Diese Kompetenz zu schulen, ist eine Aufgabe des Mathematikunterrichts (vgl. 20:38-2).
Strukturierte Vorgaben sorgen dafür, dass die Schülerinnen und Schüler, Ansatzpunkte erhalten, denn „man kann die auf keinen Fall mit Termumformungen ganz alleine lassen. Da muss man wirklich, da muss man ganz viel Übungszeit, da muss man tatsächlich denen so ganz einfache Strukturierungshilfen“ (52:49-1) geben. Dies muss auch immer nachgefragt werden, um die Schritte zu festigen, beispielsweise: „[H]ast du schon unterstrichen?“, „Hast du schon umsortiert?“ (ebd.). Dies kostet ihn zwar Mühe, aber durch eine „enge Anleitung“ (ebd.) passieren weniger Fehler (vgl. ebd.).
Eine gewisse Selbstständigkeit zum Beispiel in Form von Gruppenarbeiten sollte gegeben werden, auch in der Wahl der Lösungsverfahren, zum Beispiel von Gleichungssystemen, legt er nicht fest, welches die Schülerinnen und Schüler anwenden können (6:55-2). Er konstatiert, dass die Algebra es mit sich bringt, dass einige der Schülerinnen und Schüler, egal wie sie sich bemühen nicht erfolgreich sein werden. Die kommen „auf keinen grünen Zweig. Leider“ (40:17-1).

Erfolgreiches Lernen wird durch den Nutzen für die Schülerinnen und Schüler charakterisiert. Aus den Ausführungen der Kapitel 6.8.2 und 6.8.3 wird deutlich, dass die Erweiterung des eigenen Denkvermögens für die Lernenden als erstrebenswert angesehen wird.
Grundsätzlich müssen den Lernenden bei dem abstrakten Thema Algebra Anhaltspunkte im Konkreten geboten werden (z.B. durch die Rückeinsetzung konkreter Zahlen). Ein strukturiertes Arbeiten hilft den Schülerinnen und Schülern dabei die Aufgaben zu bewältigen. Zusätzlich werden die Lernenden durch ein Arbeitsumfeld unterstützt, das Diskussionen ermöglicht, die Gelegenheit gibt, sich aktiv einzubringen, anschauliche und schülernahe Aufgaben anbietet und ein selbstständiges Arbeiten erlaubt. Auf dieser Grundlage können die Schülerinnen und Schüler lernen zu reflektieren, selbstständig zu arbeiten und Probleme zu lösen. Dies hilft ihnen die oben genannten übergeordneten Ziele zu erreichen.

Die Schülerinnen und Schüler auf die Oberstufe vorzubereiten, ist ein weiterer Nutzen für die Lernenden.
Es ist für Herrn H eine Tatsache, dass ein Teil der Lernenden den Zugang zur Algebra nicht finden wird.

6.8.5. Wie gelingt guter (Algebra-)Unterricht?

Die Algebra und gerade die Verwendung von Variablen im Unterricht stellen für viele Schülerinnen und Schüler den Bruch mit der Mathematik dar. Das hohe Abstraktionsniveau der Algebra wird anerkannt und in diesem Zuge wird dafür plädiert, dass die Variable im konkreten Kontext verwendet und benannt wird. Beispielhaft verwendet Herr H die Lernumgebung „Knack die Box" zur Einführung von Termen und Variablen, dabei „können sie sich (...) vorstellen (...) ja was sind denn, wie viele Hölzchen sind denn in der Box enthalten (...) die nennen wir jetzt mal x" (18:49-1).
Grundsätzlich wünscht er sich die Verschiebung der Algebra auf einen späteren Zeitpunkt, da diese mit dem Term- und Variablenbegriff für die Schülerinnen und Schüler, die sich noch in kindlichen Denkstrukturen bewegen, eine sehr große Hürde darstellt (46:20-1).
Er konstatiert, dass es ein großes Problem ist, zu vermitteln: „dass unterschiedliche Variablen auch unterschiedliche Dinge sind. Sozusagen. Also dass ich die nicht einfach zusammenfassen kann" (55:27-1). Als das zentrale Problem kennzeichnet er das Aufstellen von Gleichungen und dabei im Speziellen die Fragen nach dem Gesuchten, das heißt, wofür die Variable steht und wie in diesem Zusammenhang vorgegangen werden muss (vgl. 27:19-2). Hierbei verwendet er für die Vermittlung das Obstkorb- und Waagemodell. Es wird Obst mitgebracht und bunt illustriert. Anschließend wird verdeutlicht, inwiefern die Teile zusammenpassen oder nicht (vgl. 52:05-52:16-1). „Also wirklich jedes Mal wieder" (54:42-1) muss das wiederholt werden (vgl. ebd.). Dadurch wird die Hineingabe eines Schemas bedingt, an dem sich festgehalten werden kann, wobei das Unterstreichen der Elemente als Strategie zum Erlernen des Struktursinns gesehen wird. „Der (...) sagen wir mal mittelgute Schüler oder auch schwache Schüler, braucht genau das" (52:49-1). Schemata bilden eine Grundlage der Algebra (vgl. 1:02:38-1). Sie unterstützen das Lernen durch ihre Strukturen und die klaren Handlungsanleitungen. Sie helfen die Vorstellung der Schülerinnen und Schüler zu erweitern, wie der Rechner funktioniert und erlauben die Kombination aus händischem Vorgehen und dem Rechnereinsatz (vgl. 1:00:16-1).
Die formalen Elemente zu vermitteln, fällt ihm sehr schwer. Zu vermeiden, dass Gleichungsketten aufgeschrieben werden, wobei manche Teile einfach fehlen und später wieder angefügt werden und Ähnliches. Die korrekte Notation ist für die Schülerinnen und Schüler ein Problem, wobei Herr H in diesem Fall noch keinen Weg zur Besserung gefunden hat (vgl. 38:02-1, 13:37-2). Dennoch ist ihm die korrekte Dokumentation des Rechenweges sehr wichtig. Diesen korrekt zu dokumentieren oder auch die eigenen Denkwege, zählt für ihn zur Problemlösekompetenz (vgl. 1:05:00-1). Dabei steht fest, wenn Variablen benutzt werden, dass dann auch festgelegt wird, wofür diese im jeweiligen Kontext stehen (vgl. 13:37-2).
Die Algebra unterrichtet er in der Tendenz eher lehrkraftzentriert, gibt aber an, dass er daran noch arbeiten muss, dass dies zurückgeht. Er begründet sein Handeln damit, dass die Algebra ein sehr komplexes Thema ist, das gerade in der Vermittlung von Kochrezepten den Einsatz der Lehrkraft erfordert, um vor allem „nachzusteuern" (vgl. 8:22-2, 1:10:38-1).
Die pq-Formel zu unterrichten, fällt ihm zum Beispiel schwer, da viele nicht begreifen, wofür die verschiedenen Variablen stehen und woher sie kommen. Einfacher ist es, die Formel direkt hineinzugeben, „dann gibt's diese allgemein pq-Formel, diese Lösungsformel. Da braucht ihr nur einsetzen. Dieses Anwenden funktioniert dann bei vielen, auch bei Schwäche-

ren, aber das Verständnis, wo das herkommt, das erreichen nur wenige Achtklässler“ (41:22-1).

Gruppenarbeiten sind auch Bestandteil dieser Unterrichtseinheit (vgl. 8:22-2, 1:10:38-1). Seine Unterrichtsphilosophie lautet in diesem Kontext: „Soviel Lehrertätigkeit wie nötig,...so wenig wie möglich“, wobei er dabei direkt die Einschränkung in Hinblick auf die Algebra trifft, dass hier eine erhöhte Tätigkeit der Lehrkraft nötig ist (vgl. 10:57-2-11:12-2), „aber ein ganz zentraler Bestandteil auch bei vielen Mathestunden (...) ist dann häufig auch einfach das Unterrichtsgespräch“ (26:27-2). Neben den selbstständigen Erarbeitungsphasen ist es für Herrn H nötig, sobald es um Reflexionen auf der Metaebene oder auch komplexere Aufgaben geht, ins Unterrichtsgespräch zu gehen. Dies ist für die Vertiefung notwendig (vgl. ebd.).

Die Schülerinnen und Schüler sollen auch lernen, wie reflektiert und hinterfragt wird. Dies hat vor allem eine gesellschaftliche Komponente (vgl. 24:51-2), denn nichts und im Speziellen Ergebnisse, soll blind akzeptiert werden (vgl. ebd.).

Zur Einführung der Variablen und Terme verwendet er das Material aus seiner Examensreihe, das auf der Lernumgebung „Knack die Box“ basiert. Diese bevorzugt er, weil die Schülerinnen und Schüler dort aktiv handeln können, indem sie selbst mit Streichhölzchen umgehen. Sie arbeiten dabei an dem Problem, wie sie die Box knacken können. Dieser Fall ist konkret, die Schülerinnen und Schüler haben etwas in der Hand und werden aktiv. Später wird auf dieser Basis abstrahiert. Hierbei ist die Schwerpunktlegung auf das Händische entscheidend (vgl. 7:08-1). Zudem wird auf die anschauliche Vermittlung der Inhalte geachtet, sei es durch die Boxen in der zuvor beschriebenen Lernumgebung, durch das Waagemodell oder die Obstkorbidee und das Unterstreichen bei der Erarbeitung der Termumformungen (vgl. 9:16-1, 52:05-1, 41:22-1). Diese vereinfachten Zugänge sollen ein Abblocken vor den Inhalten und die Überforderung der Schülerinnen und Schüler verhindern (vgl. 9:16-1).

Bei der Vermittlung von neuen Inhalten achtet Herr H auf das Vorwissen der Schülerinnen und Schüler. Dies macht er vor allem in Bezug auf die Algebra, da diese von ihm als nicht so anschaulich empfunden wird. Er stellt sein Unterrichtskonzept wie einen Jenga-Turm dar. Zunächst den Grundstock sichern und dann, wenn es möglich ist, darauf aufbauen und neue Steine hinzufügen. Er möchte die Schülerinnen und Schüler dort abholen, wo sie stehen. Gleichzeitig bemüht er sich darum, die Inhalte sehr anschaulich und motivierend durch schülernahe Einstiegsbeispiele einzuleiten, bei denen die Schülerinnen und Schüler selbst aktiv werden können, z.B. das beschriebene „Knack-die-Box“. Wichtig ist ihm dabei, dass strukturiert vorgegangen wird (vgl. 7:08-1). Das Abholen der Schülerinnen und Schüler auf ihrem jeweiligen Kenntnisstand ist ihm sehr wichtig. Das gilt im Besonderen für die Algebra, da diese so abstrakt ist und wenig Anschauung existiert im Gegensatz zu den anderen Gebieten (vgl. ebd.).

Wichtig ist darüber hinaus, dass Inhalte auch unter dem Gesichtspunkt der Nützlichkeit thematisiert werden. Die Geradengleichung der linearen Funktion zum Beispiel wurde sehr intensiv geübt in Hinsicht darauf, dass es grundlegend für die kommenden Inhalte ist (vgl. 5:48-2). Das Grundlegende muss viel mehr geübt werden, die Regeln der Termumformung zum Beispiel, dahingegen werden nicht alle Lösungsverfahren von Gleichungssystemen über einen längeren Zeitpunkt hinweg geübt, da gibt es ja dann auch den Rechner (vgl. 6:18-2).

Anwendungskontexte hat er selbst in seiner Schulzeit nicht kennengelernt, sieht aber deren Berechtigung im Unterricht. Diese dienen der Sinnstiftung des Vermittelten und sind deshalb notwendig (vgl. 23:35-1). Allerdings plädiert er für den gezielten Einsatz von Anwendungen. Eine Kombination der Stränge Anwendung und innermathematischer Verfahren hält er insgesamt für sehr angemessen (vgl. 21:33-2). Deshalb findet sich auch mindestens eine Anwendungsaufgabe in den Klassenarbeiten wieder, wobei diese nicht zu offen sein dürfen (vgl. 3:46-2, 22:55-2). Die Anwendung des Schema F dient dabei oft als Einstiegsaufgabe, um auch die Schwächeren zu fördern und ihnen die Chance zu geben, mindestens eine Aufgabe zu lösen. Sie würden an Problemlöseaufgaben eher scheitern. Die richtige Mischung bildet für

ihn ein Erfolgsrezept im Unterricht und in den Arbeiten (vgl. 22:55-2, 21:33-2). Wichtig ist für ihn, dass es für jeden „leistbare Aufgaben“ gibt (vgl. 4:36-2). Das Positive an Anwendungsaufgaben ist, dass die Mathematik als Hilfsmittel dient, diese zu lösen und sie wiederum die Mathematik veranschaulichen, in diesem Sinn ist es notwendig sie immer wieder zu integrieren (vgl. 2:49-3). Zudem ist es immer möglich, von der Anschauung zurück in Richtung formale Mathematik zu gehen (vgl. 32:36-1).
Das Üben steht unter dem Credo der Binnendifferenzierung. Dabei geht es darum, Standardaufgaben für das Mittelfeld und die Schwächeren bereitzustellen, aber auch um die Förderung der Stärkeren, diese sollen gefordert werden (vgl. 1:00-2). Bei den Termumformungen und Gleichungen werden dann zum Beispiel manchmal seitenlange Terme zum Zusammenfassen gegeben. Dies fordert die sehr starken Schülerinnen und Schüler heraus (58:09-1). Bei der Anwendung der Schemata wird insofern differenziert, als dass den Lernenden die Verantwortung übertragen wird, inwiefern sie die einzelnen Schritte der Schemata überspringen. Dies ist ihnen freigestellt, Rechenfehler führen dann aber zu höheren Punktabzügen, da der Rechenweg ja dann nicht nachvollziehbar ist (vgl. 56:16-1).
Hierunter fällt die Herangehensweise an Themen anhand von verschiedenen Darstellungsformen, da er die Unterschiedlichkeit der Lerntypen anerkennt. Zudem soll gerade in der Algebra verdeutlicht werden, dass eine Tabelle, ein Term und eine Graphik zu derselben Funktion auch dasselbe beschreiben (vgl. 23:44-2).
Das Material zum Üben, wie für die Hausaufgaben wird dem Lehrbuch entnommen. Hierfür sind die Schulbücher da und auch didaktisch aufbereitet, daher liegt deren Nutzung nahe (vgl. 1:18:31-1). Die Einstiege entlehnt er, wie bei dem Beispiel „Knack die Box“ zu sehen, dem Lehrbuch (vgl. 32:36-1).
Übung ist für ihn ein selbstverständlicher Teil der Algebra, der entscheidend den Lernerfolg prägt (vgl. 0:11-2). Neben den Übungen aus dem Buch werden regelmäßig Kopfrechenübungen durchgeführt. Dies dient einerseits der Festigung des aktuellen Stoffs, aber auch der Wiederholung vergangener Themen und dem Auffrischen vorhandenen Wissens als Vorbereitung für das kommende Thema. Zudem wirken sie auf die Schülerinnen und Schüler motivierend, da sie selbst die Aufgaben vorbereiten (vgl. 44:14-1-45:13-1). Genauso wie die Binnendifferenzierung in den oben genannten Ausführungen zur Übung, fordert das Knobeln die stärkeren Schülerinnen und Schüler, es motiviert sie aber auch weiter daran zu arbeiten (vgl. 44:14-1).
Bei der Übung muss auf ein abwechslungsreiches Übungsangebot geachtet werden. Dabei gibt es dann folgerichtig nicht nur Kästchenaufgaben, sondern auch ein Stationenlernen mit unterschiedlichen Aufgabentypen, die nach sorgfältiger Analyse der Klasse gestellt werden (vgl. 7:19-2). Er „würde mal mixen, aber ich finde da auch das Technische, dass das auch mal wieder mathematische Aufgaben sein müssten“ (35:01-1) im Vergleich zu Kontext- und Anwendungsaufgaben (vgl. ebd.). Er hat selbst die Erfahrung gemacht, dass mehr geübt werden muss, als die eigene Wahrnehmung suggeriert und nur ein schöner Einstieg nicht reicht (vgl. 0:24-2).
Um die Schülerinnen und Schüler zu motivieren, wird auf deren Wettkampfgeist aufgebaut. Es macht Spaß die Herausforderung zu schaffen, wer löst jetzt die Gleichung schneller und kommt damit ans Ziel. Dabei werden Reize und Belohnungen geschaffen, um auch diese rein technischen Elemente attraktiv zu gestalten (vgl. 40:17-1) und dann natürlich über die Anschaulichkeit.
Die Motivation der Schülerinnen und Schüler spielt eine große Rolle für Herrn H, er versucht diese herzustellen, indem Aufgaben gewählt werden, die die Schülerinnen und Schüler abholen und auch selbst motivierend wirken, „dass es, ja, dass sie dann einfach an der Stelle auch irgendwie so einen Aha-Effekt vielleicht haben, dass es durch so eine Formel oder durch so eine Vorgehensweise auf einmal dann auch logisch und einfach wird. Und viele haben ja dann auch das Erfolgserlebnis, wenn sie selber ohne Fehler dann auch mal das Ergebnis gefunden

haben. Und das ist dann immer so ein bisschen der Aha-Effekt so“ (1:08:00-1). Innermathematisch werden so Anreize gesetzt. Die Schülerinnen und Schüler sollen erkennen, dass wenn sie „strukturiert“ (1:08:39-1) vorgehen, die Regeln anwenden, dann auch zum Ziel kommen und es wird die Problemlösung ermöglicht (vgl. ebd.). Er formuliert das Ziel, dass möglichst ein Großteil der Schülerinnen und Schüler zu dieser Erkenntnis kommt (vgl. 1:09:06-1).
Selbstreflexion gilt für ihn nicht nur in Bezug auf die Lernenden als wichtig, sondern auch auf sich selbst. Sind die eigenen Unterrichtsstrategien zum Beispiel angemessen oder nicht (vgl. 1:17:09-1).

Grundsätzlich erkennt Herr H an, dass die Algebra für die Lernenden Arbeiten auf einem erhöhten Abstraktionsniveau bedeutet. Er ist sich weiterhin darüber bewusst, dass die Lernenden unterschiedliche kognitive Voraussetzungen mitbringen. Dies führt zum Beispiel dazu, dass er sich für die Verwendung von regelgeleiteten Verfahren ausspricht, da diese hilfreich für das Mittelfeld und die schwächeren Schülerinnen und Schüler sind. Zudem tragen sie zu dem durch ihn angestrebten Ziel bei, das strukturierte Vorgehen der Schülerinnen und Schüler zu fördern. Genauso wie die Einhaltung gewisser formaler Vorgaben das gründliche Arbeiten der Lernenden unterstützt.
Da die Algebra für ihn so komplex ist und er dadurch häufig nachsteuern muss, unterrichtet er dieses Gebiet eher lehrkraftzentriert, kombiniert lehrkraftzentrierte Phasen aber mit interaktiven, anschaulichen Aufgabenformaten. Dies ist seinen Vorstellungen zu erfolgreichem Lernen zuzuordnen. Dazu gehören neben der Aufgabenwahl und der Lehr-/Lernorientierung ein strukturiertes, binnendifferenzierendes Unterrichtsvorgehen, das am Kenntnisstand der Schülerinnen und Schüler orientiert ist und an ihr Vorwissen anknüpft. Gleichzeitig soll guter Unterricht die Lernenden zur Reflexion ihres Handelns anregen.
Entsprechend des zuvor formulierten Ziels, dass die Lernenden die Mathematik und insbesondere die Algebra nicht nur als Hilfswissenschaft zum Lösen von außermathematischen Problemen sondern auch deren eigenen Wert im innermathematischen Kontext begreifen sollen, verbindet guter Unterricht inner- und außermathematische Bezüge. Aufgabenstellungen auf rein abstrakter Ebene werden dabei mit einem konkreten Bezug verbunden (zum Beispiel dem Rückbezug auf konkrete Zahlen).
Seiner Haltung, dass Schulmathematik eher auf Anwendung als auf Herleitung ausgerichtet ist, wird seine Argumentation zugeordnet, manchmal Formeln (wie die pq-Formel) vorzugeben und die Schülerinnen und Schüler damit arbeiten zu lassen, als deren Herkunft herzuleiten.
Die Schülerinnen und Schüler zu motivieren und ihnen Freude am Unterricht zu vermitteln, ist das übergeordnete Kriterium guten Unterrichts. Wenn den Lernenden die entsprechenden Fähigkeiten und Fertigkeiten vermittelt werden (zum Beispiel durch ein reichhaltige Übungskonzept) und sie diese in der Bearbeitung inner- und außermathematischer Problemstellungen erfolgreich einsetzen können, sind die Voraussetzungen zur Erreichung dieses übergeordneten Ziels gegeben.
Herr H würde die als abstrakt gekennzeichnete Algebra gern curricular nach hinten verlegen, da er das kognitive Niveau der Lernenden als noch zu kindlich beschreibt, um diese begreifen zu können.
Er orientiert sich, außer im Fall des Unterrichtseinstiegs, am Lehrbuch.

6.8.6. Das Variablenverständnis von Herrn H

Nach Vorlage der Aufgaben orientiert an Malle, unterscheidet Herr H, dass in der ersten Aufgabe die Variable an die Stelle gesetzt wird, für die es keine Angabe gibt und eher in den Problemlösekontext gehört. Im zweiten Fall steht die Variable für einen Platzhalter, für den

reihenweise Zahlen eingesetzt werden; die Variable steht dann für die jeweilige Zahl. Die dritte Aufgabe bezeichnet er als Lösungsoperator. Und die Variable stellt die Lösung der Aufgabe dar. Sie ist die Lösung des innermathematischen Problems (vgl. 15:55-2). Damit sind bei ihm unterschiedliche Deutungsebenen erkennbar.
Die Einsetzungsaufgabe wird durch den Rechner überflüssig. Die erste Aufgabe ist komplexer und dient dem Einstieg ins Problemlösen und kommt am zweithäufigsten vor (vgl. 16:59-2-17:38-2).
Insgesamt wird die Variable als Unbekannte behandelt und eher in konkreten Sachzusammenhängen thematisiert, als etwas, das bestimmt werden soll. Dies leitet sich daraus ab, dass er die Platzhalteridee als zentral empfindet (vgl. Abschnitt 6.8.1).

6.8.7. Das Bild von Mathematik - Herr H

Das von Herrn H gehaltene Bild von der Mathematik klingt in seinen Vorstellungen zu den Zielen des Mathematikunterrichts bereits an. Er unterscheidet den Wert, der sich aus der, vor allem regelgeleiteten, schematischen Arbeit mit den mathematischen Instrumenten ergibt. Dieses trägt dazu bei, strukturiert zu denken. Auf einer anderen Ebene dient die Mathematik dazu inner- und außermathematische Probleme zu lösen. Das bezieht sich auf das Verständnis der Mathematik als Problemlöse- und Modellierungsinstrument.
Aus den Codierungen des Interviews ergibt sich eine vor allem durch die globalen Beliefs charakterisierte gleichzeitig schematische (14) und anwendungsorientierte (15) Sicht auf die Mathematik. Weniger stark ausgeprägt ist der Formalismus-Aspekt (9). Der Prozesscharakter der Mathematik wurde im Interview nicht codiert. Relativ gesehen bewegt er sich in Bezug auf die Skala Formalismus im oberen Drittel (Rang 2) und stimmt dieser eher zu, während er sich in Bezug auf die Skalen Anwendung (Rang 6) und Schema (Rang 4) im Mittelfeld befindet.
Die Auswertung des Fragebogens ergibt die stärkste Ausprägung in der Skala Anwendung (18). Weniger stark ausgeprägt ist der Formalismus-Aspekt (15). Am wenigsten stark ausgeprägt sind die Aspekte Schema (10) und Prozess (10).
Daraus ergibt sich die folgende Übersicht:

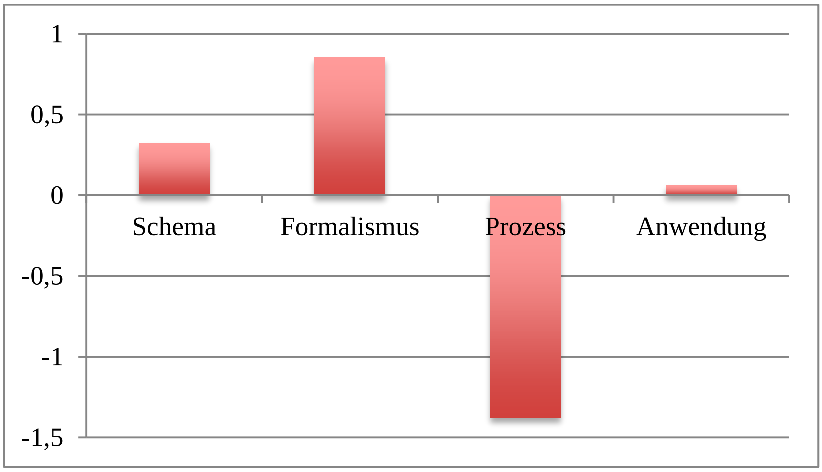


Abbildung 19: Das Bild der Mathematik - Herr H

Für die Bereiche Schema, Formalismus und Anwendung sind zwischen dem Interview und dem Fragebogen keine wesentlichen Unterschiede festzustellen. In Bezug auf die Mathematik als Prozess ist im Fragebogen eine stärker ausgeprägte Ablehnung festzustellen. Die ist möglicherweise dadurch zu begründen, dass die Beschreibung des tatsächlichen Unterrichts, die durch die rekonstruierten subjektiven Theorien abgebildet werden, eher durch didaktisch gewünschte und curriculare Vorgaben bestimmt zu sein scheint, die sich beim Ausfüllen des Fragebogens nicht durchsetzen. Das ist aber basierend auf der gegebenen Datenlage nicht endgültig zu entscheiden.

6.8.8. Ziel-Mittel-Argumentationen - Herr H

Tabelle 58: Inhalte des Algebra-Curriculums, Herr H

in Klasse 8: quadratische Zusammenhänge und Funktionen erkennen und zur Problemlösung nutzen

		Probleme lösen → mit mathematischen Hilfsmitteln (Gleichungen, etc.) Probleme aus den verschiedensten Bereichen, beschreiben, modellieren und lösen, interpretieren und validieren	→	Beweise als innermathematische Problemlösung nur sehr rudimentär und wenn dann lehrkraftzentriert
		↑		
		funktionale Zusammenhänge darstellen und erkennen	↔	Verknüpfen mit graphischen Anschauungen (Roboter, Koordinatensystem)
		↑		
anschauliche und möglichst eigenständige Befassung der SuS mit den geltenden Regeln	↔	Gleichungen und Äquivalenzumformungen (mit Hilfe der Waage)	↔	Kalkülaspekt, Strategievermittlung
		↑		
		Termumformungen	↔	Kalkülaspekt, Strategievermittlung, strukturiertes Arbeiten
		↑		
		Terme, Termstrukturen, Gleichwertigkeit von Termen (anschaulich und enaktiv - „Knack die Box“, Obstkorb), Variable dabei im Kontext verwendet	↔	Variable unter dem Gegenstandsaspekt, sehr anschaulich
		↑		
		intuitives Annähern an Variable, aufbauend auf die Platzhalteridee („Variable als das, wofür wir noch keinen Namen haben“)	↔	Variable als Unbekannte und unter dem Gegenstandsaspekt
		↑		
		Zahlenräume und die entsprechenden Rechengesetze und Rechenoperationen kennen lernen → Besonderheiten in den jeweiligen Zahlbereichen (Grenzen und Möglichkeiten) erlernen		

Tabelle 59: Ziele des Algebra-Curriculums, Herr H

!Beitrag zur Allgemeinbildung
(=gemeint ist, dass kausales Denken ein Bestandteil der Allgemeinbildung sein sollte)

Wenn die SuS kausale Denkstrukturen und eine Reflexivität entwickeln → **kann ein Beitrag zur Allgemeinbildung der SuS geleistet werden**

!kausale Denkstrukturen
(=die SuS können anfangen Probleme danach zu strukturieren, welche Ausgangssituation gegeben ist, welche Strategien ihnen zur Verfügung stehen, etc. und diese dann reflektieren und nutzen)

Wenn die SuS strukturiert und geordnet denken → **entwickeln die SuS kausale Denkstrukturen und Reflexivität**

!Struktur
!Ordnung
(=gemeint ist, dass die SuS durch die Anwendung von Strategien und Schemata geordnet vorgehen und dadurch zur Lösung der jeweiligen Aufgabe kommen)

!Oberstufe bewältigen
(=gemeint ist hier die auf schulische Inhalte bezogene Bewältigung der Sekundarstufe II)

Wenn man die Algebra inhaltlich so aufbaut wie beschrieben → **erlernen die SuS ein strukturiertes und geordnetes Denken**

!Behandlung algebraischer Inhalte

Wenn die SuS Terme und Gleichungen zur Lösung von Problemen und zur Verallgemeinerung dieser nutzen + **Wenn die SuS die Algebra als Hilfswissenschaft für andere Fächer und andere Teilgebiete der Mathematik nutzen** → **können sie die Oberstufe bewältigen**

!Probleme lösen
!Verallgemeinerung
(=gemeint ist, dass Terme und Gleichungen zur Problemlösung genutzt werden können und dass diese als Instrument zur Verallgemeinerung von Sachverhalten genutzt werden können)

!Algebra als Hilfswissenschaft
(=Algebra soll als Grundkenntnis verstanden werden, auf die die anderen Bereiche der Mathematik aufbauen und die als Hilfsmittel für u.a. andere Fächer genutzt werden kann)

Wenn die SuS die Terme und Gleichungen und die mit ihnen verknüpften Operationen als notwendige Grundlage verstehen + **Wenn die SuS das Interpretieren und Reflektieren von Ergebnissen erlernen** → **können die SuS Terme und Gleichungen zum Lösen und Verallgemeinern von Problemen nutzen** + **können die Algebra als Hilfswissenschaft für andere Fächer (Physik, Bio Wiwi) und andere Teilgebiete der Mathematik (Geometrie, Analysis) nutzen**

!Terme und Gleichungen
!notwendige Grundlage
(=gemeint ist, dass Terme und Gleichungen wie bei einer Sprache als die grundlegenden Strukturen - die Grammatik - verstanden werden, die zunächst verstanden werden müssen)

!Interpretieren
!Reflektieren
(=durch die Prüfung, ob Ergebnisse in den behandelten Kontext passen oder nicht, erlernen die SuS die Fähigkeit Ergebnisse nicht einfach zu akzeptieren)

Wenn man die Algebra inhaltlich so aufbaut wie beschrieben → **werden Terme und Gleichungen und die damit verknüpften Operationen als notwendige Grundlagen vermittelt** + **die SuS erlernen Ergebnisse zu interpretieren und zu reflektieren**

!Behandlung algebraischer Inhalte

Tabelle 60: Ziele des Mathematik-Curriculums, Herr H

														!Allgemeinbildung (=gemeint ist, dass die Mathematik allein durch die in ihr vermittelten Denkstrukturen einen Beitrag zur Allgemeinbildung darstellt)
												Wenn die Mathematik nicht nur als Hilfswissenschaft, sondern auch als Gelegenheit zur Erweiterung des eigenen Denkens verstanden wird	→	**kann die Mathematik ihren Beitrag zur Allgemeinbildung leisten**
												!Hilfswissenschaft !Erweiterung des Denkens (=gemeint ist, dass die Mathematik nicht nur als das Bedienen einer Maschine oder als Hilfe für andere Fächer verstanden wird, sondern als das wirklich Dahinterstehende - überhaupt die Problemstellung zu extrahieren, und erhaltene Resultat auch zu interpretieren und validieren und diese Denkweisen zu erkennen und zu nutzen)		
						Wenn die SuS lernen Probleme und Sachverhalte zu mathematisieren	+	**Wenn die SuS die ineinandergreifenden Strukturen der Mathematik erkennen**	+	**Wenn das logische und kausale Denken der SuS geschult wird**	→	**kann die Mathematik nicht nur als Hilfswissenschaft begriffen werden, sondern als Gelegenheit eine Erweiterung des eigenen Denken herzustellen**		
						!Probleme und Sachverhalte mathematisieren (=die SuS sollen lernen, durch die ihnen zur Verfügung stehende Mathematik ihre Umwelt zu beschreiben und Probleme in die mathematische Welt zu übersetzen)		!Struktur der Mathematik (=gemeint ist, dass sie erkennen, dass ein paar wenige Grundlagen ausreichen, um auf sie aufbauend ganz neue Bereiche zu entdecken und diese immer wieder zur Lösung von Problemen nutzen)		!logisches, kausales Denken (=die SuS können anfangen Probleme danach zu strukturieren, welche Ausgangssituation gegeben ist, welche Strategien ihnen zur Verfügung stehen, etc. und diese dann reflektieren und nutzen und diese Denkstrukturen gegebenenfalls in ihren Alltag übertragen)				
Wenn der Unterricht strukturiert gestaltet wird	+	**Wenn die mathematischen Grundfertigkeiten, wie z.B. die Rechengesetze, beherrscht werden**	+	**Wenn im Unterricht interessante, anschauliche und aktivierende Aufgaben und Anwendungskontexte aufgezeigt werden**	→	**können die SuS lernen Probleme und Sachverhalte zu mathematisieren**	+	**können die SuS die ineinandergreifende Struktur der Mathematik erkennen**	+	**kann das logische und kausale Denken der SuS geschult werden**				
!Struktur (=gemeint ist, dass der Unterricht die logische Struktur der Mathematik aufzeigt und vor allem auf ein strukturiertes Vorgehen der SuS Wert legt.)		!Grundfertigkeit (=gemeint ist die Beherrschung von Algorithmen und Schemata sowie Lösungsstrategien um damit auch immer die innermathematischen Strukturen und Vorgehensweisen zu verdeutlichen)		!interessante Aufgaben !Anschaulichkeit !Aktivierung (=gemeint ist, dass abstrakte Inhalte immer eine händische Komponente besitzen sollen. Die SuS sollen selbst mit neuen Lerngegenständen umgehen, diese ausprobieren und selbst nutzen. Dabei soll auf eine Schülernähe geachtet werden, um einen Bezug herzustellen)										

Tabelle 61: Das Lernen, Herr H

										!Oberstufe bewältigen		!Denken weiter entwickeln (=die SuS können durch diese neuen Denkstrukturen ihr eigenes Denken bereichern und dieses auch auf andere Lebensbereiche anwenden)
						Wenn die SuS lernen selbstständig und reflektiert zu arbeiten	+	**Wenn die SuS lernen, Probleme zu lösen**	→	**können die SuS die notwendigen Fertigkeiten zur Bewältigung der Oberstufe erlangen**	+	**können die SuS ihr eigenes Denken weiter entwickeln**
						!selbstständig und reflektiert arbeiten (=die SuS können durch die genaue Arbeit und die bewusste Strategiewahl selbstständig lernen zu reflektieren und Ergebnisse nach ihrer Sinnhaftigkeit bewerten)		!Probleme lösen (=die SuS können Strategien erlernen, Probleme nach der Ausgangssituation, möglichen Handlungsstrategien und möglichen Ergebnissen zu strukturieren und zu lösen)				
Wenn man die mathematischen Grundfertigkeiten, Strategien und Schemata beherrscht	+	**Wenn man exakt, genau und strukturiert arbeitet**	+	**Wenn der Unterricht es erlaubt zu diskutieren, sich aktiv einzubringen und sich anhand von anschaulichen, schülernahen Aufgaben auszuprobieren**	→	**können die SuS lernen selbstständig und reflektiert zu arbeiten und**	+	**lernen Probleme zu lösen**				
!mathematische Grundfertigkeiten !Strategien und Schemata (=gemeint ist, dass die SuS als Anhaltspunkt und Orientierung Schemata und Strategien erlernen und mit Termen und Gleichungen umgehen können. Es geht um das konkrete Umgehen mit Variablen und Termen - Wertbestimmung mit Hilfe von Strategien. Dazu ist gezieltes Training notwendig.)		!Exaktheit !Struktur !Genauigkeit (=die SuS sollen Aufgabenstellungen genau lesen, sich klar machen, wie sie vorgehen und die entsprechenden Strategien anwenden. Wichtig ist dabei gemäß der erlernten Strukturen vorzugehen.)		!Aktiv Einbringen !Anschauliche, schülernahe Aufgaben (=gemeint ist, dass die SuS selbst im Unterricht aktiv werden, z.B. bei Knack die Box selbst Ideen entwickeln und Bauklötze in die Hand nehmen.)								

Tabelle 62: Lehren von Algebra, Herr H

		!Verlegung der Algebra im Curriculum (=gemeint ist die flexible Themensetzung und die Verschiebung der Themen, sodass die Algebra später behandelt wird)															!Partizipation !Freude !Motivation (=Diese Art des Unterrichts erlaubt die größtmögliche Teilhabe, wobei die SuS Freude an den unterrichteten Inhalten entwickeln können)
Wenn man akzeptiert, dass die Algebra ein hohes Abstraktionsniveau erfordert	→	**wird die Algebra zeitlich so weit wie möglich nach hinten verlegt**									**Wenn der Unterricht die SuS mit den notwendigen Grundfertigkeiten ausstattet**	+	**Wenn den SuS die Möglichkeit gegeben wird, die Nützlichkeit der Algebra zu erkennen**	+	**Wenn die SuS Erfolgserlebnisse erreichen**	→	**können möglichst viele SuS motiviert und mit Freude am Unterricht partizipieren**
!hohes Abstraktionsniveau (=gemeint ist, dass der Sprung vom Konkreten zum Abstrakten, in Form von Variablen schwer verständlich ist und dass dies Berücksichtigung finden muss)											!notwendige Grundfertigkeiten (=den SuS muss das Handwerkszeug gegeben werden, die angestrebten Probleme bewältigen zu können, sodass die Hürde eher die Übersetzung der Inhalte ist und nicht die Lösung auf mathematischer Seite)		!Nützlichkeit (=gemeint ist, dass die SuS sowohl die innermathematische Nutzbarkeit der Inhalte für andere Fächer als auch die Nutzbarkeit der neuen strukturierten Denkwege im Alltag erkennen)		!Erfolgserlebnisse (=gemeint ist, dass die SuS durch die Bewältigung der Aufgaben mit Hilfe eines strukturierten Vorgehens Erfolge erleben können)		
			Wenn der Unterricht strukturiert, eher lehrkraftzentriert, mit einem Schwerpunkt auf Regeln gestaltet wird	+	**Wenn im Unterricht an das Vorwissen der SuS schülerorientiert angeknüpft wird**	+	**Wenn der Unterricht gleichzeitig einen rein mathematischen, als auch einen Anwendungsfokus legt, der mit einem hohen Aktivitätsgrad in den Übungsphasen und reflektierenden Handlungen verbunden wird**	+	**Wenn abstrakte Inhalte mit konkreten Aufgabenstellungen und leistbaren, anschaulichen Aufgaben verknüpft und auf einer aktivierenden Ebene vermittelt werden**	→	**wird der Unterricht die SuS mit den notwendigen Grundfertigkeiten ausstatten**	+	**wird den SuS die Möglichkeit gegeben die Nützlichkeit der Algebra/Mathematik zu erkennen**	+	**können die SuS Erfolgserlebnisse erreichen**		
			!Struktur !Frontalunterricht !Regeln (=den SuS werden angeleitet Regeln und Strategien an die Hand gegeben, an denen sie sich orientieren können und die ihr Arbeiten strukturieren. Zentrale		!Vorwissen !Schülerorientierung (=hier wird vor allem die Platzhalteridee der Variablen aufgegriffen, die bereits bekannt ist, aber auch an die Interessen der SuS unter der Frage, wo und wie, z.B. in Bezug auf unterschiedliche Darstellungsformen, können		!Mathematik !Anwendung !hoher Aktivitätsgrad !Übung !Reflexivität (=gemeint ist, dass die SuS die reine Mathematik und ihren Nutzen, der ohne Anwendungsbezug erzielt wird, neben den Anwendungsbeispielen sehen sollen. Gleichzeitig sollen die SuS in den Übungen zu Aktivitäten in Gruppenarbeiten etc. animiert werden und ihre		!Konkrete Aufgabenstellungen !leistbare Aufgaben !aktivierende Ebene (=gemeint ist, dass die SuS Aufgaben bekommen, die auf ein konkretes Ergebnis hinzielen, bei dem die Variable z.B. berechnet wird. Die Aufgaben sollen dabei die enaktive Ebene berücksichtigen, sodass die SuS selbst mit den Inhalten umgehen, und zumin-								

				Aspekte werden lehrkraftgeleitet festgehalten)		sie abgeholt werden)		Ergebnisse und Gedankengänge auf ihre Sinnhaftigkeit hin reflektieren)		dest in Teilen für alle SuS zu bewältigen sein)
Wenn man akzeptiert, dass die Algebra ein hohes Abstraktionsniveau erfordert	+	**Wenn man akzeptiert, dass die SuS mit unterschiedlichen Voraussetzungen an die Schule kommen**	→	**wird der Unterricht strukturiert, eher lehrkraftzentriert, mit einem Schwerpunkt auf Regeln gestaltet**	+	**muss an das Vorwissen der SuS schülerorientiert angeknüpft werden**	+	**wird der Unterricht gleichzeitig einen rein mathematischen, als auch einen Anwendungsfokus legen, der mit einem hohen Aktivitätsgrad in den Übungsphasen und reflektierenden Handlungen verbunden wird**	+	**werden abstrakte Inhalte mit konkreten Aufgabenstellungen und leistbaren, anschaulichen Aufgaben verknüpft und auf einer aktivierenden Ebene vermittelt**
!hohes Abstraktionsniveau (=gemeint ist, dass der Sprung vom Konkreten zum Abstrakten, in Form von Variablen schwer verständlich ist und dass dies Berücksichtigung finden muss)		!Unterschiedliche Voraussetzungen (=gemeint ist, dass es starke, schwache SuS gibt und ein Mittelfeld, die unterschiedliche Bedürfnisse im Unterricht haben. Die größte Gruppe bilden das Mittelfeld und die schwächeren SuS)								

6.8.9. Unterrichtsbeobachtungen und Klausurenanalyse - Herr H

Die erste Stunde beginnt mit den obligatorischen Kopf- und Wiederholungsaufgaben. Die Lernenden der siebten Klasse müssen blind über die Richtigkeit von getroffenen Aussagen entscheiden und im Falle von Zustimmung den Arm heben, bevor sie die Augen öffnen und sich dann vergleichen. Unklarheiten werden im Klassengespräch thematisiert.
Daraufhin wird zum Thema Flächenberechnungen übergeleitet. Zunächst wiederholen die Lernenden die Formel zur Berechnung der Fläche eines Parallelogramms für zwei fehlende Schülerinnen und Schüler. Dabei verwenden die Lernenden die Begriffe Breite und Länge. Als ein Schüler die Höhe im Dreieck als Strich durch die Mitte beschreibt, sagt Herr H: „Das hat auch einen Namen?".
Bei der Herleitung der Formel lässt Herr H die Lernenden ausführlich beschreiben, wie die Fläche des Parallelogramms auf die bekannten Dreiecksflächen zurückgeführt werden kann.
Der Hausaufgabenvergleich erfolgt strukturiert über eine „Partnerliste" [eine Form der Gruppenarbeit, Anm. JM], der durch ein Klingeln von Herrn H beendet wird. Als keine Rückfragen gestellt werden, gibt Herr H in Form eines Vortrags die nächste Aufgabenstellung bekannt: „Hier habt ihr eine Folie, die ihr kennt. (...) Ihr kennt den Aufbau des Arbeitsblattes. Ich habe euch auch entlastet und euch schon einmal Trapeze aufgezeichnet. (...) Wie versprochen, ihr bekommt alle zwei Trapeze zum Ausschneiden und versucht dann in Partnerarbeit die Aufgabe zu lösen. Die Aufgabenstellung kennt ihr". Nach der Bearbeitungsphase werden die Aufgabenlösungen anhand der Präsentation der Lernenden im Gespräch erläutert. Herr H hinterfragt die einzelnen Schritte und lässt diese mehrfach erklären. Schließlich wird die neue Regel im „Regelheft" festgehalten. Vorgegeben wird die Formulierung durch Herrn H. Schließlich gibt Herr H den Lernenden Aufgaben im Buch zur Vertiefung deren Bearbeitung gleichzeitig die Hausaufgabe darstellt.
In der zweiten beobachteten Unterrichtsstunde sollten die Lernenden die Höhe des Schulgebäudes mit Hilfe der zuvor erarbeiteten „Verhältnisgleichungen" bestimmen. Zu Beginn werden den Schülerinnen und Schülern Aufwärmaufgaben zu verschiedenen Themen gestellt, die dann allein gelöst und mit den jeweiligen Sitznachbarn besprochen werden.
Im Anschluss werden die Hausaufgaben im Klassengespräch besprochen. Herr H stellt die Aufgabe vortragend vor, legt die Gruppen fest, erklärt die Verwendung der erlaubten Hilfsmittel und teilt die Arbeitsblätter aus. Den Rest der Stunde arbeiten die Schülerinnen und Schüler selbstständig - erst im Klassenzimmer und dann auf dem Schulhof, um die Höhe des Schulgebäudes zu ermitteln.
Der beobachtete Unterricht steht in verschiedenen Punkten im Einklang mit den rekonstruierten subjektiven Theorien. So gehen die Schülerinnen und Schüler häufig enaktiv mit den Unterrichtsgegenständen um und werden zu eigener Aktivität angeregt. Herr H strukturiert den Unterrichtshergang vor und achtet auf die Verwendung der Fachbegriffe. Ein deutlicher Widerspruch mit den rekonstruierten subjektiven Theorien ist nicht festzustellen.
Die Analyse der Klausur von Herrn H erfolgt nicht (vgl. Kapitel 5.9).

6.9. Herr I

Herr I[110] ist seit acht Jahren als Lehrer an einem niedersächsischen Gymnasium tätig. Er ist der IT-Beauftragte der Schule und arbeitet mit dem Lambacher Schweizer. In Bezug auf den Rechner, wird gerade der Wechsel von graphikfähigen Taschenrechnern zu Computer-Algebra-Systemen durchgeführt.

Zu bemerken ist, dass Algebra von Herrn I als sehr abstraktes Thema betrachtet wird, bei dem den Schülerinnen und Schülern natürliche Grenzen gesetzt sind. Genauer gesagt, verstehen sie nicht, „was sind diese Symbole, was bedeutet das, wie hängen Sachen zusammen“ (1:33-1). Es ist für die Schülerinnen und Schüler eine Hürde, wenn es „abstrakt symbolisch wird oder so. Also sobald man mit Variablen anfängt, bei Termen, insgesamt, kommt ganz schnell, kommen ganz schnell viele Schüler eben an die Grenze, dass sie sagen, sie verstehen das nicht mehr“ (1:33-1).

Dazu passt sein Verständnis dessen, wie die Schülerinnen und Schüler die Terme wahrnehmen: „[D]ann eben auch der Umgang mit diesen abstrakten Elementen dann wirklich damit zu rechnen und damit zu arbeiten, umzuformen. Das ist dann mit einem langweiligen Ding dann auch noch langweilige Dinge tun. (...) eben auf dieser Abstraktionsebene noch zu arbeiten und vielleicht tatsächlich einfach nur stupide Aufgaben zu rechnen, Termumformungen zu machen ohne irgend einen inhaltlichen Bezug, was dann noch mal eine Stufe langweiliger ist“ (59:27-1). „[B]ei den meisten kommt es eben nicht dahin, dass sie sagen, das ist ein, das ist eine schöne Darstellung. Ja, das macht Spaß damit die Welt zu beschreiben und Probleme zu lösen, sondern es ist eine mühsame qualvolle Art mit diesen Symbolen der Mathematik irgendwie rumzurechnen“ (53:13-1). Algebra charakterisiert er als das trockenste Thema in der Sekundarstufe I und als das Thema, bei dem die Schülerinnen und Schüler das Gefühl hätten, etwas vollständig Neues zu lernen, was zusätzlich zur Überforderung führt (vgl. 7:42-2).

Er selbst hatte kaum Algebra im Studium und hat sich dann gewundert, dass sie in der Schule einen so zentralen Stellenwert besitzt. Dabei stellt er fest, dass die fachliche Seite für ihn nicht das Problem darstellt, wohl aber die Didaktisch-methodische (vgl. 0:17-1).

Es stellt ein institutionelles Problem dar, dass die Algebra sehr wichtig ist, dass aber nicht anerkannt wird, dass das Thema sehr schwierig für die Schülerinnen und Schüler ist, insofern, als dass sie „sich auf diesen Teil der Mathematik wirklich so einlassen, dass sie das Gefühl haben, sie machen was Sinnvolles“ (55:47-1). Hier wird deutlich, dass es Herrn I um die Sinnstiftung im Unterricht geht und darum, die Voraussetzungen und Bedürfnisse der Schülerinnen und Schüler anzuerkennen.

In seiner Argumentation wird eine starke Prägung durch das Lehrbuch deutlich (vgl. 40:52-1, 1:33:02-1, 1:29:40-1, 44:13-1, 6:46-1).

Besonders ist seine Begeisterung für die Mathematik, die deutlich spürbar ist. Er sieht sie als eigenen, autonomen Bereich und erkennt sie in seiner Umwelt immer wieder, verknüpft sie mit seiner Umwelt und kann sich auch in die Mathematik vertiefen und sich losgelöst von allem mit der Mathematik auseinandersetzen. Sie ist für ihn schlüssig, ein eigenes Konstrukt (vgl. 17:32-2).

Sein Verhältnis zum Rechner ist gespalten: Er ist grundlegend der Meinung, dass man den Schülerinnen und Schülern Dinge beibringen sollte, die sie auch später noch benötigen. Dies trifft auf den Rechner nicht zu, denn wenn die Schülerinnen und Schüler zu Hause sind, arbeiten sie eher mit dem Laptop oder dem Tablet als mit dem Rechner. Das Display ist zu klein für Tabellenkalkulationen und zur Anschauung bieten sich eher die Computer in den Computerräumen an (vgl. 1:59-2). Das Ideal wäre, wenn die Schülerinnen und Schüler wüssten, wozu sie den Rechner wann einsetzen und ihn bewusst nutzen, an Stellen wo es Sinn hat und

[110] Die Aufnahme ist zweigeteilt. Die Zahl nach dem Bindestrich in den Zeitangaben verweist auf den jeweiligen Abschnitt.

ihn nicht pauschal einsetzen. Für Herrn I besteht ein Widerspruch zwischen dem, wie er den Taschenrechnereinsatz sinnvoll findet und dem, was die Schule verlangt (vgl. 5:13-2).

6.9.1. Was sind die Inhalte des Algebraunterrichts?

Die Schülerinnen und Schüler sollen sicher mit gewissen Werkzeugen umgehen können in den Zahlbereichen. Gemeint ist dabei das „Rechnen ganz allgemein" (32:42, vgl. 32:11-1), weil es daran oft scheitert, aber auch „Termumformungen müssen sie sicher können" (48:14-1), wobei er dort bereit ist, flexibel auf den Grad der Formalisierung einzugehen. Dies variiert er je nach Lerngruppe. Dort ist er ambivalent und bezeichnet die Frage nach dem Grad an Formalisierung als „eigene Baustelle" (ebd., vgl. 50:04-1). Der Grad an Formalisierung ist Herrn I nicht so wichtig. Wenn die Schülerinnen und Schüler zeigen, dass sie die Regeln richtig anwenden, dann fällt es ihm schwer, Punkte für die fehlenden formalen Zeichen abzuziehen (vgl. 51:01-1).

Variablen werden im Zusammenhang mit Termen über das Waagemodell eingeführt, unter der Leitfrage: „Was entspricht der Variablen?". Hier möchte Herr I wie bei Termen und Gleichungen eher auf einer abstrakten Ebene argumentieren. Einfache Aufgaben gelingen den Schülerinnen und Schülern dabei immer sehr gut und auch das Rechnen mit diesen, sobald aber Vorfaktoren hinzukommen, wird es schwierig (vgl. 36:47-1). Er unterscheidet, dass das Einsetzen für Variablen schneller funktioniert, dass aber das Verständnis, dass 3x nicht nur drei Mal x bedeutet, sondern das Dreifache einer beliebigen Zahl, bei nicht vielen Schülerinnen und Schülern ankommt (vgl. 37:59-1). Die Bedeutung der Variablen wird jeweils im Kontext bestimmt und auch, welche Werte dabei in Frage kommen können (vgl. 39:04-1). Dabei können die Schülerinnen und Schüler den Unterschied erkennen, dass einige Ergebnisse rechnerisch nicht im spezifischen Aufgabenkontext Sinn machen (vgl. 39:56-1). Variablen erklärt er den Lernenden orientiert am inhaltlichen Vorgehen des Lehrbuchs, mit der Begründung, dass dieses einheitlicher und so auch für fehlende Schülerinnen und Schüler nachvollziehbar ist. Gibt es dann dazu Nachfragen werden eigene Erläuterungen hinzugefügt, beziehungsweise Beispiele untermauernd eingesetzt (vgl. 40:52-1).

Terme werden über ein Beispiel, bzw. viele Beispiele, eingeführt. Bei der Bearbeitung des Beispiels hofft er, „dass Schüler da sind, die sagen, das kann man dann aber doch allgemein irgendwie formulieren und den ersten Term selber an die Tafel schreiben" (1:24:23-1). Danach soll jemand sehen, wie es zu zusammenzufassen wäre. Dann wird die Bedeutung der Variablen im Term geklärt. Anschließend würde geübt werden (vgl. ebd.). Die Termstrukturen kommen vor den Termumformungen. Dies ist eines der großen Probleme, was „bedeutet das wenn da x steht, xy steht" (44:13-1). Dies muss den Schülerinnen und Schülern zunächst klar werden. Dazu werden Unterstreichungen vorgenommen und die ausführliche Schreibweise des Multiplikationszeichens.

Termumformungen unterrichtet Herr I mit Hilfe des Waagemodells. Hier betont Herr I die Bedeutung des Gleichheitszeichens, insofern als dadurch auf beiden Seiten die gleichen Umformungen durchgeführt werden müssen, um die Gleichheit zu wahren. Term- und Gleichungsumformungen werden gleichzeitig bearbeitet. Zusätzlich fügt er dann Äquivalenzpfeile ein, weil das eben innermathematisch ist und so behandelt werden soll. Unterstützend wird die Idee der Waage noch hinzugezogen (vgl. 1:25:25-1).

Herr I betrachtet Termumformungen „zwangsweise" (45:59-1) als entscheidendes Thema im Algebraunterricht. Sie bilden eine Grundlage, die aber sehr abstrakt ist, da „kann man unendlich viel Zeit reinstecken und trotzdem merkt man dann zum Beispiel in der Klassenarbeit, dass (...) dieses Termumformen bei vielen (...) einfach [eine] abstrakte Geschichte ist. Und das ist tatsächlich in der Oberstufe immer noch so. (...) dieses Verständnis dafür, was ist gleichartig, was darf ich wie auf die andere Seite bringen, das fehlt. Ganz schwieriges Thema" (ebd.).

Gleichungen werden im Anschluss oder direkt in Kombination mit den Termumformungen behandelt, das „war nach fünf Minuten erledigt. Ein Term, der ein Gleichheitszeichen erhält, ist eine Gleichung“ (1:27:30-1). Die Regeln zum Lösen einer Gleichung basieren auf dem zuvor im Zusammenhang mit den Termen Gelernten (vgl. 1:28:07).
Bei den Anwendungsaufgaben geht es ihm dann darum zu üben, was bedeutet der Term. Welche Informationen liefert dieser? „[J]etzt nehmt mal nur dieses (...) Termaufstellen in den Blick. Wir wollen gar nicht die Lösung wissen (...) aber wir gucken uns jetzt mal an (...) was kann man in dieser Aufgabe wirklich an Information für so einen Term rausziehen“ (vgl. 1:36:33).
Zudem sollten die SuS lernen zu abstrahieren und zu verallgemeinern. Die Bindung an spezielle Inhalte spielt dabei keine Rolle (vgl. 1:21:45-1): „Aber woran ein Schüler zeigt, dass er gut rechnen kann, das ist mir egal. Und woran er zeigt, dass er in der Lage ist, wirklich mathematisch zu abstrahieren, das ist mir völlig egal“ (ebd.). In diesem Zusammenhang schlägt er vor, sich mehr auf die Prozesse zu konzentrieren, die zur Erarbeitung der Inhalte führen, als viele konkrete Inhalte oder Anwendungen zu bearbeiten: „Wenn Schüler zum Beispiel bestimmte Herangehensweise an Probleme wirklich einüben, dann erarbeiten die sich ganz oft auch Inhalte ganz schnell selber, da reicht eine Seite im Buch und eine halbe Stunde und dann haben die diesen Inhalt verstanden. Und insofern ist es schon eine Entwicklung, die ich merke, wie kriegt man das hin, sich von den Inhalten gelöst trotzdem auf dem Weg zu befinden, der am Ende einen abiturfähigen Schüler hinterlässt“ (1:21:45-1).
In Bezug auf die Algebra nimmt er von sehr anschaulichen Darstellungsweisen im Unterricht Abstand, wie der Waage zur Veranschaulichung von Gleichungen, weil „man kann es ruhig abstrakt machen, denn es ist eine abstrakte Sache. Und es hilft, glaube ich, oft nicht, wenn das künstlich (...) verbildlich[t]“ (36:47-1) wird.
Das Beweisen spielt für ihn eine besondere Rolle, weil die Klarheit und die Struktur der Mathematik dort verdeutlicht werden. Diese wird als ein einzigartiges System aus bestimmten Anlagen begriffen, innerhalb derer Schemata aus Voraussetzungen, Behauptungen aufgebaut und erklärt werden können, in dem eine logische, klare Struktur herrscht, die auch aufeinander aufbaut (vgl. 30:49-1). Dies spricht aber nur wenige Schülerinnen und Schüler an, daher setzt er das Beweisen zur Binnendifferenzierung für die besseren Schülerinnen und Schüler ein. Diese können dann auch allein beweisen und Beweise nicht nur nachvollziehen. Grundsätzlich sollten aber alle Schülerinnen und Schüler einfach Beweise führen können (vgl. 10:06-12:14-1). Hierbei wird auch auf Nachfrage kein Beispiel genannt. Die Ordnung zu vermitteln, dass es um Strukturen geht, ist ihm sehr wichtig (vgl. 1:16:20-1).
Zur Einführung von quadratischen Gleichungen schreibt er eine quadratische Gleichung an und fragt nach den Besonderheiten. Dann soll überlegt werden, wo die Schülerinnen und Schüler an ihre Grenzen stoßen (vgl. 1:28:30-1).
Die Schülerinnen und Schüler brauchen das Training im Kopfrechnen, deshalb stellt er häufig Kopfübungen (vgl. 1:59-2). Wenn er den Rechner einsetzt, dann erwartet er eine ausführliche Dokumentation des Rechenwegs, denn die Ideen der Schülerinnen und Schüler sollen nachvollziehbar bleiben (vgl. 5:13-2).

Herr I setzt die Beherrschung der Rechenregeln und -gesetze in den bis dahin bekannten Zahlenräumen voraus.
Zunächst werden die Variablen über den Einsetzungsaspekt im Kontext des Waagemodells eingeführt, indem danach gefragt wird, für welche einzusetzende Zahl ein Gleichgewicht entsteht. Anschließend werden sie im Sachkontext verwendet. Dort werden verschiedene Beispiele betrachtet, bei denen die Lernenden selbst die Verwendung der Variablen und die Notwendigkeit Terme aufzustellen, erkennen sollen. Dort geht es um das Abstrahieren von Sachsituationen. Hier wird die Variable als Unbestimmte verstanden, die zur Verallgemeinerung von Sachsituationen genutzt wird. Wichtig ist Herrn I sowohl die inhaltliche Definition

der Variablen („Wofür steht die Variable hier?“) als auch ihre strukturelle Bedeutung (In dem Sinn: Hier wird das Dreifache einer beliebigen Zahl gesucht.). Daran anschließend werden die einzelnen Termstrukturen untersucht, z.B. die Gleichartigkeit von Termen, die Erarbeitung von Regeln zum Ordnen der Terme, etc. Hier wird die Variable unter dem Kalkülaspekt betrachtet.
Auf dieser Grundlage werden die Regeln für das Term- und Gleichungsumformen behandelt. Im Normalfall ist es Herrn I wichtig, eine formal korrekte Notation zu nutzen, allerdings ist diese für ihn verhandelbar - je nach Bearbeitung der Lernenden.
Schließlich ist das unterrichtliche Ziel neben dem rein mathematischen, formalen Umgehen mit den algebraischen Werkzeugen (Terme, Variablen, Gleichungen) das Problemlösen und die Abstraktion von Sachsituationen. Herr I legt sehr viel Wert auf die Prozesse des Reflektierens, Interpretierens, Ordnens und Strukturierens (vgl. Ziele des Mathematikunterrichts).
Das Beweisen spielt eine eher untergeordnete Rolle. Herr I strebt dies zwar an, um die Strukturen der Mathematik zu verdeutlichen, weist aber gleichzeitig darauf hin, dass die selbstständige Beweisführung nur als Förderinstrument für die besseren Schülerinnen und Schüler eingesetzt wird.
Kopfübungen gehören zum typischen Unterricht.
In seinen algebraspezifischen inhaltlichen Ausführungen wechseln sich formale, innermathematische und anwendungsorientierte, formal gelockerte Ansichten ab (vgl. 6.9.2).

6.9.2. Was sind die Ziele des Algebraunterrichts?

Das Ziel von Herrn I ist es, seine Begeisterung auf die Schülerinnen und Schüler zu übertragen. Speziell für die Algebra, bzw. die Mathematik[111] möchte er, dass die „Schüler sagen, sie haben wirklich Spaß damit sich, sich wirklich zu lösen von dieser Erwartung, dass das irgendeine, irgendwie anschaulich sein muss oder so. Sondern wirklich sich darauf mal einzulassen, zu sagen Mathematik kann auch einfach mal, ja, wie man’s von außen betrachtet, trocken sein“ (52:41-1).
Zentral ist, dass die Schülerinnen und Schüler die Sprache der Algebra erlernen. Sie ist die „abgekürzte Sprache“ (1:33-1) der Mathematik. Aber sie bildet eben die Grammatik für diese Sprache[112] (vgl. 3:29-1, 13:14-2). Diese Sprache muss gesprochen werden. Dazu werden einige notwendige Vokabeln benötigt, wie zum Beispiel grundlegende Rechenfertigkeiten (vgl. 28:25-1, vgl. 52:40-1). Die Grundlagengrammatik, wenn in anderen Bereichen auch nicht immer sichtbar, wird in der Algebra erlernt und die Ausgestaltung, wie „blumig“ oder „schön“ gesprochen wird, das spielt die geringere Rolle, aber für das Sprechen-Können, sorgt die Algebra (vgl. 13:14-2).
Den Kern der Algebra stellt für Herrn I das Abstrahieren dar. Er sieht dabei zwei Prozesse: Die Verbindung, beziehungsweise den Übergang von nicht-mathematischer zur mathematischen Welt und das Sich-Bewegen in der mathematischen Welt, beziehungsweise den Übertrag von Ergebnissen aus der mathematischen Welt in die nicht-mathematische Welt. Bei dem erstgenannten Prozess ist es wichtig, die Strukturen in der Welt zu erkennen und diese abstrahieren zu können. Dazu dient die Algebra in erster Linie. Erst in zweiter Linie soll mit diesen Erkenntnissen argumentiert werden (dies betrifft den zweiten Prozess) (vgl. 28:25-1). Die Algebra hat das Potenzial die Welt beschreiben zu können und Probleme zu lösen (vgl. 53:13-1). Dies ist ihm auch wichtiger als die reinen Rechenfertigkeiten, denn das können auch

[111] Er macht in dieser Frage keinen Unterschied zwischen Algebra und Mathematik, obwohl nach dem Algebraunterricht gefragt worden war.
[112] Dabei stellt er den analytischen Blick auf die Grammatik einer Anwendungsorientierung im Mathematikunterricht gegenüber. „Also ist das eine anwendungsorientierte Wissenschaft oder ist das wirklich, das wäre eher so meine Richtung, ein ganz bestimmter Blick auf die Welt“ (3:29-1).

Computer, aber die Ergebnisse zu interpretieren und zu deuten und den Sachverhalt zunächst berechenbar zu machen (durch Abstraktion), das ist die Leistung der Schülerinnen und Schüler. Dies macht die Algebra für die Schülerinnen und Schüler interessant (vgl. 1:35:21-1).
Weiterhin trägt die Algebra dazu bei, die Struktur und Klarheit im Kopf der Schülerinnen und Schüler zu fördern, indem sie zum Beispiel die Termstrukturen aufschlüsseln, ordnen, systematisieren und lösen (vgl. 1:01:03-1).
Was aus der Sicht von Herrn I hängen bleiben wird, beziehungsweise was die Schülerinnen und Schüler auch in Zukunft noch brauchen werden, ist die Fähigkeit Aufgabenstellungen detailliert auseinander zu nehmen und zu lesen. Die Fähigkeit dabei auch schwierige Sätze zu stückeln, sortieren und so zu verstehen, erlernen sie am ehesten in der Algebra. Und dabei weniger in der Bearbeitung von Anwendungsaufgaben als vielmehr in der Arbeit an Termen, also dass die Schülerinnen und Schüler „im Kopf so einen Link herstellen und sagen, also einen komplizierten Sachverhalt auseinander nehmen und ihn für mich verständlich zu machen, das ist eher was, was praktisch so einem Auflösen eines Terms entspricht als hier irgend so eine Vorgartenaufgabe“ (52:41-1).
Optimal ist es, wenn die Lernenden in die Lage versetzt werden, souverän mit der Algebra umgehen zu können. Gemeint ist, dass sie also unabhängig von der Aufgabe einen Weg finden, die algebraischen Aspekte lösen zu können. Die Herausforderung liegt dann eher in der Mathematisierung, als im Ausrechnen oder in der algebraischen Arbeit. Idealerweise werden dann aus algebraischen Formulierungen Erkenntnisse über die verwendeten Variablen gezogen (Ist das 4fache von...). Herr I schränkt allerdings ein, dass dieses Ziel nicht von vielen Schülerinnen und Schülern erreicht wird (vgl. 55:47-1).

Herr I versteht die Algebra als Grammatik der mathematischen Sprache. Um sie zu erlernen, muss diese genutzt (gesprochen) werden.
Zunächst soll der Algebraunterricht den Lernenden die grammatikalischen Regeln der neuen Sprache vermitteln. Weiterhin erkennen die Schülerinnen und Schüler die Verbindung zwischen der mathematischen und nicht-mathematischen Welt und verstehen, dass es möglich ist konkrete Alltagsprobleme auf eine mathematische Ebene abstrahieren zu können.
Die Algebra dient in der Folge als Instrument diese Außenwelt mathematisch zu beschreiben und die algebraischen Werkzeuge zu nutzen, um diese Situationen mathematisch zu bearbeiten. Ein verständiger Umgang mit den Variablen, Termen und Gleichungen - gemeint ist, dass die Strukturen zwischen ihnen und ihre jeweilige Bedeutung begriffen werden - führt dazu, die erzielten Ergebnisse wieder in die Außenwelt transferieren zu können.
Im Zuge dessen wird den Lernenden eine strukturiertere Sicht auf die Welt vermittelt, indem sie lernen zu analysieren, zu ordnen und zu strukturieren. Herr I beschreibt diese Tätigkeiten als zentral in der Arbeit mit den Termen und Gleichungen.
In der Folge können die Schülerinnen und Schüler Algebra als wesentliche Grundlage des mathematischen Arbeitens erkennen (insbesondere auch für die Mathematik der Oberstufe) und sie können Spaß und Freude im Umgang mit der algebraischen Sprache entwickeln.
Es besteht ein Widerspruch: Algebra soll einmal zentral als Sprache mit den geltenden Regeln vermittelt werden (vgl. Abschnitt 6.9.1). Außerdem sollen im Algebraunterricht Strategien zur Wissensaneignung erlernt werden und ebenfalls wird das Kernziel angegeben, dass die Schülerinnen und Schüler anhand von Anwendungskontexten abstrahieren und interpretieren können sollen. Obwohl Herr I gleichzeitig sagt, dass er das Arbeiten auf einer rein abstrakten Ebene gern forcieren würde und die Bindung an konkrete Anwendungen nicht als elementar empfindet.

6.9.3. Was sind die Ziele des Mathematikunterrichts?

Mathematik für sich genommen soll den Lernenden Spaß machen und „Algebra ist zu viel, das macht Schülern keinen Spaß und Schule muss Spaß machen“ (55:47-1).
Als ein Ziel der mathematischen Ausbildung wird dennoch die Algebra als ein „Herzstück der Mathematik“ (ebd.) bezeichnet und wenn man dieses Thema reduziert, dann ist Herrn I nicht klar „was von der Mathematik übrig bleibt“ (ebd.). Er führt eine Grundsatzdiskussion darüber, ob dem Spaß der Schülerinnen und Schüler die elementaren Inhalte der Mathematik, wenn sie auch abstrakt sind, geopfert werden sollen[113], „damit’s dem Schüler mehr Spaß macht und zu besseren Ergebnissen führt“ (ebd.) oder ob gewisse abstrakte Dinge einfach abstrakt unterrichtet werden müssen, weil es abstrakte Inhalte sind (vgl. 36:47-1). Dazu gehört zum Beispiel die Algebra, die er mit einer Sprache in einem fremden Land vergleicht. Herr I zieht die Freude dabei daraus, dass sich in dieser neuen Sprache ausgedrückt werden kann. Die Schülerinnen und Schüler sollen daran eine Begeisterung entwickeln (vgl. 55:47-1, vgl. 52:41-1, 25:58-1). Seine eigene Begeisterung zu teilen, fällt ihm schwer: „Ich bin gestern, als ich dann hier war, an diesen Glaskästen [gemeint ist die Modellsammlung des Mathematischen Instituts der Universität Göttingen, Anm. JM] vorbeigegangen und habe gesagt, was Leute sich mit Kurven beschäftigen können. Und dann denke ich in diesem Bereich, um Schülern klar zu machen, dass das in irgendeiner Form relevant ist, ist extrem schwer“ (25:58-1).
In diesem Kontext plädiert er für Ehrlichkeit den Schülerinnen und Schülern gegenüber: „Und das immer wieder zu versuchen, eben Begeisterung zu wecken und die Relevanz der Mathematik irgendwie aber auch ehrlich zu sein, was das angeht. Eben nicht zu verkaufen, ihr könntet damit euer Vorgartenbeet ordentlich begrünen, sondern zu sagen, ihr lernt damit einen Blick auf die Welt, der ein ganz einzigartiger ist“ (25:58-1).
Für ihn existiert der Nutzen der Mathematik mehr oder weniger auf einer Meta-Ebene. Er wird nur indirekt sichtbar. Im Mathematikunterricht selbst sind zwar Aufgaben lösbar, das ist ein direkter Nutzen (vgl. 5:45-1), aber darüber hinaus bringt die Mathematik zum Beispiel ein „Erkennen von Strukturen“ (ebd.) oder das „Abstraktionsvermögen“ (ebd.) und ganz allgemein die Eigenschaft mit sich: „[J]e sicherer ich mich in der Mathematik bewege, umso effizienter kann ich sie dann auf verschiedene Problemstellungen anwenden“ (ebd.).
Die Schülerinnen und Schüler sollen Spaß am Mathematikunterricht entwickeln. Sie sollen Mathematik als „angenehm“ empfinden (vgl. 32:42-1).
Die Schülerinnen und Schüler sollen einen speziellen Blick auf die Mathematik bekommen, der die Tatsache umschließt, dass Mathematik weit mehr ist, als bloßes Ausrechnen (vgl. 32:42-1, 3:29-1). Dies beinhaltet, dass die Lernenden sagen, „sie haben wirklich Spaß damit sich, sich wirklich zu lösen von dieser Erwartung, dass das irgendeine, irgendwie anschaulich sein muss oder so. Sondern wirklich sich darauf mal einzulassen, zu sagen Mathematik kann auch einfach mal, ja (...) trocken sein“ (52:41-1). Diese Anschauung bedeutet eine eigene Spannung. Algebra ist damit eng verknüpft (vgl. ebd.). Zudem sollte diese Perspektive variabel sein, das heißt die Schülerinnen und Schüler sollen, „in welchem Kontext auch immer (...) sagen, es gibt eine mathematische Perspektive auf Probleme, auf Gegebenheiten und ich kann diese Beziehung herstellen“ (11:50-1). Im besten Fall erkennt man dann Strukturen wieder und kann auf dieser Basis besser Probleme lösen und diese auch anderen Menschen, in einer

[113] Genau in dieselbe Richtung geht die Diskussion in (14:07-2). Dort stellt er die Frage, wenn Schule „naheliegen“ muss, dann hat die Mathematik als etwas Abstraktes keine Berechtigung mehr. Er argumentiert: „Der Schüler macht den ganzen Tag sinnlose Sachen, Erwachsene auch. Dann kann die Mathematik ruhig auch dabei sein“ (ebd.). Die Schülerinnen und Schüler sind seiner Ansicht nach dem offen gegenüber. Sein Appell an dieser Stelle ist, dass man den Schülerinnen und Schülern keine falschen Erwartungen vermitteln soll. Es geht in der Algebra um das Erlernen einer neuen Grammatik und um das Erlernen einer Wissenschaft in „Reinform“, die ihren Platz im Bildungswesen haben sollte, auch wenn sie schwer ist, aber dann müsste sich das Bewertungssystem ändern (vgl. ebd.).

nicht-mathematischen Welt, vermitteln. Genau dann hat die Mathematik ihren Beitrag im Leben der Schülerinnen und Schüler geleistet (vgl. ebd.). Zugleich möchte er die Schülerinnen und Schüler natürlich zum Abitur befähigen (vgl. 1:21:45-1): „Also irgendwie Abi schaffen. Genug Punkte für's Abi bekommen" (1:04:46-1).
Darüber hinaus möchte Herr I die Verbindungen zwischen den einzelnen Themengebieten der Mathematik und ihre jeweilige Verknüpfung aufzeigen (vgl. 9:46-2).
Die Mathematik als System sui generis sollte verstanden werden (s. Ausführungen zum Beweisen unter Inhalt).

Herr I sieht einen Widerspruch zwischen den Zielen des Mathematikunterrichts, wie sie aus seiner Sicht institutionell gewollt sind und seinen individuellen Zielen.
Gemeinsam ist beiden Argumentationssträngen, dass die Grundlage für die Erreichung jeglicher mathematischer Lehrziele die Begeisterung der Lehrkraft ist. Herr I drückt seine Begeisterung für die Mathematik aus und empfindet dies als grundlegend dafür, dass dieser Funke auf die Lernenden übergehen kann. Auch das Ziel, dass der Mathematikunterricht die Lernenden in finaler Hinsicht auf das Abitur vorbereiten soll, ist beiden Strängen ähnlich. Darüber hinaus finden sich aber keine Gemeinsamkeiten.
In der extern geprägten Sicht auf die Ziele des Mathematikunterrichts wird die Mathematik anhand von künstlichen, vermeintlich lebensnahen Anschauungsbeispielen und mit einem Verzicht auf zu formalistische Darstellungen unterrichtet. Dieser Theorie folgend, entwickeln die Lernenden „Spaß" am Unterricht und empfinden die mathematischen Inhalte als nah an ihrem tatsächlichen Leben. Das wiederum führt zu besseren Noten im Mathematikunterricht.
Auf seiner individuellen Zielebene, wird die Mathematik als System sui generis verstanden, das als ein in sich schlüssiges System mit eigenen Regeln begriffen wird. Erkennen die Lernenden diese Strukturen und Regeln, können sie ihre Denkstrukturen weiterentwickeln, sodass diese an Klarheit und Struktursinn gewinnen. Zudem begeistern sich die Schülerinnen und Schüler für dieses Arbeiten in dem neuen System. Sie lassen sich darauf ein, auf einer abstrakteren Ebene zu denken und zu operieren, die weniger durch konkrete Anschauungsbeispiele geprägt ist. Gelingt dies, können sie insgesamt eine neue Perspektive auf die Welt erlangen, Situationen anders wahrnehmen und diese Wahrnehmung im optimalen Fall auch ihren Mitmenschen kommunizieren.

6.9.4. Wie gelingt erfolgreiches Lernen?

Er unterscheidet die Lernenden in die guten und die schlechten Schülerinnen und Schüler. Die Unterscheidung in gute und schlechte Schülerinnen und Schüler hat Auswirkungen darauf, wie die Lernenden Mathematik und Algebra bewerten und was sie erreichen können, werden aber nicht als Begründungen für Planungsentscheidungen herangezogen.
Die guten Lernenden empfinden die verkürzte Schreibweise der Algebra als toll und partizipieren dann. Die anderen hingegen sagen: „Ich verstehe das nicht und ich kann das und will das auch nicht. Das ist mir zu abstrakt. Und zu fremd" (1:33-1).
Dabei argumentiert er aufbauend auf seiner Ansicht, dass die Algebra die Grammatik der mathematischen Sprache ist, dass einige Schülerinnen und Schüler so wie beim Erlernen einer Sprache das nötige Sprachgefühl besitzen und andere nicht. Diejenigen Lernenden, die es nicht besitzen, werden nie einen gut klingenden Satz hinbekommen. Für diese ist es das Ziel, sie „Klassenarbeits-fest zu bekommen" (14:53-1). Denn „ich weiß eben nicht, ob man über Training und Übung wirklich mehr erreicht " (ebd.). Daher - und das zeigt, was er diesen Schülerinnen und Schülern zutraut - sollen sie zumindest durch Übung dazu gebracht werden „wirklich durch stumpfes Reproduzieren irgendwie eine Aufgabe so lösen [zu können] (...), dass [sie] genug Punkte" (ebd.) bekommen. Die Zahl derer, die das Sprachgefühl nicht besit-

zen liegt etwa bei 80% der Schülerinnen und Schüler, die anderen 20% haben die Möglichkeit den Inhalt so zu verinnerlichen, dass sie schnell und flexibel mit der Sprache umgehen können (vgl. ebd.). Die Wortwahl und der Vergleich mit dem Sprachgefühl suggerieren, dass Herr I der Begabung der Lernenden eine große Bedeutung für den Lernerfolg beimisst. Das kann durch Übung oder Training seines Erachtens im späteren Verlauf auch nicht hergestellt werden.
Die Schülerinnen und Schüler sollten Spaß an der Algebra empfinden und den Reiz der abstrakten Herangehensweise erkennen, sonst werden sie den Zugang nicht finden. Herr I vergleicht, dass das Umformen von Termen und Gleichungen gegen ein Spiel auf der PlayStation 4 keine Chance hat. Dabei hat es seinen eigenen Reiz. Er zieht die Parallele zum Übersetzen langer lateinischer Sätze. Dabei geht es weniger um den Sinn, als darum durch ein strukturiertes Vorgehen zum Ziel zu kommen: „90 Prozent der Zeit versucht man formal diesen Satz zu zerlegen. Und das ist bei Termen auch ein bisschen so. Erst mal muss ich verstehen wie hängt, wie hängen diese Termteile zusammen. (...) das ist einfach ganz, ja, formale Anforderungen, Struktur zu schaffen in, auf so einer formalen Ebene“ (1:01:03-1). Er kommt zu dem Schluss: „Aber wer den Spaß nicht hat, dem kann man, glaube ich, auch nicht vermitteln, dass das mehr Spaß macht, wenn man irgendeine Aufgabe da dran macht“ (1:00:19-1).
Er ist der Überzeugung, dass man sich für etwas begeistern muss, um es zu lernen. Er selbst sagte, er hatte einen trockenen Unterricht ohne viel Anschauung, aber die Begeisterung und der Blick auf die Mathematik als etwas, das mehr als Rechnen ist, kam durch Menschen, die ihm begegnet sind, zum Beispiel seine Professoren, etc. (vgl. 32:42-1, 34:37-1). Seine zugrundliegende Überzeugung ist es, dass Begeisterung die Grundlage ist, etwas mitzunehmen und er die Schülerinnen und Schüler also begeistern muss. Das klappt bei manchen und bei manchen eben nicht (vgl. 1:17:23-1, vgl. 25:58-1). Seine Unterrichtsphilosophie in diesem Zusammenhang lautet: „wenn was für Schüler nicht relevant ist, dann werden die Schüler nicht lernen“ (25:58-1). Seine eigene Begeisterung dient ihm als Schlüssel, um die Schülerinnen und Schüler zu begeistern (vgl. 22:26-1).

Die Voraussetzung erfolgreich lernen zu können und den Nutzen der Erlernten zu erkennen, ist sich auf die neue Thematik einzulassen und sich der Begeisterung der Lehrkraft gegenüber dem Thema zu öffnen.
Daran anschließend variiert der mögliche Nutzen des neu zu erlernenden Wissens, je nachdem ob die Lernenden das nötige Gefühl für die Sprache der Mathematik mitbringen oder nicht. Fehlt den Lernenden das Sprachgefühl, möchte Herr I ihnen durch zahlreiche Wiederholungen und Übungen die Gelegenheit geben, Routinen zu entwickeln und das Wissen soweit zu festigen, dass es reproduziert werden kann. Auf diese Weisen können die Schülerinnen und Schüler Klassenarbeiten zumindest bewältigen und im späteren Verlauf das Abitur bestehen (das betrifft 80% der Schülerinnen und Schüler).
Besitzen die Lernenden das Gefühl für die Auseinandersetzung mit der Algebra und finden den Zugang, wird auch ihnen die Möglichkeit gegeben die neuen algebraischen Werkzeuge in verschiedenen Kontexten zu üben und anzuwenden. Dies geschieht aber mit dem Ziel, dass sie die Möglichkeiten des neues Instruments erkennen, zum Beispiel in Beweisführungen oder anderen inner- und außermathematischen Kontexten. Diese Schülerinnen und Schüler werden in der Folge Freude im Umgang mit der Algebra empfinden und diese in verschiedenen Kontexten einsetzen. Das Abitur wird damit ebenfalls vorbereitet, die Freude im Umgang mit der Algebra ist aber ein mindestens ebenso großer Nutzen für die Schülerinnen und Schüler.

6.9.5. Wie gelingt guter (Algebra-)Unterricht?

Probleme der Schülerinnen und Schüler werden direkt thematisiert. Auf das Beispiel, dass unterschiedliche Terme zusammengefasst werden, reagiert er, indem er schrittweise die Rechenzeichen wieder ausschreibt (z.B. statt 2x wird 2·x geschrieben), die Rechengesetze wiederholt und schließlich durch visuelle Unterstützung, indem gleichartige Terme unterstrichen werden. Außerdem würden die Ordnungsregeln der Terme wiederholt werden. Dabei wägt er aber ab, ob es sich um den Anfang einer Einheit handelt, dann geht er über konkrete Beispiele noch einmal genau in die Struktur hinein, oder nicht. Später bedeutet es für ihn viel Arbeit und einige gelangweilte Schülerinnen und Schüler, die es bereits verstanden haben (vgl. 1:08:22-1). Eine weitere Möglichkeit schnell auf die Probleme der Lernenden einzugehen, ist der Wechsel der Darstellungsformen. Dies geht schnell und ist flexibel. In der Algebra führt es aber auch zu Verwechslungen, wenn die Schülerinnen und Schüler Bilder sehen, auf denen eine Länge mit x angegeben ist. Dort kann dann manchmal eine Länge für x geschlussfolgert werden, die für die Schülerinnen und Schüler fix ist. Dort stellt sich für Herrn I das Problem wie konkret oder abstrakt er mit der Variablen umgehen soll (vgl. 1:33:02-1).

Grundsätzlich ist Herr I der Meinung, dass die Bindung an konkrete Inhalte in der Schule überflüssig ist, weil die Schülerinnen und Schüler sich später nicht mehr daran erinnern. Ihm geht es um das Erlernen von Grundfertigkeiten (vgl. 1:21:45-1).

Er findet es immer spannend aktuelle Probleme zu besprechen, die zum Beispiel in der Fachpresse diskutiert werden (z.B. Probleme, wofür die Fields-Medaille vergeben worden ist o.Ä.), um die Schülerinnen und Schüler damit zu reizen und zu schauen inwiefern er sie dafür begeistern kann (vgl. 7:17-1). Dies dient der Motivation der Schülerinnen und Schüler, die er zusätzlich durch einen anschaulichen Unterricht, beispielsweise durch den Einsatz von Computer- und Geometriesoftware. Dem steht er ambivalent gegenüber, da es einige Lernende zusätzlich verwirrt, aber wenn Herr I der Ansicht ist, dass eine Anschauung hilft, eine Erkenntnis herbeizuführen, setzt er sie ein (vgl. 1:33:52-1).

Er möchte die Schülerinnen und Schüler selbst nachdenken lassen. Daher lässt er im Buch, das mit einer vorgerechneten Aufgabe beginnt und dann übt, manchmal mit der letzten Aufgabe beginnen. Die Schülerinnen und Schüler können dann eigene Wege entwickeln und ausprobieren. Dabei können sie lernen zu abstrahieren und zu formalisieren. Dem misst er eine höhere Bedeutung bei als der Durchführung der konkreten Rechenschritte (vgl. 1:38:25-1). Den Übertrag von Textaufgaben in mathematische Sprache, also Terme, macht er nur bei Aufgaben, die nicht zu künstlich wirken, sondern eher nur bei für ihn passenden Aufgaben (vgl. 1:39:42-1). Lieber probiert er mit den Schülerinnen und Schülern dann reale Kontexte zu bearbeiten, wie zum Beispiel der Versuch ein Regal im Klassenzimmer zu bauen. Dabei merken die Schülerinnen und Schüler, dass selbst bei 32 Brettern und den entsprechenden Maßen, Terme Sinn machen (vgl. 1:40:52-1).

Das Vorhandensein von Schemata bewertet er im Grunde als hilfreiches Nebenprodukt der Algebra, das festgehalten werden kann. Der Kern ist aber das vor dem Schema Kommende, also „das Aufstellen, das Verändern, die Fähigkeit, damit zu arbeiten" (1:13:15-1). Grundsätzlich stellen Schemata ein nützliches und hilfreiches Instrument dar, mit dem man ganze Aufgabentypen bearbeiten kann (vgl. 1:12:07-1 zum Thema Gleichungen lösen). Das verstehen einige Schülerinnen und Schüler und auch, dass dazu ein Mindestmaß an Grundfertigkeiten nötig ist (vgl. 1:12:07-1). Er unterscheidet, dass ein Beherrschen und vielleicht sogar ein eigenes Aufstellen von Schemata erstrebenswert sind, aber, dass die Schülerinnen und Schüler oft auf der Reproduktionsebene stehen bleiben. Diese bleiben dann fest bei ihrem Lösungsschema. Das vermittelt den Schülerinnen und Schüler aber eine falsche Sicherheit, denn wenn ihnen dann eine Abwandlung begegnet, dann wird dies für die Schülerinnen und Schüler zu einem Problem. Daher machen Schemata nur Sinn, wenn sie verstanden worden sind, sonst führen sie zu einem fehlgeleiteten Sicherheitsgefühl (vgl. 1:10:38-1). Die Schemata können

sogar zu Frust bei den Schülerinnen und Schüler führen, wenn sie „immer wieder merken, sie kommen damit nicht weit“ (1:14:30-1). Basisaufgaben können sie damit lösen, bei minimaler Variation kommen sie aber nicht weiter und entwickeln dann ein Unverständnis. Herr I zeiht den Vergleich zu einer Sprache, in der man jemanden begrüßen kann, aber bei der ersten Rückfrage scheitert (vgl. 1:14:30-1).
Das Üben sorgt bei den meisten Schülerinnen und Schülern für die Absicherung, sodass sie die Klassenarbeit bestehen können. Bei den besseren Schülerinnen und Schüler (ca. 20%), die ein Gefühl für die Sprache der Mathematik besitzen, dient die Übung zur Festigung und dazu das Gelernte in anderen Kontexten anzuwenden (vgl. 14:53-1). Herr I entwickelt dennoch ansprechende Übungskonzepte, da die Schülerinnen und Schüler unterschiedlich viel Zeit zum Üben brauchen und auch nicht gelangweilt sein sollen. Als Beispiel führt er online-basiertes Üben an, bei dem die Schülerinnen und Schüler vor dem PC sitzen und nicht mehr merken, dass sie noch üben (vgl. 21:27-1).
Er achtet auf einen gewissen Grad an Binnendifferenzierung, zum Beispiel über Sternchen-aufgaben oder über das Tempo bei der Bearbeitung der Aufgaben (vgl. 18:10-1). Er bemüht sich um verschiedene Aufgabentypen, aus den unterschiedlichen Anforderungsbereichen (vgl. 18:39-1). Herr I orientiert sich stark am Buch bei der Auswahl der Aufgaben, weil diese auch die sind, „die sie bis zum Abitur sicher können sollen“ (1:29:21-1). Zudem dient das Üben auch dazu, dass die Schülerinnen und Schüler Nachfragen stellen können und für ihn als Diagnoseinstrument, um Fehlvorstellungen sichtbar zu machen. Die Wiederholung von Inhalten stellt ebenfalls ein Ziel der Übung dar. Zudem bieten Übungsphasen den größten Raum, um binnendifferenziert auf die SuS einzugehen (vgl. 17:10-1). Der Großteil des Unterrichts besteht aus Übung (vgl. 16:34-1). Das richtige Maß an Übung zu finden, ist sehr schwer. Für einige Schülerinnen und Schüler ist es immer zu viel und für einige immer zu wenig. Herr I fragt deshalb in der Klasse nach, inwiefern noch geübt werden soll. Irgendwann setzt er dementsprechend den Schlusspunkt (vgl. 16:34-1, 13:44-1, 19:18-1).
Das Problemlösen spielt in seinem Unterricht eine Rolle. Er partizipiert am LEMAMOP-Projekt und dabei differenziert er, dass er die Aufgaben offen stellt und diese dann verallgemeinert werden. Die Lösungswege lässt er offen, gibt sie partiell oder auch ganz vor, ganz in Abhängigkeit dessen, was er bezweckt: Allgemeines Problemlösen, bestimmte Strategien einüben oder das Entwickeln von Strategien (systematisch probieren oder Termumformungen, etc.) (vgl. 8:10-1-9:13-1).
Auch Anwendungen und Anwendungskontexte finden im Unterricht von Herrn I ihren Platz. Er orientiert sich am Buch und bemüht sich auch mit den SuS den Klassenraum zu verlassen und in der Umwelt nach Anhaltspunkten zu suchen (vgl. 1:29:40-1). Es ist für ihn schwierig „dem Schüler eine gewissen inhaltliche, methodische Vielfalt zu präsentieren, mit der er dann klarkommt“ (1:30:38-1). Hier ist die Schülerorientierung zu erkennen. Sein Problem ist, dass viele der angebotenen Anwendungsaufgaben einfach nicht interessieren: „Die sind völlig uninteressant und mag sein, dass man sie dann mathematisch beweisen kann, aber das würde kein Mensch im normalen Leben so machen. Jetzt irgendwie beweisen, dass mein Gartenzaun reicht, das ist...Ja, ich gucke ob er reicht. Und entweder kaufe ich noch etwas im Baumarkt oder mache es nicht. Und schmeiße den Rest weg. (...) das finde ich immer künstlich“ (10:06-1).
Herr I unterrichtet häufiger frontal, aber nicht nur. Der Vorteil frontaler Einheiten ist, dass es Ressourcen schont und ergiebiger ist, als wenn die Schülerinnen und Schüler es sich selbst erarbeiten (vgl. 24:02-1). In den Übungsphasen hat er mehr Freiheiten den Schülerinnen und Schüler ihre Zeit zu geben und sie selbstständig arbeiten zu lassen (vgl. 17:10-1). Aber alles, was mit Zwang oder Druck zu tun hat, lehnt er im Unterricht ab, weil es für ihn nicht nachhaltig ist und der Begeisterung entgegenwirkt (vgl. 1:03:10-1). Grundsätzliche Aussagen kann er zu seinem Unterrichtsstil nicht treffen, da dieser von Gruppe zu Gruppe wechselt, je nachdem wie begeisterungsfähig die Schülerinnen und Schüler sind und inwiefern sie sich festbeißen

wollen - dann variiert sein Unterricht zwischen der Begleitung von Selbstlerneinheiten und vielen frontalen Einheiten (vgl. 24:56-1).

Herr I berücksichtigt, dass die Algebra ein Thema in der Schulmathematik ist, das auf die Schülerinnen und Schüler sehr abstrakt wirkt. Dazu kommt, dass Herr I sich für Ehrlichkeit gegenüber den Schülerinnen und Schülern ausspricht. Das bedeutet, dass er ihnen sagen möchte, wann ein Kontext künstlich ist und wann nicht und dass ihnen die behandelten Inhalte vielleicht nicht unmittelbar nutzen, aber ihnen auf einer abstrakteren Ebene helfen werden. Auf dieser Basis ist es Herrn I wichtig reale, anschauliche, schülerorientierte Kontexte und Themen zu behandeln und den Lernenden gleichzeitig die Gelegenheit zum kontextfreien Arbeiten zu geben. Dies wird durch die Verwendung der Schemata gestützt, die im optimalen Fall durch die Lernenden individuell erarbeitet werden sollen. Sie sind ein Hilfsmittel für die Schülerinnen und Schüler, müssen aber mit Vorsicht behandelt werden, damit sie nicht zu einem eingeschränkten Blick und damit zu einer Inflexibilität im Umgang mit den mathematischen Inhalten führen. Es ist Herrn I weiterhin wichtig, ein reichhaltiges Übungskonzept anzubieten, das ihm hilft Fehler rechtzeitig zu entdecken, Inhalte zu vertiefen und den Lernenden Sicherheit im mathematischen Arbeiten zu geben. Entdeckt Herr I Fehler, möchte er sich den Problemen zum Beispiel durch den schrittweisen Nachvollzug eines Verfahrens oder durch den Darstellungswechsel nähern. Außerdem kann er in Übungsphasen den Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit geben, aktiv zu werden. Grundsätzlich unterrichtet er eher frontal, da er dies als ressourcenschonender bewertet. Trotzdem möchte er die Lernenden zum selbstständigen Arbeiten anregen, indem er Denkanstöße gibt (aktuelle mathematische Probleme oder in der Erarbeitung). All dies soll die Schülerinnen und Schüler motivieren und sie zum mathematischen Arbeiten anregen. Zudem ist dies seinen Zielvorstellungen des Mathematikcurriculums zuzuordnen, dass die Lernenden die Mathematik als Bestandteil ihres Lebens wahrnehmen sollen und als Chance ihr Denken zu erweitern. Bemerkung: Insgesamt werden trotz vieler Nachfragen wenig konkrete Eigenschaften für die unterrichtlichen Tätigkeiten genannt.

6.9.6. Das Variablenverständnis von Herrn I

Auf die drei Aufgaben von Malle reagiert Herr I wie folgt: Im ersten Fall deutet er die Variable als Rechenaufgabe, bei der die Schülerinnen und Schüler eine konkrete Zahl vor Augen haben, sie dient der Formalisierung. Wenn diese Aufgabe zu einer Beweisaufgabe wird, ist die Verwendung der Variablen nötig. Zur Bedeutung wird nichts weiter gesagt. Im zweiten Fall dient die Variable als Platzhalter für die angegebenen Zahlen. Im letzten Fall steht die Variable für eine gesuchte Zahl, die durch die Lösung der Gleichung erreicht wird (vgl. 41:19-1, 42:43-1).
Bezüglich des Vorkommens im Unterricht sagt er, dass alle Aufgabenarten vorkommen, weil sie im Buch stehen. Dabei dient die erste Aufgabe eher als Einstieg und auch das Lösen kommt häufiger vor als die Einsetzungsaufgaben (vgl. 43:06-1).
Variablen sind für ihn etwas, das für fehlende Angaben eingesetzt werden kann, als Platzhalter. Dabei können dann spezielle Beispiele, aber auch Fälle simultan abgebildet werden (vgl. 35:57-1). Das weist auf sein Verständnis der Variablen als Unbestimmte und als Unbekannte hin. So sagt er: „Was für mich persönlich eine Variable ist. Eine Unbestimmte, etwas auf das

ich mich jetzt nicht festlege“ (40:30-1). Das „jetzt“ suggeriert aber, dass sie im weiteren Verlauf bestimmt werden soll.

6.9.7. Das Bild von Mathematik - Herr I

Herr I beschreibt die Mathematik im Interview als etwas sehr Besonderes, als ein eigenes System, das ihn immer wieder fasziniert. In seinen Ausführungen wird aber deutlich, dass er die Vermittlung dieses Gefühls für die Mathematik an die Schülerinnen und Schüler als sehr schwierig empfindet. Dies weist auf ein ambivalentes Verhältnis zwischen seinen ideellen Zielen und dem was er tatsächlich unterrichtet hin. Sehr deutlich wird sein Bild der Mathematik in seiner Antwort auf die Frage, was für ihn das Schönste an der Mathematik ist:

> „Das Schönste ist, dass ich einen Bereich habe in der Mathematik, nein im Leben, einen Bereich habe, den ich ganz abgrenzen kann von allem anderen. Ich kann sagen, ich habe die Welt, ich erlebe die Welt auf eine ganz vielfältige Art und Weise. Ich kann mich philosophisch mit ihr auseinandersetzen. Ich kann mich rein Spaß-orientiert mit ihr auseinander setzen. Ich kann künstlerisch oder einfach von Schönheit inspirieren lassen oder ich kann an ihr bauen architektonisch. Gestalterisch irgendwie tätig werden. Und die Mathematik ist ein ganz abgegrenzter Bereich der trotzdem sich toll verknüpfen lässt mit all diesen Bereichen. Ich kann künstlerisch mir das anschauen und kann aber sagen, warum finde ich das künstlerisch ansprechend? Weil es Proportionen hat zum Beispiel, mich mitten in der Mathematik oder Musik… Ich kann ja die Musik einfach anhören und sie mir, sie gefällt mir oder ich kann sagen, ich erkenne da Strukturen. Rhythmische Strukturen oder melodiöse Strukturen. Und kann sagen, da ist überall ein Stück weit Mathematik drin. Ich kann mich aber auch zurückziehen und sagen, ich vergesse alles um mich herum. Mache nur Mathematik. Und sonst nichts und gucke was innermathematisch da passiert. Kann mir irgendwelche abstrakten Gedankengebilde aufbauen, selbst wenn das niemand anders gemacht hat. Natürlich auch Bücher durchlesen. Beides funktioniert und das macht für mich die Mathematik zu einem ganz einzigartigen Beschäftigungsfeld. Zu dem ich mich im Übrigen ganz frei verhalten kann. Ich kann das ganz bezaubernd finden und ich kann es hassen wie die Pest. Und trotzdem ist das alles immer noch schlüssig. Da gibt’s immer noch Begründungen für. Und das macht für mich Beschäftigung mit Mathematik zu einer ganz einzigartigen Sache, die ich aber auch gut hinter mir lassen kann, manchmal“ (17:32-2).

Die Codierungen aus dem Interview lassen auf ein eher anwendungsorientiertes (14) Bild der Mathematik schließen. Weniger stark ausgeprägt sind die globalen Beliefs Schema (9) und Formalismus (8). Die Prozessidee der Mathematik wurde im Interview nicht codiert.
Herr I nimmt in Bezug auf die Skalen Anwendung (Rang 7) und Schema (Rang 7) relativ gesehen eine ablehnende Haltung ein, wohingegen er der formalistischen Weltsicht eher zustimmt (Rang 3).
Die Auswertung des Fragebogens ergibt die stärkste Ausprägung in der Skala Prozess (16). Während die Schema-Vorstellung (9) leicht abgelehnt wird, werden die Skalen Formalismus (10) und Anwendung (16) deutlich abgelehnt.
Dies führt zu der folgenden Darstellung:

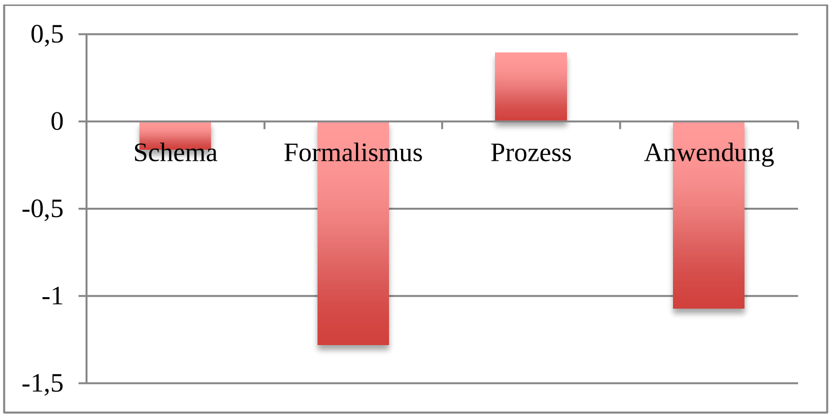


Abbildung 20: Das Bild der Mathematik - Herr I

Mit Ausnahme der Skala zum schematischen Weltbild zeigen sich bei Herrn I starke Differenzen zwischen dem Weltbild, das sich aus dem Interview ergibt, und den Ergebnissen des Fragebogens. So werden im Fragebogen Formalismus und Anwendung deutlich abgelehnt, während dem Prozess-Aspekt wesentlich stärker zugestimmt wird.
Diese extreme Differenz in den beiden sich ergebenden Weltbildern lässt sich möglicherweise mit einer Unterscheidung der Bilder von Schulmathematik und Mathematik, die durch Herrn I gehalten werden, erklären. So beschreibt er im Interview, was Schulmathematik für ihn ist. Dieses Bild ist zum Beispiel durch die institutionellen Vorgaben oder Begabung der Schülerinnen und Schüler geprägt, sodass sich die relativ starke Ausprägung des Formalismus-Aspekts ergibt, die sich zum Beispiel in der Verwendung von Algebra als Grammatik der mathematischen Sprache zeigt. Dem gegenüber beschreibt Herr I in der Frage danach, was Mathematik für ihn ist, ein eher prozessorientiertes Bild der Mathematik, wenn er davon spricht, dass er an der Mathematik „architektonisch bauen“ kann oder sich Gedanken macht, die sich vielleicht noch niemand gemacht hat.
In der Beantwortung dieser Frage nehmen Anwendung und Formalismus keine entscheidende Rolle ein. Die Fragebogenergebnisse könnten also mit seinem „eigentlichen“ Bild der Mathematik von Herrn I erklärt werden. Auf Grundlage der Datenlage kann aber keine abschließende Erklärung gegeben werden.

6.9.8. Ziel-Mittel-Argumentationen - Herr I

Tabelle 63: Inhalte des Algebra-Curriculums, Herr I

in Klasse 8: quadratische Gleichungen und Zusammenhänge, hergeleitet über die veränderte Termstruktur

Fokus auf Prozesse: Reflektieren, Interpretieren, Ordnen, Struktur, Abstrahieren	↔	Anwendungsaufgaben (LEMAMOP), Problemlöseaufgaben, Strategien des Abstrahierens, bei Anwendungen Bedeutung der Variablen und die Aussagekraft der Terme besprechen	↔	Beweisen als innermathematische Problemlösung, Struktursehen Variable als Unbekannte
		↑ Definition der Gleichung, als Term mit einem Gleichheitszeichen		
Formale Betrachtungsweise, Strategien, Regeln, Struktursehen - Grad an Formalisierung in Bearbeitungen verhandelbar	↔	Termumformungen (über die Waage), direkt unter Verwendung des Gleichheitszeichens in Verbindung mit Gleichungsumformungen	↔	Variable unter dem Kalkülaspekt
		↑		
Formale Betrachtungsweise, Strategien (z.B. Ordnen), Regeln, Struktursehen	↔	Termstrukturen bestimmen	↔	Variable unter dem Kalkülaspekt
		↑		
erstes Verständnis für die Variable als Instrument zur Abstraktion (3x als Dreifaches einer beliebigen Zahl)	↔	Variablen und Terme im Kontext behandeln, über viele Beispiele (Wofür steht die Variable?)	↔	Variable unter dem Gegenstandsaspekt, als Unbestimmte (etwas, auf das sich jetzt nicht festgelegt wird)
		↑		
		Variablen - Annäherung über das Waagemodell (Was ist die Variable? Einfache Rechnungen, wofür steht die Variable hier?)	↔	Variable unter dem Einsetzungsaspekt (orientiert am Lehrbuch)
		↑		
		Zahlenräume und die entsprechenden Rechengesetze und Rechenoperationen kennen lernen und beherrschen sowie Besonderheiten in den jeweiligen Zahlbereichen (Grenzen und Möglichkeiten) erlernen, Zahlbereichserweiterungen		

Tabelle 64: Ziele des Algebra-Curriculums, Herr I

										!Begeisterung für die Algebra (=die SuS können sich für die abstrakte Denkebene begeistern und haben Spaß an der Beschäftigung mit Termen und am Erfolg diese erfolgreich zu vereinfachen, aber auch daran algebraische Denkweisen auf die Umwelt zu übertragen)		!Algebra als Grundlage der Mathematik (=die SuS erkennen die grundlegende Wichtigkeit der Algebra für die anderen Bereiche der Mathematik, und auch die Verbindung zu den anderen Teilbereichen der Mathematik und stellen ggf. Verbindungen her)
						Wenn die SuS ein Verständnis für die Strukturen in der Algebra entwickelt haben !Strukturen in der Algebra (=gemeint ist, dass die SuS die Termstrukturen, die Verbindung zwischen Variable, Term und Gleichung erkennen und auch, was die einzelnen Ausdrücke bedeuten)	+	**Wenn die SuS die Fähigkeit erlangt haben, die Welt mit algebraischen Hilfsmitteln zu beschreiben** !Welt beschreiben (=die SuS können Strukturen und Strategien, wie das genaue Auseinandersetzen mit einer Problematik in die Außenwelt übertragen und können auch Strategien wie die schrittweise Annäherung an den Problemkern anwenden. Zudem gelingt es ihnen Probleme durch math. Ausdrücke zu beschreiben.)	→	**können die SuS sich für die Algebra begeistern und das abstrakte Denken wertschätzen**	+	**erkennen die Algebra als Grundlage der Mathematik an (auch für die konkrete Mathematik der Oberstufe)**
		Wenn die SuS die Grundfertigkeiten, bzw. die Grammatik der mathematischen Sprache erlernt haben !Grammatik !Grundfertigkeiten (=gemeint ist, dass Rechenfertigkeiten auch in Bezug auf die Termumformungen beherrscht, Variablen identifiziert und zweckmäßig eingesetzt werden, in dem Sinn dass Variablen, Terme und Gleichungen die basalen Vokabeln sind, auf die die mathematische Ausdruckweise zurückgeführt werden kann)	+	**Wenn die SuS die Verbindung zwischen mathematischer und außermathematischer Welt herstellen können** !Verbindung zwischen mathematischer und außermathematischer Welt (=gemeint ist, dass die SuS Strukturen in der Welt so erkennen und abstrahieren können, dass sie in die Mathematik übersetzt werden können und ggf. bearbeitet werden können, der Fokus liegt aber auf dem Abstrahieren)	→	**entwickeln die SuS ein Verständnis für die Strukturen in der Algebra**	+	**erlangen die Fähigkeit, die Welt mit algebraischen Hilfsmitteln zu beschreiben**				
Wenn man die Algebra inhaltlich so aufbaut wie beschrieben !Behandlung algebraischer Inhalte	→	**erlernen die SuS die Grundfertigkeiten der Algebra, bzw. erlernen die Grammatik der mathematischen Sprache**	+	**die SuS lernen es, die Verbindung zwischen der mathematischen und der außermathematischen Welt herzustellen**								

Tabelle 65: Ziele des Mathematik-Curriculums, Herr I

!bessere Noten
(=die SuS liefern im Durchschnitt bessere Leistungen und Noten ab)

Wenn die SuS vermeintlich Spaß am Mathematikunterricht entwickeln und ihn als naheliegend empfinden → **werden bessere Ergebnisse/Noten im Mathematikunterricht erzielt**

!Spaß am Mathematikunterricht
!Naheliegender Unterricht
(=die Mathematik macht den SuS „Spaß“, weil sie die Themen als naheliegend - weil in ihrer Umwelt vorkommend - und als zu bewältigen empfinden. Es bleiben aber Spaßaufgaben und die Erleichterung kommt durch die bessere Bearbeitungsquote)

!Abiturvorbereitung
(=der Unterricht soll die SuS auf das Abitur vorbereiten und ihnen die Voraussetzungen dazu mitgeben dieses zu bestehen)

→ **werden die SuS auf das Abitur vorbereitet**

Wenn im Unterricht Begeisterung für die Mathematik transportiert wird + **Wenn die Mathematik auf anschaulicher Ebene, mit Verzicht auf unnötige Formalisierungen unterrichtet wird** → **entwickeln die SuS vermeintlich Spaß am Mathematikunterricht und empfinden ihn als naheliegend**

!Begeisterung
(=gemeint ist, dass durch die Lehrkraft, die selbst Begeisterung entwickelt, Begeisterung für die Mathematik an die SuS übertragen wird)

!Anschaulich
!Verzicht auf unnötige Formalisierungen
(=Der Fokus des Unterrichts liegt hier auf vermeintlich lebensnahen Situationen, wie Vorgärten oder Gehegen, wobei viele Anwendungen unterrichtet werden. Zu abstrakte Inhalte oder auch Formalisierungen werden kaum oder gar nicht unterrichtet)

!Mathematische Perspektive
!Kommunikation
(=die SuS erkennen die mathematischen Strukturen in der Umwelt und wenden die erlernten Problemlösestrategien (ordnen, strukturieren) auf diese an. Im besten Fall ist es ihnen möglich, ihr Handeln anderen verständlich zu machen und zu kommunizieren)

Wenn die SuS Struktursinn entwickelt und ihre Denkstrukturen an Klarheit und Ordnung gewonnen haben + **Wenn sie sich für die Eigen- und Einzigartigkeit der Mathematik begeistert haben** → **entwickeln sie eine neue, mathematische Perspektive auf die Welt und können diese kommunizieren**

!Struktursinn
!Klarheit und Ordnung
(=die Beschäftigung mit der Mathematik auf einer abstrakteren Ebene, auf der sich von äußeren Einflüssen gelöst wird, führt zu der Entwicklung von klaren und geordneten Denkstrukturen, da die SuS lernen stringent mit den ihnen vermittelten Werkzeugen zu argumentieren. Der Struktursinn ergibt sich durch das analytische Ordnen und Fassbarmachen von Situationen)

!Einzigartigkeit der Mathematik
(=gemeint ist, dass die SuS anfangen sich auf diese Art der Anschauung einlassen und die Mathematik so als angenehm empfinden und auch Freude daran haben, sich auf dieser abstrakten Ebene mit ihr zu beschäftigen)

Wenn im Unterricht Begeisterung für die Mathematik transportiert wird + **Wenn die Mathematik als System sui generis vermittelt wird** → **entwickeln die SuS Struktursinn und gewinnen in ihren Denkstrukturen an Klarheit und Ordnung** + **begeistern sich für die Eigen- und Einzigartigkeit der Mathematik**

!Begeisterung
(=gemeint ist, dass durch die Lehrperson, die selbst von der Mathematik begeistert ist oder durch interessante mathematische Probleme Begeisterung für das Fach vermittelt wird)

!System sui generis
(=gemeint ist, dass die Mathematik als in sich schlüssiges System wahrgenommen wird, als Konstrukt, in dem Annahmen und Behauptungen aufgestellt werden können, die auch mit einem 100%igen Wahrheitsgehalt bewiesen werden können. Ein System, das unabhängig von äußeren Einflüssen existiert)

Tabelle 66: Das Lernen, Herr I

										!Algebra als Sprache (=die SuS können sich sicher in der Algebra bewegen und es macht ihnen Spaß sich in ihr zu bewegen.)		!Abiturstandard (=die SuS erlangen die Fähigkeiten, die Oberstufe und das Abitur zu bewältigen)
						Wenn die SuS den Zugang zur Algebra finden	+	**Wenn die SuS die neu erlernten Denkweisen durch verschiedene Übungen festigen und in verschiedenen Kontexten anwenden**	→	**können die SuS die Algebra als neue Sprache annehmen und sie als angenehm empfinden**	+	**schaffen die SuS die Grundlage für die erfolgreiche Bewältigung des Abiturs**
						!Zugang zu der Algebra (=die SuS finden einen Weg sich mit algebraischen Hilfsmitteln auszudrücken und beginnen sich mit der Symbolik auseinanderzusetzen und auch zu verstehen welche Bedeutung die jeweiligen Symbole haben)		!Übung !Festigung !Anwendung (=die Übung dient der Festigung des neu Erlernten und der Anwendung auf inner- und außermathematische Kontexte, wie Beweise oder Probleme aus der Umwelt)				
Wenn man die Relevanz der Algebra erkennt	+	**Wenn man sich auf ein genaues, exaktes und strukturiertes Arbeiten einlässt**	+	**Wenn man sich auf die abstrakte Ebene des Denkens einlässt**	→	**ist es mit einem gewissen Gefühl für die Algebra möglich, den Zugang zu der Algebra zu finden**	+	**die neu erlernten Denkweisen durch Übungen zu festigen und in verschiedenen Kontexten anzuwenden**				
					→	**ist es den SuS aufgrund eines fehlenden Gefühls für die Algebra nicht möglich den Zugang zur Algebra zu finden**						
!Relevanz der Algebra (= gemeint ist dass die SuS nur etwas erlernen können, wenn sie die Relevanz dessen erkennen. Die Relevanz der Algebra ist nicht direkt spürbar, sondern nur indirekt. Direkt sind mit ihr zunächst die in der Schule gestellten Aufgaben lösbar. Indirekt birgt sie eine neue Weltsicht, durch die abstrakteren Denkstrukturen.)		!genaues, strukturiertes Arbeiten (=die SuS sollen genau und strukturiert die Aufgabenstellungen lesen und sich der Bearbeitung ebenso strukturiert widmen)		!sich einlassen (=gemeint ist, dass sich die SuS auf diese nicht konkrete Arbeit einlassen sollen und sich bewusst von dem Bedürfnis nach Anschauung lösen sollen)								
						!fehlender Zugang zur Algebra (=die SuS bringen, wie bei einer Sprache nicht die nötigen Voraussetzungen für das Erlernen und Verstehen der Algebra mit und finden so den Zugang zu der abstrakten Ebene nicht)						
						Wenn die SuS aufgrund eines fehlenden Gefühls für die Algebra den Zugang zu dieser nicht finden	→	**werden die SuS viel üben und wiederholen**				
								!Üben !Wiederholen (=in diesem Fall dient die Übung vornehmlich der Wiederholung des Behandelten und der Einübung von Strategien, die für die kommenden Arbeiten benötigt werden)				
								Wenn die SuS viel üben und wiederholen	→	**sind sie in der Lage die Klassenarbeiten zu bewältigen**	+	**können das Abitur bestehen**
										!Klassenarbeiten bewältigen		!Abitur bestehen

Tabelle 67: Lehren von Algebra, Herr I

														!Motivation !Begeisterung (=die SuS können für die Mathematik und die vorherrschenden Denkstrukturen begeistert werden und sind motiviert sich diesen zu öffnen)		!Mathematik als Chance !Denken erweitern (=die SuS können ihre bisherigen Denkstrukturen durch das mathematische Arbeiten erweitern und die Chance sehen ihre Sicht auf die Welt zu erweitern)
										Wenn der Unterricht auf Probleme und Schwierigkeiten gezielt eingeht !gezieltes Eingehen auf Probleme (=werden beim Üben Schwierigkeiten gesehen, so wird versucht sofort darauf einzugehen, zum Beispiel durch die Wiederholung einer Strategie oder die Hereingabe von Anschauungsmaterial)	+	**Wenn der Unterricht es den SuS erlaubt, selbstständig zu denken** !Selbstständiges Denken (=gemeint ist, dass vereinzelt von der Buchstrategie: Thema, Beispiel vorgerechnet, Üben, abgewichen wird und die SuS zu einer Aufgabe selbst Lösungsstrategien entwickeln sollen oder auch innerhalb von Problemlöseprozessen)	→	**können die SuS für die Unterrichtsinhalte begeistert werden und sind motiviert**	+	**können die Mathematik als Chance wahrnehmen ihre Art zu denken zu erweitern**
				Wenn anschauliche, flexibel gestaltete, schülerorientierte Lernumgebungen und Inhalte gewählt werden !Anschaulichkeit !Flexibilität !Schülerorientierung (=Interessant und anschaulich werden die Inhalte wenn zum Beispiel aktuelle mathematische Probleme diskutiert werden. Die Orientierung an den SuS zeigt sich durch den flexiblen Einsatz von Medien und Darstellungsformen und der Anwendung von realistischen Aufgabenstellungen sowie der Methodik je nach Lerngruppe)	+	**Wenn den SuS Strategien und Schemata an die Hand gegeben werden** !Strategien !Schemata (=Schemata und Strategien werden als Hilfsmittel für die SuS verstanden, die aber mit Vorsicht eingesetzt werden sollten. Werden diese nicht verstanden, kann es zu einer Verengung des Blickfelds kommen und jede abweichende Aufgabe kann nicht mehr gelöst werden - das führt zu Frust bei den SuS)	+	**Wenn ein abwechslungsreiches, binnendifferenziertes Übungskonzept erstellt wird** !Abwechslungsreiches, binnendifferenziertes Üben (=gemeint ist, dass beim Üben auf unterschiedliche Aufgabentypen, Schwierigkeitsgrade und Anforderungsbereiche geachtet werden soll, oder eventuell computerbasiert geübt wird)	→	**können Probleme und Schwierigkeiten der SuS gezielt bearbeitet werden**	+	**den SuS wird Gelegenheit gegeben selbstständig zu denken**				
Wenn anerkannt wird, dass die Einführung der Algebra ein sehr abstraktes Thema für die SuS ist	+	**Wenn man den SuS gegenüber ehrlich sein möchte**	→	**werden anschauliche, flexibel gestaltete Lernumgebungen und Inhalte gewählt**	+	**den SuS werden Strategien und Schemata an die Hand gegeben**	+	**es wird ein abwechslungsreiches, binnendifferenziertes Übungskonzept erstellt**								

!kognitiver Sprung !Abstraktion (=gemeint ist dass dieses Thema bei den SuS Schwierig-keiten hervor-ruft und es auf sie wie etwas ganz Neues wirkt)	!Ehrlichkeit (=den SuS soll nicht vorgemacht werden, dass die Variablen oder Terme einen unmittelbaren Nutzen für sie haben, sondern sie sollen eher auf die Art zu denken aufmerksam gemacht werden)

6.9.9. Unterrichtsbeobachtungen und Klausurenanalyse - Herr I

Die beiden beobachteten Stunden finden in einer zehnten Klasse statt und beschäftigen sich mit der mittleren und momentanen Änderungsrate.
Die erste Stunde ist durch ein lehrkraftzentriertes Klassengespräch gekennzeichnet. In diesem werden zunächst die Definitionen einer Sekante und einer Tangente nachgefragt, anschließend erklärt Herr I das Vorgehen zur Bestimmung der momentanen Änderungsrate und gibt die Aufgabe, dies anhand der Funktion f(x)=1/x zu untersuchen. Probleme treten vor allem dabei auf, nicht durch 0 teilen zu dürfen und beim Auffinden des Hauptnenners. Dieser letzte Schritt dauert knapp zwanzig Minuten. Anschließend sollen die Schülerinnen und Schüler dasselbe Verfahren bei zwei weiteren Funktionen anwenden. Herr I stellt Probleme in der Verwendung der binomischen Formeln, dem Bruchrechnen und der fehlerhaften Verwendung des Rechners fest. Daran anschließend werden die Lösungen gemeinsam an der Tafel präsentiert und Herr I hinterfragt das Vorgehen. Die Stunde wird mit der Vergabe der Hausaufgaben beschlossen.
In der zweiten Stunde sind zunächst organisatorische Inhalte Thema des Unterrichtsgesprächs, wie die Besprechung der Noten und die Rückgabe der letzten Arbeit. Insgesamt ist die Stunde durch die Notenbesprechung geprägt. Nach dem gemeinsamen Vergleich der Hausaufgaben, bei dem Herr I Wert darauf legt, sich das angewandte Vorgehen noch einmal erklären zu lassen und auf die notwendige Verwendung der formalen Richtlinien hinweist (wo das Gleichheitszeichen stehen muss), gibt Herr I den Schülerinnen und Schülern in Form einer Instruktion weitere Aufgaben zur Stillarbeit. Während der Arbeitsphase bespricht er außerhalb des Klassenzimmers die Noten. Als Herr I den Raum wieder betritt, hilft er vereinzelt bei Schwierigkeiten und ruft dann zum gemeinsamen Vergleich auf, den er moderiert. Eine weitere Aufgabe folgt, die nach demselben Vorgehen bearbeitet werden soll. Daraufhin erfolgt der Vergleich in der gleichen Art und Weise und wird durch die Hausaufgabenvergabe beschlossen.
Insgesamt ist in beiden Stunden ein lehrkraftzentriertes Vorgehen zu beobachten. Darüber hinaus lassen die beobachteten Stunden nur wenig Rückschlüsse auf die Verbindung zwischen den rekonstruierten subjektiven Theorien und dem beobachteten Unterricht zu.

7. Typenbildung

Die Typenbildung erfolgt orientiert an Kelle und Kluge (2010), die ein Verfahren zur Typenbildung entwickelt haben. Sie definieren eine Typologie als

> „das Ergebnis eines Gruppierungsprozesses, bei dem ein Objektbereich anhand eines oder mehrerer Merkmale in Gruppen bzw. Typen eingeteilt wird, so dass sich die Elemente innerhalb eines Typus möglichst ähnlich sind und sich die Typen voneinander möglichst stark unterscheiden“ (p. 85).

Unter einem Typus werden im Rahmen der Typenbildung Gruppen oder Untergruppen von Objekten verstanden, die gemeinsame Merkmale aufweisen (Kelle & Kluge, 2010, p. 85). Ziel der Typisierung der individuellen Curricula ist es über den Vergleich und die Kontrastierung der Gemeinsamkeiten und Unterschiede, diese etwas allgemeiner als in Kapitel 6 beschreiben und so im Anschluss besser miteinander vergleichen zu können. In der vorliegenden Studie umfasst der Objektbereich dementsprechend die subjektiven Theorien der untersuchten Lehrkräfte, sodass auch die Untergruppen immer aus zumindest einer Lehrkraft und ihren subjektiven Theorien bestehen werden.

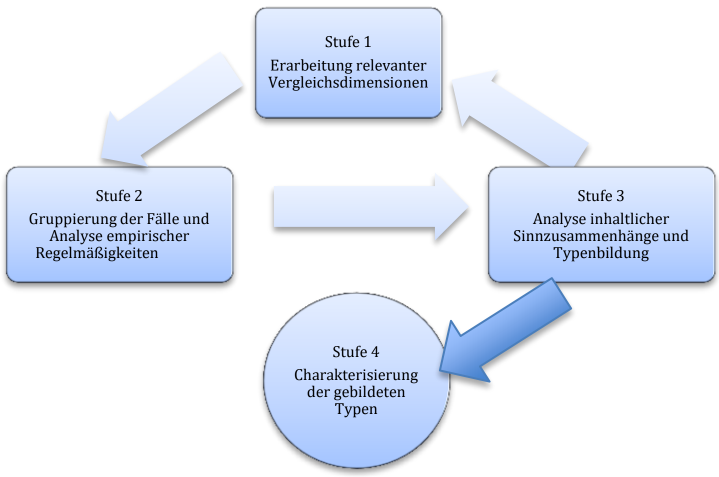


Abbildung 21: Modell der Typenbildung nach Kelle und Kluge (2010)

Das Verfahren zur Herausbildung der Typen nach Kelle und Kluge (2010) beschreibt einen vierstufigen Prozess, der nicht linear verlaufen muss, obwohl die Stufen logisch aufeinander aufbauen. Dennoch ist die Möglichkeit gegeben, die Stufen zuvor mehrfach zu durchlaufen, wenn es zum Beispiel um eine mehrdimensionale Typenbildung geht. Dies ist aber in der vorliegenden Untersuchung nicht der Fall, weshalb das Vorgehen chronologisch anhand des folgenden Schemas stattfindet:

Stufe 1 beschreibt die Erarbeitung der Vergleichsdimensionen. Im Fall der vorliegenden Untersuchung der individuellen Curricula der Lehrkräfte in der Algebra sind dies die in den Interviews erhobenen einzelnen Bereiche der subjektiven Theorien zu den Stoffinhalten der individuellen Algebracurricula, den individuellen Zielen des Algebra- und Mathematikcurriculums und zum Lernen und Lehren von Algebra beziehungsweise Mathematik sowie zusätzlich die erfassten mathematischen Weltbilder.
In Stufe 2 werden die Fälle entsprechend der gebildeten Kategorien gruppiert und analysiert. Das bedeutet, dass die Zuteilung der Fälle zu den Kategorien auf Basis der Vergleiche des

empirischen Materials erfolgt. Die Fälle werden auf zwei Ebenen kontrastiert, der Ebene des Typus und der Ebene der Typologie. In Bezug auf die erste Ebene wird geprüft, ob die einer Kategorie zugeordneten Fälle eine interne Homogenität aufweisen. Das bedeutet, es wird untersucht, ob sie hinreichend ähnlich sind, um derselben Kategorie zugeordnet zu werden. Ein weiterer Vergleich erfolgt auf der Ebene der Typologie. Hierbei wird auf die externe Heterogenität geachtet. Das heißt, es wird untersucht, ob sich die Fälle, die den unterschiedlichen Kategorien zugeordnet sind, ausreichend unterscheiden. In Bezug auf die vorliegende Untersuchung erfolgt die Zuordnung fallübergreifend, aber gebunden an die Leitkategorien.
In dieser Stufe geht es um die Identifikation von Modalstrukturen, die basierend auf Eichler (2005) sowie Scheele und Stössel (1992) als Teilargumentationen verstanden werden, die in allen oder zumindest in Teilen der Ziel-Mittel-Argumentationen der Lehrkräfte (fallübergreifend) gefunden werden können (Eichler, 2005, p. 125f). Da die Argumentationen der Lehrkräfte individuell geprägt sind, ist es problematisch unmittelbar auf fallübergreifende allgemeinere Strukturen zu schließen. Dementsprechend muss zunächst die Frage geklärt werden, wann im Vergleich der verschiedenen Elemente der Ziel-Mittel-Argumentationen der Lehrkräfte von der Gleichheit zweier Argumentationselemente gesprochen werden kann. Unterschieden wird zwischen der semantischen und strukturellen Äquivalenz (Eichler, 2005, p. 126f; Scheele & Stössel, 1992, p. 351f):

- Von semantischer Äquivalenz wird gesprochen, wenn Äußerungen synonym auftreten.
- Von struktureller Äquivalenz wird gesprochen, wenn die Argumentationsausschnitte die gleiche Stellung innerhalb der jeweiligen subjektiven Theorie einnehmen.

Auf der Stufe 3 wird der inhaltliche Zusammenhang zwischen den Gruppen fall- und kategorienübergreifend analysiert und es findet gegebenenfalls eine Reduktion der Anzahl der Typen statt. Die inhaltlichen Argumentationen sind leitend für diese Analyse[114]. Das bedeutet insbesondere, dass geprüft wird, inwiefern die in den einzelnen Vergleichsdimensionen gebildeten vorläufigen Typen auf einer inhaltlichen Ebene miteinander verknüpft werden können. Ist dies der Fall, werden sie zu einem neuen Typus zusammengefasst.
Im letzten Schritt werden die gebildeten Typen anhand ihrer Merkmalsausprägungen umfassend charakterisiert. Dies stellt das Ziel der Typenbildung dar. Auf diese Weise ist es möglich, die individuellen Curricula der untersuchten Lehrkräfte in der Algebra auf einer abstrakteren, nicht mehr an den einzelnen Fall gebundenen, Ebene zu charakterisieren und deren zentrale Eigenschaften herauszuarbeiten.
Wird zum Zweck der Typenbildung eine übergreifende Fallkontrastierung vorgenommen, so entsteht ein Informationsverlust, weil die Detailtiefe, mit der die individuellen Curricula rekonstruiert worden sind (vgl. Kapitel 6), nicht praktikabel ist, wenn generalisierende Aussagen getroffen werden sollen.

7.1. Fallkontrastierung

Hier werden anknüpfend an Kapitel 6 die einzelnen subjektiven Theorien zu den Leitkategorien fallübergreifend kontrastiert. Die Kontrastierung wird in Bezug auf jede einzelne Leitkategorie: der Inhalt des Algebracurriculums, die Ziele des Algebra- und Mathematikcurriculums, zum Lernen und Lehren der Algebra beziehungsweise Mathematik und dem Bild der Mathematik bei Frau A begonnen. Die jeweilige Haltung von Frau A zu den Kategorien wird dargestellt.

[114] Dies betrifft zum Beispiel den Fall, wenn wie bei Bräunling (vgl. Kapitel 2.3) die Typisierung nach den globalen Beliefs mit den unterschiedlichen Lehr-/Lernorientierungen zusammengefasst werden können.

Frau A fungiert somit als Ausgangs- beziehungsweise Startpunkt der Analyse, um von ihr ausgehend Gemeinsamkeiten und Unterschiede in den einzelnen Argumentationsschritten der subjektiven Theorien der anderen Lehrkräfte zu suchen und diese zu vergleichen.

7.2. Leitkategorie: Inhalt des Algebra-Curriculums

Die Auseinandersetzung in Kapitel 6 zeigt, dass sich die individuellen inhaltlichen Curricula der Lehrkräfte in ihrem Grundaufbau ähneln. Sie differieren eher in ihrer inhaltlichen Reichweite und in ihrer Herangehensweise an die algebraspezifischen Inhalte.
Ausgehend von Frau A wird der sichere Umgang mit den Rechengesetzen und Rechenregeln in den Zahlbereichen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Z}$ vorausgesetzt. Aufbauend darauf werden Variablen im Kontext von Termen und Gleichungen als Rechenzeichen betrachtet, mit denen im Rahmen der geltenden Rechengesetze und -regeln operiert wird. Definiert wird die Variable hier als Objekt, mit dem umgegangen werden soll.
Das Lösen von Gleichungen auf der symbolischen Ebene stellt das Unterrichtsziel dar. Im Fall von Frau A wird das Aufstellen von Termen und Gleichungen anhand von Sachkontexten eher in den Hintergrund gerückt. Allgemein mathematische Kompetenzen behandelt Frau A wenig bis gar nicht. Aus dieser Charakterisierung lässt sich der erste (vorläufige) Typus des „Werkzeugkastens" ableiten, dem entsprechend die subjektive Theorie von Frau A in Bezug auf ihre inhaltlichen Festlegungen im Algebraunterricht zugeordnet wird:

Subjektive Theorien, die dem (vorläufigen) Typus **Werkzeugkasten** zugeordnet werden, beschreiben die Algebra als Sammlung von Regeln, Algorithmen und Schemata, die gelernt werden müssen. Die Kalkül-orientierte Beschäftigung mit den Variablen, Termen und Gleichungen erfolgt zumeist auf der symbolischen Ebene. Anwendungsbezügen und allgemein mathematischen Kompetenzen kommt bei diesem Typus eine eher untergeordnete Bedeutung zu.

In den inhaltlichen Bestandteilen der Algebra, also der Sicherheit im Umgang mit den Rechengesetzen, die notwendige Voraussetzung für die Einführung von Variablen im Kontext von Termen und den Regeln der Termumformung sind, welche die Einführung und Arbeit mit den Gleichungen vorbereiten, besteht zwischen allen untersuchten Lehrkräften Einigkeit. Unterschiede lassen sich aber in Bezug auf die Reichweite der behandelten Inhalte identifizieren.
So führen Frau D, Frau E und Herr H in Erweiterung zu dem (vorläufigen) Typus *Werkzeugkasten* die Variable in Anknüpfung an das Vorwissen der Schülerinnen und Schüler über die Idee eines Platzhalters ein, als etwas, das erst einmal in der Beschreibung von Sachkontexten fehlt. Ihren inhaltlichen Überlegungen ist gemein, dass sie Anknüpfungspunkte für die Verwendung der Variablen suchen. In diesen Fällen nimmt die Variable beliebige Buchstaben an, die an den jeweiligen Sachkontext anknüpfen (zum Beispiel w für Weg).
In den Überlegungen der Lehrkräfte B, C, F und G kommt die Idee die Variable in Sachkontexten entweder zunächst über Wortvariablen (zum Beispiel: Die Variable steht für die Anzahl der SMS), die dann zu Buchstaben verkürzt werden oder direkt durch die Verwendung von Buchstaben ebenfalls vor. Sie nennen diese dann nicht direkt Platzhalter oder beziehen sich auf die Anknüpfung an das Vorwissen der Lernenden, dennoch ist die Einführung über Sachkontexte ähnlich.
Herr I unterteilt diesen Vorgang in zwei Prozesse. Zunächst lässt er die Variable im Waagemodell als Leerstelle stehen, die dann im Sinn des Gleichgewichts über das Einsetzen verschiedener Zahlen bestimmt wird. Dies entspricht der Grundschulidee von Platzhalteraufgaben. In einem zweiten Schritt lässt er die Variable dann im Sachkontext bestimmen.
In Bezug auf die Definition der Variablen besteht in diesem Zusammenhang Einigkeit darüber, dass die Variable im Sachkontext für etwas steht, das ausgerechnet werden soll und momentan noch unbekannt ist (vgl. B, C, D, E, G, H und I). Herr F verweist zwar auch darauf, dass die Variable immer für eine bestimmte Zahl steht, die es zu bestimmen gilt. Andererseits berücksichtigt er, dass mit der Verwendung der Variablen sehr viele Zahlen simultan beschrieben werden, von denen eine der gesuchten Zahl entspricht. Insofern wird die Auffas-

sung der Variablen als Unbestimmte angedeutet, da der Fokus aber auf der Bestimmung dieser liegt, kann seine Haltung ebenfalls den Definitionen der anderen Lehrkräfte zugeordnet werden.
Insofern kann über die Einführung der Variablen und die Stellung dieser im inhaltlichen Aufbau der Algebra der (vorläufige) Typus „Kontext“ gebildet werden:

Subjektive Theorien, die dem (vorläufigen) Typus **Kontext** zugeordnet werden, stellen die Einbeziehung von innermathematischen und außermathematischen Kontexten mit dem Ziel der Sinnstiftung bei der Einführung und Behandlung von Termen, Variablen und Gleichungen ins Zentrum. Die Variable wird als Unbekannte charakterisiert, die im jeweiligen Sachkontext bestimmt wird.

Erweitert werden kann der (vorläufige) Typus *Werkzeugkasten* zudem insofern, als dass die technischen Fähigkeiten, die in diesem Typus vermittelt werden, bei den anderen Lehrkräften nicht das Ende des inhaltlichen Curriculums, sondern die Grundlage für die Bearbeitung von Aufgaben in verschiedenen Anwendungskontexten im Sinn des Problemlösens darstellen. Sie betrachten die Algebra als Instrument Probleme bearbeiten zu können, indem Sachkontexte in mit Hilfe von Variablen, Termen und Gleichungen beschrieben werden und mit Hilfe der erlernten Lösungsverfahren gelöst werden. Die Unterscheidungen in Modellierungen, Anwendungsaufgaben oder eingekleidete Aufgaben werden in den Interviews nicht hinreichend deutlich, sodass all diese Aufgabenarten unter das Problemlösen subsummiert werden.
Die Auffassung der Algebra als Instrument impliziert bei den Lehrkräften aber ebenso wie im (vorläufigen) Typus *Werkzeugkasten* das Kalkül-orientierte Erlernen der Rechengesetze und -regeln der Term- und Gleichungsumformung und den Aufbau der Algebra auf Basis der Rechenregeln und -gesetze in den verschiedenen Zahlbereichen. Der Unterschied ist aber, dass regelmäßig auf Anknüpfungspunkte in Sachkontexten mit dem Ziel der Sinnstiftung geachtet wird.
Die Lehrkräfte B - I unterscheiden sich bei der Vermittlung der Rechenregeln in ihren Haltungen zum zeitlichen Umfang, der dem Regellernen zu Verfügung gestellt wird und in der Art der Vermittlung. Dies bezieht sich aber eher auf die Lehr-/Lernorientierung der Lehrkräfte, die in Abschnitt 7.6 diskutiert wird. Zudem ist die Unterscheidung nicht so gravierend, dass von einer tatsächlichen externen Heterogenität gesprochen werden kann. Deshalb können die subjektiven Theorien dieser Lehrkräfte simultan betrachtet werden. Insofern kann der (vorläufige) Typus „Kontext“, dem die Lehrkräfte B bis I zugeordnet sind, wie folgt erweitert werden:

Subjektive Theorien, die dem (vorläufigen) Typus **Kontext** zugeordnet werden, stellen die Einbeziehung von innermathematischen und außermathematischen Kontexten mit dem Ziel der Sinnstiftung bei der Einführung und Behandlung von Termen, Variablen und Gleichungen ins Zentrum des algebraischen Unterrichts. Die Variable wird als Unbekannte charakterisiert, die im jeweiligen Sachkontext bestimmt wird. Die algebraischen Inhalte: Variablen, Terme und Gleichungen und der Kalkül-orientierte Umgang mit ihnen werden als Instrumente angesehen, um Probleme lösen zu können.

Bei der Unterscheidung von Termen und Gleichungen in einzelne Teilkapitel variieren die Haltungen der Lehrkräfte. Frau A, Frau D und Herr I verbinden beide Themen und behandeln Terme und ihre Umformung im Zusammenhang mit Gleichungen.
Frau E thematisiert die Terme nur sehr knapp und geht stärker auf die Gleichungen ein. Herr G baut sein Vorgehen in der Algebra auf die Formeln zur Flächenberechnung auf und arbeitet dort indirekt schon mit Termen ohne sie direkt zu benennen. Der Begriff wird nicht explizit

eingeführt. Allerdings werden dort Termumformungen durchgeführt. Erst beim Thema der linearen Zuordnungen führt er Terme und Gleichungen zusammen.
Die Lehrkräfte B, C, F und H trennen die Themen explizit und begründen dies dadurch, dass sie die Fertigkeiten der Termumformung für den Umgang mit den Gleichungen benötigen.
Dies sind unterschiedliche Auffassungen über die Ausprägung der einzelnen Bereiche Terme und Gleichungen, die entweder über die klassisch getrennte Reihenfolge abgearbeitet werden oder aber unter dem Aspekt der Sinnstiftung (zum Beispiel Frau D und Frau E) verkürzt und zusammen mit Gleichungen behandelt werden. Dennoch unterrichten sie alle die Regeln der Term- und Gleichungsumformung, sodass eine Kontrastierung in Bezug auf die unterrichteten Inhalte keine ausreichende Heterogenität liefert.
In all diesen Fällen zeigt sich das Problem der Vermittlung von Regeln. Die Lehrkräfte B-I konstatieren einheitlich, dass ihnen die Vermittlung der Regeln zur Term- und Gleichungsumformung auf einer rein abstrakten Ebene einerseits notwendig, andererseits aber als sehr schwer erscheint, da für die Lernenden sehr abstrakt und mit fehlendem Bezug.
Nachdem die Lehrkräfte in zwei (vorläufige) Typen eingeteilt worden sind, ist es dennoch möglich, gerade wegen der beschriebenen Ähnlichkeit in Bezug auf die inhaltliche Themensetzung zusammenfassend ein inhaltliches Curriculum zu beschreiben, in das die verschiedenen inhaltlichen Überlegungen der untersuchten Lehrkräfte eingebettet werden können:

Tabelle 68: Inhalte des Algebracurriculums

zum Ende der Klasse 8:		quadratische Gleichungen erkennen, lösen und zur Modellierung nutzen	Funktionsbegriff und -gleichung, Wertetabelle und Funktionsgraph	↔	erweitert: Variable als Veränderliche - Anknüpfung an graphische Darstellungen
		↑	↑		
erweitert: Innermathematisches Problemlösen - Beweise	↔	erweitert: Problemlösen, Übersetzung von Sachkontexten in die algebraische Sprache und Lösung des Sachverhaltes/Alltagsbezüge herstellen (Sachverhalte mathematisieren)		↔	Variable als Unbekannte (alle Variablenaspekte)
		↑			
Waagemodell zur Veranschaulichung der Gleichung, erweitert: explizite Betonung der Äquivalenzumformungen	↔	Das Lösen von Gleichungen anhand schematischer Lösungsstrategien			Kalkül-orientierte Tätigkeiten
		↑			
erweitert: Entwicklung des Struktursehens	↔	Regelerarbeitung für Termumformungen		↔	Kalkül-orientierte Tätigkeiten
		↑			
erweitert: Termwertbelegung zur Annäherung an die Idee, dass der Termwert von der Variablenbelegung abhängt	↔	Rechnen und regelgeleiteter Umgang mit Variablen, Termen und Termumformungen		↔	Variable unter dem Kalkülaspekt
		↑			
erweitert: die üblichen Notationen erläutern und anwenden (z.B. Verkürzung des Malzeichens)	↔	erweitert: Variablen einführen über die Platzhalteridee im Kontext oder innermathematisch		↔	Variable unter dem Gegenstandsaspekt oder dem Einsetzungsaspekt - Reflexion über die Bedeutung der Variablen im Kontext
		↑			
Grundlegende Beherrschung der Rechengesetze und -regeln in den Zahlbereichen $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ mit Schwerpunkt auf der Kenntnis der besonderen Eigenschaften in den einzelnen Zahlräumen					

7.3. Leitkategorie: Ziele des Algebra-Curriculums

Neben dem Ziel ihre Unterrichtsinhalte umzusetzen, sieht Frau A die Möglichkeit ihren Lernenden durch ihren Algebraunterricht eine neue Weltsicht zu vermitteln. Diese ist durch abstrakte und logische Denkhandlungen geprägt, die als Bestandteil der Allgemeinbildung gesehen werden und in diesem Sinn zu deren Entwicklung beitragen. Des Weiteren möchte sie eventuelle Ängste gegenüber der Algebra abbauen und den Schülerinnen und Schülern Sicherheit vermitteln.

Herr B ist ebenfalls der Auffassung, dass durch seinen Algebraunterricht das Abstraktionsvermögen der Lernenden und die Fähigkeit sich flexibel in Situationen hineinzuversetzen gesteigert werden können. Die Mathematisierung der verschiedensten Situationen hilft den Lernenden dabei. Er ergänzt, dass die Algebra die Schülerinnen und Schüler auf die inhaltlichen Anforderungen aus der Oberstufe vorbereiten soll. Diesem Ziel schließen sich Herr C, Frau E, Herr F, Herr G, Herr H und Herr I an.

Auch Herr C formuliert das Ziel, dass die Lernenden ihre Fähigkeiten zu abstrahieren erweitern sollen, indem sie lernen zu verallgemeinern. Bei ihm finden sich insofern Erweiterungen, als dass er den Lernenden nicht nur einen neuen Blick auf die Welt, sondern auch auf die reine Mathematik ermöglichen möchte. Sie sehen in der Algebra zum ersten Mal allgemeingültige Erläuterungen. Zudem soll das algebraische Arbeiten bei den Schülerinnen und Schülern zu einem genaueren Arbeiten führen. Dies gelingt über die Idee, die Algebra als Sprache zu sehen und die dort geltenden Regeln zu erlernen.

Frau D sieht die Sinnstiftung als Unterrichtsziel an. Die Lernenden sollen die algebraischen Instrumente einsetzen, um Probleme aus verschiedenen Gebieten lösen zu können. Sie will den Lernenden zeigen, warum sie sich mit der Algebra auseinandersetzen, eben weil durch sie zahlreiche Problemstellungen bearbeitbar werden.

Frau E vereint sowohl das etwas abstraktere Ziel, mit ihrem Unterricht das abstrakte und logische Denken der Lernenden zu schulen, als auch das inhaltliche Ziel die algebraischen Instrumente zur vielfältigen Problemlösung zu nutzen und dabei die Sinnhaftigkeit des Erlernten aufzuzeigen.

Diesem Ziel, die Algebra als Instrument zum Problemlösen zu begreifen, schließt sich Herr F an. Dazu vermittelt er die Algebra als Sprache, die hilft, Sachverhalte vereinfacht und strukturiert auszudrücken. Wie Frau A möchte Herr F Ängste gegenüber dem Rechnen mit Variablen abbauen und den Lernenden zeigen, dass die Beschäftigung mit der Algebra Freude bereiten kann.

Herr G möchte im Kontext des Problemlösens zeigen, dass die Algebra ein Instrument zur Verallgemeinerung ist. Zudem verfolgt er das Ziel, zur Allgemeinbildung der Schülerinnen und Schüler beizutragen, indem sie durch einen verständigen Umgang mit Termen, Variablen und Gleichungen lernen, Informationen aus dem Alltag zu filtern, zum Beispiel aus Zeitungen.

Herr H vereint einige der genannten Ziele. Für ihn sollen der Algebraunterricht und im Speziellen das Verallgemeinern von Situationen und das inner- wie außermathematische Problemlösen dazu führen, das geordnete, kausale, reflektierende und strukturierte Denken der Lernenden zu schulen. Dadurch wird ein Beitrag zur Allgemeinbildung geleistet. Des Weiteren hilft der verständige Umgang mit Variablen, Termen und Gleichungen dabei, gegebene innermathematische Formeln nachvollziehen zu können.

Herr I verfolgt einerseits das Ziel die Algebra als Sprache mit einem eigenen Vokabular und Regelsystem zu verstehen, das erlernt werden muss und eine eigene Faszination besitzt. Die Schülerinnen und Schüler sollen lernen, sich in dieser Sprache auszudrücken und Sachkontexte in diese Sprache zu übersetzen, sie zu abstrahieren und erhaltene Ergebnisse interpretieren und validieren zu können. Den Lernenden soll eine strukturierte Sicht auf die Welt vermittelt werden, die sie durch die abstrakte Arbeit mit den Termen erlernen. Herr I möchte sowohl die

innermathematischen als auch die außermathematischen Problemstellungen mit der Algebra bearbeiten und so die Bedeutung der Algebra vermitteln.
Insgesamt sind diese Ziele eher abstrakt gehalten und differieren zwischen den Lehrkräften nicht wesentlich, insbesondere lehnt keine der Lehrkräfte die genannten Ziele explizit ab oder grenzt sich ihnen gegenüber ab. Dementsprechend kann auf Basis dieser Analyse eine eher einheitliche Übersicht über die Ziele des Algebracurriculums der untersuchten Lehrkräfte gegeben werden, in denen diese festgehalten sind:

Tabelle 69: Ziele des Algebracurriculums - zusammengefasst

Es wird ein Beitrag zur Allgemeinbildung geleistet.	+	Die Schülerinnen und Schüler erlangen eine neue Sicht auf die inner- und außermathematische Welt.	+	Die Algebra wird von den Lernenden als sinnvolle Ergänzung zum bisherigen Wissen wahrgenommen.	+	Die Schülerinnen und Schüler entwickeln Freude an der Beschäftigung mit der Algebra.	+	Die Schülerinnen und Schüler werden auf die Bewältigung der Oberstufe vorbereitet.

↑

Die Schülerinnen und Schüler schulen ihr logisches und abstraktes Denken.	+	Die Schülerinnen und Schüler erleben die Algebra in ihrem Alltag und ihrer Umwelt

↑

Die Schülerinnen und Schüler werden algebraisch tätig, indem sie Situationen generalisieren, interpretieren, validieren, strukturieren, Probleme lösen, modellieren und Kalkül-orientiert arbeiten.

↑

Lernen die Schülerinnen und Schüler genau zu arbeiten	+	Erlangen die Schülerinnen und Schüler Sicherheit im Umgang mit der Algebra	+	Wird die Algebra als Sprache mit Vokabeln (Variablen), Regeln und Strukturen begriffen
↑		↑		↑

Wenn der Algebraunterricht das algebraische Handwerkszeug vermittelt, das bedeutet den verständigen und routinierten Umgang mit Variablen, Termen und Gleichungen.

7.4. Leitkategorie: Ziele des Mathematik-Curriculums

Frau A möchte möglichst viele Schülerinnen und Schüler am Mathematikunterricht partizipieren lassen. Weiterhin möchte sie die Lernenden durch ihren Mathematikunterricht zum selbstständigen Denken anregen und ihnen zeigen, dass sie nicht nur für den Unterricht, sondern vielmehr für ihr weiteres Leben lernen. Durch das im Mathematikunterricht erworbene Wissen sind sie eher in der Lage Entscheidungen zu treffen und ihr Leben sowohl für sich als auch für Gesellschaft im Allgemeinen besser zu gestalten. Die Schülerinnen und Schüler sollen die Mathematik als Hilfswissenschaft begreifen, die ihnen bei diesen Prozessen hilft.
Herr B möchte ebenfalls, dass sein Mathematikunterricht die Lernenden für den Alltag rüstet, indem ihnen die basalen notwendigen Rechenfertigkeiten vermittelt werden. Außerdem soll der Unterricht die Schülerinnen und Schüler auf das Abitur vorbereiten. Diesem Ziel schließen sich Herr G und Herr I an.
Des Weiteren zielt Herr B darauf ab, den Schülerinnen und Schülern die Bedeutung der Mathematik als Grundlagenwissenschaft zu vermitteln, mit deren Hilfe zahlreiche Situationen, Probleme und Anwendungen ihres Lebens bearbeitet werden können. Sind die Begriffe Grundlagenwissenschaft und Hilfswissenschaft im Allgemeinen unterschiedlich konnotiert, so kann in dem beschriebenen Kontext davon ausgegangen werden, dass Frau A und Herr B diese Begriffe sinngleich verwenden.
Das Ziel, die Mathematik als notwendiges Werkzeug zur Problemlösung zu begreifen, formulieren auch Frau D und Frau E. Sie wird dabei als reichhaltiges Instrument verstanden, das es ermöglicht die reale Welt zu beschreiben, sie zu modellieren und so ihren Nutzen im Alltag zu verdeutlichen. Dieses und damit die Wirksamkeit der Mathematik aufzuzeigen, möchten auch Herr C, Herr F und Herr G erreichen.
Etwas abstrakter formuliert, verfolgen die Lehrkräfte C, F, G, H und in sehr ausgeprägter Form Herr I das Ziel, den Lernenden die Mathematik als Konstrukt näher zu bringen. Gemeint ist damit, den Schülerinnen und Schülern die der Mathematik eigenen Argumentationsstrukturen aufzuzeigen, den Aufbau der Mathematik mit ihren immer wiederkehrenden Strukturen zu verdeutlichen, auf deren Basis neue Entwicklungen entdecken sind und damit eine neue Weltsicht zu entwickeln.
Den Wunsch Interesse an der Mathematik zu wecken und Freude an der mathematischen Arbeit zu entwickeln, halten die Lehrkräfte C, D, F, I und mit besonderer Betonung Frau E. Die Lernenden sollen dadurch, dass sie die Mathematik in ihrer Umwelt und damit ihre Nützlichkeit erkennen und das Wirkprinzip verstehen, nämlich über die Verfügbarkeit der verschiedenen Werkzeuge zu Schlussfolgerungen zu gelangen, Selbstwirksamkeitserfahrungen machen und dabei Freude entwickeln.
Eine Kontrastierung ist in Bezug auf den Stellenwert der Mathematik als eigenes Konstrukt möglich. Hierbei stellt sich die Frage, inwiefern Mathematik in der Schule unterrichtet wird, um konkrete Anwendungsbezüge zu behandeln und damit vermeintlich nutzengebunden zu arbeiten oder ob ein eher innermathematisches Arbeiten aufgrund des ihm inhärenten Nutzens anzustreben ist. Letzteres bezeichnet Herr I als ehrlicheren Weg im Umgang mit der Mathematik (vgl. 25:58-1, 55:47-1). Das Bedürfnis, auf die innermathematischen Strukturen einzugehen, um einen vertieften Blick auf Mathematik zu werfen, formulieren Herr C, Herr F, Herr G, Herr H und Herr I. Da aber nach Angaben der jeweiligen Lehrkraft eine Umsetzung im Unterricht nur rudimentär beziehungsweise gar nicht stattfindet, handelt es sich um Ziele auf einer abstrakteren und eher persönlichen Ebene, die getrennt von eigentlichen Planungsgedanken das Unterrichtsgeschehen betreffend behandelt werden. Aufgrund dessen erscheint eine tatsächliche Fallkontrastierung nicht sinnvoll, sodass sich auch in diesem Bereich ein eher einheitliches Argumentationsmuster in der folgenden Form ergibt:

Tabelle 70: Ziele des Mathematikcurriculums (zusammengefasst)

Optional: Kann ein Beitrag zum Erhalt und zur Weiterentwicklung der Gesellschaft geleistet werden				
↑				
Kann ein Beitrag zur Allgemeinbildung der Schülerinnen und Schüler geleistet werden	+	Können die Schülerinnen und Schüler Freude und Begeisterung an der mathematischen Arbeit entwickeln	+	Können die Schülerinnen und Schüler die Oberstufe bewältigen
↑				
Können die Schülerinnen und Schüler die der Mathematik inhärenten Struktur erkennen und schätzen	+	Können die Schülerinnen und Schüler die Universalität der Mathematik erkennen (inner- und außermathematisch)		
↑				
Können sie ihr analytisches, logisches und strukturierendes Denken entwickeln (Struktursinn)	+	Können sie lernen sich besser einzuschätzen	+	Können die Mathematik in ihrer Umwelt erkennen und anwenden (durch Modellierung und Problemlösung, auch Kopfrechnen)
↑				
Wenn die Lernenden den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I abgeschlossen haben und das Grundhandwerkszeug in der Mathematik erlangt haben	+	Wenn die Schülerinnen und Schüler sowohl inner- als auch außermathematische Anwendungsgebiete kennengelernt haben		

7.5. Leitkategorie: Lernen von Algebra/Mathematik

Werden die Überzeugungen der Lehrkräfte in Bezug auf erfolgreiches Lernen betrachtet, so ist festzustellen, dass alle betrachteten Lehrkräfte in unterschiedlicher Weise und mit variierender Intensität ihre Schülerschaft danach unterteilen, ob sie über gewisse Fähigkeiten und Fertigkeiten verfügen oder nicht[115].

Frau A unterteilt ihre Schülerschaft in starke und schwache Lernende und ist der Auffassung, dass die stärkeren Lernenden über ein intuitives Verstehen verfügen und in ihrem Unterricht nicht optimal gefordert werden müssen, gerade weil sie zeitnah und intuitiv, spätestens aber nach einer gewissen Übungsphase, die unterrichteten Inhalte von selbst verstehen. Die schwächeren Schülerinnen und Schüler lernen hingegen eher durch die kleinschrittige, sich oft wiederholende Vorgabe von Algorithmen, Regeln und ihrer Anwendung. Frau A möchte diesen Schülerinnen und Schülern durch entsprechende Unterstützung helfen, die Schule angstfrei zu absolvieren.

Herr B und Herr I teilen diese Ansicht in ähnlicher Form, wenn sie der Auffassung sind, dass diejenigen Schülerinnen und Schülern, die nicht über das nötige „Abstraktionsvermögen" (Herr B) beziehungsweise „Sprachgefühl" (Herr I) verfügen, eine ausreichende Übungs- und Festigungszeit benötigen, um auf diese Weise dazu befähigt zu werden, die formalen Anforderungen des Mathematikunterrichts bewältigen zu können. Den jeweils stärkeren Lernenden, welche die nötigen Fähigkeiten besitzen, wird im Gegensatz zu Frau A aber das Bedürfnis und die Fähigkeit zur Weiterentwicklung zugestanden, weshalb diese entsprechende Aufgabenformate benötigen.

Herr C zum Beispiel stellt Knobelaufgaben und Herr I lässt aktuelle mathematische Entwicklungen nachvollziehen. Herr C unterscheidet sich in seiner Unterteilung der Schülerschaft von den Genannten durch die Fokussierung auf eine dritte Gruppe, das Mittelfeld, an der er seinen Unterricht ausrichtet, da diese das Potenzial besitzt die unterrichteten Inhalte zu verstehen. Er macht aber klar, ebenso wie Frau A und die Lehrer B, F, H und I, dass es bei den schwächeren Schülerinnen und Schülern (Entwicklungs-)Grenzen gibt. Sie können aufgrund ihrer unabhängig vom jeweiligen Unterricht existierenden Begabung ein gewisses schematisches Verständnis der Inhalte nicht überschreiten.

Die Lehrkräfte D, E und G sprechen zwar auch davon, dass es interessiertere oder begabtere Schülerinnen und Schüler gibt, äußern sich aber nicht dazu, inwiefern dies Einfluss auf das Lernverhalten nimmt. Vielmehr betonen sie, dass der Unterricht bei den Lernenden für Erfolgserlebnisse und ein Selbstwirksamkeitsgefühl sorgen soll, sodass Freude und Begeisterung entstehen. Zu diesem Zweck müssen die Lernenden aktiv in das Unterrichtsgeschehen und die Entwicklung der Inhalte eingebunden werden. Dies sind für Frau D und Frau E und für Herrn I die Grundlagen für erfolgreiches Lernen.

Mit der Unterscheidung der Schülerinnen und Schüler in verschiedene Gruppen hängt zudem die Begründung von möglichen Fehlern oder Schwierigkeiten im Umgang mit der Algebra auf Seiten der Lernenden zusammen. Dadurch, dass nämlich entweder nach kognitiven oder emotional/motivationalen Kriterien unterschieden wird, die von den Lehrkräften als eher stabile Charakteristika der Lernenden beschrieben werden, werden auch mögliche Fehler durch diese Charakteristik begründet (vgl. zum Beispiel 6.9.4).

Alle Lehrkräfte sehen darüber hinaus in der Algebra die Chance für die Schülerinnen und Schüler durch die Einhaltung der vermittelten Rechenregeln und die Abarbeitung von Rechenschemata selbst zu Ergebnissen zu kommen, sich auch selbst durch Rückeinsetzung überprüfen zu können und dadurch Erfolgserlebnisse zu erlangen. Die Gelegenheit in diesem

[115] Die Konsequenzen dieser Unterteilung für die jeweilige Unterrichtsgestaltung variieren zwischen den Lehrkräften, dies wird im Abschnitt „Leitkategorie: Lehren von Algebra/Mathematik" thematisiert. Für das erfolgreiche Lernen ist allein die Unterteilung relevant, weil mit dieser die Attribuierung der Schülerinnen und Schüler in Bezug auf ihr Lernverhalten verbunden ist.

Sinn positive Gefühle bei den Schülerinnen und Schülern auszulösen, wird von allen Lehrkräften als wichtiges Element im Lernprozess gekennzeichnet.
Neben dieser generellen Ansicht, dass Freude und Interesse Voraussetzungen für erfolgreiches Lernen sind, teilen alle Lehrkräfte bis auf Frau A, die darauf nicht eingeht, die Haltung, dass Lernen nur gelingen kann, wenn den Lernenden die behandelten Inhalte sinnvoll erscheinen.
Die algebraischen Inhalte unmittelbar sinnvoll erscheinen zu lassen, stellt eine Herausforderung für die teilnehmenden Lehrkräfte dar. So verweist Herr I darauf, dass es aus seiner Sicht keinen unmittelbaren Nutzen für die Lernenden bei der Behandlung der Algebra gibt. Die Verknüpfung der eher formal-abstrakten Formelsprache mit Anwendungsbezügen, bei denen konkrete Ergebnisse in Abhängigkeit der jeweiligen Sachsituation erzielt werden können oder auch der Rückbezug von Variablen auf konkrete Zahlen, ist daher für die Lehrkräfte B, C, D, E, F, G, H und I notwendiges Mittel, um so durch (vermeintliche) Alltagsbezüge oder durch Anknüpfung an das Vorwissen der Lernenden Sinn stiften zu können. Frau A legt ihren Fokus eher auf die Einübung von Regeln und schematischen Verfahren. Dabei sieht sie den Nutzen in der Vorbereitung auf andere Fächer und den späteren Mathematikunterricht und vermittelt dies den Schülerinnen und Schülern.
Ein weiterer Punkt, in dem eher Einigkeit besteht, betrifft das Lernen durch Übung. Herr C ist beispielsweise davon überzeugt, dass durch ein ständiges Anwenden der Unterrichtsinhalte ein Verstehen dieser ermöglicht wird. Auch Frau A, Herr B, Frau D, Frau E, Herr G, Herr H und Herr I vertreten die Auffassung, dass Lernen zahlreiche Wiederholungen und schließlich Zeit braucht[116]. Gerade in der Algebra brauchen die Lernenden laut Frau E aufgrund des teilweise fehlenden Anwendungsbezugs und der gleichzeitig hohen Relevanz der Regeln und ihrer Beherrschung mehr Zeit zum Üben. Herr F ist der Auffassung, dass der Übungsaufwand von den jeweiligen Lernenden abhängig ist und trifft dementsprechend keine allgemeine Aussage über das Verhältnis von Lernen und Üben.
Zusammengefasst besteht ein Konsens dahingehend, dass Übung und die Wiederholung der Regeln, Schemata und Algorithmen, entweder in ihrer Reinform oder in Verbindung mit Anwendungsbezügen, allgemein und speziell in der Algebra ein wesentliches Kriterium für erfolgreiches Lernen darstellt. Weiterhin wird das Bestreben der Lehrkräfte sichtbar, den Sinn beziehungsweise Nutzen der unterrichteten Inhalte den Schülerinnen und Schülern gegenüber zu verdeutlichen. Darüber hinaus werden das Interesse, die Freude und das Erleben von Erfolg im Unterricht von den Lehrkräften als wichtiges Element des Lernprozesses gekennzeichnet.
Die folgende Graphik veranschaulicht die Kriterien guten Lernens aus Sicht der befragten Lehrerinnen und Lehrer. Dabei beschreibt der obere Teil die allgemeinen Kriterien erfolgreichen Lernens und die unteren zwei Zeilen die vorangegangene Unterteilung der Lernenden:

[116] In der Art der Übung unterscheiden sich die Lehrkräfte. Dies betrifft aber eher ihren Lehrstil und wird daher im Abschnitt Lehren (vgl. Abschnitt 7.6) aufgegriffen.

Tabelle 71: Das Lernen des Schülerinnen und Schüler (zusammengefasst)

Erfolgreiches Lernen wird ermöglicht				
↑				↑
Die Schülerinnen und Schüler entwickeln Freude, Begeisterung und Interesse				
↑				
Sehen den Sinn sich mit dem Unterrichtsinhalt auseinanderzusetzen				Erfolgserlebnisse, Selbstwirksamkeit
↑				↑
Sinnstiftung durch Rückbindung an konkrete Zahlen (Einsetzung von Zahlen für Variablen) oder durch Anwendungsbezüge (inner- und außermathematisch) mit dem Schwerpunkt auf der konkreten Bestimmung der Variablen.	+	Betonung des Nutzens der Algebra für das Bestehen des Abiturs und als Hilfe für andere Fächer	+	Übung (verschiedene Konzepte), zahlreiche Wiederholungen, Hausaufgaben (Gelegenheit allein über Inhalte nachzudenken), wiederholtes Anwenden der Prozeduren (für sich genommen oder geknüpft an Anwendungsbezüge)

Optional: Binnendifferenzierung in der Aufgabenkultur Optional: Ausrichtung des Unterrichts an unterschiedlichen Leistungsgruppen
↑
Unterteilung der Schülerinnen und Schüler in unterschiedliche Leistungsgruppen

7.6. Leitkategorie: Lehren von Algebra/Mathematik

Frau A präferiert aufgrund der Orientierung ihres Unterrichts an den schwächeren Schülerinnen und Schülern und deren Bedürfnis nach Sicherheit ein lehrkraftzentriertes, strukturiertes, kleinschrittiges und sehr gelenktes Vorgehen im Unterricht. Guter Unterricht ist für sie sehr strukturiert und gibt den Schülerinnen und Schülern klare Rahmenbedingungen vor, in Form von Algorithmen und Schemata. Mit Hilfe von geschlossenen Aufgaben, die ihren Fokus auf das Ausrechnen konkreter Lösungen legen, übt und wiederholt Frau A - ein notwendiger Bestandteil guten Mathematikunterrichts.
In ihrer Ablehnung anwendungsorientierter Aufgaben, von Modellierungs- und Problemlöseaufgaben nimmt sie eine gesonderte Position ein. Denn obwohl auch die Lehrkräfte B, C, G, H und I lehrkraftzentriert und die Lehrkräfte D, E und H eher lehrkraftzentriert unterrichten und obwohl nahezu alle Lehrkräfte Wert auf konkrete, eindeutige Lösungen legen, ist der Unterschied zwischen den individuellen Vorstellungen den Unterricht betreffend gravierend. Dieser ergibt sich vor allem daraus, dass die Motivation der Lernenden und die Sinnstiftung im Unterricht von den übrigen Lehrkräften als treibende Kraft in der Aufgaben- und Methodenwahl gesehen wird. Insofern wird wie auch im Abschnitt „Leitkategorie: Inhalt des Algebra-Curriculums“ durch Frau A ein gesonderter Typus beschrieben. Dieser wird in Bezug auf den Unterrichtsstil als (vorläufiger) Typus „Traditionell“ wie folgt beschrieben:

Subjektive Theorien, die dem vorläufigen Typus **Traditionell**, zugeordnet werden, verstehen guten Unterricht als durch die Lehrkraft geführt und stark gelenkt, also als eher instruktiv gekennzeichnet. Die Verwendung geschlossener Aufgaben, deren Lösung durch die Durchführung von Algorithmen und Abarbeitung von Schemata herbeigeführt wird, sorgt neben der Lehrkraftzentrierung für eine klare Strukturierung des Unterrichts. Zahlreiche Wiederholungen und Übungen ähnlicher Aufgabentypen sorgen für die Verständnissicherung.

Wie bereits angedeutet, teilen die befragten Lehrkräfte vor allem in der Algebra aufgrund ihres erhöhten Abstraktionsgrads die Einstellung, dass ein lehrkraftzentrierter Unterrichtsstil (B, C, G, H, I) oder zumindest ein stärker angeleitetes Unterrichtsgeschehen (D, E, F) anzustreben sind. Weiterhin verfolgen die Lehrkräfte das Ziel, ihre Schülerinnen und Schüler zu motivieren und ihnen im Unterricht über die verschiedenen Aufgabenkonzepte Anknüpfungspunkte für die Sinnstiftung zu geben. Des Weiteren streben die Lehrkräfte danach über konkrete, eher geschlossene Aufgaben und über die Erzeugung konkreter eindeutiger Lösungen das Thema Algebra fassbar zu machen. Auch das Thema Übung ist für alle Lehrkräfte ein integraler Bestandteil des Unterrichts. Die Lehrkräfte B bis I achten dabei auf ein binnendifferenzierendes, anschauliches und abwechslungsreiches Übungskonzept, das die unterschiedlichen Bedürfnisse der Lernenden berücksichtigt.
Die folgende Matrix gibt eine Übersicht über einige zentrale Punkte des Unterrichtsstils der Lehrkräfte. Dabei bedeutet ein fehlendes Kreuz nicht zwingend, dass die Lehrkraft den betreffenden Aspekt ablehnt, sondern vielmehr, dass dieser nicht erwähnt wurde. Wird explizit Ablehnung geäußert wird ein „A“ eingefügt:

Tabelle 72: Übersicht über die Kriterien "guten" Unterrichts

Kategorie \ Lehrkraft	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Lehrkraftzentriert	x	x	x	eher ja	eher ja	eher ja	x	x	x
Strukturiert	x		x		x		x	x	
Kleinschrittig/Regelhaft	x	eher ja	eher ja		x			x	x
Schemata/Algorithmen[117]	x	x	x	eher ja	x	eher ja	x	x	x
Nicht unnötig formal[118]	x	x	x		A	eher A	eher ja	A	eher ja
Geschlossene Aufgaben	x	x							x
Schwerpunkt Rechnen/ Erzeugung konkreter Ergebnisse	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Motivation/Sinnstiftung		x		x	x	x	x	x	x
Anwendungsbezüge (unterschiedlich konnotiert, aber anhand der Beispiele wird deutlich, dass modellieren und Problemlösen ähnlich konnotiert sind)	eher A	x	x	x	x	x	x	x	x
(Viel) Übung (Ü)	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Ü - binnendifferenziert, anschaulich, abwechslungsreich, mit verschiedenen Zugängen	A	eher ja	x	x	x	x	x	x	x
Ü - rein auf symbolischer Ebene	x	eher A	A	A	A	A	A	A	eher A
Lernende üben viel selbstständig (als Eigenaktivität beschrieben) - Idee Verstehen durch Anwendung der Inhalte	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Offene Fehlerkultur			x	x	x	x	x		x
Implementierung einer Metaebene (Schemata reflektieren, das Vorgehen und die Verwendung der mathematischen Symbolik reflektieren)	A		eher ja	x	x	x	x	x	x

[117] Vor allem die Lehrkräfte B-I mit Ausnahme von Herrn H, der wie Frau A die Schemata uneingeschränkt als Hilfen im Unterricht versteht, betrachten Schemata als hilfreiches Mittel, wenn sie denn bewusst und reflektiert genutzt werden.
[118] Hierbei wird entweder davon gesprochen keine Definitionen oder nur im jeweiligen Sachkontext geben zu wollen.

Bis auf die Frage nach dem Grad des Formalismus unterscheiden sich die Lehrkräfte B bis I nicht wesentlich, wobei Herr B und Herr I in Punkten, wie den gewählten Aufgabenformen, eher zu Frau A tendieren und sich damit in Richtung eines klassischen Unterrichtsstils bewegen. Dies kann aber insofern relativiert werden, als die folgende Beschreibung möglich ist: Werden die Lehrkräfte B bis I zu einem Typus vereint, so steht dieser nicht im diametralen Gegensatz zum (vorläufigen) Typus **Traditionell**, vielmehr ist er in seiner Ausrichtung als etwas progressiver, aber insgesamt immer noch als klassisch zu charakterisieren.
Dies wird daran festgemacht, dass die geltenden Regeln und Schemata sowie deren Abarbeitung in der Algebra am Anfang stehen und das Grundgerüst des Algebraunterrichts bilden. Ein weiteres Indiz stellt die Fokussierung auf die konkreten Ergebnisse und die eingekleideten Aufgaben dar. Auch die Anschauung, dass Algebra eher lehrkraftzentriert unterrichtet wird, um wegen des Abstraktionsgrades eine Orientierungshilfe zu bieten oder weil es für die Lernenden als einfacher empfunden wird, weist in diese Richtung.
Progressiver ist dieser Typus insofern, als dass auf eine reflektierende Ebene im Unterricht geachtet wird und darauf, dass die Übungsphasen und Aufgabenformen abwechslungsreicher und interaktiver gestaltet werden. Dies betrifft zum Beispiel Frau E, wenn sie die erarbeiteten mathematischen Regeln in Memorys wiederholen lässt oder wenn die Lehrkräfte auf die Binnendifferenzierung im Unterricht oder auf aktivierende Aufgabenstellungen achten. Zudem werden die Lernenden in der Bearbeitung von anwendungsorientierten Aufgaben, wenn auch eher angeleitet, dazu angehalten, zunächst zu abstrahieren und den Sachverhalt in die mathematische Sprache zu übersetzen, bevor dann die konkrete Lösung der Aufgabe im Zentrum steht.
Durch die Kombination einer variablen an den Lernenden orientierten Methodik und der insgesamt lehrkraftzentrierten Unterrichtsgestaltung ist von einer co-instruktiven Lehr-/Lernorientierung zu sprechen. Dies bezieht sich auf die in Kapitel 2.3 beschriebene Aufteilung der Lehr-/Lernorientierung auf ein Spektrum, auf dessen einer Seite eine instruktive und auf deren anderer Seite eine konstruktive Lehr-/Lernorientierung zu finden ist. Der Begriff „co-instruktiv" wird gewählt, weil trotz der beschriebenen offenen und eher konstruktivistisch geprägten Lernumgebung die entscheidenden, inhaltlichen Zusammenfassungen und auch die Strukturierung sowie die Betonung der Schemata im Unterricht durch die jeweilige Lehrkraft erfolgt.
Daraus wird der (vorläufige) Typus „Motivation" abgeleitet:

Subjektive Theorien, die dem (vorläufigen) Typus **Motivation** zugeordnet werden, sind in erster Linie durch die Orientierung an den Bedürfnissen der Lernenden gekennzeichnet. Das Bedürfnis, diese zu motivieren, indem ihnen der Sinn des Erlernten nähergebracht wird, ist zentral.
In der Folge werden die Lernenden entsprechend ihrer individuellen Voraussetzungen in einem binnendifferenzierten, anschaulichen, interaktiven und abwechslungsreichen Lernumfeld gefördert. Dabei wird den Schülerinnen und Schülern durch primär konkret auszurechnende Aufgaben ein Gefühl der Wirksamkeit vermittelt. Schemata, Algorithmen und die Anwendung dieser dienen als zu reflektierende Orientierungshilfe im Unterricht.
Zentrale Inhalte werden durch die Lehrkraft gebündelt und erklärt. Die Lehr-/Lernorientierung ist dabei als co-instruktiv zu kennzeichnen.
In zahlreichen Übungs- und Vertiefungsphasen wenden die Lernenden diese an und erlangen so den Zugang zu den vermittelten Inhalten.

Graphisch dargestellt werden, können die Argumente „guten" Unterricht betreffend, wie folgt. Dabei werden die Anschauungen des vorläufigen Typus „Motivation" charakterisiert. Frau A stellt einen in der Graphik nicht berücksichtigten Sonderfall dar:

Tabelle 73: "Guter Unterricht" im (vorläufigen) Typus „Motivation“

Erreichen die Schülerinnen und Schüler ein Selbstwirksamkeitsgefühl	+	Erkennen den Sinn im Erlernten	+	Sind die Schülerinnen und Schüler motiviert, sich mit den Inhalten zu beschäftigen
		↑		
Wenn ein interaktives, anschauliches, abwechslungsreiches, binnendifferenziertes Lernumfeld gegeben wird	+	Wenn auf eine offene Fehlerkultur (und entsprechende Fehlersensibilität) geachtet wird	+	Wenn ausreichend Zeit zur Übung, die ebenfalls abwechslungsreich und interaktiv gestaltet wird
+		+		+
Wenn an den Erwartungshorizont der Schülerinnen und Schüler angeknüpft wird	+	Wenn konkret zu berechnende Aufgaben gewählt werden, unter Einbeziehung von Anwendungskontexten	+	Wenn Strukturen und Orientierungshilfen durch die Lehrkraft vorgegeben werden

Die in den unteren zwei Zeilen genannten sechs Bedingungen stellen die Voraussetzungen zur Erreichung der in der oberen Zeile beschriebenen Ziele dar.

7.7. Leitkategorie: Bild von Mathematik

Sollen fallübergreifende Aussagen zum Bild der Mathematik getroffen werden, so hat sich in der Analyse in den jeweiligen Abschnitten zum Bild der Mathematik in Kapitel 6 gezeigt, dass das im Fragebogen erfasste allgemeine Bild der Mathematik oft Abweichungen zu dem im durch das Thema „Algebra im Unterricht“ geprägten Interview erfassten allgemeineren Bild der Schulmathematik aufweist (in sechs von neun Fällen).
Daher muss eine Entscheidung getroffen werden, welches Resultat hier als Datengrundlage genutzt wird. Weil es in dieser Untersuchung um Algebra und um den Schulunterricht geht und weil die Daten aus dem Interview umfassender sind, wird sich dafür entschieden, das aus dem Interview rekonstruierte Bild der Mathematik zu nutzen.
Die Kontrastierung wird für jede Lehrkraft auf Basis der Analyse in Kapitel 6, Abschnitte „Das Bild der Mathematik“, gemäß der jeweils am stärksten ausgeprägten Skalen: „Prozess“, „Anwendung“, „Schema“ oder „Formalismus“ vorgenommen.
Im Fall von Frau A ist der Schema-Aspekt eindeutig am stärksten ausgeprägt (vgl. 6.1.8). Bei den Lehrkräften B, C, D und I ist der Aspekt Anwendung am stärksten ausgeprägt, wobei der Schema-Aspekt in seiner Ausprägung an zweiter Stelle steht. Bei diesen Lehrkräften wurde herausgestellt, dass Schemata und Algorithmen als Mittel begriffen werde, um anwendungsorientiert unterrichten zu können (vgl. 6.2.7, 6.3.7, 6.4.7 und 6.9.7). Ähnliches wurde für die Lehrkräfte E und G gezeigt, wobei diese zusätzlich auf die Einhaltung formaler Schreibweisen achten (vgl. 6.5.7 und 6.7.7). Der Formalismus-Aspekt ist bei diesen Lehrkräften stärker ausgeprägt als bei den zuvor Genannten.
Schließlich bilden die Lehrkräfte F und H eine dritte Gruppe, weil bei ihnen zwar der Schema-Aspekt am stärksten ausgeprägt war und sie der Beherrschung von Schemata und Algorithmen einen eigenen Wert als Unterrichtsziel zuweisen, die Anwendungsorientierung aber ebenfalls als eigenständiges Unterrichtsziel formuliert wird. Genau wie die gerade beschriebenen Gruppen bezeichnen sie dabei die Beherrschung von Schemata und Algorithmen als Voraussetzung, um anwendungsorientiert unterrichten zu können (vgl. 6.8.7 und 6.6.7).
Zusammengefasst wird dies in der folgenden Graphik:

Tabelle 74: Das Bild der Mathematik - Übersicht

Lehrkraft	Bild der Mathematik
A	Die Schematikerin
B	Der schemaorientierte Anwender
C	Der schemaorientierte Anwender
D	Die schemaorientierte Anwenderin
E	Die schematisch- und formalistisch orientierte Anwenderin
F	Der anwendungsorientierte Schematiker
G	Der schematisch- und formalistisch orientierte Anwender
H	Der anwendungsorientierte Schematiker
I	Der schemaorientierte Anwender

Dementsprechend treten die folgenden drei (vorläufigen) Typen auf: die Schematikerinnen und Schematiker, die schema- (und formalistisch)orientierten Anwenderinnen und Anwender und die anwendungsorientierten Schematikerinnen und Schematiker.

Frau A wird unter den (vorläufigen) Typus „Schematikerin oder Schematiker“ gefasst:

Wird das Bild der Mathematik einer Lehrkraft dem (vorläufigen) Typus **Schematikerinnen oder Schematiker** zugeordnet, so ist dies durch die eindeutige Zustimmung zur Verwendung von Schemata und Algorithmen im Unterricht gekennzeichnet. Die erfolgreiche Abarbeitung eines Schemas und die flexible Anwendung von Schemata und Algorithmen stellen primäre inhaltliche Ziele des Unterrichts dar.

Die Lehrkräfte B, C, D, E, G und I werden unter den (vorläufigen) Typus „schema- (und formalistisch) orientierte Anwenderinnen und Anwender“ gefasst und grenzen sich in Bezug auf den Stellenwert des Schema-Aspekts vor allem dadurch von den Schematikerinnen und Schematikern ab, weil sie Schemata und Algorithmen in erster Linie als Mittel zum Zweck begreifen:

Wird das Bild der Mathematik einer Lehrkraft dem (vorläufigen) Typus **schema- (und formalistisch) orientierte Anwenderin oder Anwender** zugeordnet, so wird dadurch die gegenseitige Abhängigkeit der Schemata und Algorithmen und der Anwendung verdeutlicht. Diese Lehrkräfte betrachten Schemata und Algorithmen als wesentlichen Bestandteil der Mathematik, aber nicht als Selbstzweck, sondern vor allem als Instrument, um anwendungsorientiert zu arbeiten. Das Ziel dieser Lehrkräfte ist es aufzuzeigen, in welchen Bereichen die Mathematik nutzt und angewendet werden kann. Zur konkreten Auflösung verschiedener Sachsituationen, die dies verdeutlichen, werden Lösungsschemata und **-**algorithmen benötigt.

Die Lehrer F und H werden unter den (vorläufigen) Typus „anwendungsorientierte Schematikerinnen und Schematiker“ gefasst. Dieser ergänzt den gerade genannten (vorläufigen) Typus, indem er zwar einerseits Schemata und Algorithmen als Mittel zum Zweck der Anwendung versteht, diesen aber auch einen eigenen Wert als Unterrichtsziel zuschreibt:

Wird das Bild der Mathematik einer Lehrkraft dem (vorläufigen) Typus **anwendungsorientierter Schematikerinnen und Schematiker** zugeordnet, so wird dadurch die gegenseitige Abhängigkeit der Schemata und Algorithmen und der Anwendung verdeutlicht. Diese Lehrkräfte empfinden die Anwendung in der Mathematik als interessant und sehen in ihr ein valides Instrument der Sinnstiftung und betrachten sie gleichzeitig als Problemlöse- und Modellierungsinstrument. Gleichzeitig werden Schemata und Algorithmen als eigener Wert betrachtet, der dazu beiträgt das strukturierte Denken zu schulen. Zudem werden Schemata als Mittel zum Zweck des Problemlösens und Modellierens betrachtet. Durch diese Doppelfunktion liegt der Fokus trotz des eher ausgeglichenen Verhältnisses in der positiven Attribuierung von Schema und Anwendung eher auf dem Schematischen.

Insgesamt spielt der Schema-Aspekt bei allen Lehrkräften eine Rolle, entweder als eigenes Unterrichtsziel, als Mittel zum Zweck der Anwendung oder als partielles Unterrichtsziel durch welches das Struktursehen oder auch das strukturierte Denken gefördert werden.

7.8. Synthese der Typen und Zusammenfassung - Stufen 3 und 4

In diesem Abschnitt werden nun die Ausführungen zusammengefügt und sowohl fall- als auch kategorienübergreifend auf inhaltlicher Ebene verglichen. In diesem Zusammenhang erfolgt die Zusammenfassung über die vorangegangene Analyse.

In Bezug auf die inhaltlichen Ziele des Algebracurriculums konnte festgestellt werden, dass sich die individuellen stoffinhaltlichen Ziele der jeweiligen Lehrkräfte ähneln. Wesentliche Bestandteile des inhaltlichen Unterrichtsaufbaus treten in der folgenden Reihenfolge bei allen Lehrkräften auf:

- Voraussetzung ist die Sicherheit im Umgang mit den Rechenregeln und -gesetzen in den bis zur Klasse 7 behandelten Zahlbereichen.
- Variablen werden in der Verbindung mit Termen und Gleichungen zur Beschreibung von Sachverhalten genutzt, dabei erfolgt ihre Definition situationsabhängig.
- Der Umgang mit Variablen als Vokabel der mathematischen Sprache wird im Zuge von Term- und später Gleichungsumformungen schematisch erlernt.
- Das (schematische) Lösen von Gleichungen ist ein eigenes inhaltliches Ziel.
- Außer Frau A: Im späteren Verlauf werden die zuvor erlernten syntaktischen Inhalte semantisch zum Lösen von inner- sowie außermathematischen Problemen genutzt. Dabei wird über die jeweilige Bedeutung der Variablen reflektiert.

Frau A beschränkt ihr Vorgehen bewusst auf die ersten vier Stufen. Bis dahin ist daher von einer deutlichen Ähnlichkeit im Vorgehen zu sprechen.

Die formulierten Ziele des Algebra- und des Mathematikcurriculums sind auf einer abstrakteren Ebene als eher ähnlich zu werten. So wurden die folgenden Ziele auf beiden Ebenen genannt:

- sollen einen Beitrag zur Allgemeinbildung leisten,
- sollen eine neue Weltsicht/einen neuen Blickwinkel ermöglichen,
- sollen das logische und abstrakte Denken schulen,
- sollen die Anwendbarkeit und Gegenwart der Algebra/Mathematik im Alltag zeigen,
- sollen die Lernenden begeistern, motivieren und Freude an der algebraischen/mathematischen Arbeit auslösen,
- sollen die Strukturen der Mathematik verdeutlichen,
- sollen auf die Oberstufe vorbereiten und
- sollen den Lernenden in ihrer persönlichen Entwicklung helfen.

Aufgrund dieser Parallelität in der Argumentation und weil die Algebra von den Lehrkräften als Kern oder als Sprache der Mathematik bezeichnet worden ist, lassen sich die Ziele des Algebracurriculums in die Zielstrukturen des Mathematikcurriculums einbetten.

Das Lernen und Lehren der Algebra beziehungsweise der Mathematik besteht vor allem in Bezug auf das Bedürfnis sinnstiftend zu unterrichten und die Motivation der Lernenden in den Fokus zu stellen, bis auf Frau A, Einigkeit. Wesentliche Kriterien erfolgreichen Lernens, die allen Lehrkräften gemein sind, beziehen sich darauf:

- über die Unterscheidung der Schülerschaft in verschieden attribuierte Gruppen einen jeweils angepassten Unterrichtsstil zu implementieren,
- durch umfangreiche Übungs- und Erarbeitungsphasen anhand verschiedener Aufgabentypen (bis auf Frau A) den jeweiligen Nutzen der behandelten Inhalte sowie die Sinnhaftigkeit dieser verdeutlichen,
- Erfolgserlebnisse zu ermöglichen und
- Freude und Begeisterung bei den Lernenden auszulösen.

Bei der Frage nach gutem Algebra- beziehungsweise Mathematikunterricht stellt sich den Lehrkräften, bis auf Frau A, die Herausforderung die algebraischen Prozeduren mit einem für die Schülerinnen und Schüler sichtbaren Nutzen zu verknüpfen. Des Weiteren sind die folgenden Kriterien guten Unterrichts in den Gesprächen deutlich geworden:

Lehrkräfte B-I	Frau A
Eher Lehrkraftzentrierung	Eindeutige Lehrkraftzentrierung
Co-instruktive Lehr-/Lernorientierung	Instruktive Lehr-/Lernorientierung
Verwendung kombinierter Aufgaben, in denen zunächst auf einen Term/eine Gleichung abstrahiert wird und die schließlich eher geschlossen berechnet werden	Verwendung geschlossener Aufgaben
Ein eher strukturierter und auf Orientierungshilfen ausgelegter Unterricht	Ein sehr strukturierter Unterricht
Viel Übung anhand vielfältiger, anschaulicher, schülernaher Aufgabentypen	Viel Übung und Wiederholung anhand ähnlicher Aufgabentypen
Offene Fehlerkultur	
Schemata und Algorithmen werden als notwendige Hilfestellungen betrachtet, aber eindeutig als Mittel zum Zweck dargestellt	Ein auf die Abarbeitung von Schemata und Algorithmen ausgerichteter Unterricht
Anknüpfen an den Erwartungs- und Erfahrungshorizont der Lernenden	
Selbstwirksamkeit, Erfolgserlebnisse, Sinn und Motivation als handlungsleitende Motivation	

Bis hierhin lässt sich vor allem in Bezug auf das Verständnis guten Unterrichts die Unterscheidung zwischen den Lehrkräften A und B-I feststellen. Diese Differenzierung konnte ebenfalls für die inhaltlichen Überlegungen konstatiert werden, wobei der dort konstruierte (vorläufige) Typus „Kontext“ eine Erweiterung des (vorläufigen) Typus „Werkzeugkasten“ darstellt und nicht in direktem Widerspruch zu diesem steht. Widersprüchlich sind hingegen eher die (vorläufigen) Typen „Motivation“ und „Traditionell“, wobei sich die Widersprüchlichkeit aus der unterschiedlichen Handlungsmotivation im Unterricht ableiten lässt.
Insofern wird eine Unterscheidung in Typen über die fünf Leitkategorien Inhalt, Ziele des Algebra- und Mathematikcurriculums und das Lernen und Lehren von Algebra hinweg nur in Bezug auf das Lehren vorgenommen, da sich die inhaltliche Unterscheidung ohne Brüche zu der Unterscheidung in die (vorläufigen) Typen „Motivation“ und „Traditionell“ einbinden lässt. In der Folge wird der (vorläufige) Typus „Werkzeugkasten“ in den (vorläufigen) Typus „Traditionell“ eingebunden und der (vorläufige) Typus „Kontext“ in den (vorläufigen) Typus „Motivation“.
Bei der Analyse des Bildes der Mathematik konnten drei unterschiedliche (vorläufige) Typen herausgestellt werden: die „Schematikerinnen oder Schematiker“, die „schema-(und formalistisch)orientierten Anwenderinnen und Anwender“ und die „anwendungsorientierten Schematikerinnen und Schematiker“. Dabei fällt auf, dass der Schema-Aspekt in allen Beschreibungen eine prominente Stellung einnimmt. Es ist daher zulässig, davon zu sprechen, dass das auf die Algebra bezogene Bild der Schulmathematik in Hinsicht auf die untersuchten Lehrkräfte in der Tendenz eher schematisch geprägt ist.
Aufgrund der inhaltlichen Konsistenz ist es möglich, ohne Bruch den (vorläufigen) Typus „Schematikerin oder Schematiker“ mit den (vorläufigen) Typen „Werkzeugkasten“ und „Traditionell“ zu einem Typus zu vereinen, der von nun an als Typus „Traditionell“ geführt und wie folgt beschrieben wird:

Individuelle Curricula, die dem Typus **Traditionell** zugeordnet werden, beschreiben die Algebra als Sammlung von Regeln, Algorithmen und Schemata, die gelernt werden müssen. Die Kalkül-orientierte Beschäftigung mit den Variablen, Termen und Gleichungen erfolgt zumeist auf der symbolischen Ebene. Anwendungsbezügen und allgemein mathematischen Kompetenzen kommt bei diesem Typus eine eher untergeordnete Bedeutung zu.
Guter Unterricht ist charakterisiert durch die Lehrkraftzentrierung und starke Lenkung des Unterrichtsgeschehens, ist also als instruktiv zu kennzeichnen. Die Verwendung geschlossener Aufgaben, deren Lösung durch die Durchführung von Algorithmen und Abarbeitung von Schemata herbeigeführt wird, sorgt neben der Lehrkraftzentrierung für eine klare Strukturierung des Unterrichts. Zahlreiche Wiederholungen und Übungen ähnlicher Aufgabentypen sorgen für die Verständnissicherung.
Die eindeutige Zustimmung zur Verwendung von Schemata und Algorithmen im Unterricht ist weiterhin kennzeichnend, wobei die erfolgreiche Abarbeitung eines Schemas und die flexible Anwendung von Schemata und Algorithmen primäre inhaltliche Ziele des Unterrichts darstellen.

Die beiden (vorläufigen) Typen der „schema- (und formalistisch) orientierten Anwenderinnen und Anwender“ und der „anwendungsorientierten Schematikerinnen und Schematiker“ ähneln sich insofern, als dass sie die gegenseitige Abhängigkeit eines schemaorientierten Vorgehens mit der Notwendigkeit eines Anwendungsbezugs im Unterricht anerkennen. Ohne die Verfügbarkeit bestimmter schematischer Lösungsstrategien sind Anwendungsbezüge aus ihrer Sicht in der Algebra nicht lösbar. Andererseits benötigen Schemata und Algorithmen Anwendungsbezüge, um ihre Relevanz und ihren Nutzen zu rechtfertigen.
Die „anwendungsorientierten Schematikerinnen und Schematiker“ ergänzen, dass Schemata einen eigenen Wert besitzen unabhängig von Anwendungsbezügen, da durch sie zum Beispiel das Struktursehen gefördert werden kann. Dies stellt eine Ergänzung und keinen Widerspruch zum erstbeschriebenen (vorläufigen) Typus dar. Allerdings wird durch diese Unterscheidung dem globalen Belief Schema ein doch eher unterschiedlicher Stellenwert in Bezug auf seine Gewichtung beigemessen. Im ersten Fall stellen Schemata und Algorithmen ein Mittel zum Zweck dar. Im zweiten Fall wird ihnen ein eigener Wert zugestanden.
Aus diesem Grund ist eine inhaltliche Zusammenführung beider (vorläufiger) Typen zu einem neuen Typus nicht sinnvoll. Bei der Beibehaltung beider Typen lässt sich aber in beiden Fällen eine inhaltliche Verbindung zu den (vorläufigen) Typen „Motivation“ und „Kontext“ finden, sodass diese beiden (vorläufigen) Typen jeweils in die Charakterisierung der beiden Typen einfließen und mit diesen verschmelzen. Demzufolge werden die beiden Typen der „schema-(und formalistisch)orientierten Anwenderinnen und Anwender“ und der „anwendungsorientierten Schematikerinnen und Schematiker“ erweitert und als Typen, die aus der Typisierung resultieren, wie folgt beschrieben:

Individuelle Curricula, die dem Typus der **schema-und(formalistisch)orientierten Anwenderinnen und Anwender** zugeordnet werden, beschreiben die Behandlung algebraischer Inhalte, wie der Variablen, Terme und Gleichungen in Verbindung mit innermathematischen (zum Beispiel: die Waage) und außermathematischen Kontexten mit dem Ziel der Sinnstiftung. Die Variable wird als Unbekannte charakterisiert, die im jeweiligen Sachkontext bestimmt wird. Algebraische Inhalte: Variablen, Terme und Gleichungen und der Kalkülorientierte Umgang mit ihnen werden als Instrumente angesehen, um Probleme lösen zu können.
Ihr unterrichtliches Vorgehen in erster Linie durch die Orientierung an den Bedürfnissen der Lernenden gekennzeichnet. Das Bedürfnis, diese zu motivieren, indem ihnen der Sinn des Erlernten nähergebracht wird, ist zentral.
In der Folge werden die Lernenden entsprechend ihrer individuellen Voraussetzungen in einem binnendifferenzierten, anschaulichen, interaktiven und abwechslungsreichen Lernumfeld gefördert. Dabei wird den Schülerinnen und Schülern durch primär konkret auszurechnende Aufgaben ein Gefühl der Wirksamkeit vermittelt. Schemata, Algorithmen und die Anwendung dieser dienen als zu reflektierende Orientierungshilfe im Unterricht.
Zentrale Inhalte werden durch die Lehrkraft gebündelt und erklärt. Die Lehr-/Lernorientierung ist dabei als co-instruktiv zu kennzeichnen.
In zahlreichen Übungs- und Vertiefungsphasen wenden die Lernenden diese an und erlangen so den Zugang zu den vermittelten Inhalten.
Das Verhältnis zwischen Schemata, Algorithmen und der Anwendung wird als gegenseitige Abhängigkeit charakterisiert. Schemata und Algorithmen werden als notwendige Bestandteile der Mathematik gesehen, aber vor allem als Instrument, um anwendungsorientiert zu arbeiten. Andererseits benötigen Schemata und Algorithmen Anwendungsbezüge, um ihre Behandlung zu rechtfertigen und ihren Nutzen zu verdeutlichen.
Das Ziel dieser Lehrkräfte ist es, aufzuzeigen, in welchen Bereichen die Mathematik nutzt und angewendet werden kann. Zur konkreten Auflösung verschiedener Sachsituationen, die dies verdeutlichen, werden Lösungsschemata und -algorithmen benötigt.

Individuelle Curricula, die dem Typus der **anwendungsorientierten Schematikerinnen und Schematiker** zugeordnet werden, beschreiben die Behandlung algebraischer Inhalte, wie der Variablen, Terme und Gleichungen in Verbindung mit innermathematischen (zum Beispiel: die Waage) und außermathematischen Kontexten mit dem Ziel der Sinnstiftung. Die Variable wird als Unbekannte charakterisiert, die im jeweiligen Sachkontext bestimmt wird. Algebraische Inhalte: Variablen, Terme und Gleichungen und der Kalkül-orientierte Umgang mit ihnen werden als Instrumente angesehen, um Probleme lösen zu können.
Ihr unterrichtliches Vorgehen in erster Linie durch die Orientierung an den Bedürfnissen der Lernenden gekennzeichnet. Das Bedürfnis, diese zu motivieren, indem ihnen der Sinn des Erlernten nähergebracht wird, ist zentral.
In der Folge werden die Lernenden entsprechend ihrer individuellen Voraussetzungen in einem binnendifferenzierten, anschaulichen, interaktiven und abwechslungsreichen Lernumfeld gefördert. Dabei wird den Schülerinnen und Schülern durch primär konkret auszurechnende Aufgaben ein Gefühl der Wirksamkeit vermittelt. Schemata, Algorithmen und die Anwendung dieser dienen als zu reflektierende Orientierungshilfe im Unterricht.
Zentrale Inhalte werden durch die Lehrkraft gebündelt und erklärt. Die Lehr-/Lernorientierung ist dabei als co-instruktiv zu kennzeichnen.
In zahlreichen Übungs- und Vertiefungsphasen wenden die Lernenden diese an und erlangen so den Zugang zu den vermittelten Inhalten.
Das Verhältnis zwischen Schemata, Algorithmen und der Anwendung wird als gegenseitige Abhängigkeit charakterisiert. Schemata und Algorithmen werden als wesentlicher Bestandteil der Mathematik empfunden.
Diese Lehrkräfte empfinden die Anwendung in der Mathematik als interessant und sehen in ihr ein valides Instrument der Sinnstiftung. Insofern wird die Algebra, durch die Möglichkeit Anwendungsbezüge zu bearbeiten, als Problemlöse- und Modellierungsinstrument verstanden. Schemata werden in diesem Zusammenhang als Mittel zum Zweck des Problemlösens und Modellierens betrachtet. Die Anwendungsbezüge dienen gleichzeitig als Rechtfertigung dafür, sich mit den Regeln auseinanderzusetzen, da diese eben für die Lösung verschiedener Probleme benötigt werden.
Gleichzeitig werden Schemata und Algorithmen als eigener Wert betrachtet, der dazu beiträgt, das strukturierte Denken und Arbeiten zu schulen.
Durch diese Doppelfunktion liegt der Fokus trotz des eher ausgeglichenen Verhältnisses in der positiven Attribuierung von Schema und Anwendung eher auf dem Schematischen.

Zusammengefasst können die neun hier untersuchten individuellen Curricula der Lehrkräfte in der Algebra durch die drei Typen „Traditionell“, „schema- (und formalistisch) orientierten Anwenderinnen und Anwender“ und der „anwendungsorientierten Schematikerinnen und Schematiker“ beschrieben werden.

Zusammenfassung

Der Vergleich der analysierten individuellen Curricula der Lehrkräfte in der Algebra liefert zusammenfassend die folgenden Erkenntnisse:

- Die Auswahl und Reihenfolge der zu behandelnden Inhalte ist zwischen den Lehrkräften sehr ähnlich. Die Herangehensweise an die Algebra ist geprägt durch eine zunächst formal-regelhafte Annäherung an die Variablen, Terme und Gleichungen und den damit verknüpften Regeln (Syntax). Anschließend wird dieses regelhafte Vorgehen sukzessive mit Anwendungskontexten verknüpft (Semantik).
- Die Ziele des Algebra-und Mathematikcurriculums sind auf einer eher abstrakten Ebene formuliert und stellen beispielsweise die Allgemeinbildung und die Förderung des logischen und abstrakten Denkens ins Zentrum. Die Ziele des Algebracurriculums lassen sich widerspruchsfrei in die Ziele des Mathematikcurriculums einbetten.
- Die Vorstellung dessen, was erfolgreiches Lernen in der Algebra respektive der Mathematik bedeutet, ist durch die Unterscheidung der Schülerschaft in verschiedene Leistungsgruppen geprägt, deren Voraussetzungen extern bestimmt sind und die durch die Lehrkräfte auch verschieden attribuiert werden. Die Folgen dieser Unterscheidungen variieren zwischen den Lehrkräften (vgl. die Abschnitte zur Kategorie Lernen in Kapitel 6). Generell schaffen die Lehrkräfte aber Lernumgebungen, die nach ihren Kriterien das Lernen der Schülerinnen und Schüler fördern.
  In Bezug auf das Lehren konnte gezeigt werden, dass der Algebraunterricht eher konservativ gestaltet wird. Das bedeutet in diesem Kontext, dass die Lehr-/Lernorientierung sich auf einem Kontinuum zwischen einer instruktiven und co-instruktiven Lehr-/Lernorientierung bewegt. Der Unterricht ist als insgesamt eher lehrkraftzentriert zu charakterisieren. Lehrkräfte, die auf dem beschriebenen Kontinuum eher in Richtung Co-Instruktivismus einzuordnen sind, achten darauf eine binnendifferenzierende, aktivierende Lernumgebung zu schaffen.
  Die gewählten Aufgabenstellungen fokussieren auf konkret zu berechnende Ergebnisse, die Lernenden werden durch Schemata und Algorithmen verschieden stark unterstützt. Im Grad der Anwendungsbezogenheit der Aufgaben unterscheiden sich die Lehrkräfte. Wiederholungen und Übungen sowie ein ausreichender Zeitraum dafür sind elementarer Bestandteil des Algebraunterrichts.
- Das Bild der Schulmathematik, das durch das Interview algebraisch geprägt ist, kann nicht eindeutig oder in eine Richtung weisend beschrieben werden. Es gibt sowohl Lehrkräfte für die der Anwendungs-Aspekt zentral ist, genauso wie Lehrkräfte, für die der Schema-Aspekt eher zentral ist. Insgesamt spielt der Schema-Aspekt bei allen Lehrkräften eine Rolle, entweder als eigenes Unterrichtsziel, als Mittel zum Zweck der Anwendung oder als partielles Unterrichtsziel, durch das Struktursehen oder auch das strukturierte Denken gefördert werden. Die Präferenz für den Anwendungs-Aspekt ist eng verbunden mit Unterrichtszielen wie der Sinnstiftung oder der Motivation der Lernenden. Der Formalismus-Aspekt wird von den Lehrkräften unterschiedlich betrachtet. Während beispielsweise Frau A, Frau E und auch Herr G auf formal richtige Schreibweisen achten, ordnen Herr C und Herr I diese dem Ziel eines verständigen, niedrigschwelligen Unterrichts, der den Lernenden zunächst einen Umgang mit den neuen Inhalten erlaubt, unter. Insofern ist der Formalismus-Aspekt bei diesen Lehrkräften eher peripher, während er bei den Erstgenannten eher zentral ist.
  Der Prozess-Aspekt ist in Bezug auf alle Lehrkräfte als peripher zu werten.

8. Einbettung der Ergebnisse in bestehende Forschungsresultate

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse der vorliegenden Studie, die in den Kapiteln 6 und 7 dargelegt worden sind, mit ausgewählten Resultaten aus den bisherigen Untersuchungen zu den individuellen Curricula von Lehrkräften in der Stochastik von Eichler (2005), in der Arithmetik von Bräunling (2016), in der Geometrie beider Sekundarstufen von Girnat (2016) und der Analysis von Erens (2013, 2015) verglichen[119]. Die vorgestellten Untersuchungen benutzen denselben theoretischen Rahmen und eine ähnliche Methodik, wie in Kapitel 5 gezeigt worden ist. Dies legt eine Gegenüberstellung der Resultate nahe, um zu untersuchen, inwiefern sich die individuellen Curricula der Lehrkräfte in den verschiedenen Domänen ähneln.

In diesem Zusammenhang wird sich gleichzeitig der Frage nach der Domänenspezifität individueller Curricula angenähert.

Einschränkend muss vorangestellt werden, dass der hier vorgenommene Vergleich nur sehr in ihrer Reichweite begrenzte Schlüsse zulässt, da jede der Untersuchungen jeweils „nur“ eine Domäne anhand unterschiedlicher Lehrkräften untersucht hat (Eichler & Erens, 2015). Die Resultate beziehen sich jeweils ausschließlich auf die untersuchten Probandinnen und Probanden. In keiner der Untersuchungen wurden die Teilnehmenden zum Beispiel auf Basis des theoretical samplings ausgewählt, sondern vielmehr basierend auf vermeintlich unterschiedlichen extern bestimmten Variablen, weshalb in keinem der Fälle von einer Sättigung und im Zuge dessen von einer ganzheitlichen Abbildung der individuellen Curricula gesprochen werden kann[120]. Anzumerken ist zudem, dass sowohl in Bezug auf die domänenspezifischen, als auch auf die domänenübergeifenden Bereiche nicht dieselben Fragen in den verschiedenen Interviews und Untersuchungen gestellt worden sind. Dies muss in Bezug auf die inhaltliche Gültigkeit der Vergleichsresultate berücksichtigt werden.

Wird von ausgewählten Resultaten gesprochen, so bezieht sich dies darauf, dass auf inhaltlich direkt an die Ergebnisse dieser Arbeit anschlussfähige Aspekte geachtet worden ist.

Stochastik - Eichler (2005)

Zunächst wird sich auf die zusammenfassenden Ergebnisse Eichlers (2005) bezogen. Diese werden den Resultaten dieser Untersuchung, die detailliert in Kapitel 6 nachzulesen sind, tabellarisch gegenübergestellt:

Tabelle 75: Vergleich Stochastik - Algebra

Stochastik	Algebra
1. Methodische Überlegungen und lernpsychologische Erkenntnisse spielen in der Konzeption der individuellen Curricula eine untergeordnete Rolle. Die Erfahrung der Lehrkräfte wird eher als Begründung für die Auswahl der Unterrichtsinhalte angeführt.	Auf Erkenntnisse der Lernpsychologie sowie auf spezielle Methoden gehen die untersuchten Lehrkräfte nicht ein. Die Erfahrung hingegen wird, wie zum Beispiel im Fall von Herrn B, als begründendes Element für unterrichtliches Handeln herangezogen, sodass

[119] Es wird an die zum Zeitpunkt der Erstellung der Arbeit vorliegenden Arbeiten angeknüpft. Da die Untersuchungen von Bräunling und Erens nicht vollständig vorliegen und auch inhaltlich Einschränkungen in Bezug auf mögliche Anknüpfungspunkte getroffen werden, erhebt der durchgeführte Vergleich nicht den Anspruch auf Vollständigkeit.

[120] Dies bezieht sich einerseits auf mögliche Erweiterungen individueller Curricula, die sich eventuell durch größere Stichproben gezeigt hätte. Andererseits wurde bereits in Kapitel 2.1 darauf hingewiesen, dass angenommen wird, durch die gewählten Leitkategorien wesentliche inhaltliche Elemente der individuellen Curricula abzubilden, diese aber aufgrund der Individualität und Vielschichtigkeit von Entscheidungsprozessen ebenfalls nicht zwingend allumfassend sein müssen.

(Eichler bezieht dies auf den Umgang mit Schwierigkeiten der Lernenden)	sich dieses Ergebnis in der vorliegenden Untersuchung wiederfindet (vgl. Kapitel 6, Abschnitte zum Lehren der Algebra).
2. Das curriculare Handeln der Lehrkräfte ist eher resistent gegenüber den Forschungsergebnissen der Stochastik- und Mathematikdidaktik.	In Bezug auf das Verhältnis der Lehrkräfte zu aktuellen Forschungsergebnissen verhalten sich die Lehrkräfte ambivalent. Während Frau A didaktische Entwicklungen ablehnt, ist Frau D sehr dankbar über Anregungen aus den verschiedenen didaktischen Projekten wie LEMAMOP. Auch Herr F spricht sich für offenere didaktische Konzepte aus, wie die Verwendung des „Mathematikbuchs“. Allerdings bezieht sich die von den Lehrkräften geäußerte Zustimmung, wenn vorhanden, eher auf neue Aufgabenkonzepte und allgemein-mathematische Überlegungen als speziell auf die Algebradidaktik. Insofern wird dem Ergebnis Eichlers in Bezug auf die Resistenz gegenüber algebradidaktischen Forschungsergebnissen zugestimmt (vgl. Kapitel 6, Abschnitte zum Lehren der Algebra).
3. Institutionelle Rahmenbedingungen spielen kaum eine Rolle in den Planungsentscheidungen der Lehrkräfte und besitzen eher eine Legitimationsfunktion. Die Minimalanforderungen des Kerncurriculums gelten als Orientierung.	Das Kerncurriculum und die Schulcurricula werden als inhaltliche Richtlinien verstanden. Herr G rechtfertigt Entscheidungen häufiger vor dem Hintergrund des Kerncurriculums, was dessen Legitimationsfunktion unterstützt. Vermehrt wird aber die zeitliche Lage der Algebra im Schulcurriculum kritisiert, was aufgrund der kognitiven Voraussetzungen der Lernenden zu diesem frühen Zeitpunkt zu Lernschwierigkeiten führen würde. Außer im Fall von Frau E, die notfalls die Algebra zeitlich nach hinten verlegt, hat dies aber für die übrigen Lehrkräfte kaum Auswirkungen auf ihre Planungsentscheidungen (vgl. Kapitel 6, Abschnitte zum Lehren von Algebra).
4. Das Schulbuch wird vermehrt eingesetzt, wenn es die stoffliche Vielfalt für den zeitlichen Umfang im Unterricht reduziert.	Außer für Herrn C, der das Schulbuch explizit als Maß für inhaltliche Vollständigkeit betrachtet, wird es als Grundlage zum Üben und für Hausaufgaben genutzt. Inhaltliche Orientierung bietet es auch Herrn I. Die Bestimmung inhaltlicher Richtlinien kann in den übrigen Fällen nicht eindeutig auf das Schulbuch zurückgeführt werden (vgl. Kapitel 6, Ausführungen zum Stoffcurriculum und zum Lehren von Algebra).
5. Lernschwierigkeiten wird durch die Reduktion des Stoffcurriculums begegnet.	Lernschwierigkeiten wird durch häufige Wiederholung, kleinschrittiges Vorgehen und

	der Hereingabe von Schemata und Algorithmen begegnet. Eine Reduktion des Stoffcurriculums wird durch keine Lehrkraft vorgeschlagen (vgl. die Abschnitte zum Lehren der Algebra in Kapitel 6).
6. Eine angemessene Lernatmosphäre ist eine wichtige Voraussetzung für das erfolgreiche Lehren und Lernen.	Die jeweils durch die Lehrkräfte beschriebene und für sie individuell als angemessen erscheinende Lernatmosphäre gilt auch in dieser Untersuchung als Voraussetzung für erfolgreiches Lernen (vgl. die Abschnitte zum Lernen der Algebra in Kapitel 6).
7. Individuelle Curricula umfassen unterschiedliche Ausprägungen im Stoffinhalt und ebenso unterschiedliche Zielsetzungen.	Die Ausprägungen im Stoffinhalt variierten zwischen den Lehrkräften nur unwesentlich. Für den Großteil der Lehrkräfte konnte ein sehr ähnliches Stoffcurriculum identifiziert werden (vgl. Kapitel 7.2). Auch die Zielsetzungen, die durch das Stoffcurriculum erreicht werden sollen, ähneln sich bei acht der neun Lehrkräfte in der Tendenz (vgl. Kapitel 7.2). Unterschiede betreffen vor allem die Vorstellung, wie guter Unterricht gelingt. Insofern findet sich dieses Ergebnis bei den hier untersuchten Lehrkräften nicht wieder.
8. Die Ziele des Stochastikcurriculums lassen sich widerspruchsfrei in die Ziele des Mathematikcurriculums einbetten.	Die widerspruchsfreie Einbettung der Ziele des Algebracurriculums in die Ziele des Mathematikcurriculums ist ebenfalls möglich (vgl. Kapitel 7.8).
9. Der Schema-Aspekt ist kein globaler Aspekt der Mathematik, sondern grundsätzliches Mittel zum Erreichen der Ziele des Mathematikcurriculums.	Gerade im Fall von Frau A ist der Schema-Aspekt als globaler Aspekt der Mathematik zu sehen. Auch im Fall der anderen Lehrkräfte konnte die Relevanz des Schema-Aspekts für ihren Unterricht ausgemacht werden (entweder als Grundlage oder als Selbstzweck). Dies betrifft vor allem die Ebene des abstrakten Regellernens. Wird diese Ebene aber wie im Fall der Lehrkräfte B-I im weiteren Verlauf mit Anwendungskontexten verbunden, wird der Schema-Aspekt wie im Fall der Stochastikcurricula als Mittel zum Erreichen der Ziele des Mathematikcurriculums betrachtet. Insofern findet sich dieses Ergebnis nur in Teilen wieder (vgl. Kapitel 7.7).

Der Vergleich zeigt Übereinstimmungen in Bezug auf die Resistenz der Lehrkräfte gegenüber aktuellen didaktischen und lernpsychologischen Erkenntnissen und den eher geringen Einfluss der institutionellen Rahmenbedingungen sowie des Schulbuchs. Ähnlich sind die Resultate zudem in Hinsicht auf die Bedeutung einer angemessenen Lernatmosphäre für das erfolgreiche Lernen und Lehren und hinsichtlich der Möglichkeit die Ziele des Algebracurriculums widerspruchsfrei in die Ziele des Mathematikcurriculums einbetten zu können. Insgesamt

scheinen sich also unabhängig vom Inhalt der konkreten Domäne Ähnlichkeiten in Bezug auf das Lernen und die Begegnung mit externen Einflüssen, wie Forschungsresultaten oder dem institutionellen Umfeld abzuzeichnen.
Unterschiede zeigen sich hingegen im Umgang der Lehrkräfte mit Lernschwierigkeiten der Schülerinnen und Schüler und in der relativen Ähnlichkeit der inhaltlichen Algebracurricula und der damit verbundenen Ziele im Vergleich zu den Stochastikcurricula, bei denen qualitative Unterschiede identifiziert werden konnten. Auch der Stellenwert des Schema-Aspekts im Algebraunterricht unterscheidet sich von dem in der Stochastik. Die verweist auf domänenspezifische Unterscheidungen, die sich aus inhaltlichen Überlegungen der Lehrkräfte ableiten lassen.

Analytische Geometrie - Girnat (2016), Girnat und Eichler (2011)

Zu der Arbeit von Girnat, in der er die individuellen Curricula der Lehrkräfte sowohl in der Geometrie der Sekundarstufe I als auch in der analytischen Geometrie in der Sekundarstufe II untersuchte, kann Bezug auf die Zielstellungen der Lehrkräfte in Bezug auf die analytische Geometrie in der Oberstufe genommen werden. Im Anschluss daran werden zwei offene Fragen diskutiert, die sich aus einem von Eichler und Girnat durchgeführten Vergleich der individuellen Curricula der Lehrkräfte in der Stochastik und der Geometrie zum Thema „Modellieren“ ergeben.
Aus der Untersuchung zu den individuellen Curricula der Lehrkräfte im Bereich der analytischen Geometrie konnte Girnat (2016) für die Ziele des Curriculums der analytischen Geometrie die folgenden gemeinsamen Argumente herausarbeiten:

- Den schwächeren Schülerinnen und Schülern sollen Algorithmen an die Hand gegeben werden, mit denen sie arbeiten können.
- Die Schülerinnen und Schüler sollen auf ein Studium der Naturwissenschaften oder der Mathematik vorbereitet werden.
- Die Lösung von Problemlöseaufgaben mit Hilfe typischer Verfahren soll ermöglicht werden.
- Die Schülerinnen und Schüler sollen Zugang zu einer Gesamttheorie erhalten (Girnat & Eichler, 2011).

Die Tendenz schwächeren Lernenden Algorithmen und Schemata an die Hand zu geben, um sie handlungsfähig zu machen (Punkt 1), findet sich in den individuellen Algebracurricula sehr stark wieder und ist dementsprechend als Gemeinsamkeit zu werten.
Die Vorbereitung auf ein Studium der Naturwissenschaften oder der Mathematik (Punkt 2) steht nicht im Zentrum der Zielvorstellungen der Algebracurricula, die Vorbereitung auf das Abitur hingegen schon. Insofern ist den jeweiligen individuellen Curricula gemein, dass es um die Vorbereitung des jeweils nächsten Ausbildungsabschnitts geht.
Der Punkt drei findet seine Entsprechung in den individuellen Algebracurricula der Lehrkräfte B-I. Das Problemlösen, beziehungsweise die Bearbeitung von anwendungsorientierten Aufgaben steht bei diesen Lehrenden im Zentrum. Gleichzeitig betonen sie alle die Wichtigkeit, über typische algebraische Lösungsverfahren verfügen zu müssen, damit die Schwierigkeit für die Lernenden nicht in der algebraischen Lösung der Aufgaben, sondern in der Übersetzung des Problemkontexts in die algebraische Sprache liegt. Zudem ist allein die Verfügbarkeit von Standardverfahren als Unterrichtsziel der Lehrkräfte zu verstehen. Insofern findet sich dieses Ziel in den hier rekonstruierten individuellen Algebracurricula wieder.
Der postulierte Zugang (Punkt 4) zu einer „Gesamttheorie“ ist für diese Untersuchung nicht eindeutig zu beantworten. Einige der Lehrkräfte sprechen zwar davon, dass die Schülerinnen und Schüler einen Zugang zu einer neuen Weltsicht entwickeln oder die algebraischen Strukturen und ihre Verknüpfung zu anderen mathematischen Teilgebieten verstehen sollen, ob

dies aber als „Gesamttheorie“ zu verstehen ist und nicht vielmehr als abstrakte Zieldimension, die tatsächliche Planungsentscheidungen kaum tangiert, bleibt offen. Insofern wird diesbezüglich keine Parallele zwischen den Untersuchungen hergestellt.

Girnat und Eichler (2011) warfen in ihrer vergleichenden Untersuchung zum Stellenwert des Modellierens im Geometrie- und Stochastikunterricht die folgenden offenen Fragen auf:

1. Gibt es vernünftige Gründe, das Modellieren im strikten Sinn (als allgemeiner Zugang zur angewandten Mathematik) zu postulieren anstatt es situationsgebunden als Motivation zu nutzen (zum Beispiel in der Stochastik: Welches Urnenmodell? oder in der Geometrie: In welche bekannten Teile kann ich die Figur zerlegen?)?
2. Gibt es wirklich überzeugende Beispiele im Mathematikunterricht, die realistisch sind und gleichzeitig Anlass dazu geben, einen theoretischen Hintergrund zu untersuchen? Oder ist ein Zögern der Lehrkräfte ein Indiz dafür, dass es einen Mangel an solchen mathematisch reichhaltigen Aufgaben gibt?

Beantwortet werden können diese Fragen durch die vorliegende Untersuchung nicht. Herauszustellen ist dennoch, dass auch bei einem Teil der hier untersuchten Lehrkräften aufgrund entweder des hohen zeitlichen Aufwands (Frau A) oder der nicht stattfindenden Modellierungen[121] im eigentlichen Sinn (zum Beispiel: Herr B, Frau D, Herr I), ein Zögern beziehungsweise eine Skepsis gegenüber der Verwendung solcher Aufgaben festzustellen ist.
Zudem werden diese Aufgabentypen von den Lehrkräften vor allem mit dem Ziel der Motivation der Lernenden verwendet. Der Zugang zu einem theoretischen Hintergrund steht dabei nicht im Vordergrund.
Insofern behalten diese Fragen auch in Bezug auf die vorliegende Untersuchung ihre Gültigkeit.

Vergleich der Belief-Strukturen - Domänenübergreifend

Ein systematischer Vergleich der individuellen Curricula der Lehrkräfte in der Analysis, der Geometrie und der Stochastik wurde in Abhängigkeit der jeweiligen globalen Beliefs durch Eichler und Erens (2015) durchgeführt. Dabei konnten die folgenden Aussagen über die Belief-Strukturen der Lehrkräfte in den einzelnen Domänen herausgearbeitet werden. Die Ergebnisse von Bräunling (2016) zu den individuellen Curricula der Lehrkräfte in der Arithmetik werden an dieser Stelle nachträglich in diese Systematik eingebunden (vgl. Punkt 4):

1. Die individuellen Curricula in der Geometrie sind in ihrer Tendenz als prozessorientiert zu werten. Der Anwendungs-Aspekt tritt eher unter der Idee der Illustration auf und nicht als eigenständiger Anlass zum Problemlösen oder Modellieren. Die Geometrie wird als Sprache verstanden, wobei es als zentral empfunden wird, Probleme zu lösen, die dabei nicht zwingend kontextgebunden sein oder einen Bezug zur realen Welt haben müssen. Der Kontext ist der Theorie untergeordnet. Der Aspekt Formalismus wird aber nur von einem Teil der untersuchten Lehrkräfte als zentral aufgefasst. Diese Lehrkräfte empfinden es als wichtig die untersuchten Phänomene in mathematische Strukturen einzubetten. Der Schema-Aspekt wird von keiner der untersuchten Lehrkräfte als zentral betont. Insgesamt wird davon gesprochen, dass die untersuchten individuellen Curricula der Lehrkräfte in der Geometrie eher prozessorientiert sind (Eichler & Erens, 2015, p. 191ff).

[121] Gemeint ist, dass eher eingekleidete Aufgaben bearbeitet werden, anstelle von richtigen Modellierungen oder Problemlöseaufgaben (vgl. Frau E). Infolgedessen stellt zum Beispiel Herr I die Frage nach der Sinnhaftigkeit der Bearbeitung solcher Aufgaben.

2. Die individuellen Curricula in der Stochastik sind in ihrer Tendenz als anwendungsorientiert zu werten. Die Rolle von Kontexten ist in der Stochastik omnipräsent. Die Anwendung liefert durch die Bearbeitung von Problemen aus der realen Welt den Anlass für die Untersuchung der Stochastik und zeigt ihre Nützlichkeit auf. Die Prozessorientierung ist eher peripher ausgeprägt. Denn obwohl das Problemlösen als Unterrichtsziel beschrieben wird, fehlen im Stochastikunterricht adäquate Modelle, sodass mehr Wert auf die Übersetzung von Problemen in die Stochastik und die Interpretation der Ergebnisse gelegt wird. Der Formalismus als globaler Belief hat in den individuellen Curricula der Lehrkräfte eine eher untergeordnete Bedeutung. Der Schema-Aspekt wird von keiner der untersuchten Lehrkräfte als zentral betont (Eichler & Erens, 2015, p. 191ff).
3. Anders als in der Stochastik und der Geometrie ist in der Analysis keine eindeutige Tendenz in Richtung eines globalen Beliefs auszumachen. Erens und Eichler (2015) konnten feststellen, dass der Aspekt der Prozessorientierung bei den untersuchten Lehrkräften den beiden Aspekten Anwendung und Formalismus eher untergeordnet ist. Weiterhin beschreiben sie eine Lehrkraft, für die der Formalismus-Aspekt zentral ist und die gleichzeitig die Bedeutung der Anwendung im Analysisunterricht negiert. Andererseits gibt es ebenfalls Lehrkräfte, für die der Anwendungs-Aspekt zentral ist, weil er für die Motivation der Lernenden entscheidend ist. Der Schema-Aspekt wird von einigen Lehrkräften geschätzt angesichts der Vorbereitung auf die Abschlussprüfungen. Erens und Eichler (2015) führen dies darauf zurück, dass in diesem Fall die Zustimmung zu dem Schema-Aspekt in Abhängigkeit zum sozialen Kontext, den Prüfungen, stehen[122] (191ff). Der Schema-Aspekt wird insgesamt von den untersuchten Analysislehrkräften als peripher angesehen (Erens & Eichler, 2013). Insgesamt sind die Lehrkräfte in der Analysis geteilt, in diejenigen, die den Formalismus und diejenigen, die Anwendung als zentral erachten (Eichler & Erens, 2015).
4. Bräunling (2016) fasst in ihrer Untersuchung, die neben der Erfassung der Beliefs über Arithmetik bei Grundschullehrkräften und Lehrkräften der Sekundarstufe I zusätzlich die Stabilität der rekonstruierten Beliefs in einer Längsschnittuntersuchung analysiert, zusammen: Der globale Belief „Anwendung“ ist bei allen untersuchten Lehrkräften zentral (Bräunling, 2016). Dieser gilt bei den untersuchten Lehrkräften als omnipräsent (Bräunling & Eichler, 2015). Der „Formalismus“ als globaler Belief wird eher abgelehnt. In Bezug auf den globalen Aspekt „Prozess“ wird festgestellt, dass dieser bei Grundschullehrkräften eher zentral und bei Lehrkräften der Sekundarstufe I eher peripher ist. Der globale Aspekt „Schema“ löst Uneinigkeit aus. Er wird viermal als peripher und viermal als zentral gekennzeichnet. Bezüglich der Lehr-/Lernorientierung stellt sie fest, dass eine co-konstruktivistische Lehr-/Lernorientierung in den meisten Fällen zentral ist. Die instruktivistische Lehr-/Lernorientierung ist in zwei Fällen in der Sekundarstufe I zentral, wird aber von allen Grundschullehrkräften abgelehnt (Bräunling, 2016).

[122] Erens und Eichler (2015) beziehen sich damit auf Skott (2015), der neben der Infragestellung des gesamten Belief-Konstrukts (vgl. Kapitel 2.2, 2.4) vor allem die Frage stellt, inwiefern Beliefs tatsächlich statisch sind. Er plädiert in seinem partizipatorischen Ansatz dafür, die Zuschreibung von Bedeutung eher dynamisch und kontextabhängig zu verstehen (p. 10). Erens und Eichler (2015) verstehen dabei den Kontext zum Beispiel als die Beliefs über das gesamte mathematische Curriculum, aber auch über eine spezielle Domäne (p. 181).

Für die spezifischen Untersuchungsergebnisse der Rekonstruktion der individuellen Algebracurricula kann in Abgrenzung zu den dargestellten Forschungsergebnissen unter einem fünften Punkt das Folgende ergänzend subsummiert werden:

Ähnlich wie in der Analysis kann keine eindeutige Tendenz der individuellen Algebracurricula in Richtung eines globalen Beliefs herausgestellt werden. Festgestellt werden kann aber, dass der Prozess-Aspekt in der Algebra bei allen Lehrkräften eher untergeordnet ist.
Auch in dieser Untersuchung gibt es eine Lehrkraft (Frau A), bei der der Schema-Aspekt konsistent auftritt, wohingegen die Bedeutung der Anwendungen von ihr in Frage gestellt wird. Die übrigen Lehrkräfte betrachten den Schema-Aspekt entweder als Mittel zum Erreichen ihres Ziels Anwendungsbezüge im Unterricht zu schaffen, um die Lernenden zu motivieren und sinnstiftend zu unterrichten oder als eigenständigen Wert, der entweder das innermathematische Strukturieren schult oder den Lernenden dringend benötigte Lernhilfen bietet. Insofern gibt es sowohl Lehrkräfte für die der Anwendungsaspekt zentral ist, genauso wie Lehrkräfte, für die der Schema-Aspekt eher zentral ist. Uneinig sind sich die Lehrkräfte auch in Bezug auf den Stellenwert des Formalismus-Aspekt. Während beispielsweise Frau A, Frau E und auch Herr G auf formal richtige Schreibweisen achten, ordnen Herr C und Herr I diese dem Ziel eines verständigen, niedrigschwelligen Unterrichts, der den Lernenden zunächst einen Umgang mit den neuen Inhalten erlaubt, unter. Insofern ist der Formalismus-Aspekt bei diesen Lehrkräften eher peripher, während er bei den Erstgenannten eher zentral ist.
Da sehr häufig der Nutzen der Algebra sowohl für die weitere mathematische Ausbildung als auch für das Bestehen des Abiturs erwähnt wird, ist eine Parallelität zur Schlussfolgerung von Eichler und Erens erkennbar, die sich auf die Abhängigkeit der Bedeutungszuschreibung zu den verschiedenen Beliefs vom sozialen Kontext bezieht (Erens & Eichler, 2015).

Diskussion offen gebliebener Hypothesen

Auf Basis der Analyse der individuellen Curricula der Lehrkräfte in der Analysis stellen Eichler und Erens die folgende Hypothese auf:
„Wenn Lehrkräfte einen konsistenten formalistischen Blick auf die Analysis halten, erwähnen sie keinerlei Anwendung“ (Eichler & Erens, 2015, p. 189; Erens & Eichler, 2013, p. 1335). Sie ergänzen aber, dass der Rückschluss nicht zulässig ist, das heißt, dass anwendungsorientierte Lehrkräfte nicht zwingend die Bedeutung des Formalismus negieren (Eichler & Erens, 2015).
Diese Hypothese wurde aufgrund eines Falls aufgestellt. Wird das rekonstruierte Curriculum von Frau A in dieser Untersuchung betrachtet, so zeigt sich auch bei ihr ein konsistenter schematischer Blick auf die Algebra, wobei sie Anwendungsbezügen keine Bedeutung beimisst. In ihrem Fall handelt es sich zwar um einen schematischen statt um einen formalistischen Blick auf den Algebraunterricht, dennoch sind die Parallelen deutlich erkennbar. Insbesondere ist in diesem Zusammenhang anzumerken, dass die Aspekte Schema und Formalismus in den Untersuchungen von Grigutsch et al. (1998) die höchste Korrelation besitzen.
Die Parallelität betrifft ebenfalls den getroffenen Rückschluss, denn die Lehrkräfte B-I sind als eher anwendungsorientiert einzustufen und schätzen dennoch die Bedeutung des Schemas (vgl. Kapitel 7.7). Insofern kann die durch Eichler und Erens aufgestellte Hypothese durch diese Untersuchung gestützt werden.

Allgemeiner betrachtet und in Bezug auf die verschiedenen Untersuchungen stellen Eichler und Erens (2015) schließlich die folgenden Hypothesen auf:

1. Die als zentral herausgestellten Beliefs beeinflussen auf lange Sicht das Verhalten der Lehrkräfte im Klassenraum.

2. Die untersuchten Beliefs in den verschiedenen Domänen lassen eine Abhängigkeit von der jeweiligen Domäne vermuten (Eichler & Erens, 2015).

Die Unterrichtsbeobachtungen in Kapitel 6, Abschnitte „Unterrichtsbeobachtungen und Klausurenanalyse“, sind Momentaufnahmen, die nur punktuell Schlüsse zulassen, insofern sind keine belastbaren Aussagen über langfristige Entwicklungen möglich.
Innerhalb dieses Rahmens wird aber festgestellt, dass die Ergebnisse der Unterrichtsbeobachtungen eher im Einklang mit den rekonstruierten individuellen Curricula stehen. Über den Grad der Einflussnahme dieser auf das Verhalten kann keine Aussage getroffen werden.
Die Frage nach der Domänenspezifität scheint sich durch die vorliegenden Ergebnisse zu erhärten. Dies lässt sich einerseits anhand des gerade beschriebenen Vergleichs und andererseits aufgrund der folgenden beispielhaften Aussagen der Lehrkräfte festmachen, die verdeutlichen, dass sie unterschiedliche Schwerpunkte und Anschauungen mit den verschiedenen Domänen verknüpfen:

„Zum Beispiel meine Schüler lieben Stochastik. Das lieben sie einfach und von daher liebe ich es natürlich auch. Wenn ich weiß, ich kriege da selbst die Schwächsten mit, die lieben das zu überlegen, wie groß die Wahrscheinlichkeit denn jetzt ist, eine blaue Kugel zu ziehen, oder so“ (40:49, Frau A).

„Ich habe gesagt, wir machen jetzt Geometrie. Zack, fertig. Oder Stochastik, oder wie. Da bin ich auch relativ, da halte ich mich auch nicht ans Buch. Schmerzfrei. Weil ich mache auch meistens nicht die Reihenfolge vom Buch. Weil ich das meistens auch nicht so toll finde, ich mach dann eher so, dass das dann eher so von der Motivation passt“ (14:06-2, Frau E). Frau E empfindet die Gebiete Stochastik oder Geometrie offenbar für kognitiv einfacher zu fassen als die Algebra und auch die Motivation gelingt ihr nach eigener Aussage in diesen Bereichen besser.

„Also wenn ich nur mal die Stochastik, oder nur mal beim Stochastikbeipiel bleibe, weil das ist grundlegend anders, das fällt gerade diesen Schülern manchmal leichter als die ganze Algebrathematik, weil sie da eben mit diesen abstrakten Rechenvorschriften nicht so konfrontiert sind“ (24:56-1, Herr B).

„Also deswegen sage ich, glaube ich tatsächlich dass mein Stellenwert schon eher an erster Stelle Algebra, an zweiter Stelle für mich Stochastik und an dritter Stelle Geometrie. Weil ich…, also, wenn ich bei vielen Lehrern so, also auch nicht alleine, in Didaktik hab ich das schon häufig, so eigentlich dass der Stellenwert der Geometrie doch hoch ist, weil es auch viel so Vorstellungsvermögen fördert und alles. Aber ich habe das manchmal, wenn ich dann so sage, also die Schüler irgendwie Dreiecke konstruieren lasse noch und nöcher, oder Vierecke, denke ich mir wozu? Wann brauchen sie das wieder? Das ist für mich irgendwie, für mich ist immer der Ansporn: Was brauchen sie dann fortlaufend und was hilft ihnen bestimmte Kompetenzen aufzubauen, die mir persönlich für sie halt wichtig sind, so Probleme lösen, modellieren. Und da frage ich mich halt, ok, wenn sie jetzt wissen wie sie nach Seite, Seite, Seite Dreiecke konstruieren, was sollen sie damit weiter machen?“ (3:41-1, Frau D).

„Ja so von Haus aus und finde einfach, dass dann die Algebra da so die Hauptdisziplin ist und nicht die Geometrie und auch nicht die Stochastik. Ja und ich finde, dass das sind dann eher so Anwendungsbereiche und ich finde dann gerade die Bereiche der Algebra und dann irgendwann auch der Analysis einfach, ... Das ist so das, warum ich Mathe studiert habe und deswegen macht mir das persönlich halt Spaß. Deswegen sage ich so Kern. Wo auch alles drauf aufbaut. Und ich finde, das ist so das Ursprüngliche“ (0:52-1, Herr H).

„Weil das lokale Ordnen in der Algebra, die total unübersichtlich ist für Schüler, viel schwieriger ist als in der Geometrie" (5:24, Herr G).

Bei diesen Lehrkräften zeigt sich, dass sie ihre Antworten speziell auf den Kontext „Algebraunterricht" ausrichten und diesen so gegenüber anderen Domänen abgrenzen. Es untermauert auch die unterschiedliche Attribuierung der verschiedenen mathematischen Domänen.
Gerade das Beispiel von Herrn H unterstützt die Ergebnisse des Vergleichs der Domänen, wenn er Geometrie und Stochastik als eher anwendungsbezogen charakterisiert und die Analysis sowie die Algebra durch fehlende Anwendung beschreibt.
Die Unterscheidung zwischen den Gebieten Algebra und Analysis, eher verknüpft mit den Aspekten Schema und Formalismus auf der einen Seite und der Stochastik und Geometrie eher verknüpft mit den Aspekten Anwendung und Prozess auf der anderen Seite, untermauert den Eindruck der Domänenspezifität, der aus der zuvor erfolgten Gegenüberstellung resultiert.

9. Diskussion

Dieses Kapitel gibt eine Übersicht über die Resultate der vorliegenden Arbeit. Dazu werden die in Kapitel 4 formulierten Forschungsfragen auf Basis der erzielten Ergebnisse beantwortet und den in den Kapiteln 2 und 3 a priori auf Basis einer literaturgeleiteten Analyse des Forschungsstands generierten Hypothesen gegenüberstellt und diskutiert.
Anschließend wird ein Resümee über diese Untersuchung gezogen. Die sich aus den Resultaten ergebenden Forschungsdesiderate werden abschließend dargelegt.

9.1. Beantwortung der Forschungsfragen

Zur Übersicht sind die Forschungsfragen (vgl. Kapitel 4) wiederholend dargestellt:

1. Welche individuellen Curricula halten die Lehrkräfte in der Algebra der Klassenstufen 7 und 8?
2. Wie grenzen sich die individuellen Curricula der einzelnen Lehrkräfte gegeneinander ab?
3. Welche Gemeinsamkeiten und Unterschiede gibt es bei dem Vergleich der individuellen Curricula der Lehrkräfte in der Algebra mit denen in der Arithmetik, Geometrie, Stochastik und Analysis?

Zur Beantwortung der Forschungsfragen wurde eine Interviewstudie mit neun Gymnasiallehrkräften durchgeführt. In den Interviews wurden Einstellungen der teilnehmenden Lehrkräfte zu den Leitkategorien: Stoffinhalt der Algebra, ihren Zielen im Algebra- und Mathematikunterricht, zum Lehren und Lernen der Algebra und zu ihrem mathematischen Weltbild thematisiert.
Auf dieser Basis wurden zur Beantwortung der ersten Forschungsfrage, gemäß des in Kapitel 5 geschilderten methodischen Vorgehens, die subjektiven Theorien der Lehrkräfte in jeder der Leitkategorien rekonstruiert und zu den individuellen Algebra-Curricula dieser Lehrkräfte verdichtet.

<u>Forschungsfrage 1</u>

Bezogen auf die erste Forschungsfrage werden die in dieser Untersuchung erzielten Resultate, die in Kapitel 6 ausführlich dargestellt sind, zusammenfassend aufgeführt. Sie werden nach den gerade genannten Leitkategorien geordnet abgebildet. In diesem Zusammenhang erfolgt die Gegenüberstellung zu den in Kapitel 3 theoretisch hergeleiteten Hypothesen.

<u>Stofflicher Inhalt des Algebracurriculums</u>

Es wurde gezeigt, dass die Auswahl und Reihenfolge der zu behandelnden Inhalte zwischen den interviewten Lehrkräften sehr ähnlich sind (vgl. Kapitel 7.2). Die Herangehensweise an die Algebra ist zunächst durch eine formal-regelhafte Annäherung an die Variablen, Terme und Gleichungen und den damit verknüpften Regeln geprägt. Im weiteren Verlauf wird dieses regelhafte Vorgehen sukzessive mit Anwendungskontexten verknüpft. Eine Übersicht über das den Lehrkräften gemeinsame inhaltliche Vorgehen ist in Kapitel 7.2 zu finden. Das individuelle Vorgehen ist im Kapitel 6 abgebildet.
Im Folgenden findet sich die Gegenüberstellung der aus der theoretischen Auseinandersetzung abgeleiteten Hypothesen und den Resultaten der Arbeit:

Tabelle 76: Resultate Inhalt des Stoffcurriculums

Hypothese	Ergebnisse
(A2) Die Algebra wird von den Lehrkräften als Sprache mit einem eigenen Regelsystem charakterisiert (vgl. Kapitel 3.1).	Einige der Lehrkräfte, wie Herr C (vgl. 6.3.4), Herr F (vgl. 6.6.2), Herr H (vgl. 6.8.2) und Herr I (vgl. 6.9.2) vergleichen die Algebra explizit mit einer Sprache und beschreiben auch das mit ihr verbundene Regelsystem als Grammatik. Auch wenn die übrigen Lehrkräfte diesen Vergleich nicht explizieren, so wird die Grundlage der Algebra, also der Umgang mit algebraischen Elementen (Variablen, Termen, Gleichungen), von allen Lehrkräften als Regelsystem beschrieben (vgl. 6.2.8, 6.4.1, 6.7.5).
(A3) Der Umgang mit Termen, Variablen und Gleichungen nimmt einen festen Stellenwert im individuellen Algebracurriculum der Lehrkräfte ein (vgl. Kapitel 3.1).	Terme, Variablen und Gleichungen nehmen einen festen und prominenten Stellenwert im individuellen Stoffcurriculum der Lehrkräfte ein (vgl. Kapitel 7.2).
(A4) Die Beschreibungen des stofflichen Inhalts der Algebra ähneln sich unabhängig von der jeweiligen Lehrkraft sehr (vgl. Kapitel 3.1).	Die stoffinhaltlichen Beschreibungen ähneln sich zwischen den Lehrkräften sehr, wobei es Unterschiede in der Reichweite der behandelten Inhalte in Hinsicht auf den Anwendungsbezug gibt (vgl. Kapitel 7.2).
(A5) Die Unterscheidung in die einzelnen Bereiche des algebraischen Denkens wird durch die Lehrkräfte thematisiert (vgl. Kapitel 3.1).	Alle Lehrkräfte unterscheiden zwischen einer Arbeit auf rein abstrakter Ebene, die mit dem Struktursehen und der Anwendung von Regeln verknüpft ist und einer Ebene, auf der die Algebra als Mittel gesehen wird, um Probleme zu lösen, Situationen zu analysieren oder zu modellieren. Dementsprechend werden verschiedene Bereiche des algebraischen Denkens durch die Lehrkräfte thematisiert (vgl. Kapitel 7.2, 7.6).
(A8) Die Bedeutung der Variablen wird von den Lehrkräften als Basis der mathematischen Sprache gesehen (vgl. Kapitel 3.2).	Hier wird auf das Resultat von (A1) verwiesen. Die Variablen werden im- oder explizit als Basis der Algebra als Sprache angesehen (vgl. Kapitel 7.2).
(A9) Die unterschiedlichen Variablenaspekte werden von den Lehrkräften unterschieden (vgl. Kapitel 3.2).	Im Interview hat die Mehrzahl der Lehrkräfte die unterschiedlichen Aspekte mehr oder weniger explizit unterscheiden können. Nach eigenen Aussagen, behandeln sie alle Aufgabentypen, die auf verschiedene Aspekte im Unterricht abzielen. Dazu, inwiefern die Aspekte aber explizit unterschieden werden können, kann keine belastbare Aussage getroffen werden (vgl. jeweils die Kapitel zum Variablenverständnis der Lehrkräfte).
(A10) Die unterschiedlichen Variablenauffassungen werden von den Lehrkräften unterschieden (vgl. Kapitel 3.2).	Die meisten Lehrkräfte sprechen zwar von Verallgemeinerungsprozessen als Bestandteil der Algebra, dennoch wird der Fokus von allen

	Lehrkräften eher auf die Erreichung konkreter Ergebnisse gelegt. Das Ziel ist weniger eine allgemeine Formel zu erhalten, als vielmehr konkrete (Zahl-)Lösungen. Insofern kommt die Variable als Unbestimmte in verschiedenen Verallgemeinerungsprozessen bei der Mehrzahl der befragten Lehrkräfte zum Tragen, in der Hauptsache wird die Variable aber als Unbekannte charakterisiert (vgl. Kapitel 7.6).
(A11) Die Beherrschung der Rechengesetze und -regeln wird als zentraler Inhalt angesehen (vgl. Kapitel 3.2).	Die inhaltliche Grundlage für den Algebraunterricht bildet bei allen Lehrkräften die Beherrschung der Rechenregeln und -gesetze (vgl. Kapitel 7.2).
(A12) Die Reflexion über die Variablen, ihre Auswahl und Verwendung wird als notwendig angesehen (vgl. Kapitel 3.2).	Werden Variablen im Sachkontext verwendet, so achten die befragten Lehrkräfte sehr darauf, deren Bedeutung zu reflektieren - wofür sie also im jeweiligen Sachkontext steht (vgl. Kapitel 7.2).
(A13) Der Rückbezug der Variablen zu konkreten Zahlen wird als Unterrichtsstrategie verwendet (vgl. Kapitel 3.2).	Der Rückbezug der Variablen zu den konkreten Zahlen wird vor allem von Herrn F postuliert (vgl. 6.6.5). Auch Frau D misst diesem Bezug als Mittel zur Überprüfung großen Wert bei (vgl. 6.4.5). Das Einsetzen konkreter Zahlen als Kontrollinstrument wird von den übrigen Lehrkräften mehr oder weniger explizit genutzt, von keiner der Lehrkräfte aber abgelehnt.
(A14) Die Variablen werden im Unterricht in Ermangelung einer umfassenden Definition vor allem verwendet und nicht definiert (vgl. Kapitel 3.2).	Variablen werden von keiner der Lehrkräfte formal-mathematisch definiert. Herr C (vgl. 6.3.1), Herr F (vgl. 6.6.1) und Herr G (vgl. 6.7.1) sprechen sich explizit gegen die Möglichkeit so einer Definition aus. Die übrigen Lehrkräfte definieren die Variable im Kontext der jeweiligen Situation, als Alter, Gewicht, etc. (zum Beispiel vgl. 6.2.9).
(A15) Die Notwendigkeit der Verwendung von Variablen wird in verschiedenen Kontexten verdeutlicht (vgl. Kapitel 3.2).	Die Verwendung von Variablen ist ein elementarer Bestandteil des Algebraunterrichts. Alle Lehrkräfte messen der Variablen einerseits als Möglichkeit verschiedene Fälle simultan abzubilden und andererseits um einen vertieften Einblick in die Mathematik zu bekommen, eine große Bedeutung bei (vgl. Kapitel 7.2).
(A19) Die Erlangung des Struktursinns wird im Unterricht explizit gefördert (vgl. Kapitel 3.3).	Der Struktursinn als Element des Algebracurriculums wird zum Beispiel durch Herrn H und Herrn I angesprochen. Sie betrachten die Vermittlung von Schemata und Regeln und deren Nutzung als Mittel den Struktursinn der Lernenden zu fördern. Auch die übrigen Lehrkräfte ergreifen Maßnahmen wie Unterstreichungen (zum Beispiel Herr B in 6.2.9), um den Sinn für die algebraischen Strukturen zu fördern und so zum

	Beispiel die Idee der Gleichartigkeit von Termen zu fördern. Widersprüche zu dieser Hypothese konnten auf der Basis des vorliegenden Materials nicht gefunden werden.
(A22) Die unterschiedlichen Zugänge: Algebra als Sprache, Algebra als Problemlöseinstrument, Algebra als Instrument zur Verallgemeinerung, Algebra als Modellierungsinstrument und Algebra als Instrument zur Darstellung verschiedener Größen und ihrer Zusammenhänge lassen sich in den Argumentationsstrukturen der Lehrkräfte wiederfinden (vgl. Kapitel 3.4).	Es gibt unterschiedliche Wahrnehmungen der Algebra. Bei den Lehrkräften C, F, H und I wird die Algebra explizit als Sprache charakterisiert und indirekt auch durch Frau A (vgl. Hypothese A2). Die Lehrkräfte B, D, E und G benennen die Algebra als Instrument zum Problemlösen. Die anderen Zugänge sind eher als peripher beziehungsweise nicht vorhanden zu werten (vgl. Kapitel 7.2, 7.3, 7.6).
(A23) Der Ansatz des Problemlösens wird aufgrund seiner Tradition am prominentesten vertreten sein und den Primat gegenüber dem Generalisieren besitzen (vgl. Kapitel 3.4).	Der Ansatz die Algebra als Instrument zum Problemlösen zu verwenden, konnte bei den Lehrkräften B bis I nachgewiesen werden[123]. Der Algebra wird sich durch keine Lehrkraft über den Ansatz des Generalisierens angenähert (vgl. Kapitel 7.2, 7.3, 7.6).
(A24) Die klassische Herangehensweise, bei der zunächst die syntaktischen Grundlagen gelegt und erst später auf die spezifischen Kontexte eingegangen wird, wird präferiert (vgl. Kapitel 3.4).	Die Herangehensweise, zunächst die syntaktischen Bestandteile der Algebra zu unterrichten und diese später mit spezifischen Kontexten zu verbinden, ist für die untersuchten Lehrkräfte typisch (vgl. Kapitel 7.2).

Der Vergleich zeigt, dass zahlreiche der aufgestellten Hypothesen durch die vorliegende Untersuchung gestützt werden konnten. Ein Widerspruch tritt vor allem in Bezug auf die verschiedenen Zugänge zur Algebra auf. Die theoretische Auseinandersetzung mit den algebradidaktischen Grundlagen (vgl. Kapitel 3.4) zeigte fünf mögliche Zugangsmöglichkeiten zur Algebra (vgl. Hypothese A22). In der Einführung der elementaren Algebra durch die interviewten Lehrkräfte konnten nur zwei dieser Zugänge als für diese Lehrkräfte zentral nachgewiesen werden.
Vor allem das eher einheitliche inhaltliche Vorgehen der Lehrkräfte weist auf einen einheitlichen Stoffkanon in der Algebra hin.
In Bezug auf den Algebraunterricht haben sich für die Lehrkräfte vor allem die zentralen Herausforderungen herauskristallisiert, wie umfangreich auf abstrakter Ebene die Regeln der Term- und Gleichungsumformungen unterrichtet werden sollen und inwiefern es dort tatsächlich reale Anknüpfungsmöglichkeiten gibt.

Ziele des Algebra- und Mathematikcurriculums

In Kapitel 7.8 wurde gezeigt, dass sich die individuellen Ziele des Algebracurriculums widerspruchsfrei in die Ziele des Mathematikcurriculums einbetten lassen, weshalb die Zusammenfassung gemeinsam erfolgt. Dies stützt die folgende Hypothese:

[123] Das Problemlösen, so wie die Lehrkräfte es beschreiben, meint in diesem Fall die Bearbeitung von Anwendungskontexten aller Art. Ein Problemlösen im eigentlichen Sinn, orientiert an Leiß und Blum (2011), wird durch keine Lehrkraft beschrieben.

(A1) „Die individuellen Ziele der Lehrkräfte in Bezug auf ihr Algebra- und des Mathematikcurriculum unterscheiden sich nur unwesentlich.“

Die Ziele des Algebra-und Mathematikcurriculums sind durch die Lehrkräfte auf einer eher abstrakten Ebene formuliert, differieren zwischen den Lehrkräften nur unwesentlich und stellen beispielsweise die Allgemeinbildung, die Förderung des logischen und abstrakten Denkens oder das Erkennen mathematischer Strukturen ins Zentrum.
Durch die Betonung der Allgemeinbildung als Ziel des Algebracurriculums wird die folgende Hypothese gestützt:

(A7) „Als Ziel des Algebracurriculums wird der Beitrag zur Allgemeinbildung formuliert.“

Die Algebra im Unterricht fungiert, so wie sie durch die Lehrkräfte als Kern der Mathematik dargestellt worden ist, als grundlegendes Instrument beziehungsweise Werkzeug, mit dessen Hilfe diese Ziele erreicht werden können. Dabei stellen die Lehrkräfte vor allem den Werkzeug-Charakter der Algebra heraus, indem sie die Wichtigkeit die Regeln im Umgang mit Termen, Variablen und Gleichungen herausstellen. Diese besitzen einen Grundlagencharakter (vgl. Kapitel 7.2, 7.3, 7.4).
Bei der weiteren Gegenüberstellung der a priori generierten Hypothesen (vgl. Kapitel 3) mit den Forschungsresultaten in diesem Bereich wird die folgende Schlussfolgerung gezogen:

(A6) „Die Umsetzung der genannten algebraischen Tätigkeiten stellt eine Zieldimension des individuellen Algebracurriculums dar.“

In dem Vergleich zum Inhalt des Algebracurriculum (vgl. Kapitel 7.2) wurde deutlich, dass die algebraischen Tätigkeiten wie strukturieren, analysieren, Sachverhalte durch Gleichungen beschreiben, die Termstruktur erkennen, Terme durch Rechengesetze umformen, etc. als Bestandteile des Algebracurriculums angesehen werden (vgl. Hypothese A5). Wie bereits angedeutet, bilden diese Tätigkeiten die Grundlage, um die Ziele des Algebracurriculums beziehungsweise des Mathematikcurriculums zu erreichen. Insofern bilden sie insbesondere die Grundlage für die Zielerreichung und stellen somit selbst eine Zieldimension des individuellen Algebracurriculums dar.

Lernen von Algebra

Generell wird konstatiert, dass die Einstellungen der Lehrkräfte in Hinsicht auf die Frage, was erfolgreiches Lernen der Algebra respektive der Mathematik bedeutet, durch die Unterscheidung der Schülerschaft in verschiedene Gruppen geprägt ist. Die durch die Lehrkräfte getroffene Zuweisung der Lernenden zu einer bestimmten Gruppe erfolgt aufgrund der extern gegebenen Voraussetzungen der Schülerinnen und Schüler. Gleichzeitig werden den verschiedenen Gruppierungen spezifische Eigenschaften durch die Lehrkräfte zugeschrieben.
Die Folgen dieser Unterscheidungen variieren zwischen den Lehrkräften (vgl. Kapitel 6, 7.5, 7.6). Insgesamt schaffen die Lehrkräfte aber Lernumgebungen, die nach ihren Kriterien das Lernen der Schülerinnen und Schüler fördern (vgl. Kapitel 7.5).
Für das Lernen der Schülerinnen und Schüler wurde a priori die folgende Hypothese aufgestellt:

(A25) „Die Lehrkräfte werden als Fehlerursachen vornehmlich die Person und die Eigenschaften der Schülerinnen und Schüler heranziehen.“

Bezugnehmend auf diese Hypothese ist festzustellen, dass auf Fehlerursachen durch die Lehrkräfte eher undifferenziert in Bezug auf spezifische Fehler eingegangen wird (vgl. Kapitel 7.5). Insgesamt wird diese Hypothese aber dennoch gestützt, weil alle Unterscheidungen, die durch die Lehrkräfte anhand von Kriterien vorgenommen werden, die als eher stabile Charakteristika der Lernenden verstanden werden können. Beispielsweise unterscheiden die Lehr-

kräfte A, B, C, H und I die Lernenden anhand ihrer kognitiven Leistungsfähigkeit, während die Lehrkräfte D, E, F und G emotional/motivationale Kriterien zur Unterteilung der Schülerinnen und Schüler anwenden.
Durch die Attribuierung der Lernenden beispielsweise in Form einer begrenzten Auffassungsgabe, Leistungsfähigkeit oder Motivation, wird festgestellt, dass die Schülerinnen und Schüler aufgrund ihrer unabhängig vom jeweiligen Unterricht existierenden Begabung ein gewisses schematisches Verständnis der Inhalte nicht überschreiten können, weshalb diese Schülerinnen und Schüler „natürliche“ Probleme zum Beispiel bei der Variation und Adaption der Schemata und Algorithmen in verschiedenen Aufgabenkontexten haben (vgl. Kapitel 6). Insofern werden die Eigenschaften der Schülerinnen und Schüler als Ursache für mögliche Fehler gesehen.
Bemerkenswert ist in diesem Kontext, dass alle Lehrkräfte eine Unterscheidung ihrer Schülerschaft vornehmen und diese unterschiedlichen Gruppen explizit unterschiedlich attribuieren (siehe oben). Ein solches Schülerbild führt wie im Fall von Frau A (vgl. 6.1.1) und in abgemilderter Form von Herrn B, Herrn C, Herrn H und Herrn I sogar zu einer Entscheidung in Bezug auf die Ausrichtung des Unterrichts. Vor allem die scheinbare Stabilität dieses Schülerbildes überrascht, die daran festgemacht wird, dass die gerade genannten Lehrkräfte den unterschiedlichen Gruppen kognitive Niveaus zuordnen und auch relativ stabile Anteile an Schülerinnen und Schülern benennen können (vgl. 6.1.6), die offenbar kaum variieren. Entscheidend ist in diesem Zusammenhang, dass den Lernenden der „unteren“ Leistungsgruppen in der Folge auch nicht die Möglichkeit zugestanden wird, ein höheres Niveau erreichen zu können (vgl. zum Beispiel 6.1.1 oder 6.3.4).
Weiterhin wurde die folgende Hypothese generiert:

(A26) „Fehler der Schülerinnen und Schüler werden sowohl auf der rein symbolischen Ebene, als auch in der Übersetzungsphase von Textaufgaben in die symbolische Sprache festgestellt.“

Zur Hypothese (A26), die verschiedene Arten von Fehlern thematisiert, wird festgestellt, dass die verschiedenen Lehrkräften sowohl die Übersetzung von Sachkontexten in die mathematische Sprache als eine kognitive Hürde im Erlernen der Algebra beschreiben als auch das Arbeiten auf rein symbolischer Ebene (vgl. beispielsweise die Aussagen der Lehrkräfte A, B, E oder I).

<u>Lehren von Algebra</u>

In Bezug auf das Lehren wurde in Kapitel 7.6 gezeigt, dass der Algebraunterricht eher konservativ gestaltet wird. Das bedeutet in diesem Kontext, dass die Lehr-/Lernorientierung sich auf einem Kontinuum zwischen einer instruktiven und co-instruktiven Lehr-/Lernorientierung bewegt. Der Unterricht ist als insgesamt eher lehrkraftzentriert zu charakterisieren. Lehrkräfte, die auf dem beschriebenen Kontinuum eher in Richtung Co-Instruktivismus einzuordnen sind, achten darauf, eine binnendifferenzierende, aktivierende Lernumgebung zu schaffen.
Die gewählten Aufgabenstellungen fokussieren auf konkret zu berechnende Ergebnisse. Die Lernenden werden durch Schemata und Algorithmen verschieden stark unterstützt. Im Grad der Anwendungsbezogenheit der Aufgaben unterscheiden sich die Lehrkräfte. Wiederholungen und Übungen sowie ein ausreichender Zeitraum dafür sind elementarer Bestandteil des Algebraunterrichts.
Im Bereich des Lehrens konnte die Mehrheit der Lehrkräfte (B-I) einem (vorläufigen) Typus „Motivation“ zugeordnet werden, der sich vor allem durch das Bedürfnis nach Sinnstiftung bei den Lernenden auszeichnete. Diese Lehrkräfte empfinden es als herausfordernd, die Algebra auf einer anwendungsorientierten Ebene zu unterrichten, um so einen unmittelbaren Nutzen im Erlernen der algebraischen Regeln zu vermitteln. Dies erscheint ihnen aber unmittelbar wichtig, um die Schülerinnen und Schüler zu motivieren. Dabei wird versucht, Sinn

sowohl mit Hilfe von inner- als auch von außermathematischen Anwendungsbezügen zu schaffen (vgl. zum Beispiel Herrn G oder Frau D) (vgl. Kapitel 7.6).
Vor allem für diese Lehrkräfte können die folgenden Hypothesen als wahr angenommen werden:

(A20) „Die Sinnstiftung gilt den Lehrkräften als begründendes Element in der Begründung ihrer Unterrichtsstrategie.“
(A21) „An die verschiedenen Möglichkeiten, Sinn entstehen zu lassen, wird im Unterricht der Lehrkräfte angeknüpft.“

Im Vorhinein hat sich die Unterscheidung in prozedurales und konzeptuelles Wissen als relevant für die Betrachtung des Algebraunterrichts herausgestellt. Dazu wurden die folgenden beiden Hypothesen generiert:

(A17) „Die Unterscheidung von prozeduralem und konzeptuellem Wissen wird von den Lehrkräften explizit wahrgenommen.“
(A18) „Die Verbindung beider Wissensarten stellt für die Lehrkräfte eine Herausforderung im Unterricht dar.“

Das prozedurale Wissen, das von den Lehrkräften durch das Arbeiten auf einer abstrakten, weil rein symbolischen, Ebene, in Form von zum Beispiel Regeln der Termumformung, charakterisiert wird, kann auf diese Weise identifiziert werden. Was aber unter konzeptuellem Wissen verstanden wird, in dem Sinn wie in Kapitel 3.3 dargestellt, kann nicht eindeutig herausgestellt werden: In den Darstellungen der Lehrkräfte wird klar zwischen den handwerklichen, syntaktischen Elementen und den später hinzukommenden, davon klar getrennten, semantischen Elementen der Algebra unterschieden (vgl. Kapitel 7.2, 7.6).
Die von Kieran (2013) dargestellten Elemente konzeptuellen Denkens, die in Verbindung mit den algebraischen Prozeduren stehen, wie das Erkennen spezifischer Termstrukturen, die Herstellung von Beziehungen zwischen verschiedenen Ausdrücken oder die Reflexion über die durchgeführten Umformungen (vgl. Kapitel 3), werden von einigen Lehrkräften erwähnt.
Das Erkennen von Termstrukturen beispielsweise über Termbäume wird zum Beispiel außer von den Lehrkräften A (vgl. 6.1.4) und G (vgl. 6.7.1) von allen Lehrkräften durchgeführt. Ähnlich verhält es sich mit den Unterstreichungen, die helfen sollen, die Gleichartigkeit der Terme zu veranschaulichen (vgl. Hypothese A19). Eine Überprüfung auf Gleichartigkeit ist darüber hinaus im Rahmen der Termumformungen Bestandteil des Algebracurriculums (zum Beispiel Herr H mit der Lernumgebung „Gleisanlagen“ oder die Lehrkräfte C und G bei der Arbeit an figurierten Zahlen). Widersprüchliches konnte nicht gefunden werden.
Infrage zu stellen ist der Grad der Reflexion der Schülerinnen und Schüler über die einzelnen Umformungsschritte. Die Lehrkräfte erläutern zwar die Rückeinsetzung von konkreten Zahlen als aus ihrer Sicht valides Instrument der Überprüfung durchgeführter Rechnungen und Umformungen, inwiefern dies aber schrittweise oder erst im Nachhinein geschieht, wird nicht abschließend geklärt.
Insofern wird festgehalten, dass die Lehrkräfte Maßnahmen ergreifen, um das mit den algebraischen Prozeduren zusammenhängende konzeptuelle Wissen zu vermitteln. Die Frage bleibt offen, inwiefern durch die beschriebenen Schritte tatsächlich das konzeptuelle Wissen expliziert oder vielmehr das prozedurale Vorgehen gestützt wird.
Darüber hinaus wird die vor allem durch die Lehrkräfte vorgenommene Trennung zwischen den semantischen und syntaktischen Elementen der Algebra konstatiert (vgl. Kapitel 7.2, 7.8), die als manifestes Problem im Algebraunterricht gilt (vgl. Malle, 1993, Fischer et al., 2010) und sich in den geführten Interviews deutlich widergespiegelt hat.

Typenbildung - Forschungsfrage 2

Durch den Schritt der Typenbildung, die nach dem Schema von Kelle und Kluge (2010) in einem vierstufigen Prozess vorgenommen worden ist (vgl. Kapitel 7), konnten drei Typen individueller Curricula der Lehrkräfte in der Algebra ausgemacht werden, die in Kapitel 7.8 ausführlich beschrieben worden sind. Diese Typisierung beantwortet gleichzeitig die zweite Forschungsfrage, da sie aus der Kontrastierung der einzelnen individuellen Curricula resultiert und diese auf deren Gemeinsamkeiten und Unterschiede hin analysiert.
Im Zuge des zunächst Kategorie-gebundenen Vergleichs, konnten Unterschiede in den Leitkategorien Inhalt, Lehren der Algebra und dem Bild der Mathematik identifiziert werden, die zu einer vorläufigen Typisierung führte, während in den Kategorien Ziele des Algebra- und Mathematikcurriculums und dem Lernen der Algebra eher ähnliche Argumentationen gefunden werden konnten. Diese zu diesem Zeitpunkt noch vorläufigen Typenkonstruktionen wurden in einem weiteren sowohl kategorien- als auch fallübergreifenden Vergleich, auf Basis inhaltlicher Konsistenz, zu den folgenden drei Typen verdichtet:

- der Typus **Traditionell**, bei dem die Algebra vor allem als Werkzeugkasten unter einer Kalkül-Orientierung verstanden wird,
- der Typus der **schema- und (formalistisch) orientierten Anwenderinnen und Anwender**, der die Algebra vor allem als Instrument versteht, Anwendungskontexte zu bearbeiten und lösen zu können, indem diese zunächst in die algebraische Sprache übersetzt und schließlich in diesem Kontext gelöst werden. Die Motivation der Lernenden und die Sinnstiftung habe für diesen Typus Priorität. Schemata und Algorithmen dienen ausschließlich der Problemlösung, indem sie helfen, eine konkrete Zahlenlösung zu erhalten und
- der Typus der **anwendungsorientierten Schematikerinnen und Schematiker**, die einerseits die Algebra als Instrument betrachten, Anwendungskontexte bearbeiten zu können und andererseits Schemata und Algorithmen einen eigenen Stellenwert beimessen und deren Vermittlung als eigenständiges Lernziel betrachten, weil durch deren Anwendung Ziele wie die Förderung strukturierter Denkhandlungen erreicht werden können.

Ähnlich wie bereits durch Eichler (2006) beschrieben, orientiert sich diese Typisierung an den globalen Beliefs nach Grigutsch et al. (1998) und ergänzt diese Grobtypisierung durch detaillierte Einsicht in die damit verbundenen Planungsentscheidungen (vgl. Annahme 7, Kapitel 2). Diese gründen sich, wie gezeigt wurde, zum Beispiel auf das Schülerbild der Lehrkräfte (vgl. zum Beispiel 6.1.1), auf ihre eigenen Erfahrungen in der Ausbildung oder ihrer Lehrerfahrung (vgl. zum Beispiel 6.2, 6.4). Zudem konnten algebraspezifische Entscheidungen im Argumentationsprozess verdeutlicht und herausgestellt werden, die sich zum Beispiel auf die Gewichtung symbolischer Rechenverfahren oder den Stellenwert der Anwendung in der Algebra beziehen (vgl. 7.8).

Bemerkung zur Hypothese (A16)

Schließlich soll auf die Hypothese (A16) eingegangen werden, die bereichsübergreifend beantwortet werden muss, weil sie die Ziele des Algebracurriculums mit den Einstellungen zur Variablen sowie dem Gesamtbild der Algebra verknüpft:

(A16) „Zwischen den Zielsetzungen, die mit der Algebra verbunden sind, dem, was unter Algebra verstanden wird und der Nutzung der Variablen wird ein Zusammenhang hergestellt.“

Im Fall von Frau A ist dies eindeutig zu beantworten. Sie versteht die Algebra als Werkzeugkasten und hat das Ziel die handwerklichen Fähigkeiten, die mit Hilfe des Werkzeugkastens zu erreichen sind, zu fördern. Die Variable wird dabei unter dem Kalkül-Aspekt als bedeutungsloses Symbol verstanden, was sowohl in Verbindung mit ihrem Bild der Algebra als auch mit den Zielen des Algebracurriculums konsistent ist. Dies entspricht dem Typus „Traditionell" (vgl. Kapitel 7.2, 7.6, 7.7, 7.8).
Die Lehrkräfte, deren individuellen Curricula den Typen „schema- und (formalistisch) orientierte Anwenderinnen und Anwender" und „anwendungsorientierte Schematikerinnen und Schematiker" zugeordnet worden sind (vgl. Kapitel 7.8), betrachten die Algebra als Instrument, um Anwendungskontexte zu bearbeiten. Sie ist ein Instrument, dessen Nutzen direkt an die Bearbeitung dieser Kontexte geknüpft ist. In diesem Zusammenhang wird die Variable zunächst eher über den Gegenstandsaspekt und später zur konkreten Lösung vorwiegend über den Kalkülaspekt verstanden. Weil die konkrete Bestimmung eines Wertes für die Variable das Ziel der Arbeit mit ihr ist, wird sie eher als Unbekannte charakterisiert. Ziele des Algebracurriculums sind bei diesen Lehrkräften die Sinnstiftung und Motivation der Lernenden, insofern sind diese Zusammenhänge ebenfalls als konsistent zu werten. Diese Zieldimension ist in erster Linie auf die „schema- und (formalistisch) orientierten Anwenderinnen und Anwender" bezogen, gilt aber genauso für die „anwendungsorientierten Schematikerinnen und Schematiker", auch wenn diese sich durch zusätzliche Zieldimensionen bezogen auf den globalen Belief „Schema" auszeichnen.

Domänenspezifität - Forschungsfrage 3

Die dritte Forschungsfrage bezieht sich auf die Domänenspezifität der individuellen Curricula der Lehrkräfte (vgl. Annahme 6, Kapitel 2). Diese wurde durch die Gegenüberstellung der erzielten Forschungsergebnisse mit den bereits vorliegenden Resultaten der verschiedenen Untersuchungen in den Bereichen der Stochastik, der Geometrie, der Analysis und der Arithmetik in Kapitel 8 analysiert.
Die Vermutung der Domänenspezifität erhärtete sich im Verlauf dieser Gegenüberstellung. Ähnlichkeiten zeigten sich durch die Analysen in der Geometrie und der Stochastik, insofern als dass beispielsweise eine Ausrichtung in Hinblick auf einen globalen Belief möglich war - in der Stochastik auf die Anwendung und in der Geometrie auf den Prozessaspekt. Eine solche eindeutige Tendenz konnte weder in der Analysis noch in der Algebra festgestellt werden. Während für die individuellen Curricula in der Analysis sowohl die Orientierung an der Anwendung oder am Formalismus zentral sind, gilt dies in ähnlicher Weise für die Algebra. Hier konnten entweder die Anwendung oder der Schema-Aspekt als zentrale Überzeugung identifiziert werden. Eine weitere Ähnlichkeit zwischen der Analysis und der Algebra betrifft den peripheren Stellenwert des Prozess-Aspekts. Speziell für die individuellen Curricula in der Algebra ist hervorzuheben, dass der Schema-Aspekt entweder als eigenes Lernziel oder als wesentliche Voraussetzung zur Erreichung weiterführender Lerninhalte eine zentrale Rolle spielt (vgl. Kapitel 7.7, 7.8).
Weiterhin wiesen die hier untersuchten Lehrkräfte in ihrem Antwortverhalten explizit auf Unterschiede zwischen den einzelnen Domänen hin.
Schließlich taucht in jeder der Untersuchungen die Frage auf, inwiefern die Planungsentscheidungen der Lehrkräfte Einfluss auf die konkrete Unterrichtsgestaltung und damit auf das Lernen der Schülerinnen und Schüler nehmen. Eichler und Erens (2015) weisen daraufhin, dass es Evidenz dafür gibt, dass sich die als zentral identifizierten Überzeugungen der Lehrkräfte mittelfristig im tatsächlichen Unterricht wiederfinden lassen. Die Ergebnisse der im Rahmen der vorliegenden Untersuchung durchgeführten Unterrichtsbeobachtungen sowie die Klausurenanalysen (vgl. Kapitel zu den Unterrichtsbeobachtungen), die einen vertieften Einblick in den realen Unterricht der Lehrkräfte erlauben, weisen innerhalb des beschriebenen

Gültigkeitsrahmen (vgl. 5.8) darauf hin, dass eine Konsistenz zwischen den rekonstruierten subjektiven Theorien und der beobachteten Unterrichtspraxis besteht.
Dies führt dazu, dass sich die Vermutung eines Zusammenhangs zwischen den Planungsentscheidungen der Lehrkräfte und dem realen Unterrichtsgeschehen verhärtet.

9.2. Rückblick und Ausblick

Die auf einer Interviewstudie aufbauende Untersuchung zu den individuellen Curricula der Lehrkräfte in Bezug auf die Algebra der Klassenstufen 7 und 8 liefert einen detaillierten Einblick in die Planungsentscheidungen und die damit zusammenhängenden Begründungen und Argumentationsstrukturen der untersuchten Lehrkräften.
Grundsätzlich wird in diesem Zusammenhang festgestellt, dass sich das methodische Vorgehen zur Rekonstruktion der individuellen Curricula der Lehrkräfte als geeignet erwiesen hat (vgl. Annahme (5), Kapitel 2). Dies wird daran festgemacht, dass die folgenden in den Kapiteln 2 und 5 getroffenen Annahmen im Verlauf und den Ergebnissen der Untersuchung (vgl. Kapitel 6) als erfüllt angesehen werden:

- Die Lehrkräfte treffen ihre Unterrichtsentscheidungen begründet. Herangezogen werden beispielsweise fachliche Überlegungen, den Schwierigkeitsgrad des jeweiligen Inhalts betreffend, das eigene Schülerbild oder methodische Gedanken (vgl. Annahme 1, Kapitel 2.5).
- Die Lehrerinnen und Lehrer sind reflexive Experten ihres Berufs und sind in der Lage auf Basis ihrer Erfahrungen, ihres professionellen Wissens und ihrer subjektiven Theorien unterrichtliche Ziele zu formulieren, Rahmenbedingungen zu evaluieren und geeignete Mittel zur Zielerreichung zu finden (vgl. Annahme 2, Kapitel 2.5). Es konnten subjektive Theorien, die unterrichtliche Ziele enthalten, in Form von quasi-logisch aufgebauten Ziel-Mittel-Argumentationen rekonstruiert werden, die durch Interviews mit den untersuchten Lehrkräften auf ihre Rekonstruktionsadäquanz hin validiert werden (vgl. Kapitel 5).
- Die fünf Leitkategorien, Stoffinhalt der Algebra, Ziele des Mathematik- und Algebracurriculums, das Lehren und Lernen der Algebra respektive der Mathematik ergänzt durch das Bild der Mathematik, haben sich als sinnvolle Kategorisierungen der subjektiven Theorien erwiesen (vgl. Annahme 4, Kapitel 2.5), die in den Angaben der Lehrkräfte unterschieden werden konnten. Sie dienten im gesamten Untersuchungsverlauf als Orientierungs- und Strukturierungshilfe (vgl. Kapitel 6).

Insgesamt konnten individuell geprägte Einsichten in die Planungsgedanken und -entscheidungen der einzelnen Lehrkräfte gewonnen werden, die in Form von Argumentationsmustern dargestellt werden konnten.
Die inhaltliche Reichweite der erzielten und gerade beschriebenen Ergebnisse muss aber insoweit eingeschränkt werden, als diese aufgrund der Anzahl und der regionalen Gebundenheit der interviewten Lehrkräfte keinen Anspruch auf Vollständigkeit in Bezug auf die Gesamtdarstellung der individuellen Curricula aller Lehrkräfte in der Algebra erheben können.
Dennoch ist es gelungen, in Hinsicht auf die interviewten Lehrkräfte wesentliche Elemente ihrer individuellen Algebracurricula herauszuarbeiten, die eine Innensicht in die Planung von Algebraunterricht und damit indirekt auf den Algebraunterricht erlauben.
Besonders hervorzuheben sind die folgenden Resultate:

- Die inhaltliche Ausgestaltung des Algebraunterrichts ist eher einheitlich gestaltet. Es werden zunächst Variablen im Zusammenhang mit Termen anhand von innermathematischen (zum Beispiel über figurierte Zahlen, Zahlenrätsel oder ohne einen inhaltlichen Bezug) oder außermathematischen (zum Beispiel eingekleidete Aufgaben, in denen die Variable für ein Alter, ein Gewicht oder Ähnliches steht) Kontexten eingeführt. Anschließend werden auf einer symbolischen, abstrakteren Ebene algebraische Prozeduren und Regeln der Termumformung eingeübt. Dafür wird Zeit gegeben. Schließlich werden die erlernten Regeln auf Gleichungsumformungen angewendet und zu Lösungsverfahren für Gleichungen und lineare Gleichungssysteme erweitert.

Die Gleichungen werden dann zur Lösung von verschiedenen inner- und außermathematischen Problemstellungen genutzt.

- Die Lehr- und Lernorientierung ist eher traditionell ausgerichtet. Diese Einschätzung bezieht sich auf den eher instruktiven Lehrstil, die Betonung geschlossener Aufgaben, die auf die Berechnung konkreter Ergebnisse abzielen und die Lehrkraftzentrierung in der Gestaltung des Unterrichts, wobei diese sowohl durch die Angaben in den Interviews, aber auch durch die Beobachtungen im Unterricht gestützt werden konnte. Abstufungen in Bezug auf den Grad der Lehrkraftzentrierung, der Einbeziehung und Aktivierung der Lernenden und die Entscheidungen für bestimmte Methoden- und Aufgabenformate können für die einzelnen Lehrkräfte konstatiert werden.
- In Bezug auf die Lernenden ist vor allem das Schülerbild der Lehrkräfte zu bemerken. Dieses dient häufig sowohl zur Begründung von Unterrichtsentscheidungen (zum Beispiel an welcher Schülergruppe sich inhaltlich ausgerichtet wird, welche Aufgabenformate geeignet sind oder wie viel Zeit zum Üben gegeben wird), aber auch als Rechtfertigung für mögliche Fehler der Schülerinnen und Schüler.
- Hervorzuheben ist darüber hinaus die eher hohe Bedeutung des Schema-Aspekts in den Ausführungen der Lehrkräfte zu ihrem Algebraunterricht. Hinzu kommt eine gewisse Uneinigkeit darüber, welchen Stellenwert die Anwendung in der Algebra besitzt. Die Lehrkräfte beschreiben die Algebra selbst als Sprache der Mathematik, die innerhalb dieser universell zum Einsatz kommt und sehen sie als Werkzeug beziehungsweise Instrument, wobei zunächst der Umgang mit diesem Regelsystem erlernt werden muss (Schema-Aspekt). Erst im späteren Verlauf gewinnt die Algebra an konkreter Bedeutung (bezüglich der Sinnstiftung), wenn sie auf die verschiedenen innermathematischen Gebiete, aber auch auf vielfältige außermathematische Problemstellungen angewandt wird (Anwendungs-Aspekt).
  Die Herausforderung, die sich einigen der interviewten Lehrkräfte hierbei stellt, resultiert aus ihren Einstellungen, dass Schülerinnen und Schüler nur lernen, was ihnen sinnvoll erscheint oder ihnen Spaß macht. Dies steht im Widerspruch zu dem, wie Algebra gesehen und demzufolge unterrichtet wird.
- Im Zusammenhang mit diesem Widerspruch steht die Erkenntnis, dass sich diese Zweiteilung des Unterrichts in den Planungsgedanken der Lehrkräfte widerspiegelt: einerseits in das Regellernen und andererseits in die Anwendung dieser Regeln, also die Trennung von Syntax und Semantik.
- Gegenüber fachdidaktischen und lernpsychologischen Erkenntnissen und Konzepten ist eine gewisse Resistenz zu erkennen, was daran festgemacht wird, dass sich, wenn derartiges überhaupt thematisiert wurde, ablehnend gegenüber fachdidaktischen Projekten (zum Beispiel MABIKOM, CALIMERO oder LEMAMOP) geäußert worden ist. Nur Frau D betonte explizit den positiven Einfluss durch die Erweiterung des eigenen Aufgabenrepertoires mit Hilfe dieser Projekte.

Aus diesen Ergebnissen können verschiedene Fragen und Aufträge für die weitere Forschung abgeleitet werden. Algebradidaktische Fragen, die durch die Lehrkräfte aufgeworfen werden, weil sie für ihren konkreten Unterricht Herausforderungen darstellen, sind: Wie kann es gelingen, die (strikte) Trennung von Syntax und Semantik in der Algebra aufzuheben? Gibt es beziehungsweise welche Aufgabenformate erweisen sich zu diesem Zweck als geeignet? Gibt es also zum Beispiel Modellierungs- oder Problemlöseaufgaben, die eine echte Verknüpfung zwischen der Realität und der Algebra ermöglichen? Und: Inwiefern ist eine rein innermathematische Behandlung der Thematik als Alternative zu betrachten? Diese Alternative würde womöglich einerseits die Verwendung künstlicher, eingekleideter und keineswegs lebensnaher Aufgaben reduzieren und andererseits den Blick auf eine eher axiomatisch aufgebaute Mathematik erlauben, so wie ihn sich zum Beispiel die Lehrkräfte C, H und I wünschen.

Ein Forschungsdesiderat in diese Richtung betrifft die Frage, wie tragfähig die konzeptuellen Wissenskomponenten in der Algebra sowohl bei den Lehrkräften als auch bei den Lernenden vertreten sind. Dabei stellt sich die Frage, ob die Algebra nicht schließlich doch nur auf einer Ebene des Regellernens vermittelt wird.
Für die Weiterführung der Forschung im Bereich individueller Curricula lassen sich außerdem die folgenden Überlegungen ableiten. Die Vermutung der Domänenspezifität individueller Curricula konnte durch die vorliegende Arbeit erhärtet werden. Um diese weiter zu untersuchen, wäre eine Untersuchung möglich, die denselben Lehrkräften Fragen zu den verschiedenen Domänen stellt.
In der Folge wäre die unterschiedliche Attribuierung der Domänen, wie in Kapitel 8 erläutert, näher zu analysieren. Gemeint ist, ob diese zum Beispiel eher kognitiv, motivational, volitional oder emotional begründet sind.
Ein weiteres Desiderat bezieht sich auf die Frage, inwiefern die rekonstruierten individuellen Curricula das Verhalten der Lehrkräfte im Unterricht leiten und welche Auswirkungen dies auf die Lernenden hat. Eichler (2008) führte in der Folge zu seiner Untersuchung der individuellen Stochastik-Curricula solche Folgeuntersuchungen durch, welche seine Resultate bestätigte und durch den Einblick in die Praxis präzisierte. Derartige Untersuchungen, die wie hier bereits im kleinen Rahmen durch die Klausurenanalysen und Unterrichtsbeobachtungen durchgeführt worden sind, würden die Resultate dieser Arbeit ebenso sinnvoll ergänzen.
Schließlich wäre es sowohl möglich als auch wünschenswert die Ergebnisse dieser Arbeit zum Beispiel in einer Fragebogenstudie zu quantifizieren und so das Bild über die Planungsgedanken der Lehrkräfte in der Algebra abzurunden.

10. Literaturverzeichnis

Affolter, W., Auer, F., Bärenfänger, C., & Behnke, I. (2011). *Das Mathematikbuch 7*. Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

Akinwunmi, K. (2012). *Zur Entwicklung von Variablenkonzepten beim Verallgemeinern mathematischer Muster*. doi:10.1007/978-3-8348-2545-2

Arcavi, A. (2005). Developing and using symbol sense in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *25*(2), 42–47.

Balacheff, N. (2001). Symbolic arithmetic vs algebra the core of a didactical dilemma. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, & R. Lins (Eds.), *Perspectives on School Algebra* (Vol. 22, pp. 249–260). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. doi:10.1007/0-306-47223-6

Baum, M., et al. (2006). *Lambacher Schweizer 7, Niedersachsen*. Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

Bednarz, N., & Janvier, B. (1996a). Algebra as a problemsolving tool. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra. Perspectives for research and teaching.* (pp. 115–136). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Bednarz, N., & Janvier, B. (1996b). Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: continuities and discontinuities with arithmetic. In N. Bernarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra. Perspectives for research and teaching.* (pp. 115–136). Dordrecht: Springer Netherlands. doi:10.1007/978-94-009-1732-3

Bednarz, N., Kieran, C., & Lee, L. (1996). Approaches to Algebra. Perspectives for research and teaching. In N. Bernarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra. Perspectives for research and teaching.* (pp. 3–12). Dordrecht: Springer Netherlands. doi:10.1007/978-94-009-1732-3

Bell, A. (1988). Algebra - Choices in curriculum design. In A. Borbas (Ed.), *Proceedings of the 12th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 147–153). Veszprém, Hungary: OOK.

Bell, A. (1996a). Algebraic thought and the role of a manipulable symbolic language. In N. Bernarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra. Perspectives for research and teaching.* (pp. 151–154). Dordrecht: Springer Netherlands. doi:10.1007/978-94-009-1732-3

Bell, A. (1996b). Problem-solving approaches to algebra: Two aspects. In N. Bernarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra. Perspectives for research and teaching.* (pp. 167–185). Dordrecht: Springer Netherlands. doi:10.1007/978-94-009-1732-3

Berlin, T. (2011). Unterstützung der algebraischen Denkentwicklung. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2011.* Münster: WTM, 91-94.

Bikner-Ahsbahs, A., & Prediger, S. (2006). Diversity of theories in mathematics education - How can we deal with it. *ZDM - Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik*, *38*(1), 52–57.

Bikner-Ahsbahs, A., Prediger, S., Artigue, M., Arzarello, F., & Et, A. (2014). Starting points for dealing with the diversity of theories. In A. Bikner-Ahsbahs & S. Prediger (Eds.), *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education* (pp. 3–12). Cham [u. a.]: Springer Verlag.

Blömeke, S. (2007). Qualitativ - quantitativ, induktiv - deduktiv, Prozess - Produkt, national - international. In M. Lüders (Ed.), *Forschung zur Lehrerbildung* (pp. 13–37). Münster: Waxmann.

Blömeke, S. (2014). Framing the enterprise: Benefits and challenges of international studies on teacher knowledge and teacher beliefs - modeling missing links. In S. Blömeke, H. Feng-Jui, G. Kaiser, & W. H. Schmidt (Eds.), *International perspectives on teacher knowledge, beliefs and opportunities to learn.* (pp. 3–18). Dordrecht: Springer Science + Business Media, B. V.

Blömeke, S., Felbrich, A., Müller, C., Kaiser, G., & Lehmann, R. (2008). Effectiveness of teacher education. State of research, measurement issues and consequences for future studies. *ZDM*, *40*(5), 719–734. doi:10.1007/s11858-008-0096-x

Böer, H., et al. (2007). *Mathe Live 7*. Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

Bräunling, K. (2016). *Beliefs von Lehrkräften zum Lehren und Lernen von Arithmetik*. Pädagogische Hochschule Freiburg. (Dissertation im Druck)

Bräunling, K., & Eichler, A. (2015). Teachers' beliefs systems referring to the teaching and learning of arithmetic. In C. Bernack-Schüler, R. Erens, A. Eilcher, & T. Leuders (Eds.), *Views and Beliefs in Mathematics Education* (pp. 95–107). Wiesbaden: Springer Fachmedien.

Bräunling, K., Eichler, A., & Mischo, C. (2011). Subjektive Theorien von Lehrerinnen und Lehrern zum Lehren und Lernen von Arithmettik (STELLAI). In R. Haug & L. Holzäpfel (Eds.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2011* (pp. 927–929). Münster: WTM.

Buehl, M. M., & Beck, J. S. (2015). The relationship between teachers' beliefs and teachers' practice. In H. Fives & M. G. Gill (Eds.), *International Handbook of Research on Teachers' Beliefs* (pp. 66–84). New York: Routledge.

Calderhead, J. (1996). Teachers: beliefs and knowledge. In D. C. Berliner & R. C. Calfee (Eds.), *Handbook of educational psychology* (pp. 709–725). Macmillan.

Clark, C. M., & Peterson, P. L. (1984). *Teachers' thought processes*. Michigan.

Cooney, T. J., Shealy, Barry, E., & Arvold, B. (1998). Conceptualizing belief structures of preservice secondary mathematics teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, *29*(3), 306–333.

Cukrowicz, J., et al. (Eds.). (2006). *Mathe Netz 7*. Braunschweig: Westermann Schroedel.

Danner, H. (1979). *Methoden geisteswissenschaftlicher Pädagogik: Einführung in Hermeneutik, Phänomenologie und Dialektik*. München: Reinhardt.

Drijvers, P. H. M. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment. Design research on the understanding of the concept of parameter*. University of Utrecht.

Drüke-Noe, C. (2014). *Aufgabenkultur in Klassenarbeiten im Fach Mathematik*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Drüke-Noe, C. (2015). Klausuren kompetenzorientiert analyysieren und weiterentwickeln. In W. Blum, C. Drüke-Noe, S. Vogel, & A. Roppelt (Eds.), *Bildungsstandards aktuell: Mathematik in der Sekundarstufe II* (pp. 128–140). Diesterweg, Schroedel, Westermann.

Eichler, A. (2005). *Individuelle Stochastikcurricula von Lehrerinnen und Lehrern*. Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Eichler, A. (2006a). Individual curricula - beliefs behind teachers' beliefs. In A. Rossman & B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. Salvador, Brazil.

Eichler, A. (2006b). Individuelle Stochastikcurricula von Lehrerinnen und Lehrern. *Journal Für Mathematik-Didaktik*, *27*(2), 140–162.

Eichler, A. (2008). Teachers' classroom practice and students' learning. In C. Batanero, G. Burrill, C. Reading, & A. Rossmann (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*.

Eichler, A. (2011). Statistics teachers and classroom practices. In C. Batanero, G. Burrill, & C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in school mathematics - challenges for teaching and teacher education. A joint ICMI/IASE Study: The 18th ICMI Study* (Vol. 14, pp. 175–186). Dordrecht: Springer Netherlands. doi:10.1007/978-94-007-1131-0

Eichler, A., & Erens, R. (2015). Domain-Specific Belief Systems of Secondary Mathematics Teachers. In B. Pepin & B. Roesken-Winter (Eds.), *From beliefs to dynamic affect systems in mathematics education* (pp. 179–200). Cham [u. a.]: Springer International

Publishing. doi:10.1007/978-3-319-06808-4_9
Erens, R. (2013). Rekonstruktion von curricularen Überzeugungen zum Analysisunterricht. *Beiträge Zum Mathematikunterricht 2013*. Münster: WTM, 296-299.
Erens, R., & Eichler, A. (2013). Reconstructing teachers' beliefs on calculus. In B. Ubuz, C. Haser, & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eights Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1329–1338). Manavgat-Side, Antalya: Middle East Technical University.
Ernest, P. (1989). The Knowledge, Beliefs and Attitudes of the Mathematics Teacher: a model. *Journal of Education for Teaching*, *15*(1), 13–33 doi:10.1080/0260747890150102
Euler, L. (1911). *Vollständige Anleitung zur Algebra*. Leipzig und Berlin: B. G. Teubner.
Fischer, A., Hefendehl-Hebeker, L., & Prediger, S. (2010). Mehr als Umformen: Reichhaltige algebraische Denkhandlungen im Lernprozess sichtbar machen. *Praxis der Mathematik*, 1–7.
Fives, H., & Buehl, M. M. (2012). Spring cleaning for the "messy" construct of teachers' beliefs: What are they? Which have been examined? What can they tell us? *APA Educational Psychology Handbook*, *2*, 477–491. doi:10.1037/13274-000
Franke, M. L., Kazemi, E., & Battey, D. (2007). Understanding teaching and classroom practice. In F. K. J. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 1, pp. 225–256). Charlotte: Information Age Publishing.
Franke, M., & Wynands, A. (1991). Zum Verständnis von Variablen - Testergebnisse in 9. Klassen Deutschlands. *Mathematik in der Schule*, *29*(10), 674–691.
Freudenthal, H. (1973). *Mathematik als pädagogische Aufgabe*. Stuttgart: Ernst Klett Verlag.
Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dodrecht: Reidel.
Furinghetti, F., & Pehkonen, E. (2002). Rethinking characterizations of beliefs. In G. C. Leder, E. Pehkonen, & G. Törner (Eds.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (pp. 39–58). Dordrecht: Springer Science + Business Media, B. V.
Gill, M. G., & Fives, H. (2015). Introduction. In H. Fives & M. G. Gill (Eds.), *International Handbook of Research on Teachers' Beliefs* (pp. 1–10). New York: Routledge.
Girnat, B. (2008). Lehrervorstellungen zur Allgemeinbildung im Geometrieunterricht der Sekundarstufen: Subjektive und fachdidaktische Ansichten im Kontrast. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2008*. Münster: WTM, 407-410.
Girnat, B. (2009). Ontological beliefs and their impact on teaching elementary geometry. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & H. Sakondis (Eds.), *Proceedings of the 33rd IGPME Conference* (Vol. 3, pp. 89–96). Griechenland: Thessaloniki.
Girnat, B. (2016). *Individuelle Curricula von Lehrkräften über den Geometrieunterricht in beiden Sekundarstufen.* Universität Kassel. (Dissertation im Druck)
Girnat, B., & Eichler, A. (2011). Secondary Teachers' Beliefs on Modelling in Geometry and Stochastics. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, & G. Stillmann (Eds.), *Trends in teaching and learning of mathematical modelling* (pp. 75–84). Dordrecht [u.W.]: Springer. doi:10.1007/978-94-007-0910-2_9
Green, T. F. (1971). *The activities of teaching.* New York: McGraw-Hill.
Griesel, H., Postel, H., & Suhr, F. (Eds.). (2006). *Elemente der Mathematik 7, Niedersachsen*. Braunschweig: Schroedel Verlag.
Grigutsch, S., Raatz, U., & Törner, G. (1998). Einstellungen gegenüber Mathematik bei Mathematiklehrern. *Journal Für Mathematik-Didaktik*, *19*(1), 3–45.
Groeben, N. (1981). Die Handlungsperspektive als Theorierahmen für Forschung im pädagogischen Feld. In M. Hofer (Ed.), *Informationsverarbeitung und Entscheidungsverhalten von Lehrern.* (pp. 17–48). München: Urban & Schwarzenberg.
Groeben, N. (1988). Explikation des Konstrukts "Subjektive Theorie." In N. Groeben, D.

Wahl, J. Schlee, & B. Scheele (Eds.), *Das Forschungsprogramm Subjektive Theorien.* (pp. 17–24). Tübingen: Francke Verlag.

Groeben, N., & Scheele, B. (2010). Das Forschungsprogramm subjektive Theorien. In G. Mey & K. Mruck (Eds.), *Handbuch qualitative Forschung in der Psychologie* (pp. 151–165). Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften. doi:10.1007/978-3-531-92052-8

Hannula, M. S. (2012). Exploring new dimensions of mathematics-related affect: embodied and social theories. *Research in Mathematics Education*, *14*(February 2015), 137–161. doi:10.1080/14794802.2012.694281

Hannula, M. S. (2015). Reaction to section 2: The relevance of affective systems and socail factors: a commentary. In B. Pepin & B. Roesken-Winter (Eds.), *From beliefs to dynamic affect systems in mathematics education* (pp. 269–277). Cham [u. a.]: Springer Science + Business Media, B. V.

Heckhausen, H., & Gollwitzer, P. M. (1987). Thought contents and cognitive functioning in motivational versus volitional states of mind. *Motivation and Emotion*, *11*(2), 101–120.

Hefendehl-Hebeker, L. (2007). Algebraisches Denken – was ist das? *Beiträge zum Mathematikunterricht 2007.* Hildesheim: Franzbecker, 148–151.

Hefendehl-Hebeker, L., & Rezat, S. (2015). Algebra: Leitidee Symbol und Formalisierung. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme, & H.-G. Weigand (Eds.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (pp. 117–148). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. doi:10.1007/978-3-642-35119-8

Heid, M. K. (1996). A technology-intensive functional approach to the emergence of algebraic thinking. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra. Perspectives for research and teaching.* (pp. 239–255y). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Herscovics, N. (1989). Cognitive obstacles encountered in the learning of algebra. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra, Vol. 4.* (pp. 60–86). Virginia: Routledge.

Hirscher, H. (1992). Wieviel Termumformung braucht der Mensch? In *Fragen zu Zielen und Inhalten eines künftigen Mathematikunterrichts angesichts der Verfügbarkeit informatischer Methoden.* (pp. 8–10). Hildesheim: Verlag Franz Becker.

Hoch, M., & Dreyfus, T. (2006). Structure sense versus manipulation skills: an unexpected result. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehliková (Eds.), *Proceedings of 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 305–312). Prag, Tschechien.

Hopf, C. (2013). Qualitative Interviews - ein Überblick. In U. Flick, E. Von Kardorff, & I. Steinke (Eds.), *Qualitative Forschung* (10. ed., pp. 349–359). Reinbek bei Hamburg: Rowohlts Enzyklopädie.

Jank, W., & Meyer, H. (1991). *Didaktische Modelle*. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Janvier, C. (1996). Modeling and the initiationinto algebra. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra. Perspectives for research and teaching.* (pp. 225–238). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Kaput, J. J. (1989). Linking representations in the symbol systems of algebra. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra, Vol. 4.* (pp. 167–194). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Kaput, J. J., Carraher, D. W., & Blanton, M. L. (2008). *Algebra in the early grades.* New York: Lawrence Erlbaum Associates/National Council of Teachers of Mathematics.

Kelle, U., & Kluge, S. (2010). *Vom Einzelfall zum Typus. Fallvergleich und Fallkontrastierung in der qualitativen Sozialforschung.* Wiesbaden: Verlag für Sozialwissenschaften.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouw (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390–419). New York:

Macmillan.
Kieran, C. (2004a). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator*, *8*(1), 139–151.
Kieran, C. (2004b). The core of algebra. Reflections on its main activities. In K. Stacey, H. Chick, & M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra.* (The 12th ICME Studies., pp. 21–34). Boston: Kluwer Academic Publishers.
Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. In F. K. Lester Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707–762). Greenwich: Information Age Publishing.
Kieran, C. (2013). The false dichotomy in mathematics education between conceptual understanding and procedural skills: An example from algebra. In K. R. Leatham (Ed.), *Vital Directions for Mathematics Education Research* (pp. 153–171). New York: Springer Verlag.
Kieran, C., & Yerushalmy, M. (2004). Research on the role of technological environments in algebra learning and teaching. In K. Stacey, H. Chick, & M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra.* (The 12th I., pp. 97–152). Boston: Kluwer Academic Publishers.
Kirshner, D. (2001). The structural algebra option revisited. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, & R. C. Lins (Eds.), *Perspectives on School Algebra* (pp. 83–99). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
Klein, F. (1968). *Elementarmathemtik vom höheren Standpunkte aus*. Berlin: Springer.
Klieme, E., et al. (2003). *Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards. Eine Expertise.* Berlin.
Kowal, S., & O'Connell, D. C. (2013). Zur Transkription von Gesprächen. In U. Flick, E. Von Kardorff, & I. Steinke (Eds.), *Qualitative Forschung* (10. ed., pp. 437–447). Reinbek bei Hamburg: Rowohlts Enzyklopädie.
Kultusministerkonferenz. (2003). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den mittleren Schulabschluss. Beschluss vom 4.12.2013*. München: Luchterhand.
Kultusministerkonferenz. (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den mittleren Schulabschluss. Beschluss vom 4.12.2013* (Sekretaria.). Berlin, Bonn: Luchterhand.
Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Klusmann, U., Krauss, S., & Neubrand, M. (Eds.). (2011). *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV*. Münster: Waxmann.
Leder, G. C., & Forgasz, H. J. (2002). Measuring mathematical beliefs and their impact on the learning of mathematics: a new approach. In G. C. Leder, E. Pehkonen, & G. Törner (Eds.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (pp. 95–114). Dordrecht: Springer Science + Business Media, B. V.
Lee, L. (1996). An initiation into algebraic culture through generalization activities. In N. Bernarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra. Perspectives for research and teaching.* (pp. 87–106). Dordrecht: Springer Netherlands. doi:10.1007/978-94-009-1732-3
Leech, B. L. (2002). Asking questions: Techniques for semistructured interviews. *PS: Political Science and Politics*, *35*(4), 665–668.
Leiß, D., & Blum, W. (2011). Beschreibung zentraler mathematischer Kompetenzen. In W. Blum, C. Drüke-Noe, R. Hartung, & O. Köller (Eds.), *Bildungsstandards Mathematik: Konkret.* (5th ed., pp. 33–50). Berlin: Cornelsen Scriptor.
Lergenmüller, A., & Schmidt, G. (Eds.). (2006). *Neue Wege 7, Niedersachsen*. Braunschweig: Schroedel Verlag.
Macgregor, M., & Stacey, K. (1997). Students' understanding of Algebraic notation: 11-15. *Educational Studies in Mathematics.*, *33*(1), 1–19.

Malle, G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra: mit vielen Beispielaufgaben. Unter Mitarbeit von Heinrich Bürger*. (E. C. Wittmann, Ed.). Braunschweig: Vieweg.

Mayring, P. (2002). *Qualitative Sozialforschung*. Weinheim und Basel: Beltz Studium.

Mayring, P. (2013). Qualitative Inhaltsanalyse. In U. Flick, E. Von Kardorff, & I. Steinke (Eds.), *Qualitative Forschung* (10. ed., pp. 468–474). Reinbek bei Hamburg: Rowohlts Enzyklopädie.

Mayring, P. (2015). *Qualitative Inhaltsanalyse* (12th ed.). Weinheim und Basel: Beltz.

Merkens, H. (2013). Auswahlverfahren, Sampling, Fallkonstruktion. In U. Flick, E. von Kardoff, & I. Steinke (Eds.), *Qualitative Forschung* (pp. 286–298). Reinbek bei Hamburg: Rowohlts Enzyklopädie.

Morse, J. (1994). Designing Funded Qualitative Research. In N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of Qualitative Research* (pp. 220–235). Thousands Oaks: SAGE Publications.

Moyer, P. S. (2001). Are we having fun yet? How teachers use manipulatives to tach mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, (47), 175–197.

Mummendey, H. D. (1981). Methoden und Probleme der Kontrolle sozialer Erwünschtheit. *Zeitschrift Für Differentielle Und Diagnostische Psychologie.*, *2*(3), 199–218.

Nathan, M. J., & Koedinger, K. R. (2000a). An investigation of teachers' beliefs of students' algebra development. *Cognition and Instuction*, *18*(2), 209–237.

Nathan, M. J., & Koedinger, K. R. (2000b). Teachers' and researchers' beliefs about the development of algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*(2), 168–190.

Niedersachsen, Kultusministerium (2006). Kerncurriculum für das Gymnasium Schuljahrgänge 5-10. Retrieved September 10, 2015, from http://db2.nibis.de/1db/cuvo/datei/kc_gym_mathe_nib.pdf.

Olafson, L., Salinas-Grandy, C., & Owens, M. C. (2015). Qualitative approaches to studying teachers' beliefs. In H. Fives & M. G. Gill (Eds.), *International Handbook of Research on Teachers' Beliefs* (pp. 128–149). New York: Routledge.

Pajares, M. F. (1992). Teachers' Beliefs and Educational Research: Cleaning Up a Messy Construct. *Review of Educational Research*, *62*(3), 307–332. doi:10.3102/00346543062003307

Pehkonen, E. K. (1994). On teachers' beliefs and changing mathematics teaching. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *15*(3/4), 177–209.

Radford, L. (1996). Reflections on teaching algebra through generalization. In N. Bernarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra. Perspectives for research and teaching.* (pp. 107–111). Dordrecht: Springer Netherlands. doi:10.1007/978-94-009-1732-3

Radford, L. (2010). Signs, gestures, meanings: algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. In V. Durand-Guerrier, S. Soury Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. Januaryy 28th-Feburary 1st 2009*. Lyon.

Ribeiro, M., Aslan-Tutak, F., Charalambous, C., & Meinke, J. (2016). Introduction to the papers of TWG20: Mathematics teacher knowledge, beliefs, and identity: Some reflections on the current state of the art. In K. Krainer & N. Vondrova (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Sociey for Research in Mathmatics Education* (pp. 3177–3183). Prag.

Rittle-Johnson, B., & Siegler, R. S. (1998). The relation between conceptual and procedural knowledge in learning mathematics: A review. In C. Donlan (Ed.), *The development of mathematical skills. Studies in developmental psychology* (pp. 75–110). Hove: Psychological Press/Taylor&Francis.

Rojano, T. (1996). The role of problems and problem solving in the development of algebra.

In N. Bernarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra. Perspectives for research and teaching.* (pp. 55–62). Dordrecht: Springer Netherlands. doi:10.1007/978-94-009-1732-3

Rokeach, M. (1968). *Beliefs, attitudes, and values: A theory of organization and change.* (Joeey-Bay, Ed.). San Francisco.

Rolka, K., & Roesken-Winter, B. (2015). Networking theories to understand beliefs and their crucial role in mathematics education. In B. Pepin & B. Roesken-Winter (Eds.), *From beliefs to dynamic affect systems in mathematics education* (pp. 73–93). Cham [u. a.]: Springer Fachmedien.

Scheele, B., & Groeben, N. (1988). *Dialog-Konsens-Methoden zur Rekonstruktion Subjektiver Theorien*. Tübingen: Francke Verlag.

Scheele, B., & Stössel, A. (1992). Interindividuelle Integration subjektiver Theorien zu Modalstrukturen. In B. Scheele (Ed.), *Struktur-Lege-Verfahren als Dialog-Konsens-Methodik. Ein Zwischenfazit zur Forschungsentwicklung bei der Erhebung subjektiver Theorien.* (pp. 333–385). Münster: Aschendorff.

Schlee, J. (1988a). Forschungsstruktur: Dialog-Konsens und Falsifikation. In N. Groeben, D. Wahl, J. Schlee, & B. Scheele (Eds.), *Das Forschungsprogramm Subjektive Theorien.* (pp. 24–30). Tübingen: Francke Verlag.

Schlee, J. (1988b). Menschenbildannahmen: Vom Verhalten zum Handeln. In N. Groeben, D. Wahl, J. Schlee, & B. Scheele (Eds.), *Das Forschungsprogramm Subjektive Theorien.* (pp. 11–17). Tübingen: Francke Verlag.

Schoenfeld, A. H. (1998). Toward a theory of teaching-in-context. *Issues in Education.*, *4*(1), 1–94.

Schraw, G., & Olafson, L. (2015). Assessing teachers' beliefs. In H. Fives & M. G. Gill (Eds.), *International Handbook of Research on Teachers' Beliefs* (pp. 87–105). New York: Routledge.

Sfard, A., & Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification - the case of algebra. *Educational Studies in Mathematics.*, *26*, 191–228.

Skott, J. (2015a). The promises, problems, and prospects of research on teachers' beliefs. In H. Fives & M. G. Gill (Eds.), *International Handbook of Research on Teachers' Beliefs* (pp. 13–30). New York: Routledge.

Skott, J. (2015b). Towards a Participatory Approach to "Beliefs" in Mathematics Education. In B. Pepin & B. Roesken-Winter (Eds.), *From beliefs to dynamic affect systems in mathematics education* (pp. 3–23). Cham [u. a.]: Springer International Publishing. doi:10.1007/978-3-319-06808-4_1

Specht, B. J. (2009). *Variablenverständnis und Variablen verstehen*. Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Staab, F. (2007). *Logik und Algebra. Eine praxisbezogene Einführung für Informatiker und Wirtschaftsinformatiker*. München: Oldenbourg Verlag.

Stacey, K., & Macgregor, M. (2001). Curriculum reform and approaches to algebra. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, & R. Lins (Eds.), *Perspectives on School Algebra* (Vol. 22, pp. 141–153). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. doi:10.1007/0-306-47223-6

Stein, M. K., Remillard, J., & Smith, M. S. (2007). How curriculum influences student learning. In *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 319–370).

Steinweg, A. S. (2013). *Algebra in der Grundschule: Muster und Strukturen - Gleichungen - funktionale Beziehungen*. Heidelberg: Springer Verlag.

Sutherland, R., Rojano, T., Bell, A., & Lins, R. C. (Eds.). (2001). *Perspectives on School Algebra*. Dodrecht: Kluwer Academic Publishers.

Thomas, M. O. J., Monaghan, J., & Pierce, R. (2004). Computer Algebra Systems and Algebra: Curriculum, Assesment, Teaching and Learning. In K. Stacey, H. Chick, & M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra.* (The 12th ICME

Study, pp. 153–186). Boston: Kluwer Academic Publishers.
Thompson, A. (1992). Teachers' beliefs and conceptions a synthesis of the research. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 127–146). New York: Macmillan Publishing Co.
Thorpe, J. A. (1989). Algebra: What should we teach and how should we teach it? In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra, Vol. 4.* (Vol. 36, pp. 11–24). Virginia: Routledge. doi:10.1037/029795
Tietze, U. P. (1990). Der Mathematiklehrer an der gymnasialen Oberstufe. Zur Erfassung berufsbezogener Kognitionen. *Journal Für Mathematik-Didaktik*, *11*(3), 177–243.
Tietze, U.-P. (1988). Schülerfehler und Lernschwierigkeiten in Algebra und Arithmetik - Theoriebildung und empirische Ergebnisse aus einer Untersuchung. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *9*(1), 163–204.
Tietze, U.-P., Förster, F., & Klika, M. (2000). *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II*. (U.-P. Tietze, M. Klika, & H. Wolpers, Eds.). Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg.
Tietze, U.-P., Klika, M., & Wolpers, H. (1997). *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II*. (Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgeselschaft mbH, Ed.). Braunschweig/Wiesbaden.
Törner, G. (2002). Mathematical beliefs - a search for a common ground: Some theoretical considerations on structuring beliefs, some research questions, and some phenomenological observations. In G. C. Leder, E. Pehkonen, & G. Törner (Eds.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (pp. 73–94). Dordrecht: Springer Science + Business Media, B. V.
Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. *The Ideas of Algebra, K-12*, *8*, 7–13.
Usiskin, Z. (1995). Why is Algebra Important to learn? *American Educator*, *19*(1), 30–37.
Vernes, J. (1969). *Reise um den Mond*. Frankfurt am Main: Ullstein.
Vollrath, H.-J., & Roth, J. (2012). *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe* (2nd ed.). Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.
Vollrath, H.-J., & Weigand, H.-G. (2007). *Algebra in der Sekundarstufe* (3rd ed.). Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.
Vollstädt, W., Tillmann, K.-J., Rauin, U., Höhmann, K., & Tebrügge, A. (1999). *Lehrpläne im Schulalltag*. (F. Hamburger, M. Horstkemper, W. Melzer, & K.-J. Tillmann, Eds.) (Schule und.). Opladen: Leske + Budrich.
Vom Hofe, R. (2003). Grundbildung durch Grundvorstellungen. *Mathematik Lehren.*, (118), 4–8.
Voss, T., Kleickmann, T., Kunter, M., & Hachfeld, A. (2011). Überzeugungen von Mathematiklehrkräften. In M. Kunter, J. Baumert, W. Blum, U. Klusmann, T. Krauss, & M. Neubrand (Eds.), *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. Ergebnisse des Forschungsprogramm COACTIV.* (pp. 235–258). Münster: Waxmann Verlag GmbH.
Wheeler, D. (1996a). Backwards and forwards: Reflections on different approaches to algebra. In N. Bernarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra. Perspectives for research and teaching.* (pp. 317–325). Dordrecht: Springer Netherlands. doi:10.1007/978-94-009-1732-3
Wheeler, D. (1996b). Rough or smooth? The transition from arithmetc to algebra in problem solving. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra. Perspectives for research and teaching.* (pp. 147–149). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
Wilson, M. (Skip), & Cooney, T. J. (2002). Mathematics teacher change and development. The role of beliefs. In G. C. Leder, E. Pehkonen, & G. Törner (Eds.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (pp. 149–160). Dordrecht: Springer Science + Business Media, B. V.

11. Anhang

Der gesamte Anhang ist digitalisiert auf der beigefügten CD-ROM zu finden. Inhaltlich ist dieser wie folgt gegliedert:

Anhang 1	Hier finden Sie den Interviewleitfaden, der in der Hauptuntersuchung verwendet worden ist.
Anhang 2	Die transkribierten Interviews der Hauptuntersuchung liegen hier vor.
Anhang 3	Die theoretischen Überlegungen zu den Codes sowie das finale Codeschema für die Hauptuntersuchung sind hier hinterlegt.
Anhang 4	Hier finden Sie die final codierten Interviewtranskripte der Hauptstudie.
Anhang 5	Die Inhaltsanalysen zu den einzelnen Fällen der Hauptuntersuchung sind hier hinterlegt.
Anhang 6	Die codierten Textstellen der Interviewtranskripte aus der Hauptuntersuchung sind hier nach den verschiedenen Codes geordnet.
Anhang 7	In diesem Ordner finden Sie die Codierungen aus der Hauptstudie das mathematische Weltbild betreffend, die von den Probandinnen und Probanden ausgefüllten Fragebögen und die vergleichende Auswertung beider Skalen, die in Excel gebildet worden ist.
Anhang 8	Die Beobachtungsprotokolle, die Zusammenfassung der Beobachtungen und die Klausuren aus dem Themenbereich Algebra sind hier zu finden.
Anhang 9	Dieser Ordner enthält den Leitfaden, die transkribierten Interviews aus der Vorstudie, das sich aus der Auswertung ergebende Code-Schema und die codierten Interviews.

<u>Bemerkung</u>

Die Tondateien zum Validierungsinterview wurden aus datenschutzrechtlichen Gründen aus der veröffentlichten Version entfernt, liegen aber vor und können bei Bedarf unter der Emailadresse der Autorin angefragt werden: juliameinke@gmx.de.

Danke

Ende. Was für ein Gefühl nach etwas mehr als drei Jahren diese Arbeit tatsächlich abzuschließen. Doch ich beende an dieser Stelle nicht nur meine Dissertationsschrift, vielmehr geht ein Lebensabschnitt vorüber, der geprägt war durch intensive Arbeitsphasen, interessante, aber auch kontroverse Diskussionen, neue Freundschaften, fordernde und spannende Aufgaben und durch sehr viel Freude.

Dafür möchte ich mich bei einigen für mich sehr wichtigen Menschen bedanken.
An erster Stelle gilt mein ausdrücklicher Dank meinem Doktorvater Professor Stefan Halverscheid. Ich möchte Dir vor allem für die Unterstützung danken, die Du mir sowohl auf beruflicher als auch auf privater Ebene stets zuteilwerden lassen hast, und für das von Dir entgegengebrachte Vertrauen sowie für viele nicht immer einfache, aber dafür sehr produktive Diskussionen. Trotz Deiner immensen Arbeitsbelastung war es stets möglich, kleinere und größere Probleme mit Dir zu besprechen und Lösungen für diese zu finden. Ich habe die vertrauensvolle Arbeitsatmosphäre, die stets zwischen uns geherrscht hat, immer sehr geschätzt. Ohne Deine persönliche Unterstützung, Deine Anregungen und Korrekturen, aber natürlich auch ohne die finanzielle Unterstützung während der Interviewphase hätte ich diese Arbeit nicht fertigstellen können.
Des Weiteren danke ich Professor Andreas Eichler sehr für die inhaltliche Kritik und Orientierung, die er mir in Phasen der Desorientierung gegeben hat.
Ich möchte auch Frau Professor Ina Kersten für die Betreuung und ihre Zeit in den letzten Jahren danken.
Ein ganz besonderer Dank geht an dieser Stelle an Kolja Pustelnik. Ich danke Dir sehr für deine fachliche Unterstützung, vor allem im letzten Jahr, für die Korrekturen, die Ratschläge und für Deine Geduld während der zahllosen Diskussionen rund um diese Arbeit. Aber vor allem danke ich Dir für Deine Freundschaft, die dazu beigetragen hat, diese Zeit für mich besonders zu machen.

Darüber hinaus möchte ich mich bei den an dieser Untersuchung teilnehmenden Lehrkräften bedanken, für ihre Zeit und Bereitschaft mich in dieser Untersuchung zu unterstützen. Ohne Sie hätte diese Arbeit nicht geschrieben werden können.

Für zahllose schöne Augenblicke, die mir besonders die Zeit neben der wissenschaftlichen Arbeit versüßt haben, möchte ich ganz besonders meinen Freundinnen Josephine, Laila, Simona, Ursi und Vicky danken. Ihr seid einfach toll! Mehr gibt es dazu nicht zu sagen.

Schließlich gilt mein Dank meiner Familie, speziell meinen Großeltern, aber vor allem meinen Eltern Kerstin und Veit. Ihr seid immer und in jeder Situation für mich da. Für diese Liebe und Stabilität, die für mich stets die größte Stütze darstellen, bin ich Euch für immer dankbar.

Curriculum Vitae

Julia Meinke

04.04.1989 in Ludwigslust, Mecklenburg-Vorpommern

Seit Februar 2015	Vorstandsmitglied des Mathematischen Instituts der Georg-August-Universität Göttingen
Seit April 2013	Promotionsstudium im Promotionsstudiengang Mathematical Sciences
April 2013	Master of Education
Masterarbeit	Fallstudie zum Einfluss von CAS-Rechnern auf Algebra-Kenntnisse
September 2011 - April 2013	Studium im Master of Education mit den Fächern Mathematik und Politikwissenschaft
August 2011	Bachelor of Arts
Bachelorarbeit	Die Hauptkonfliktlinien der Kultusministerkonferenz in der Entscheidung zur Schulzeitdauer
Oktober 2008 - August 2011	Studium im 2-Fächer Bachelor mit den Fächern Mathematik und Politikwissenschaft im Profil Lehramt
Juli 2008	Allgemeine Hochschulreife, Goethe-Gymnasium Ludwigslust