Georg-August-Universität Göttingen

Mathematisches Institut

Bachelorarbeit

Exakte Moduln über dem von Manuel Köhler beschriebenen Ring

Eingereicht von: Vincent Grande

Eingereicht am: 12. September 2018

Erstgutachter: Prof. Dr. Ralf Meyer

Zweitgutachter: Prof. Dr. Preda Mihăilescu

Matrikelnummer: 21565716

Fach: B. Sc. Mathematik

E-Mail: vincent.grande@stud.uni-goettingen.de

Exakte Moduln über dem von Manuel Köhler beschriebenen Ring

Vincent Grande

12. September 2018

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

In seiner Dissertation beweist Manuel Köhler einen äquivarianten universellen Koeffizientensatz für C^*-Algebren mit einer Gruppenwirkung einer zyklischen Gruppe G mit Primzahlordnung p. Dabei spielt das Objekt $B := \mathbb{C} \oplus \mathcal{C}(G) \oplus D$ eine große Rolle, wobei D der Abbildungskegel der G-äquivarianten Einbettungen von $\mathbb{C}$ in $\mathcal{C}(G)$ ist. $\mathcal{R} := \mathrm{KK}_*^G(B, B)$ ist dann der Endomorphismenring von B in der Kategorie KK^G. Ist A ein weiteres Objekt von KK^G, hat $F(A) := \mathrm{KK}_*^G(B, A)$ auf natürliche Weise die Struktur eines $\mathcal{R}$-Moduls. [3] zeigt, dass sich jedes exakte abzählbare $\mathcal{R}$-Modul als $F(A)$ für ein Objekt A von KK^G darstellen lässt. Das Ziel dieser Arbeit ist die Klassifikation einer Art von einfachen $\mathcal{R}$-Moduln, die zur Konstruktion von Elementen von KK^G dienen können. Die Ergebnisse lassen sich auch zur Widerlegung der Existenz anderer Elemente in KK^G nutzen.

Jeder $\mathcal{R}$-Modul $\mathcal{M}$ lässt sich als $\mathcal{M} := {}_0M \oplus {}_1M \oplus {}_2M$ darstellen. In Abschnitt 2.1 wird gezeigt, dass für ${}_1M = 0$ die Untermoduln ${}_0M$ und ${}_2M$ isomorphe $\mathbb{Z}[\zeta_p, p^{-1}]$-Moduln mit ${}_0t_0, {}_2t_2 \cong \zeta_p$ sind. Da die Einschränkung, ein $\mathbb{Z}[\zeta_p, p^{-1}]$-Modul zu sein, immer noch sehr viele Möglichkeiten für ${}_0M$ und ${}_2M$ offen lässt, werden wir dann kurz stärkere Aussagen über irreduzible $\mathbb{Z}[\zeta_p, p^{-1}]$-Moduln treffen.

In Abschnitt 2.4 wird der Fall ${}_1M \cong \mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$ für zu p teilerfremde natürliche Zahlen a untersucht. Die Hauptaussage dieses Abschnittes wird es sein, dass sich $\mathcal{M}$ in diesem Fall als direkte Summe aus einem bereits beschriebenen $\mathcal{R}$-Modul mit ${}_1M = 0$ und einem Modul der Form $A \oplus \mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \oplus B$ darstellt, wobei $A \oplus B \cong \mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$ gilt und A bzw. B der Anteil von $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$ mit trivialer bzw. treuer $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-Wirkung ist. Diese Aussage lässt sich sogar in einer Allgemeinheit beweisen, die auf beliebigen $\mathcal{R}$-Moduln gilt, bei denen die Multiplikation mit p ein Automorphismus von ${}_1M$ ist. (Satz 2.41)

Im Abschnitt 2.2 wird der Fall ${}_1M \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ untersucht. Leider ist es nicht möglich, starke Aussagen über die Struktur von ${}_0M$ und ${}_2M$ nur durch die Voraussetzung ${}_1M \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ zu treffen. Jedoch lässt sich zeigen, dass ${}_0M$ und ${}_2M$ bis auf den „Fehler“ $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ isomorph sind. Neben einem Anteil, der dem Fall ${}_1M = 0$ genügt, besitzen sie einen Teil, der zu

$$X_\infty = \bigoplus_{j=1}^{2} \left(\mathbb{Z}\left[\zeta_p, 1/p\right]\right) / \, \mathbb{Z}[\zeta_p]$$

(vgl. Satz 2.21) oder zu einem $\mathbb{Z}[\zeta_p]$-Untermodul von $\mathbb{Z}_p[\zeta_p] \oplus \mathbb{Z}_p[\zeta_p]$ mit $\mathbb{Z}_p[\zeta_p]$ als der p-ten zyklotomischen Erweiterung der p-adischen Zahlen isomorph ist, der ein zu $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ isomorpher Kokern unter Multiplikation mit $(1-\zeta_p)$ hat (vgl. Satz 2.14), oder eine Mischung von beidem. Auch möglich ist die endliche Struktur $\mathbb{Z}[\zeta_p]/\left(1-\zeta_p\right)^i \oplus \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}[\zeta_p]/\left(1-\zeta_p\right)^{i+1}$ (Satz 2.27 und 2.31).

Im Abschnitt 2.3 wird der Fall ${}_1M \cong \mathbb{Z}$ für $p > 2$ untersucht. Da $\mathbb{Z}$ nur Automorphismen mit Ordnung 2 oder 1 besitzt, ist die $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-Wirkung auf $\mathbb{Z}$ trivial. Weiterhin lässt sich in dem exakten Diagramm von $\mathcal{M}$ die Multiplikation von ${}_1M \cong \mathbb{Z}$ mit p konstruieren. Der Kokern dieser Abbildung $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ wird für die Untersuchung wichtiger als $\mathbb{Z}$ selbst, weshalb die Ergebnisse dieses Falls an den Fall mit ${}_1M \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ erinnern.

1 Der Endomorphismenring $\mathcal{R}$

Das Ziel dieses Abschnittes soll es sein, den Ring $\mathcal{R}$, über dem wir in dieser Arbeit exakte Moduln klassifizieren wollen, besser zu verstehen. Dazu werden wir zunächst die für diesen Ring konstitutiven Relationen, wie sie in [3] beschrieben werden, wiedergeben und einige für die weiteren Untersuchungen nützliche Eigenschaften herleiten. Schließlich geben wir in 1.2 eine Basis von $\mathcal{R}$ als freiem Ring an.

1.1 Relationen in $\mathcal{R}$

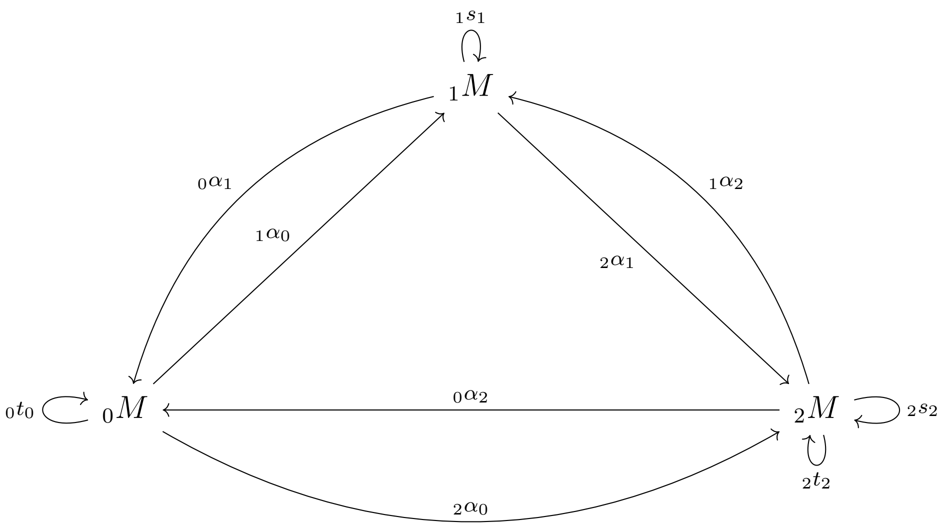

Abbildung 1: $\mathcal{M}$ zerfällt über $\mathcal{R}$ in direkte Summanden.

Für eine genaue Definition von $\mathcal{R}$ siehe [3, Abschnitt 11]. Sei p eine Primzahl. $\mathcal{R}$ ist der Kategorienring der vollen Unterkategorie von $\mathfrak{kk}^C_*(p)$ mit den Objekten $\{\mathbb{C}, \mathcal{C}(C(p)), C_u\}$, wobei C_u der Abbildungskegel der unitären Einbettung von $\mathbb{C}$ in $\mathcal{C}(C(p))$ ist.[3, S. 25] Die Elemente von $\mathcal{R}$ stellen sich dabei als die Morphismen des Objekts $A := \{\mathbb{C}, \mathcal{C}C(p), C_u\}$ dar. Die Morphismen zwischen A und einem weiteren Objekt B tragen dann auf natürliche Weise die Struktur eines $\mathcal{R}$-Moduls.

Durch die Idempotenten ${}_01_0, {}_11_1, {}_21_2 \in \mathcal{R}$ mit ${}_01_0 + {}_11_1 + {}_21_2 = 1$ zerfällt $\mathcal{M}$ in die direkte Summe der drei Untermoduln ${}_0M := {}_01_0\mathcal{M}$, ${}_1M := {}_11_1\mathcal{M}$ und ${}_2M := {}_21_2\mathcal{M}$. $\mathcal{R}$ wird dann erzeugt von ${}_i1_i$, ${}_i\alpha_j$, ${}_0t_0$, ${}_2t_2$, ${}_1s_1$ und ${}_2s_2$ für $i \neq j \in \{0, 1, 2\}$, die auf den einzelnen Teilmoduln wie in Abbildung 1 wirken. Dabei gilt ${}_hx_i \cdot {}_jy_k = 0$ für $i \neq j$. Die Baaj-Skandalis-Dualität liefert einen Automorphismus $\sigma : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ mit $\sigma^2 = \mathrm{id}$, $\sigma({}_21_2) = {}_21_2$, $\sigma({}_01_0) = {}_11_1$, $\sigma({}_1s_1) = {}_0t_0$ und $\sigma({}_2s_2) = {}_2t_2$. Aussagen über $\mathcal{R}$-Moduln mit Einschränkungen von ${}_0M$ sind demnach äquivalent zu Aussagen über $\mathcal{R}$-Moduln mit Einschränkungen in ${}_1M$. Sei $N({}_ix_i)$ die Norm von ${}_ix_i$ im Folgenden definiert durch $N({}_ix_i) = \sum_{j=0}^{p-1}({}_ix_i)^j$. Weiterhin gelten folgende Relationen[3, S. 37], von denen die Relationen 8 bis 16 aus den vorherigen Relationen folgen:

1. $1 = {}_0 1_0 + {}_1 1_1 + {}_2 1_2$
2. ${}_i\alpha_j \cdot {}_j\alpha_k = 0 \Leftarrow i \neq k$
3. ${}_0\alpha_1 \cdot {}_1\alpha_0 = N({}_0t_0)$, ${}_1\alpha_0 \cdot {}_0\alpha_1 = N({}_1s_1)$
4. ${}_0\alpha_2 \cdot {}_2\alpha_0 = {}_0 1_0 - {}_0t_0$, ${}_1\alpha_2 \cdot {}_2\alpha_1 = {}_1 1_1 - {}_1s_1$
5. ${}_2\alpha_0 \cdot {}_0\alpha_2 = {}_2 1_2 - {}_2t_2$, ${}_2\alpha_1 \cdot {}_1\alpha_2 = {}_2 1_2 - {}_2s_2$
6. $N({}_2t_2) + N({}_2s_2) = p \cdot {}_2 1_2$
7. $({}_it_i)^p = {}_i 1_i$, $({}_js_j)^p = {}_j 1_j$ für $i = 0, 2$ und $j = 1, 2$
8. ${}_0t_0 \cdot {}_0\alpha_1 = {}_0\alpha_1 \cdot {}_1s_1 = {}_0\alpha_1$
9. ${}_1s_1 \cdot {}_1\alpha_0 = {}_1\alpha_0 \cdot {}_0t_0 = {}_1\alpha_0$
10. ${}_0\alpha_2 \cdot {}_2s_2 = {}_0\alpha_2$, ${}_2s_2 \cdot {}_2\alpha_0 = {}_2\alpha_0$
11. ${}_1\alpha_2 \cdot {}_2s_2 = {}_1s_1 \cdot {}_1\alpha_2$, ${}_2s_2 \cdot {}_2\alpha_1 = {}_2\alpha_1 \cdot {}_1s_1$
12. ${}_1\alpha_2 \cdot {}_2t_2 = {}_1\alpha_2$, ${}_2t_2 \cdot {}_2\alpha_1 = {}_2\alpha_1$
13. ${}_0\alpha_2 \cdot {}_2t_2 = {}_0t_0 \cdot {}_0\alpha_2$, ${}_2t_2 \cdot {}_2\alpha_0 = {}_2\alpha_0 \cdot {}_0t_0$
14. $({}_2 1_2 - {}_2t_2) \cdot ({}_2 1_2 - {}_2s_2) = 0$, $({}_2 1_2 - {}_2s_2) \cdot ({}_2 1_2 - {}_2t_2) = 0$
15. ${}_ix_j \cdot {}_hy_k = 0$ für $j \neq h$ wobei x und y für s, t oder α stehen.
16. ${}_i 1_i \cdot {}_ix_j = {}_ix_j$
17. $N({}_2t_2) \cdot {}_2\alpha_0 = {}_2\alpha_0 \cdot N({}_0t_0) = 0$ und ${}_0\alpha_2 \cdot N({}_2t_2) = N({}_0t_0) \cdot {}_0\alpha_2 = 0$
18. $N({}_2s_2) \cdot {}_2\alpha_1 = {}_2\alpha_1 \cdot N({}_1s_1)$ und ${}_1\alpha_2 \cdot N({}_2s_2) = N({}_1s_1) \cdot {}_1\alpha_2 = 0$

Beweis. Wir zeigen kurz, wie 8. bis 16. aus den vorherigen Relationen folgen:
Relation 8: Aus Relation 4 und Relation 2 folgt

$$0 = {}_0\alpha_2 \cdot ({}_2\alpha_0 \cdot {}_0\alpha_1) = ({}_0\alpha_2 \cdot {}_2\alpha_0) \cdot {}_0\alpha_1 = ({}_0 1_0 - {}_0t_0) \cdot {}_0\alpha_1,$$

also ${}_0t_0 \cdot {}_0\alpha_1 = {}_0\alpha_1$. Der Beweis ${}_0\alpha_1 \cdot {}_1s_1 = {}_0\alpha_1$ folgt analog. Der Beweis von Relation 9, 10 sowie 12 erfolgt auf die gleiche Art.
Relation 11: Betrachte

$${}_1\alpha_2 \cdot {}_2\alpha_1 \cdot {}_1\alpha_2 = ({}_1\alpha_2 \cdot {}_2\alpha_1) \cdot {}_1\alpha_2 = ({}_1 1_1 - {}_1s_1) \cdot {}_1\alpha_2 = {}_1\alpha_2 - {}_1s_1 \cdot {}_1\alpha_2$$

nach Relation 4 und

$${}_1\alpha_2 \cdot {}_2\alpha_1 \cdot {}_1\alpha_2 = {}_1\alpha_2 \cdot ({}_2\alpha_1 \cdot {}_1\alpha_2) = {}_1\alpha_2 \cdot ({}_2 1_2 - {}_2s_2) = {}_1\alpha_2 - {}_1\alpha_2 \cdot {}_2s_2$$

nach Relation 5, also ${}_1\alpha_2 \cdot {}_2s_2 = {}_1s_1 \cdot {}_1\alpha_2$. Analog folgt ${}_2s_2 \cdot {}_2\alpha_1 = {}_2\alpha_1 \cdot {}_1s_1$. Relation 13 folgt analog.
Relation 14: Aus 5. und 10. folgt

$$({}_21_2 - {}_2t_2) \cdot {}_2s_2 = {}_2\alpha_0 \cdot {}_0\alpha_2 \cdot {}_2s_2 = {}_2\alpha_0 \cdot {}_0\alpha_2 = {}_21_2 - {}_2t_2.$$

Analog folgt der zweite Teil.
Relation 16: Es gilt

$${}_ix_j = 1 \cdot {}_ix_j = ({}_01_0 + {}_11_1 + {}_21_2) \cdot {}_ix_j = {}_01_0 \cdot {}_ix_j + {}_11_1 \cdot {}_ix_j + {}_21_2 \cdot {}_ix_j = {}_i1_i \cdot {}_ix_j. \qquad \square$$

Relation 17: Es gilt $N({}_2t_2) \cdot {}_2\alpha_0 = {}_2\alpha_0 \cdot N({}_0t_0)$ nach Relation 13 und ${}_2\alpha_0 \cdot N({}_0t_0) = {}_2\alpha_0 \cdot {}_0\alpha_1 \cdot {}_1\alpha_0 = 0$ nach Relation 3 und Relation 2. Die zweite Aussage und Relation 18 folgen analog.

Dies liefert uns ausreichende Aussagen über die Struktur von $\mathcal{R}$, um die Untersuchung fortzusetzen.

1.2 Eine Basis von $\mathcal{R}$

Das Ziel dieses Abschnitts soll es sein, eine Basis von $\mathcal{R}$ als freie abelsche Gruppe zu bestimmen. Die ${}_i1_i$ sind für $i \in \{0,1,2\}$ linear unabhängig voneinander, kommen also für eine Basis in Frage. Betrachte weiterhin ${}_0t_0$ bzw. ${}_1s_1$. Hierfür gilt nur die Relation 7, somit sind ${}_0t_0^i$ bzw. ${}_1s_1^i$ für $i \in \{1,\ldots,p-1\}$ linear unabhängig; für $i \geq p$ lässt sich ${}_0t_0^i$ bzw. ${}_1s_1^i$ als Monom mit Exponent zwischen 0 und $p-1$ darstellen. Offensichtlich sind alle der ${}_i\alpha_j$ linear unabhängig. Die Produkte aus je zwei ${}_i\alpha_j$ lassen sich entweder mit Relation 2 bzw. 15 als 0 schreiben oder mit Relation 3, 4 bzw. 5 in Abhängigkeit der bisherigen Basiselemente schreiben. Wir beginnen also zunächst ohne die Relationen innerhalb von ${}_21_2\mathcal{R}{}_21_2$ mit dem System $\left\{({}_0t_0)^i, ({}_1s_1)^i, {}_h\alpha_k \middle| i \in \{0,\ldots,p-1\}, h,k \in \{0,1,2\}, h \neq k\right\}$. Die Abhängigkeiten der Monome in ${}_2t_2$ und ${}_2s_2$ werden nur von Relation 6, 7 und 14 bestimmt. Aufgrund von Relation 14 lässt sich das Produkt der beiden Erzeuger schreiben als ${}_2t_2 \cdot {}_2s_2 = {}_2s_2 \cdot {}_2t_2 = {}_2s_2 + {}_2t_2 - {}_21_2$. Somit sind wir nur noch an den Potenzen von ${}_2s_2$ bzw. ${}_2t_2$ interessiert, deren Exponenten durch Relation 7 nach oben beschränkt sind. Eine weitere Abhängigkeit ergibt sich durch Relation 6, sodass ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von ${}_2\mathcal{R}_2$ aus $\left\{{}_21_2, {}_2t_2^i, {}_2s_2^j \middle| i \in \{1\ldots p-1\},\ j \in \{1\ldots p-2\}\right\}$ besteht. Die Potenz $({}_2s_2)^{p-1}$ lässt sich darstellen als $({}_2s_2)^{p-1} = p \cdot {}_21_2 - N({}_2t_2) - \sum_{i=0}^{p-2} ({}_2s_2)^i$.

Schließen wir weitere Produkte mit Relation 15 aus, verbleiben einerseits die Produkte der Form $({}_1s_1)^i \cdot {}_1\alpha_0 = {}_1\alpha_0 \cdot ({}_0t_0)^i = {}_1\alpha_0$ und ${}_0\alpha_1 \cdot ({}_1s_1)^i = ({}_0t_0)^i \cdot {}_0\alpha_1 = {}_0\alpha_1$ für $i \in \mathbb{N}$ nach Relation 8 und 9, die bereits durch ${}_h\alpha_k$ dargestellt werden können. Die Produkte aus Relation 12 und Relation 13 lassen sich auch nur als α darstellen, die höheren Potenzen von s und t folgen analog.

Es verbleiben nun nur noch die Produkte $({}_0t_0)^i \cdot {}_0\alpha_2 = {}_0\alpha_2 \cdot ({}_2t_2)^i$, $({}_1s_1)^i \cdot {}_1\alpha_2 = {}_1\alpha_2 \cdot ({}_2s_2)^i$, $({}_2t_2)^i \cdot {}_2\alpha_0 = {}_2\alpha_0 \cdot ({}_0t_0)^i$ und $({}_2s_2)^i \cdot {}_2\alpha_1 = {}_2\alpha_1 \cdot ({}_1s_1)^i$. Wegen Relation 7 reicht es, Potenzen bis $p-1$ in den s und t zu betrachten. Aus Relation 11 und 13 ist ersichtlich, dass für eine Basis nur die Produkte mit ${}_2s_2$ bzw. ${}_2t_2$ benötigt werden; diese sind jedoch noch den Relationen der Form $N({}_0t_0){}_0\alpha_2 = {}_0\alpha_2 \cdot N({}_2t_2) = 0$ unterworfen. Somit können wir noch $\left\{{}_0\alpha_2 \cdot ({}_2t_2)^i,\ {}_1\alpha_2 \cdot ({}_2s_2)^i,\ ({}_2t_2)^i \cdot {}_2\alpha_0,\ ({}_2s_2)^i \cdot {}_2\alpha_1 \middle| i \in \{1 \ldots p-2\}\right\}$ zu unserer Basis hinzufügen. In [3] wird $\mathrm{KK}^G(\cdot,\cdot)$ berechnet und gezeigt, dass dies als Basis ausreicht. Die gesamte Basis ergibt sich zu

$$\Big\{({}_0t_0)^i,\ ({}_1s_1)^i,\ ({}_2t_2)^j,\ ({}_2s_2)^{j-1},\ {}_1\alpha_0,\ {}_0\alpha_1,\ {}_0\alpha_2 \cdot ({}_2t_2)^{j-1},\ {}_1\alpha_2 \cdot ({}_2s_2)^{j-1},\ ({}_2t_2)^{j-1} \cdot {}_2\alpha_0,$$
$$({}_2s_2)^{j-1} \cdot {}_2\alpha_1 \Big| i \in \{0, \ldots, p-1\}, j \in \{1, \ldots, p-1\}\Big\}.$$

2 Exakte $\mathcal{R}$-Moduln

Definition 2.1. *Ein $\mathcal{R}$-Modul ist exakt, wenn folgende Sequenzen exakt sind:*

$$\begin{tikzcd} & {}_1M \arrow[dl, "{}_0\alpha_1"'] & \\ {}_0M \arrow[rr, "{}_2\alpha_0"] & & {}_2M \arrow[ul, "{}_1\alpha_2"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & {}_1M \arrow[dr, "{}_2\alpha_1"] & \\ {}_0M \arrow[ur, "{}_1\alpha_0"] & & {}_2M \arrow[ll, "{}_0\alpha_2"] \end{tikzcd}$$

Wir wollen uns mit der Frage beschäftigen, wie exakte $\mathcal{R}$-Moduln aussehen können. Mit $\ker {}_i\alpha_j$ wollen wir den Kern der Multiplikation mit ${}_i\alpha_j$ als Abbildung von ${}_jM$ nach ${}_iM$ bezeichnen. Es gilt also insbesondere $\ker {}_i\alpha_j \subset {}_jM$.

2.1 Der Fall ${}_1M = 0$

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[dl, tail, "0"', "{}_0\alpha_1"] & \\ {}_0M \arrow[rr, "{}_2\alpha_0", "\cong"'] & & {}_2M \arrow[ul, two heads, "{}_1\alpha_2"', "0"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & 0 \arrow[dr, tail, "{}_2\alpha_1", "0"'] & \\ {}_0M \arrow[ur, two heads, "{}_1\alpha_0", "0"'] & & {}_2M \arrow[ll, "{}_0\alpha_2"', "\cong"] \end{tikzcd}$$

Abbildung 2: Die exakten Sequenzen im Fall ${}_1M = 0$.

Wir beschränken uns zunächst auf den Fall ${}_1M = 0$. Aufgrund der Baaj-Skandalis-Dualität ist dieser Fall analog zum Fall ${}_0M = 0$. Sei also $\mathcal{M}$ ein exakter $\mathcal{R}$-Modul mit ${}_1M = {}_11_1\mathcal{M} = 0$. Wir identifizieren die Elemente von $\mathcal{R}$ im folgenden Abschnitt mit ihren Wirkungen auf $\mathcal{M}$.

Lemma 2.2. *Ist $\mathcal{M} = {}_0M \oplus {}_1M \oplus {}_2M$ ein exakter $\mathcal{R}$-Modul mit ${}_1M = 0$, so gilt ${}_0M \cong {}_2M$ mit den Isomorphismen ${}_2\alpha_0$ und ${}_0\alpha_2$.*

Beweis. Aus der Exaktheit der Sequenz folgt, dass ${}_2M = \ker {}_1\alpha_2 = \mathrm{Im}\, {}_2\alpha_0$ ist und somit ${}_2\alpha_0$ als Homorphismus ${}_0M \to {}_2M$ surjektiv ist. Auch folgt aus $0 = \mathrm{Im}\, {}_0\alpha_1 = \ker {}_2\alpha_0$, dass ${}_2\alpha_0$ injektiv ist. Somit ist ${}_2\alpha_0$ ein Isomorphismus und es gilt ${}_0M \cong {}_2M$. Analog dazu folgt aus der zweiten exakten Sequenz, dass ${}_0\alpha_2$ ein Isomorphismus ist. □

Aus Relation 13 folgt, dass die Modulstruktur in ${}_0t_0$ bzw. ${}_2t_2$ erhalten bleibt. Wir sind jetzt in der Lage, die exakten $\mathcal{R}$-Moduln mit folgendem Satz im Fall ${}_1M = 0$ vollständig zu klassifizieren.

Satz 2.3. *Ist $\mathcal{M} = {}_0M \oplus {}_1M \oplus {}_2M$ ein exakter $\mathcal{R}$-Modul mit ${}_1M \cong 0$, so sind ${}_0M$ und ${}_2M$ isomorphe $\mathbb{Z}[\zeta_p, 1/p]$-Moduln. Die Wirkung von ${}_0t_0$ und ${}_2t_2$ entspricht der Wirkung von ζ_p. Sind umgekehrt ${}_0M$ und ${}_2M$ isomorphe $\mathbb{Z}[\zeta_p, 1/p]$-Moduln, so kann ${}_0M \oplus 0 \oplus {}_2M$ mit genau einem exakten $\mathcal{R}$-Modul identifiziert werden.*

Beweis. Zunächst zeigen wir, dass wir ${}_0M$ und ${}_2M$ als Moduln über $\mathbb{Z}[\zeta_p]$ betrachten können, indem wir ${}_it_i$ mit ζ_p identifizieren. Dies ist hilfreich, da $\mathbb{Z}[\zeta_p]$ der Ganzheitsring von $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ und somit ein Dedekindring ist. Dazu müssen wir uns einerseits vergewissern, dass ${}_2s_2$ trivial ist. Andererseits müssen wir überprüfen, dass $N({}_it_i) = 0$ gilt.

Alle ${}_i\alpha_j$ mit $i = 1$ oder $j = 1$ sind Nullabbildungen, da sie aus dem Nullmodul oder in den Nullmodul abbilden. Somit folgt aus Relation 3 die Identität $0 = {}_0\alpha_1 \cdot {}_1\alpha_0 = N({}_0t_0)$. Da $t^p - 1 = (t-1)N(t)$ gilt, also als Ideal $(N(t)) \supset (t^p - 1)$ gilt, können wir ${}_0M$ auch als Modul über $\mathbb{Z}[t]/(N(t)) \cong \mathbb{Z}[\zeta_p]$ auffassen, ohne Informationen zu verlieren. Da ${}_0\alpha_2$ und ${}_2\alpha_0$ Isomorphismen sind, sind aufgrund von Relation 4 und von Relation 5 auch ${}_01_0 - {}_0t_0$ und ${}_21_2 - {}_2t_2$ Isomorphismen. Aus Relation 5 folgt dann, dass $1 - {}_2s_2 = 0$ gelten muss. Also ist die Wirkung von ${}_2s_2$ auf ${}_2M$ die Identität. Mit Relation 6 folgt auch $N({}_2t_2) = 0$ und wir können tatsächlich ${}_0M$ und ${}_2M$ als $\mathbb{Z}[\zeta_p]$-Moduln betrachten.

Weil $({}_01_0 - {}_0t_0)$ invertierbar ist, ist auch $({}_01_0 - {}_0t_0)^i$ für alle $i \in \mathbb{Z}$ ein Automorphismus von ${}_0M$, auch wenn die $({}_01_0 - {}_0t_0)^i$ nicht notwendigerweise verschieden sein müssen. ${}_0M$ kann also auch als Modul über $\mathbb{Z}\left[\zeta_p, \frac{1}{1-\zeta_p}\right]$ bzw. über der Lokalisierung $S := \mathbb{Z}[\zeta_p]_{(1-\zeta_p)^{-1}}$ betrachtet werden. Wir können daher modulo Isomorphie ${}_2\alpha_0$ als Identität und ${}_0\alpha_2$ als Multiplikation mit $(1 - \zeta_p)$ betrachten.

Sind umgekehrt ${}_0M$ und ${}_2M$ isomorphe $\mathbb{Z}\left[\zeta_p, \frac{1}{1-\zeta_p}\right]$-Moduln, so werden sie durch ${}_2\alpha_0 : {}_0M \to {}_2M, x \mapsto x$ und ${}_0\alpha_2 : {}_2M \to {}_0M, x \mapsto (1 - \zeta_p)\,x$ kanonisch zu einem exakten $\mathcal{R}$-Modul ${}_0M \oplus 0 \oplus {}_2M$.

Da das Ideal $(1 - \zeta_p)^{p-1}$ in $\mathbb{Z}[\zeta_p]$ dem Ideal (p) entspricht ([4, Lemma 1.4]), können wir $(1 - \zeta_p)^{-k(p-1)+h}$ für beliebige $k, h \in \mathbb{N}$ darstellen als

$$(1 - \zeta_p)^{-k(p-1)+h} = \frac{e \cdot (1 - \zeta_p)^h}{p^k} \in \mathbb{Z}[\zeta_p, 1/p]$$

mit einer Einheit $e \in \mathbb{Z}[\zeta_p]$. Also gilt $\mathbb{Z}[\zeta_p, 1/(1 - \zeta_p)] \cong \mathbb{Z}[\zeta_p, 1/p]$. □

2.1.1 Irreduzible exakte $\mathcal{R}$-Moduln mit ${}_1M = 0$

Um die Möglichkeiten für $\mathcal{R}$-Moduln mit ${}_1M = 0$ besser zu verstehen, wollen wir eine Klassifikation der irreduziblen Moduln durchführen. Jeder irreduzible Modul über einem Ring S ist isomorph zu S/J für ein maximales Ideal $J \subset S$. In diesem Fall interessieren wir uns für die irreduziblen Moduln über $\mathbb{S} := \mathbb{Z}[\zeta_p, p^{-1}]$, also für die maximalen Ideale in $\mathbb{S}$. Sei zunächst $Z := \{(1 - \zeta_p)^i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Dann gilt $\mathbb{S} = Z^{-1}\mathbb{Z}[\zeta_p]$. Jedes Ideal $I \subseteq \mathbb{S}$ lässt sich darstellen als $I = Z^{-1}J$ für ein Ideal $J \subset \mathbb{Z}[\zeta_p]$; es gibt eine Bijektion zwischen

Primidealen $J \subseteq \mathbb{S}$ und Primidealen $I \subseteq \mathbb{Z}[\zeta_p]$, die trivialen Schnitt mit Z besitzen. Dies sind alle Primideale außer $(1-\zeta_p)$. Die Eigenschaft, maximales Ideal zu sein, setzt sich dann von $\mathbb{Z}[\zeta_p]$ auf $\mathbb{S}$ fort. Für unterschiedliche maximale Ideale $J, J' \subset \mathbb{Z}[\zeta_p]$, die diesen Bedingungen genügen, erhalten wir aber auch unterschiedliche maximale Ideale I und I' in $\mathbb{S}$. (vgl. Lemma 3.11 [1])

Gesucht sind nun also maximale Ideale im Ganzheitsring $\mathbb{Z}[\zeta_p]$. Da in Dedekindringen maximale Ideale Primidealen entsprechen, ist dies äquivalent dazu, die Primideale in $\mathbb{Z}[\zeta_p]$ zu suchen. Aus der Theorie der Kreisteilungskörper ergibt sich, dass jedes Primideal in $\mathbb{Z}[\zeta_p]$ über einem Primideal in $\mathbb{Z}$ liegt. Die Primideale in $\mathbb{Z}$ sind aber die von Primzahlen q erzeugten Ideale (q). Da sich q in $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ genau dann verzweigt, wenn $q \mid n$, ist in $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ nur p verzweigt. ([4], Lemma 2.3) (p) ist jedoch aufgrund von $(p) = (1-\zeta_p)^{p-1}$ als Ideal vollständig verzweigt, $(1-\zeta_p)$ ist also das einzige Primideal über (p). Dieses Ideal ist für uns nicht von Interesse, da wir den Ganzheitsring an dieser Stelle lokalisiert haben. Ist $q \neq p$, dann faktorisiert (q) in genau $\frac{\phi(p)}{\mathrm{ord}_p(q)}$ Primideale.([4], Lemma 2.13) Sei $N(X) = \prod_{i=1}^{\frac{p-1}{\mathrm{ord}_p(q)}} P_i \mod q$ eine Zerlegung in irreduzible Polynome $P_i \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ modulo q, wobei $N(X) = 1 + \cdots + X^{p-1}$ das Minimalpolynom von ζ_p über $\mathbb{Q}$ ist. Seien weiterhin $\widetilde{P}_i \in \mathbb{Z}[X]$ mit $\widetilde{P}_i \equiv P_i \mod q$. Dann haben die Primideale über q in $\mathbb{Z}[\zeta_p]$ die Form $\left(q, \widetilde{P}_i(\zeta_p)\right)$. (Dies stellt eine Anwendung von Lemma 2.14 aus [4] auf den Fall $\alpha = \zeta_p$ und $A = \mathbb{Z}$ dar.) Konkretere Aussagen über die Form dieser Polynome im allgemeinen Fall zu treffen, ist schwierig, weshalb wir diese Untersuchung mit zwei einfacheren Spezialfällen abschließen wollen. Ist einerseits q eine Primitivwurzel modulo p, so hat q die Ordnung $p-1$ und (q) ist auch als Ideal in $\mathbb{Z}[\zeta_p]$ prim. Ist andererseits $q \equiv 1 \mod p$, dann hat q die Ordnung 1 bezüglich p und es existieren somit $p-1$ Primideale über (q). Dann lässt sich $N_p(X)$ modulo q in Linearfaktoren $X - a_i$ zerlegen, wobei die a_i die verschiedenen Nullstellen sind. Die Nullstellen von $N_p(X)$ sind jedoch genau die nicht-trivialen Lösungen von $X^p \equiv 1 \mod q$. Somit sind die Primideale über q in diesem Fall die Ideale $(q, \zeta_p - a_i)$, wobei die a_i die nicht-trivialen Lösungen von $X^p \equiv 1 \mod q$ sind. Durch Herausteilen dieser maximalen Ideale aus $\mathbb{S}$ entstehen Körper mit Charakteristik $q \neq p$. In diesen Körpern ist p bereits invertierbar, wir können also auf das Adjungieren von $1/p$ verzichten. Wir schließen diesen Abschnitt mit zwei einfachen Beispielen ab.

Beispiel 2.4. *Sei $p = 5$ und $q = 2$. Dann ist q eine Primitivwurzel modulo p. Also gilt* $\mathrm{ord}_5(2) = 5-1$ *und* (2) *faktorisiert in* $\frac{\mathrm{ord}_5(2)}{\phi(5)} = 1$ *verschiedene Primideale über* $\mathbb{Z}[\zeta_5, 5^{-1}]$ *und ist ein maximales Ideal. Der irreduzible Modul für diesen Fall über* $\mathbb{Z}[\zeta_5, 5^{-1}]$ *ist* $\mathbb{Z}[\zeta_5]/(2\mathbb{Z}[\zeta_5])$ *mit* $2^4 = 16$ *Elementen. Dabei haben wir das Adjungieren von* $1/p$ *nicht benötigt. Für* $\mathcal{M}$ *gilt dann*

$$\mathcal{M} \cong \mathbb{Z}[\zeta_5]/(2\mathbb{Z}[\zeta_5]) \oplus 0 \oplus \mathbb{Z}[\zeta_5]/(2\mathbb{Z}[\zeta_5]) .$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass ${}_2\alpha_0 : {}_0M \to {}_2M$ *die Identität auf dem irreduziblen Modul und* ${}_0\alpha_2 : {}_2M \to {}_0M$ *die Multiplikation mit* $(1-\zeta_5)$ *ist.*

Beispiel 2.5. *Sei $p = 3$ und $q = 7$. Dann gilt* $q \equiv 1 \mod p$ *und somit* $\mathrm{ord}_p(q) = 1$. (7) *faktorisiert also in* $\frac{\phi(p)}{\mathrm{ord}_p(q)} = 2$ *verschiedene Primideale in* $\mathbb{Z}[\zeta_3, 3^{-1}]$. *Wir suchen nun* *nach den nicht-trivialen Lösungen von* $X^3 \equiv 1 \mod 7$. *Diese sind* 2 *und* 4. *Also faktorisiert das Ideal* (7) *in die maximalen Ideale* $(7, \zeta_3 - 2)$ *und* $(7, \zeta_3 - 4)$. *Wir wählen* $(7, \zeta_3 - 2)$ *aus. Das irreduzible Modul zu diesem maximalen Ideal ist* $\mathbb{Z}[\zeta_3] / ((7, \zeta_3 - 2)\mathbb{Z}[\zeta_3])$. *Für* $\mathcal{M}$ *gilt dann*

$$\mathcal{M} \cong \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \oplus 0 \oplus \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}.$$

Bis auf Isomorphie können wir annehmen, dass ${}_2\alpha_0 : {}_0M \to {}_2M$ *als die Identität auf* $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ *und* ${}_0\alpha_2 : {}_2M \to {}_0M$ *als die Multiplikation mit* $1 - 2 = -1$ *auf* $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ *wirkt.*

2.2 Der Fall ${}_1M \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Einen Großteil dieser Arbeit wird die Untersuchung des Falls ${}_1M \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ in Anspruch nehmen. Zunächst beweisen wir das folgende Lemma.

Lemma 2.6. *Ist* $\mathcal{M} = {}_0M \oplus {}_1M \oplus {}_2M$ *ein exakter* $\mathcal{R}$*-Modul mit* ${}_1M \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$*, dann ist die* $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$*-Wirkung auf* ${}_1M$ *trivial und damit* ${}_1s_1 = {}_11_1$.

Beweis. Die Multiplikation mit ${}_1s_1$ ist ein Endomorphismus von ${}_1M$. Somit ist sie ein Element der Endomorphismengruppe von $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, die $\mathbb{Z}/\phi(p)\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$ ist. Dort haben jedoch alle Elemente eine Ordnung kleiner als p. Aus ${}_1s_1^p = {}_11_1$ folgt dann schon ${}_1s_1 = {}_11_1$. $\square$

Wir werden die Exaktheit der beiden Sequenzen an der Stelle ${}_0M$ ausnutzen, um vier getrennte Fälle zu erhalten. Wir betrachten dazu den Kern von ${}_0\alpha_1$ und den Kern von ${}_2\alpha_1$. Als Kern eines Gruppenhomomorphismus aus ${}_1M$ müssen sie eine Untergruppe von ${}_1M \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sein. Da $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ nur die Untergruppen $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ und $\{0\}$ besitzt, ergeben sich folgende vier Fälle:

1. $\ker {}_2\alpha_1 = \ker {}_0\alpha_1 = {}_1M \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$
2. $\ker {}_0\alpha_1 = \ker {}_2\alpha_1 = 0$
3. $\ker {}_0\alpha_1 = 0$ und $\ker {}_2\alpha_1 = {}_1M \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$
4. $\ker {}_2\alpha_1 = 0$ und $\ker {}_0\alpha_1 = {}_1M \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

2.2.1 Der Fall $\ker {}_2\alpha_1 = \ker {}_0\alpha_1 \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \arrow[dl, "0"', "{}_0\alpha_1"] & \\ {}_0M \arrow[rr, tail, "{}_2\alpha_0"] & & {}_2M \arrow[ul, two heads, "{}_1\alpha_2"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \arrow[dr, "{}_2\alpha_1", "0"'] & \\ {}_0M \arrow[ur, two heads, "{}_1\alpha_0"] & & {}_2M \arrow[ll, tail, "{}_0\alpha_2"] \end{tikzcd}$$

Abbildung 3: Die exakten Sequenzen für ${}_0\alpha_1 = {}_2\alpha_1 = 0$.

Wir wollen zunächst die Exaktheit der beiden Sequenzen ausnutzen, um Aussagen über die ${}_i\alpha_j$ abzuleiten. Dazu formulieren wir folgendes Lemma:

Lemma 2.7. *Ist* $\ker {}_2\alpha_1 = \ker {}_0\alpha_1 \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \cong {}_1M$ *unter den angegebenen Bedingungen, so sind* ${}_2\alpha_0$ *sowie* ${}_0\alpha_2$ *injektiv. Weiterhin sind* ${}_1\alpha_2$ *und* ${}_1\alpha_0$ *surjektiv. Schließlich ist* $\operatorname{coker} {}_2\alpha_0 \cong \operatorname{coker} {}_0\alpha_2 \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Beweis. Da $\ker {}_0\alpha_1 = \ker {}_2\alpha_1 \cong {}_1M$ ist, ist $\operatorname{Im} {}_0\alpha_1 \cong \operatorname{Im} {}_2\alpha_1 \cong 0$. Somit sind aufgrund der Exaktheit der Sequenz ${}_2\alpha_0$ sowie ${}_0\alpha_2$ injektiv. Aus der Exaktheit an der Stelle ${}_1M$ folgt, dass ${}_1\alpha_2$ und ${}_1\alpha_0$ surjektiv sind. Das dritte Paar an Bedingungen, das uns durch die Exaktheit geliefert wird, ergibt sich nun zu $\operatorname{coker} {}_2\alpha_0 \cong {}_2M/\operatorname{Im} {}_2\alpha_0 \cong {}_2M/\ker {}_1\alpha_2 \cong \operatorname{Im} {}_1\alpha_2 \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Analog folgt $\operatorname{coker} {}_0\alpha_2 \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, was den Beweis vervollständigt. $\square$

Ein Teil unseres Vorhabens ist es, zu zeigen, dass ${}_2M$ und ${}_0M$ „im Wesentlichen gleich“ sind. Dies ist plausibel, da ${}_1M$ so etwas wie „den Unterschied zwischen ${}_2M$ und ${}_0M$“ angibt. Dazu wollen wir zunächst zeigen, dass wir keine Informationen verlieren, fassen wir beide als Moduln über dem Ring $\mathbb{Z}[\zeta_p]$ auf. Dies ist attraktiv, da $\mathbb{Z}[\zeta_p]$ ein Dedekindring, genauer gesagt der Ganzheitsring von $\mathbb{Q}[\zeta_p]$, ist und uns zur Klassifikation von Moduln über Dedekindringen stärkere Mittel zur Verfügung stehen. Dazu müssen wir nur zeigen, dass ${}_2s_2$ in ${}_2M$ triviale Wirkung hat sowie dass $N({}_0t_0)$ und $N({}_2t_2)$ Nullabbildungen sind.

Lemma 2.8. *Ist* $\ker {}_2\alpha_1 = \ker {}_0\alpha_1 \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \cong {}_1M$ *unter den angegebenen Bedingungen und identifizieren wir die Elemente aus* $\mathcal{R}$ *mit den von ihnen induzierten Abbildungen, so gilt* $N({}_0t_0) = N({}_2t_2) = 0$. *Weiterhin wirkt* ${}_2s_2$ *trivial auf* ${}_2M$ *und* ${}_1s_1$ *trivial auf* ${}_1M$.

Beweis. Für diesen Beweis nutzen wir die Relationen der Elemente in $\mathcal{R}$. Aus Lemma 2.6 wissen wir schon, dass ${}_11_1 = {}_1s_1$ gilt. Weiterhin folgt aus Relation 5 die Identität $0 = {}_2\alpha_1 \cdot {}_1\alpha_2 = {}_21_2 - {}_2s_2$ und damit ${}_21_2 = {}_2s_2$.

Aus Relation 6 und aus Relation 3 folgt schließlich $0 = N({}_0t_0) = N({}_2t_2)$. $\square$

Analog zum vorherigen Fall dürfen wir also ${}_0M$ und ${}_2M$ als Moduln über dem Dedekindring $\mathbb{Z}[\zeta_p]$ betrachten, ohne Informationen zu verlieren. Es erscheint nun sinnvoll, sich auf einen der beiden Untermoduln ${}_2M$ und ${}_0M$ zu beschränken, um Aussagen über seine Struktur zu treffen. Da die Situation symmetrisch in ${}_0M$ und ${}_2M$ ist, lassen sich die so gewonnenen Aussagen automatisch auf beide Untermoduln übertragen. Dazu formulieren wir zunächst folgendes Lemma:

Lemma 2.9. *Ist* $\ker {}_2\alpha_1 = \ker {}_0\alpha_1 \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \cong {}_1M$ *unter den angegebenen Bedingungen, so sind die Abbildungen* $({}_01_0 - {}_0t_0)$ *und* $({}_21_2 - {}_2t_2)$ *injektiv.*

Beweis. Aus der Injektivität von ${}_2\alpha_0$ und ${}_0\alpha_2$ (Lemma 2.7) folgt mit Relation 4 bzw. mit Relation 5 die Injektivität von ${}_01_0 - {}_0t_0$ bzw. ${}_21_2 - {}_2t_2$. $\square$

Wir wollen unsere allgemeinen Untersuchungen in diesem Fall mit folgender Beobachtung abschließen, die in erster Linie dazu dient, ein besseres Gefühl für die mögliche Struktur von ${}_2M$ und ${}_0M$ zu bekommen:

Lemma 2.10. *Wenn* ${}_2\alpha_0$ *und* ${}_0\alpha_2$ *injektiv sind, besitzen* ${}_2M$ *und* ${}_0M$ *triviale* p*-Torsion.*

Beweis. Angenommen, $a \neq 0$ ist ein p-Torsionselement in ${}_0M$. Es gilt $({}_0\alpha_2 \cdot {}_2\alpha_0)^p = ({}_01_0 - {}_0s_0)^p$, welches eine injektive Abbildung ist. Aber es gilt

$$({}_01_0 - {}_0s_0)^p \cdot a = ({}_01_0 - {}_01_0 + p \cdot (\dots)) = p \cdot a \cdot (\dots) = 0.$$

Das Element a wird also durch Multiplikation mit $({}_0\alpha_2 \cdot {}_2\alpha_0)^p$ auf 0 geschickt, was ein Widerspruch zur Injektivität von $({}_0\alpha_2 \cdot {}_2\alpha_0)^p$ ist. $\square$

2.2.2 Die Konstruktion von ${}_jM / \left(\bigcap_{i=0}^{\infty} \operatorname{Im}(1 - {}_jt_j)^i\right)$

Da wir ${}_2M$ und ${}_0M$ als $\mathbb{Z}[\zeta_p]$-Modul betrachten können, identifizieren wir t mit ζ_p. Wir betrachten den injektiven, aber nicht surjektiven Endomorphismus $(1 - \zeta_p)$ von ${}_0M$. Da er sich aus ${}_0\alpha_2$ und ${}_2\alpha_0$ zusammensetzt, ist sein Kokern endlich mit Kardinalität p^2. Wenden wir ihn mehrmals auf ${}_0M$ an, erhalten wir immer kleinere Untermoduln von ${}_0M$. Aufgrund der Injektivität wird diese Folge nie stationär. Es erscheint also sinnvoll, nicht mehr die Bilder der endlichen Anwendung von $(1 - \zeta_p)$ zu betrachten, sondern einen Grenzwert der Bilder der „unendlichen" Anwendung von $(1 - \zeta_p)$. Wir betrachten dementsprechend den Untermodul der Elemente, die für beliebige $i \in \mathbb{N}$ im Bild von $(1 - \zeta_p)^i$ liegen. Stärkere Aussagen werden wir jedoch über den „Grenzwert" der Kokerne bei unendlicher Anwendung von $(1 - \zeta_p)$ treffen können, da der Kokern von $(1 - \zeta_p)^0 = \mathrm{id}$ trivial ist und wir in einer begrenzten Art und Weise verstehen, wie der Kokern in jedem Schritt wächst.

$$\begin{tikzcd}
 & & J_\infty \arrow[dl, two heads, "p_{i\infty}"'] \arrow[dr, two heads, "p_{2\infty}"'] \arrow[drr, two heads, "p_{2\infty}"] \arrow[drrr, two heads, "p_{0\infty}"] & & & \\
\dots \arrow[r, two heads] & J_i \arrow[r, two heads] \arrow[rr, two heads, bend right, "p_{2i}"] \arrow[rrr, two heads, bend right=40, "p_{1i}"] & \dots \arrow[r, two heads] & J_2 \arrow[r, two heads, "p_{12}"'] & J_1 \arrow[r, two heads, "p_{01}"'] & 0
\end{tikzcd}$$

Abbildung 4: Kommutierendes Diagramm der J_i.

Sei $I_i = \operatorname{Im}(1 - \zeta_p)^i$ und $J_i = \operatorname{coker}(1 - \zeta_p)^i = {}_jM/I_i$. Sei weiterhin

$$I_\infty := \bigcap_{i=0}^{\infty} \operatorname{Im}(1 - \zeta_p)^i$$

und $J_\infty := {}_jM/I_\infty$. Für $i \leq h$ bezeichnen wir schließlich die kanonische Projektion von J_h nach J_i mit $p_{ih} : J_h \to J_i$, $a + \operatorname{Im}(1 - \zeta_p)^h \mapsto a + \operatorname{Im}(1 - \zeta_p)^i$. Da ${}_2\alpha_0$ und ${}_0\alpha_2$ jeweils injektiv sind und der Kokern isomorph zu $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ist, sind die J_i endlich mit $\frac{|J_{i+1}|}{|J_i|} = p^2$. Es ergibt sich Diagramm in Abbildung 4. Dies ist ein projektives System; die Frage nach dem projektiven Limes der J_i erhält also Bedeutung.

Lemma 2.11. *Sind die J_i wie zuvor definiert, gilt*

$$J_i \cong \bigoplus_{j=1}^{2} \mathbb{Z}[\zeta_p]/\left(1-\zeta_p\right)^i$$

und wir können eine mit der Projektion verträgliche Basis finden.

Beweis. Die J_i sind endlich erzeugte und insbesondere endliche Moduln über dem Dedekindring $\mathbb{Z}[\zeta_p]$. Also bestehen sie nur aus dem Torsionsanteil und lassen sich als direkte Summe von Quotienten von $\mathbb{Z}[\zeta_p]$ darstellen. Für jedes $i \in \mathbb{N}$ lässt sich J_i mit Idealen $A_j \subset \mathbb{Z}[\zeta_p]$ darstellen als

$$J_i = \bigoplus_{j=1}^{k} \mathbb{Z}[\zeta_p]/A_j.$$

Induktiv gilt für die Kardinalität von J_i

$$|J_i| = |J_0| \cdot \prod_{j=1}^{i} \frac{|J_j|}{|J_{j-1}|} = 1 \cdot \prod_{j=1}^{i} p^2 = p^{2i}.$$

Aufgrund der Definition der J_i ist $\left(1-\zeta_p\right)^i J_i$ trivial. Damit ist $\left(1-\zeta_p\right)^i \subset A_j$ für alle j. Für $i=1$ folgt aufgrund der Kardinalität damit direkt die Aussage. Wir zeigen die Aussage induktiv. Angenommen, es gilt bereits $J_i \cong \bigoplus_{j=1}^{2} \mathbb{Z}[\zeta_p]/\left(1-\zeta_p\right)^i$ für ein $i \in \mathbb{N}$ und wir haben eine mit der Projektion verträgliche Basis von J_j für $1 \leq j \leq i$ gewählt. Wähle $a+I_{i+1}, b+I_{i+1} \in J_{i+1}$ so, dass $a+I_{i+1}$ ein Urbild von $a+I_i \equiv (1,0) \in J_i$ und $b+I_{i+1}$ ein Urbild von $b+I_i \equiv (0,1) \in J_i$ unter der kanonischen Projektion ist. Diese existieren wegen der Surjektivität der Projektion immer. Dann ist auch $a+I_1 \equiv (1,0) \in J_1$ und $b+I_1 \equiv (0,1) \in J_1$. Somit ist $ma+nb$ für $m,n \in \{0,\dots,p-1\}$ und $(m,n) \neq (0,0)$ nicht im Bild von $(1-\zeta_p)$ enthalten. Aus der Injektivität von $(1-\zeta_p)$ folgt damit aber auch, dass $m(1-\zeta_p)^i a + n(1-\zeta_p)^i b$ für $m,n \in \{0,\dots,p-1\}$ und $(m,n) \neq (0,0)$ nicht in $\mathrm{Im}(1-\zeta_p)^{i+1} = I_{i+1}$ enthalten ist. Also ist $ma+nb+I_{i+1}$ für $m,n \in \{0,\dots,p-1\}$ und $(m,n) \neq (0,0)$ nicht in der $(1-\zeta_p)^i$-Torsion von I_{i+1} enthalten und $a+I_{i+1}$ und $b+I_{i+1}$ erzeugen ein Untermodul von J_{i+1}, das isomorph zu $\bigoplus_{j=1}^{2} \mathbb{Z}[\zeta_p]/\left(1-\zeta_p\right)^{i+1}$ ist. Aus Kardinalitätsgründen ist dies ganz J_{i+1} und die Aussage folgt. Um eine mit der Projektion verträgliche Basis zu erhalten, wählen wir schließlich $(1,0) \equiv a+I_{i+1}$ und $(0,1) \equiv b+I_{i+1}$. □

Das Ziel ist es jetzt, die Struktur von J_∞ zu verstehen. Mithilfe von Lemma 2.11 können wir dazu das projektive System 4 in zwei projektive Systeme einfacherer Struktur aufteilen. Betrachten wir die Projektionen $p'_{i\infty}$ bzw. $p''_{i\infty}$ auf die erste bzw. zweite Komponente von J_i sowie p'_{ij} bzw. p''_{ij} als Projektionen zwischen den ersten bzw. den zweiten Komponenten von J_i und J_j. Dann erhalten wir folgende Strukturaussage.

Lemma 2.12. *J_∞ ist $\mathbb{Z}[\zeta_p]$-Untermodul von $\mathbb{Z}_p[\zeta_p] \oplus \mathbb{Z}_p[\zeta_p]$. Weiterhin existieren Elemente $e_0, e_1 \in J_\infty$ mit $(p'_1(e_0), p''_1(e_0)) = (1,0)$ und $(p'_1(e_1), p''_1(e_1)) = (0,1)$.*

Beweis. Es gilt

$$p'_{i\infty}\left(J_\infty\right) \cong p''_{i\infty}\left(J_\infty\right) \cong \mathbb{Z}\left[\zeta_p\right] \Big/ (1-\zeta_p)^i\, \mathbb{Z}\left[\zeta_p\right].$$

Somit gilt mit der bekannten Aussage $\varprojlim_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}\left[\zeta_p\right] \Big/ (1-\zeta_p)^i\, \mathbb{Z}\left[\zeta_p\right] \cong \mathbb{Z}_p[\zeta_p]$ (siehe [2]) und $\mathcal{Z}_i := \mathbb{Z}\left[\zeta_p\right] \Big/ (1-\zeta_p)^i\, \mathbb{Z}\left[\zeta_p\right]$ auch

$$\varprojlim_{i\in\mathbb{N}} p'_{i\infty}\left(J_\infty\right) \cong \varprojlim_{i\in\mathbb{N}} p''_{i\infty}\left(J_\infty\right) \cong \varprojlim_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}\left[\zeta_p\right] \Big/ (1-\zeta_p)^i\, \mathbb{Z}\left[\zeta_p\right] \cong \mathbb{Z}_p[\zeta_p].$$

Demnach existieren aufgrund der Definition eines projektiven Limes eindeutige p' und p'', sodass für alle $k \geq j \in \mathbb{N}$ das kommutierende Diagramm 5 entsteht.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{Z}_k \arrow[rrrr, two heads, "p'_{jk}"] & & & & \mathcal{Z}_j \\
& & \mathbb{Z}_p[\zeta_p] \arrow[ull, two heads, "p_k"'] \arrow[urr, two heads, "p_j"] & & \\
\mathcal{Z}_k \oplus \mathcal{Z}_k \arrow[uu, two heads, "p'_k"] \arrow[dd, two heads, "p''_k"'] \arrow[rrrr, bend right=60, "p_{jk}"'] & & J_\infty \arrow[ll, two heads, "p_{k\infty}"] \arrow[rr, two heads, "p_{j\infty}"] \arrow[u, "p'"] \arrow[d, "p''"'] & & \mathcal{Z}_j \oplus \mathcal{Z}_j \arrow[uu, two heads, "p'_j"'] \arrow[dd, two heads, "p''_j"] \\
& & \mathbb{Z}_p[\zeta_p] \arrow[dll, two heads, "p_k"] \arrow[drr, two heads, "p_j"'] & & \\
\mathcal{Z}_k \arrow[rrrr, two heads, "p''_{jk}"] & & & & \mathcal{Z}_j
\end{tikzcd}$$

Abbildung 5: Kommutierendes Diagramm der projektiven Limites.

Durch p' und p'' wird eine Abbildung $p : J_\infty \to \mathbb{Z}_p[\zeta_p] \oplus \mathbb{Z}_p[\zeta_p], x \mapsto (p'(x), p''(x))$ definiert. Sowohl J_∞, als auch $\mathbb{Z}_p[\zeta_p] \oplus \mathbb{Z}_p[\zeta_p]$ sind kanonische $\mathbb{Z}[\zeta_p]$-Moduln. Angenommen, es gilt $p(x) = 0$. Sei $x = x_0 + I_\infty$. Dann ist für alle $i \in \mathbb{N}$ $p_{i\infty}(x) = x_0 + I_i = 0 + I_i$, x_0 ist also für alle $i \in \mathbb{N}$ in I_i enthalten, also folgt $x_0 \in I_\infty$ und $x = 0$. Somit ist p injektiv und J_∞ stellt sich kanonisch als $\mathbb{Z}[\zeta_p]$-Untermodul von $\mathbb{Z}_p[\zeta_p] \oplus \mathbb{Z}_p[\zeta_p]$ dar. Da die Projektionen surjektiv sind, muss es Elemente e_0 und e_1 aus J_∞ geben, sodass $(p'_1(e_0), p''_1(e_0)) = (1, 0)$ und $(p'_1(e_1), p''_1(e_1)) = (0, 1)$ gilt. Dies vervollständigt den Beweis. □

Lemma 2.13. *Sei $\mathcal{Z}_\infty$ ein $\mathbb{Z}[\zeta_p]$-Untermodul von $\mathbb{Z}_p[\zeta_p] \oplus \mathbb{Z}_p[\zeta_p]$ mit zwei Elementen $e_0, e_1 \in \mathcal{Z}_\infty$ mit $(p'_1(e_0), p''_1(e_0)) = (1, 0)$, die $(p'_1(e_1), p''_1(e_1)) = (0, 1)$ erfüllen. Mit p sei die kanonische Projektion auf die Koordinaten von $\mathcal{Z}_i$ im Sinne der vorherigen Notation bezeichnet. Dann existieren für alle $i \in \mathbb{N}$ Elemente e_{0i} und e_{1i} in $\mathcal{Z}_\infty$, sodass $(p'_i(e_{0i}), p''_i(e_{0i})) \equiv (1, 0) \mod (1-\zeta_p)^i$ und $(p'_i(e_{1i}), p''_i(e_{1i})) \equiv (0, 1) \mod (1-\zeta_p)^i$ gilt.*

Beweis. Wir beweisen die Aussage mit vollständiger Induktion. Der Fall $i = 1$ ist bereits in der Voraussetzung enthalten. Nehmen wir nun an, dass e_{0i} und e_{1i} in $\mathcal{Z}_\infty$ existieren, sodass $(p'_i(e_{0i}), p''_i(e_{0i})) = (1, 0) \in J_i$ und $(p'_i(e_{1i}), p''_i(e_{1i})) = (0, 1) \in \mathcal{Z}_i$ gelten. Dann ist

$$a := \left(p'_{i+1}(e_{0i}), p''_{i+1}(e_{0i})\right) = (1 + k\,(1-\zeta_p)^i\,, l\,(1-\zeta_p)^i) \in \mathcal{Z}_{i+1}$$

und

$$b := \left(p'_{i+1}(e_{1i}), p''_{i+1}(e_{1i})\right) = \left(m \cdot (1-\zeta_p)^i, 1 + n \cdot (1-\zeta_p)^i\right) \in \mathcal{Z}_{i+1}$$

mit $k, l, m, n \in \{0 \dots p-1\}$. Da $\mathcal{Z}_\infty$ die Struktur eines $\mathbb{Z}[\zeta_p]$-Moduls trägt, sind auch $e_{0(i+1)} = a - k\,(1-\zeta_p)^i \cdot a - l\,(1-\zeta_p)^i \cdot b$ und $e_{1(i+1)} = b - m\,(1-\zeta_p)^i \cdot a - n\,(1-\zeta_p)^i \cdot b$ in $\mathcal{Z}_\infty$, die die Bedingungen erfüllen. □

Ist die Abbildung $J_\infty \to \mathbb{Z}\left[\zeta_p\right]/(1-\zeta_p)\,\mathbb{Z}\left[\zeta_p\right] \oplus \mathbb{Z}\left[\zeta_p\right]/(1-\zeta_p)\,\mathbb{Z}\left[\zeta_p\right], x \mapsto (p'_1(x), p''_1(x))$ surjektiv, sind also automatisch alle Abbildungen $x \mapsto (p'_i(x), p''_i(x))$ surjektiv. Aufgrund der Injektivität sind die Urbilder der Elemente von I_∞ eindeutig, diese müssen aufgrund der Definition von I_∞ wieder in I_∞ liegen. Deshalb müssen auf I_∞ eingeschränkt ${}_2\alpha_0$ und ${}_0\alpha_2$ surjektiv sein, da I_∞ in $\operatorname{Im}{}_2\alpha_0$ bzw. $\operatorname{Im}{}_0\alpha_2$ liegt. Somit erfüllt der I_∞-Anteil von ${}_2M$ und ${}_0M$ die Bedingungen für den Fall ${}_1M \cong 0$. Als Zusammenfassung der Ergebnisse dieses Abschnitts können wir folgenden Satz formulieren:

Satz 2.14. *Sei $\mathcal{M} = {}_0M \oplus {}_1M \oplus {}_2M$ ein exakter $\mathcal{R}$-Modul mit ${}_1M \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ und $\ker{}_2\alpha_1 = \ker{}_0\alpha_1 \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Dann existiert ein $\mathbb{Z}\left[\zeta_p, 1/p\right]$-Modul I_∞ als Untermodul von ${}_0M$ und ${}_2M$ mit $\zeta_p \equiv t$ und Isomorphismen ${}_2\alpha_0 \equiv 1$ und ${}_0\alpha_2 \equiv (1-\zeta_p)$. Die Quotienten von ${}_2M$ und ${}_0M$ mit I_∞ sind isomorphe $\mathbb{Z}[\zeta_p]$-Untermoduln X von $\mathbb{Z}_p[\zeta_p] \oplus \mathbb{Z}_p[\zeta_p]$, die die Bedingung $X/(1-\zeta_p)X \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ erfüllen, wobei ${}_1\alpha_2$ und ${}_1\alpha_0$ die Projektionen auf*

$$\mathbb{Z}_p[\zeta_p]/\left((1-\zeta_p)\,\mathbb{Z}_p[\zeta_p]\right) \oplus 0$$

bzw. auf

$$0 \oplus \mathbb{Z}_p[\zeta_p]/\left((1-\zeta_p)\,\mathbb{Z}_p[\zeta_p]\right)$$

sind. Die Multiplikation der Quotienten mit ${}_0\alpha_2$ und ${}_2\alpha_0$ ist gegeben durch die Matrizen $\begin{pmatrix} 1-\zeta_p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-\zeta_p \end{pmatrix}$.

Die Elemente ${}_0t_0$ und ${}_2t_2$ entsprechen jeweils der Multiplikation mit ζ_p, ${}_1s_1$ und ${}_2s_2$ sind die Identität auf ${}_1M$. Erfüllen umgekehrt I_∞ und die Quotienten diese Bedingungen, induzieren sie einen exakten $\mathcal{R}$-Modul M.

Schließlich geben wir als Beispiel einen möglichen exakten $\mathcal{R}$-Modul in diesem Fall an:

Beispiel 2.15. *Sei $\mathcal{M} := {}_0M \oplus {}_1M \oplus {}_2M$ mit ${}_1M \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ und ${}_0M \cong {}_2M \cong \mathbb{Z}_p[\zeta_p] \oplus \mathbb{Z}[\zeta_p]$. Sei dazu ${}_0\alpha_2 = \begin{pmatrix} (1-\zeta_p) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und ${}_2\alpha_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1-\zeta_p) \end{pmatrix}$. Die Elemente ${}_1\alpha_2$ und ${}_1\alpha_0$ sind die Projektionen auf*

$$\mathbb{Z}_p[\zeta_p]/\left((1-\zeta_p)\,\mathbb{Z}_p[\zeta_p]\right) \oplus 0$$

bzw. auf

$$0 \oplus \mathbb{Z}[\zeta_p]/\left((1-\zeta_p)\,\mathbb{Z}[\zeta_p]\right).$$

Die Elemente ${}_1s_1$ und ${}_2s_2$ wirken trivial, ${}_it_i$ entspricht jeweils der Multiplikation mit ζ_p. In diesem Beispiel zeigt sich, dass die beiden Komponenten von ${}_0M$ und ${}_2M$ nicht not-

wendigerweise gleich sein müssen. Es ergibt sich folgendes Bild der exakten Sequenzen:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \arrow[dl, "0"', "{}_0\alpha_1"] & & & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \arrow[dr, "{}_2\alpha_1", "0"'] & \\
\mathbb{Z}_p[\zeta_p] \oplus \mathbb{Z}[\zeta_p] \arrow[rr, tail, "\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1-\zeta_p) \end{pmatrix}"'] & & \mathbb{Z}_p[\zeta_p] \oplus \mathbb{Z}[\zeta_p] \arrow[ul, two heads, "{}_1\alpha_2"'] & \mathbb{Z}_p[\zeta_p] \oplus \mathbb{Z}[\zeta_p] \arrow[ur, two heads, "{}_1\alpha_0"] & & \mathbb{Z}_p[\zeta_p] \oplus \mathbb{Z}[\zeta_p] \arrow[ll, tail, "\cdot\begin{pmatrix} (1-\zeta_p) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}"]
\end{tikzcd}.$$

2.2.3 Der Fall $\ker {}_0\alpha_1 = \ker {}_2\alpha_1 = 0$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \arrow[dl, tail, "{}_0\alpha_1"'] & \\
{}_0M \arrow[rr, two heads, "{}_2\alpha_0"] & & {}_2M \arrow[ul, "{}_1\alpha_2"', "0"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \arrow[dr, tail, "{}_2\alpha_1"] & \\
{}_0M \arrow[ur, "{}_1\alpha_0", "0"'] & & {}_2M \arrow[ll, two heads, "{}_0\alpha_2"]
\end{tikzcd}$$

Abbildung 6: Die exakten Sequenzen für $\ker {}_0\alpha_1 = \ker {}_2\alpha_1 = 0$.

Die anfänglichen Untersuchungen können in diesem Fall sehr ähnlich wie im letzten Fall gemacht werden. Wir zeigen zunächst folgendes Lemma.

Lemma 2.16. *Ist* $\ker {}_2\alpha_1 = \ker {}_0\alpha_1 = 0$ *unter den angegebenen Bedingungen, so sind* ${}_2\alpha_0$ *sowie* ${}_0\alpha_2$ *surjektiv. Weiterhin sind* ${}_1\alpha_2$ *und* ${}_1\alpha_0$ *Nullabbildungen. Schließlich ist* $\ker {}_2\alpha_0 \cong \ker {}_0\alpha_2 \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Beweis. Aufgrund der Exaktheit in ${}_1M$ sind ${}_1\alpha_0$ sowie ${}_1\alpha_2$ Nullabbilldungen. Aus der Exaktheit in ${}_0M$ und ${}_2M$ folgt dann, dass ${}_2\alpha_0$ und ${}_0\alpha_2$ surjektiv sind sowie einen Kern, der isomorph zu $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ist, haben. □

Wir wollen wieder mit ${}_2M$ und ${}_0M$ als Moduln über dem Dedekindring $\mathbb{Z}[\zeta_p]$ arbeiten. Dazu müssen wir uns vergewisseren, dass $N({}_2t_2)$ und $N({}_0t_0)$ verschwinden und dass ${}_2s_2$ trivial wirkt.

Lemma 2.17. *Sei* $\mathcal{M} := {}_0M \oplus {}_1M \oplus {}_2M$ *ein exakter* $\mathcal{R}$*-Modul mit* ${}_1M \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. *Ist* $\ker {}_0\alpha_1 = \ker {}_2\alpha_1 = 0$ *unter den angegebenen Bedingungen und identifizieren wir die Elemente aus* $\mathcal{R}$ *mit den von ihnen induzierten Abbildungen, so gilt* $N({}_0t_0) = N({}_2t_2) = 0$. *Weiterhin wirkt* ${}_2s_2$ *trivial auf* ${}_2M$ *und* ${}_1s_1$ *trivial auf* ${}_1M$.

Beweis. Aus Relation 3 folgt $0 = {}_0\alpha_1 \cdot {}_1\alpha_0 = N({}_0t_0)$, aus Lemma 2.6 folgt ${}_11_1 = {}_1s_1$ und aus Relation 5 folgt $0 = {}_2\alpha_1 \cdot {}_1\alpha_2 = {}_21_2 - {}_2s_2$ bzw. ${}_2s_2 = {}_21_2$. Dann folgt aus Relation 6 $N({}_2t_2) + N({}_2s_2) = p \cdot {}_21_2$, also $N({}_2t_2) + p \cdot {}_21_2 = p \cdot {}_21_2$ und damit $N({}_2t_2) = 0$. Das bedeutet, dass wir ${}_0M$ und ${}_2M$ kanonisch als Moduln über dem Ganzheitsring von $\mathbb{Q}[\zeta_p]$ auffassen können. Dies vervollständigt den Beweis. □

Um die Struktur von ${}_0M$ und ${}_2M$ besser zu verstehen, beschränken wir uns jetzt auf einen der beiden Untermoduln. Da die Situation symmetrisch in ${}_0M$ und ${}_2M$ ist, werden sich alle so gewonnenen Aussagen auf beide Untermoduln anwenden lassen. Dazu interessieren wir uns insbesondere für den Endomorphismus ${}_01_0 - {}_0t_0$ von ${}_0M$, da er uns erlaubt, Informationen über die Elemente der Form ${}_i\alpha_j$ zu verwerten, ohne ${}_0M$ verlassen zu müssen. Wir formulieren folgende Beobachtung:

Lemma 2.18. *Ist* $\ker {}_2\alpha_1 = \ker {}_0\alpha_1 = 0$ *unter den angegebenen Bedingungen, so sind die Abbildungen* $({}_01_0 - {}_0t_0)$ *und* $({}_21_2 - {}_2t_2)$ *surjektiv.*

Beweis. Aus Lemma 2.16 wissen wir, dass ${}_0\alpha_2$ und ${}_2\alpha_0$ surjektiv sind. Dann sind auch $({}_01_0 - {}_0t_0) = {}_0\alpha_2 \cdot {}_2\alpha_0$ (Relation 4) und $({}_21_2 - {}_2t_2) = {}_2\alpha_0 \cdot {}_0\alpha_2$ (Relation 5) surjektiv. □

Es gilt jeweils ${}_0M/(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \cong {}_2M$ und ${}_2M/(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \cong {}_0M$, da $\ker {}_0\alpha_2 \cong \ker {}_2\alpha_0 \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ gilt.

2.2.4 Die Konstruktion von $\bigcup_{i=0}^{\infty} \ker(1-t)^i$

Die sich ergebende Situation ist nun symmetrisch in ${}_0M$ und ${}_2M$; es reicht also, von t und 1 anstatt von ${}_it_i$ und ${}_i1_i$ zu sprechen. Da für alle $n > 0$ die Abbildung $(1-t)^n$ surjektiv, aber nicht injektiv ist, ist das Bild von $(1-t)^n$ für beliebige n wieder ${}_iM$. Somit gilt $\ker(1-t)^n \subsetneq \ker(1-t)^{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die additive Struktur des Quotienten ist durch den Kern von ${}_2\alpha_0$ und ${}_0\alpha_2$ auf $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$ oder $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ festgelegt. Bezeichnen wir die natürliche Inklusion mit i, so ist

$$\ldots \underset{i}{\overset{1-t}{\rightleftarrows}} \ker(1-t)^k \underset{i}{\overset{1-t}{\rightleftarrows}} \ker(1-t)^{k-1} \underset{i}{\overset{1-t}{\rightleftarrows}} \ldots \underset{i}{\overset{1-t}{\rightleftarrows}} 0$$

eine nicht stationäre Sequenz von Untermoduln von ${}_jM$. Anstatt den Kern von $(1-t)^i$ für ein festes i zu betrachten, wollen wir alle Elemente aus ${}_0M$ betrachten, die für ein $h \in \mathbb{N}$ von $(1-t)^h$ auf Null abgebildet werden. Wir interessieren uns also für

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} \ker(1-t)^i := \left\{ a \in {}_jM \mid \exists h \in \mathbb{N} : (1-t)^h \cdot a = 0 \right\}.$$

Bezeichnen wir den Kern von $(1-t)^n$ mit X_n und sei $X := X_\infty := \bigcup_{i=0}^{\infty} X_i$. Wir versuchen jetzt, unser Wissen über die Struktur der X_i zu nutzen, um Aussagen über $X_\infty \subset {}_0M$ treffen zu können.

Wie bereits gezeigt wurde, sind die X_i alle $\mathbb{Z}[\zeta_p]$-Moduln. Als endliche Moduln sind sie dann endliche direkte Summen von endlichen Quotienten von $\mathbb{Z}[\zeta_p]$. Da die Kardinalität von X_{i+1}/X_i gleich p^2 sein muss, haben die einzelnen Summanden eine p-Potenz als Kardinalität.

Lemma 2.19. *Für alle* $i \in \mathbb{N}$ *hat* X_i *die Form*

$$X_i = \bigoplus_{j=1}^{2} \mathbb{Z}[\zeta_p]/(1-\zeta_p)^i.$$

Beweis. Wir gehen induktiv vor. Für $i = 0$ stimmt die Behauptung offensichtlich. Nehmen wir an, dass $X_i = \bigoplus_{j=1}^{2} \mathbb{Z}[\zeta_p]/\left(1-\zeta_p\right)^i$ für ein $i \in \mathbb{N}$ gilt. Aufgrund des Struktursatzes für endlich erzeugte Moduln über Dedekindringen und der Tatsache, dass X_{i+1} ein Torsionsmodul ist, folgt, dass wir X_{i+1} darstellen können als

$$X_{i+1} = \bigoplus_{j=1}^{n} \mathbb{Z}[\zeta_p]/A_j$$

mit Idealen $A_j \subset \mathbb{Z}[\zeta_p]$. Wir zeigen zunächst, dass X_{i+1} nur aus zwei direkten Summanden bestehen kann, indem wir benutzen, dass alle A_j Teiler von $\left(1-\zeta_p\right)^{i+1}$ sind. Mithilfe eines Arguments über die Kardinalität von X_{i+1} zeigen wir schließlich, dass die verbleibenden zwei A_j die gewünschte Struktur aufweisen müssen.

Da auch $\mathbb{Z}[\zeta_p]/A_j$ im Kern von $\left(1-\zeta_p\right)^{i+1}$ enthalten ist, folgt, dass $\left(1-\zeta_p\right)^{i+1} \subset A_j$ für alle j von 1 bis n. Diese Aussage ermöglicht uns eine Eingrenzung der Struktur der A_i auf endlich viele Fälle: Da jedes Ideal in einem Dedekindring eine eindeutige Zerlegung in Primideale besitzt und da $(1-\zeta_p)$ prim ist, existiert für jedes j von 1 bis n ein $k_j \leq i+1$ mit $A_j = (1-\zeta_p)^{k_j}$. Andererseits ist X_i in X_{i+1} enthalten und es gilt ohne Beschränkung der Allgemeinheit, dass $A_j \subset \left(1-\zeta_p\right)^i$ für $j \in \{1, 2\}$. Da der Kern von $\left(1-\zeta_p\right)^i$ jedoch vollständig in $X_{i+1} = \bigoplus_{j=1}^{n} \mathbb{Z}[\zeta_p]/A_j$ enthalten ist und jeder direkte Summand $\mathbb{Z}[\zeta_p]/A_j$ in X_{i+1} mit $j > 2$ und $\left(1-\zeta_p\right)^{k_j} = A_j \neq \mathbb{Z}[\zeta_p]$ zu Elementen außerhalb von $X_i = \bigoplus_{j=1}^{2} \mathbb{Z}[\zeta_p]/\left(1-\zeta_p\right)^i$, die im Kern von $\left(1-\zeta_p\right)^i$ liegen, führt, ist $\mathbb{Z}[\zeta_p]/A_j$ trivial für $j > 2$ und es folgt

$$X_{i+1} = \bigoplus_{j=1}^{2} \mathbb{Z}[\zeta_p]/A_j.$$

Es verbleibt nur noch zu zeigen, dass die A_j die gewünschte Form haben. Da jedoch $\left(1-\zeta_p\right)^{i+1} \subset A_j \subset \left(1-\zeta_p\right)^i$ gilt, ist eine der Inklusionen eine Gleichheit. Weil $|X_{i+1}/X_i| = p^2$ gilt, folgt $\left(1-\zeta_p\right)^{i+1} = A_j$ und somit

$$X_{i+1} = \bigoplus_{j=1}^{2} \mathbb{Z}[\zeta_p]/\left(1-\zeta_p\right)^{i+1}.$$

Induktiv folgt die Behauptung. □

Lemma 2.20. *Ist X_∞ so definiert wie zuvor, gilt*

$$X_\infty \cong \bigoplus_{j=1}^{2} \left(\mathbb{Z}\left[\zeta_p, 1/p\right]\right)/\mathbb{Z}[\zeta_p].$$

Beweis. Um die Struktur der X_i besser zu verstehen, bemerken wir zunächst, dass Elemente der Form $\frac{1-\zeta_p^k}{1-\zeta_p^h}$ in $\mathbb{Z}[\zeta_p]$ Einheiten sind. Also gilt

$$(1-\zeta_p)^{p-1} = \prod_{i=1}^{p-1}\left(1-\zeta_p^i\right) = (\Phi_p(1)) = (p)$$

als Ideal; (p) ist als (einziges) Primideal von $\mathbb{Z}$ total verzweigt in $\mathbb{Z}[\zeta_p]$. Wir erhalten also $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z} \subset X_{k(p-1)}$. Wir betrachten folgende Inklusion:

$$\cdots \supset \mathbb{Z}/p^{k+1}\mathbb{Z} \supset \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z} \supset \cdots \supset \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \supset \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}.$$

$$\begin{tikzcd}
 & & & \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]/\mathbb{Z} \arrow[ddd, bend left, hook, "i"] \\
\dots & \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z} \arrow[l, hook', "i"'] \arrow[urr, hook, "i"] \arrow[d, hook, "i"] & \dots \arrow[l, hook', "i"'] & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \arrow[l, hook', "i"'] \arrow[u, hook, "i"] \arrow[d, hook, "i"] \\
\dots & \mathbb{Z}[\zeta_p]/p^k\mathbb{Z}[\zeta_p] \arrow[l, hook', "i"'] \arrow[drr, hook, "i"] & \dots \arrow[l, hook', "i"'] & \mathbb{Z}[\zeta_p]/p\mathbb{Z}[\zeta_p] \arrow[l, hook', "i"'] \arrow[d, hook, "i"] \\
 & & & X_{j\infty}
\end{tikzcd}$$

Abbildung 7: Kommutierendes Diagramm der direkten Limites.

Nun ist $\bigcup_{i=0}^{\infty} \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ die kleinste additive Gruppe, die für jedes k ein Element mit Ordnung p^k besitzt. Diese Gruppe ist die Prüfer-p-Gruppe $Z(p^\infty)$ bzw. $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]/\mathbb{Z}$. Die Endomorphismengruppe von $Z(p^\infty)$ ist $\mathbb{Z}_p$, welche keine p-ten Einheitswurzeln besitzt. Die Summanden von X_∞ besitzen jedoch Einheitswurzeln. Dazu betrachten wir das kommutierende Diagramm 7; mit i sind die kanonischen Inklusionen bezeichnet und $X_{j\infty}$ ist eine Komponente von X_∞. Weil jedes Element aus X_∞ für ein N bereits in X_N enthalten ist und somit zwei Komponenten besitzt, ist auch X_∞ eine direkte Summe. Da der direkte Limes mit der Inklusion bzw. Adjunktion von ζ_p kommutiert, können wir, anstatt die Vereinigungen über die Quotienten von $\mathbb{Z}[\zeta_p]$ zu betrachten, auch die Vereinigung über Quotienten von $\mathbb{Z}$ betrachten und dann ζ_p adjungieren. $\mathbb{Q}_p(\zeta_p)$ ist eine Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$ mit Grad $p-1$. Weiterhin gilt $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}_p(\zeta_p)} \cong \mathbb{Z}_p[\zeta_p]$. Die Elemente in $\mathbb{Z}_p[\zeta_p]$ korrespondieren mit ihrer $(1-\zeta_p)$-adischen Entwicklung. (Lemma 5.6.1, [2]) Die sich ergebende additive Gruppe in unserer Situation ist $\mathbb{Z}[\zeta_p, \frac{1}{p}]/\mathbb{Z}[\zeta_p]$. Auf dieses Ergebnis kommt man auch durch die Überlegung, dass $\bigcup_{i=0}^{\infty} \mathbb{Z}[\zeta_p]/\left(1-\zeta_p\right)^i$ der kleinste $\mathbb{Z}[\zeta_p]$-Modul ist, der für beliebige i ein Element a mit $(1-\zeta_p)^i a = 0$ und $(1-\zeta_p)^{i-1} \neq 0$ besitzt. Dies ist $\mathbb{Z}[\zeta_p, 1/(1-\zeta_p)]/\mathbb{Z}[\zeta_p]$. Da $(p) = (1-\zeta_p)^{p-1}$ gilt, ist dies isomorph zu $\mathbb{Z}\left[\zeta_p, 1/p\right]/\mathbb{Z}[\zeta_p]$. Somit ergibt sich

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} \mathbb{Z}[\zeta_p]/\left(1-\zeta_p\right)^i \cong \mathbb{Z}\left[\zeta_p, \frac{1}{1-\zeta_p}\right] \Big/ \mathbb{Z}[\zeta_p] \cong \mathbb{Z}\left[\zeta_p, \frac{1}{p}\right] \Big/ \mathbb{Z}[\zeta_p].$$

Es folgt also schließlich

$$X_\infty \cong \bigoplus_{j=1}^{2} \left(\mathbb{Z}\left[\zeta_p, 1/p\right]\right)/\,\mathbb{Z}[\zeta_p]. \qquad \square$$

Seien ${}_0X$ und ${}_2X$ die eben konstruierten Untermoduln von ${}_0M$ und ${}_2M$. Wir wollen nun die Wirkung der α auf ${}_0X$ und ${}_2X$ untersuchen. In dem betrachteten Fall sind ${}_1\alpha_0$ und ${}_1\alpha_2$ Nullabbildungen. Da das Bild von ${}_0\alpha_1$ im Kern von $1 - {}_0t_0$ liegt, liegt es auch in ${}_0X$ und inbesondere in der $(1-\zeta_p)$-Torsion von ${}_0X$. Aufgrund von $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \cong {}_1M \cong \operatorname{Im} {}_0\alpha_1$ gibt es dafür modulo Isomorphie nur die Möglichkeit

$$\operatorname{Im} {}_0\alpha_1 = \left\{ i/(1-\zeta_p) \oplus 0 \middle| i \in \{0, \dots, p-1\} \right\}.$$

Dies ist auch der Kern von ${}_2\alpha_0$. Wir können uns jetzt ohne Beschränkung der Allgemeinheit eine Basis von ${}_2X$ wählen, für die die zweite Komponente von ${}_0X$ isomorph auf die zweite Komponente von ${}_2X$ abgebildet wird. Die Abbildung ${}_2\alpha_0$ wird demnach modulo Isomorphie eindeutig durch die Matrix

$${}_2\alpha_0 = \begin{pmatrix} 1-\zeta_p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

beschrieben. Aus

$${}_2\alpha_0 \cdot {}_0\alpha_2 = \begin{pmatrix} (1-\zeta_p) & 0 \\ 0 & (1-\zeta_p) \end{pmatrix}$$

folgt schließlich

$${}_0\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1-\zeta_p) \end{pmatrix}.$$

Bis auf Isomorphie ist auch die Einbettung von ${}_1M$ durch ${}_2\alpha_1$ und ${}_0\alpha_1$ in ${}_2X$ bzw. ${}_0X$ eindeutig, da das Bild bereits durch den Kern von ${}_2\alpha_0$ und ${}_0\alpha_2$ festgelegt ist. Es verbleibt die Frage, wie ${}_0M$ und ${}_2M$ zusammengesetzt sind. Betrachten wir zunächst ${}_0M/{}_0X$ und ${}_2M/{}_2X$. Da das Bild von ${}_2\alpha_1$ und ${}_0\alpha_1$ in ${}_0X$ und ${}_2X$ liegt, müssen wir uns in diesem Fall nicht mehr um ${}_1M$ kümmern. Da ${}_2\alpha_0({}_0X) = {}_2X$ und ${}_0\alpha_2({}_2X) = {}_0X$ gilt und der Kern der ${}_i\alpha_j$ in ${}_2X$ und ${}_0X$ liegt, ist ${}_0M/{}_0X \cong {}_2M/{}_2X$ mit Isomorphismen ${}_2\alpha_0$ und ${}_0\alpha_2$. Der Modul $\mathcal{M}' := {}_0X \oplus \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus {}_2X$ ist selbst ein exakter $\mathcal{R}$-Modul mit den exakten Sequenzen

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \arrow[dl, hook, "{}_0\alpha_1"'] & \\ {}_0X \arrow[rr, two heads, "{}_2\alpha_0"] & & {}_2X \arrow[ul, "{}_1\alpha_2"', "0"] \end{tikzcd} \quad \text{und} \quad \begin{tikzcd} & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \arrow[dr, hook, "{}_2\alpha_1"] & \\ {}_0X \arrow[ur, "{}_1\alpha_0", "0"'] & & {}_2X \arrow[ll, two heads, "{}_0\alpha_2"'] \end{tikzcd}.$$

Auch der Quotient $\mathcal{M}/\mathcal{M}'$ ist ein exakter Modul mit den Sequenzen

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[dl, hook, "0"', "{}_0\alpha_1"] & \\ {}_0M/{}_0X \arrow[rr, "{}_2\alpha_0", "\cong"'] & & {}_2M/{}_2X \arrow[ul, two heads, "{}_1\alpha_2"', "0"] \end{tikzcd} \quad \text{und} \quad \begin{tikzcd} & 0 \arrow[dr, hook, "{}_2\alpha_1", "0"'] & \\ {}_0M/{}_0X \arrow[ur, two heads, "{}_2\alpha_0", "0"'] & & {}_2M/{}_2X \arrow[ll, "{}_0\alpha_2"', "\cong"] \end{tikzcd},$$

die in Abschnitt 2.1 vollständig beschrieben sind. Als Zusammenfassung dieses Abschnitts können wir nun folgenden Satz formulieren.

Satz 2.21. *Sei $\mathcal{M} := {}_0M \oplus {}_1M \oplus {}_2M$ ein exakter $\mathcal{R}$-Modul mit ${}_1M \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ und* $\ker {}_0\alpha_1 = \ker {}_2\alpha_1 = 0$*. Dann sind ${}_0M$ und ${}_2M$ $\mathbb{Z}[\zeta_p]$-Moduln mit trivialer ${}_is_i$-Wirkung, in denen ${}_it_i$ mit ζ_p identifiziert werden kann. ${}_0M$ und ${}_2M$ besitzen den Untermodul*

$$X_\infty = \bigoplus_{j=1}^{2} \left(\mathbb{Z}\left[\zeta_p, 1/p\right]\right)/\,\mathbb{Z}[\zeta_p].$$

Weiterhin sind ${}_0M/X_\infty$ und ${}_2M/X_\infty$ isomorphe $\mathbb{Z}[\zeta_p, 1/p]$-Moduln. Die Elemente ${}_0\alpha_1$ und ${}_2\alpha_1$ bilden ${}_1M$ isomorph auf einen Anteil der $(1-\zeta_p)$-Torsion von X_∞ ab. Die Elemente ${}_2\alpha_0$ und ${}_0\alpha_2$ wirken auf X_∞ ohne Beschränkung der Allgemeinheit mit den Matrizen $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & (1-\zeta_p)\end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix}(1-\zeta_p) & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Auf die Quotienten von ${}_2M/X_\infty$ und ${}_0M/X_\infty$ wirkt ${}_0\alpha_2$ modulo Isomorphie als Identität und ${}_2\alpha_0$ modulo Isomorphie als Multiplikation mit $(1-\zeta_p)$.

Erfüllen umgekehrt ${}_0M$, ${}_1M$ und ${}_2M$ diese Kriterien, so induzieren sie einen exakten $\mathcal{R}$-Modul.

Wir schließen den Fall mit einem Beispiel für einen exakten $\mathcal{R}$-Modul ab:

Beispiel 2.22. *Sei $\mathcal{M} := {}_0M \oplus {}_1M \oplus {}_2M$ mit ${}_1M \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Sei*

$$\mathbb{M} := \left(\mathbb{Z}\left[\zeta_p, 1/p\right]\right)/\,\mathbb{Z}[\zeta_p].$$

Wir wählen ${}_0M \cong {}_2M \cong \mathbb{M} \oplus \mathbb{M}$ mit ${}_0\alpha_2 = \begin{pmatrix}(1-\zeta_p) & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ und ${}_2\alpha_0 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & (1-\zeta_p)\end{pmatrix}$. Weiterhin wählen wir ${}_1\alpha_0 = {}_1\alpha_2 = 0$. Das Element ${}_0\alpha_1$ ist die Einbettung von $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ in die $(1-\zeta_p)$-Torsion von $0 \oplus \mathbb{M}$ und ${}_2\alpha_1$ ist die Einbettung von $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ in die $(1-\zeta_p)$-Torsion von $\mathbb{M} \oplus 0$. ${}_is_i$ wirkt wie ${}_i1_i$ und ${}_jt_j$ wirkt wie die Multiplikation mit ζ_p. Wir erhalten folgende exakte Sequenzen:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \arrow[dl, tail, "{}_0\alpha_1"'] & \\
\mathbb{M}\oplus\mathbb{M} \arrow[rr, tail, "\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & (1-\zeta_p)\end{pmatrix}"'] & & \mathbb{M}\oplus\mathbb{M} \arrow[ul, "{}_1\alpha_2", "0"']
\end{tikzcd}
\quad \text{und} \quad
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \arrow[dr, tail, "{}_2\alpha_1"] & \\
\mathbb{M}\oplus\mathbb{M} \arrow[ur, "{}_1\alpha_0", "0"'] & & \mathbb{M}\oplus\mathbb{M}. \arrow[ll, tail, "\cdot\begin{pmatrix}(1-\zeta_p) & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}"]
\end{tikzcd}$$

2.2.5 Der Fall $\ker {}_0\alpha_1 = 0$ und $\ker {}_2\alpha_1 \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Dieser Fall ist etwas schwieriger als die beiden vorherigen Fälle, da jetzt nicht mehr je ein ${}_i\alpha_j$ der α-Paare zwischen ${}_1M$ und ${}_2M$ bzw. ${}_0M$ eine Nullabbildung ist. Wir zeigen zunächst folgendes Lemma.

Lemma 2.23. *Ist ${}_1M \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$,* $\ker {}_0\alpha_1 = 0$ *und* $\ker {}_2\alpha_1 \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \cong {}_1M$*, so sind ${}_0\alpha_1$ und ${}_0\alpha_2$ injektiv und ${}_1\alpha_0$ und ${}_2\alpha_0$ surjektiv. Weiterhin ist* $\ker {}_2\alpha_0 \cong \operatorname{coker} {}_0\alpha_2 \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$*. ${}_2\alpha_1$ und ${}_1\alpha_2$ sind Nullabbildungen.*

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \arrow[dl, tail, "{}_0\alpha_1"'] & \\
{}_0M \arrow[rr, two heads, "{}_2\alpha_0"] & & {}_2M \arrow[ul, "0"', "{}_1\alpha_2"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \arrow[dr, "{}_2\alpha_1", "0"'] & \\
{}_0M \arrow[ur, two heads, "{}_1\alpha_0"] & & {}_2M \arrow[ll, tail, "{}_0\alpha_2"]
\end{tikzcd}$$

Abbildung 8: Die exakten Sequenzen für $\ker {}_0\alpha_1 = 0$ und $\ker {}_2\alpha_1 \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \cong {}_1M$.

Beweis. Laut Annahme ist ${}_0\alpha_1$ injektiv und ${}_2\alpha_1$ eine Nullabbildung. Dann ist wegen der Exaktheit in ${}_1M$ auch ${}_1\alpha_2$ eine Nullabbildung und ${}_1\alpha_0$ surjektiv. Aus der Exaktheit der Sequenz in ${}_2M$ folgt, dass ${}_0\alpha_2$ injektiv und ${}_2\alpha_0$ surjektiv ist. Aus der Exaktheit in ${}_0M$ folgt schließlich $\ker {}_2\alpha_0 \cong \operatorname{coker} {}_0\alpha_2 \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. □

Erneut hegen wir die Hoffnung, mit ${}_0M$ und ${}_2M$ als Moduln über $\mathbb{Z}[\zeta_p]$ arbeiten zu können. Jedoch ist $N({}_0t_0)({}_0M)$ nicht trivial. Dennoch sind wir in der Lage, folgendes Lemma zu formulieren:

Lemma 2.24. *Ist* ${}_1M \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $\ker {}_0\alpha_1 = 0$ *und* $\ker {}_2\alpha_1 \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \cong {}_1M$ *wie beschrieben, so gilt* $N({}_2t_2) = 0$. *Ferner wirken* ${}_1s_1$ *und* ${}_2s_2$ *trivial und der das Bild von* $N({}_0t_0)$ *ist isomorph zu* $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ *und gleich dem Bild von* ${}_0\alpha_1$.

Beweis. Aus $0 = {}_2\alpha_1 \cdot {}_1\alpha_2 = {}_1\alpha_2 \cdot {}_2\alpha_1$ folgt mit den Relationen 4 und 5 die Identität ${}_11_1 = {}_1s_1$ und ${}_21_2 = {}_2s_2$. Die Elemente ${}_1s_1$ und ${}_2s_2$ wirken also trivial. Mit Relation 6 folgt $p = N({}_2s_2) + N({}_2t_2) = p + N({}_2t_2)$, also $N({}_2t_2) = 0$. Es verbleibt schließlich, den Kokern von $N({}_0t_0)$ zu bestimmen. Mit Lemma 3 gilt $N({}_0t_0) = {}_0\alpha_1 \cdot {}_1\alpha_0$. Da ${}_0\alpha_1$ aufgrund von Lemma 2.23 injektiv ist, folgt $\ker N({}_0t_0) = \ker {}_1\alpha_0$ und mit $\operatorname{Im} {}_1\alpha_0 \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ schließlich $\operatorname{Im} N({}_0t_0) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. □

Also können wir ${}_2M$ – im Gegensatz zu ${}_0M$ – als Modul über dem Dedekindring $\mathbb{Z}[\zeta_p]$ auffassen. Es ist jedoch „nur" das zu $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ isomorphe Bild von $N({}_0t_0)$, der uns daran hindert, auch ${}_0M$ als $\mathbb{Z}[\zeta_p]$-Modul zu betrachten. Ignorieren wir ihn zunächst und betrachten nur ${}_0M' := \ker N({}_0t_0) = \ker {}_1\alpha_0 = \operatorname{Im} {}_0\alpha_2$, so haben wir erneut zwei $\mathbb{Z}[\zeta_p]$-Moduln. Wir finden uns an dieser Stelle mit zwei verschiedenen und unterschiedlich komplizierten Fällen konfrontiert: Da das Bild von ${}_1M$ unter ${}_0\alpha_1$ isomorph zu $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ist, liegt es entweder in ${}_0M'$ oder hat trivialen Schnitt. Es zeigt sich jedoch, dass der Fall mit trivialem Schnitt unter den Bedingungen dieses Falls gar nicht möglich ist.

Lemma 2.25. *Sei* $\mathcal{M} := {}_0M \oplus {}_1M \oplus {}_2M$ *ein exakter* $\mathcal{R}$*-Modul. Ist* ${}_1M \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $\ker {}_0\alpha_1 = 0$ *und* $\ker {}_2\alpha_1 \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \cong {}_1M$, *so gilt* $\operatorname{Im} {}_0\alpha_1 \subset \operatorname{Im} {}_0\alpha_2$.

Beweis. Angenommen, das Bild von ${}_1M$ unter ${}_0\alpha_1$ liegt nicht im Bild von ${}_2M$ unter ${}_0\alpha_2$. Dann liegt $\operatorname{Im} {}_0\alpha_1$ auch nicht im Kern von ${}_1\alpha_0$ und $p \equiv N({}_1s_1) \equiv {}_1\alpha_0 \cdot {}_0\alpha_1$ ist injektiv. Aber aufgrund von Lemma 2.6 gilt $p \equiv N({}_1s_1) \equiv {}_1\alpha_0 \cdot {}_0\alpha_1 \not\equiv 0 \mod p$. Dies ist ein Widerspruch. Es folgt also $\operatorname{Im} {}_0\alpha_1 \subset \operatorname{Im} {}_0\alpha_2$. □

Auch wenn ${}_0\alpha_2$ eingeschränkt auf ${}_0M'$ ein Isomorphismus ist, ist ${}_2\alpha_0$ eingeschränkt auf ${}_0M'$ weder injektiv noch surjektiv. Es besitzt einen zu $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ isomorphen Kern und ein zu $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ isomorpher Kokern. Indem wir mithilfe von ${}_0\alpha_2$ ${}_0M'$ und ${}_2M$ identifizieren, können wir ${}_2\alpha_0$ als Wirkung von $(1-\zeta_p)$ betrachten. Analog zu den beiden vorherigen Fällen konstruieren wir in ${}_0M'$ die Objekte

$$X_\infty := \bigcup_{i=0}^{\infty} \ker(1-\zeta_p)^i,$$

$$I_\infty := \bigcap_{i=0}^{\infty} \operatorname{Im}(1-\zeta_p)^i$$

und schließlich

$$J_\infty := {}_0M'/I_\infty = {}_0M'/\left(\bigcap_{i=0}^{\infty} \operatorname{Im}(1-\zeta_p)^i\right).$$

Nun kann es passieren, dass der Kokern und der Kern von $(1-\zeta_p)$ „zusammenpassen“. Dann werden die Strukturen X_∞ und J_∞ überschaubar. Passen sie jedoch nicht zusammen, ergibt sich eine Situation, die eine Kombination der beiden vorherigen Fälle darstellt.

Wir machen also eine Fallunterscheidung und nehmen zunächst an, dass $\ker(1-\zeta_p)$ nicht in I_∞ enthalten ist.

Lemma 2.26. *Sei $\mathcal{M} := {}_0M \oplus {}_1M \oplus {}_2M$ ein exakter $\mathcal{R}$-Modul. Weiterhin sei ${}_1M \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $\ker {}_0\alpha_1 = 0$, $\ker {}_2\alpha_1 \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \cong {}_1M$ und seien X_∞, ${}_0M'$, I_∞ und J_∞ wie oben definiert. Ist $\ker(1-\zeta_p) \subset {}_0M'$ nicht in I_∞ enthalten, so sind X_∞ und J_∞ endlich.*

Beweis. Betrachte das kleinste i, für das $\ker(1-\zeta_p)$ nicht mehr in $\operatorname{Im}(1-\zeta_p)^i$ enthalten ist. Dies muss existieren, da $\ker(1-\zeta_p)$ nicht in I_∞ enthalten ist. Das heißt aber, dass wiederholtes Anwenden von $(1-\zeta_p)$ auf $I_i := \operatorname{Im}(1-\zeta_p)^i$ injektiv ist. Also gilt auch für alle $j > i$ die Identität ‚$\ker(1-\zeta_p)^j = \ker(1-\zeta_p)^i$‘. Da aber $\ker(1-\zeta_p) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ endlich ist, ist auch $\ker(1-\zeta_p)^i$ und damit X_∞ endlich. Betrachte nun $(\operatorname{Im}(1-\zeta_p)^{i-1}) / (\operatorname{Im}(1-\zeta_p)^i)$. Dies kann nicht trivial sein, da dann bereits $i-1$ die Voraussetzung für i erfüllt hätte. Andererseits ist der Kokern von $(1-\zeta_p)$ isomorph zu $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, weshalb $(\operatorname{Im}(1-\zeta_p)^{i-1}) / (\operatorname{Im}(1-\zeta_p)^i) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ gilt. Dafür ist $\ker(1-\zeta_p)$ ein Repräsentantensystem. Das Bild von $\ker(1-\zeta_p)$ unter $1-\zeta_p$ ist jedoch trivial. Somit gilt $(\operatorname{Im}(1-\zeta_p)^{i+1}) = (\operatorname{Im}(1-\zeta_p)^i)$ und allgemeiner für beliebige $j \geq i$ auch $(\operatorname{Im}(1-\zeta_p)^j) = (\operatorname{Im}(1-\zeta_p)^i) = I_\infty$. Da ${}_0M'/(\operatorname{Im}(1-\zeta_p)^i)$ endlich ist, ist es J_∞ auch. Dies vervollständigt den Beweis. □

Satz 2.27. *Sei $\mathcal{M} = {}_0M \oplus {}_1M \oplus {}_2M$ ein exakter $\mathcal{R}$-Modul. Sei $\ker {}_0\alpha_1 = 0$ und $\ker {}_2\alpha_1 \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \cong {}_1M$. Ist weiterhin $\ker(1-{}_2t_2)$ nicht in ${}_2I_\infty$ enthalten, so ist $\mathcal{M}$ die direkte Summe eines $\mathcal{R}$-Moduls, der die Bedingungen aus Abschnitt 2.1 erfüllt, und eines $\mathcal{R}$-Moduls der Form*

$$\mathcal{M}_2 = X \oplus \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}[\zeta_p]/\left(1-\zeta_p\right)^i \mathbb{Z}[\zeta_p],$$

wobei X den Untermodul $Y := \mathbb{Z}[\zeta_p]/\left(1-\zeta_p\right)^i \mathbb{Z}[\zeta_p]$ mit $X/Y \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ und $(1-t)X \cong Y$ besitzt. Das Element ${}_0\alpha_2$ ist die Einbettung von ${}_2M$ in Y, ${}_2\alpha_0$ ist die Multiplikation mit $(1-t)$, da $(1-t)\,{}_0M \cong {}_2M$ gilt. Das Element ${}_1\alpha_0$ ist die Projektion auf ${}_0M/(1-t){}_0M$ und ${}_0\alpha_1$ ist die Multiplikation mit $N(t)$ und anschließende Einbettung in $N(t){}_0M \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Beweis. In diesem Fall ist sogar der Schnitt von X_∞ und I_∞ trivial. Aus Kardinalitätsgründen folgt dann, dass $J_\infty = \{x + I_\infty | x \in X_\infty\}$ gilt. Der Untermodul I_∞ genügt den Bedingungen aus Abschnitt 2.1 und $X_\infty \cong \mathbb{Z}[\zeta_p]/\left(1-\zeta_p\right)^i$ für ein $i \in \mathbb{N}$. Es ergibt sich eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to I_\infty \rightarrowtail {}_2M \twoheadrightarrow J_\infty \to 0.$$

Die Abbildung $\left(1-\zeta_p\right)^i : {}_2M \to I_\infty$ hat den Kern X_∞ und projiziert ${}_2M$ auf I_∞. □

Nach dem Splitting-Lemma ist dann ${}_0M' \cong {}_2M = I_\infty \oplus J_\infty \cong I_\infty \oplus \mathbb{Z}[\zeta_p]/\left(1-\zeta_p\right)^i$. Es ist jedoch nicht klar, ob es möglich ist, ein ${}_0M$ so zu konstruieren, dass es ${}_0M'$ wie beschrieben enthält und dass $\mathcal{M}$ die Bedingungen an einen exakten $\mathcal{R}$-Modul erfüllt.Es verbleibt der Fall, dass $\ker(1-\zeta_p)$ in I_∞ enthalten ist. Dann ist auch X_∞ in I_∞ enthalten, da es für beliebige i Elemente a geben muss, sodass $0 \neq \left(1-\zeta_p\right)^i \cdot a \in \ker(1-\zeta_p)$ gilt. Schränken wir ${}_2\alpha_0$ auf I_∞ ein, so ist die Abbildung aufgrund der Definition von I_∞ surjektiv und hat einen zu $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ isomorphen Kern, der in I_∞ liegt. Analog zu den Betrachtungen aus 2.2.4 erhalten wir

$$X_\infty \cong \left(\mathbb{Z}\left[\zeta_p, 1/p\right]\right)/\,\mathbb{Z}[\zeta_p] \cong \mathbb{K}/\mathcal{O}_\mathbb{K}.$$

Wir teilen nun X_∞ aus I_∞ bzw. aus ${}_0M'$ heraus und erhalten $I'_\infty = I_\infty/X_\infty$ bzw. ${}_0M'' = {}_0M'/X_\infty$ sowie $J'_\infty := {}_0M'/I_\infty$ und $J_\infty := {}_0M/I_\infty$. Da das Urbild von X_∞ gerade X_∞ war, ist $(1-\zeta_p)$ auf I'_∞ ein Automorphismus. Weil wir den Kern herausgeteilt haben, ist die Multiplikation mit $(1-\zeta_p)$ auf ${}_0M''$ injektiv geworden. Der Kokern von $(1-\zeta_p)$ ist jedoch immer noch isomorph zu $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Analog zum Abschnitt 2.2.2 folgt, dass J'_∞ ein $\mathbb{Z}[\zeta_p]$-Untermodul von $\mathbb{Z}_p[\zeta_p]$ ist, der mindestens eine nicht durch $(1-\zeta_p)$ teilbare Zahl enthält und für das $J_\infty/(1-\zeta_p)J_\infty \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ gilt.[1] Da die Multiplikation mit $N({}_0t_0)\,{}_0M$ auf den Kern von $(1-{}_0t_0)$ abbildet, der in I_∞ enthalten ist, ist nicht nur J_∞, sondern auch J'_∞ ein $\mathbb{Z}[\zeta_p]$-Modul. I'_∞ wird wiederum durch Abschnitt 2.1 beschrieben. Die Abbildung ${}_1\alpha_0$ ist dabei die Projektion auf den J_∞-Anteil von ${}_0M$ und die anschließende Projektion auf $J_\infty\,/\left(1-\zeta_p\right)J_\infty$. Die sich ergebende Situation unter der Voraussetzung ${}_1\alpha_2 = 0$ und ${}_2\alpha_1 = 0$ stellt sich also als eine Kombination der Möglichkeiten der beiden vorher untersuchten Fälle dar. Ob tatsächlich ein Beispiel für diesen Fall existiert, ist nicht ohne Weiteres klar.

2.2.6 Der Fall $\ker {}_2\alpha_1 = 0$ und $\ker {}_0\alpha_1 \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

In gewisser Weise ist dieser Fall symmetrisch zu dem vorherigen Fall, werden ${}_2M$ und ${}_0M$ vertauscht. Da sich ${}_0M$ und ${}_2M$ jedoch nur ähnlich, aber nicht gleich verhalten, ergibt sich eine leicht veränderte Situation. Dennoch versuchen wir zunächst, mithilfe der Exaktheit Aussagen über die ${}_i\alpha_j$ abzuleiten.

[1] Jedes nicht triviale Untermodul ist isomorph zu einem Untermodul mit einer nicht durch $(1-\zeta_p)$ teilbaren Zahl. Existiert eine solche Zahl, existieren sofort $p-1$ solcher Zahlen; das sind alle nicht durch $(1-\zeta_p)$ teilbaren Zahlen in $\mathbb{Z}_p[\zeta_p]$.

$$
\begin{tikzcd}
& \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \arrow[dl, "0"', "{}_0\alpha_1"] & \\
{}_0M \arrow[rr, tail, "{}_2\alpha_0"] & & {}_2M \arrow[ul, two heads, "{}_1\alpha_2"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \arrow[dr, tail, "{}_2\alpha_1"] & \\
{}_0M \arrow[ur, "{}_1\alpha_0", "0"'] & & {}_2M \arrow[ll, two heads, "{}_0\alpha_2"]
\end{tikzcd}
$$

Abbildung 9: Die exakten Sequenzen für $\ker {}_2\alpha_1 = 0$ und $\ker {}_0\alpha_1 \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \cong {}_1M$.

Lemma 2.28. *Ist ${}_1M \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $\ker {}_2\alpha_1 = 0$ und $\ker {}_0\alpha_1 \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \cong {}_1M$, so sind ${}_2\alpha_1$ und ${}_2\alpha_0$ injektiv und ${}_1\alpha_2$ und ${}_0\alpha_2$ surjektiv. Weiterhin ist $\ker {}_0\alpha_2 \cong \operatorname{coker} {}_2\alpha_0 \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Die Abbildungen ${}_0\alpha_1$ und ${}_1\alpha_0$ sind Nullabbildungen.*

Beweis. Aus der Exaktheit der Sequenz an der Stelle ${}_1M$ folgt, dass ${}_1\alpha_0$ eine Nullabbildung ist und dass ${}_1\alpha_2$ surjektiv ist. Die Exaktheit in ${}_0M$ liefert die Injektivität von ${}_2\alpha_0$ und die Surjektivität von ${}_0\alpha_2$. Schließlich liefert die Exaktheit in ${}_2M$ mit der Injektivität von ${}_2\alpha_1$ und der Surjektivität von ${}_1\alpha_2$ die verbleibende Aussage $\ker {}_0\alpha_2 \cong \operatorname{coker} {}_2\alpha_0 \cong {}_1M \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. □

An dieser Stelle können wir Lemma 2.6 benutzen und ${}_1s_1 = {}_11_1$ anwenden. In einem Versuch, das Vorgehen der vorherigen drei Fälle zu wiederholen, machen wir folgende Beobachtung.

Lemma 2.29. *Ist ${}_1M \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ und $\ker {}_2\alpha_1 = 0$ und $\ker {}_0\alpha_1 \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \cong {}_1M$, so gilt $N({}_0t_0) = 0$ und $\operatorname{coker}({}_21_2 - {}_2s_2) = {}_2M/\operatorname{Im} {}_2\alpha_0 \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Weiterhin gilt $({}_21_2 - {}_2s_2)^2 = 0$.*

Beweis. Aus Lemma 3 folgt, dass $N({}_1s_1) = N({}_0t_0) = 0$ gilt. Wegen Lemma 2.28 gilt $\operatorname{coker} {}_2\alpha_0 \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Auch aus Lemma 2.28 und aus Relation 5 folgt, dass ${}_21_2 - {}_2s_2 = {}_2\alpha_1 \cdot {}_1\alpha_2$ den Kokern $\operatorname{coker} {}_1\alpha_2 \cong \operatorname{coker} {}_2\alpha_0 \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ besitzt. Wegen ${}_1s_1 = {}_11_1$ und der Relationen 4 und 5 gilt $({}_21_2 - {}_2s_2)^2 = {}_2\alpha_1 \cdot (1 - {}_1s_1) \cdot {}_1\alpha_2 = 0$. Dies vervollständigt den Beweis. □

Wir können ${}_0M$ also als Modul über dem Dedekindring $\mathbb{Z}[\zeta_p]$ betrachten. Bezeichnen wir mit ${}_2M'$ das Bild von ${}_2\alpha_0$. Dann ist wegen Relation 10 ${}_2s_2 = {}_21_2$ auf ${}_2M'$ und nach Relation 6 auch $N({}_2t_2) = p - p = 0$ auf ${}_2M'$. Also ist ${}_2M'$ ein $\mathbb{Z}[\zeta_p]$-Modul. Die Abbildung ${}_2\alpha_0 : {}_0M \to {}_2M'$ ist jetzt ein Isomorphismus. Da mit Relation 4 ${}_1\alpha_2 \cdot {}_2\alpha_1 = {}_11_1 - {}_1s_1 = 0$ gilt, ist das Bild von ${}_2\alpha_1$ und damit der Kern von ${}_0\alpha_2$ im Kern von ${}_1\alpha_2$ und damit in ${}_2M'$ enthalten. ${}_0\alpha_2|_{{}_2M'}{}_2M' \to {}_0M$ ist somit weder injektiv noch surjektiv und hat Kern und Kokern isomorph zu $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Diese Situation zwischen ${}_0M$ und ${}_2M'$ ist äquivalent zur Situation zwischen ${}_2M$ und ${}_0M'$ im vorherigen Fall. Unterschiede ergeben sich erst, wenn wir ${}_2M'$ in ${}_2M$ einbetten. Für die weiteren Untersuchungen benötigen wir folgendes Lemma.

Lemma 2.30. *Ist $p \neq 2$ unter den erwähnten Voraussetzungen, so gilt $N({}_2t_2){}_2M = 0$.*

Beweis. Da ${}_21_2 - {}_2s_2 = {}_2\alpha_1 \cdot {}_1\alpha_2$ auf ${}_2M'$ abbildet und ${}_2s_2$ auf ${}_2M'$ trivial ist, ist ${}_2s_2^k - {}_2s_2^{k+1} = {}_2s_2^k \cdot ({}_21_2 - {}_2s_2) = ({}_21_2 - {}_2s_2)$. Also folgt

$$N({}_2s_2) = p \cdot {}_21_2 + \frac{p \cdot (p+1)}{2}({}_21_2 - {}_2s_2).$$

Aus Relation 6 folgt dann $N({}_2t_2) = -\frac{p\cdot(p+1)}{2}({}_21_2 - {}_2s_2)$. Da ${}_2M/{}_2M' \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, bildet die Multiplikation mit p nach M' ab. Für $p \neq 2$ ist $\frac{p\cdot(p+1)}{2}$ durch p teilbar und $({}_21_2 - {}_2s_2)$ auf ${}_2M'$ 0, woraus $N({}_2t_2) = 0$ folgt. □

Somit ist ganz ${}_2M$ ein $\mathbb{Z}[\zeta_p]$-Modul, wenn wir ${}_2t_2$ mit ζ_p identifizieren. Rufen wir uns die Konstruktion von J_∞, X_∞ und I_∞ ins Gedächtnis, die wir im vorherigen Abschnitt in ${}_0M$ gemacht haben und bezeichnen in ${}_2M$ und automatisch auch in ${}_2M'$

$$ {}_2X_\infty := \bigcup_{i=0}^{\infty} \ker (1-t)^i $$

und

$$ {}_2I_\infty := \bigcap_{i=0}^{\infty} \operatorname{Im} (1-t)^i . $$

Weiterhin führen wir ${}_2J'_\infty := {}_2M'/{}_2I_\infty$ und ${}_2J_\infty := {}_2M/{}_2I_\infty$ ein. Es ergeben sich wieder zwei Fälle. Ist $\ker (1-t)$ nicht in ${}_2I_\infty$ enthalten, so ist X_∞ endlich und wir können folgenden Satz formulieren.

Satz 2.31. *Sei $\mathcal{M} := {}_0M \oplus {}_1M \oplus {}_2M$ ein exakter $\mathcal{R}$-Modul mit ${}_1M \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Sei* $\ker {}_2\alpha_1 = 0$ *und* $\ker {}_0\alpha_1 \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \cong {}_1M$. *Ist weiterhin* $\ker(1 - {}_2t_2)$ *nicht in* ${}_2I_\infty$ *enthalten, so ist $\mathcal{M}$ die direkte Summe eines $\mathcal{R}$-Moduls, der die Bedingungen aus Abschnitt* 2.1 *erfüllt, und eines $\mathcal{R}$-Moduls der Form*

$$ \mathcal{M}_2 \cong \mathbb{Z}[\zeta_p]/\left(1-\zeta_p\right)^i \oplus \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}[\zeta_p]/\left(1-\zeta_p\right)^{i+1} . $$

Die Abbildung ${}_2\alpha_0$ ist die Einbettung von ${}_0M$ in $(1-\zeta_p){}_2M$, ${}_0\alpha_2$ ist die kanonische Projektion auf ${}_0M$. Die Abbildung ${}_1\alpha_2$ wird durch die Projektion auf ${}_2M/(1-\zeta_p){}_2M$ dargestellt und ${}_2\alpha_1$ ist die Einbettung in $\left(1-\zeta_p\right)^i {}_2M$. Die Multiplikation mit ${}_it_i$ entspricht der Multiplikation mit ζ_p und ${}_21_2 - {}_2s_2$ entspricht in ${}_2M$ der Multiplikation mit $(1-\zeta_p)^i\zeta_p^j$ mit beliebigem $j \in \mathbb{N}$.

Beweis. Dieser Beweis erfolgt analog zum Beweis von Satz 2.27. □

Ist $\ker (1-t)$ in ${}_2M$ jedoch in ${}_2I_\infty$ enthalten, sind die entstehenden Strukturen nicht mehr endlich. Wir erhalten erneut, dass

$$ {}_2X_\infty \cong \left(\mathbb{Z}\left[\zeta_p, 1/p\right]\right)/\mathbb{Z}[\zeta_p] \cong \mathbb{K}/\mathcal{O}_\mathbb{K} $$

ist und ${}_2I_\infty/{}_2X_\infty$ den Bedingungen aus dem Fall ${}_1M = 0$ genügt. Sowohl ${}_2J'_\infty$ als auch ${}_2J_\infty$ sind $\mathbb{Z}[\zeta_p]$-Untermoduln von $\mathbb{Z}_p[\zeta_p]$, die ${}_2J_\infty/(1-\zeta_p)J_\infty \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ erfüllen. Es folgt ein Beispiel eines exakten $\mathcal{R}$-Moduls, das diesem Fall entspricht.

Beispiel 2.32. *Sei $\mathcal{M} := {}_0M \oplus {}_1M \oplus {}_2M$ mit ${}_1M \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Sei $\mathbb{M} := \mathbb{Z}[\zeta_p, 1/p]/\mathbb{Z}[\zeta_p]$. Wir wählen ${}_0M \cong {}_2M \cong \mathbb{M} \oplus \mathbb{Z}[\zeta_p]$. Dann ist*

$$ {}_0\alpha_2 = \begin{pmatrix} (1-\zeta_p) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } {}_2\alpha_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1-\zeta_p) \end{pmatrix} . $$

Die Abbildungen ${}_0\alpha_1$ und ${}_1\alpha_0$ sind Nullabbildungen. Die Abbildung ${}_1\alpha_2$ ist die Projektion des $\mathbb{Z}[\zeta_p]$-Anteils von ${}_2M$ auf $\mathbb{Z}[\zeta_p]/(1-\zeta_p)\mathbb{Z}[\zeta_p] \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ und ${}_2\alpha_1$ ist die Einbettung von ${}_1M$ in die $(1-\zeta_p)$-Torsion des $\mathbb{M}$-Anteils von ${}_2M$. Die Ringelemente ${}_it_i$ sind die Multiplikation mit ζ_p. Das Element ${}_1s_1$ ist die Identität, jedoch ist ${}_21_2 - {}_2s_2$ die Projektion des $\mathbb{Z}[\zeta_p]$-Anteils von ${}_2M$ auf $\mathbb{Z}[\zeta_p]/(1-\zeta_p)\mathbb{Z}[\zeta_p] \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ und die anschließende Einbettung in die $(1-\zeta_p)$-Torsion des $\mathbb{M}$-Anteils von ${}_2M$. Es ergibt sich folgendes Bild:

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \arrow[dl, "0"', "{}_0\alpha_1"] & \\
\mathbb{M}\oplus\mathbb{Z}[\zeta_p] \arrow[rr, tail, "\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & (1-\zeta_p)\end{pmatrix}"'] & & \mathbb{M}\oplus\mathbb{Z}[\zeta_p] \arrow[ul, two heads, "{}_1\alpha_2"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \arrow[dr, tail, "{}_2\alpha_1"] & \\
\mathbb{M}\oplus\mathbb{Z}[\zeta_p] \arrow[ur, "{}_1\alpha_0", "0"'] & & \mathbb{M}\oplus\mathbb{Z}[\zeta_p] \arrow[ll, two heads, "\cdot\begin{pmatrix}(1-\zeta_p) & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}"]
\end{tikzcd}
$$

2.3 Der Fall ${}_1M \cong \mathbb{Z}$

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Z} \arrow[dl, tail, "{}_0\alpha_1"'] & \\
{}_0M \arrow[rr, two heads, "{}_2\alpha_0"] & & {}_2M \arrow[ul, "{}_1\alpha_2"', "0"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Z} \arrow[dr, "{}_2\alpha_1", "0"'] & \\
{}_0M \arrow[ur, two heads, "{}_1\alpha_0"] & & {}_2M \arrow[ll, tail, "{}_0\alpha_2"]
\end{tikzcd}
$$

Abbildung 10: Die exakten Sequenzen für ${}_1M \cong \mathbb{Z}$ im Fall ${}_1\alpha_0$ surjektiv.

Wir wollen uns auf den Fall $p > 2$ beschränken, da sich der Fall $p = 2$ wesentlich von den restlichen Fällen unterscheidet. Ist ${}_1M \cong \mathbb{Z}$, können wir die Unverträglichkeit der Charakteristik p von $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ mit der Charakteristik 0 des Quotientenkörpers von $\mathbb{Z}$ ausnutzen, um Einschränkungen an den Modul zu formulieren.

Lemma 2.33. *Sei $\mathcal{M} = {}_0M \oplus {}_1M \oplus {}_2M$ ein exakter $\mathcal{R}$-Modul mit ${}_1M \cong \mathbb{Z}$ und $p \neq 2$. Dann ist die $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-Wirkung auf ${}_1M$ trivial.*

Beweis. Betrachten wir die Gruppenwirkung von $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ auf ${}_1M$, die durch einen Homomorphismus $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathrm{End}(\mathbb{Z})$ beschrieben wird. Die Endomorphismen von $\mathbb{Z}$ als abelsche Gruppe sind jedoch genau die Multiplikationen mit einem $a \in \mathbb{Z}$. Nur die Multiplikation mit einer der beiden Einheiten 1 bzw. -1 ist ein Automorphismus, jedoch hat -1 die Ordnung 2, was nicht mit der ungeraden Primzahlordnung $p > 2$ der Gruppenelemente von $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ verträglich ist. Somit wirkt die Gruppe trivial auf ${}_1M$ und es gilt ${}_1s_1 = {}_11_1$. $\square$

Dies ist eine große Einschränkung an $\mathcal{M}$. Es wird jedoch auch deutlich, warum es attraktiv war, $p = 2$ auszuschließen: Die Multiplikation mit -1 kann als Gruppenwirkung von $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{Z}$ auftreten. Wir betrachten nun die ${}_i\alpha_j$ in diesem Fall.

Lemma 2.34. *Sei $\mathcal{M} = {}_0M \oplus {}_1M \oplus {}_2M$ ein exakter $\mathcal{R}$-Modul mit ${}_1M \cong \mathbb{Z}$ und $p \neq 2$. Dann ist ${}_0\alpha_1$ injektiv, ${}_2\alpha_0$ surjektiv, ${}_1\alpha_2$ eine Nullabbildung und* $\ker {}_2\alpha_0 \cong \mathbb{Z}$*. Weiterhin gilt ${}_2s_2 = {}_21_2$ und $N({}_2t_2) = 0$.*

Beweis. Es folgt mit dem gerade bewiesenen Lemma 2.33 und Relation 3, dass ${}_1\alpha_0 \cdot {}_0\alpha_1 = N({}_1s_1) = p \cdot {}_11_1$ gilt. Insbesondere ist das Bild von ${}_0\alpha_1$ unendlich. Also ist ${}_0\alpha_1$ injektiv, da sonst das Bild isomorph zu $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$ mit Ordnung a wäre. Aus $\ker {}_0\alpha_1 = 0$ und der Exaktheit der Sequenz folgt $\operatorname{Im} {}_1\alpha_2 = 0$, also $\ker {}_1\alpha_2 = {}_2M$. Dementsprechend ist ${}_2\alpha_0$ surjektiv mit einem zu $\mathbb{Z}$ isomorphen Kern. Aus Relation 5 und ${}_1\alpha_2 = 0$ folgt, dass ${}_2s_2 = {}_21_2$ gilt. Mit Relation 6 erhalten wir schließlich $N({}_2t_2) = p \cdot {}_21_2 - N({}_2s_2) = 0$. $\square$

Der letzte Teil des Lemmas ist deshalb für uns von Nutzen, weil wir mit seiner Hilfe analog zu den vorherigen Fällen ${}_2M$ als $\mathbb{Z}[\zeta_p]$-Modul betrachten können. Dieser Trick funktioniert jedoch nicht für ${}_0M$, da aus Relation 3 die Identität $N({}_0t_0) = {}_0\alpha_1 \cdot {}_1\alpha_0$ folgt. Dies kann nicht die Nullabbildung sein, da dann $0 \neq p^2 \cdot {}_11_1 = ({}_1\alpha_0 \cdot {}_0\alpha_1)^2 = {}_1\alpha_0 \cdot ({}_0\alpha_1 \cdot {}_1\alpha_0) \cdot {}_0\alpha_1 = 0$ gelten würde.

Wir sind nun gezwungen, eine weitere Fallunterscheidung zu machen: Wegen $p\mathbb{Z} = \operatorname{Im}({}_1\alpha_0 \cdot {}_0\alpha_1) \subset \operatorname{Im}({}_1\alpha_0) \subset {}_1M \cong \mathbb{Z}$ verbleiben für das Bild von ${}_1\alpha_0$ zwei Fälle.

2.3.1 Der Fall ${}_1M \cong \mathbb{Z}$ mit surjektivem ${}_1\alpha_0$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[dl, "0"', "{}_0\alpha_1"] & \\
I_\infty \arrow[rr, "{}_2\alpha_0", "\cong"'] & & I_\infty \arrow[ul, "{}_1\alpha_2"', "0"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[dr, "{}_2\alpha_1", "0"'] & \\
I_\infty \arrow[ur, "{}_1\alpha_0", "0"'] & & I_\infty \arrow[ll, "{}_0\alpha_2"', "\cong"]
\end{tikzcd}$$

Abbildung 11: Die exakten Sequenzen für I_∞ im Fall ${}_1M \cong \mathbb{Z}$ mit surjektivem ${}_1\alpha_0$.

Betrachten wir zunächst den Fall, dass ${}_1\alpha_0$ surjektiv ist. Dann ist ${}_2\alpha_1$ eine Nullabbildung. Es ergeben sich die kurzen exakten Sequenzen

$$0 \underset{{}_2\alpha_1}{\overset{0}{\rightleftarrows}} \mathbb{Z} \underset{{}_1\alpha_0}{\overset{{}_0\alpha_1}{\rightleftarrows}} {}_0M \underset{{}_0\alpha_2}{\overset{{}_2\alpha_0}{\rightleftarrows}} {}_2M \underset{0}{\overset{{}_1\alpha_2}{\rightleftarrows}} 0.$$

Leider kann das Splitting-Lemma nicht angewendet werden, da ${}_1\alpha_0 \cdot {}_0\alpha_1$ kein Isomorphismus ist. Stattdessen versuchen wir, einen Teil von ${}_0M$ zu finden, der fast so groß wie ${}_0M$ ist, auf dem ${}_0\alpha_2$ und ${}_2\alpha_0$ aber „schönere“ Abbildungen sind. Unsere Wahl fällt dabei auf ${}_0M' := \operatorname{Im} {}_0\alpha_2 = \ker {}_1\alpha_0$.

Lemma 2.35. *Sei $\mathcal{M} = {}_0M \oplus {}_1M \oplus {}_2M$ ein exakter $\mathcal{R}$-Modul mit ${}_1M \cong \mathbb{Z}$ und $p \neq 2$ sowie surjektivem ${}_1\alpha_0$. Ferner sei ${}_0M' \subset {}_0M$ der Kern von ${}_1\alpha_0$. Dann ist ${}_0\alpha_2 : {}_2M \to {}_0M'$ ein Isomorphismus. Identifizieren wir ${}_0t_0 \in {}_0\mathcal{R}_0$ mit $\zeta_p \in \mathbb{Z}[\zeta_p]$, dann ist die Abbildung $(1-\zeta_p) : {}_0M' \to {}_0M', x \mapsto (1-\zeta_p)\,x$ injektiv mit einem zu $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ isomorphen Kokern.*

Beweis. Da ${}_0\alpha_2$ surjektiv und wegen der Exaktheit der Sequenz injektiv ist, ist ${}_0\alpha_2 : {}_2M \to {}_0M'$ ein Isomorphismus. Wir benutzen ${}_1\alpha_0 \cdot {}_0\alpha_1 = p \cdot {}_11_1$. Da das Bild von ${}_0\alpha_1$ und damit der Kern von ${}_2\alpha_0$ trivialen Schnitt mit dem Kern von ${}_1\alpha_0$ und damit mit dem Bild von ${}_0\alpha_2$ hat, wird ${}_2\alpha_0$ auf ${}_0M'$ eingeschränkt injektiv. Betrachte ${}_0M/{}_0M'$. ${}_1\alpha_0$ ist darauf ein Isomorphismus. Da ${}_1\alpha_0 \cdot {}_0\alpha_1$ kein Isomorphismus ist, ist bildet ${}_0\alpha_1$ nicht auf ganz

${}_0M/{}_0M'$ ab. Somit ist ${}_2\alpha_0 : {}_0M' \to {}_2M$ auch nicht mehr surjektiv. Da $N({}_0t_0) = 0$ auf ${}_0M'$ gilt, können wir dort ${}_0t_0 \in {}_0R$ mit $\zeta_p \in \mathbb{Z}[\zeta_p]$ identifizieren. Schließlich erhalten wir, dass die Multiplikation von ${}_0M'$ mit $(1 - \zeta_p)$ injektiv mit einem zu $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ isomorphen Kokern ist. □

Analog zum Abschnitt 2.2.2 betrachten wir in ${}_0M'$ die Objekte

$$I_j := \mathrm{Im}\,(1 - \zeta_p)^j\,,$$

$$J_j := {}_0M'/I_j$$

und schließlich

$$I_\infty := \bigcap_{i=0}^{\infty} I_i$$

sowie

$$J_\infty = {}_0M'/I_\infty.$$

Es ergibt sich auf gleiche Weise, dass $J_i \cong \mathbb{Z}[\zeta_p]/\,(1 - \zeta_p)^i$ gilt. Über eine Argumentation mit dem projektiven Limes zeigt sich erneut, dass J_∞ ein beliebiger $\mathbb{Z}[\zeta_p]$-Untermodul X der p-ten zyklotomischen Erweiterung der p-adischen Zahlen $\mathbb{Z}_p[\zeta_p]$ ist, das eine nicht durch $(1 - \zeta_p)$ teilbare Zahl enthält und die Bedingung $J_\infty/(1 - \zeta_p)J_\infty \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ erfüllt. Für I_∞ existieren zwei exakte Sequenzen so, dass alle Anforderungen I_∞ in Abschnitt 2.1 beschrieben sind. Fassen wir die Ergebnisse zusammen:

Satz 2.36. *Sei $\mathcal{M} = {}_0M \oplus {}_1M \oplus {}_2M$ ein exakter $\mathcal{R}$-Modul mit ${}_1M \cong \mathbb{Z}$ und $p \neq 2$ sowie surjektivem ${}_1\alpha_0$. Teilen wir aus ${}_2M$ und aus ${}_0M$ den in Abschnitt 2.1 beschriebenen Anteil I_∞ heraus, erhalten wir im Fall von ${}_2M$ einen beliebigen $\mathbb{Z}[\zeta_p]$-Untermodul X von $\mathbb{Z}_p[\zeta_p]$, der eine nicht durch $(1 - \zeta_p)$-teilbare Zahl enthält und die Bedingung $X/(1 - \zeta_p)X \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ erfüllt. Teilen wir sowohl ${}_0\alpha_2(I_\infty) \cong I_\infty$ und dann ${}_0\alpha_2(X) \cong X$ aus ${}_0M$ heraus, erhalten wir einen zu $\mathbb{Z}$ isomorphen Rest, der unter ${}_1\alpha_0$ vollständig auf ${}_1M$ abbildet und der das Bild $p\mathbb{Z}$ von ${}_1M$ unter ${}_0\alpha_1$ enthält.*

Wir konstruieren ein Beispiel eines exakten $\mathcal{R}$-Moduls, das den Anforderungen dieses Falls genügt.

Beispiel 2.37. *Sei $\mathcal{M} := {}_0M \oplus {}_1M \oplus {}_2M$ mit ${}_1M \cong \mathbb{Z}$. Sei ${}_0M \cong \mathbb{Z}[t]\,/(1 - t^p)\,\mathbb{Z}[t]$ und ${}_2M \cong \mathbb{Z}[\zeta_p]$. Die ${}_is_i$ wirken trivial. Die Multiplikation mit ${}_0t_0$ entspricht der Multiplikation mit t, die Multiplikation mit ${}_2t_2$ entspricht der Multiplikation mit ζ_p. Dazu sei ${}_1\alpha_0$ die Multiplikation von ${}_0M$ mit $N(t)$. Da auf dem Bild aufgrund der Faktorisierung $t^p - 1 = (t - 1)N(t)$ auch $t \cong 1$ gilt, ist das Bild isomorph zu $\mathbb{Z}$ und wir können es mit ${}_1M$ so identifizieren, dass $1 \in {}_0M$ auf $1 \in {}_1M$ abgebildet wird. Die Abbildung ${}_0\alpha_1$ bettet ${}_1M$ in $N(t){}_1M$ ein. Dann gilt ${}_0\alpha_1 \cdot {}_1\alpha_0 = N(t)$. Weil $N(t)$ auf $N(t){}_1M$ wegen $(1 - t)N(t) = 0$ als Multiplikation mit p wirkt, ist auch ${}_1\alpha_0 \cdot {}_0\alpha_1 = {}_11_1 \cdot p$. Die durch ${}_2\alpha_1$ und ${}_1\alpha_2$ beschriebenen Abbildungen sind Nullabbildungen. Das Element ${}_2\alpha_0$ ist die Projektion von ${}_0M$ auf ${}_0M/\,\mathrm{Im}({}_0\alpha_1) \cong {}_0M/N(t){}_0M \cong \mathbb{Z}[\zeta_p]$. Die Abbildung ${}_0\alpha_2$ ist die Einbettung von ${}_2M$ in $(1-t){}_0M$. Weil auf $(1-t){}_0M$ wegen $1-t^p = 0$ die Multiplikation mit $N(t)$ nach 0 abbildet, ist $(1 - t){}_0M \cong \mathbb{Z}[t]/N(t) \cong \mathbb{Z}[\zeta_p]$. Das ergibt eine exakte*

Sequenz und weiterhin gilt ${}_2\alpha_0 \cdot {}_0\alpha_2 = 1 - \zeta_p \equiv {}_21_2 - {}_2t_2$ und ${}_0\alpha_2 \cdot {}_2\alpha_0 = 1 - t \equiv {}_01_0 - {}_0t_0$. Somit haben wir tatsächlich einen exakten $\mathcal{R}$-Modul konstruiert. Es ergibt sich folgendes Bild:

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Z} \arrow[dl, tail, "\cdot N(t)"'] & \\
\mathbb{Z}[t]\,/(1-t^p)\,\mathbb{Z}[t] \arrow[rr, two heads, "{}_2\alpha_0"'] & \arrow[u, phantom, "0"] & \mathbb{Z}[\zeta_p] \arrow[ul, "{}_1\alpha_2"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Z} \arrow[dr, "{}_2\alpha_1"] & \\
\mathbb{Z}[t]\,/(1-t^p)\,\mathbb{Z}[t] \arrow[ur, two heads, "{}_1\alpha_0"] & \arrow[u, phantom, "0"] & \mathbb{Z}[\zeta_p] \arrow[ll, tail, "\cdot(1-\zeta_p)"]
\end{tikzcd}
.
$$

2.3.2 Der Fall ${}_1M \cong \mathbb{Z}$ mit nicht surjektivem ${}_1\alpha_0$

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Z} \arrow[dl, tail, "{}_0\alpha_1"'] & \\
{}_0M \arrow[rr, two heads, "{}_2\alpha_0"] & \arrow[u, phantom, "0"] & {}_2M \arrow[ul, "{}_1\alpha_2"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Z} \arrow[dr, "{}_2\alpha_1"] & \\
{}_0M \arrow[ur, "{}_1\alpha_0"] & \arrow[u, phantom, "\mathrm{Im}=p\mathbb{Z}"] & {}_2M \arrow[ll, "{}_0\alpha_2"]
\end{tikzcd}
$$

Abbildung 12: Die exakten Sequenzen für ${}_1M \cong \mathbb{Z}$ mit nicht surjektivem ${}_1\alpha_0$.

Ist andererseits ${}_1\alpha_0$ nicht surjektiv, besitzt es das Bild $p\mathbb{Z}$. Dann hat ${}_2\alpha_1$ den Kern $p\mathbb{Z}$ mit einem zu $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ isomorphen Bild. Daraus folgt, dass der Kern von ${}_0\alpha_2$ isomorph zu $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ist. Das Bild von ${}_0\alpha_1$ muss trivialen Schnitt mit dem Kern von ${}_1\alpha_0$ haben, da es injektiv auf $p\mathbb{Z} \subset {}_1M$ abgebildet wird.

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & {}_2M \arrow[r, tail, "{}_0\alpha_2"] & {}_0M \arrow[r, two heads, "p^{-1}{}_1\alpha_0"] & {}_1M \arrow[r] \arrow[l, bend left, "{}_0\alpha_1"] & 0
\end{tikzcd}
$$

Abbildung 13: Die kurze exakte Sequenz für das Splitting-Lemma.

Unser Ziel ist es erneut, in Moduln über Dedekindringen arbeiten zu können. Deshalb betrachten wir ${}_0M' = \ker {}_1\alpha_0$. Dies ist aufgrund der Exaktheit auch $\mathrm{Im}\, {}_0\alpha_2$. $p^{-1}N({}_11_1) = (p^{-1}{}_1\alpha_0)\, {}_0\alpha_1$ ist die Identität auf ${}_1M$ und wir erhalten mit dem Splitting-Lemma, dass

$$ {}_0M \cong \mathbb{Z} \oplus {}_0M' $$

sowie

$$ {}_0M' \cong {}_2M $$

gilt. Deshalb ist ${}_2\alpha_0$ auf ${}_0M'$ eingeschränkt ein Isomorphismus. Die Abbildung ${}_0\alpha_2$ eingeschränkt auf ${}_0M'$ ist per Definition surjektiv, besitzt aber noch den Kern $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \cong \mathrm{Im}\, {}_2\alpha_1$. Dann ist auch $({}_21_2 - {}_2t_2) = {}_2\alpha_0 \cdot {}_0\alpha_2$ surjektiv mit einem zu $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ isomorphen Kern. Wir identifizieren nun t mit ζ_p. Analog zu Abschnitt 2.2.4 ergibt sich, dass die Multiplikation von ${}_2M$ mit $(1-\zeta_p)$ surjektiv ist und einen zu $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ isomorphen Kern besitzt. Durch die Konstruktion von

$$ X_\infty := \bigcup_{i=0}^{\infty} \ker(1-\zeta_p)^i $$

erhalten wir analog, dass

$$ {}_2M \supset X_\infty \cong \mathbb{Z}[\zeta_p, 1/p]/\mathbb{Z}[\zeta_p] $$

gilt. Sei $\mathbb{M} := \mathbb{Z}[\zeta_p, 1/p]/\mathbb{Z}[\zeta_p]$. Damit können wir die Situation in die zwei exakten Sequenzen

$$ 0 \underset{0}{\overset{0}{\rightleftarrows}} \mathbb{Z} \underset{{}_0\alpha_1}{\overset{{}_1\alpha_0|_\mathbb{Z}}{\rightleftarrows}} {}_1M \underset{0}{\overset{{}_2\alpha_1}{\rightleftarrows}} \mathbb{M} \underset{\cong}{\overset{(1-\zeta_p)}{\rightleftarrows}} \mathbb{M} \underset{0}{\overset{0}{\rightleftarrows}} 0 $$

und

$$ 0 \underset{0}{\overset{0}{\rightleftarrows}} {}_0M/\left(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{M}\right) \underset{\cong}{\overset{\cong}{\rightleftarrows}} {}_2M/\left(\mathbb{M}\right) \underset{0}{\overset{0}{\rightleftarrows}} 0 $$

aufteilen. Es ergibt sich, dass ${}_2M/\left(\mathbb{M}\right)$ und ${}_0M/\left(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{M}\right)$ isomorph sind und im Abschnitt 2.1 beschrieben werden. Wir fassen die Ergebnisse dieses Falls zusammen.

Satz 2.38. *Sei $\mathcal{M} = {}_0M \oplus {}_1M \oplus {}_2M$ ein exakter $\mathcal{R}$-Modul mit ${}_1M \cong \mathbb{Z}$ und $p \neq 2$ sowie nicht surjektivem ${}_1\alpha_0$. Dann existiert ein zu $\mathbb{Z}[\zeta_p, 1/p]/\mathbb{Z}[\zeta_p]$ isomorpher Untermodul von ${}_2M$ und ein zu $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}[\zeta_p, 1/p]/\mathbb{Z}[\zeta_p]$ isomorpher Untermodul von ${}_0M$. Auf $\mathbb{Z}$ wirkt die Multiplikation mit ${}_0t_0$ trivial und auf $\mathbb{Z}[\zeta_p, 1/p]/\mathbb{Z}[\zeta_p]$ entspricht die Multiplikation mit ${}_it_i$ der Multiplikation mit ζ_p. ${}_2\alpha_0$ identifiziert modulo Isomorphie den $\mathbb{Z}[\zeta_p, 1/p]/\mathbb{Z}[\zeta_p]$-Anteil von ${}_0M$ mit dem $\mathbb{Z}[\zeta_p, 1/p]/\mathbb{Z}[\zeta_p]$-Anteil von ${}_2M$ und bildet $\mathbb{Z}$ auf 0 ab. ${}_0\alpha_2$ bettet den $\mathbb{Z}[\zeta_p, 1/p]/\mathbb{Z}[\zeta_p]$-Anteil von ${}_2M$ in den $\mathbb{Z}[\zeta_p, 1/p]/\mathbb{Z}[\zeta_p]$-Anteil von ${}_0M$ nach Multiplikation mit $(1 - \zeta_p)$ ein. Teilen wir aus ${}_2M$ und aus ${}_0M$ diese Anteile heraus, erhalten wir zwei isomorphe vom Fall ${}_1M = 0$ beschriebene Moduln. ${}_is_i$ wirkt trivial.*

Wir betrachten abschließend noch ein Beispiel eines $\mathcal{R}$-Moduls, das diesem Fall genügt.

Beispiel 2.39. *Sei $\mathcal{M} := {}_0M \oplus {}_1M \oplus {}_2M$ mit ${}_1M \cong \mathbb{Z}$. Definiere $\mathbb{M} := \mathbb{Z}[\zeta_p, 1/p]/\mathbb{Z}[\zeta_p]$. Wir wählen ${}_0M \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{M}$ und ${}_2M \cong \mathbb{M}$. Die Abbildung ${}_0\alpha_1$ identifiziert ${}_1M$ mit dem $\mathbb{Z}$-Anteil von ${}_0M$. Die Abbildung ${}_1\alpha_0$ bettet den $\mathbb{Z}$-Anteil von ${}_0M$ in $p\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} = {}_1M$ ein. Die Abbildung ${}_2\alpha_0$ identifiziert den $\mathbb{M}$-Anteil von ${}_0M$ mit dem $\mathbb{M}$-Anteil von ${}_2M$ und bildet den $\mathbb{Z}$-Anteil auf 0 ab. Die Abbildung ${}_0\alpha_2$ multipliziert ${}_2M$ mit $(1 - \zeta_p)$ und identifiziert das Ergebnis mit dem $\mathbb{M}$-Anteil von ${}_0M$. Die Abbildung ${}_1\alpha_2$ ist eine Nullabbildung, während ${}_2\alpha_1$ ${}_1M$ auf $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ projiziert und dann in die $(1 - \zeta_p)$-Torsion von ${}_2M$ einbettet. Das Element ${}_is_i$ entspricht ${}_i1_i$, während ${}_it_i$ auf dem $\mathbb{Z}$-Anteil die Identität und auf dem $\mathbb{M}$-Anteil die Multiplikation mit ζ_p ist. Es ergeben sich folgende exakte Sequenzen*

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Z} \arrow[dl, hook', "\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}"'] & \\
\mathbb{M} \oplus \mathbb{Z} \arrow[rr, two heads, "\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}"'] & & \mathbb{M} \arrow[ul, "0"', "{}_1\alpha_2"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Z} \arrow[dr, "{}_2\alpha_1"] & \\
\mathbb{M} \oplus \mathbb{Z} \arrow[ur, "\cdot\begin{pmatrix} 0 & p \end{pmatrix}"] & & \mathbb{M} \arrow[ll, "\cdot\begin{pmatrix} (1-\zeta_p) \\ 0 \end{pmatrix}"]
\end{tikzcd}
.
$$

Wir betrachten nun kurz den Fall $p = 2$, in dem $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ nicht trivial auf ${}_1M$ wirkt. Dann gilt ${}_1s_1 = -{}_11_1$. Da 2 eine kleine Primzahl ist, ist $N({}_1s_1)$ „überschaubarer“ und erlaubt uns Aussagen zu treffen, die wir vorher nicht treffen konnten. So gilt mit Relation 3 die Identität ${}_1\alpha_0 \cdot {}_0\alpha_1 = N({}_1s_1) = 0$. Weiterhin gilt mit Relation 4 die Identität ${}_1\alpha_2 \cdot {}_2\alpha_1 = 2 \cdot {}_11_1$, also $\mathrm{Im}\,({}_1\alpha_2 \cdot {}_2\alpha_1) = 2\mathbb{Z}$. Die Abbildung ${}_2\alpha_1$ ist also injektiv, da $\mathrm{Im}\,({}_1\alpha_2 \cdot {}_2\alpha_1)$ unendlich ist. Somit ist ${}_1\alpha_0$ die Nullabbildung. Mit Relation 3 folgt $0 = {}_0\alpha_1 \cdot {}_1\alpha_0 = N({}_0t_0) = {}_01_0 + {}_0t_0$, also $-{}_01_0 = {}_0t_0$. Da ${}_0M = \ker {}_1\alpha_0 = \mathrm{Im}\, {}_0\alpha_2$ aufgrund der Exaktheit der Sequenz gilt, ist ${}_0\alpha_2$ surjektiv. Es gehen keine Informationen verloren, wenn ${}_1M$ und ${}_0M$ nun als $\mathbb{Z}$-Moduln betrachtet werden. Dann folgt aus Relation 4, dass ${}_0\alpha_2 \cdot {}_2\alpha_0 = 2 \cdot {}_01_0$ gilt. Es folgt $\mathrm{Im}\,({}_0\alpha_2) \supset 2{}_0M$, was uns zwei Fälle offen lässt, die ähnlich wie im Fall der trivialen Wirkung behandelt werden können, wenn ${}_0M$ und ${}_2M$ vertauscht werden.

2.4 Der Fall ${}_1M \cong \bigoplus_i (\mathbb{Z}/a_i\mathbb{Z})$

Wir wollen zunächst folgendes einfaches Lemma beweisen:

Lemma 2.40. *Ist ${}_1M \equiv \mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$ mit $a \in \mathbb{N}$, $(p, a) = 1$ und trivialer $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-Wirkung, dann ist ${}_0M$ die direkte Summe aus ${}_1M$ und ${}_2M$ mit den Einbettungen ${}_0\alpha_1$ und ${}_0\alpha_2$ und den Projektionen $p^{-1} \cdot {}_1\alpha_0$ und ${}_2\alpha_0$. Weiterhin genügt ${}_2M$ den Bedingungen aus Abschnitt 2.1.*

Beweis. Da ${}_1M$ triviale $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-Wirkung hat, gilt ${}_1s_1 = {}_11_1$. Somit ist $N_p({}_1s_1) = p \cdot {}_11_1$. Wegen $(p, a) = 1$ ist $p \in (\mathbb{Z}/a\mathbb{Z})^*$. Somit ist die Multiplikation mit p ein Automorphismus von ${}_1M$. Mit Lemma 1.3 ist dann auch ${}_1\alpha_0 \cdot {}_0\alpha_1$ ein Isomorphismus, also ist insbesondere ${}_1\alpha_0$ surjektiv und ${}_0\alpha_1$ injektiv. Aus der Exaktheit der Sequenz folgt, dass ${}_1\alpha_2$ und ${}_2\alpha_1$ Nullabbildungen sind. Wir erhalten also die beiden kurzen exakten Sequenzen

$$0 \underset{0}{\overset{0}{\leftrightarrows}} {}_1M \underset{{}_0\alpha_1}{\overset{{}_1\alpha_0}{\leftrightarrows}} {}_0M \underset{{}_2\alpha_0}{\overset{{}_0\alpha_2}{\leftrightarrows}} {}_2M \underset{0}{\overset{0}{\leftrightarrows}} 0.$$

Setzen wir ${}_1\alpha_0' := p^{-1} \cdot {}_1\alpha_0$, erhalten wir auch eine kurze exakte Sequenz mit ${}_1\alpha_0' \cdot {}_0\alpha_1 = {}_11_1$. Aus dem Splitting-Lemma folgt ${}_0M \cong {}_1M \oplus {}_2M$. Wir können die Sequenz aufteilen in

$$0 \underset{0}{\overset{0}{\leftrightarrows}} {}_1M \underset{{}_0\alpha_1}{\overset{{}_1\alpha_0'}{\leftrightarrows}} {}_1M \underset{{}_2\alpha_0}{\overset{{}_0\alpha_2}{\leftrightarrows}} 0 \underset{0}{\overset{0}{\leftrightarrows}} 0$$

sowie in

$$0 \underset{0}{\overset{0}{\leftrightarrows}} 0 \underset{{}_0\alpha_1}{\overset{{}_1\alpha_0'}{\leftrightarrows}} {}_2M \underset{{}_2\alpha_0}{\overset{{}_0\alpha_2}{\leftrightarrows}} {}_2M \underset{0}{\overset{0}{\leftrightarrows}} 0.$$

Die letzte Sequenz wird durch den Fall ${}_1M \cong 0$ beschrieben. Dies vervollständigt den Beweis. □

Wir lassen nun die Voraussetzung an die Wirkung von $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ auf ${}_1M$ fallen. Weiterhin verallgemeinern wir die Bedingung ${}_1M \cong \mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$ mit $(p, a) = 1$.

Satz 2.41. *Sei $\mathcal{M} := {}_0M \oplus {}_1M \oplus {}_2M$ ein exakter $\mathcal{R}$-Modul. Ist die Multiplikation mit p ein Automorphismus von ${}_1M$, so ist ${}_1M \cong \ker({}_11_1 - {}_1s_1) \oplus \ker N({}_1s_1)$, ${}_0M \cong \ker({}_11_1 - {}_1s_1) \oplus I$ und ${}_2M \cong \ker N({}_1s_1) \oplus I$. I erfüllt dabei die Bedingungen aus dem Fall ${}_1M = 0$.*

Beweis. Zunächst zeigen wir, dass ${}_1M$ die vorhergesagte Struktur trägt und eine direkte Summe aus den zwei Kernen ist. Sei T der Anteil von ${}_1M$ mit trivialer ${}_1s_1$-Wirkung, also der Kern von $({}_11_1 - {}_1s_1)$. Weil $0 = {}_11_1 - {}_1s_1^p = ({}_11_1 - {}_1s_1)\,N({}_1s_1)$ gilt, bildet die Multiplikation mit $N({}_1s_1)$ den Modul ${}_1M$ auf T ab. Da p ein Automorphismus ist, bildet auch $p^{-1}N({}_1s_1)\ {}_1M$ auf T ab. Auf T ist die Multiplikation mit $N({}_1s_1)$ die Multiplikation mit p, also ist $f := p^{-1}N({}_1s_1)$ auf T die Identität. Weiterhin ist $\ker N({}_1s_1) = \ker\,(p^{-1}N({}_1s_1))$. Wir erhalten folgende kurze exakte Sequenz

$$0 \to \ker N({}_1s_1) \overset{\text{incl}}{\rightarrowtail} {}_1M \overset{f}{\twoheadrightarrow} \ker\,({}_11_1 - {}_1s_1) \to 0.$$

Bezeichne weiterhin mit $i : \ker\,({}_11_1 - {}_1s_1) \to {}_1M$ die kanonische Inklusion. Offensichtlich ist $f \cdot i : \ker\,({}_11_1 - {}_1s_1) \to \ker\,({}_11_1 - {}_1s_1)$ die Identität. Somit ist ${}_1M \cong \ker N({}_1s_1) \oplus \ker\,({}_11_1 - {}_1s_1)$.

Nun verbleibt zu zeigen, dass sich auch ${}_0M$ und ${}_2M$ als direkte Summen darstellen lassen. Aufgrund der Relationen in $\mathcal{R}$ gilt ${}_1\alpha_2 \cdot {}_2\alpha_1 = {}_11_1 - {}_1s_1$ und ${}_1\alpha_0 \cdot {}_0\alpha_1 = N({}_1s_1)$. Aus dem vorherigen Teil des Beweises folgt $\operatorname{Im} N({}_1s_1) = \ker({}_11_1 - {}_1s_1)$. Dazu betrachten wir folgende Kette von Inklusionen:

$$\ker({}_11_1 - {}_1s_1) \supseteq \ker {}_2\alpha_1 = \operatorname{Im} {}_1\alpha_0 \supseteq \ker({}_11_1 - {}_1s_1)$$

Somit ist $\ker {}_2\alpha_1 = \operatorname{Im} {}_1\alpha_0 = \ker({}_11_1 - {}_1s_1)$. Wir erhalten also folgende exakte Sequenz:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \ker {}_1\alpha_0 \arrow[r, hook, "\text{incl}"] & {}_0M \arrow[r, two heads, "{}_1\alpha_0"] & \ker({}_11_1 - {}_1s_1) \arrow[l, bend left, "{}_0\alpha_1"] \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Dabei ist ${}_1\alpha_0 \cdot {}_0\alpha_1 = N({}_1s_1)$ ein Automorphismus von $\ker({}_11_1 - {}_1s_1)$. Somit ist ${}_0M$ die direkte Summe aus $\ker {}_1\alpha_0$ und $\ker({}_11_1 - {}_1s_1)$.

Da $N({}_1s_1)$ angewendet auf $\ker(N({}_1s_1))$ auf Null abbildet, können wir ${}_1s_1$ in $\ker N({}_1s_1)$ mit ζ_p identifizieren und $\ker N({}_1s_1)$ als $\mathbb{Z}[\zeta_p]$-Modul betrachten. Dann gilt dort für die Multiplikation mit p die Identität

$$p = \prod_{i=1}^{p-1} \left(1 - \zeta_p^i\right).$$

Da die Multiplikation mit p ein Automorphismus ist und die Multiplikation mit Ringelementen Kerne auf sich selbst abbildet, ist auch die Multiplikation mit $1 - \zeta_p \cong {}_11_1 - {}_1s_1$ auf $\ker N({}_1s_1)$ ein Automorphismus. Also ist

$$({}_11_1 - {}_1s_1)\,{}_1M = ({}_11_1 - {}_1s_1)\,(\ker N({}_1s_1) \oplus \ker\,({}_11_1 - {}_1s_1)) = \ker N({}_1s_1) \oplus 0.$$

Damit erhalten wir wegen ${}_1\alpha_2 \cdot {}_2\alpha_1 = {}_11_1 - {}_1s_1$ auch $\operatorname{Im} {}_1\alpha_2 \supseteq \operatorname{Im}({}_1s_1 - {}_11_1) = \ker(N({}_1s_1))$ und damit

$$\ker(N({}_1s_1)) \supseteq \ker {}_0\alpha_1 = \operatorname{Im} {}_1\alpha_2 \supseteq \ker(N({}_1s_1)).$$

Es folgt $\ker(N({}_1s_1)) = \ker {}_0\alpha_1 = \operatorname{Im} {}_1\alpha_2$. Wir erhalten analog die kurze exakte Sequenz

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \ker {}_1\alpha_2 \arrow[r, hook, "\text{incl}"] & {}_2M \arrow[r, two heads, "{}_1\alpha_2"] & \ker N({}_1s_1) \arrow[l, bend left, "{}_2\alpha_1"] \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Da wir bereits gezeigt haben, dass ${}_1\alpha_2 \cdot {}_2\alpha_1 = {}_1 1_1 - {}_1 s_1$ auf $\ker N({}_1 s_1)$ ein Isomorphismus ist, folgt ${}_2 M \cong \ker N({}_1 s_1) \oplus J$. Mit ${}_0 M \cong \ker({}_1 1_1 - {}_1 s_1) \oplus I$ erfüllt $\mathcal{M}' := I \oplus 0 \oplus J$ schließlich die Bedingungen für den Fall ${}_1 M = 0$, also insbesondere $I \cong J$. $\square$

Wir können $\mathcal{M}$ also als direkte Summe der Moduln $I \oplus 0 \oplus I$ und

$$\ker({}_1 1_1 - {}_1 s_1) \oplus (\ker({}_1 1_1 - {}_1 s_1) \oplus \ker N({}_1 s_1)) \oplus \ker N({}_1 s_1)$$

darstellen.

Korollar 2.42. *Ist $\mathcal{M} = {}_0 M \oplus {}_1 M \oplus {}_2 M$ ein exakter $\mathcal{R}$-Modul, wobei ${}_1 M$ die additive Struktur*

$${}_1 M = \bigoplus_{i=0}^{n} \mathbb{Z}/a_i\mathbb{Z}$$

mit $(p, a_i) = 1$ für alle $i \in \{0, \ldots, n\}$ trägt, dann ist $\mathcal{M}$ die direkte Summe eines $\mathcal{R}$-Moduls der Form $T \oplus (T \oplus S) \oplus S$ und eines $\mathcal{R}$-Moduls der Form $I \oplus 0 \oplus I$. Dabei wirkt $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ treu auf S und trivial auf T und I erfüllt die Bedingungen des Falls ${}_1 M = 0$.

Beweis. Wir verwenden Satz 2.41. Die einzige Voraussetzung, die überprüft werden muss, ist, dass p ein Automorphismus ist. Da ${}_1 M$ endlich ist und eine zu p teilerfremde Ordnung besitzt, ist dies aber erfüllt.. $\square$

Schließlich betrachten wir noch ein Beispiel für einen $\mathcal{R}$-Modul, der diesem Fall genügt.

Beispiel 2.43. *Sei $\mathcal{M} := {}_0 M \oplus {}_1 M \oplus {}_2 M$ und $p = 3$. Sei ${}_1 M \cong \mathbb{Z}/28\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Weiterhin sei ${}_1 s_1$ auf ${}_1 M$ die Multiplikation mit 9. Dann ist $({}_1 1_1 - {}_1 s_1)$ die Multiplikation mit 8, die den Kern $0 \oplus \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ besitzt. Das Element $N({}_1 s_1)$ ist die Multiplikation mit $1 + 9 + 81 \equiv 7 \mod 28$ mit dem Kern $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \oplus 0$. Weiterhin ist ${}_0 M \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ und ${}_2 M \cong \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ mit den Projektionen ${}_0\alpha_1$ und ${}_2\alpha_1$. Die Abbildungen ${}_0\alpha_2$ und ${}_2\alpha_0$ sind Nullabbildungen. Die Elemente ${}_0 t_0$ und ${}_2 t_2$ sind die Identität, ${}_2 s_2$ ist die Multiplikation mit $2 \equiv 9 \mod 7$. Die Abbildung ${}_1\alpha_2$ ist die Einbettung in den $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$-Anteil und ${}_1\alpha_0$ ist die Multiplikation mit -1 und die anschließende Einbettung in den $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$-Anteil. Wir erhalten folgendes Bild:*

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \arrow[dl, two heads, "{}_0\alpha_1"] & \\
\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \arrow[rr, "{}_2\alpha_0", "0"'] & & \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \arrow[ul, tail, "{}_1\alpha_2"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \arrow[dr, two heads, "{}_2\alpha_1"] & \\
\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \arrow[ur, tail, "{}_1\alpha_0"] & & \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \arrow[ll, "0"', "{}_0\alpha_2"]
\end{tikzcd}.$$

Lassen wir schließlich auch noch die Bedingung $(a, p) = 1$ fallen, können wir $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$ darstellen als $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$, wenn $a = p^k b$ und $(b, p) = 1$ ist. Wir können nun den kleinsten exakten Untermodul von M betrachten, der durch $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ erzeugt wird. Da p und b teilerfremd sind, kann es keine Verkettung von ${}_i\alpha_j$ geben, die von $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ abbildet oder umgekehrt. Der $\mathcal{R}$-Modul sollte also in einen von $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ erzeugten Modul, in einen von Satz 2.41 beschriebenen von $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ erzeugten Modul und in einen von Abschnitt 2.1 beschriebenen Modul ohne ${}_1 M$-Anteil zerfallen.

Fazit

In dieser Arbeit wurden exakte $\mathcal{R}$-Moduln $\mathcal{M} = {}_0M \oplus {}_1M \oplus {}_2M$ mit Einschränkungen in ${}_1M$ klassifiziert. Ist ${}_1M = 0$, ist eine vollständige Klassifizierung durch die Bedingung, dass ${}_0M$ und ${}_2M$ isomorphe $\mathbb{Z}[\zeta_p, 1/p]$-Moduln sein müssen, gelungen. Für den Fall ${}_1M \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ stellt Abschnitt 2.2 eine vollständige Klassifikation dar. In diesem Fall gibt es jedoch viele Möglichkeiten für die Struktur der $\mathcal{R}$-Moduln. Die möglichen $\mathcal{R}$-Moduln mit ${}_1M \cong \mathbb{Z}$ für $p \neq 2$ wurden in Abschnitt 2.3 vollständig beschrieben. Schließlich wurde in Abschnitt 2.4 eine Strukturaussage über exakte $\mathcal{R}$-Moduln, für die die Multiplikation mit p ein Automorphismus von ${}_1M$ ist, gezeigt. Dies liefert insbesondere eine vollständige Beschreibung der exakten $\mathcal{R}$-Moduln, für die ${}_1M$ die direkte Summe aus zyklischen Gruppen mit zu p teilerfremden Ordnungen ist.

Weiterhin könnte man die gemachten Untersuchungen durch eine Klassifikation der Fälle, in denen ${}_1M$ eine Summe beliebiger zyklischer Gruppen ist, fortsetzen. Auch der Fall, in dem ${}_1M$ eine direkte Summe aus Kopien von $\mathbb{Z}$ und zyklischen Gruppen ist, erscheint interessant.

Dennoch ermöglichen die bewiesenen Strukturaussagen über die untersuchten Fälle dieser Arbeit die Konstruktion einer Vielzahl an Beispielen für exakte $\mathcal{R}$-Moduln, die sich in ihrer Struktur wesentlich unterscheiden.

Literatur

[1] Michael Francis Atiyah und Ian Grant Macdonald. *Introduction to Commutative Algebra*. Reading: Addison-Wesley, 1969.

[2] Fernando Gouvêa. *p-adic numbers: an introduction*. Berlin: Springer-Verlag, 2003.

[3] Manuel Köhler. „Universal Coefficient Theorems in Equivariant KK-theory (Dissertation)“. In: *ediss.uni-goettingen* (2011). URL: `http://hdl.handle.net/11858/00-1735-0000-0006-B6A9-9`.

[4] Lawrence C. Washington. *Introduction to Cyclotomic Fields*. New York: Springer-Verlag, 1997 (1982).