Über J. Bernsteins zweite Adjungiertheit für reduktive p-adische Gruppen

Dissertation
zur Erlangung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Doktorgrades
„Doctor rerum naturalium“
der Georg-August-Universität Göttingen

im Promotionsstudiengang „Mathematical Sciences“
der Georg-August University School of Science (GAUSS)

vorgelegt von
Jan Frederic Held
aus Minden

Göttingen, 2022

Betreuungsausschuss:

Prof. Dr. Ralf Meyer, Mathematisches Institut
Prof. Dr. Ulrich Stuhler, Mathematisches Institut

Mitglieder der Prüfungskommission:

Referent: Prof. Dr. Ralf Meyer, Mathematisches Institut
Korreferent: Prof. Dr. Ulrich Stuhler, Mathematisches Institut

Weitere Mitglieder der Prüfungskommission:

Prof. Dr. Victor Pidstrygach, Mathematisches Institut
Prof. Dr. Thomas Schick, Mathematisches Institut
Prof. Dr. Damaris Schindler, Mathematisches Institut
Prof. Dr. Dominic Schuhmacher, Insitut für Math. Stochastik

Tag der mündlichen Prüfung: 10. August 2022

INHALTSVERZEICHNIS

EINLEITUNG

Sei p eine Primzahl und k ein nicht-archimedischer lokaler Körper mit endlichem Restklassenkörper $\mathbb{F}_q$ der Charakteristik p, das heißt, k ist entweder isomorph zu einer endlichen Erweiterung des p-adischen Zahlkörpers $\mathbb{Q}_p$, dann hat k die Charakteristik 0, oder zum Körper $\mathbb{F}_q((T))$ der Laurentpolynome mit Koeffizienten in $\mathbb{F}_q$, dann hat k die Charakteristik p. Als *reduktive* $\mathfrak{p}$*-adische Gruppe* bezeichnet man die Gruppe $G = \mathfrak{G}(k)$ der k-rationalen Punkte einer zusammenhängenden reduktiven affinen algebraischen k-Gruppe $\mathfrak{G}$, und G ist dann auch eine total unzusammenhängende, lokal kompakte topologische Gruppe.

Sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Eine *(glatte R-)Darstellung* von G ist ein Paar (π, V), bestehend aus einem R-Modul V und einem Gruppenhomomorphismus $\pi\colon G \to \mathrm{Aut}_R(V)$ derart, daß für jedes $v \in V$ die Stabilisatoruntergruppe $G_v = \{g \in G \mid \pi(g) \cdot v = v\}$ offen in der Topologie von G ist. Zusammen mit den üblichen G-äquivarianten Abbildungen bilden die glatten Darstellungen von G eine abelsche Kategorie $\mathfrak{R}(G)$, die man studieren möchte.

Die Hauptwerkzeuge zur Untersuchung von $\mathfrak{R}(G)$ sind zwei Funktoren, nämlich parabolische Induktion $\mathcal{I}_M\colon \mathfrak{R}(M) \to \mathfrak{R}(G)$ und Jacquet-Restriktion $\mathcal{R}_M\colon \mathfrak{R}(G) \to \mathfrak{R}(M)$ bzgl. einer parabolischen Untergruppe $P \subseteq G$ mit Levifaktor M, der wiederum eine reduktive $\mathfrak{p}$-adische Gruppe ist. Es folgt unmittelbar aus den Definitionen, daß $\mathcal{I}_M$ rechtsadjungiert zu $\mathcal{R}_M$ ist. Diese *Frobenius-Reziprozität* bezeichnen wir im Kontext dieser Arbeit auch als die *erste Adjungiertheit*.

Eine Darstellung $\pi \in \mathfrak{R}(G)$ heißt *kuspidal*, wenn $\mathcal{R}_M(\pi) = 0$ für alle Leviuntergruppen $M \subsetneq G$ gilt. Die (irreduziblen) kuspidalen Darstellungen sind gewissermaßen die »Bausteine« von $\mathfrak{R}(G)$ in dem folgenden Sinne: jede irreduzible Darstellung $\pi \in \mathfrak{R}(G)$ ist Unterquotient einer parabolisch induzierten $\mathcal{I}_M(\rho)$, wobei $\rho \in \mathfrak{R}(M)$ irreduzibel und kuspidal ist. Das Paar (M, ρ) ist bis auf Isomorphie und Konjugation durch ein Element von G eindeutig bestimmt.

In [5] entwickelt Joseph Bernstein für den Fall $R = \mathbb{C}$ die nach ihm benannte *Bernsteinzerlegung* der Kategorie $\mathfrak{R}(G)$, mit der er das Zentrum von $\mathfrak{R}(G)$, das *Bernsteinzentrum*, beschreibt. Die Bernsteinzerlegung erlaubt es, $\mathfrak{R}(G)$ als kategorielles Produkt

$$\mathfrak{R}(G) = \prod_{\mathfrak{s}} \mathfrak{R}^{\mathfrak{s}}(G)$$

zu schreiben. Dabei sind die $\mathfrak{R}^{\mathfrak{s}}(G)$ unzerlegbare volle abelsche Unterkategorien, die sogenannten *Bernsteinblöcke* von $\mathfrak{R}(G)$, und $\mathfrak{s}$ durchläuft, in der Terminologie von Bushnell/Kutzko [20], die *inertialen Äquivalenzklassen* von kuspidalen Paaren (M, π). Diese letzteren bestehen aus einer Leviuntergruppe $M \subseteq G$ (einschließlich G selbst) sowie einer irreduziblen kuspidalen Darstellung $\pi \in \mathfrak{R}(M)$, und zwei davon sind äquivalent, wenn sie bis auf Isomorphie, Konjugation durch ein Element von G und Torsion durch einen unverzweigten Charakter identisch sind, das heißt

$$(M_1, \pi_1) \sim (M_2, \pi_2) :\Longleftrightarrow M_1 = gM_2g^{-1} \quad \text{und} \quad \pi_1 \otimes \chi \cong g\pi_2 g^{-1}$$

mit $\chi \in X_{\mathrm{nr}}(M_1)$ und $g \in G$. Die Kategorie $\mathfrak{R}^{\mathfrak{s}}(G)$ besteht dann aus denjenigen Darstellungen in $\mathfrak{R}(G)$, deren irreduzible Unterquotienten alle in der inertialen Äquivalenzklasse $\mathfrak{s}$ liegen. Die Bernsteinzerlegung ist (aus kategorientheoretischen Gründen) insofern eindeutig, als man $\mathfrak{R}(G)$ auf keine andere Art und Weise als Produkt von unzerlegbaren Unterkategorien aufteilen kann.

Man möchte die Struktur der Bernsteinblöcke $\mathfrak{R}^{\mathfrak{s}}(G)$ verstehen, und hier sind zwei Fälle zu unterscheiden: jener der *kuspidalen Blöcke* zu Inertialklassen der Form $\mathfrak{s} = [G, \pi]$ und jener der nicht-kuspidalen. Der kuspidale Fall ist der einfachere. Bernstein verwendet zur Aufspaltung des kuspidalen Teils von $\mathfrak{R}(G)$ in unzerlegbare Blöcke einen gewissen offenen Normalteiler $G^\circ \trianglelefteq G$ mit kompaktem Zentrum und führt das Problem auf die Aufspaltung von $\mathfrak{R}(G^\circ)$, die von den irreduziblen kompakten Darstellungen von G° induziert wird, zurück. Zur weiteren Untersuchung der Blöcke kommt zum Tragen, daß die kompakte Induktion $\mathrm{ind}\colon \mathfrak{R}(G^\circ) \to \mathfrak{R}(G)$ *linksadjungiert* zur Restriktion $\mathrm{Res}\colon \mathfrak{R}(G) \to \mathfrak{R}(G^\circ)$ ist und ind somit projektive Objekte respektiert. Bernstein konstruiert damit gewisse Progeneratoren, woraus folgt, daß die Blöcke Kategorien von Rechtsmoduln über der Endomorphismenalgebra des Progenerators sind.

Zur Behandlung des schwierigeren, nicht-kuspidalen Falls greift er auf ein ähnliches, überraschend schönes, aber schwer zu fassendes Resultat zurück, nämlich die titelgebende *zweite Adjungiertheit*, die besagt, daß $\mathcal{I}_M$ nicht nur rechts-, sondern auch *links*adjungiert zu einem Jacquet-Restriktionsfunktor ist, nämlich zu $\bar{\mathcal{R}}_M$, der Jacquet-Restriktion bzgl. der P entgegengesetzten parabolischen Untergruppe $\bar{P}$, die ebenfalls M als Levifaktor enthält. Damit konstruiert er wiederum einen speziellen Progenerator der Kategorie $\mathfrak{R}^{\mathfrak{s}}(G)$.

Neben dem von Bernstein selbst in [3] skizzierten und von Renard in [48] ausgearbeiteten Beweis dieses Satzes gibt es einen weiteren von Bushnell [19], der auf der Theorie des Bernsteinzentrums, also [5], beruht. Bei beiden ist $R = \mathbb{C}$. Älter ist ein Beweis von Casselman [22] für zulässige Darstellungen und $R = \mathbb{C}$, den Vignéras [58, II.3.8] auf den Fall $R = \overline{\mathbb{Z}}_\ell$, $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ oder $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ verallgemeinert, wobei ℓ eine Primzahl mit $\ell \neq p$ ist. Darüber hinaus gibt es inzwischen einen geometrischen Beweis von Bezrukavnikov und Kazhdan [8], der Gebrauch von der »wundervollen Kompaktifizierung« (*wonderful compactification*) von de Concini und Procesi macht. Dieser Beweis wird für *zerfallende* reduktive k-Gruppen $\mathfrak{G}$ geführt, aber die Autoren gehen davon aus, daß er sich verallgemeinern läßt. In [24] beweist Dat die zweite Adjungiertheit zunächst für minimale parabolische Untergruppen, dann für beliebige parabolische Untergruppen, wenn $G = \mathrm{GL}_n$ oder eine klassische Gruppe ist. Dabei wird nur verlangt, daß R eine $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$-Algebra ist. Er zeigt, daß die Existenz spezieller Familien von Idempotenten hinreichend ist, und greift auf ein Ergebnis von Stevens [55] zurück, der in den genannten Fällen ebensolche konstruiert.

Über diese Arbeit

Das Hauptresultat der vorliegenden Arbeit ist ein weiterer, im wesentlichen, wie wir denken, elementarer Beweis der zweiten Adjungiertheit. Dieser beruht einerseits auf der Identifizierung der Kategorie $\mathfrak{R}(G)$ mit der Kategorie ${}_A\mathfrak{M}$ der *glatten* (*nicht ausgearteten*) Linksmoduln der Heckealgebra $A = \mathcal{D}(G)$ von G. Für diese Identifizierung notwendig und hinreichend ist gerade die Bedingung, daß R eine $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$-Algebra ist. Andererseits werden verschiedene Zerlegungen verwendet, die sich aus der Theorie der reduktiven Gruppen über einem lokalen Körper (Bruhat/Tits [17]) ergeben. Dies sind vor allem die *Iwasawa-Zerlegung* und verallgemeinerte *Bruhatzerlegungen* von G, welch letztere in Bernsteins und Zelevinskys *Geometrischem Lemma* [7] Ausdruck finden. Zudem wird benutzt, daß es eine 1-Umgebungsbasis von G aus Pro-p-Untergruppen gibt, die bezüglich jeder standardparabolischen Untergruppe eine *Iwahori-Zerlegung* besitzen.

Die Idee zu diesem Beweis wurde mir von R. Meyer mitgeteilt. Ähnliche Ideen finden sich aber auch in unveröffentlichten Vorlesungsnotizen von Kazhdan [34, 35]. Jedoch wurde dieser Beweis, soweit ich weiß, bisher nicht ausgeführt.

Ein weiteres Anliegen der Arbeit ist es, die Theorie so weit als möglich in ${}_A\mathfrak{M}$ aufzubauen und die verschiedenen Adjungiertheitseigenschaften sowie die sich daraus ergebenden Zerlegungen von ${}_A\mathfrak{M}$ detailliert zu untersuchen. Wertvolle Vorarbeit wurde von Guiraud in seiner am Mathematischen Institut in Göttingen entstandenen Diplomarbeit [30] geleistet.

Gliederung

In **Kapitel 1** werden als Ausgangspunkt die grundlegenden Begriffe der Darstellungstheorie reduktiver $\mathfrak{p}$-adischer Gruppen erläutert, die in dieser Arbeit von Bedeutung sind. Dies sind zunächst die reduktiven $\mathfrak{p}$-adischen Gruppen selbst, sodann allgemeiner ℓ-Räume und ℓ-Gruppen (Bernstein) und ihre glatten Darstellungen. Wir zitieren die Sätze über die Iwasawa-, Cartan- und Iwahori-Zerlegung und führen die von uns verwendeten Funktionenräume ein, insbesondere $\mathcal{D}(G)$, den Raum der lokal konstanten Funktionen $G \to R$ mit kompaktem Träger. Zuletzt gehen wir auf das für unsere Methoden unverzichtbare Haarmaß auf G ein. Dieses existiert dann und nur dann, wenn R eine $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$-Algebra ist.

In **Kapitel 2** führen wir die für diese Arbeit wichtigen Begriffe aus der Modultheorie ein. Dies sind die assoziativen R-Algebren mit genügend Idempotenten (die wir als *glatte Algebren* bezeichnen) und die zugehörigen glatten Moduln. Insbesondere ist $A = \mathcal{D}(G)$ mit der Faltung eine glatte Algebra. Sodann besprechen wir eine Konstruktion, die, soweit der Autor weiß, in der Darstellungstheorie reduktiver $\mathfrak{p}$-adischer Gruppen, bisher noch keine große Rolle gespielt hat: (Ko)algebren in der Kategorie der Bimoduln über einer gewissen glatten Algebra B und ihre (Ko)moduln. Wenn R eine $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$-Algebra ist, gilt $\mathfrak{R}(G) \cong {}_A\mathfrak{M}$. Wir führen die Funktoren $\mathcal{R}_M$ und $\mathcal{I}_M$ als von Bimoduln induzierte Tensorproduktfunktoren ein:

$$\mathcal{R}_M = \chi \cdot N\backslash\mathcal{D}(G) \otimes_G -, \quad \mathcal{I}_M = \mathcal{D}(G/N) \cdot \chi \otimes_M -$$

und erinnern an das Ergebnis von Guiraud, daß diese Funktoren in der Tat natürlich isomorph zur Jacquet-Restriktion und parabolischen Induktion sind. Hierbei ist χ ein gewisser Charakter von M. Im nicht-normierten Fall ist $\chi = 1$, im normierten, den wir letztlich betrachten werden, $\chi = \delta_P^{1/2}$. Wir beschreiben die natürlichen Isomorphismen explizit.

Kapitel 3 ist ein technisches Kapitel über kuspidale Moduln, und aus diesem kommen auch weitere Bedingungen an den Ring R. Grundvoraussetzung ist, daß R sogar ein *Körper* mit $p \in R^*$ oder äquivalent mit Charakteristik $\ell \neq p$ ist. Ziel des Kapitels ist die Aussage von R. Meyer [40], daß sich jeder kuspidale Modul in einen injektiven kuspidalen einbetten läßt und Quotient eines projektiven kuspidalen ist. Der projektive Teil ergibt sich ganz natürlich. Wir haben jedoch festgestellt, daß beim »injektiven Teil« der Aussage Komplikationen auftreten: Sei G° der von den kompakten Untergruppen in G erzeugte offene Normalteiler. Wir greifen auf die Aussage zurück, daß die kompakten Moduln über G° halbeinfach sind, und das haben wir nicht über den »banalen Fall« hinweg verallgemeinern können, daß R ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik 0 ist. Dieses Ergebnis benutzen wir, um zu zeigen, daß ein (zu glättendes) direktes Produkt $\prod_{i\in I} V$ eines kompakten $\mathcal{D}(G^\circ)$-Moduls V wiederum kompakt ist. Hier kann man die Bedingung, daß R algebraisch abgeschlossen ist, nun fallenlassen, aber die Schwierigkeiten positiver Charakteristik bleiben bestehen. In einem letzten Schritt müssen wir zeigen, daß jede kurze exakte Sequenz von $\mathcal{D}(G)$-Moduln für jede kompakte Untergruppe $K \subseteq G$ einen K-äquivarianten Schnitt besitzt. Hier tritt die (im Fall der Charakteristik 0 stets erfüllte) Bedingung auf, daß ℓ nicht die Proordnung von G teilen darf.

Der ersten Adjungiertheit $\mathcal{R}_M \dashv \mathcal{I}_M$ und ihrer Untersuchung haben wir das eigene **Kapitel 4** gewidmet. Dies ist in der Formulierung durch Bimoduln bereits bei Guiraud geschehen, aber wir leiten eine neue Formel für den Morphismus $\eta\colon \mathcal{D}(G) \to \mathcal{D}(G/N) \otimes_M N\backslash\mathcal{D}(G)$ her, welcher die Eins $1 \to \mathcal{I}_M\mathcal{R}_M$ der Adjunktion induziert und uns im weiteren von Nutzen sein wird. Wir beweisen damit die erste Adjungiertheit in der Formulierung mit Eins- und Koeins noch einmal. Außerdem zeigen wir mit Hilfe des Ergebnisses aus Kapitel 3 die kategorielle Zerlegung ${}_A\mathfrak{M} = {}_A\mathfrak{M}^{\mathfrak{c}} \times {}^C\mathfrak{M}$ in die Kategorie ${}_A\mathfrak{M}^{\mathfrak{c}}$ der kuspidalen A-Moduln und die Kategorie der C-Komoduln über einer gewissen Koalgebra $C \in {}_B\mathfrak{M}_B$. Genauer ist hier

$$C = \bigoplus_{L,M<G} \chi_L \cdot U\backslash\mathcal{D}(G/N) \cdot \chi_M \quad \text{und} \quad B = \bigoplus_{M<G} \mathcal{D}(M). \tag{$*$}$$

Die Schreibweise $M < G$ bedeutet, daß M eine Standardleviuntergruppe (bzgl. eines festgelegten maximalen k-zerfallenden k-Torus) von G ist (s. Anhang B.2). Davon gibt es nur endlich viele.

Kapitel 5 ist ein weiteres technisches Kapitel. In Vorbereitung unseres Beweises der zweiten Adjungiertheit rekapitulieren wir einige Ergebnisse über verallgemeinerte Bruhatzerlegungen. Wir beschreiben explizit die offenen Filtrierungen von G durch Doppelnebenklassen parabolischer Untergruppen, parametrisiert durch Doppelnebenklassen von Weylgruppen, aufgefaßt als Coxetergruppen. Wir erinnern daran, wie sich Produkte $P_0wP_0sP_0$ und $\bar{P}_0wP_0sP_0$ von Bruhatzellen in Vereinigungen von Bruhatzellen zerlegen lassen. Hier steht P_0 für eine minimale parabolische Untergruppe von G. Für unseren Beweis der zweiten Adjungiertheit wichtig ist nun die Frage, wann $\bar{P}wQzP \cap \bar{P}P = \emptyset$ für zwei standardparabolische Untergruppen P, Q und zwei Elemente w, z der (relativen) Weylgruppe $\mathcal{W}_G$ gilt. Wir erhalten die Bedingung $\ell(z) < \ell(w)$, wobei $\ell\colon \mathcal{W}_G \to \mathbb{N}^*$ die Längenfunktion bedeutet.

Kapitel 6 ist das Kernstück der Arbeit. Wir fassen die zweite Adjungiertheit in die Form der Aussage, daß die Koalgebra C aus $(*)$ dual ist zu

$$\bar{C} = \bigoplus_{L,M<G} \chi_M^{-1} \cdot \bar{N}\backslash\mathcal{D}(G/U) \cdot \chi_L$$

in dem Sinne, daß $B \otimes_B \mathrm{Hom}_B(C, E) \cong \bar{C} \otimes_B E$ für alle glatten B-Moduln E. Dabei macht $B \otimes_B -$ aus einem B-Modul einen glatten B-Modul. Es genügt, nur ein Paar (L, M) und einen $\mathcal{D}(L)$-Modul E zu betrachten. Der Beweis erfolgt per vollständiger Induktion über den halbeinfachen k-Rang von G. Wir benutzen eine im wesentlichen wiederum auf Bernstein zurückgehende Konstruktion einer Abbildung

$$\mathcal{D}(M) \otimes_M \mathrm{Hom}_L(\chi_L \cdot U\backslash\mathcal{D}(G/N) \cdot \chi_M, E) \xrightarrow{\alpha} \chi_M^{-1} \cdot \bar{N}\backslash\mathcal{D}(G/U) \cdot \chi_L \otimes_L E.$$

Aus den Sätzen über die Bruhatzerlegung folgt, daß die Moduln auf beiden Seiten Filtrierungen gleicher Länge durch gewisse Untermoduln besitzen. Dies arbeiten wir konkret aus. Wir zeigen, daß diese Filtrierung mit α kompatibel ist und daß α zwischen den Unterquotienten dieser Filtrierungen nach Induktionsvoraussetzung jeweils einen Isomorphismus induziert. Für den halbeinfachen k-Rang 1 können wir dies direkt zeigen, und es ist dann eine elementare algebraische Tatsache, daß auch α ein Isomorphismus ist.

In **Kapitel 7** leiten wir aus der Dualitätsaussage die zweite Adjungiertheit in der bekannten Form her. Außerdem erhalten wir, indem wir ähnlich wie in Kapitel 3 argumentieren, daß $\bar{C}$ eine Algebra in ${}_B\mathfrak{M}_B$ ist und es eine kategorielle Zerlegung ${}_A\mathfrak{M} = {}_A\mathfrak{M}^{\mathfrak{c}} \times {}_{\bar{C}}\mathfrak{M}$ gibt. Daraus folgt, daß die volle Unterkategorie ${}^C\mathfrak{M}$ der C-Komoduln in ${}_A\mathfrak{M}$ mit ${}_{\bar{C}}\mathfrak{M}$, jener der $\bar{C}$-Moduln, übereinstimmt.

Ausblick

Wir hoffen, daß die Erforschung dieser Kategorie der $\bar{C}$-Moduln ein Ausgangspunkt weiterer Untersuchungen ist, wodurch die Struktur der Bernsteinblöcke $\mathfrak{R}^{\mathfrak{s}}(G)$ aus unserer Perspektive beleuchtet werden kann. Dies war das ursprüngliche Ziel der Arbeit. Des weiteren wäre es wünschenswert, den Beweis der zweiten Adjungiertheit nach unserer Methode dahingehend zu verbessern, daß die Bedingungen an R aus Kapitel 3 fallengelassen werden können und nur noch die Voraussetzung übrigbleibt, daß R eine $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$-Algebra ist.

Bezeichnungen und Konventionen

Wenn nichts anderes gesagt wird, gelten die folgenden Bezeichnungen:

- In der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist die Null enthalten. Wir setzen $\mathbb{N}^* := \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$.
- G ist eine reduktive $\mathfrak{p}$-adische Gruppe.

- k ist ein nicht-archimedischer lokaler Körper mit endlichem Restklassenkörper $\mathbb{F}_q$ der Charakteristik p.
- R ist ein kommutativer Ring mit Eins. Wo R ein Körper ist, steht ℓ für dessen Charakteristik.
- $P = MN$ und $Q = LU$ sind parabolische Untergruppen von G mit den Standardlevifaktoren M, L und den unipotenten Radikalen N, U.
- S ist ein maximaler k-zerfallender k-Torus in G.
- $P_0 = M_0N_0$ die minimale parabolische Untergruppe mit $M_0 = \mathcal{Z}_G(S)$. Manchmal schreiben wir $B = MN$ statt P_0. Es handelt sich dann nicht unbedingt um eine Boreluntergruppe.
- $|X|$ steht für die Kardinalität einer Menge X.
- Disjunkte Vereinigungen werden $A \,\dot{\cup}\, B$ und $\dot{\bigcup}_{i\in I} A_i$ geschrieben.
- Wir setzen $V^{\oplus I} := \bigoplus_{i\in I} V$ und $V^{\oplus n} := \bigoplus_{i=1}^{n} V$.
- $A \subseteq B$ bedeutet das gleiche wie $A \subset B$.
- Wenn G eine Gruppe und $H \subseteq G$ eine Untergruppe ist, so schreiben wir g/H für das Bild von g unter der kanonischen Projektionsabbildung $G \to G/H$, entsprechend bei anderen Quotienten. Aufgefaßt als Teilmenge von G, schreiben wir die H-Nebenklassen wie üblich $gH = \{gh \mid h \in H\} \subseteq G$.
- Das Gleichheitszeichen steht oft für einen kanonischen Isomorphismus.
- Sei $U \subseteq G$ Teilmenge einer Gruppe G und $g \in G$. Dann setzen wir
$$ {}^{g}U := gUg^{-1} \quad \text{und} \quad U^g := g^{-1}Ug. $$
- Die Differenz zweier Mengen X und Y wird $X \smallsetminus Y := \{x \in X \mid x \notin y\}$ geschrieben. Es ist etwas Obacht geboten, weil auch häufig Quotienten der Form $H\backslash G$ betrachtet werden.
- Sei V ein R-Modul und $X \subseteq V$ eine Teilmenge. Dann ist
$$ \langle X\rangle := \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \;\middle|\; \lambda_k \in R,\ x_k \in X,\ n \in \mathbb{N}^* \right\} $$
die lineare Hülle.

- $X \otimes f \colon X \otimes Y_1 \to X \otimes Y_2$ steht für $\mathrm{id}_X \otimes f$.
- Seien A und B Algebren. Die Schreibweisen ${}_AV$, V_B, ${}_AV_B$ bedeuten: V ist ein glatter A-Linksmodul, B-Rechtsmodul, (A, B)-Bimodul.

Danksagung

Ich kann Herrn Prof. Dr. Ralf Meyer nicht genug danken für seine hervorragende Betreuung, seine unerschöpfliche Geduld und seine fortwährende Unterstützung und den Rückhalt dabei, die Arbeit zu einem guten Ende zu führen. Nur dank der vielen Gespräche, die mich stets ermutigten, mir wertvolle Ideen und Denkanstöße gaben und mir auch sehr viel Freude bereiteten, ist dies möglich gewesen.

Herrn Prof. Dr. Ulrich Stuhler danke ich ganz besonders herzlich dafür, daß er sich nach meiner Diplomarbeit bei ihm bereit erklärt hat, die Zweitbetreuung zu übernehmen, und daß auch er mich immer so freundlich und ermutigend unterstützt hat.

Ich danke Herrn Prof. Dr. Maarten Solleveld sehr dafür, daß er den Text gelesen und durch Ideen, mit denen einige Voraussetzungen an den Ring R an zentralen Stellen umgangen werden konnten, wesentlich zur Verbesserung der Ergebnisse beigetragen hat.

Schließlich danke ich meiner Familie, ohne deren Unterstützung diese Arbeit ebenfalls nicht möglich gewesen wäre.

1. GRUNDLEGENDE BEGRIFFE

In diesem Kapitel erinnern wir an die grundlegenden Begriffe, die im weiteren Verlauf der Arbeit benötigt werden. Es wird häufig auf Ergebnisse verwiesen, die im Anhang zusammengestellt sind. Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, k ein nicht-archimedischer lokaler Körper mit endlichem Restklassenkörper der Charakteristik p sowie der Kardinalität $q = p^d$ (Anhang A), $\overline{k}$ ein algebraischer Abschluß von k.

1.1 *Reduktive $\mathfrak{p}$-adische Gruppen*

Wir bezeichnen algebraische Gruppen, betrachtet als Gruppenvarietäten über $\overline{k}$, mit großen Frakturbuchstaben, die Gruppen der k-rationalen Punkte mit den entsprechenden großen Antiquabuchstaben und die Lie-Algebren mit den entsprechenden kleinen Frakturbuchstaben. Zu affinen algebraischen Gruppen siehe Anhang B. Die in diesem Abschnitt wiederholten Aussagen über affine algebraische Gruppen finden sich zum Beispiel in §§ 20, 21 bei Borel [12] und §§ 15, 16 bei Springer [54].

Definition 1.1.1. Eine $\mathfrak{p}$-*adische Gruppe* ist die Gruppe $G := \mathfrak{G}(k)$ der k-rationalen Punkte einer zusammenhängenden über k definierten affinen algebraischen Gruppe $\mathfrak{G}$. Wenn $\mathfrak{G}$ reduktiv ist, dann heißt G *reduktive* $\mathfrak{p}$-*adische Gruppe.*

Sei $\mathfrak{G}$ eine über k definierte zusammenhängende reduktive affine algebraische Gruppe und $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{G}$ ein maximaler k-zerfallender k-Torus.

Proposition 1.1.2. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(1) Es gibt eine parabolische k-Untergruppe $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{G}$.

(2) Es gibt einen nicht-zentralen k-zerfallenden k-Torus in $\mathfrak{G}$.

(3) $\mathfrak{S}$ liegt nicht im Zentrum von $\mathfrak{G}$.

(4) Das relative Wurzelsystem ${}_k\Phi(\mathfrak{S}, \mathfrak{G})$ ist nicht leer.

(5) Der halbeinfache k-Rang von $\mathfrak{G}$ ist nicht Null.

Beweis. »1 $\Leftrightarrow$ 2«: Borel [12, 20.6]; »2 $\Leftrightarrow$ 3« ist offensichtlich; »3 $\Leftrightarrow$ 4«: [12, 21.1]; »4 $\Leftrightarrow$ 5«: [12, 21.2]. □

Sei $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{G}$ eine parabolische k-Untergruppe. Dann sind das Radikal $\mathscr{R}(\mathfrak{P})$ und das unipotente Radikal $\mathfrak{N} := \mathscr{R}_u(\mathfrak{P})$ über k definiert. Ein *k-Levifaktor* von $\mathfrak{P}$ ist eine reduktive k-Untergruppe $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{G}$ derart, daß die Produktabbildung

$$\mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \longrightarrow \mathfrak{P}, \quad (m, n) \longmapsto mn,$$

ein über k definierter Isomorphismus von Varietäten ist. Eine *k-Leviuntergruppe* von $\mathfrak{G}$ ist ein k-Levifaktor irgendeiner parabolischen k-Untergruppe von $\mathfrak{G}$. Man hat dann die *Levizerlegung* $\mathfrak{P} = \mathfrak{M} \ltimes \mathfrak{N}$, und es gilt auch $P = M \ltimes N$.

Proposition 1.1.3. *Die k-Levifaktoren von $\mathfrak{P}$ sind die Zentralisatoren der maximalen k-Tori von $\mathscr{R}(\mathfrak{P})$, und je zwei k-Levifaktoren sind durch ein Element von $\mathscr{R}_u(\mathfrak{P})(k)$ zueinander konjugiert. Ist umgekehrt $\mathfrak{S}$ ein k-zerfallender k-Torus, dann ist $\mathscr{Z}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S})$ eine k-Leviuntergruppe von $\mathfrak{G}$. Die $\mathfrak{P}$* entgegengesetzte parabolische Untergruppe*, das ist die eindeutig bestimmte parabolische Untergruppe $\overline{\mathfrak{P}}$ mit $\overline{\mathfrak{P}} \cap \mathfrak{P} = \mathfrak{M}$, ist über k definiert.* □

Da die Struktur von $\mathfrak{G}$ also im wesentlichen bereits über k festliegt, werden im weiteren (fast) nur noch die Gruppen der k-rationalen Punkte notiert.

Definition 1.1.4. Eine *parabolische Untergruppe* einer reduktiven $\mathfrak{p}$-adischen Gruppe G ist die Gruppe P der k-rationalen Punkte einer parabolischen k-Untergruppe $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{G}$. Sei $\mathfrak{M}$ ein k-Levifaktor von $\mathfrak{P}$. Dann heißt $P = MN$ mit $N = \mathscr{R}_u(\mathfrak{P})(k)$ *Levizerlegung* von P. Wir bezeichnen M als *Levifaktor* von P. In diesem Sinne ist eine *Leviuntergruppe* von G ein Levifaktor irgendeiner parabolischen Untergruppe $P \subseteq G$.

Bei gegebenem $\mathfrak{S}$ ist $\mathfrak{M}_0 := \mathscr{Z}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S})$ Levifaktor einer minimalen parabolischen Untergruppe $\mathfrak{P}_0$. Diese halten wir fest.

Definition 1.1.5. Eine parabolische Untergruppe $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{P}_0 \subseteq \mathfrak{P}$ heißt *standardparabolische Untergruppe* (*standard parabolic subgroup*, *sous-groupe parabolique standard*), und $P \supseteq P_0$ heißt standardparabolische Untergruppe von G.

Proposition und Definition 1.1.6. *Jede parabolische Untergruppe von G ist in G zu einer standardparabolischen konjugiert, und es gibt nur endlich viele standardparabolische Untergruppen. Sei P eine standardparabolische Untergruppe. Dann gibt es einen kanonischen Levifaktor M von P mit $M_0 \subseteq M$. Wir schreiben in dieser Situation $M < G$ ([58, II.1.1]).* □

Bemerkung 1.1.7. In der Situation $M < G$ zeichnet sich M dadurch aus, daß es sich wiederum um eine reduktive $\mathfrak{p}$-adische Gruppe mit maximalem k-zerfallendem k-Torus S, aber echt kleinerem halbeinfachem Rang handelt.

1.2 ℓ-Räume und ℓ-Gruppen

Sei $\mathfrak{G}$ eine reduktive $\mathfrak{p}$-adische Gruppe. Dann besitzt $\mathfrak{G}$ eine endlich-dimensionale treue lineare Darstellung, das bedeutet, daß man $\mathfrak{G}$, von dieser Darstellung abhängig, mit einer Zariski-abgeschlossenen Untergruppe einer allgemeinen algebraischen Gruppe GL_n, noch konkreter mit der Gruppe $\mathfrak{G}(\overline{k}) \subseteq \mathrm{GL}_n(\overline{k})$ der $\overline{k}$-rationalen Punkte, also mit einer Matrixgruppe identifizieren kann. Man fixiert solch eine Darstellung und nimmt diese Identifikation vor. Dann ist $G \subseteq \mathrm{GL}_n(k) \subseteq k^{n^2}$. Auf diese Weise kommt ein Zusammenspiel folgender Eigenschaften zustande, an die wir im Rest des Abschnitts erinnern:

(1) G wird durch die Topologie auf k und die obengenannte Identifizierung zu einer lokal kompakten, total unzusammenhängenden topologischen Gruppe, und es gibt daher eine harmonische Analysis auf G.

(2) Die Struktur von G ist dadurch, daß es sich um die k-rationalen Punkte einer reduktiven Gruppe handelt, durch die Kombinatorik des relativen Wurzelsystems bestimmt.

(3) Aus beidem ergeben sich gewisse Zerlegungen von G: die Iwasawa-, Cartan- und Iwahorizerlegung sowie verallgemeinerte Bruhatzerlegungen in Doppelnebenklassen parabolischer Untergruppen.

In diesem Abschnitt interessieren wir uns für die Topologie und rekapitulieren diverse Begriffe. Der Vollständigkeit halber werden einige Aussagen bewiesen, die als »Folklore« gelten können.

Ein topologischer Raum X heißt *lokal kompakt*, wenn jeder Punkt eine kompakte Umgebung besitzt, *total unzusammenhängend*, wenn die Zusammenhangskomponente $K(x)$ jedes Punktes x nur aus diesem Punkt selbst besteht, also $K(x) = \{x\}$. Da der Abschluß einer zusammenhängenden Menge stets zusammenhängend ist, so ist jeder total unzusammenhängende topologische Raum ein T_1-Raum, d. h., jede einpunktige Menge $\{x\}$ ist abgeschlossen. Jede T_0-Gruppe ist schon eine T_2-Gruppe, also *hausdorffsch*.

Bemerkung 1.2.1. Allgemein muß ein total unzusammenhängender, lokal kompakter Raum nicht hausdorffsch sein. In der Tat, sei $X := \mathbb{Z} \cup \{-\infty, \infty\}$, wobei $-\infty$ und ∞ zwei verschiedene Punkte seien, die nicht in $\mathbb{Z}$ liegen. Eine

Menge $U \subseteq \mathbb{Z}$ sei offen, wenn $U \subseteq \mathbb{Z}$ oder wenn $X \setminus U$ eine endliche Menge ist. Dadurch wird X sogar zu einem total unzusammenhängenden, kompakten Raum, der aber nicht hausdorffsch ist, weil $-\infty$ und ∞ keine disjunkten Umgebungen besitzen.

Lemma 1.2.2. Sei X ein kompakter Hausdorffraum und $x \in X$. Die Zusammenhangskomponente von x stimmt mit dem Durchschnitt aller offen-abgeschlossenen Umgebungen von x überein.

Beweis. Siehe Bourbaki [21, Kap. II, § 4, Nr. 4, Prop. 6]. □

Satz 1.2.3.

(1) *Es sei X ein lokal kompakter Hausdorffraum. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- *Jeder Punkt in X besitzt eine Umgebungsbasis aus kompakt-offenen (kompakten, offenen) Mengen.*
- *X ist total unzusammenhängend.*

(2) *Für eine topologische Gruppe G sind folgende Aussagen äquivalent (van Dantzig):*

- *G ist lokal kompakt und total unzusammenhängend.*
- *G ist eine T_0-Gruppe, und die $1 \in G$ hat eine Umgebungsbasis aus kompakt-offenen Untergruppen.*

(3) *Wenn G sogar kompakt und total unzusammenhängend ist, dann gibt es eine Umgebungsbasis der $1 \in G$ aus kompakt-offenen Normalteilern von G.*

Beweis. (1) »$\Rightarrow$« ist klar. »$\Leftarrow$«: Sei $x \in X$ beliebig und $U \in \mathfrak{U}_x$ eine Umgebung. In einem lokal kompakten Hausdorffraum bilden die kompakten Umgebungen jedes Punktes eine Umgebungsbasis [47, 8.16]. Es gibt also eine kompakte Menge $K \subseteq X$ mit $x \in K^\circ \subseteq K \subseteq U$. Im Falle $K = K^\circ$ ist nichts mehr zu zeigen. Anderenfalls gilt $\bigcap_{W \in \mathfrak{W}_x} W = \{x\}$ wegen Lemma 1.2.2, dabei $\mathfrak{W}_x$ das System der offen-abgeschlossenen Umgebungen von x in K, und jedes $y \in \partial K = K \setminus K^\circ$ liegt daher im Komplement irgendeiner Menge aus $\mathfrak{W}_x$. Weil ∂K kompakt ist, gibt es endlich viele $W_1, \dots, W_n \in \mathfrak{W}_x$ mit $\partial K \subseteq \bigcup_{i=1}^n K \setminus W_i$, und $L := \bigcap_{i=1}^n W_i \subseteq K^\circ$ ist dann kompakt-offen in X mit $x \in L \subseteq U$.

(2) Eine T_0-Gruppe ist schon hausdorffsch. Nach Teil 1 genügt es zu zeigen, daß jede kompakte Umgebung der Eins eine kompakt-offene Untergruppe enthält. Siehe hierzu Hewitt-Ross [32, 7.5]. Die Aussage findet sich auch bei Bourbaki [15, Kap. III, § 4, Nr. 6, Prop. 14, Cor. 1]. (3) Siehe [32, 7.6]. □

Der folgende Begriff des ℓ-Raum und der ℓ-Gruppe geht zurück auf Bernstein/Zelevinsky ([6, 1.1]):

Definition 1.2.4. Ein lokal kompakter Hausdorffraum X, für den die beiden äquivalenten Eigenschaften aus Satz 1.2.3 (1) gelten, heißt *ℓ-Raum*. Eine topologische Gruppe G heißt *ℓ-Gruppe*, wenn der zugrundeliegende topologische Raum ein ℓ-Raum ist. Mit $\Omega(G)$ bezeichnen wir das System der kompakt-offenen Untergruppen von G.

Proposition 1.2.5. *Sei G eine ℓ-Gruppe. Dann ist jede kompakte Untergruppe $K \subseteq G$ in einer kompakt-offenen Untergruppe enthalten.*

Beweis. Sei $H \in \Omega(G)$ eine beliebige kompakt-offene Untergruppe. Dann ist zunächst

$$L := \bigcap_{k \in K} kHk^{-1}$$

eine von K normalisierte kompakte Untergruppe von G, aber L ist auch offen: Die Operation $\rho\colon G \times G \to G$, $(g, x) \mapsto gxg^{-1}$, ist stetig mit

$$\rho(K \times \{1\}) = \{1\} \subseteq H,$$

und weil K kompakt ist, gibt es eine offene Menge $U \subseteq G$ mit $1 \in U$ und $\rho(K \times U) \subseteq H$. Wegen $K = K^{-1}$ kann man

$$\rho(K \times U) = \bigcup_{k \in K} k^{-1}Uk \subseteq H$$

schreiben. Daraus folgt aber $U \subseteq L$, also $\operatorname{Int} L \neq \emptyset$; also ist L offen, und LK ist eine kompakt-offene Untergruppe von G, die K enthält. $\square$

Ein topologischer Raum X heißt *zweitabzählbar* (oder *erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom*), wenn es eine abzählbare Basis der Topologie gibt; *Lindelöfraum*, wenn jede offene Überdeckung eine abzählbare Teilüberdeckung besitzt; *separabel*, wenn es eine abzählbare Teilmenge gibt, die dicht in X liegt; *parakompakt*, wenn jede offene Überdeckung eine Verfeinerung derart besitzt, daß es um jeden Punkt eine Umgebung gibt, die nur endlich viele Mengen dieser Verfeinerung schneidet; *σ-kompakt* (oder *abzählbar im Unendlichen*), wenn er Vereinigung endlich vieler kompakter Teilmengen ist.

Jeder metrische Raum ist ein parakompakter Hausdorffraum [26, IX.5.3]. Jeder parakompakte Hausdorffraum ist normal (T_4) [26, VIII.2.2]. Jeder lokal kompakte Hausdorffraum ist *vollständig regulär* [26, XI.6.4]. Jeder metrische Raum erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom, ist hausdorffsch und parakompakt. In einem metrischen Raum fallen die Begriffe Lindelöfraum, zweitabzählbarer Raum und separabler Raum zusammen [26, IX.5.6]. Ein lokal kompakter Hausdorffraum ist genau dann σ-kompakt, wenn er ein Lindelöfraum ist [26, XI.7.2].

Bemerkung 1.2.6. Manche Autoren setzen bei der Definition der genannten Begriffen die Hausdorffeigenschaft und eventuell weitere Eigenschaften voraus.

Satz 1.2.7. *Eine $\mathfrak{p}$-adische algebraische Gruppe G hat die folgenden Eigenschaften:*

(1) G ist eine ℓ-Gruppe.

(2) G ist ein metrischer Raum und erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom.

(3) G ist σ-kompakt, parakompakt, normal.

(4) Für alle kompakt-offenen Untergruppen $K \subseteq G$ ist der Quotient G/K ein abzählbarer diskreter Raum.

Beweis. $(1, 2, 3)$ Die Topologie des lokalen Körpers k ist durch die Metrik $d(x, y) := |x - y|$ des Absolutbetrags gegeben. Die Topologie auf G ist die Spurtopologie des Produktraums $V := k^{m^2}$, wenn man G in $\mathrm{GL}_m(k)$ einbettet. Die Ideale $\mathfrak{p}^n$ $(n \in \mathbb{Z})$ sind kompakt-offene Untergruppen von $(k, +)$ mit $k = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \mathfrak{p}^n$, so daß k insgesamt ein lokal kompakter, total unzusammenhängender, metrisierbarer, σ-kompakter Raum ist. Aus diesen Eigenschaften folgt, daß k auch das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Der Raum V erbt in der Produkttopologie alle diese Eigenschaften.

Nun ist $\mathrm{GL}_m(k) \subseteq V$ offen, und $G \subseteq \mathrm{GL}_m(k)$ ist abgeschlossen. Also ist G in V lokal abgeschlossen. Die lokal abgeschlossenen Unterräume lokal kompakter Hausdorffräume sind ebendie, welche die Eigenschaft erben [26, XI.6.5]. Also ist G lokal kompakt. Ohne weiteres erbt G die Eigenschaft, zweitabzählbar, total unzusammenhängend und metrisierbar zu sein. Indirekt schließen wir, daß G mit diesen Eigenschaften auch σ-kompakt sein muß. Ein metrisierbarer Raum ist immer parakompakt und daher auch normal.

(4) Das ist [48, II.3.2]. Man hat die disjunkte Zerlegung $G = \dot{\bigcup}_{a \in G/K} aK$, wobei die a Repräsentanten aus einer Transversale seien. Wähle eine abzählbare Basis $\mathfrak{B}$ von G. Zu jedem a gibt es dann ein $U \in \mathfrak{B}$ mit $a \in U \subseteq aK$, weil aK offen ist. Somit sind die Nebenklassenräume abzählbar. $\square$

Die folgende Proposition ist wohlbekannt (siehe etwa [6, 1.2]). Wir stellen hier fest, daß wir die ℓ-Unterräume sogar als die lokal abgeschlossenen charakterisieren können:

Proposition 1.2.8. *Sei X ein ℓ-Raum. Die ℓ-Unterräume von X sind genau die lokal abgeschlossenen Unterräume. Insbesondere ist $Y \subseteq X$ ein ℓ-Raum, wenn Y offen oder abgeschlossen ist.*

Beweis. Die Eigenschaften »total unzusammenhängend« und »hausdorffsch« vererben sich auf Unterräume. Wie schon im Beweis von Satz 1.2.7 bemerkt, sind die Unterräume, welche die Eigenschaft »lokal kompakt« erben, genau die lokal abgeschlossenen. □

Lemma 1.2.9. Sei X ein ℓ-Raum, Y ein Hausdorffraum und $\varphi\colon X \to Y$ stetig, offen und surjektiv. Dann ist Y ein ℓ-Raum.

Beweis. Es ist klar, daß Y unter diesen Voraussetzungen lokal kompakt ist. Seien $y_1, y_2 \in Y$ verschieden. Weil Y hausdorffsch, π aber stetig und offen ist, findet man wegen Satz 1.2.3 (1) zwei kompakt-offene Teilmengen $K_1, K_2 \subseteq X$ mit $y_i \in \pi(K_i)$ und $\pi(K_1) \cap \pi(K_2) = \emptyset$. Nun ist $\pi(K_i)$ kompakt-offen, und somit können y_1, y_2 nicht in derselben Zusammenhangskomponente liegen, und Y ist total unzusammenhängend. □

Satz 1.2.10. *Sei G eine ℓ-Gruppe, X ein ℓ-Raum und $\rho\colon G \times X \to X$ eine eigentliche stetige Operation. Dann ist der Bahnenraum $G\backslash X$ ein ℓ-Raum.*

Beweis. Der Bahnenraum $G\backslash X$ ist hausdorffsch, weil ρ eigentlich ist [56, 20.2]. Die Quotientenabbildung $\pi\colon X \to G\backslash X$ ist stetig, offen und surjektiv. Der Rest folgt daher aus dem Lemma. Vgl. [30, 4.5.2]. □

Folgerung 1.2.11 ([6, 1.4])**.** Sei $H \subseteq G$ eine *abgeschlossene* Untergruppe einer ℓ-Gruppe. Dann handelt es sich bei den Nebenklassenräumen $H\backslash G$ und G/H um ℓ-Räume.

Beweis. H operiert auf G durch Linkstranslation $H \times G \to G$, $(h, a) \mapsto ha$. Diese Operation ist frei. In diesem Fall ist $R = \{(a, b) \in G \times G \mid ba^{-1} \in H\} = \varphi^{-1}(H)$ mit der stetigen Abbildung $\varphi\colon G\times G \to G, \varphi(a, b) = ba^{-1}$. Die Operation ist eigentlich (Anhang C.2), und der Raum $H\backslash G$ der Linksnebenklassen ist daher hausdorffsch. Für den Raum G/H der Rechtsnebenklassen ergibt sich das analog. □

1.3 Funktionenräume

Sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Sei d die Charakteristik von R, das heißt, d ist die kleinste positive natürliche Zahl, für die $d \cdot 1_R = 0$ gilt, oder Null, falls es keine solche gibt. Sei ferner X ein ℓ-Raum und V ein R-Modul. Versieht man V mit der diskreten Topologie, so ist eine Funktion $\varphi\colon X \to V$ genau dann stetig, wenn sie *lokal konstant* ist, d. h., wenn es zu jedem $x \in X$ eine Umgebung U mit $\varphi|U = \varphi(x)$ gibt. Sei $\mathcal{C}^\infty(X, V)$ der R-Modul der lokal konstanten Funktionen $\varphi\colon X \to V$. Die Elemente von $\mathcal{C}^\infty(X, V)$ heißen auch *glatte Funktionen.*

Wenn $X = G$ eine ℓ-Gruppe ist, dann betrachten wir außerdem den R-Untermodul $\mathcal{C}_0^\infty(G, V)$ der *gleichmäßig glatten* Funktionen $\varphi\colon G \to V$, zu denen es eine kompakt-offene Untergruppe $K \in \Omega(G)$ gibt mit

$$\varphi(kg) = \varphi(g), \quad k \in K,\ g \in G.$$

Der *Träger* $\operatorname{Tr}\varphi$ einer Funktion $\varphi\colon X \to V$ besteht aus allen $x \in X$ mit $\varphi|U \neq 0$ für alle Umgebungen U von x. Der Träger ist stets abgeschlossen. Er ist genau dann kompakt, wenn es eine kompakt-offene Menge $U \subseteq X$ mit $\varphi|(X \setminus U) = 0$ gibt. Mit $\mathcal{D}(X, V)$ bezeichnen wir den Untermodul der Funktionen mit kompaktem Träger von $\mathcal{C}^\infty(X, V)$ und setzen $\mathcal{D}(X) := \mathcal{D}(X, R)$.

Bemerkung 1.3.1.

(1) Für ein $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(X, V)$ ist $\operatorname{Tr}\varphi$ offen-abgeschlossen, und es gilt

$$\operatorname{Tr}\varphi = \{x \in X \mid \varphi(x) \neq 0\},$$

ohne daß man hiervon den Abschluß bilden muß. Für $\varphi \in \mathcal{D}(X, V)$ ist $\operatorname{Tr}\varphi$ eine kompakt-offen-abgeschlossene Menge.

(2) Die auf Schwartz zurückgehende Notation $\mathcal{D}(X)$ für den Raum der glatten Funktionen auf X mit kompaktem Träger wird bei Renard [48] verwendet. Bernstein und Zelevinsky [6] verwenden die Schreibweise $\mathcal{S}(X)$ und nennen diese Funktionen Schwartzfunktionen. Vignerás [58] schreibt $R_c^\infty(X)$. Verbreitet ist auch $\mathcal{C}_c^\infty(X)$.

Der algebraische duale Modul von $\mathcal{D}(X, V)$ ist

$$\mathcal{D}'(X, V) := \operatorname{Hom}_R(\mathcal{D}(X, V), R),$$

und seine Elemente heißen *Distributionen* auf X. Wir verwenden die Integralschreibweise

$$\int_X \varphi(x)\, \mathrm{d}T(x) := T(\varphi), \quad T \in \mathcal{D}(X, V),$$

oft nur $\displaystyle\int_X f(x)\, \mathrm{d}x$, wenn klar ist, um welches T es sich handelt.

Lemma 1.3.2.

(1) Sei $K \subseteq X$ eine kompakte Teilmenge und $K \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i \subseteq X$ eine offene Überdeckung derselben. Dann gibt es ein System $\mathfrak{V} = \{V_1, \ldots, V_n\}$ aus endlich vielen paarweise disjunkten kompakt-offenen Mengen $V_i \subseteq X$ derart, daß $K \subseteq \dot{\bigcup}_{j=1}^n V_j$ und es zu jedem U_i ein $V \in \mathfrak{V}$ mit $V \subseteq U_i$ gibt.

(2) Wenn X abzählbar im Unendlichen ist, dann läßt sich X als abzählbare disjunkte Vereinigung kompakt-offener Teilmengen schreiben, und jede offene Überdeckung von X hat eine abzählbare Verfeinerung aus paarweise disjunkten kompakt-offenen Teilmengen.

Beweis. Beide Aussagen finden sich bei Guiraud [30, 2.1]. Für die erste Aussage siehe zum Beispiel auch Renard [48, II.1]. □

Die folgenden Aussagen sind wohlbekannt:

Proposition 1.3.3.

(1) Jedes $\varphi \in \mathcal{D}(X, V)$ läßt sich in der Form

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{K_i}\, v_i$$

mit paarweise disjunkten kompakt-offenen Mengen K_i und Vektoren $v_i \in V$ schreiben.

(2) Wenn $X = G$ eine ℓ-Gruppe ist, so gibt es genauer zu jedem $\varphi \in \mathcal{D}(G)$ eine kompakt-offene Untergruppe $K \subseteq G$, unter der φ biinvariant ist, das heißt $\varphi(k_1 g k_2) = \varphi(g)$ für alle $k_1, k_2 \in K$ und $g \in G$. Es gilt dann

$$\varphi = \sum_{g \in G/K} \varphi(g) \cdot \mathbb{1}_{gK} = \sum_{g \in K\backslash G} \varphi(g) \cdot \mathbb{1}_{Kg} = \sum_{g \in K\backslash G/K} \varphi(g) \cdot \mathbb{1}_{KgK}\,.$$

Nur höchstens endlich viele Summanden sind nicht Null.

(3) Seien X und Y zwei ℓ-Räume und V ein R-Modul. Die durch

$$\begin{aligned} &\alpha\colon \mathcal{D}(X) \otimes_R \mathcal{D}(Y) \longrightarrow \mathcal{D}(X \times Y), \quad \alpha(\varphi \otimes \psi)(x, y) := \varphi(x) \cdot \psi(y),\\ &\beta\colon \mathcal{D}(X) \otimes_R V \longrightarrow \mathcal{D}(X, V), \quad \beta(\varphi \otimes v)(x) := \varphi(x) \cdot v, \end{aligned}$$

definierten kanonischen R-linearen Abbildungen sind Isomorphismen.

Beweis. (1) folgt aus dem Lemma. (2) Wegen Satz 1.2.3 kann man zu jedem $g \in G$ ein $K_g \in \Omega(G)$ derart finden, daß $\varphi | K_g g K_g = \varphi(g)$. Da $\operatorname{Tr}\varphi$ kompakt ist, gilt $\operatorname{Tr}\varphi = \bigcup_{i=1}^{n} K_i g_i K_i$ mit endlich vielen $g_i \in G$ und $K_i := K_{g_i} \in \Omega(G)$. Dann ist $K := \bigcap_{i=1}^{n} K_i$ eine kompakt-offene Untergruppe von G mit den gewünschten Eigenschaften.

(3) Jedes Element von $\mathcal{D}(X) \otimes_R \mathcal{D}(Y)$ ist von der Form $\xi = \sum_{i,j} \lambda_{ij} \cdot \mathbb{1}_{K_i} \otimes \mathbb{1}_{L_j}$, wobei die $\lambda_{ij} \in R$ Skalare, (K_i) endlich viele paarweise disjunkte, kompakt-offene Teilmengen von X und (L_j) solche von Y sind. Daraus ergibt

sich, daß dann und nur dann $\alpha(\xi) = 0$ sein kann, wenn alle Skalare Null sind, also auch $\xi = 0$. Andererseits sieht man leicht, daß die Elemente von $\mathcal{D}(X \times Y)$ von der Form $(x, y) \mapsto \sum_{i,j} \lambda_{ij} \cdot \mathbb{1}_{K_i} \cdot \mathbb{1}_{L_j}$ mit den gleichen Bezeichnungen sind. Man benutzt für beide Richtungen Lemma 1.3.2. Daß die R-lineare Abbildung β surjektiv ist, folgt aus (1). Andererseits läßt sich jedes Element von $\mathcal{D}(X) \otimes_R V$ in der Form $\eta = \sum_i \mathbb{1}_{K_i} \otimes v_i$ mit endlich vielen paarweise disjunkten, kompakt-offenen Mengen $K_i \subseteq X$ und $v_i \in V$ schreiben. Es folgt $\beta(\eta) = 0 \Leftrightarrow \eta = 0$. □

Das nachstehende »Bernstein(-Zelevinsky)sche Lemma« ist ebenso einfach wie grundlegend. Wir werden es immer wieder benutzen.

Lemma 1.3.4 ([6, 1.8, 1.9])**.** Sei $U \subseteq X$ offen und $A := X \smallsetminus U$ das abgeschlossene Komplement. Dann hat man die folgende kurze exakte Sequenz von R-Moduln:

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}(U, V) \xrightarrow{i_U} \mathcal{D}(X, V) \xrightarrow{p_A} \mathcal{D}(A, V) \longrightarrow 0.$$

Dabei ist i_U die Fortsetzung durch Null und p_A die Einschränkung auf A. Die duale Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}'(A, V) \xrightarrow{p_A^*} \mathcal{D}'(X, V) \xrightarrow{i_U^*} \mathcal{D}'(U, V) \longrightarrow 0$$

ist ebenfalls exakt.

Beweis. Siehe etwa Renard [48, II.1.2]. □

Bemerkung 1.3.5. $\mathcal{D}(U, V)$ kann mit dem Unterraum der $\varphi \in \mathcal{D}(G, V)$ mit $\operatorname{Tr} \varphi \subseteq U$ identifiziert werden.

1.4 Die Iwasawa-Zerlegung

Es sei G eine reduktive $\mathfrak{p}$-adische Gruppe und P_0 eine fest gewählte minimale parabolische Untergruppe.

Proposition 1.4.1 ([48, V.5.1])**.**

(1) Es gibt nur endlich viele Konjugationsklassen maximaler kompakter Untergruppen in G, und jede maximale kompakte Untergruppe ist offen.

(2) Sei $P = MN$ eine standardparabolische Untergruppe bzgl. P_0. Es gibt zu P_0 eine maximale kompakte Untergruppe K_0 mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $G = K_0P_0 = P_0K_0$ *(*Iwasawa-Zerlegung*).*

(ii) $K_0 \cap P = (K_0 \cap M)(K_0 \cap N)$.

(iii) *Jedes Element $w \in W_G$ der Weylgruppe von G hat einen Repräsentanten in K_0.*

(iv) $K_{0,M} \coloneqq K_0 \cap M$ *ist eine maximale kompakte Untergruppe von M mit den gleichen Eigenschaften für die minimale parabolische Untergruppe $P_0 \cap M$, wie K_0 sie für P_0 hat.*

Folgerung 1.4.2.

(1) Die Iwasawa-Zerlegung gilt auch für die entgegengesetzte minimale parabolische Untergruppe: $G = K_0\bar{P}_0 = \bar{P}_0K_0$. Für alle $w \in \mathcal{W}_G$ gilt allgemeiner

$$G = K_0(wPw^{-1}) = (wPw^{-1})K_0 = K_0(w\bar{P}w^{-1}) = (w\bar{P}w^{-1})K_0.$$

(2) Für jede parabolische Untergruppe P ist G/P kompakt.

Beweis. (1) Man kann $w \in K_0$ annehmen, da zwei Repräsentanten von w in $\mathcal{N}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S})(k)$ modulo $\mathcal{Z}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S})(k) = M_0 \subseteq P$ gleich sind. Insbesondere gilt $G = w_0Gw_0 = K_0w_0P_0w_0 = K_0\bar{P}_0$. Die übrigen Zerlegungen ergeben sich ähnlich. (2) Man kann annehmen, daß P standardparabolisch ist. Wegen $G = K_0P$ ist die stetige Abbildung $K_0 \hookrightarrow G \twoheadrightarrow G/P$ surjektiv. $\square$

1.5 Die Cartan- und die Iwahori-Zerlegung

Sei S ein maximaler k-zerfallender k-Torus von G und P_0 die minimale parabolische Untergruppe mit $M_0 = \mathcal{Z}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S})(k)$. Der Torus S ist zugleich ein maximaler k-zerfallender k-Torus in $\mathscr{R}(P_0)$ und somit ebendas, was Renard [48] als *Composante déployee* bezeichnet, vgl. § 20 bei Borel [12]. Sei $\Phi = \Phi(S, G)$ das Wurzelsystem bzgl. S, und wenn $H \subseteq G$ eine abgeschlossene Untergruppe ist, so sei H° die von den kompakten Untergruppen von H erzeugte Untergruppe. Das ist ein offener Normalteiler von H. Das Folgende übernehmen wir von Vignéras [58, II.1.3]: Jedes $s \in S$ definiert eine parabolische Gruppe $P_s = M_sN_s$, indem

$$N_s = \prod_{\substack{\alpha\in\Phi_{\mathrm{nd}} \\ v(\alpha(s))>0}} N_{(\alpha)}, \quad \bar{N}_s = \prod_{\substack{\alpha\in\Phi_{\mathrm{nd}} \\ v(\alpha(s))<0}} N_{(\alpha)}$$

und M_s von M_0 und den $N_{(\alpha)}$ mit $v(\alpha(s)) = 0$ erzeugt wird. Hierbei ist $v\colon k \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ die nicht-archimedische Bewertung, siehe Anhang A. Es gilt nun $S \subseteq P_s$, aber nicht immer ist $P_0 \subseteq P_s$. Die Menge S^+ der $s \in S$, für die P_s eine standardparabolische Untergruppe darstellt, ist eine Halbgruppe (also multiplikativ abgeschlossen), welche S° enthält, und S^+/S° ist endlich erzeugt.

Sei $X = M_0$ oder $X = \mathcal{Z}(M)$ mit $M < G$. Für alle $m \in X$ gibt es dann $r > 0$ derart, daß $m^r = sx$ mit $s \in S$ und $x \in X^\circ$, und man ordnet m die parabolische Gruppe $P_m := P_s$ zu. Die Menge M_0^+ derjenigen $m \in M_0$, für die P_m eine standardparabolische Gruppe darstellt, ist eine Halbgruppe, die M_0° enthält, und M_0^+/M_0° ist endlich erzeugt.

Satz und Definition 1.5.1. *Sei K_0 die maximale kompakte Untergruppe aus Prop. 1.4.1.*

(1) *Es gibt eine* 1*-Umgebungsbasis von G aus* Kongruenzuntergruppen, *das sind kompakt-offene Untergruppen $K \in \Omega(G)$ mit den folgenden Eigenschaften:*

- *K ist ein Normalteiler von K_0.*
- *Zu jeder standardparabolischen Untergruppe $P = M \ltimes N$ besitzt K eine* Iwahori-Zerlegung

$$K = K_{\bar{N}} K_M K_N, \quad K_X \coloneqq K \cap X.$$

Die Reihenfolge dieser Faktoren ist beliebig vertauschbar, und die Multiplikationsabbildung

$$K_{\bar{N}} \times K_M \times K_N \to K$$

ist ein Homöomorphismus.

(2) *Es gilt die* Cartan-Zerlegung $G = K_0 M_0^+ K_0$.

(3) *Sei $P = MN$. Für alle $m \in \mathcal{Z}(M)$ mit $P_m \subseteq P$ gilt dann $mNm^{-1} \subseteq N$ und $\bar{N} \subseteq m\bar{N}m^{-1}$, und jedes $K \in \Omega(N)$ definiert eine fallende und eine steigende Filtrierung*

$$mKm^{-1} \supseteq m^2Km^{-2} \supseteq \cdots, \quad m^{-1}Km \subseteq m^{-2}Km^2 \subseteq \cdots$$

derart, daß

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} m^n K m^{-n} = \{1\} \quad \text{und} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} m^{-n} K m^n = N,$$

hingegen jedes $\bar{K} \in \Omega(\bar{N})$ eine fallende und eine steigende Filtrierung

$$m^{-1}\bar{K}m \supseteq m^{-2}\bar{K}m^2 \supseteq \cdots, \quad m\bar{K}m^{-1} \subseteq m^2\bar{K}m^{-2} \subseteq \cdots$$

derart, daß

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} m^{-n} \bar{K} m^{n} = \{1\} \quad \text{und} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} m^{n} \bar{K} m^{-n} = \bar{N}.$$

Insbesondere sind N und $\bar{N}$ Vereinigung ihrer kompakten Mengen.

Beweis. Siehe Vignéras [58, II.1.3] und Renard [48, V.5.2]. □

Definition 1.5.2. Sei p eine Primzahl. Eine kompakte, total unzusammenhängende Gruppe K (mit anderen Worten eine *proendliche Gruppe*) heißt *Pro-p-Gruppe*, wenn für jeden offenen Normalteiler $L \trianglelefteq K$ die endliche Gruppe K/L eine p-Gruppe ist, d. h. wenn $|K/L| = [K : L]$ eine Potenz von p ist.

Lemma 1.5.3. Jede abgeschlossene Untergruppe einer Pro-p-Gruppe ist wieder eine solche.

Beweis. Sei K eine Pro-p-Gruppe, $H \subseteq K$ abgeschlossen und $L \trianglelefteq H$ offen. Nach Prop. 1.2.3 gibt es einen kompakt-offenen Normalteiler $N \trianglelefteq K$ mit $N \cap H \subseteq L$. Außerdem ist $NH \subseteq K$ eine offene Untergruppe, und es gilt $NH/N \cong H/(H \cap N)$ nach dem ersten Isomorphiesatz, auch topologisch, weil N kompakt und H abgeschlossen ist. Damit bekommt man $[K : N] = [K : NH][NH : N]$ nebst $[NH : N] = [H : H \cap N] = [H : L][L : H \cap N]$, und weil $[K : N]$ nach Voraussetzung eine Potenz von p ist, muß auch $[H : L]$ eine sein. □

Sei G eine reduktive $\mathfrak{p}$-adische Gruppe und p die Charakteristik des Restklassenkörpers des zugrundeliegenden $\mathfrak{p}$-adischen Körpers.

Lemma 1.5.4.

(1) Es gibt eine Pro-p-Untergruppe $K \in \Omega(G)$.

(2) Sei $K \in \Omega(G)$ eine Pro-p-Untergruppe. Dann ist $[K : L]$ eine Potenz von p für alle $L \in \Omega(K)$.

Beweis. (1) Siehe Meyer/Solleveld [41, 1.1]. (2) Nach Prop. 1.2.3 enthält L einen offenen Normalteiler $U \trianglelefteq K$, der dann auch ein offener Normalteiler von L ist. Aus $[K : U] = [K : L][L : U]$ folgt sofort die Behauptung. □

Folgerung 1.5.5. Auf allen abgeschlossenen Untergruppen $H \subseteq G$ gibt es ein Haarmaß mit Werten in $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}] = \{f(\frac{1}{p}) \in \mathbb{Q} \mid f \in \mathbb{Z}[X]\}$. Der Ring R erfülle die folgende Bedingung:

- Die Primzahl p ist in R invertierbar.

Dann gibt es ein Haarmaß in $\mathcal{D}'(H)$, also mit Werten in R.

Beweis. Nach Lemma 1.5.4 gibt es eine Pro-p-Untergruppe $K \in \Omega(G)$. Nach Lemma 1.5.3 ist $H \cap K$ eine solche von H, und man kann eine Umgebungsbasis von $1 \in H$ aus Pro-p-Untergruppen wählen. Die Elemente dieser Umgebungsbasis erfüllen dann die Bedingung aus Satz 1.7.7. □

Satz und Definition 1.5.6. *Die reduktive $\mathfrak{p}$-adische Gruppe G besitzt eine abzählbare* 1*-Umgebungsbasis aus* Pro-p-Kongruenzuntergruppen, *das sind Pro-p-Untergruppen $K \in \Omega(G)$, die sich nach Iwahori, s. Satz 1.5.1 zerlegen lassen, und eine abzählbare Basis der Topologie aus Translaten dieser Pro-p-Kongruenzuntergruppen.*

Beweis. Nach Satz 1.5.1 gibt es eine 1-Umgebungsbasis aus Kongruenzuntergruppen $K \in \Omega(G)$. Ist $K' \in \Omega(G)$ eine Pro-p-Untergruppe, dann bilden die Gruppen $K \cap K'$ eine 1-Umgebungsbasis aus Pro-p-Kongruenzuntergruppen. Alles Weitere folgt daraus, daß G zweitabzählbar ist (Satz 3.4.3). □

1.6 Glatte Darstellungen von ℓ-Gruppen

Eine *Darstellung* (π, V) von G besteht aus einem R-Modul V und einem Gruppenhomomorphismus $\pi \colon G \to \mathrm{Aut}_R(V)$.

Definition 1.6.1. Eine Darstellung (π, V) von G heißt *glatt*, wenn für jedes $v \in V$ die Stabilisatoruntergruppe $G_v = \{g \in G \mid \pi(g) \cdot v = v\}$ in G offen ist.

Bemerkung 1.6.2.

- Diese Bedingung ist äquivalent dazu, daß die Abbildung $G \times V \to V$, $(g, v) \mapsto \pi(g) \cdot v$, stetig ist, wenn man V mit der diskreten Topologie versieht.
- Oft schreiben wir gv oder $g \cdot v$ statt $\pi(g) \cdot v$, wenn nicht zwischen mehreren π unterschieden werden muß.

Seien (π_i, V_i), $i = 1, 2$, Darstellungen von G. Eine R-lineare Abbildung $\varphi \colon V_1 \to V_2$ heißt *G-äquivariant* oder *G-Morphismus*, wenn

$$\varphi(gv) = g\varphi(v), \quad g \in G,\ v \in V.$$

Zusammen mit den G-Morphismen bilden die glatten Darstellungen von G eine abelsche Kategorie, die wir $\mathfrak{R}(G)$ schreiben. Wir erinnern an einige Begriffe:

Definition 1.6.3.

(1) Sei (π, V) eine glatte Darstellung und $K \in \Omega(G)$. Der *Untervektorraum der Invarianten* von K ist $V^K := \{v \in V \mid \forall k \in K : \pi(k) \cdot v = v\}$.

(2) Sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Der *H-Koinvariantenraum* ist der R-Modul
$$V_H := \frac{V}{\langle v - hv \mid h \in H,\ v \in V\rangle}.$$
Er ist der größte Quotient von V, auf dem H trivial operiert.

(3) Eine eindimensionale glatte Darstellung ist das gleiche wie ein Gruppenhomomorphismus $\varphi\colon G \to R^*$ mit offenem Kern und heißt (mißverständlich) *Charakter* von G.

(4) Sei $0 \to (\pi_1, V_1) \to (\pi, V) \to (\pi_2, V_2) \to 0$ eine kurze exakte Sequenz in $\mathfrak{R}(G)$. Dann heißt (π_1, V_1) *Unterdarstellung* und (π_2, V_2) *Quotient* von (π, V). Wenn (π, V) dabei eine Unterdarstellung von (ρ, W) ist, so heißt (π_2, V_2) *Unterquotient* von (ρ, W).

(5) Eine glatte Darstellung (π, V) heißt

  (i) *zulässig* (*admissible*), wenn V^K für alle $K \in \Omega(G)$ endlich erzeugt ist (oder, falls R sogar ein Körper ist, endlichdimensional);

  (ii) *irreduzibel*, wenn 0 und (π, V) die einzigen Unterdarstellungen sind;

  (iii) *endlich erzeugt* (oder *von endlichem Typ*), wenn es eine endliche Teilmenge $V_0 \subseteq V$ derart gibt, daß $V = \langle \pi(g) \cdot v \mid g \in G, v \in V_0\rangle$;

  (iv) *halbeinfach*, wenn sich V als direkte Summe irreduzibler Unterdarstellungen schreiben läßt;

  (v) *unzerlegbar* (*indecomposable*, *indécomposable*), wenn sich V nicht als direkte Summe nicht-trivialer Unterdarstellungen schreiben läßt.

1.7 Das Haarmaß auf einer ℓ-Gruppe

Es sei G eine ℓ-Gruppe und R ein kommutativer Ring mit Eins. Wichtig ist, daß wir eine Integrationstheorie für G haben. Diese ist erfreulicherweise völlig algebraisch und läßt sich auf Indizes kompakt-offener Untergruppen zurückführen. Wir folgen hier Vignéras [58].

Definition 1.7.1. Seien $K_i \subseteq G$, $i = 1, 2$, kompakt-offene Untergruppen. Der *verallgemeinerte Index* davon ist die Zahl

$$[K_1 : K_2] \coloneqq \frac{[K_1 : K_1 \cap K_2]}{[K_2 : K_1 \cap K_2]} \in \mathbb{Q},$$

wobei rechts Indizes im üblichen algebraischen Sinne stehen.

Bemerkung 1.7.2. Im Falle $K_2 \subseteq K_1$ stimmt der verallgemeinerte Index $[K_1 : K_2]$ mit dem üblichen überein.

Auf den Funktionenräumen $\mathcal{D}(G)$ und $\mathcal{D}'(G)$ operiert G wie üblich durch Links- und Rechtstranslation:

$$(g\varphi)(x) \coloneqq \varphi(g^{-1}x), \quad (\varphi g)(x) \coloneqq \varphi(xg^{-1}), \quad g, x \in G,\ \varphi \in \mathcal{D}(G).$$

Bemerkung 1.7.3. Man kann zwischen Links- und Rechtsdarstellungen unterscheiden. Die Inversion auf G ermöglicht den Übergang von dem einen zum anderen. Die zur Rechtstranslation korrespondierende Linksdarstellung ist

$$r\colon G \to \mathrm{Aut}_R(\mathcal{D}(G)), \quad (r(g) \cdot \varphi)(x) \coloneqq \varphi(xg).$$

Definition 1.7.4. Ein *Haarmaß* (Linkshaarmaß) auf G ist eine Distribution $\mu \in \mathcal{D}'(G)$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) $\mu \neq 0$.

(2) μ ist invariant unter Linkstranslation von G, das heißt $g\mu = \mu$ für alle $g \in G$ oder gleichbedeutend

$$\int_G \varphi(gx)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_G \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu(x), \quad g \in G,\ \varphi \in \mathcal{D}(G).$$

Ein *Rechtshaarmaß* von G erfüllt (2′) $\mu g = \mu$ statt (2).

Bemerkung 1.7.5. Im Falle $R = \mathbb{C}$ kann man als dritte Bedingung noch verlangen, daß μ *positiv* ist, das heißt, daß $\mu(\varphi) > 0$ für alle $\varphi \neq 0$ mit $\varphi \geq 0$ ([48, II.3.6]).

Definition 1.7.6. Wir sagen, daß $K \in \Omega(G)$ *invertierbare Proordnung* in R hat, wenn $[K : L] \in R^*$ für alle $L \in \Omega(K)$.

Satz 1.7.7 ([58, I.2.4]). *Sei $K_1 \in \Omega(G)$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(1) Es gibt ein eindeutiges Haarmaß $\mu \in \mathcal{D}'(G)$ mit $\mathrm{vol}(K_1) = 1$.

(2) Die Gruppe $K_1 \in \Omega(G)$ hat invertierbare Proordnung in R.

Ist dies der Fall, so gilt

$$\mathrm{vol}(K) \overset{Def.}{=} \mu(\mathbb{1}_K) = [K : K_1], \quad K \in \Omega(G), \tag{1.1}$$

$$\int_G \varphi(g)\,\mathrm{d}\mu(g) = \sum_{g \in G/K} \varphi(g) \cdot \mathrm{vol}(K), \quad \varphi \in \mathcal{D}(G, K). \tag{1.2}$$

Beweis. »1 ⇒ 2«: Jedes $\varphi \in \mathcal{D}(G)$ ist nach Prop. 1.3.3 von der Form

$$\varphi = \sum_{g \in G/K} \varphi(g)\ \mathbb{1}_{gK} = \sum_{g \in G/K} \varphi(g)\, g \cdot \mathbb{1}_K$$

mit einem gewissen von φ abhängigen $K \in \Omega(G)$. Es folgt sofort Formel (1.2), und für alle $L \in \Omega(K_1)$ gilt $[K_1 : L] \cdot \mathrm{vol}(L) = \mathrm{vol}(K_1) = 1$. Also hat K_1 invertierbare Proordnung in R. »2 ⇒ 1«: Wenn umgekehrt K_1 invertierbare Proordnung in R hat, dann definiert

$$\mu(\varphi) \coloneqq \sum_{g \in G/K_1 \cap K} \varphi(g) \cdot [K_1 \cap K : K_1], \quad \varphi \in \mathcal{D}(G, K),$$

ein Haarmaß mit $\mu(K_1) = 1$. In der Tat, ist $\varphi \in \mathcal{D}(G, K) \cap \mathcal{D}(G, L)$, $L \in \Omega(G)$, so gilt

$$\begin{aligned}
\mu(\varphi) &= \sum_{g \in G/K_1 \cap K} \varphi(g) \cdot [K_1 \cap K : K_1] \\
&= \sum_{g \in G/K_1 \cap K \cap L} \varphi(g) \cdot [K_1 \cap K \cap L : K \cap K_1] \cdot [K_1 \cap K : K_1] \\
&= \sum_{g \in G/K_1 \cap K \cap L} \varphi(g) \cdot [K_1 \cap K \cap L : K_1].
\end{aligned}$$

Indem man die Rollen von K und L vertauscht, sieht man, daß die Definition nicht von der Wahl von K abhängt. Es ist klar, daß μ linksinvariant ist. □

Bemerkung 1.7.8. Die Existenz eines Haarmaßes ist eine von zwei Bedingungen an den Ring R. Natürlich ist dies stets der Fall, wenn R die Charakteristik 0 hat. Die andere Bedingung tritt dort auf, wo die kompakten und kuspidalen Darstellungen ins Spiel kommen.

1.7.1 Die modulare Funktion

Definition 1.7.9. Die *modulare Funktion* $\delta_G\colon G \to \mathbb{Q}^*$ ist durch den verallgemeinerten Index $\delta_G(g) \coloneqq [g^{-1}Kg : K]$ erklärt, wobei $K \in \Omega(G)$ beliebig ist.

Bemerkung 1.7.10. Vignéras [58, 2.6] betrachtet δ_G^{-1} statt δ_G.

Satz 1.7.11. *Die modulare Funktion hat die folgenden Eigenschaften:*

(1) *Die Definition hängt nicht von K ab.*

(2) *$\delta_G|K = 1$ für alle $K \in \Omega(G)$.*

(3) *δ_G ist ein Charakter von G (d. i. ein Gruppenhomomorphismus mit offenem Kern).*

Sei $\mu \in \mathcal{D}'(G)$ ein Haarmaß auf G.

(4) *Die modulare Funktion δ_G nimmt dann Werte in R an. Wenn G eine reduktive $\mathfrak{p}$-adische Gruppe ist, so nimmt δ_G Werte in $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ an.*

(5) *Durch $\varphi \mapsto \displaystyle\int_G \frac{\varphi(x)}{\delta_G(x)}\,\mathrm{d}\mu(x)$ ist ein Rechtshaarmaß auf G gegeben.*

(6) *Für alle $g \in G$ gilt*

- $\displaystyle\int_G \varphi(xg)\,\mathrm{d}\mu(x) = \frac{1}{\delta_G(g)}\int_G \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$ *und*
- $\displaystyle\int_G \varphi(x^{-1})\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_G \frac{\varphi(x)}{\delta_G(x)}\,\mathrm{d}\mu(x)$.

Beweis. Die Eigenschaften 1–5 stehen in [58, 2.7]. (6) Es gibt ein $K \in \Omega(G)$ mit $\mathrm{vol}(K) = 1$. Bei der ersten Behauptung steht auf beiden Seiten ein Haarmaß. Es genügt zu zeigen, daß für $\varphi = \mathbb{1}_K$ das gleiche herauskommt; das ist aber wegen

$$\int_G \mathbb{1}_K(xg)\,\mathrm{d}x = \int_G \mathbb{1}_K(g^{-1}xg)\,\mathrm{d}x = \mathrm{vol}(gKg^{-1}) = \delta_G(g^{-1}) = \frac{1}{\delta_G(g)}$$

der Fall. Bei der zweiten Behauptung steht beiderseits ein Rechtshaarmaß (das ergibt sich aus der ersten Identität), und es ist klar, daß für $\varphi = \mathbb{1}_K$ das gleiche herauskommt. □

Definition 1.7.12. Wenn $\delta_G = 1$ gilt, dann heißt G *unimodular*.

Proposition 1.7.13. *Die ℓ-Gruppe G sei (1) kompakt, (2) Vereinigung ihrer kompakt-offenen Untergruppen oder (3) eine reduktive $\mathfrak{p}$-adische Gruppe. Dann ist G unimodular.*

Beweis. (1) und (2) folgen sofort aus der Definition der modularen Funktion. Zu (3) siehe Renard [48, V.5.4]. □

Bemerkung 1.7.14. Sei G eine reduktive $\mathfrak{p}$-adische Gruppe und $P = MN$ eine parabolische Untergruppe. Dann ist M wiederum eine reduktive $\mathfrak{p}$-adische Gruppe, und das unipotente Radikal N ist Vereinigung seiner kompakt-offenen Untergruppen. Also sind G, M und N, falls $p \in R^*$, unimodular, aber P ist im allgemeinen nicht unimodular.

1.7.2 Maße auf homogenen Räumen

Sei G eine ℓ-Gruppe und $H \subseteq G$ eine abgeschlossene Untergruppe. Die homogenen Räume $H\backslash G$ und G/H sind ℓ-Räume. Es gebe Haarmaße $\mu_G \in \mathcal{D}'(G)$ und $\mu_H \in \mathcal{D}'(H)$. Wir behandeln den ersten Fall und definieren

$$\delta_{H\backslash G}\colon H \to R^*, \quad \delta_{H\backslash G}(h) := \frac{\delta_G(h)}{\delta_H(h)}.$$

Das ist ein (glatter) Charakter von H. Wir folgen nun der Darstellung bei Renard [48, II.3.9] und definieren $\mathcal{D}(G, H, \delta_{H\backslash G})$ als den Raum der Funktionen $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(G)$ mit

$$\varphi(hg) = \delta_{H\backslash G}(h) \cdot \varphi(g), \quad g \in G,\ h \in H,$$

und kompaktem Träger modulo H, das heißt, es gibt eine kompakte Menge $C \subseteq G$ mit $\operatorname{Tr}\varphi \subseteq HC$. Wenn $\delta_{H\backslash G} = 1$ oder, anders ausgedrückt, $\delta_G|H = \delta_H$, dann ist $\mathcal{D}(G, H, \delta_{H\backslash G}) \cong \mathcal{D}(H\backslash G)$.

Proposition 1.7.15 ([48, II.3.9])**.** *Die Abbildung $\mathcal{D}(G) \to \mathcal{D}(G, H, \delta_{H\backslash G})$, $\varphi \mapsto \bar{\varphi}$, wobei*

$$\bar{\varphi}(g) := \int_H \varphi(hg) \cdot \delta_G^{-1}(h)\,\mathrm{d}h,$$

ist eine surjektive G-rechtsäquivariante Abbildung, und auf dem rechtsstehenden Raum gibt es eine bis auf einen skalaren Faktor eindeutige G-rechtsinvariante Distribution. In Abhängigkeit von dem Haarmaß auf G läßt sie sich durch die folgende Formel beschreiben:

$$\int_{H\backslash G} \bar{\varphi}(y)\,\mathrm{d}y = \int_G \varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$ □

1.7.3 Rechenregeln für das Haarmaß

Die folgende Fassung des Satzes von Fubini werden wir laufend verwenden:

Proposition 1.7.16 (Satz von Fubini)**.** *Seien G und H zwei ℓ-Gruppen mit Haarmaßen $\mu_G \in \mathcal{D}'(G)$ und $\mu_H \in \mathcal{D}'(H)$. Es gibt genau ein Haarmaß $\nu \in \mathcal{D}'(G \times H)$ mit $\nu(\varphi \otimes \psi) = \mu_G(\varphi) \cdot \mu_H(\psi)$ im Sinne des Isomorphismus $\mathcal{D}(G \times H) \cong \mathcal{D}(G) \otimes_R \mathcal{D}(H)$ aus Prop. 1.3.3, und für dieses gilt*

$$\nu(f) = \int_G \Big[\int_H f(x,y)\,\mathrm{d}\mu_H(y) \Big] \mathrm{d}\mu_G(x) = \int_H \Big[\int_G f(x,y)\,\mathrm{d}\mu_G(x) \Big] \mathrm{d}\mu_H(y).$$

Beweis. Die Regel $\nu(\varphi \otimes \psi) = \mu_G(\varphi) \cdot \mu_H(\psi)$ ist $(G \times H)$-linksinvariant, und wenn $K \in \Omega(G)$ und $L \in \Omega(H)$ die Bedingung aus Satz 1.7.7 erfüllen, dann auch $K \times L \in \Omega(G \times H)$. Die Gleichheiten sind für Elemente der Form $\varphi \otimes \psi$ klar, da sich die Variablen trennen lassen, aber das genügt bereits, weil jedes Element von $\mathcal{D}(G \times H)$ Linearkombination solcher Elemente ist. □

Sei G eine reduktive $\mathfrak{p}$-adische Gruppe, $P = MN$ eine parabolische, $K_0 \subseteq G$ eine maximale kompakte Untergruppe. Die folgenden Integralformeln finden sich auch bei Guiraud [30, Prop. 2.5.1]. Wir geben einen Beweis an.

Proposition 1.7.17. *Seien Linkshaarmaße auf K_0, M und N vorgegeben. Bis auf einen Normierungsfaktor gilt:*

(1) $\displaystyle\int_P \varphi(p)\,\mathrm{d}p = \int_M \int_N \varphi(mn)\,\mathrm{d}n\,\mathrm{d}m.$

(2) $\displaystyle\int_G \varphi(g)\,\mathrm{d}g = \int_M \int_N \int_{K_0} \varphi(mn\lambda)\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}n\,\mathrm{d}m.$

Beweis. (1) Das folgt unmittelbar aus der Levi-Zerlegung $P = M \ltimes N$. Ein Linkshaarmaß auf P ist somit proportional zum Produktmaß auf $M \times N$.

(2) Aufgrund der Iwasawa-Zerlegung $G = PK_0$ kann man eine stetige, transitive Operation $P \times K_0 \curvearrowright G$ durch $(p, \lambda) \cdot g := pg\lambda^{-1}$ definieren. Das Element $1 \in G$ hat die Stabilisatoruntergruppe

$$H := (P \times K_0)_1 = \{(k,k) \mid k \in K_{0,P}\} \cong K_{0,P} := K_0 \cap P,$$

und man gewinnt mit Hilfe dieser Operation einen Homöomorphismus

$$H \backslash (P \times K_0) \cong G.$$

Weil H sogar kompakt ist, gibt es auf dem homogenen Raum $H\backslash(P \times K_0)$ ein rechtsinvariantes Maß mit

$$\int\limits_{P\times K_0} \varphi(p,\lambda)\,\mathrm{d}p\,\mathrm{d}\lambda = \int\limits_{H\backslash(P\times K_0)} \bar\varphi\big(H\backslash x\big)\,\mathrm{d}(H\backslash x),$$

$$\bar\varphi(H\backslash x) = \int_H \varphi(hx)\,\mathrm{d}h, \quad x \in P \times K_0.$$

Dieses definiert dann auch ein rechtsinvariantes Maß auf G. Weil G unimodular ist, handelt es sich um ein Links- und Rechtshaarmaß. Sei $\varphi_0 \in \mathcal{D}(G)$. Da K_0 kompakt ist, definiert $\varphi(p,\lambda) := \varphi_0(p\lambda)$ ein Element von $\mathcal{D}(P \times K_0)$. Wir erhalten damit und mit dem Satz von Fubini die Formel

$$\int_P \int_{K_0} \varphi_0(p\lambda)\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}p = \int_G \int_{K_{0,P}} \varphi_0(kgk^{-1})\,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}g = \mathrm{vol}(K_{0,P}) \int_G \varphi_0(g)\,\mathrm{d}g.$$

Aus (1) folgt dann die Behauptung. □

Folgerung 1.7.18. Für $\varphi \in \mathcal{D}(N)$ gilt die folgende Formel:

$$\int_N \varphi(mnm^{-1})\,\mathrm{d}n = \delta_P(m) \int_N \varphi(n)\,\mathrm{d}n, \quad m \in M.$$

Beweis. Sei $K = K_M K_N \in \Omega(P)$ eine Kongruenzuntergruppe mit invertierbarer Proordnung in R. Es ist klar, daß links ebenfalls ein Haarmaß steht. Um den Faktor, um den es sich von dem gegebenen unterscheidet, zu berechnen, genügt Auswertung für $\varphi = e_{K_N}$. Sei $m_0 \in M$. Man erhält:

$$\int_N e_{K_N}(m_0 n m_0^{-1})\,\mathrm{d}n = \int_M \int_N e_{K_M}(m_0 m m_0^{-1})\, e_{K_N}(m_0 n m_0^{-1})\,\mathrm{d}n\mathrm{d}m$$

$$= \int_P e_K(m_0 p m_0^{-1})\,\mathrm{d}p = \delta_P(m_0) \int_P e_K(p)\,\mathrm{d}p = \delta_P(m_0) \int_N e_{K_N}(n)\,\mathrm{d}n. \qquad \square$$

2. DIE MODULSPRACHE

Die Heckealgebra $\mathcal{D}(G)$ einer reduktiven $\mathfrak{p}$-adischen Gruppe G (mit Werten in einem kommutativen Ring R mit Eins) gehört zur Klasse der assoziativen R-Algebren mit genügend Idempotenten (hier *glatte Algebren* genannt), die im allgemeinen nicht-kommutativ sind und keine Eins haben. Dieses Kapitel erinnert zunächst an diese Objekte. Sei B ein solche Algebra. In der monoidalen Kategorie ${}_B\mathfrak{M}_B$ der glatten B-Bimoduln, die wir definieren werden, kann man wiederum assoziative Algebren und koassoziative Koalgebren (auch *Ringe* und *Koringe* genannt, Brzeziński und Wisbauer [18]) betrachten, und zwar diesmal mit Eins bzw. Koeins. Da B jedoch im allgemeinen keine Eins hat, so ist hier etwas Achtung geboten. Die zugehörigen Algebra- und Koalgebrakategorien werden wir später für Zerlegungen von $\mathfrak{R}(G)$ bzw. der Kategorie ${}_A\mathfrak{M}$ der glatten Linksmoduln von $A = \mathcal{D}(G)$ benötigen. Dann ist $B = \mathcal{D}(M)$.

Des weiteren erinnern wir in diesem Kapitel an die Äquivalenz zwischen der abelschen Kategorie der glatten (nicht ausgearteten) $\mathcal{D}(G)$-Moduln und jener der glatten Darstellungen von G. Für die Konstruktion benötigt man die Voraussetzung $p \in R^*$, weil es dann, und nur dann, ein Haarmaß $\mu \in \mathcal{D}'(G)$ gibt. Diese bekannte Äquivalenz gibt den Anlaß zu dieser Arbeit. Wir erinnern ferner an Hom- und Tensorfunktoren, induziert von glatten Bimoduln, und daran, wie sich die verschiedenen Induktions- und Restriktionsfunktoren, die wir brauchen, als Hom- und die wichtigen alle als Tensorfunktoren beschreiben lassen. Letzteres, insbesondere der Fall der parabolischen oder Jacquet-Restriktion und parabolischen Induktion, ist Inhalt der Diplomarbeit von Guiraud [30]. Für

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{R}(G) \arrow[r, bend left, "\mathrm{Res}_P^G"] & \mathfrak{R}(P) \arrow[l, bend left, "\mathrm{Ind}_P^G"] \arrow[r, bend left, "\mathcal{J}_N"] & \mathfrak{R}(M), \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$$

hierbei $\mathcal{J}_N$ der Jacquetfuntor und der unbezeichnete Pfeil seine Rechtsadjungierte, findet sich diese Beschreibung auch bei Renard [48].

Wir versuchen, die Modulsprache, soweit es irgend geht, in den Vordergrund zu rücken.

2.1 Glatte Moduln

2.1.1 Definitionen und Tensorprodukt

Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und A eine (nicht-kommutative) assoziative R-Algebra (i. allg. ohne Eins). Wie üblich kann man A beschreiben als R-Modul A zusammen mit der Multiplikation als R-linearer Abbildung $\mu\colon A \otimes_R A \to A$, $a \otimes b \mapsto ab$, für welche das die Assoziativität ausdrückende Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \otimes_R A \otimes_R A \arrow[r, "\mu\otimes A"] \arrow[d, "A\otimes\mu"] & A \otimes_R A \arrow[d, "\mu"] \\ A \otimes_R A \arrow[r, "\mu"] & A \end{tikzcd}$$

kommutiert. Ein Morphismus $f\colon A \to B$ zweier assoziativer R-Algebren ist eine R-lineare Abbildung, für welche das Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mu_A"] & B \arrow[d, "\mu_B"] \\ A \otimes_R A \arrow[r, "f\otimes f"] & B \otimes_R B \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Ein *A-Linksmodul* oder *linker A-Modul* ist ein R-Modul V zusammen mit einer R-linearen Abbildung $\rho\colon A \otimes_R V \to V$, $a \otimes v \mapsto av$, für die das Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \otimes_R A \otimes_R V \arrow[r, "\mu\otimes V"] \arrow[d, "A\otimes\rho"] & A \otimes_R V \arrow[d, "\rho"] \\ A \otimes_R V \arrow[r, "\rho"] & V \end{tikzcd}$$

kommutiert. Sind V und W zwei linke A-Moduln, dann ist eine R-lineare Abbildung $f\colon V \to W$ ein Morphismus von linken A-Moduln, wenn das Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \otimes_R V \arrow[r, "A\otimes f"] \arrow[d, "\rho_V"] & A \otimes_R W \arrow[d, "\rho_W"] \\ V \arrow[r, "f"] & W \end{tikzcd}$$

kommutiert. Die linken A-Moduln bilden eine abelsche Kategorie, die wir mit ${}_A\widetilde{\mathfrak{M}}$ bezeichnen. Analog definiert man die Kategorie $\widetilde{\mathfrak{M}}_A$ der rechten A-Moduln. Die Kategorie ${}_A\widetilde{\mathfrak{M}}_B$ der (A, B)-Bimoduln besteht aus den R-Moduln V, die zugleich ein linker A- und ein rechter B-Modul sind, und zwar so, daß

$(av)b = a(vb)$ für alle $a \in A$, $b \in B$ und $v \in V$ gilt. Die Schreibweisen ${}_AV$, V_A, ${}_AV_B$ bedeuten in dieser Reihenfolge $V \in {}_A\widetilde{\mathfrak{M}}$, $V \in \widetilde{\mathfrak{M}}_A$, $V \in {}_A\widetilde{\mathfrak{M}}_B$.

Bemerkung 2.1.1. Man kann einen A-Linksmodul auch auffassen kann als einen R-Modul V zusammen mit einem Morphismus von R-Algebren

$$\rho\colon A \to \mathrm{End}_R(V), \quad \rho(a) \cdot v = av.$$

Wir werden auch diese Interpretation benutzen, wenn sie nützlicher ist.

Definition 2.1.2.

(1) Ein Element $e \in A$ heißt *idempotent*, wenn $e^2 = e$ gilt. Mit $\mathrm{Id}(A)$ bezeichnen wir die Menge der idempotenten Elemente von A.

(2) Die Algebra A heißt *glatt*, wenn es zu jeder endlichen Teilmenge $X \subseteq A$ ein idempotentes Element $e \in \mathrm{Id}(A)$ mit $x = exe$ für alle $x \in X$ gibt.

(3) Ein Modul ${}_AV$ heißt *glatt* (oder *nicht ausgeartet*), wenn es zu jeder endlichen Teilmenge $V_0 \subseteq V$ ein $e \in \mathrm{Id}(A)$ derart gibt, daß $v = ev$ für alle $v \in V_0$. Analog werden glatte Rechtsmoduln über A definiert. Ein Bimodul heißt glatt, wenn er als Links- und Rechtsmodul glatt ist.

Bemerkung 2.1.3. Auf den Artikel [27] aus dem Jahre 1979 von Flath geht der Begriff der *Algebren mit genügend Idempotenten* (frz. *algèbres à idempotents, avec assez d'idempotents*) für die hier definierten Objekte zurück. Er nennt sie *idempotented algebras*. Bernstein greift den Begriff 1984 in [5] auf, der sich seither eingebürgert hat. Insbesondere verwenden ihn Renard [48] und Vignéras [58]. Als Verallgemeinerung von assoziativen Algebren mit Eins sind sie auch von eigenständigem Interesse. Ánh und Márki [2] sprechen von *Ringen mit lokalen Einheiten* (*rings with local units*). Weil diese Bezeichnungen jedoch umständlich sind, versehen wir diese Algebren mit dem einfachen Adjektiv *glatt*. Bei anderen Autoren, z. B. Vercruysse [57], gehören sie zu den *festen Ringen* (engl. *firm rings*).

Seien V_A und ${}_AW$ Moduln mit den Strukturabbildungen $\rho_V\colon V \otimes_R A \to V$ und $\rho_W\colon A \otimes_R W \to W$. Dann definiert man das Tensorprodukt $V \otimes_A W$ als R-Modul durch das Koegalisatordiagramm

$$V \otimes_R A \otimes_R W \underset{V \otimes \rho_W}{\overset{\rho_V \otimes W}{\rightrightarrows}} V \otimes_R W \overset{\pi}{\dashrightarrow} V \otimes_A W.$$

Man kann $(\pi, V \otimes_A W)$ auch als Kokern des Morphismus $\rho_V \otimes W - V \otimes \rho_W$ beschreiben. Das Standardmodell ist

$$V \otimes_A W = \frac{V \otimes_R W}{\langle va \otimes w - v \otimes aw \mid a \in A,\ v \in V,\ w \in W \rangle},$$

und π ist dann die kanonische Projektion. Die folgende Proposition ist eine Standardaussage:

Proposition 2.1.4.

(1) *Das Tensorprodukt $V \otimes_A W$ hat die folgende universelle Eigenschaft: Zu jeder A-balancierten R-linearen Abbildung $\varphi\colon V \otimes_R W \to X$ in einen R-Modul X, das heißt, $\varphi(va \otimes w) = \varphi(v \otimes aw)$ für alle $a \in A$, $v \in V$ und $w \in W$, gibt es genau eine R-lineare Abbildung $\tilde{\varphi}$, die das folgende Diagramm kommutativ macht:*

$$\begin{tikzcd} V \otimes_R W \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & V \otimes_A W \arrow[d, dashed, "\exists!\tilde{\varphi}"] \\ & X. \end{tikzcd}$$

(2) *Seien B und C zwei weitere assoziative R-Algebren. Wenn ${}_BV_A$ und ${}_AW_C$ sogar Bimoduln sind, dann wird $V \otimes_A W$ in der offensichtlichen Art und Weise zu einem (B, C)-Bimodul.*

(3) *Das Tensorieren von Bimoduln ist assoziativ: Sind ${}_CV_A$, ${}_AW_B$, ${}_BX_D$ Bimoduln, dann gilt $(V \otimes_A W) \otimes_B X \cong V \otimes_A (W \otimes_B X)$ als (C, D)-Bimoduln.* □

Proposition 2.1.5. *Wenn A glatt ist, dann ist der von der Multiplikation induzierte kanonische Morphismus $\tilde{\mu}\colon A \otimes_A A \to A$ ein Isomorphismus (von A-Bimoduln).*

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß $\tilde{\mu}$ bijektiv ist. Die Surjektivität ist klar. Sei $\tilde{\mu}(x) = 0$ mit $x = \sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i$, das heißt $\sum_{i=1}^n a_i b_i = 0$. Es gibt $e \in \mathrm{Id}(A)$ mit $ea_i = a_i$ für alle Indizes, und daraus folgt sofort $x = e \otimes \tilde{\mu}(x) = 0$. □

Vermutung 2.1.6. Der Umkehrschluß, daß $\tilde{\mu}$ als Isomorphismus die Existenz genügend vieler Idempotenter impliziert, ist falsch.

Proposition 2.1.7. *Sei A glatt. Dann sind für einen Modul ${}_AV$ die folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *V ist glatt.*

(2) $V = \bigcup_{e \in \mathrm{Id}(A)} eV$.

(3) *Der von der Strukturabbildung induzierte Morphismus $\tilde{\rho}\colon A \otimes_A V \to V$ ist ein Isomorphismus von A-Moduln.*

Beweis. »1 ⇒ 2«: Zu jedem $v \in V$ gibt es nach Def. 2.1.2 (3) ein $e \in \mathrm{Id}(A)$ mit $v = ev \in eV$. »2 ⇒ 3« geht wie im Beweis von Prop. 2.1.5. »3 ⇒ 1«: Seien $v_1, \ldots, v_n \in V$ beliebig. Da A glatt ist, folgt für alle Indizes aus der Voraussetzung leicht, daß es $e_i \in \mathrm{Id}(A)$ und $v_i' \in V$ mit $\tilde{\rho}(e_i \otimes v_i') = e_i v_i' = v_i$ gibt, des weiteren $e \in \mathrm{Id}(A)$ mit $ee_i = e_i$, also $ev_i = v_i$. □

Die glatten A-Linksmoduln bilden eine volle Unterkategorie ${}_A\mathfrak{M} \subseteq {}_A\widetilde{\mathfrak{M}}$: die Morphismen stimmen mit denen in ${}_A\widetilde{\mathfrak{M}}$ überein. Entsprechend erhält man die vollen Unterkategorien $\mathfrak{M}_A \subseteq \widetilde{\mathfrak{M}}_A$ und ${}_A\mathfrak{M}_B \subseteq {}_A\widetilde{\mathfrak{M}}_B$.

2.1.2 Id(A) als gerichtete Menge

Wir folgen Renard [48, I.1]: Durch $e \leq f :\Longleftrightarrow eAe \subseteq fAf$ läßt sich auf $\mathrm{Id}(A)$ eine Teilordnung (reflexiv, antisymmetrisch, transitiv) definieren, die zudem gerichtet ist: zu je endlich vielen Elementen $e_1, \ldots, e_n \in \mathrm{Id}(A)$ gibt es stets ein $f \in \mathrm{Id}(A)$ mit $e_i \leq f$ für alle Indizes. Sei $V \in {}_A\mathfrak{M}$ und $e \leq f$. Die Inklusionen $eV \subseteq fV$ und $eAe \subseteq fAf$ definieren gerichtete Systeme in R-$\mathfrak{Mod}$. Daß A als Algebra und V als A-Modul glatt ist, läßt sich äquivalent dadurch ausdrücken, daß

$$A = \varinjlim eAe \quad \text{und} \quad V = \varinjlim eV.$$

Für jedes $e \in \mathrm{Id}(A)$ ist $eAe \subseteq A$ eine Unteralgebra von A mit dem Einselement e, und eV ist ein eAe-Modul. Das zeigt, daß die glatten Moduln über glatten Algebren, die eine Verallgemeinerung der Moduln über einer assoziativen Algebra mit Eins sind, doch sehr dicht an diesen liegen. Viele Eigenschaften, besonders jene, die mit Tensorprodukten erklärt werden können, übertragen sich. Ein wesentlicher Unterschied ist, daß sich die Hom-Funktoren weniger angenehm verhalten. Wir setzen dies im nächsten Abschnitt auseinander.

2.1.3 Glättung

Lemma 2.1.8. Sei $V \in {}_A\widetilde{\mathfrak{M}}$. Der von der Strukturabbildung induzierte Morphismus

$$\varphi\colon A \otimes_A V \longrightarrow A \cdot V \subseteq V, \quad a \otimes v \mapsto av,$$

ist dann injektiv.

Beweis. Sei $x = \sum_{i=1}^n a_i \otimes v_i \in A \otimes_A V$ ein beliebiges Element mit $\varphi(x) = 0$. Dann gibt es $e \in \mathrm{Id}(A)$ mit $ea_i = a_i$ für alle Indizes, und man bekommt

$$x = \sum_{i=1}^n a_i \otimes v_i = e \otimes \sum_{i=1}^n a_i v_i = e \otimes \varphi(x) = 0.$$ □

Definition 2.1.9. Als *glatten Teil* oder *Glättung* von V bezeichnen wir das Bild des Morphismus φ.

Die *Glättung* von V ist der größte glatte A-Untermodul von V, isomorph zu $A \otimes_A V \in {}_A\mathfrak{M}$ und von der Form

$$A \cdot V = \{av \mid a \in A,\ v \in V\} = \bigcup_{e \in \mathrm{Id}(A)} eV.$$

Wir verwenden die Schreibweisen $A \cdot V$, AV, $A \otimes_A V$ und V_0 synonym für die Glättung; bei der letzten wird impliziert sein, bzgl. welcher Modulstruktur geglättet wird. Im Falle $A = \mathcal{D}(G)$ schreiben wir auch $\mathcal{D}(G) \otimes_G V$.

Bemerkung 2.1.10.

(1) Sei $W \in {}_A\mathfrak{M}$ glatt, $V \in {}_A\widetilde{\mathfrak{M}}$ beliebig und $\varphi\colon W \to V$ ein Morphismus von A-Moduln. Dann ist $\mathrm{Bild}(\varphi)$ ein glatter Untermodul von V, also in $A \cdot V$ enthalten. Punkt 1 der folgenden Proposition drückt das als Adjungiertheitseigenschaft aus.

(2) Wenn von $V \in \widetilde{\mathfrak{M}}_A$ und $W \in {}_A\widetilde{\mathfrak{M}}$ mindestens ein Modul glatt ist, dann gilt $V \otimes_A A \otimes_A W = V \otimes_A W$. Das bedeutet, daß wir nicht mehr zusätzlich zu glätten brauchen, wenn wir mit einem glatten Modul tensorieren.

Proposition 2.1.11.

(1) Es gelten die folgenden äquivalenten Aussagen:

(i) Der kanonische Morphismus $\tilde{\rho}\colon A \otimes_A V \to V$ hat die folgende universelle Eigenschaft: Zu jedem Morphismus $\varphi\colon W \to V$ aus einem glatten A-Modul W gibt es genau ein $\tilde{\varphi}$, welches das folgende Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, dashed, "\exists!\tilde{\varphi}"'] & V \\ & A \otimes_A V. \arrow[u, "\tilde{\rho}"'] \end{tikzcd}$$

(ii) Die Glättung $A \otimes_A -\colon {}_A\widetilde{\mathfrak{M}} \to {}_A\mathfrak{M}$ ist rechtsadjungiert zum Vergißfunktor.

(2) Die Glättung ist linksadjungiert zur »Aufrauhung« (engl. roughening, *Meyer [39])*

$$\mathrm{Hom}_A(A, -)\colon {}_A\mathfrak{M} \to {}_A\widetilde{\mathfrak{M}},$$

wobei $A \curvearrowright \mathrm{Hom}_A(A, V)$ gemäß $(a\varphi)(b) = \varphi(ba)$ operiert.

(3) Sei $0 \to U \to V \to W \to 0$ *eine kurze exakte Sequenz in* ${}_A\widetilde{\mathfrak{M}}$. *Dann ist auch die Sequenz* $0 \to A \cdot U \to A \cdot V \to A \cdot W \to 0$ *exakt.*

(4) Sei $(V_i)_{i\in I} \subseteq {}_A\mathfrak{M}$ *eine Familie von glatten A-Linksmoduln. Dann ist*

$$A \cdot \prod_{i\in I} V_i = \Big\{(v_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} V_i \;\Big|\; \exists e \in \operatorname{Id}(A)\ \forall i \in I \colon ev_i = v_i\Big\}$$

das kategorielle Produkt in ${}_A\mathfrak{M}$, *und das kategorielle Koprodukt (die direkte Summe) ist wie üblich*

$$\bigoplus_{i\in I} V_i = \Big\{(v_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} V_i \;\Big|\; v_i \neq 0 \textit{ nur endlich oft}\Big\}.$$

(5) ${}_A\mathfrak{M}$ *ist eine bivollständige abelsche Kategorie.*

Beweis. (1) Bemerkung 2.1.10 zeigt, daß, wenn ${}_AV$ glatt und ${}_AW$ beliebig ist, jeder Morphismus $V \to W$ schon eindeutig faktorisiert in der Form $V \to A \cdot W \subseteq W$ vorliegt. (2) Siehe a. a. O. (3, 4) Wegen der ersten beiden Punkte ist die Glättung ein exakter Funktor. Außerdem folgt aus den Adjunktionen, daß die Glättung Produkte und direkte Summen respektiert. Das direkte Produkt in ${}_A\mathfrak{M}$ ist also von der angegebenen Form. Die direkte Summe glatter Moduln in ${}_A\widetilde{\mathfrak{M}}$ ist hingegen wegen der nun geltenden Endlichkeitsvoraussetzung wieder glatt, so daß sie von der Glättung in sich selbst überführt wird. (5) Es handelt sich um eine abelsche Kategorie mit beliebig indizierten Produkten und Koprodukten. Das ist notwendig und hinreichend. □

2.1.4 Hom-Moduln

Seien ${}_AV_B$ und ${}_AW_C$ glatte Bimoduln. Dann ist $\operatorname{Hom}_A(V, W) \in {}_B\widetilde{\mathfrak{M}}_C$ vermöge

$$(b\varphi c)(v) := \varphi(vb)c, \quad b \in B,\ c \in C,\ v \in V.$$

Gleichwohl müssen die entstehenden Strukturen nicht glatt sein. Dies ist ein Hauptunterschied, den es bei Fehlen eines Einselements der Algebren zu beachten gilt. Mit Hilfe des Glättungsfunktors erhalten wir jedoch

$$B \operatorname{Hom}_A(V, W)C = \{b\varphi c \mid \varphi \in \operatorname{Hom}_A(V, W),\ b \in B,\ c \in C\} \in {}_B\mathfrak{M}_C.$$

2.1.5 Spezielle Moduln

Definition 2.1.12. Sei $V \in {}_A\mathfrak{M}$.

- Der Modul V heißt *endlich erzeugt*, wenn es endlich viele $v_1, \ldots, v_n \in V$ derart gibt, daß

$$V = \sum_{i=1}^{n} Av_i = \{a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n \mid a_i \in A\}.$$

  Dies ist äquivalent dazu, daß es einen Epimorphismus

$$(Ae)^{\oplus n} \longrightarrow V \longrightarrow 0, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

  gibt. Dabei ist $(Ae)^{\oplus n}$ die n-fache direkte Summe von Ae mit sich.

- Es bezeichne $\mathfrak{Ab}$ die Kategorie der abelschen Gruppen. Der Modul V heißt

  - *flach*, wenn der Funktor $- \otimes_A V \colon \mathfrak{M}_A \to \mathfrak{Ab}$ exakt ist;
  - *projektiv*, wenn der Funktor $\mathrm{Hom}_A(V, -) \colon {}_A\mathfrak{M} \to \mathfrak{Ab}$ exakt ist; das ist äquivalent dazu, daß man kommutative Diagramme der Art

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[d] \arrow[dl, dashed, "\exists"'] & \\ W_1 \arrow[r] & W_2 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

    stets wie eingezeichnet in ${}_A\mathfrak{M}$ ergänzen kann;
  - *injektiv*, wenn der kontravariante Funktor $\mathrm{Hom}_A(-, V) \colon {}_A\mathfrak{M} \to \mathfrak{Ab}$ exakt ist; das ist äquivalent dazu, daß man kommutative Diagramme der Art

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & W_1 \arrow[r] \arrow[d] & W_2 \arrow[dl, dashed, "\exists"] \\ & V & \end{tikzcd}$$

    in ${}_A\mathfrak{M}$ ergänzen kann;
  - *einfach*, wenn 0 und V die einzigen Untermoduln sind;
  - *halbeinfach* oder *vollständig reduzibel*, wenn V direkte Summe einfacher Untermoduln ist;

- ◇ *unzerlegbar*, wenn sich V nicht in nicht-trivialer Weise als direkte Summe zerlegen läßt, das heißt, aus $V = V_1 \oplus V_2$ folgt $V_1 = 0$ oder $V_2 = 0$;
- ◇ *zulässig* (engl., frz. *admissible*), wenn der R-Modul eV für alle $e \in \mathrm{Id}(A)$ endlich erzeugt ist.

Proposition 2.1.13. *Die Kategorie ${}_A\mathfrak{M}$ verfügt über genügend projektive und injektive Objekte. Jeder Modul in ${}_A\mathfrak{M}$ ist also Quotient eines projektiven Moduls und Untermodul eines injektiven Moduls.*

Beweis. Siehe etwa [48, I.5.2]. □

Proposition 2.1.14. *Ein Modul $P \in {}_A\mathfrak{M}$ ist genau dann endlich erzeugt und projektiv, wenn er direkter Summand eines Moduls der Form $(Ae)^{\oplus n}$ ist.*

Beweis. Das folgt unmittelbar aus der Definition, siehe oben. □

Die folgende Proposition geht auf Ánh/Márki [2, 1.5] zurück; wir haben jedoch zu vereinfachen versucht. Voraussetzung und Formel sind einfacher, die Aussage ein bißchen allgemeiner.

Proposition 2.1.15. *Seien ${}_AP_B$, ${}_AV_D$ und ${}_DW$ Bimoduln und Pe für alle $e \in \mathrm{Id}(B)$ projektiv und endlich erzeugt. Dann ist die kanonische Abbildung*

$$\gamma\colon B\,\mathrm{Hom}_A(P,V)\otimes_D W \longrightarrow B\,\mathrm{Hom}_A(P, V\otimes_D W), \quad \gamma(\varphi\otimes w)(p) := \varphi(p)\otimes w,$$

ein Isomorphismus.

Beweis. Es ist leicht zu sehen, daß γ wohldefiniert und natürlich ist. Bleibt die Bijektivität zu zeigen. Sei $x = \sum_{i=1}^n \varphi_i \otimes w_i \in B\,\mathrm{Hom}_A(P,V)\otimes_D W$. Dann gibt es $e \in \mathrm{Id}(B)$ mit $e\varphi_i = \varphi_i$ für alle Indizes. Nach Definition gilt $e\varphi_i(p) = \varphi_i(pe)$. Also läßt sich x als Element von $\mathrm{Hom}_A(Pe, V)\otimes_D W$ auffassen, und dann ist $\gamma(x) \in \mathrm{Hom}_A(Pe, V\otimes_D W)$. Nun ist ${}_A(Pe)$ endlich erzeugt und projektiv, also direkter Summand eines Moduls der Form $(Af)^{\oplus r}$ mit einem $f \in \mathrm{Id}(A)$. Daß für solche Moduln nun ein Isomorphismus vorliegt, ergibt sich wie üblich. □

Es gibt eine Form der Hom-Tensor-Adjungiertheit:

Proposition 2.1.16. *Sei ${}_AV_B$ ein glatter Bimodul. Dann ist $V\otimes_B - \colon {}_B\mathfrak{M} \to {}_A\mathfrak{M}$ linksadjungiert zu $B\,\mathrm{Hom}_A(V,-)\colon {}_A\mathfrak{M} \to {}_B\mathfrak{M}$. Mit anderen Worten gibt es einen natürlichen Isomorphismus*

$$\mathrm{Hom}_A(V\otimes_B W, X) \cong \mathrm{Hom}_B(W, B\,\mathrm{Hom}_A(V,X)),$$

der in der offensichtlichen Weise gegeben ist.

Beweis. Siehe etwa Renard [48, Cor. I.22]. □

Die folgende Proposition findet sich für Moduln über kommutativen Ringen mit Eins zum Beispiel bei Wisbauer [61, 25.4]. Wir können dieses Ergebnis auf unseren Fall verallgemeinern.

Proposition 2.1.17. *Sei $C = {}_D C_B$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(1) $C \otimes_B -\colon {}_B\mathfrak{M} \to {}_D\mathfrak{M}$ kommutiert mit beliebigen Produkten.

(2) Für alle $f \in \mathrm{Id}(D)$ ist fC als rechter B-Modul endlich präsentiert*, das soll heißen, es gibt $m, n \in \mathbb{N}^*$, $e \in \mathrm{Id}(B)$ und eine exakte Sequenz*

$$(eB)^{\oplus m} \longrightarrow (eB)^{\oplus n} \longrightarrow fC \longrightarrow 0.$$

Beweis. »2 ⇒ 1«: Sei $(W_i)_{i \in I}$ eine Familie von linken B-Moduln. Man hat den kanonischen Morphismus

$$\alpha\colon C \otimes_B \prod_{i \in I} W_i \longrightarrow D \cdot \prod_{i \in I} C \otimes_B W_i, \quad c \otimes (w_i)_i \longmapsto (c \otimes w_i)_i.$$

Wir bemerken, daß das Produkt im ersten Tensorprodukt nicht zusätzlich geglättet werden muß (Bem. 2.1.10). Damit es sich bei α um einen Isomorphismus handle, ist es hinreichend und notwendig, daß α für alle $f \in \mathrm{Id}(D)$ einen Isomorphismus $fC \otimes_B W \cong \prod_i fC \otimes W_i$ durch Einschränken induziert. Da fC nach Voraussetzung endlich präsentiert ist, erhält man ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
(eB)^{\oplus m} \otimes_B \prod_i W_i \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_m"] & (eB)^{\oplus n} \otimes_B \prod_i W_i \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_n"] & fC \otimes_B \prod_i W_i \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\
\prod_i (eB)^{\oplus m} \otimes_B W_i \arrow[r] & \prod_i (eB)^{\oplus n} \otimes_B W_i \arrow[r] & \prod_i fC \otimes_B W_i \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

wobei $e \in \mathrm{Id}(B)$. Anhand des kommutativen Diagramms

$$\begin{tikzcd}
(eB)^{\oplus m} \otimes_B \prod_i W_i \arrow[r, "\alpha_m"] \arrow[d, "\sim"] & \prod_i (eB)^{\oplus m} \otimes_B W_i \arrow[d, "\sim"] \\
(\prod_i eW_i)^{\oplus m} \arrow[r, "\sim"] & \prod_i (eW_i)^{\oplus m}
\end{tikzcd} \tag{2.1}$$

mit den offensichtlichen kanonischen Isomorphismen erkennt man, daß α_m und α_n Isomorphismen sind. Eine Diagrammjagd ergibt nun, daß auch α ein Isomorphismus ist.

»1 ⇒ 2«: Ein direktes Produkt der Form $X^C = \prod_{c \in C} X$ kann man als Raum von Funktionen $C \to X$ auffassen. In diesem Sinne ist nun insbesondere der durch

$$\gamma \colon C \otimes_B B^C \longrightarrow D \cdot C^C, \quad \gamma(c \otimes \varphi)(c') = c\varphi(c'),$$

wohldefinierte Morphismus nach Voraussetzung ein Isomorphismus. Für jedes $f \in \mathrm{Id}(D)$ ist $f \cdot \mathrm{id}_C \in D \cdot C^C$, und daraus folgt, daß es endlich viele $c_1 \otimes \varphi_1, \ldots, c_n \otimes \varphi_n \in C \otimes_B B^C$ derart gibt, daß für alle $c \in C$ gleichzeitig

$$fc = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(c)$$

gilt; die c_i erzeugen fC also als rechten B-Modul. Es gibt daher eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \ker\varphi \longrightarrow (eB)^{\oplus n} \xrightarrow{\varphi} fC \longrightarrow 0,$$

aus der wir, $W := \ker\varphi$ setzend, in R-$\mathfrak{Mod}$ das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & W \otimes_B B^W \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & (eB)^{\oplus n} \otimes_B B^W \arrow[r] \arrow[d] & fC \otimes_B B^W \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & W^W \arrow[r] & ((eB)^{\oplus n})^W \arrow[r] & (fC)^W \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

mit den kanonischen senkrechten Pfeilen erhalten. Aus der Voraussetzung folgt, daß der rechte senkrechte Pfeil ein Isomorphismus ist; für den mittleren folgt das wie oben mit (2.1). Eine Diagrammjagd zeigt, daß β surjektiv ist, das heißt

$$\mathrm{id}_W = \beta\Big(\sum_{i=1}^{n} w_i \otimes \varphi_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} w_i \varphi_i$$

für gewisse $w_i \otimes \varphi_i \in W \otimes B^W$; also wird W von den w_i erzeugt. □

Die folgenden beiden Aussagen sind bekannter Art (vgl. etwa Renard [48, III.1.4]).

Lemma 2.1.18. Sei ${}_AV \neq 0$ endlich erzeugt. Dann gibt es maximale echte Untermoduln von V.

Beweis. Mit dem Zornschen Lemma: Sei $\mathfrak{U}$ die Menge der echten Untermoduln. Diese ist wegen $0 \in \mathfrak{U}$ nicht leer und durch Inklusion teilgeordnet. Sei

$\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{U}$ eine totalgeordnete Teilmenge. Im Falle $\mathfrak{K} = \emptyset$ ist $\{0\}$ eine obere Schranke von $\mathfrak{K}$. Anderenfalls kann man den Untermodul

$$W := \bigcup_{N \in \mathfrak{K}} N \subseteq V$$

betrachten. Wäre $W = V$, müßte es, weil V endlich erzeugt ist, ein $N_0 \in \mathfrak{K}$ geben, das ein Erzeugendensystem von V enthielte, weil $\mathfrak{K}$ totalgeordnet ist; dann wäre $N_0 = V$, aber das ist absurd. Also ist $W \subsetneq V$ ein echter Untermodul und eine obere Schranke von $\mathfrak{K}$. Nach dem Zornschen Lemma gibt es in $\mathfrak{U}$ ein maximales Element. □

Proposition 2.1.19. *Sei ${}_AV \neq 0$. Dann gibt es einen einfachen Unterquotienten von V. Wenn V endlich erzeugt ist, dann gibt es einen einfachen Quotienten von V.*

Beweis. Sei ${}_AV$ endlich erzeugt. Nach Lemma 2.1.18 gibt es einen maximalen echten Untermodul $V_0 \subsetneq V$. Der Quotient V/V_0 ist dann einfach. Sei V beliebig und $v \in V \setminus \{0\}$. Dann hat der endlich erzeugte Untermodul $Av \subseteq V$ nach dem Vorhergehenden einen einfachen Quotienten. □

2.1.6 Der duale Modul

Sei $V \in {}_A\mathfrak{M}$. Der algebraische Dualraum $V^* = \mathrm{Hom}_R(V, R)$ ist in kanonischer Weise ein A-Rechtsmodul durch

$$(\varphi a)(v) := \varphi(av), \quad a \in A,\ v \in V,\ \varphi \in V^*.$$

Die Glättung $\tilde{V} := V^* \otimes_A A$ ist der zu V *duale Modul.* Die Bildung des dualen Moduls ist mit Morphismen verträglich und definiert einen kontravarianten Funktor

$${}_A\mathfrak{M} \to \mathfrak{M}_A, \quad V \mapsto \tilde{V}.$$

Analog bildet man den zu einem Rechtsmodul dualen Linksmodul. Man hat in ${}_A\mathfrak{M}$ stets den kanonischen Morphismus

$$\theta\colon V \to \tilde{\tilde{V}}, \quad \theta(v)(\varphi) := \varphi(v),$$

in den *bidualen Modul.* Über einem kommutativen Ring ist die Bildung des dualen Moduls im allgemeinen nicht exakt und θ nicht injektiv. Man hat die folgende Proposition von Vignéras:

Proposition 2.1.20 ([58, 4.18])**.** *Sei $R = k$ sogar ein Körper, und es gebe ein Haarmaß in $\mathcal{D}'(G)$. Dann gilt folgendes:*

(1) Die Dualraumbildung ist exakt, und θ ist injektiv.

(2) *Genau dann ist θ sogar ein Isomorphismus, wenn V zulässig ist, und das ist genau dann der Fall, wenn $\tilde{V}$ zulässig ist.*

(3) *Wenn V projektiv ist, dann ist $\tilde{V}$ injektiv.*

Proposition 2.1.21. *Sei $V \in \mathfrak{M}_A$ und $W \in {}_A\mathfrak{M}$. Dann hat man einen (in V und W) natürlichen kanonischen Isomorphismus $\mathrm{Hom}_{-,A}(V, \tilde{W}) \cong \mathrm{Hom}_{A,-}(W, \tilde{V})$. Vgl. [58, I.4.13].*

Beweis. Ein $\varphi \in \mathrm{Hom}_{-,A}(V, \tilde{W})$ definiert kanonisch ein $\varphi^* \in \mathrm{Hom}_{A,-}(W, \tilde{V})$ durch $\varphi^*(w)(v) := \varphi(v)(w)$, entsprechend in der anderen Richtung. Nun ergibt sich alles durch einfaches Nachrechnen. □

2.2 (Ko)moduln über (Ko)algebren

Wir führen hier die Koalgebren und Komoduln sowie die Algebren und Moduln ein, die wir benötigen. Wir verweisen auf das Buch [18] von Brzeziński und Wisbauer. Dort wird von *Koringen* (*corings*) gesprochen. Obacht ist geboten, weil unsere Algebren, anders als dort, keine Eins haben, sondern nur genügend Idempotente.

2.2.1 Definitionen

Es sei B eine glatte assoziative R-Algebra. Die Kategorie ${}_B\mathfrak{M}_B$ der glatten B-Bimoduln bildet zusammen mit dem Tensorprodukt $-\otimes_B-$, bezüglich dessen B das neutrale Element ist, eine monoidale Kategorie. Eine *koassoziative Koalgebra mit Koeins* in ${}_B\mathfrak{M}_B$ ist ein Komonoid in ebendieser Kategorie, also ein B-Bimodul C zusammen mit zwei Morphismen von B-Bimoduln

$$\Delta\colon C \to C \otimes_B C \quad \text{und} \quad \varepsilon\colon C \to B,$$

genannt *Komultiplikation* und *Koeins*, für welche die folgenden Diagramme kommutieren:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"] & C \otimes_B C \arrow[d, "1\otimes\Delta"] \\ C \otimes_B C \arrow[r, "\Delta\otimes 1"] & C \otimes_B C \otimes_B C, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\sim"] \arrow[dr, "\Delta"] & C \otimes_B B \\ B \otimes_B C & C \otimes_B C. \arrow[l, "\varepsilon\otimes 1"] \arrow[u, "1\otimes\varepsilon"] \end{tikzcd}$$

Ein C-*Linkskomodul* ist ein Modul $W \in {}_B\mathfrak{M}$ zusammen mit einem Morphismus $\rho\colon W \to C \otimes_B W$, so daß die folgenden Diagramme in ${}_B\mathfrak{M}$ kommutieren:

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho"] & C \otimes_B W \arrow[d, "\Delta\otimes 1"] \\
C \otimes_B W \arrow[r, "1\otimes\rho"] & C \otimes_B C \otimes_B W,
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "\sim"'] & C \otimes_B W \arrow[d, "\varepsilon\otimes 1"] \\
 & B \otimes_B W.
\end{tikzcd}
\tag{2.2}$$

Seien (ρ_1, W_1) und (ρ_2, W_2) zwei C-Linkskomoduln. Ein $f \in {}_B\mathfrak{M}(W_1, W_2)$ ist dann sogar ein Morphismus von C-Linkskomoduln, wenn das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
W_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho_1"] & W_2 \arrow[d, "\rho_2"] \\
C \otimes_B W_1 \arrow[r, "1\otimes f"] & C \otimes_B W_2
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Die C-Linkskomoduln bilden mit ihren Morphismen eine Kategorie, die wir mit ${}^C\mathfrak{M}$ bezeichnen. Entsprechend definiert man die Kategorie $\mathfrak{M}^C$ der C-Rechtskomoduln.

Dual definieren wir eine assoziative Algebra mit Eins in ${}_B\mathfrak{M}_B$ als einen Bimodul D zusammen mit zwei Morphismen

$$\nabla\colon D \otimes_B D \longrightarrow D \quad \text{und} \quad \eta\colon B \to D,$$

Multiplikation und Eins, derart, daß die Diagramme

$$\begin{tikzcd}
D \otimes_B D \otimes_B D \arrow[r, "1\otimes\nabla"] \arrow[d, "\nabla\otimes 1"] & D \otimes_B D \arrow[d, "\nabla"] \\
D \otimes_B D \arrow[r, "\nabla"] & D,
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
B \otimes_B D \arrow[r, "\eta\otimes 1"] \arrow[d, "\sim"] & D \otimes_B D \arrow[dl, "\nabla"'] \\
D & D \otimes_B B \arrow[l, "\sim"'] \arrow[u, "1\otimes\eta"']
\end{tikzcd}$$

kommutieren. Ein D-Linksmodul in ${}_B\mathfrak{M}_B$ ist ein B-Linksmodul $W \in {}_B\mathfrak{M}$ zusammen mit einem Morphismus $\sigma\colon D \otimes_B W \to W$ derart, daß die Diagramme

$$\begin{tikzcd}
D \otimes_B D \otimes_B W \arrow[r, "1\otimes\sigma"] \arrow[d, "\nabla\otimes 1"] & D \otimes_B W \arrow[d, "\sigma"] \\
D \otimes_B W \arrow[r, "\sigma"] & W,
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
B \otimes_B W \arrow[d, "\eta\otimes 1"] \arrow[dr, bend left, "\sim"] & \\
D \otimes_B W \arrow[r, "\sigma"] & W
\end{tikzcd}$$

kommutieren. Ein Morphismus $f\colon W_1 \to W_2$ zweier D-Linksmoduln ist ein Morphismus der zugrundeliegenden B-Moduln, für den zusätzlich das Diagramm

$$\begin{tikzcd} D \otimes_B W_1 \arrow[r, "1\otimes f"] \arrow[d, "\sigma_1"] & D \otimes_B W_2 \arrow[d, "\sigma_2"] \\ W_1 \arrow[r, "f"] & W_2 \end{tikzcd}$$

kommutiert. Die Kategorie der D-Linksmoduln bezeichnen wir mit ${}_D\mathfrak{M}$. Die Kategorie $\mathfrak{M}_D$ der D-Rechtsmoduln wird entsprechend definiert.

2.2.2 Eigenschaften der Kategorie ${}^C\mathfrak{M}$

Sei (C, Δ, ε) eine Koalgebra.

Proposition 2.2.1. *Die Kategorie ${}^C\mathfrak{M}$ besitzt die folgenden Eigenschaften:*

(1) Kokerne von Morphismen von C-Komoduln sind in kanonischer Weise ebenfalls C-Komoduln.

(2) Wenn C_B flach ist, gilt das gleiche für Kerne.

(3) Sei $(W_i)_{i\in I}$ eine Familie von C-Komoduln. Die Strukturmorphismen $\rho_i\colon W_i \to C \otimes_B W_i$ induzieren dann einen kanonischen Morphismus

$$\bigoplus_{i\in I} W_i \longrightarrow C \otimes_B \bigoplus_{i\in I} W_i = \bigoplus_{i\in I} C \otimes_B W_i,$$

wodurch die direkte Summe zu einem C-Komodul wird.

Beweis. Sei $\varphi \in \mathrm{Hom}_C(V, W)$. Wenn C_B flach ist, dann gibt φ Anlaß zu dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \ker\varphi \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, dashed, "\rho_1"] & V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\rho_V"] & W \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\rho_W"] & W/\varphi(V) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\rho_2"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & C \otimes_B \ker\varphi \arrow[r, "C\otimes\iota"] & C \otimes_B V \arrow[r, "C\otimes\varphi"] & C \otimes_B W \arrow[r, "C\otimes\pi"] & C \otimes_B W/\varphi(V) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

in ${}_B\mathfrak{M}$. Es ist nun nicht schwer zu sehen, daß $\ker\varphi$ durch ρ_1 und $W/\varphi(V)$ durch ρ_2 zu einem C-Komodul wird. Die Konstruktionen aus [18, 1.3.5] funktionieren ohne weiteres. Zur direkten Summe siehe [18, 18.8]. $\square$

Bemerkung 2.2.2. Unsere Koalgebren werden als Links- oder Rechtsmoduln immer flach sein.

2.2.3 Der Funktor $C \otimes_B -$

Man hat einen offensichtlichen Vergißfunktor $\mathcal{F}\colon {}^C\mathfrak{M} \to {}_B\mathfrak{M}$. Umgekehrt kann man zu jedem $W \in {}_B\mathfrak{M}$ den Morphismus

$$\theta_W : C \otimes_B W \xrightarrow{\varepsilon \otimes W} B \otimes_B W \xrightarrow{\sim} W$$

bilden, und $C \otimes_B W$ ist in kanonischer Weise ein C-Komodul mit der Kowirkung

$$\rho\colon C \otimes_B W \xrightarrow{\Delta \otimes W} C \otimes_B C \otimes_B W.$$

Definition 2.2.3. Man nennt $C \otimes_B W$ den *kofreien* C-Komodul zu W.

Proposition 2.2.4.

(1) *Der Morphismus θ_W hat die folgende universelle Eigenschaft: Zu jedem $V \in {}^C\mathfrak{M}$ und jedem B-Morphismus $\varphi\colon V \to W$ gibt es einen eindeutig bestimmten C-Morphismus $\tilde{\varphi}\colon V \to C \otimes_B W$, der das folgende Diagramm kommutativ macht:*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, dashed, "\tilde{\varphi}"'] & W \\ & C \otimes_B W. \arrow[u, "\theta_W"'] \end{tikzcd} \tag{2.3}$$

(2) *Der Funktor $C \otimes_B -\colon {}_B\mathfrak{M} \to {}^C\mathfrak{M}$ ist rechtsadjungiert zum Vergißfunktor.*

Beweis. Es ist leicht zu sehen, daß durch

$$\varepsilon_W : \mathcal{F}(C \otimes_B W) \xrightarrow{\varepsilon \otimes W} W, \quad W \in {}_B\mathfrak{M}; \quad \rho_V : V \to C \otimes_B \mathcal{F}(V), \quad V \in {}^C\mathfrak{M},$$

natürliche Transformationen definiert werden: beim ersten unmittelbar, beim zweiten anhand der Definition der C-Komodulmorphismen. Dies sind Eins und Koeins der Adjunktion; das folgt daraus, daß die Kompositionen von Morphismen

$$V \xrightarrow{\rho_V} C \otimes_B V \xrightarrow{\varepsilon \otimes V} V, \quad C \otimes_B W \xrightarrow{\Delta \otimes W} C \otimes_B C \otimes_B W \xrightarrow{C \otimes \varepsilon \otimes W} C \otimes_B W$$

offensichtlich die Identität ergeben. Hieraus folgt auch die universelle Eigenschaft aus Teil (1): der Morphismus $\tilde{\varphi}$ ist gegeben durch

$$\tilde{\varphi}\colon V \xrightarrow{\rho_V} C \otimes_B V \xrightarrow{C \otimes \varphi} C \otimes_B W.$$

Für jedes $\psi \in \mathrm{Hom}_C(V, C \otimes_B W)$ bekommt man das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\rho_V"] & C \otimes_B W \arrow[r, equal] \arrow[d, "\Delta\otimes W"] & C \otimes_B W \\ C \otimes_B V \arrow[r, "C\otimes\psi"] & C \otimes_B C \otimes_B W, \arrow[ur, "C\otimes\varepsilon\otimes W"'] & \end{tikzcd}$$

aus dem $\theta_W \circ \psi = 0 \implies \psi = 0$ folgt. Somit ist $\tilde{\varphi}$ eindeutig. □

2.3 Formulierung der Theorie mit Moduln

2.3.1 Die Heckealgebra

Siehe z. B. Vignéras [58, I.3]. Es sei G eine ℓ-Gruppe und R ein kommutativer Ring mit Eins, der die Bedingung erfüllt, daß es ein Haarmaß $\mu \in \mathcal{D}'(G)$ gibt, das heißt, daß es ein $K_1 \in \Omega(G)$ mit invertierbarer Proordnung in R gibt (Satz 1.7.7). Dann wird $\mathcal{D}(G)$ mit der *Faltung*

$$(f * g)(x) \coloneqq \int_G f(y)\, g(y^{-1}x)\,\mathrm{d}y = \int_G f(xy)\, g(y^{-1})\,\mathrm{d}y \tag{2.4}$$

zu einer assoziativen R-Algebra, welche die *Heckealgebra* von G heißt. Wir schreiben oft fg statt $f * g$. Die Heckealgebra von G ist nicht-kommutativ, wenn G nicht-kommutativ ist, und ein Einselement besitzt sie nur, wenn G kompakt ist, aber es gibt eine Umgebungsbasis der Eins,

$$\mathfrak{B} \coloneqq \Omega(K_1) \subseteq \Omega(G),$$

aus kompakt-offenen Untergruppen mit invertierbarer Proordnung in R. Die Elemente

$$e_K \coloneqq \frac{\mathbb{1}_K}{\mathrm{vol}(K)}, \quad K \in \mathfrak{B},$$

sind idempotent. Außerdem induziert die Inversion $G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$, eine *Involutionsabbildung*

$$\mathcal{D}(G) \longrightarrow \mathcal{D}(G), \quad \varphi \longmapsto \check{\varphi}, \quad \check{\varphi}(g) \coloneqq \varphi(g^{-1}).$$

Es gilt offensichtlich $\check{\varphi} * \check{\psi} = \psi * \varphi$. Daraus folgt, daß $\varphi \mapsto \check{\varphi}$ ein kanonischer Algebraisomorphismus $A \to A^{\mathrm{op}}$ ist, durch den die Kategorien der (glatten) Links- und Rechtsmoduln über $\mathcal{D}(G)$ isomorph zueinander werden. Man hat die folgende einfache Proposition:

Proposition 2.3.1.

(1) Mit den Idempotenten e_K, $K \in \mathfrak{B}$, ist $\mathcal{D}(G)$ eine glatte assoziative R-Algebra.

(2) Zu jedem $\varphi \in \mathcal{D}(G)$ gibt es ein $K \in \mathfrak{B}$, unter dem φ von links und rechts invariant ist, und es gilt dann $\varphi = e_K * \varphi * e_K$.

(3) Es gilt dann und nur dann $\varphi = e_K * \varphi$, wenn φ von links, dann und nur dann $\varphi = \varphi * e_K$, wenn φ von rechts K-invariant (unter Translation) ist. □

Beweis. (1) Siehe Vignéras [58, I.3.2]. (2) Das folgt sofort aus Prop. 1.3.3 (2) und (2.4). (3) Wegen (2.4) ist klar, daß zum einen $e_K * \varphi$ von links K-invariant ist und zum anderen, wenn φ von links K-invariant ist, $e_K * \varphi = \varphi$ gilt. □

2.3.2 Eine Äquivalenz von Kategorien

Wir erinnern an den folgenden wohlbekannten Satz, aufgrund dessen man Aussagen über die Kategorie $\mathfrak{R}(G)$ der glatten Darstellungen von G gewinnen kann, indem man statt dessen die Kategorie ${}_A\mathfrak{M}$ betrachtet, was ebendas Bestreben dieser Arbeit ist. Die Konstruktion setzt voraus, daß es ein Haarmaß $\mu \in \mathcal{D}'(G)$ gibt. Sei $\mathfrak{B}$ weiterhin eine Umgebungsbasis der Eins von G aus kompakt-offenen Untergruppen mit invertierbarer Proordnung in R. Falls G eine reduktive $\mathfrak{p}$-adische Gruppe ist, genügt es anzunehmen, daß $p \in R^*$.

Satz 2.3.2. *Die Kategorie $\mathfrak{R}(G)$ der glatten Darstellungen $\pi\colon G \to \mathrm{Aut}_R(V)$ der ℓ-Gruppe G ist isomorph zur Kategorie ${}_A\mathfrak{M}$ der glatten Moduln $\rho\colon A \to \mathrm{End}_R(V)$. Zwei zueinander inverse Funktoren lassen sich folgendermaßen beschreiben:*

(1) Sei $(\pi, V) \in \mathfrak{R}(G)$. Dann wird V durch

$$\pi\colon \mathcal{D}(G) \longrightarrow \mathrm{End}_R(V), \quad \pi(\varphi) \cdot v := \int_G \varphi(g)\, \pi(g) \cdot v \,\mathrm{d}g,$$

zu einem glatten $\mathcal{D}(G)$-Modul.

(2) Sei $(\rho, V) \in {}_A\mathfrak{M}$. Dann definiert

$$\rho\colon G \to \mathrm{Aut}_R(V), \quad \rho(g) \cdot v := \pi(ge) \cdot v,$$

eine glatte Darstellung von G auf V. Dabei ist $e = e_K$, $K \in \mathfrak{B}$, ein idempotentes Element mit $ev = v$ und $(ge)(x) = e(g^{-1}x)$.

Beweis. Siehe Renard [48, III.1.4], Guiraud [30, 3.3.2]. □

2.3.3 Rechtsdarstellungen

Sei V ein R-Modul. Eine glatte Linksdarstellung von G auf V ist das gleiche wie eine stetige, lineare Operation $G \times V \to V$, wobei V mit der diskreten Topologie versehen ist. Oft operiert G jedoch von rechts, und wir wollen auseinandersetzen, wie sich eine solche Rechtsdarstellung in einen Rechtsmodul von $A = \mathcal{D}(G)$ übersetzen läßt. Man kann die Konstruktion mit dem von dem Linkshaarmaß μ definierten Rechtshaarmaß λ wiederholen. Nach Satz 1.7.11 ist dieses gegeben durch

$$\int_G \varphi(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_G \varphi(x^{-1})\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_G \frac{\varphi(x)}{\delta_G(x)}\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Eine glatte Rechtsoperation $\pi\colon V \times G \to V$ definiert nun eine Rechtsmodulstruktur $V \otimes_R A \to V$, $v \otimes a \mapsto va$, durch

$$\begin{aligned} va &:= \int_G \pi(v,g)\,a(g)\,\mathrm{d}\lambda(g) \\ &= \int_G \pi(v,g^{-1})\,a(g^{-1})\,\mathrm{d}\mu(g) = \int_G \frac{\pi(v,g)\,a(g)}{\delta_G(g)}\,\mathrm{d}\mu(g). \end{aligned}$$

Bemerkung 2.3.3. Wenn G unimodular ist, dann sind die beiden Maße gleich. Gelegentlich wird G jedoch eine parabolische Untergruppe einer reduktiven $\mathfrak{p}$-adischen Gruppe sein.

2.4 Einige Bimodulidentitäten

Dieser Abschnitt ist einigen bekannten Lemmata gewidmet, die im weiteren benötigt werden.

Sei G eine reduktive $\mathfrak{p}$-adische Gruppe und $P = MN$ eine parabolische Untergruppe. Das unipotente Radikal N wird von seinen kompakt-offenen Untergruppen ausgeschöpft, das heißt

$$N = \bigcup_{K \in \Omega(N)} K,$$

siehe Satz 1.5.1. Sei $p \in R^*$. Es gibt eine Pro-p-Untergruppe $K' \in \Omega(G)$, und man kann eine 1-Umgebungsbasis $\mathfrak{B}(N) \subseteq \Omega(N)$ aus Pro-p-Untergruppen finden. Insbesondere gibt es ein Haarmaß in $\mathcal{D}'(N)$. Wir definieren eine R-lineare Abbildung $\alpha\colon \mathcal{D}(G) \to \mathcal{D}(N\backslash G)$, $\varphi \mapsto \bar{\varphi}$, durch

$$\bar{\varphi}(N\backslash g) := \int_N \varphi(ng)\,\mathrm{d}n, \tag{2.5}$$

die sich wegen

$$\alpha(m_0\varphi g_0)(g) = \delta_P^{-1}(m_0) \cdot \alpha(\varphi)(m_0^{-1} g g_0^{-1}), \quad g_0, g \in G,\ m_0 \in M,$$

siehe Folg. 1.7.18, als Morphismus

$$\alpha\colon \mathcal{D}(G) \to \delta_P^{-1} \cdot \mathcal{D}(N\backslash G)$$

von (M, G)-Bimoduln auffassen läßt.

Bemerkung 2.4.1.

- Wir bezeichnen Abbildungen wie in (2.5) oft nur mit einem Querstrich, dessen Bedeutung sich aus dem Kontext ergibt.
- Der Ausdruck »G-Modul« usf. bedeutet »$\mathcal{D}(G)$-Modul«.

Lemma 2.4.2. Es gibt ein $h \in \mathcal{C}^\infty(G)$ mit den folgenden Eigenschaften:

(1) Die Funktion h ist von rechts invariant unter einer Pro-p-Untergruppe $K \in \Omega(G)$.

(2) Für alle $g \in G$ ist die Funktion $N \to R$, $n \mapsto h(ng)$, ein Element von $\mathcal{D}(N)$ mit
$$\int_N h(ng)\,\mathrm{d}n = 1.$$

Beweis. Wir benutzen die Konstruktion aus [30, 4.3.4]: Sei $K \in \Omega(G)$ eine beliebige Pro-p-Untergruppe, Γ ein Repräsentantensystem von $N\backslash G/K$ in G und
$$L := \dot{\bigcup_{\gamma\in\Gamma}} \gamma K.$$

Jedes feste $g \in G$ ist von der Form $g = n_g\gamma_g k_g$ für irgendwelche $k_g \in K$, $\gamma_g \in \Gamma$, $n_g \in N$. Wie man leicht sieht, liegt die Funktion $N \to R$, $n \mapsto \mathbb{1}_L(ng)$, in $\mathcal{D}(N)$, und es gilt dafür

$$\int_N \mathbb{1}_L(ng)\,\mathrm{d}n = \mathrm{vol}(\gamma_g K \gamma_g^{-1} \cap N) \in R^*.$$

Nun kann man h durch $h(g) := \dfrac{\mathbb{1}_L(g)}{\int_N \mathbb{1}_L(ng)\,\mathrm{d}n}$ definieren. □

Proposition 2.4.3 ([30, 4.3]). *Der Morphismus α ist surjektiv mit*

$$\ker \alpha = \mathcal{D}(G)(N) := \langle \varphi - n\varphi \mid n \in N,\ \varphi \in \mathcal{D}(G) \rangle. \tag{2.6}$$

Folglich gilt $N\backslash\mathcal{D}(G) := \mathcal{D}(G)/\mathcal{D}(G)(N) \cong \delta_P^{-1} \cdot \mathcal{D}(N\backslash G)$ als (G, M)-Bimoduln.

Beweis. Sei $\psi \in \mathcal{D}(G/N)$. Dann ist $\alpha(\psi_0) = \psi$ für $\psi_0(g) := h(g)\,\psi(g/N)$, siehe Lemma 2.4.2. Das zeigt die Surjektivität. Es bleibt (2.6) nachzuweisen: »$\supseteq$« ist offensichtlich. »$\subseteq$«: Wir passen den Beweis von [30, 4.3.3] an: Sei $\varphi \in \ker \alpha$ und $K \in \Omega(G)$ eine Pro-p-Untergruppe derart, daß φ rechtsinvariant unter K ist. Zunächst ist $\operatorname{Tr} \varphi \subseteq \bigcup_{i=1}^m N g_i K$ für endlich viele Repräsentanten $g_i \in N\backslash G/K$, und zu jedem g_i kann man endlich viele $n_{i1}, \ldots, n_{i\nu_i} \in N$ derart wählen, daß

$$\operatorname{Tr} \varphi = \dot{\bigcup_{i=1}^{m}} \dot{\bigcup_{j=1}^{\nu_i}} n_{ij} g_i K \quad \text{und} \quad \varphi = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{\nu_i} \varphi(n_{ij} g_i) \cdot \mathbb{1}_{n_{ij} g_i K}, \tag{2.7}$$

weil $\operatorname{Tr} \varphi$ vollständig in K-Linksnebenklassen zerfällt und diese entweder disjunkt oder identisch sind. Wir setzen $\xi_i(g) := \int_N \mathbb{1}_{g_i K}(ng)\,\mathrm{d}n$. Dafür gilt

$$\xi_i(g_j) = \begin{cases} \operatorname{vol}(g_i K g_i^{-1} \cap N) & \text{für } i = j, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wenn $p \in R^*$, dann ist das hier auftretende Volumen auch in R^*. Für alle $g \in G$ gilt nun weiter nach Voraussetzung

$$\begin{aligned} 0 = \int_N \varphi(ng)\,\mathrm{d}n &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{\nu_i} \varphi(n_{ij} g_i) \cdot \int_N \mathbb{1}_{n_{ij} g_i K}(ng)\,\mathrm{d}n \\ &= \sum_{i=1}^{m} \Bigl(\sum_{j=1}^{\nu_i} \varphi(n_{ij} g_i) \Bigr) \cdot \xi_i(g). \end{aligned}$$

Indem man $g = g_1$ usf. setzt, erhält man

$$\sum_{j=1}^{\nu_i} \varphi(n_{ij} g_i) = 0, \quad 1 \le i \le m.$$

Wenn man noch $\mathbb{1}_{ngK} = n \cdot \mathbb{1}_{gK}$ beachtet, kann man dies in die Formel für φ bei (2.7) einsetzen. Es gilt dann nämlich

$$\varphi = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{\nu_i} \varphi(n_{ij} g_i) \cdot (n_{ij} \cdot \mathbb{1}_{g_i K} - \mathbb{1}_{g_i K}) \in \mathcal{D}(G)(N). \qquad \square$$

Wir fassen einige Varianten davon zusammen:

Lemma 2.4.4 ([30, 4.6])**.**

(1) $N\backslash\mathcal{D}(G) \cong \delta_P^{-1} \cdot \mathcal{D}(N\backslash G)$.

(2) $\mathcal{D}(G)/N \cong \mathcal{D}(G/N) \cdot \delta_P$.

(3) $N\backslash\mathcal{D}(P) \cong \delta_P^{-1} \cdot \mathcal{D}(M)$.

(4) $\mathcal{D}(P)/N \cong \mathcal{D}(M) \cdot \delta_P$. □

Lemma 2.4.5. Sei $\pi\colon \mathcal{D}(N) \to \mathrm{End}_R(V)$ ein glatter Modul von N. Dann gilt

$$V(N) \coloneqq \langle v - \pi(n) \cdot v \mid v \in V, n \in N \rangle = \bigcup_{K \in \mathfrak{B}(N)} \ker \pi(e_K).$$

Beweis. Vgl. [48, Prop. III.2.9]. »$\subseteq$«: Sei $w \coloneqq v - \pi(n) \cdot v$ einer der Erzeuger von $V(N)$. Wähle eine kompakt-offene Untergruppe $K \in \Omega(N)$ mit $n \in K$. Wegen $e_K(xn^{-1}) = e_K(x)$ und weil N unimodular ist gilt dann

$$\begin{aligned}\pi(e_K) \cdot \pi(n) \cdot v &= \int_N e_K(x)\, \pi(xn) \cdot v \,\mathrm{d}x \\ &= \int_N e_K(xn^{-1})\, \pi(x) \cdot v \,\mathrm{d}x = \int_N e_K(x)\, \pi(x) \cdot v \,\mathrm{d}x = \pi(e_K) \cdot v\end{aligned}$$

und somit $\pi(e_K) \cdot w = 0$.

»$\supseteq$«: Sei $v \in \ker \pi(e_{K_1})$ für ein $K_1 \in \mathfrak{B}(N)$. Weil der Modul V glatt ist, gibt es $K_2 \in \mathfrak{B}(N)$ mit $\pi(e_{K_2}) \cdot v = v$. Sei $K \coloneqq K_1 \cap K_2$. Durch die Abbildungsvorschrift $n \mapsto e_{K_1}(n)\, \pi(n) \cdot v$ wird ein Element von $\mathcal{D}(N, V)$ definiert, das rechtsinvariant unter K ist. Damit erhalten wir eine Formel für das Integral, das nach Voraussetzung Null ist:

$$\begin{aligned}0 = \pi(e_{K_1}) \cdot v &= \int_N e_{K_1}(n)\, \pi(n) \cdot v \,\mathrm{d}n \\ &= \frac{\mathrm{vol}(K)}{\mathrm{vol}(K_1)} \sum_{n \in N/K} \mathbb{1}_{K_1}(n)\, \pi(n) \cdot v = \frac{1}{|K_1/K|} \sum_{n \in K_1/K} \pi(n) \cdot v.\end{aligned}$$

Wir bemerken $|K_1/K| \in R^*$. Das ist eine natürliche Zahl. Daraus folgt aber sofort

$$v = v - \pi(e_{K_1}) \cdot v = \frac{1}{|K_1/K|} \sum_{n \in K_1/K} \big(v - \pi(n) \cdot v\big) \in V(N). \qquad \square$$

Lemma 2.4.6. Seien $Q = L \ltimes U$ und $P = M \ltimes N$ parabolische Untergruppen von G mit $Q \subseteq P$. Dann ist $M \cap Q$ eine parabolische Untergruppe von M mit der Leviuntergruppe L und $\mathscr{R}_u(M \cap Q) = M \cap U$, und man hat die folgenden Zerlegungen:

$$M \cap Q = L(M \cap U), \quad U = (M \cap U)N, \quad (M \cap Q)N = LU = Q.$$

Insbesondere hat man $N \subseteq U$. Wenn man $\delta_P, \delta_Q, \delta_{M\cap Q}$ als Charaktere von L auffaßt, dann gilt die Identität $\delta_P\, \delta_{M\cap Q} = \delta_Q$.

Beweis. Die Untergruppen Q und P sind standardparabolisch bzgl. desselben P_0. Sei Δ die entsprechende Basis des relativen Wurzelsystems und $J \subseteq I \subseteq \Delta$ so, daß $Q = P_J$ und $P = P_I$. Dann wird M_I erzeugt von $\mathscr{Z}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S})(k)$ und den Wurzeluntergruppen $N_{(\alpha)}$ mit $\alpha \in \langle I \rangle_{\mathrm{nd}}$, wohingegen N_I Produkt der $N_{(\alpha)}$ mit $\alpha \in \Phi_{\mathrm{nd}} \smallsetminus \langle I \rangle$ ist, entsprechend für P_J. Daraus folgt $L \subseteq M$ und $N \subseteq U$. Aufgrund von [48, V.4.6] wissen wir, daß $M \cap Q$ eine standardparabolische Untergruppe von M ist und daß die folgenden Zerlegungen gelten:

$$\begin{gathered} M \cap Q = (M \cap L)(M \cap U) = L(M \cap U), \\ U = P \cap U = (M \cap U)(N \cap U) = (M \cap U)N, \\ LU = Q = P \cap Q = (M \cap Q)(N \cap Q) = (M \cap Q)N. \end{gathered}$$

Die Formel für die Deltafaktoren ist ein Spezialfall von [30, 2.5.4]. □

Lemma 2.4.7 ([30, Prop. 4.1.2])**.** Die Abbildung

$$\chi \cdot \mathcal{D}(M) \cdot \chi \longrightarrow \mathcal{D}(M), \quad \varphi \longmapsto \chi^{-1}\varphi,$$

definiert einen Isomorphismus von B-Bimoduln. Dabei ist

$$(\chi^{-1}\varphi)(m) := \chi^{-1}(m) \cdot \varphi(m), \quad \varphi \in \mathcal{D}(M),\ m \in M,$$

und χ kann irgendein Charakter von M sein. □

Seien nun $H \subseteq P \subseteq G$ und $H' \subseteq Q \subseteq G$ irgendwelche abgeschlossenen Untergruppen; es gebe einen topologischen Isomorphismus $\alpha\colon H \to H'$, und H operiere gemäß

$$\rho\colon H \curvearrowright P \times Q, \quad h \cdot (p,q) := (ph^{-1}, \alpha(h)q).$$

Lemma 2.4.8. Die Operation ρ ist stetig, frei und eigentlich.

Beweis. Siehe [9, Lemma 3.1 (a)]. □

Den Bahnenraum, der somit ein ℓ-Raum ist, bezeichnen wir mit $P \times_H Q$. Sei $\varphi \in \mathcal{D}(P \times Q)$ und $h \in H$. Dann definieren wir eine neue Funktion $\varphi_h \in \mathcal{D}(P \times Q)$ durch $\varphi_h(p,q) \coloneqq \varphi(ph, \alpha(h^{-1})q)$. Außerdem betrachten wir

$$\begin{aligned} H\backslash\mathcal{D}(P \times Q) &\coloneqq \frac{\mathcal{D}(P \times Q)}{\mathcal{D}(P \times Q)(H)}, \\ \mathcal{D}(P \times Q)(H) &\coloneqq \big\langle \varphi - \delta_H(h) \cdot \varphi_h \bigm| h \in H \big\rangle. \end{aligned}$$

Man erhält ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}(P) \otimes_R \mathcal{D}(Q) \arrow[r, "\alpha", "\sim"'] \arrow[d, "\kappa_1"] & \mathcal{D}(P \times Q) \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\kappa_2"] & \mathcal{D}(P \times_H Q) \\ \mathcal{D}(P) \cdot \delta_H^{-1} \otimes_H \mathcal{D}(Q) \arrow[r, dashed, "\tilde{\alpha}", "\sim"'] & H\backslash\mathcal{D}(P \times Q). \arrow[ur, dashed, "\tilde{\beta}"'] & \end{tikzcd}$$

Hierbei ist α der kanonische Isomorphismus, siehe (1.3.3). Dieser induziert, wie nicht schwer zu sehen ist, einen Isomorphismus $\tilde{\alpha}$. Weiter ist β der folgende Morphismus von (P,Q)-Bimoduln:

$$\beta(\varphi)[p,q] \coloneqq \int_H \varphi\big(ph, \alpha(h^{-1})q\big)\, \mathrm{d}h.$$

Dieser induziert einen eindeutigen Morphismus $\tilde{\beta}$. Die Morphismen κ_1 und κ_2 sind die kanonischen Projektionen.

Proposition 2.4.9. *Der Morphismus $\tilde{\beta}$ ist ein Isomorphismus.*

Beweis. Es bleibt nur zu zeigen, daß $\tilde{\beta}$ bijektiv ist. Für die Injektivität zeigen wir $\ker \beta \subseteq \mathcal{D}(P \times Q)(H)$. Die umgekehrte Inklusion ist klar. Wir passen den Beweis von Guiraud [30, Th. 5.4.5] an: Sei $\varphi \in \mathcal{D}(P \times Q)$ mit $\int_H \varphi\big(ph, \alpha(h^{-1})q\big)\, \mathrm{d}h = 0$ für alle $(p,q) \in P \times Q$. Es gibt Pro-p-Kongruenzuntergruppen $K \in \Omega(P)$ und $L \in \Omega(Q)$ derart, daß

$$\varphi|(Kp \times qL) = \varphi(p,q), \quad (p,q) \in P \times Q.$$

Der Träger $\operatorname{Tr}\varphi$ zerfällt in endlich viele $X_i \coloneqq Kp_i \times q_iL$, $i \in \{1, \dots, n\}$, wobei man $p_i \in K\backslash P$ und $q_i \in Q/L$ nimmt. Zwei verschiedene X_i sind also disjunkt. Betrachte die Funktionen

$$\xi_i(p,q) \coloneqq \int_H \mathbb{1}_{X_i}\big(ph, \alpha(h^{-1})q\big)\, \mathrm{d}m.$$

Zu $j \in I$ sei $\langle j \rangle \coloneqq \{i \in I \mid \exists h \in H \colon X_j = hX_i\}$. Dann kann man $J \subseteq I$ so wählen, daß $I = \biguplus_{j \in J} \langle j \rangle$, und für $i \in \langle j \rangle$ gilt dann, wie man leicht sieht, $\xi_i = \delta_H(h_i) \cdot \xi_j$, wenn

$$X_j = h_i^{-1} X_i. \tag{2.8}$$

Es gibt Skalare $c_i \in R$, mit denen man $\varphi = \sum_{i\in I} c_i \cdot \mathbb{1}_{X_i}$ schreiben kann. Nach Voraussetzung gilt nun

$$0 = \int_H \varphi\big(ph, \alpha(h^{-1})q\big)\, \mathrm{d}h = \sum_{j\in J} \Big[\sum_{i\in\langle j\rangle} c_i \delta_H(h_i)\Big] \xi_j(p,q), \quad (p,q) \in P \times Q,$$

und man hat $\operatorname{Tr} \xi_j \subseteq H \cdot X_j$. Für zwei verschiedene $j, k \in J$ haben daher ξ_j und ξ_k disjunkte Träger. Außerdem gilt

$$\xi_j(p_j, q_j) = \operatorname{vol}\big(p_j^{-1} K p_j \cap H \cap \alpha^{-1}(q_j L q_j^{-1} \cap H')\big) \in R^*,$$

weil es sich bei K und L und Pro-p-Untergruppen handelt. Dies impliziert

$$\sum_{i\in\langle j\rangle} c_i \delta_H(h_i) = 0, \quad j \in J,$$

und wegen (2.8) ergibt das nun

$$\begin{aligned}\varphi = \sum_{i\in I} c_i\, \mathbb{1}_{X_i} &= \sum_{j\in J} \sum_{i\in\langle j\rangle} c_i \Big(\mathbb{1}_{X_i} - \delta_H(h_i) \cdot \mathbb{1}_{X_j}\Big) \\ &= \sum_{j\in J} \sum_{i\in\langle j\rangle} c_i \Big(\mathbb{1}_{X_i} - \delta_H(h_i)\, h_i \cdot \mathbb{1}_{X_i}\Big) \in \mathcal{D}(P \times Q)(H).\end{aligned}$$

Für die Surjektivität können wir den Beweis [30, 4.5.3] von Guiraud nicht benutzen, weil er auf einem Mißverständnis beruht (siehe Anhang, Bemerkung C.6). Aber wir können seine Konstruktion aus [30, 4.3.4] anpassen: Seien wiederum $K \in \Omega(P)$ und $L \in \Omega(Q)$ zwei Pro-p-Untergruppen. Wir betrachten die Operation

$$K \times H \times L \curvearrowright P \times Q, \quad (k,h,l) \cdot (p,q) := (kph^{-1}, \alpha(h)ql^{-1}),$$

wählen ein Repräsentantensystem $\Lambda \subseteq P \times Q$ des Bahnenraums $K \backslash P \times_H Q / L$ und setzen

$$\Gamma := \dot{\bigcup_{(p,q)\in\Lambda}} Kp \times qL.$$

Für festes (p,q) liegt die Funktion $h \mapsto \mathbb{1}_\Gamma\big(ph, \alpha(h^{-1})q\big)$ in $\mathcal{D}(P \times Q)$, und es gilt

$$\int_H \mathbb{1}_\Gamma\big(ph, \alpha(h^{-1})q\big)\, \mathrm{d}h = \operatorname{vol}\big(p_0^{-1} K p_0 \cap H \cap \alpha^{-1}(q_0 L q_0^{-1} \cap H')\big) \in R^*$$

für irgendein $(p_0, q_0) \in \Lambda$. Man erhält nun in

$$\psi(p,q) := \frac{\mathbb{1}_\Gamma(p,q)}{\int_H \mathbb{1}_\Gamma\big(ph, \alpha(h^{-1})q\big)\, \mathrm{d}h}$$

eine glatte Funktion mit $\int_H \psi\big(ph, \alpha(h^{-1})q\big)\,\mathrm{d}h = 1$ für alle (p,q). Sei nun $\varphi \in \mathcal{D}(P \times_H Q)$ beliebig und $\kappa\colon P \times Q \to P \times_H Q$ die kanonische Projektion. Wir definieren

$$\varphi_0(p,q) := \varphi[p,q] \cdot \psi(p,q).$$

Dieses φ_0 liegt in $\mathcal{D}(P \times Q)$. In der Tat, es bleibt zu zeigen, daß der Träger kompakt ist, aber es gilt

$$\operatorname{Tr}\varphi_0 = \kappa^{-1}(\operatorname{Tr}\varphi) \cap \Gamma, \tag{2.9}$$

und weil Γ sowie κ offen sind und $\operatorname{Tr}\varphi$ kompakt ist, gibt es endlich viele

$$(p_1, q_1), \dots, (p_n, q_n) \in \Lambda$$

mit

$$\kappa(\operatorname{Tr}\varphi_0) \subseteq \operatorname{Tr}\varphi \cap \bigcup_{i=1}^n K p_i \times_H q_i L$$
$$\implies H \cdot \operatorname{Tr}\varphi_0 \subseteq \kappa^{-1}(\operatorname{Tr}\varphi) \cap \bigcup_{\substack{i=1,\dots,n \\ h \in H}} K p_i h \times \alpha(h^{-1}) q_i L.$$

Zusammen mit (2.9) ergibt dies

$$\operatorname{Tr}\varphi_0 \subseteq \kappa^{-1}(\operatorname{Tr}\varphi) \cap \bigcup_{i=1}^n K p_i \times q_i L,$$

und rechts steht eine kompakte Menge, weil $\kappa^{-1}(\operatorname{Tr}\varphi)$ abgeschlossen und die Vereinigung kompakt ist. Abschließend sieht man nun leicht, daß $\beta(\varphi_0) = \varphi$ gilt. □

Folgerung 2.4.10. Die Abbildung

$$\gamma\colon \mathcal{D}(P) \cdot \delta_H^{-1} \otimes_H \mathcal{D}(Q) \longrightarrow \mathcal{D}(P \times_H Q),$$
$$\gamma(\varphi \otimes \psi)[p,q] := \int_H \varphi(ph) \cdot \psi\big(\alpha(h^{-1})q\big)\,\mathrm{d}h,$$

ist ein Isomorphismus von (P,Q)-Bimoduln. □

2.5 Induktion und Restriktion

Sei G eine reduktive $\mathfrak{p}$-adische Gruppe und $A = \mathcal{D}(G)$ die Heckealgebra. Die Werkzeuge, mit deren Hilfe man ${}_A\mathfrak{M}$ untersucht, sind Restriktion Res_H^G und

Induktion Ind_H^G bzgl. einer abgeschlossenen Untergruppe $H \subseteq G$. Die Identifikation dieser Funktoren mit Funktoren zwischen den Modulkategorien, induziert von Bimoduln, findet sich bei Renard [48]. Die Identifikation von *parabolischer* Restriktion und Induktion mit Funktoren der Form $X \otimes_B -$ und $Y \otimes_A -$, wobei ${}_AX_B$ und ${}_BY_A$ Bimoduln sind, ist ein Ergebnis der Diplomarbeit von Guiraud [30]. Wir rekapitulieren diese Dinge in diesem Abschnitt.

2.5.1 Die Funktoren im einzelnen

Sei $P = MN$ eine parabolische Untergruppe von G. Hierzu gibt es die Heckealgebren

$$B := \mathcal{D}(M) \quad \text{und} \quad D := \mathcal{D}(P).$$

Man betrachtet die folgenden Funktoren:

- Die *Restriktion* $\mathrm{Res}_P^G \colon \mathfrak{R}(G) \to \mathfrak{R}(P)$. Diese ist offensichtlich isomorph zu dem Funktor
$$A \otimes_A - \colon {}_A\mathfrak{M} \longrightarrow {}_D\mathfrak{M},$$
wobei A als (D, A)-Bimodul betrachtet wird. Die Struktur ${}_DA$ wird von der Linkstranslation $P \curvearrowright \mathcal{D}(G)$ induziert. Hier kann P eine beliebige abgeschlossene Untergruppe von G sein. Siehe [30, 4.2.3].

- Die *Induktion* $\mathrm{Ind}_P^G \colon \mathfrak{R}(P) \to \mathfrak{R}(G)$. Sei $(\rho, W) \in \mathfrak{R}(P)$. Dann besteht $\mathrm{Ind}_P^G(W)$ aus den Funktionen $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(G, W)$ mit folgenden Eigenschaften:

  (1) Die Funktion φ ist von links gleichmäßig lokal konstant unter einem $K \in \Omega(G)$, das heißt $\varphi(kg) = \varphi(g)$ für $k \in K$, $g \in G$.

  (2) Es gilt $\varphi(gp^{-1}) = \rho(p) \cdot \varphi(g)$ für alle $g \in G$ und $p \in P$.

  Morphismen werden in der offensichtlichen Weise abgebildet. Auf Ind_P^G operiert G durch Linkstranslation. Diese Definition unterscheidet sich vom Üblichen, wo G durch Rechtstranslation operiert; unsere Formulierung ist aber besser an unsere Zwecke angepaßt. Es ist leicht zu sehen, daß $(\mathrm{Res}_P^G, \mathrm{Ind}_G^P)$ ein adjungiertes Paar ist, und daraus folgt wegen Proposition 2.1.16 sofort, daß Ind_P^G isomorph ist zu dem Funktor
$$A \operatorname{Hom}_D(A, -) \colon {}_D\mathfrak{M} \longrightarrow {}_A\mathfrak{M};$$
man kann aber auch einen Isomorphismus angeben, siehe dazu [48, III.2.5]. Hier kann wiederum P eine beliebige abgeschlossene Untergruppe von G sein.

- Die *kompakte Induktion* $\operatorname{ind}_P^G\colon \mathfrak{R}(P) \to \mathfrak{R}(G)$ ist ein Unterfunktor von Ind_P^G, wobei $\operatorname{ind}_P^G(W) \subseteq \operatorname{Ind}_P^G(W)$ aus denjenigen Funktionen $\varphi \in \operatorname{Ind}_P^G(W)$ besteht, für die zusätzlich gilt:

  (3) Der Träger $\operatorname{Tr}\varphi$ ist *kompakt modulo* P, das heißt, daß $\operatorname{Bild}(\operatorname{Tr}\varphi) \subseteq G/P$ ist kompakt, vgl. Lemma 2.5.1 unten.

  Dieser Funktor ist isomorph zu

  $$\mathcal{D}(G) \cdot \delta_P^{-1} \otimes_P -\colon {}_D\mathfrak{M} \longrightarrow {}_A\mathfrak{M},$$

  wobei $\mathcal{D}(G)$ als (G,P)-Bimodul betrachtet wird:

  $$(\varphi \cdot p)(g) = \delta_P^{-1}(p)\,\varphi(gp^{-1}), \quad \varphi \in \mathcal{D}(G),\ p \in P,\ g \in G;$$
  $$(\varphi \cdot y)(g) = \int_P \delta_P(p)\,\varphi(gp)\,y(p^{-1})\,\mathrm{d}p, \quad \varphi \in \mathcal{D}(G),\ y \in D,\ g \in G.$$

  Die Formel für den Isomorphismus lautet folgendermaßen:

  $$f\colon \mathcal{D}(G) \cdot \delta_P^{-1} \otimes_P W \longrightarrow \operatorname{ind}_P^G(W),$$
  $$f(\varphi \otimes w)(g) = \int_P \varphi(gp)\,\rho_W(p) \cdot w\,\mathrm{d}p,$$

  vgl. [48, III.2.5] und [30, 4.4]. Wenn P eine parabolische Untergruppe von G ist, dann ist G/P kompakt, siehe Folg. 1.4.2, und daher ist $\operatorname{ind}_P^G = \operatorname{Ind}_P^G$.

- Den *Jacquet-Funktor* $j_N\colon \mathfrak{R}(P) \to \mathfrak{R}(M)$. Zu $(\rho, W) \in \mathfrak{R}(P)$ bildet man

  $${}_NW = \frac{W}{\langle w - \rho(n) \cdot w \mid n \in N,\ w \in W\rangle}.$$

  Das ist mit Morphismen verträglich, und man hat die Translationsoperation $M \curvearrowright {}_NW$, wodurch eine glatte Darstellung von M entsteht. Dieser Funktor ist isomorph zu

  $$\mathcal{D}(M) \otimes_P -\colon {}_D\mathfrak{M} \longrightarrow {}_B\mathfrak{M},$$

  wobei $\mathcal{D}(M)$ als (M,P)-Bimodul betrachtet wird. Dabei operiert P von rechts auf $\mathcal{D}(M)$ durch

  $$(\varphi p)(m) \coloneqq \varphi(m m_p^{-1}), \quad p \in P,\ m \in M,\ \varphi \in \mathcal{D}(M),$$

  und m_p kommt von der eindeutigen Zerlegung $p = m_p n_p$ in $P = MN$. Siehe [48, III.2.10].

- Den Funktor $b_N\colon \mathfrak{R}(M) \to \mathfrak{R}(P)$, der eine glatte M-Darstellung (ρ, W) durch $p \cdot w \coloneqq \rho(m_p) \cdot w$ zu einer glatten P-Darstellung macht. Dieser Funktor ist rechtsadjungiert zum Jacquet-Funktor. Es folgt sofort, daß er isomorph ist zu

$$D \operatorname{Hom}_B(B, -)\colon {}_B\mathfrak{M} \longrightarrow {}_D\mathfrak{M},$$

aber es gibt darüber hinaus noch einen natürlichen Isomorphismus

$$D \operatorname{Hom}_B(B, -) \cong B \otimes_B -,$$

wobei B auf der rechten Seite als (D, B)-Bimodul, auf der linken aber als (B, D)-Bimodul aufgefaßt wird. Siehe [48, III.2.10].

Wir notieren noch das folgende Lemma, welches die Eigenschaft »$\operatorname{Tr} f$ ist kompakt modulo H« einer Funktion $f \in \operatorname{Ind}_H^G(W)$ charakterisiert, wobei $H \subseteq G$ eine abgeschlossene Untergruppe ist.

Lemma 2.5.1. Sei $\kappa\colon G \to G/H$ die kanonische Projektion und G/H wie üblich mit der Quotiententopologie bzgl. κ versehen. Für eine Funktion $f \in \operatorname{Ind}_H^G(W)$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(1) $\operatorname{Tr} f = LH$ für eine kompakte Menge $L \subseteq G$.

(2) $\operatorname{Tr} f \subseteq LH$ für eine kompakte Menge $L \subseteq G$.

(3) $\kappa(\operatorname{Tr} f)$ ist kompakt.

Beweis. »$1 \Rightarrow 2$« und »$1 \Rightarrow 3$« sind klar. »$2 \Rightarrow 1$«: Es gibt ein $K \in \Omega(G)$, unter dem f von links invariant ist. Der Träger $\operatorname{Tr} f$ ist dann von links unter K und von rechts unter H invariant, zerfällt also in (K, H)-Doppelnebenklassen. Diese sind offen, und weil $\kappa(LH) = \kappa(L)$ kompakt ist, folgt, daß $\operatorname{Tr} f$ in endlich viele davon zerfällt, also

$$\operatorname{Tr} f = \dot{\bigcup_{i=1}^{n}} K g_i H = \Big(\dot{\bigcup_{i=1}^{n}} K g_i\Big) H.$$

»$3 \Rightarrow 2$«: Wenn $\kappa(\operatorname{Tr} f)$ kompakt ist, dann ist $\kappa(\operatorname{Tr} f) \subseteq \bigcup_{i=1}^n \kappa(K g_i H)$ für endlich viele $g_i \in G$. Abermals gilt $\operatorname{Tr} f = \kappa^{-1}\big(\kappa(\operatorname{Tr} f)\big) \subseteq \big(\dot\bigcup_{i=1}^n K g_i\big) H$. □

Bemerkung 2.5.2. Im allgemeinen sind diese Eigenschaften nicht äquivalent, und man muß achtgeben, was »kompakt modulo H« bedeuten soll.

2.5.2 Parabolische Induktion und Restriktion

Sei weiterhin G eine reduktive $\mathfrak{p}$-adische Gruppe und $P = MN$ eine parabolische Untergruppe von G. Wir nehmen an, daß $p \in R^*$. Das ist damit gleichbedeutend, daß alle auftretenden Gruppen ein Haarmaß haben. Der modulare Charakter δ_P nimmt Werte in $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}] \subseteq R$ an. Die *parabolische Restriktion* r_M und die *parabolische Induktion* i_M sind die zusammengesetzten Funktoren

$$\begin{tikzcd} \mathcal{R}(G) \arrow[rr, dashed, bend left, "r_M"] \arrow[dr, shift left, "\mathrm{Res}^G_P"] & & \mathcal{R}(M) \arrow[ll, dashed, bend right, "i_M"'] \arrow[dl, shift left, "b_N"] \\ & \mathcal{R}(P). \arrow[ul, shift left, "\mathrm{Ind}^P_G"] \arrow[ur, shift left, "j_N"] & \end{tikzcd}$$

Die normierten Funktoren sind $\boldsymbol{r}_M := \delta_P^{1/2} \otimes r_M$ und $\boldsymbol{i}_M := i_M(\delta_P^{-1/2} \otimes -)$. Diese haben die etwas schöneren Eigenschaften, daß $\boldsymbol{i}_M$ unitäre und duale Moduln respektiert. Wir werden sie auch in Kap. 6 verwenden, da die dortige Konstruktion so besser zusammenpaßt. Zur Definition der normierten Funktoren muß an den Ring R die zusätzliche Bedingung gestellt werden, daß p eine Quadratwurzel besitzt. Wir können jedoch beide Fälle gleichzeitig betrachten. Dazu führen wir einen Charakter χ von M ein:

Definition 2.5.3. Sei von nun an $\chi\colon M \to R^*$ ein fester Charakter von M. Im nicht-normierten Fall ist $\chi = 1$, im normierten $\chi = \delta_P^{1/2}$, und der Ring R muß dann die obengenannte Bedingung erfüllen.

Schreiben wir jetzt r_M und i_M für die Funktoren mit dem Charakter χ, dann ist

$$r_M(V) = {}_N V \quad \text{mit} \quad M \curvearrowright {}_N V, \quad m \cdot [v] = [\chi(m)\, \rho_V(m) \cdot v],$$

und $i_M(W)$ können wir auffassen als den Raum aller Funktionen $\varphi\colon G/N \to W$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) Die Funktion φ ist von links invariant unter einem $K \in \Omega(G)$, das heißt

$$\varphi(kg/N) = \varphi(g/N), \quad k \in K,\ g \in G.$$

(2) Es gilt $\varphi(gm^{-1}/N) \cdot \chi(m) = \rho_W(m) \cdot \varphi(g/N)$ für alle $m \in M$ und $g \in G$.

Man hat $G \curvearrowright i_M(W)$, $(g \cdot \varphi)(x/N) = \varphi(g^{-1}x/N)$.

Bemerkung 2.5.4.

- Es gilt $\chi|K = 1$ für alle kompakt-offenen Untergruppen $K \subseteq G$ und allgemeiner $\chi|N = 1$, da die Gruppe N Vereinigung ihrer kompakt-offenen Untergruppen ist.
- Wir schreiben $\otimes_G$ statt $\otimes_{\mathcal{D}(G)}$ u. ä.
- Es gibt bei der Definition der normierten Funktoren (scheinbar) verschiedene Konventionen. Wir folgen hier, wie Renard und Guiraud, Bernstein/Zelevinsky [7, S. 444]. Bei Vignéras ist $\chi = \delta_P^{-1/2}$, aber wie schon in Bem. 1.7.10 erwähnt, definiert Vignéras δ_P als das, was bei uns δ_P^{-1} ist.

Lemma 2.5.5. Sei $K \in \Omega(G)$ eine Pro-p-Kongruenzuntergruppe, $\Lambda \subseteq G$ ein Repräsentantensystem von $K\backslash K_0/K_{0,P}$ und $\varphi \in e_K * \mathcal{D}(G/N)$. Dann hat man

$$\varphi(g/N) = \frac{1}{\mathrm{vol}(K_M)} \sum_{\lambda\in\Lambda} \int_M \varphi(\lambda m/N) \cdot \mathbb{1}_{K\lambda m/N}(g/N)\,\mathrm{d}m. \tag{2.10}$$

Beweis. Der Träger von φ zerfällt in Mengen der Form $K\lambda M/N$, wobei $\lambda \in K\backslash G/P$. Aufgrund der Iwasawa-Zerlegung (Satz 1.4.1) ist dieser Doppelquotient endlich, und man kann $\lambda \in \Lambda$ wählen. Es gilt $G = \dot{\bigcup}_{\lambda\in\Lambda} K\lambda MN$. Sei $g \in G$ beliebig. Es ist dann von der Form $g = k_g\lambda m_g n_g$ für ein $\lambda \in \Lambda$, und nur der zu diesem gehörige Summand liefert einen Beitrag zu dem Integral in (2.10). Indem man ausnutzt, daß K ein Normalteiler in K_0 ist, erhält man

$$\begin{aligned} x &:= \int_M \mathbb{1}_{K\lambda/N}(\lambda m_g m^{-1}/N) \cdot \varphi(\lambda m/N)\,\mathrm{d}m \\ &= \int_M \mathbb{1}_{K/N}(m^{-1}/N)\,\varphi(\lambda m m_g/N)\,\mathrm{d}m. \end{aligned}$$

Nun ist $m^{-1}/N \in K/N$ genau dann, wenn $m \in K_M = \lambda^{-1}K\lambda \cap M$. Daraus folgt $x = \mathrm{vol}(K_M) \cdot \varphi(g/N)$. $\square$

Wir definieren nun zwei Bimoduln ${}_AX_B$ und ${}_BY_A$ durch

$$X := \mathcal{D}(G/N) \cdot \chi \quad \text{und} \quad Y := \chi \cdot N\backslash\mathcal{D}(G).$$

Der folgende Satz ist eines der Ergebnisse aus der Diplomarbeit von Guiraud:

Satz 2.5.6 ([30, 4.6]). *Die parabolische Restriktion ist isomorph zu dem Funktor*

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_M^G := Y \otimes_A -\colon {}_A\mathfrak{M} \to {}_B\mathfrak{M},$$

die parabolische Induktion hingegen zu dem Funktor

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_M^G := X \otimes_B -\colon {}_B\mathfrak{M} \to {}_A\mathfrak{M}.$$

Erster Beweis. Man kann die in Abschnitt 2.5.1 zusammengefaßten Charakterisierungen der Einzelfunktoren von Renard benutzen. Wegen $\mathrm{Ind}_P^G = \mathrm{ind}_P^G$ erhält man

$$r_M \cong \mathcal{D}(M) \otimes_P \mathcal{D}(G) \otimes_G - \quad \text{und} \quad i_M \cong \mathcal{D}(G) \cdot \delta_P^{-1} \otimes_P \mathcal{D}(M) \otimes_M -.$$

Wie Guiraud argumentiert, bekommt man die Behauptung für i_M durch einfache Bimodulmanipulationen und weil sich Tensorprodukte assoziativ verhalten; die Bildung der Koinvarianten läßt sich als Tensorprodukt $R \otimes_N -$ mit trivialer Operation auf R schreiben. Man erhält

$$\mathcal{D}(G)\cdot\delta_P^{-1}\otimes_P\mathcal{D}(M) = \mathcal{D}(G)\cdot\delta_P^{-1}\otimes_P\mathcal{D}(P)/N\cdot\delta_P^{-1} = \mathcal{D}(G)/N\cdot\delta_P^{-1} = \mathcal{D}(G/N).$$

Die gleiche Methode kann man auf r_M anwenden:

$$\mathcal{D}(M)\otimes_P\mathcal{D}(G) = \delta_P^{-1}\cdot\mathcal{D}(M)\cdot\delta_P^{-1}\otimes_P\mathcal{D}(G) = N\backslash\mathcal{D}(P)\cdot\delta_P^{-1}\otimes_P\mathcal{D}(G) = N\backslash\mathcal{D}(G).$$

Betrachtet man statt dessen die normierten Funktoren, erhält man

$$\boldsymbol{r}_M \cong \delta_P^{1/2} \cdot N\backslash\mathcal{D}(G) \quad \text{und} \quad \boldsymbol{i}_M \cong \mathcal{D}(G/N) \cdot \delta_P^{1/2}. \qquad \square$$

Wir geben noch einen zweiten, konstruktiven Beweis des Satzes an, da wir später die konkreten Abbildungen benötigen.

Zweiter Beweis von Satz 2.5.6. Es ist offensichtlich, daß $\mathcal{D}(G) \otimes_G V \cong V$ einen Isomorphismus

$$N\backslash\mathcal{D}(G) \otimes_G V \longrightarrow {}_N V, \quad [\varphi] \otimes v \longmapsto [\varphi * v], \tag{2.11}$$

induziert. Für die Induktion konstruieren wir eine R-lineare Abbildung:

$$\begin{gathered} f\colon \mathcal{D}(G/N) \cdot \chi \otimes_M W \longrightarrow i_M(W), \\ f(\varphi \otimes w)(g/N) := \int_M \varphi(gm^{-1}/N) \cdot \chi(m)\, \rho_W(m^{-1}) \cdot w \,\mathrm{d}m. \end{gathered} \tag{2.12}$$

Es ist leicht zu überprüfen, daß f wohldefiniert und ein Homomorphismus von G-Moduln ist. Sei $K \in \Omega(G)$ eine Pro-p-Kongruenzuntergruppe. Es genügt zu zeigen, daß die Einschränkung

$$\begin{tikzcd} e_K * \mathcal{D}(G/N) \cdot \chi \otimes_M W \arrow[r, bend left, "f"] & e_K * i_M(W) \arrow[l, dashed, bend left, "h"] \end{tikzcd}$$

bijektiv ist. Dazu geben wir h an. Sei $\psi \in e_K * i_M(W)$. Der Träger von ψ zerfällt ähnlich wie in der Situation des Lemmas 2.10 in Mengen der Form $K\lambda M/N$, $\lambda \in \Lambda$, und man kann dann $\psi = \sum_{\lambda\in\Lambda}\psi_\lambda$ schreiben, wobei ψ_λ die Funktion mit $\operatorname{Tr}\psi_\lambda = K\lambda M/N$ ist, die durch

$$\psi_\lambda(k\lambda m^{-1}/N) \cdot \chi(m) = \rho_W(m) \cdot \psi(\lambda), \quad k \in K,\ m \in M,$$

gegeben ist. Wir definieren nun eine R-lineare Abbildung durch

$$h(\psi) := \frac{1}{\operatorname{vol}(K_M)} \sum_{\lambda\in\Lambda} \mathbb{1}_{K\lambda/N} \otimes \psi(\lambda/N). \tag{2.13}$$

Jedes beliebige $g \in G$ ist von der Form $g = k_g\lambda m_g n_g \in K\lambda MN$ für ein gewisses $\lambda \in \Lambda$. Sei $c := \operatorname{vol}(K_M)^{-1} \in R^*$. Eine ähnliche Rechnung wie im Beweis des Lemmas ergibt

$$\begin{aligned}\big(f \circ h(\psi)\big)(g/N) &= c\int_M \mathbb{1}_{K\lambda/N}(gm^{-1}/N) \cdot \chi(m)\,\rho(m^{-1}) \cdot \psi(\lambda/N)\,\mathrm{d}m \\ &= c\int_M \mathbb{1}_{\lambda^{-1}K\lambda/N}(m_g m^{-1}/N)\,\psi(\lambda m/N)\,\mathrm{d}m \\ &= c\int_M \mathbb{1}_{K/N}(m^{-1}/N)\,\psi(\lambda m m_g/N)\,\mathrm{d}m = \psi(g/N).\end{aligned}$$

Andererseits bekommt man mit dem Lemma

$$\begin{aligned} h \circ f(\varphi \otimes w) &= c\sum_{\lambda\in\Lambda} \mathbb{1}_{K\lambda/N} \otimes f(\varphi\otimes w)(\lambda/N) \\ &= c\sum_{\lambda\in\Lambda} \mathbb{1}_{K\lambda/N} \otimes \Big(\int_M \varphi(\lambda m/N)\cdot\chi^{-1}(m)\,\rho(m)\cdot w\,\mathrm{d}m\Big) \\ &= \Big(c\sum_{\lambda\in\Lambda}\int_M \varphi(\lambda m/N)\cdot \mathbb{1}_{K\lambda/N}\cdot\rho(m)\,\mathrm{d}m\Big)\otimes w \\ &= \Big(c\sum_{\lambda\in\Lambda}\int_M \varphi(\lambda m/N)\cdot \mathbb{1}_{K\lambda m/N}\,\mathrm{d}m\Big)\otimes w = \varphi\otimes w. \qquad \square\end{aligned}$$

3. KUSPIDALE MODULN

In diesem Kapitel erinnern wir an die *kuspidalen Moduln*, die sich dadurch charakterisieren lassen, daß die Jacquet-Funktoren $\mathcal{R}_M$ für echte Leviuntergruppen $M \subsetneq G$ alle Null ergeben, und die gewissermaßen die Bausteine der Kategorie ${}_A\mathfrak{M}$ darstellen. Wir rekapitulieren eine Aussage von R. Meyer [40], die besagt, daß jeder kuspidale Modul unter gewissen Bedingungen an R Quotient eines projektiven kuspidalen und Untermodul eines injektiven kuspidalen Moduls ist. Dieses Ergebnis benutzen wir im nächsten Kapitel, um den kuspidalen Anteil vom Rest der Darstellungstheorie abzuspalten, was wir später zum Beweis der zweiten Adjungiertheit benötigen. Wie die kuspidalen Moduln jedoch aussehen, wird in dieser Arbeit nicht beleuchtet. Wir verweisen zum Beispiel auf den Artikel von Kim Ju-Lee [23, Ch. 3].

Sei G, sofern nichts anderes gesagt wird, eine reduktive $\mathfrak{p}$-adische Gruppe, G° die von den kompakten Untergruppen in G erzeugte Untergruppe sowie $A = \mathcal{D}(G)$ und $B = \mathcal{D}(G^\circ)$ die zugehörigen Heckealgebren. Dann hat man

- *Restriktion* $\mathrm{Res} = A \otimes_A -\colon {}_A\mathfrak{M} \to {}_B\mathfrak{M}$ und
- *Induktion* $\mathrm{Ind} = A\,\mathrm{Hom}_B(A, -)\colon {}_B\mathfrak{M} \to {}_A\mathfrak{M}$,

wobei A als (B, A)-Bimodul betrachtet wird, sowie

- *kompakte Induktion* $\mathrm{ind} = A \otimes_B -\colon {}_B\mathfrak{M} \to {}_A\mathfrak{M}$,

wobei A als (A, B)-Bimodul betrachtet wird, s. Abschn. 2.5.1. Hierbei bilden $(\mathrm{ind}, \mathrm{Res})$ und $(\mathrm{Res}, \mathrm{Ind})$ jeweils ein adjungiertes Paar, und für jeden Modul $V \in {}_A\mathfrak{M}$ ist die V-Komponente der Eins der Adjunktion $(\mathrm{Res}, \mathrm{Ind})$ sogar ein Monomorphismus, die der Koeins der Adjunktion $(\mathrm{ind}, \mathrm{Res})$ hingegen sogar ein Epimorphismus. Man erhält kurze exakte Sequenzen

$$0 \longrightarrow V \longrightarrow \mathrm{Ind} \circ \mathrm{Res}(V) \quad \text{und} \quad \mathrm{ind} \circ \mathrm{Res}(V) \longrightarrow V \longrightarrow 0,$$

und es ist zu zeigen, daß $\mathrm{ind} \circ \mathrm{Res}(V)$ kuspidal und projektiv, $\mathrm{ind} \circ \mathrm{Res}(V)$ hingegen kuspidal und injektiv ist.

Daß $\mathrm{ind} \circ \mathrm{Res}(V)$ kuspidal ist, ergibt sich ganz natürlich und wird in [40] gezeigt. Hierzu muß R nur ein kommutativer Ring mit $p \in R^*$ sein.

Wesentlich ist, daß $\operatorname{ind} \circ \operatorname{Res}(V)$ über G° isomorph zu einer direkten Summe (in geeignetem Sinne) kuspidaler Moduln ist (hier kommen die kompakten Moduln ins Spiel). Genauer gilt

$$\operatorname{Res} \circ \operatorname{ind} \circ \operatorname{Res}(V) \cong \bigoplus_{g \in G/G^\circ} \operatorname{Res}(V),$$

und die Behauptung ergibt sich dann daraus, daß ein Modul genau dann kuspidal über G ist, wenn er es über G° ist, und direkte Summen kuspidaler Moduln wiederum kuspidal sind.

Ähnlich ist $\operatorname{Ind} \circ \operatorname{Res}(V)$ über G° isomorph zu einem (geglätteten) direkten Produkt:

$$\operatorname{Res} \circ \operatorname{Ind} \circ \operatorname{Res}(V) \cong B \prod_{g \in G/G^\circ} \operatorname{Res}(V).$$

Daß $\operatorname{Ind} \circ \operatorname{Res}(V)$ kuspidal ist, ergäbe sich nun unmittelbar aus der zweiten Adjungiertheit, die zur Folge hat, daß Produkte kuspidaler Moduln wiederum kuspidal sind, aber da wir diese neu beweisen wollen, müssen wir die Aussage direkt zeigen. Wir haben festgestellt, daß das weitaus schwieriger als der vorherige Fall ist, und weisen es in diesem Kapitel in dem Falle nach, daß R irgendein Körper mit Charakteristik 0 ist. Dazu verwenden wir die Aussage, daß die kuspidalen Moduln über G°, das sind gerade die kompakten, über einem (zunächst) algebraisch abgeschlossenen Körper R halbeinfach sind. Hierzu benötigen wir jedoch, daß die einfachen Unterquotienten eines solchen Moduls eine formale Dimension besitzen, und das ist gewiß der Fall, wenn R die Charakteristik 0 hat. Ein Versuch, diese Voraussetzung loszuwerden, hat sich leider als Irrweg herausgestellt. Wir vermuten in der Tat, daß die Darstellungstheorie in positiver Charakteristik nicht halbeinfach ist, so daß in diesem Fall eine andere Strategie als die hier vorgestellte notwendig erscheint.

In [40] wird gezeigt, daß die kuspidalen Moduln die Eigenschaft haben, projektiv und injektiv bezüglich derjenigen kurzen exakten Sequenzen

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & V_1 \arrow[r] & V_2 \arrow[r, bend left] & V_3 \arrow[l, dashed, bend left, "s_K"] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

in ${}_A\mathfrak{M}$ zu sein, die für jede kompakte Untergruppe $K \subseteq G$ einen K-äquivarianten Schnitt s_K besitzen. Wenn R ein Körper ist, dann zerfällt jede kurze exakte Sequenz von A-Moduln in der Kategorie der R-Vektorräume. Wenn R von Charakteristik $\ell \neq p$ ist, so hat man auf jeder kompakten Untergruppe $K \subseteq G$ ein Haarmaß, mit dem man den R-linearen Schnitt K-äquivariant machen kann. Damit die so entstehende Abbildung jedoch ein Schnitt bleibt, muß sich das Haarmaß mit $\operatorname{vol}(K) = 1$ normieren lassen. Das ist möglich, wenn ℓ nicht die Proordnung von G teilt, das heißt wenn die Indizes $[K : L]$

für alle kompakt-offenen Untergruppen $L, K \in \Omega(G)$, $L \subseteq K$, nicht Null in R und mithin invertierbar sind. Das ist die zweite in positiver Charakteristik auftretende Schwierigkeit.

Definition 3.0.1. Ein Modul $V \in {}_A\mathfrak{M}$ heißt *kuspidal*, wenn

$$\bigoplus_{M<G} \mathcal{R}_M(V) = 0.$$

Die direkte Summe erstreckt sich über alle *Standardlevifaktoren* echter *standardparabolischer* Untergruppen $P = MN$, d. h. $P_0 \subseteq P \subsetneq G$, wenn P_0 die gewählte minimale parabolische Untergruppe bezeichnet, siehe Anhang B.2. Die kuspidalen Moduln bilden eine volle Unterkategorie von ${}_A\mathfrak{M}$, die wir mit ${}_A\mathfrak{M}^{\mathrm{c}}$ bezeichnen.

Bemerkungen 3.0.2.

(1) Weil jede parabolische Untergruppe konjugiert zu einer standardparabolischen ist, gilt, wenn V kuspidal ist, $\mathcal{R}_M(V) = 0$ für überhaupt alle echten parabolischen Untergruppen. Auch hängt dies nicht von der Wahl des Levifaktors ab. Die Levifaktoren sind durch ein eindeutiges Element von N in P konjugiert zueinander.

(2) Die Begriffsfindung ist in der Literatur sehr uneinheitlich. Mit der Bezeichnung *kuspidal* folgen wir Vignéras [58]. Renard [48] verwendet den Begriff *superkuspidal* (*supercuspidale*). Bei Vignéras sind die superkuspidalen Darstellungen die irreduziblen, die keine Unterquotienten von Darstellungen sind, die man durch parabolische Induktion von einer Leviuntergruppe einer echten parabolischen Untergruppe erhält. Bei Bernstein und Zelevinsky [6, 7] werden die Moduln bzw. die Darstellungen, die in dieser Arbeit kuspidal heißen, *quasikuspidal* genannt, und die kuspidalen sind darüber hinaus zulässig. Diese quasikuspidalen Darstellungen heißen bei Casselman [22] wiederum *absolut kuspidal*.

Proposition 3.0.3.

(1) Sei $0 \to X \to V \to Y \to 0$ eine kurze exakte Sequenz in ${}_A\mathfrak{M}$. Dann ist V dann und nur dann kuspidal, wenn X und Y es sind. Mit anderen Worten sind Untermoduln, Quotienten und Erweiterungen kuspidaler Moduln wieder kuspidal.

(2) Jedes $V \in {}_A\mathfrak{M}$ besitzt einen eindeutig bestimmten maximalen kuspidalen Untermodul V^{c}, den wir den kuspidalen Teil *von V nennen.*

(3) *Sei* $(V_i)_{i\in I}$ *eine Familie kuspidaler Moduln. Dann ist auch* $\bigoplus_{i\in I} V_i$ *kuspidal.*

Beweis. (1) folgt sofort daraus, daß $\mathcal{R}_M$ exakt ist. (2) Sei $V \in {}_A\mathfrak{M}$. Da 0 kuspidal ist, sieht man wie üblich mit dem Zornschen Lemma, daß es maximale kuspidale Untermoduln von V gibt: Sei $\mathfrak{X}$ eine durch Inklusion totalgeordnete Menge kuspidaler Untermoduln von V. Die Vereinigung

$$W' := \bigcup_{W\in\mathfrak{X}} W$$

ist dann kuspidal, weil alle W kuspidal sind, jedes $w \in W$ also Null in ${}_NW$ für alle $P = MN$.

Sei V_0 ein maximaler kuspidaler Untermodul und V_1 irgendein kuspidaler Untermodul. Man bekommt die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow V_0 \longrightarrow V_0 + V_1 \longrightarrow V_1/(V_1 \cap V_0) \longrightarrow 0$$

und sieht mit dem Vorherigen, daß sie aus kuspidalen Untermoduln besteht. Da V_0 maximal ist, folgt $V_0 + V_1 = V_0$, also $V_1 \subseteq V_0$.

(3) $\mathcal{R}_M$ ist linksadjungiert zu $\mathcal{I}_M$ und respektiert daher alle Kolimites und insbesondere direkte Summen. □

Folgerung 3.0.4. ${}_A\mathfrak{M}^\mathfrak{c}$ ist eine abelsche Unterkategorie von ${}_A\mathfrak{M}$. □

3.1 Das Lemma von Schur

Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und A eine R-Algebra. Für einen einfachen A-Modul V ist der Endomorphismenring $\mathrm{End}_A(V)$ eine Divisionsalgebra mit Eins über R.

Lemma 3.1.1 (Schur)**.** Ist R ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $|R| > \dim_R A$, so ist $\mathrm{End}_A(V) \cong R$.

Beweis. Der bei Renard [48, Annexe B] gegebene Beweis funktioniert gerade unter den hier genannten Voraussetzungen. □

Proposition 3.1.2. *Für eine reduktive* $\mathfrak{p}$*-adische Gruppe* G *ist* $A = \mathcal{D}(G)$ *als* R*-Modul höchstens abzählbar erzeugt. Wenn* R *ein überabzählbarer algebraisch abgeschlossener Körper ist, dann gilt folglich* $\mathrm{End}_A(V) \cong R$ *für jeden einfachen* A*-Modul* V*.*

Beweis. Nach Satz 1.2.7 ist G/K für jedes $K \in \Omega(G)$ abzählbar. Es gibt eine abzählbare 1-Umgebungsbasis $(K_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \Omega(G)$, und die abzählbar vielen Elemente $\mathbb{1}_{gK_n}$, $g \in G/K_n$, erzeugen $\mathcal{D}(G)$ als R-Modul, s. Prop. 1.3.3 und Satz 1.5.6. □

3.2 Die Gruppe G°

Definition 3.2.1. Die Gruppe G° ist die Untergruppe von G, die von allen kompakten Untergruppen von G erzeugt wird.

Proposition 3.2.2. *Die Gruppe G° hat die folgenden Eigenschaften:*

(1) G° ist ein offener (und deswegen auch abgeschlossener) unimodularer Normalteiler von G mit kompaktem Zentrum $Z^\circ := \mathcal{Z}(G^\circ)$. Dieses ist die maximale kompakte Untergruppe von $Z := \mathcal{Z}(G)$.

(2) G/G° ist eine freie abelsche Gruppe von endlichem Rang.

(3) Der offene Normalteiler $G^\circ Z$ von G hat endlichen Index.

Beweis. Siehe Abschnitt II.1.3 bei Vignéras [58]. □

3.3 Kompakte Moduln

Sei $B = \mathcal{D}(H)$ mit einer unimodularen ℓ-Gruppe H. In $\mathcal{D}'(H)$ gebe es ein Haarmaß. Zu jedem $W \in {}_B\mathfrak{M}$ läßt sich die kanonische Abbildung

$$\gamma\colon W \otimes_R \tilde{W} \to \mathcal{C}_0^\infty(H), \quad \gamma(w \otimes \varphi)(h) := \varphi(h^{-1}w),$$

in den Raum der *gleichmäßig lokal konstanten* Funktionen $H \to R$ (Abschn. 1.3) erklären.

Definition 3.3.1. Die Bilder elementarer Tensoren unter γ, also die Funktionen

$$H \longrightarrow R, \quad h \longmapsto \varphi(h^{-1}w), \quad w \in W,\ \varphi \in \tilde{W},$$

heißen *(Matrix-)Koeffizienten* von W.

Definition 3.3.2. Ein Modul $W \in {}_B\mathfrak{M}$ heißt *kompakt* (oder *endlich*), wenn die Koeffizienten von W sogar in $\mathcal{D}(H)$ liegen, jeder Koeffizient von W also kompakten Träger (und somit einen endlichen Wertebereich) hat.

Proposition 3.3.3. *Sei $W \in {}_B\mathfrak{M}$.*

(1) Wenn für alle $w \in W$ und $e = e_K \in \mathrm{Id}(B)$, dabei $K \in \Omega(H)$ von invertierbarer Proordnung in R, die Funktion

$$\psi = \psi_{e,w} \in \mathcal{C}_0^\infty(H, W), \quad \psi(h) := eh^{-1}w,$$

sogar in $\mathcal{D}(H, W)$ liegt, also kompakten Träger hat, dann ist W kompakt. Wenn R ein Körper ist, dann gilt hiervon auch die Umkehrung.

(2) Sei R ein Körper. Für kompakte Moduln kann man dann schließen:

$$\textit{einfach} \Longrightarrow \textit{endlich erzeugt} \Longrightarrow \textit{zulässig.}$$

Beweis. (1) Vgl. Bernstein [4, Theorem 6], Vignéras [58, I.7.3] oder Renard [48, IV.1.3]: Sei $\xi(h) = \varphi(h^{-1}w)$ mit $w \in W$ und $\varphi \in \tilde{W}$ ein Koeffizient. Dann gibt es $e \in \mathrm{Id}(A)$ mit $\varphi e = \varphi$, wenn wir $\tilde{W} \in \mathfrak{M}_A$ betrachten; also ist

$$\xi(h) = \varphi(eh^{-1}w).$$

Aus $\xi(h) \neq 0$ folgt $eh^{-1}w \neq 0$. Nach Voraussetzung liegt h dann in einer kompakten Menge, und $\operatorname{Tr}\xi$ ist somit ebenfalls kompakt.

Sei nun R ein Körper und $\psi\colon H \to W$, $h \mapsto eh^{-1}w$, vorgegeben. Sei

$$W_0 \coloneqq \langle \psi(h) \mid h \in H \rangle \subseteq eW$$

der von $\mathrm{Bild}(\psi) \subseteq eW$ erzeugte Untervektorraum. Aus dem Erzeugendensystem $\{\psi(h) \mid h \in H\}$ kann man eine Basis $\mathfrak{B} = (\psi(h_i))_{i\in I}$ von W_0 auswählen, und weil ψ von rechts K-invariant ist, kann man annehmen, daß die h_i paarweise verschiedene Repräsentanten von Nebenklassen aus H/K sind. Man kann $\mathfrak{B}$ zu einer R-Basis von eW und dann ganz W fortsetzen und eine Linearform $\lambda \in W^*$ durch $\lambda(x) = 1$ für $x \in \mathfrak{B}$ und $\lambda(x) = 0$ für alle anderen Basisvektoren definieren. Man hat die Zerlegung $W = eW \oplus (1-e)W$, wobei $(1-e)W = \{w - ew \mid w \in W\}$. Auf $(1-e)W$ sind λ und λe Null, und auf eW gilt $\lambda e = \lambda$. Also ist überhaupt $\lambda e = \lambda$ und somit $\lambda \in \tilde{W}$. Man erhält einen Koeffizienten

$$\xi\colon H \longrightarrow R, \quad h \longmapsto \lambda(h^{-1}w) = \lambda(eh^{-1}w) = \lambda \circ \psi(h).$$

Nach Voraussetzung hat ξ kompakten Träger. Da ξ von rechts K-invariant ist, zerfällt $\operatorname{Tr}\xi$ in endlich viele Nebenklassen hK, $h \in H$, aber das impliziert nach Konstruktion von λ, daß W_0 endliche Dimension haben muß. Man kann also $h_1, \dots, h_n \in H/K$ so auswählen, daß die Vektoren $b_i \coloneqq \psi(h_i) = eh_i^{-1}w$ eine Basis von W_0 bilden. Sei $\{\beta_1, \dots, \beta_n\} \subseteq \tilde{W}e$ die duale Basis. Man hat dann

$$\psi(h) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \circ \psi(h) \cdot b_i, \quad h \in H,$$

und aus $\psi(h) \neq 0$ folgt $\beta_i \circ \psi(h) = \beta_i(h^{-1}w) \neq 0$ für irgendeinen Index, aber durch $\beta_i \circ \psi$ sind endlich viele Koeffizienten von W gegeben, die nach Voraussetzung kompakten Träger haben, so daß auch $\operatorname{Tr}\psi$ kompakt ist.

(2) Die erste Implikation ist trivial. Vgl. im weiteren Bernstein [4, Proposition 11]: Sei $W \in {}_B\mathfrak{M}$ kompakt und endlich erzeugt und $e = e_K \in \mathrm{Id}(B)$.

Seien $w_1, \dots, w_n$ Erzeuger von W als B-Modul und $w \in eW$. Mit gewissen $b_i \in B$ erhält man

$$w = \sum_{i=1}^{n} b_i w_i \quad \text{mit} \quad b_i w_i = \int_H b_i(h)\, h w_i \, \mathrm{d}h.$$

Sei $L \subseteq K$ eine kompakt-offene Untergruppe mit in R invertierbarer Proordnung derart, daß $e_L w_i = w_i$ und $e_L b_i e_L = b_i$ für alle Indizes. Dann bekommt man weiter

$$w = ew = \sum_{\substack{1 \le i \le n \\ h \in H/L}} \mathrm{vol}(L) \cdot b_i(h) \cdot e h w_i,$$

und da die Inversion ein Automorphismus von H ist, können wir schließen, daß eW als R-Vektorraum von den Vektoren $eh^{-1}w_i$, $h \in H$ erzeugt wird. Nach (1) haben die K-rechtsinvarianten Funktionen $H \to W$, $h \mapsto eh^{-1}w_i$, kompakten Träger. Das impliziert, daß es in Abhängigkeit von h nur endlich viele verschiedene Vektoren $eh^{-1}w_i$ gibt und eW somit endliche Dimension hat. □

Proposition 3.3.4.

(1) Quotienten und direkte Summen kompakter Moduln sind stets kompakt.

(2) Wenn R ein Körper ist, dann sind auch Untermoduln kompakter Moduln kompakt.

(3) Wenn die Aussage des Schurschen Lemmas gilt, also $\mathrm{End}_B(W) = R$ für einfache Moduln W, dann folgt aus der Existenz eines kompakten Moduls, daß $\mathcal{Z}(H)$ kompakt sein muß.

Beweis. (1) Sei $\pi\colon V \to W$ ein Epimorphismus in ${}_B\mathfrak{M}$ und V kompakt. Der duale Morphismus $\tilde{\pi}\colon \tilde{W} \to \tilde{V}$ ist dann injektiv. Sei

$$\xi\colon H \longrightarrow R, \quad h \longmapsto \varphi(h^{-1}w), \quad w \in W,\ \varphi \in \tilde{W},$$

ein Koeffizient von W und $v \in V$ mit $w = \pi(v)$. Da V kompakt ist, hat ξ wegen $\xi(h) = \tilde{\pi}(\varphi)(h^{-1}v)$ kompakten Träger; also ist W kompakt.

Sei jetzt $X = \bigoplus_{i \in I} X_i$ eine direkte Summe kompakter Moduln, weiter $x = \sum_{i \in I} x_i \in X$ und $\psi \in \tilde{X}$. Durch

$$\eta\colon H \longrightarrow R, \quad \eta(h) := \varphi(h^{-1}x) = \sum_{i \in I} \varphi(h^{-1}x_i),$$

ist ein Koeffizient von X gegeben, aber für jedes x_i definiert $h \mapsto \varphi(h^{-1}x_i)$ einen von X_i, der nach Voraussetzung kompakten Träger hat. Da nur endlich viele x_i nicht Null sind, hat auch η kompakten Träger, und X ist kompakt.

(2) Das folgt unmittelbar aus der in Prop. 3.3.3 (1) gegebenen Charakterisierung kompakter Moduln.

(3) Vgl. Renard [48, IV.1.3]: Sei $(\rho, W) \in {}_B\mathfrak{M}$ kompakt. Nach Prop. 2.1.19 gibt es einen einfachen Unterquotienten, der nach dem Vorherigen wieder kompakt ist, so daß man o. b. d. A. annehmen kann, daß W selbst einfach ist. Für jedes $z \in Z := \mathcal{Z}(H)$ definiert $w \mapsto zw$ ein Element von $\mathrm{Aut}_B(W)$. Wegen $\mathrm{End}_B(W) = R$ gibt es einen Charakter $\chi\colon Z \to R^*$ mit $zw = \chi(z)w$. Sei nun $w \in W \smallsetminus \{0\}$ beliebig und $e \in \mathrm{Id}(B)$ mit $ew = w$. Nach Prop. 3.3.3 (1) hat die Funktion

$$\varphi\colon H \longrightarrow W, \quad h \longmapsto eh^{-1}w,$$

kompakten Träger. Da nun $\varphi(z) = \chi(z^{-1})w \neq 0$ für alle $z \in Z$ gilt, hat man $Z \subseteq \mathrm{Tr}\,\varphi$, und weil Z abgeschlossen ist, so ist Z auch kompakt. $\square$

Bemerkung 3.3.5. Die ℓ-Gruppe $H = G^\circ$ hat in der Tat ein kompaktes Zentrum (Prop. 3.2.2), und dies ist auch der einzige Fall von Belang für uns.

3.3.1 Zusammenhang mit den kuspidalen Moduln

Sei G eine reduktive $\mathfrak{p}$-adische Gruppe, $H = G^\circ$, weiter $Z = \mathcal{Z}(G)$ das Zentrum von G und $Z^\circ = \mathcal{Z}(G^\circ)$.

Definition 3.3.6. Eine Menge $U \subseteq G$ nennen wir *Z-kompakt* oder *kompakt modulo Zentrum*, wenn U abgeschlossen und das Bild von U in G/Z kompakt ist.

Lemma 3.3.7. Sei $U \subseteq G$ eine Z-kompakte Menge. Dann ist $U \cap G^\circ$ kompakt.

Beweis. Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G^\circ & \xrightarrow{\ \iota\ } & G \\ \big\downarrow{\scriptstyle\pi} & & \big\downarrow{\scriptstyle\kappa} \\ G^\circ/Z^\circ & \xrightarrow{\ \tilde\iota\ } & G/Z \end{array}$$

topologischer Gruppen mit den kanonischen Morphismen: $\pi = \kappa|G^\circ$ ist stetig, offen und surjektiv, $\kappa \circ \iota$ stetig und offen. Daraus folgt, daß $\tilde\iota$ stetig und offen ist. Außerdem ist $\tilde\iota$ injektiv und, weil G°/Z° und G/Z topologische Gruppen sind, daher auch abgeschlossen. Weil die Fasern leer oder einpunktig sind, ist $\tilde{\imath}$ sogar eigentlich. Sei $A \subseteq G^\circ$ abgeschlossen. Dann ist $\pi^{-1}(\pi(A)) = AZ^\circ$ abgeschlossen, weil Z° kompakt ist; also ist π abgeschlossen. Die Fasern von π sind die Linksnebenklassen von Z°, also kompakt; somit ist π sogar eigentlich. Damit können wir nun folgendermaßen schließen:

$$\tilde{\imath} \circ \pi(U \cap G^\circ) = \kappa(U \cap G^\circ) \subseteq \kappa(U)$$

ist als abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge kompakt. Weil $\tilde{\imath} \circ \pi$ eigentlich ist, folgt, daß das Urbild $(U \cap G^\circ)Z^\circ$ kompakt ist, aber dann ist auch $U \cap G^\circ$ kompakt, weil es eine abgeschlossene Teilmenge davon ist. □

Proposition 3.3.8. *Sei $V \in {}_A\mathfrak{M}$ und $p \in R^*$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(1) V ist in ${}_A\mathfrak{M}$ kuspidal, $A = \mathcal{D}(G)$.

(2) Der Träger jedes Koeffizienten von V ist kompakt modulo Z.

(3) V ist in ${}_B\mathfrak{M}$ kompakt, $B = \mathcal{D}(G^\circ)$.

Beweis. »1 $\Leftrightarrow$ 2«: Vignéras [58, II.2.7]. »2 $\Rightarrow$ 3«: Lemma 3.3.7. »3 $\Rightarrow$ 2«: Proposition 3.3.3 und Meyer [40, 3.11]. □

Bemerkung 3.3.9. Die Charakterisierung kuspidaler Moduln mit Hilfe der Koeffizienten in Prop. 3.3.8 erlaubt es, dieselben für jede ℓ-Gruppe zu definieren. Die kuspidalen $\mathcal{D}(G^\circ)$-Moduln sind in diesem Sinne gerade die kompakten.

Proposition 3.3.10. *Sei R ein Körper mit Charakteristik $\ell \neq p$ und $\bar{R}$ ein algebraischer Abschluß von R.*

(1) Wenn W ein kompakter $\mathcal{D}(H)$-Modul ist, dann ist die Koeffizientenerweiterung $W_{\bar{R}} = \bar{R} \otimes_R W$ ein kompakter $\mathcal{D}_{\bar{R}}(H)$-Modul.

(2) Ein kompakter $\mathcal{D}_{\bar{R}}(H)$-Modul ist auch als $\mathcal{D}(H)$-Modul kompakt.

Beweis. (1) Sei $e = e_K$ zu $K \in \Omega(H)$ ein idempotentes Element, weiterhin $w' = \sum_{i=1}^n \lambda_i \otimes w_i \in W_{\bar{R}}$, und $\varphi\colon H \to \mathcal{C}_0^\infty(H, W_{\bar{R}})$ sei definiert durch

$$\varphi(h) := ehw' = \sum_{i=1}^n \lambda_i \otimes ehw_i.$$

Wir stellen fest, daß stets $e \in \mathcal{D}(H) \subseteq \mathcal{D}_{\bar{R}}(H)$ gilt. Wenn $\varphi(h) \neq 0$, dann muß $ehw_i \neq 0$ für mindestens ein i gelten, und h liegt nach Voraussetzung in einer kompakten Menge K_i, die von w_i abhängt. Die endliche Vereinigung

$K = \bigcup_{i=1}^{n} K_i$ ist dann kompakt mit $\operatorname{Tr}\varphi \subseteq K$. Also ist $\operatorname{Tr}\varphi$ als Menge und W' nach Prop. 3.3.3 als Modul kompakt.

(2) Sei e wie im vorherigen Teil, W ein kompakter $\mathcal{D}_{\bar{R}}(H)$-Modul und $w \in W$. Die Behauptung folgt daraus, daß die über $\bar{R}$ definierten Funktionen $\varphi(h) = ehw$ wegen $\operatorname{Aut}_{\bar{R}}(W) \subseteq \operatorname{Aut}_R(W)$ und $\mathcal{D}(H) \subseteq \mathcal{D}_{\bar{R}}(H)$ alle Funktionen dieses Typs über R ergeben, mit denen nach Prop. 3.3.3 die Kompaktheit zu überprüfen ist, wenn man W eben mit Hilfe dieser Inklusionen als $\mathcal{D}(H)$-Linksmodul (oder H-Darstellung) auffaßt. □

3.4 Kompakte Moduln sind halbeinfach

Sei R ein Körper mit Charakteristik $\ell \neq p$, weiterhin $B = \mathcal{D}(H)$ mit $H = G^\circ$ und $(\rho, W) \in {}_B\mathfrak{M}$. Wir rekapitulieren in diesem Abschnitt eine Konstruktion von Bernstein [4], mit der er für $R = \mathbb{C}$ zeigt, wie ein einfacher kompakter Modul die Kategorie ${}_B\mathfrak{M}$ in ein Produkt aufspaltet. Wir verweisen außerdem auf das Buch von M.-F. Vignéras [58, I.7] und den Artikel von A. Roche [23, 1.2]. Wir brauchen die Aussage, daß kompakte Moduln halbeinfach sind.

Lemma 3.4.1.

(1) Die kanonische Abbildung $W \to \tilde{\tilde{W}}$ ist injektiv; W ist genau dann zulässig, wenn $\tilde{W}$ zulässig ist, und in diesem Falle ist W genau dann einfach, wenn $\tilde{W}$ einfach ist.

(2) Seien $W_1, W_2 \in {}_B\mathfrak{M}$, und sei $W \coloneqq W_1 \otimes_R W_2$ der davon gebildete Linksmodul über $B \otimes_R B \cong \mathcal{D}(H \times H)$. Wenn W_1, W_2 zulässig sind, dann auch W. Wenn W_1, W_2 einfach sind, dann auch W.

Beweis. (1) Siehe Vignéras [58, I.4.18]. (2) Siehe Renard [48, III.1.4]. □

Sei W einfach und kompakt. Die Moduln

$$W \in {}_B\mathfrak{M}, \quad \tilde{W} \in \mathfrak{M}_B \quad \text{und} \quad W \otimes_R \tilde{W} \in B\text{-}\mathfrak{Bim}$$

sind dann einfach und zulässig (Prop. 3.3.3), und man erhält in der Kategorie der B-Bimoduln das Diagramm

$$\begin{tikzcd} W \otimes_R \tilde{W} \arrow[r, dashed, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"'] & B \arrow[d, "\rho"] \\ & \operatorname{End}_R(W)_0, \end{tikzcd} \tag{3.1}$$

das wir jetzt erläutern:

- ρ ist die Abbildung, die W zum B-Modul macht.
- β ist die kanonische Abbildung

  $$\beta(w \otimes \varphi)(z) = \varphi(z)w, \quad w, z \in W, \ \varphi \in \tilde{W}.$$

  Weil W zulässig ist und R ein Körper, ist mit einem Dimensionsargument leicht zu sehen, daß β stets ein Isomorphismus ist.
- Die Bildung der Koeffizienten definiert die Abbildung

  $$\gamma \colon W \otimes_R \tilde{W} \longrightarrow \mathcal{D}(H), \quad (w \otimes \varphi)(h) = \varphi(h^{-1}w), \quad h \in H, \ w \in W.$$

  In der Definition steht h^{-1} statt h, damit γ ein Morphismus in B-$\mathfrak{Bim}$ wird. Als Elemente von $B = \mathcal{D}(H)$ operieren die Koeffizienten von W vermöge ρ auf W, aber sie operieren auch auf jedem anderen B-Modul.
- $\mathrm{End}_R(W)$ wird durch $(b_1 \varphi b_2)(w) = b_1 \varphi(b_2 w)$ zum B-Bimodul gemacht, und $\mathrm{End}_R(W)_0$ ist die Glättung davon.

Definition 3.4.2. Man sagt, daß (ρ, W) eine *formale Dimension* (oder einen *formalen Grad*) hat, wenn es einen Skalar $d_\rho \neq 0$ derart gibt, daß das Diagramm (3.1) mit $\alpha = d_\rho \gamma$ kommutiert. Dieses d_ρ *ist* dann die formale Dimension von (ρ, W).

Wenn R ein algebraisch abgeschlossener Körper ist, dann gilt für W und $W \otimes_R \tilde{W}$ die Aussage des Schurschen Lemmas, nämlich

$$\mathrm{End}_B(W) = R = \mathrm{End}_{B \otimes B^{\mathrm{op}}}(W \otimes_R \tilde{W}),$$

siehe [58, I.6.11], und man findet

$$\beta^{-1} \circ \rho \circ \gamma \in \mathrm{End}_{B \otimes B^{\mathrm{op}}}(W \otimes_R \tilde{W}).$$

Also existiert $c_\rho \in R$ derart, daß

$$\rho \circ \gamma = c_\rho \cdot \beta, \tag{3.2}$$

und es gibt eine formale Dimension genau dann, wenn $c_\rho \neq 0$, in welchem Fall $d_\rho = c_\rho^{-1}$. Aus dieser Betrachtung ergibt sich unmittelbar die

Proposition 3.4.3. *Sei R ein algebraisch abgeschlossener Körper mit Charakteristik $\ell \neq p$. Dann besitzt der einfache kompakte Modul (ρ, W) dann und nur dann eine formale Dimension, wenn es einen Koeffizienten $\xi \in \mathcal{D}(H)$ von W mit $\rho(\xi) \cdot W \neq 0$ gibt. Ist das der Fall, dann ist $s := d_\rho \gamma \circ$*

$\beta^{-1}\colon \mathrm{End}_R(W)_0 \to B$ *ein Schnitt zu* ρ, *und aus der Kommutativität des Diagramms* (3.1) *folgt sofort die Schursche Orthogonalitätsrelation*

$$\int_H \varphi(h^{-1}w)\,\psi(hz)\,\mathrm{d}h = c_\rho\,\varphi(z)\,\psi(w), \quad w,z \in W,\ \varphi,\psi \in \tilde{W}.$$

Der Schnitt s *ist ein Algebrahomomorphismus.*

Beweis. Die ersten beiden Aussagen folgen sofort aus Gl. (3.2). Einsetzen in die Definitionen der Abbildungen ergibt

$$\begin{aligned}\int_H \varphi(h^{-1}w)\,hz\,\mathrm{d}h &= \rho\circ\gamma(w\otimes\varphi)(z)\\ &= c_\rho\beta(w\otimes\varphi)(z) = c_\rho\varphi(z)w, \quad w,z\in W,\ \varphi\in\tilde{W},\end{aligned}$$

worauf man dann irgendein $\psi \in \tilde{W}$ anwenden kann.

Seien nun $x, y \in \mathrm{End}_R(W)_0$. Nach Definition ist s ein Morphismus von $\mathcal{D}(H)$-Bimoduln und ρ außerdem ein Algebrahomomorphismus. Es folgt

$$\begin{aligned}s(xy) &= s\big(\rho s(x)\rho s(y)\big)\\ &= s\rho\big(s(x)s(y)\big) = s\rho s\big(s(x)y\big) = s\big(s(x)y\big) = s(x)s(y). \qquad \square\end{aligned}$$

Hat (ρ, W) eine formale Dimension d_ρ und nimmt man irgendeinen Modul $(\pi, V) \in {}_B\mathfrak{M}$ hinzu, so erhält man das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{End}_R(W)_0 \arrow[r, dashed, bend left, "s"] & \mathcal{D}(H) \arrow[l, "\rho"] \arrow[r, "\pi"] & \mathrm{End}_R(V)_0 \\
W \otimes_R \tilde{W} \arrow[u, "\beta", "\sim"'] \arrow[ur, "\alpha = d_\rho\gamma"'] & &
\end{tikzcd} \tag{3.3}$$

und kann zeigen, daß W die Kategorie ${}_B\mathfrak{M}$ spaltet. Wir orientieren uns für den Rest dieses Unterkapitels an der Darstellung bei A. Roche [23]. Man vergleiche die Ausführungen hier mit denen dort: Für jedes idempotente Element $e = e_K \in \mathcal{D}(H)$, dabei $K \in \Omega(H)$, ist $p_e\colon W \to W$, $w \mapsto ew$, also die Projektion auf eW, ein idempotentes Element von $\mathrm{End}_R(W)_0$.

Lemma 3.4.4 ([23, 1.2.2.1])**.** Die Endomorphismen p_e haben die folgenden Eigenschaften:

(1) $p_e = p_f e$ für $e, f \in \mathrm{Id}(B)$ mit $e \le f$.

(2) $p_{heh^{-1}} = hp_eh^{-1}$ für $h \in H$.

Beweis. (1) Aus $e = fef$ folgt $p_f e(w) = p_f(ew) = few = ew = p_e(w)$. (2) Für $h \in H$ gilt $(hp_e h^{-1})(w) = hp_e(h^{-1}w) = (heh^{-1})w = p_{heh^{-1}}(w)$. □

Proposition 3.4.5 ([23, 1.2.3]). *Sei $V \in {}_B\mathfrak{M}$ beliebig.*

(1) Der einfache kompakte Modul (ρ, W) definiert ein idempotentes Element $E_\rho = E_{\rho,V} \in \mathrm{End}_B(V)$ durch

$$E_\rho|eV = \pi \circ s(p_e), \quad e \in \mathrm{Id}(B).$$

(2) Durch $(E_{\rho,V})_V$ ist ein Element des Zentrums der Kategorie ${}_B\mathfrak{M}$ gegeben, das heißt, daß, wenn $\varphi\colon V_1 \to V_2$ ein Morphismus in ${}_B\mathfrak{M}$ ist, das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{\varphi} & V_2 \\ \big\downarrow{\scriptstyle E_\rho} & & \big\downarrow{\scriptstyle E_\rho} \\ V_1 & \xrightarrow{\varphi} & V_2. \end{array}$$

(3) Man hat die Zerlegung

$$V = E_\rho(V) \oplus (1 - E_\rho)(V) = E_\rho(V) \oplus \ker E_\rho,$$

und diese ist kategoriell, zerlegt also ${}_B\mathfrak{M}$ in ein kategorielles Produkt

$${}_B\mathfrak{M} = {}_B\mathfrak{M}(W) \times {}_B\mathfrak{M}(W)^\perp,$$

wobei ${}_B\mathfrak{M}(W)$ aus denjenigen V besteht, die isomorph zu einer direkten Summe $W^{\oplus\nu}$ sind, dabei ν eine höchstens abzählbare Kardinalzahl, und ${}_B\mathfrak{M}(W)^\perp$ aus denjenigen V, die keinen zu W isomorphen Unterquotienten besitzen.

Beweis. (1) Aus Lemma 3.4.4 (1) folgt die Wohldefiniertheit, da $s(p_e) = s(p_f)e$ für $e \le f$. Wenn $v \in eV \cap e'V$, kann man ein $f \in \mathrm{Id}(B)$ mit $e, e' \le f$ wählen, und es folgt dann $s(p_e) \cdot v = s(p_{e'}) \cdot v$. Da es sich bei s um einen Algebrahomomorphismus handelt, siehe Prop. 3.4.3, so ist mit den p_e auch E_ρ idempotent. Sei $v \in eV$ und $h_0 \in H$. Aus Lemma 3.4.4 (2) folgt dann, weil wir es mit Bimodulmorphismen zu tun haben, sofort

$$\begin{aligned} E_\rho(h_0 v) &= \pi \circ s(p_{h_0 e h_0^{-1}}) \cdot h_0 v \\ &= \Big(h_0\big(\pi \circ s(p_e)\big)h_0^{-1}\Big) \cdot h_0 v = h_0\big(\pi \circ s(p_e) \cdot v\big) = h_0 E_\rho(v); \end{aligned}$$

also ist $E_\rho \in \mathrm{End}_B(V)$.

(2) Sei $v_1 \in eV_1$. Dann ist $\varphi(v_1) \in eV_2$, und daraus folgt sofort

$$E_\rho \circ \varphi(v_1) = \pi_2 \circ s(p_e) \cdot \varphi(v_1) = \varphi\big(\pi_1 \circ s(p_e) \cdot v_1\big) = \varphi \circ E_\rho(v_1).$$

(3) Es gibt abzählbar viele kompakt-offene Untergruppen $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \cdots$ von H, die eine Umgebungsbasis der Eins bilden. Sei $e_1 \leq e_2 \leq \cdots$ die zugehörige Kette von idempotenten Elementen aus $\mathcal{D}(H)$. Deren Gesamtheit nennen wir $\mathfrak{I}$. Die R-Vektorräume $e_1W \subseteq e_2W \subseteq \cdots$ sind alle endlichdimensional, und man kann eine höchstens abzählbare R-Vektorraumbasis $(z_i)_{i\in I}$ von W derart wählen, daß $\{z_1, \dots, z_{n_r}\}$ eine Basis von e_rW ist für eine aufsteigende Folge (n_r) natürlicher Zahlen. Zu jedem $\varphi \in \operatorname{End}_R(W)_0$ gibt es ein $e \in \mathfrak{I}$ mit $e\varphi e = \varphi$; also ist $\varphi(z_i) \neq 0$ für nur endlich viele Indizes. Wir definieren eine R-lineare Abbildung

$$\alpha\colon \operatorname{End}_R(W)_0 \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} W, \quad \varphi \longmapsto (\varphi(z_i))_{i\in I}.$$

Diese ist injektiv und, weil W einfach ist, sogar bijektiv, aber es handelt sich sogar um einen Morphismus und daher einen Isomorphismus in ${}_B\mathfrak{M}$. Da s injektiv ist, so ist auch $\operatorname{Bild}(s) \subseteq \mathcal{D}(H)$ als B-Linksmodul isomorph zu $W^{\oplus I}$. Sei $e \in \mathfrak{I}$ und $v \in eV$. Durch

$$\varphi_v\colon Bs(p_e) \longrightarrow V, \quad x \longmapsto \pi(x) \cdot v,$$

wird ein Morphismus von B-Linksmoduln definiert, und $E_\rho(v) = \pi \circ s(p_e) \cdot v$ liegt in dessen Bild. Als Untermodul von $\operatorname{Bild}(s)$ ist $Bs(p_e)$ isomorph zu irgendeiner direkten Summe $W^{\oplus J}$ mit $J \subseteq I$, also zu einem Untermodul von $W^{\oplus I}$, und das gleiche gilt für das Bild von φ_v. Es folgt, daß ganz $E_\rho(V) \in {}_B\mathfrak{M}$ isomorph zu einem Untermodul von $W^{\oplus I}$ ist, also selbst von der gleichen Form. Wenn $V \neq 0$, dann hat V einen Untermodul, insbesondere einen Unterquotienten, der zu W isomorph ist.

Seien $V_1 \subseteq V_2 \subseteq \ker E_{\rho,V}$ mit $V_2/V_1 = W$. Dann gibt es einen Projektionsmorphismus $f\colon V_2 \to W$. Es gilt $E_{\rho,V_2} = 0$ und $E_{\rho,W} = \mathrm{id}_W$. Aus Teil (2) folgt dann $f = 0$, also $W = 0$, aber das kann nicht sein, so daß $\ker E_{\rho,V}$ folglich keinen zu W isomorphen Unterquotienten besitzt.

Es ist klar, daß ${}_B\mathfrak{M}(W)$ und ${}_B\mathfrak{M}(W)^\perp$ orthogonal sind, und daß die Zerlegung mit Morphismen verträglich ist, folgt aus Teil (2). $\square$

Der folgende Satz gilt im »banalen Fall«, daß R ein algebraisch abgeschlossener Körper mit Charakteristik 0 ist:

Satz 3.4.6. *Sei R ein algebraisch abgeschlossener Körper mit Charakteristik $\ell \neq p$. Jeder kompakte Modul, dessen einfache Unterquotienten alle eine formale Dimension besitzen, ist halbeinfach, also die (direkte) Summe seiner einfachen Untermoduln.*

Beweis. Siehe Bernstein [4, 5.1, Th. 7 (2)], Renard[48, VI.1.6] oder Roche [23, 1.2.3.2]: Sei $V \in {}_B\mathfrak{M}$ kompakt und $V_0 \subseteq V$ die (automatisch direkte) Summe aller einfachen Untermoduln von V. Angenommen, es wäre $V_0 \neq V$. Dann besitzt V/V_0 nach Folg. 3.3.4 einen einfachen Unterquotienten (ρ, W). Dieser ist kompakt, weil V es ist, und wenn W eine formale Dimension besitzt, dann ist $E_\rho(V) \cong W^{\oplus\nu}$ nach Prop. 3.4.5, also $E_\rho(V) \subseteq V_0$. Da E_ρ idempotent ist, bekommt man $E_\rho(V) = E_\rho(V_0)$, und aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & V_0 & \longrightarrow & V & \longrightarrow & V/V_0 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle E_\rho} & & \downarrow{\scriptstyle E_\rho} & & \downarrow{\scriptstyle E_\rho} & & \\ 0 & \longrightarrow & V_0 & \longrightarrow & V & \longrightarrow & V/V_0 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

mit den offensichtlichen exakten Zeilen ergibt sich $E_\rho(V/V_0) = 0$, aber nach Prop. 3.4.5 kann W dann kein Unterquotient von V/V_0 sein, und durch Widerspruch folgt mit $V_0 = V$ die Behauptung. $\square$

Bemerkung 3.4.7. Das Folgende geht auf Mitteilungen von M. Solleveld zurück: Die Aussage [58, I.7.7 (ii)] bei Vignéras besagt in der Situation des Diagramms (3.3): *Wenn W keine formale Dimension hat, so gilt $\pi(\xi)\cdot V = 0$ für alle Koeffizienten ξ von W und alle $(\pi, V) \in {}_B\mathfrak{M}$.*

Daraus könnte man folgende Schlußfolgerungen ziehen: Sei $\xi \in \mathcal{D}(H)$ ein Koeffizient von W und $e \in \mathrm{Id}(B)$ mit $e * \xi * e = \xi$. Man kann insbesondere $V = \mathcal{D}(H)$ betrachten, und dann gilt $\xi = \xi * e = \rho(\xi) \cdot e = 0$. Also sind die Koeffizienten eines W ohne formale Dimension alle Null. Daraus folgt $W = 0$, denn sei $w_0 \in W \smallsetminus \{0\}$, weiter $f \in \mathrm{Id}(B)$ mit $fw_0 = w_0$ und $\lambda \in W^*$ irgendeine Linearform mit $\lambda(w_0) = 1$. Dann ist $\lambda_e \colon W \to R$, $w \mapsto \lambda(ew)$, ein Element von $\tilde{W}$, aber der Koeffizient $\xi_0 \colon H \to R$, $h \mapsto \lambda_e(h^{-1}w_0)$, ist wegen $\xi_0(1) = 1$ nicht Null, im Widerspruch zum soeben Gezeigten.

Somit würde Satz 3.4.6 für einen algebraisch abgeschlossenen Körper mit Charakteristik $\ell \neq p$ gelten, da die Schwierigkeit mit der formalen Dimension nicht auftreten kann. Allerdings scheint [58, I.7.7 (ii)] falsch zu sein. Gegenbeispiel: Sei $H = \{-1, 1\}$ die (multiplikative) Gruppe aus zwei Elementen mit der diskreten Topologie. Das ist gewiß eine ℓ-Gruppe, und $\mathcal{D}(H)$ besteht aus sämtlichen Funktionen $H \to R$. Alle $\mathcal{D}(H)$-Moduln sind kompakt. Sei R ein algebraischer Abschluß des Körpers $\mathbb{F}_2$ aus zwei Elementen. Man hat also $\operatorname{char} R = 2$. Sei $W = R$ und $\rho\colon H \to \operatorname{Aut}_R(W)$, $h \mapsto \mathrm{id}_W$, der triviale Charakter. Dann ist (ρ, W) kompakt und einfach. Jeder Koeffizient ξ von W ist eine konstante Funktion, und daraus folgt, wenn wir auf $\mathcal{D}(H)$ das Zählmaß nehmen,

$$\rho(\xi) \cdot w = \big(\xi(1) + \xi(-1)\big)w = 0, \quad w \in W,$$

so daß W keine formale Dimension hat. Sei indes $V = \mathcal{D}(H)$ und $\varphi \in \mathcal{D}(H)$. Die Identität id_R ist ein Element von $\tilde{W} = W^* = \operatorname{End}_R(R)$, und durch $\xi_1\colon H \to R$, $h \mapsto \mathrm{id}_R(\rho(h)^{-1} \cdot 1) = 1$, ist daher ein Koeffizient von W gegeben. Dieser operiert durch Faltung auf V, und man bekommt

$$\xi_1 * \varphi(h) = \xi_1(1) \cdot \varphi(h) + \xi_1(-1) \cdot \varphi(-h) = \varphi(1) + \varphi(-1), \tag{3.4}$$

aber man kann φ durch $\varphi(1) = 1$ und $\varphi(-1) = 0$ festlegen, und dann ergibt (3.4) nicht Null.

3.5 Eine Endlichkeitsaussage

Die folgende auf Bernstein zurückgehende Endlichkeitsaussage ist als *Satz über die gleichmäßige Zulässigkeit* (*Uniform Admissibility Theorem*) bekannt.

Satz 3.5.1 ([58, II.2.17]). *Sei R ein Körper der Charakteristik $\ell \neq p$. Zu jedem $e \in \operatorname{Id}(A)$ gibt es dann nur endlich viele Isomorphieklassen einfacher kompakter Moduln V über H mit $eV \neq 0$.* □

3.6 Restriktion und kompakte Induktion für G°

Zu den vielen schönen Eigenschaften von $H = G^\circ$ zählt auch, daß es eine *offene* Untergruppe der topologischen Gruppe G ist. Aufgrund des Bernsteinschen Lemmas 1.3.4 können wir $B = \mathcal{D}(H)$ als Unteralgebra von $A = \mathcal{D}(G)$ auffassen, die alle idempotenten Elemente e_K enthält. Die kompakte Induktion und Restriktion zwischen den Kategorien ${}_A\mathfrak{M}$ und ${}_B\mathfrak{M}$ bezeichnen wir mit ind und Res. Es ist wohlbekannt, daß eine einfache Art der zweiten Adjungiertheit in diesem Falle gilt, nämlich daß (ind, Res) ein adjungiertes Paar von Funktoren ist. In der Modulsprache gilt

$$\operatorname{Res} \cong \mathcal{D}(G) \otimes_G -\colon {}_A\mathfrak{M} \longrightarrow {}_B\mathfrak{M}, \quad \operatorname{ind} \cong \mathcal{D}(G) \otimes_H -\colon {}_B\mathfrak{M} \longrightarrow {}_A\mathfrak{M}.$$

Eins und Koeins dieser Adjungiertheit lassen sich besonders einfach hinschreiben: Für

$$\eta^\circ\colon \mathcal{D}(H) \longrightarrow \mathcal{D}(G) \otimes_G \mathcal{D}(G) \cong \mathcal{D}(G)$$

nehmen wir einfach die Inklusion und definieren

$$\varepsilon^\circ\colon \mathcal{D}(G) \otimes_H \mathcal{D}(G) \longrightarrow \mathcal{D}(G), \quad \varphi \otimes \psi \longmapsto \varphi * \psi,$$

wobei $\varphi * \psi(g) = \displaystyle\int_H \varphi(x)\, \psi(x^{-1}g)\, \mathrm{d}x$.

Proposition 3.6.1. *ε° und η° induzieren die Adjungiertheit* $(\mathrm{ind}, \mathrm{Res})$.

Beweis. Wir müssen dafür zeigen, daß

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{D}(H) \otimes_H \mathcal{D}(G) \arrow[dr, "\eta^\circ\otimes 1"] & & \\
\mathcal{D}(G) \arrow[ur, "\sim"] \arrow[dr, "\sim"'] & & \mathcal{D}(G) \otimes_H \mathcal{D}(G) \arrow[r, "\varepsilon^\circ"] & \mathcal{D}(G) \\
 & \mathcal{D}(G) \otimes_H \mathcal{D}(H) \arrow[ur, "1\otimes\eta^\circ"'] & &
\end{tikzcd}$$

auf zwei Arten die Identität auf $\mathcal{D}(G)$ ergibt (Lemma 4.1.3), aber das ist klar: Sei $\varphi \in \mathcal{D}(G)$ beliebig. Wähle $K \in \Omega(G)$ so, daß $\varphi = e_K * \varphi * e_K$. Dann bekommt man oben entlang $\varphi \mapsto e_K \otimes \varphi \mapsto e_K \otimes \varphi \mapsto e_K * \varphi = \varphi$ und unten entlang $\varphi \mapsto \varphi \otimes e_K \mapsto \varphi \otimes e_K \mapsto \varphi * e_K = \varphi$. □

Proposition 3.6.2. *Der homogene Raum G/H ist diskret (sogar eine Gruppe), und*

$$\int_{G/H} \varphi(g/H)\, \mathrm{d}(g/H) := \sum_{g \in G/H} \varphi(g/H)$$

definiert ein homogenes Maß auf $\mathcal{D}(G/H)$, für das die übliche Weilsche Formel gilt:

$$\int_G \varphi(g)\, \mathrm{d}g = \int_{G/H} \int_H \varphi(gx)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}(g/H).$$

Beweis. Der Raum ist diskret, weil H offen ist. Es ist klar, daß das ein homogenes Maß ist und daß die Formel bis auf einen Faktor gilt, weil das homogene Maß bis auf einen solchen eindeutig ist (Abschnitt 1.7.2). Indem man $\varphi = e_K$ für irgendein $K \in \Omega(G)$ einsetzt, sieht man, daß der Faktor gleich 1 ist. □

Bemerkung 3.6.3. Mit (3.6.2) können wir Eins und Koeins für die Darstellungen, also die Komponenten der natürlichen Transformationen

$$\varepsilon^\circ_V\colon \mathrm{ind}(V) \longrightarrow V, \quad \eta^\circ_W\colon W \longrightarrow \mathrm{ind}(W), \quad V \in {}_A\mathfrak{M},\ W \in {}_B\mathfrak{M},$$

gewinnen, wobei wir Res nicht explizit mit angeschrieben haben: Der Isomorphismus $\mathcal{D}(G) \otimes_H V \to \mathrm{ind}(V)$ bildet $x := \varphi \otimes v$ auf die Funktion

$$\psi(g) = \int_{G_0} \varphi(gx)\, \rho_V(x) \cdot v \,\mathrm{d}x, \quad g \in G, \tag{3.5}$$

ab, siehe Abschnitt 2.5.1, kompakte Induktion. Unter

$$\mathcal{D}(G) \otimes_H V \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}(G) \otimes_H \mathcal{D}(G) \otimes_G V \xrightarrow{\varepsilon^\circ \otimes V} \mathcal{D}(G) \otimes_G V \xrightarrow{\sim} V$$

wird andererseits x auf den Vektor

$$\varphi * v = \int_G \varphi(x)\, \rho_V(x) \cdot v \,\mathrm{d}x = \sum_{g \in G/H} \int_H \varphi(gx)\, \rho_V(gx) \cdot v = \sum_{g \in G/H} \rho_V(g) \cdot \psi(g)$$

abgebildet; also ist

$$\varepsilon_V^\circ(\psi) = \sum_{g \in G/H} \rho_V(g) \cdot \psi(g).$$

Wir betrachten nun das Diagramm

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, dashed, "\eta_W^\circ"] & \mathcal{D}(H) \otimes_H W \arrow[d, "\eta^\circ \otimes W"] \\ \mathrm{ind}(W) & \mathcal{D}(G) \otimes_H W. \arrow[l, "\sim"'] \end{tikzcd}$$

Sei $w \in W$ mit $e_K * w = w$. Dann gilt

$$\eta_W^\circ(w)(g) = \int_H e_K(gx)\, \rho_W(x) \cdot w \,\mathrm{d}x = \begin{cases} gw, & \text{falls } g \in H, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Proposition 3.6.4.

(1) *Weil H offen und daher abgeschlossen ist, ist die Einschränkung π ein Schnitt von η°:*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{D}(H) \arrow[r, bend left, "\eta^\circ"] & \mathcal{D}(G) \arrow[l, bend left, "\pi"] \arrow[r] & \mathcal{D}(G \smallsetminus H) \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

(2) *Für alle $V \in {}_A\mathfrak{M}$ ist die V-Komponente der Eins ein Epimorphismus mit Schnitt s:*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \ker \varepsilon_V^\circ \arrow[r] & \mathcal{D}(G) \otimes_H V \arrow[r, bend left, "\varepsilon_V^\circ"] & V \arrow[l, bend left, "s"] \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Es gilt $\varepsilon_V^\circ(\varphi \otimes v) = \varphi * v$, *und wenn* $e_K * v = v$ *in* V *für* $K \in \Omega(G)$, *dann ist* $s(v) = e_K \otimes v$. *Das hängt nicht von* e_K *ab, weil* $\mathcal{D}(H)$ *alle diese idempotenten Elemente enthält, und* s, *zunächst nur* R*-linear, ist* $\mathcal{D}(H)$*-äquivariant. Insbesondere ist* s *äquivariant bzgl. aller kompakten Untergruppen von* G. $\square$

3.7 Restriktion und Induktion für G°

Wir führen den vorherigen Abschnitt fort. Für die Induktion ${}_B\mathfrak{M} \to {}_A\mathfrak{M}$ schreiben wir Ind. In der Modulsprache ist dann $\mathrm{Ind} \cong A\,\mathrm{Hom}_B(A, -)$, und es gilt das übliche Frobeniussche Reziprozitätsgesetz, daß nämlich $(\mathrm{Res}, \mathrm{Ind})$ ein adjungiertes Paar ist. Die Eins dieser Adjungiertheit schreibt sich in der Form

$$\eta_V \colon V \longrightarrow A\,\mathrm{Hom}_B(A, V), \quad \eta(v)(a) = a * v, \quad v \in {}_A\mathfrak{M},$$

die Koeins hingegen in der Form

$$\varepsilon_W \colon B\,\mathrm{Hom}_B(A, W) \longrightarrow W, \quad \varepsilon(e_K F) = F(e_K), \quad W \in {}_B\mathfrak{M}.$$

Es ist nicht schwer, die »Zickzackgleichungen« für η und ε zu zeigen. Glätten mit A ist das gleiche wie Glätten mit B.

Proposition 3.7.1. *Für alle* $V \in {}_A\mathfrak{M}$ *ist die* V*-Komponente der Eins ein Monomorphismus, zu dem es einen* R*-linearen,* B*-äquivarianten Schnitt* s *gibt. Insbesondere ist er bezüglich aller kompakten Untergruppen von* G *äquivariant. Man bekommt die kurze exakte Sequenz*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & V \arrow[r, bend left, "\eta_V"] & A\,\mathrm{Hom}_B(A, V) \arrow[l, dashed, bend left, "s"] \arrow[r] & \mathrm{coker}\,\eta_V \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Der Schnitt s *ist definiert durch* $s(eF) \coloneqq F(e)$, *wenn* $e \in \mathrm{Id}(A)$ *mit* $eF = F$ *gewählt wird.*

Beweis. Man sieht leicht, daß die Definition von s nicht von der Wahl von e abhängt. Offensichtlich ist s auch R-linear. Sei $v \in V$ und $e \in \mathrm{Id}(A)$ mit $ev = v$. Dann gilt $\eta_V(v)(e) = v$; also muß η_V injektiv sein. Außerdem ergibt sich $s \circ \eta_V(v) = \eta_V(v)(e) = v$; also ist s ein Schnitt. Schließlich sei $g \in H$. Dann ist $s(gF) = gF(geg^{-1}) = F(ge) = gF(e) = gs(F)$. $\square$

3.8 $\mathrm{ind} \circ \mathrm{Res}$ *und* $\mathrm{Ind} \circ \mathrm{Res}$ *erhalten kuspidale Moduln*

Sei $W \in {}_B\mathfrak{M}$ und $\mathcal{C}_0^\infty(G, W)$ der R-Modul der von links unter irgendeinem $K \in \Omega(G)$ gleichmäßig lokal konstanten Funktionen $G \to W$. Wir fassen

$\operatorname{Ind}(W)$ auf als den R-Untermodul der $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(G, W)$ mit der linksregulären Operation von G und

$$\rho_W(h) \cdot \varphi(gh) = \varphi(g), \quad h \in H,\ g \in G.$$

Sei $\varphi \in e_K * \operatorname{Ind}(V)$, $K \in \Omega(K)$. Dann zerfällt $\operatorname{Tr}\varphi$ in (K, H)-Doppelnebenklassen, aber weil H der von allen kompakten Untergruppen von G gebildete Normalteiler ist, gilt

$$KgH = K(gHg^{-1})g = KHg = Hg = gH, \quad g \in G.$$

Der Träger $\operatorname{Tr}\varphi$ zerfällt daher sogar in Rechts- oder Linksnebenklassen von H. Sei $\operatorname{Abb}(G/H, V)$ der R-Modul der Funktionen $G/H \to R$. Hierauf operiert G durch

$$G \curvearrowright \operatorname{Abb}(G/H, V), \quad (g \cdot \varphi)(x/H) := \rho_V(g) \cdot \varphi(g^{-1}x/H), \quad g, x \in G.$$

Sei $\operatorname{Abb}(G/H, V)_0$ die Glättung bzgl. dieser Operation.

Proposition 3.8.1. *Sei $V \in {}_A\mathfrak{M}$. Dann hat man den kanonischen Isomorphismus*

$$\alpha\colon \operatorname{Ind} \circ \operatorname{Res}(V) \longrightarrow \operatorname{Abb}(G/H, V)_0, \quad \alpha(\varphi)(g/H) := \rho_V(g) \cdot \varphi(g),$$

und es gilt

$$\operatorname{Res} \circ \operatorname{Ind} \circ \operatorname{Res}(V) \cong B \prod_{g \in G/H} \operatorname{Res}(V), \quad \operatorname{Res} \circ \operatorname{ind} \circ \operatorname{Res}(V) \cong \bigoplus_{g \in G/H} \operatorname{Res}(V),$$

wobei rechts Produkt und Koprodukt in ${}_B\mathfrak{M}$ stehen.

Beweis. Offensichtlich ist α wohldefiniert und A-äquivariant. Ein inverser A-Morphismus ist

$$\alpha^{-1}\colon \operatorname{Abb}(G/H, V)_0 \to \operatorname{Ind} \circ \operatorname{Res}(V), \quad \alpha^{-1}(\psi)(g) = \rho(g^{-1}) \cdot \psi(g/H).$$

Für $h \in H$ gilt $\alpha(h\varphi) = \rho_V(h) \cdot \alpha(\varphi)$, und man kann $\operatorname{Res}\big(\operatorname{Abb}(G/H, V)_0\big)$ mit dieser Modulstruktur in der offensichtlichen Weise mit dem glatten Produkt identifizieren. Wir bemerken, daß Res aufgrund der beiden Adjunktionen $(\operatorname{Res}, \operatorname{Ind})$ und $(\operatorname{ind}, \operatorname{Res})$ sowohl mit direkten Produkten als auch mit direktem Summen vertauschbar ist. Nun besteht $\operatorname{ind} \circ \operatorname{Res}(V)$ aus den $\varphi \in \operatorname{Ind} \circ \operatorname{Res}(V)$, für die $\operatorname{Bild}(\operatorname{Tr}\varphi) \subseteq G/H$ kompakt, also endlich ist. Das ergibt die zweite Behauptung. $\square$

Satz 3.8.2. *Sei R ein Ring mit $p \in R^*$ und $V \in {}_A\mathfrak{M}$ kuspidal.*

(1) Auch $\operatorname{ind} \circ \operatorname{Res}(V)$ *ist kuspidal [40].*

(2) Wenn R ein Körper der Charakteristik 0 *ist, dann ist auch* $\operatorname{Ind} \circ \operatorname{Res}(V)$ *kuspidal.*

Beweis. (1) Nach Prop. 3.3.4 und 3.3.8 ist $\operatorname{Res} \circ \operatorname{ind} \circ \operatorname{Res}(V) \cong \operatorname{Res}(V)^{\oplus G/H}$ kompakt und $\operatorname{ind} \circ \operatorname{Res}(V)$ daher kuspidal. (2) Für das Produkt funktioniert das gleiche Argument, sobald wir gezeigt haben, daß

$$V' := B \prod_{g \in G/H} \operatorname{Res}(V)$$

kompakt ist. Sei $v' \in V'$ ein Vektor, $e = e_K$ für ein $K \in \Omega(G) = \Omega(H)$ und

$$\varphi\colon H \longrightarrow V', \quad \varphi(h) := ehv'.$$

Es gilt nachzuweisen, daß $\operatorname{Tr} \varphi \subseteq H$ kompakt ist, s. Prop. 3.3.8. Zunächst ist v' von der Form $v' = (v_g)$ mit $v_g \in V$ für alle $g \in G/H$, wobei es ein $e' \in \operatorname{Id}(A)$ mit $e'v' = v'$ gibt. Sei $f \in \operatorname{Id}(A)$ mit $e, e' \leq f$. Dann gilt $fv' = v'$, und wenn $\varphi_f \in \mathcal{C}^\infty(H, V')$ durch $\varphi_f(h) := fhv'$ definiert wird, so gilt $\operatorname{Tr} \varphi \subseteq \operatorname{Tr} \varphi_f$, und wenn $\operatorname{Tr} \varphi_f$ kompakt ist, so auch $\operatorname{Tr} \varphi$. Man kann also ohne Einschränkung $e = e'$ annehmen. Sei $\varphi(h) \neq 0$. Dann gibt es ein $v = v_h \in V$, das von h abhängig ist, mit $ehv \neq 0$. Wir müssen eine kompakte Menge finden, in der h enthalten ist, die aber von dieser Wahl von v nicht abhängt.

Wir nehmen nun zunächst an, daß R algebraisch abgeschlossen ist. Über H zerfällt V nach Satz 3.4.6 in die direkte Summe einer Familie $(W_i)_{i \in I}$ einfacher kompakter B-Moduln:

$$V = \bigoplus_{i \in I} W_i \implies eV = \bigoplus_{i \in I} eW_i.$$

Die Vektorräume eW_i sind nach Prop. 3.3.3 endlichdimensional. Sei $\{w_{ij} \mid 1 \leq j \leq r(i)\}$ eine Basis von eW_i. Nach dem Satz 3.5.1 über die gleichmäßige Zulässigkeit gibt es bis auf Isomorphie nur endlich viele W_i mit $eW_i \neq 0$. Wir können also $I = \{1, \ldots, n\}$ setzen, wenn wir die W_i mit einer möglichen Vielfachheit auftreten lassen. In diesem Sinne ist dann

$$eV = \bigoplus_{i=1}^{n} (eW_i)^{\oplus \nu_i}$$

mit Kardinalzahlen ν_i. Zu jedem w_{ij} gibt es eine kompakte Menge K_{ij} derart, daß, wenn $ehw_{ij} \neq 0$, dann $h \in K_{ij}$, weil W_i kompakt ist. Die Menge $K :=$

$\bigcup_{i,j} K_{ij}$ ist kompakt und hängt nur noch von e ab. In der Tat, es gibt in absolutem Sinne nur endlich viele Isomorphieklassen einfacher kompakter Moduln mit $eW_i \neq 0$. Aus $ehv \neq 0$ folgt nun $h \in K$.

Das nun folgende Argument, mit dem die Bedingung aufgehoben wird, daß R algebraisch abgeschlossen sei, geht auf eine Mitteilung von M. Solleveld zurück: Sei R irgendein Körper der Charakteristik 0 und $\bar{R}$ ein algebraischer Abschluß von R. Nach Prop. 3.3.10 (1) ist $\bar{R}\otimes_R \mathrm{Res}(V)$ ein kompakter $\mathcal{D}_{\bar{R}}(H)$-Modul, und nach dem bisher Gezeigten ist das glatte Produkt

$$\mathcal{D}_{\bar{R}}(H) \otimes_H \prod_{g\in G/H} \bar{R} \otimes_R \mathrm{Res}(V)$$

als $\mathcal{D}_{\bar{R}}(H)$-Modul, nach Prop. 3.3.10 (2) daher auch als $\mathcal{D}(H)$-Modul kompakt. Nun ist V' ein $\mathcal{D}(H)$-Untermodul davon und daher wiederum kompakt. □

3.9 Projektive und injektive kuspidale Moduln

In diesem Abschnitt rekapitulieren wir ein Ergebnis von R. Meyer [40], das wir benutzen wollen. Gegenstände der Betrachtung sind die Kategorien ${}_A\mathfrak{M}$ und ${}_B\mathfrak{M}$. Er führt die folgenden Begriffe ein:

Definition 3.9.1.

(1) In ${}_A\mathfrak{M}$ heißt eine kurze exakte Sequenz

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & U \arrow[r, "g"] & V \arrow[r, bend left, "f"] & W \arrow[l, bend left, dashed, "s"] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

c-zerfallend (von *compact*), wenn f einen R-linearen Schnitt s besitzt, der K-äquivariant für alle kompakten Untergruppen $K \subseteq G$ ist, und *cmc-zerfallend* (von *compact modulo centre*), wenn s statt dessen K-äquivariant ist für (abgeschlossene) Untergruppen K, für die $K/(K\cap Z)$ kompakt ist. Hier ist $Z = \mathcal{Z}(G)$ das Zentrum von G.

(2) Ein Modul $P \in {}_A\mathfrak{M}$ heißt *c-projektiv* bzw. *cmc-projektiv*, wenn der Funktor $\mathrm{Hom}_A(P, -)$ exakt auf allen c-zerfallenden bzw. allen cmc-zerfallenden kurzen exakten Sequenzen ist.

(3) Ein Modul $I \in {}_A\mathfrak{M}$ heißt *c-injektiv* bzw. *cmc-injektiv*, wenn der kontravariante Funktor $\mathrm{Hom}_A(-, I)$ die analogen Eigenschaften hat.

Mit Hilfe gewisser kompakt-offener Pro-p-Untergruppen von G, konstruiert von P. Schneider und U. Stuhler in [52], ergibt sich folgende Eigenschaft kuspidaler Moduln:

Satz 3.9.2 (Meyer)**.** *Jeder kuspidale Modul in ${}_A\mathfrak{M}$ ist cmc-projektiv und cmc-injektiv.*

Beweis. Abschnitte 3.1 und 4.1 in [40]. □

Folgerung 3.9.3 ([40, 3.12])**.** Kuspidale Moduln in ${}_B\mathfrak{M}$ sind c-projektiv und c-injektiv.

Beweis. Für jede abgeschlossene Untergruppe $K \subseteq H$ bekommt man die kurze exakte Sequenz

$$1 \longrightarrow Z^\circ \cap K \longrightarrow K \longrightarrow K/(Z^\circ \cap K) \longrightarrow 1.$$

Mit Z° ist auch $Z^\circ \cap K$ stets kompakt. Es ist nun eine Eigenschaft topologischer Gruppen, daß K genau dann kompakt ist, wenn $K/(Z^\circ \cap K)$ es ist [32, 5.24]. Also sind c-zerfallende exakte Sequenzen in ${}_B\mathfrak{M}$ das gleiche wie cmc-zerfallende. □

Folgerung 3.9.4 ([40, 3.6])**.** Sei $p \in R^*$. Zu jedem kuspidalen $V \in {}_A\mathfrak{M}$ gibt es

(1) eine c-zerfallende kurze exakte Sequenz

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & V_1 \arrow[r] & V_2 \arrow[r, bend left] & V \arrow[l, bend left] \arrow[r] & 0, \end{tikzcd} \tag{3.6}$$

in der V_2 kuspidal und c-projektiv ist, und,

(2) falls R ein Körper mit Charakteristik $\ell \neq p$ ist, eine c-zerfallende kurze exakte Sequenz

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & V \arrow[r, bend left] & V_2' \arrow[l, bend left] \arrow[r] & V_3' \arrow[r] & 0, \end{tikzcd} \tag{3.7}$$

in der V_2' kuspidal und c-injektiv ist.

Beweis. Vgl. [40, S. 4 f.]. Man kann die zerfallenden Sequenzen aus den Propositionen 3.6.4 und 3.7.1 nehmen. Nach Satz 3.8.2 sind $V_2 = \operatorname{ind} \circ \operatorname{Res}(V)$ und $V_2' = \operatorname{Ind} \circ \operatorname{Res}(V)$ unter den gegebenen Voraussetzungen kuspidal. Des weiteren ist $\operatorname{Res}(V)$ über H kompakt, siehe Prop. 3.3.8, was in diesem Fall das gleiche wie »kuspidal« bedeutet, und daher nach Folg. 3.9.3 sowohl c-injektiv als auch c-projektiv. Weil H alle kompakten Untergruppen erhält, respektiert Res c-zerfallende Sequenzen, und aus der Adjunktion $\operatorname{Hom}_A(V_2, X) \cong \operatorname{Hom}_B(\operatorname{Res}(V), \operatorname{Res}(X))$ folgt, daß V_2 c-projektiv ist, andererseits aus der Adjunktion $\operatorname{Hom}_A(X, V_2') \cong \operatorname{Hom}_B(\operatorname{Res}(X), \operatorname{Res}(V))$, daß V_2' c-injektiv ist. □

Definition 3.9.5. Sei R ein Körper. Wir sagen, daß *die Charakteristik von R nicht die Proordnung von G teilt*, wenn $[K : L] \in R^*$ für alle $L, K \in \Omega(G)$ mit $K \supseteq L$ gilt.

Satz 3.9.6 ([40, Th. 1.2])**.** *Es sei R ein Körper, und ℓ teile nicht die Proordnung von G. Insbesondere ist $\ell \neq p$. Dann ist jede kurze exakte Sequenz in ${}_A\mathfrak{M}$ c-zerfallend. Sei $V \in {}_A\mathfrak{M}$ kuspidal. Dann gilt:*

(1) V ist Quotient eines projektiven kuspidalen Moduls.

(2) Wenn sogar $\ell = 0$ ist, dann ist V Untermodul eines injektiven kuspidalen Moduls.

Beweis. Ausgearbeitet nach [40, 3.13]: Wenn R ein Körper ist, liegen Vektorräume zugrunde, und jede kurze exakte Sequenz

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & U \arrow[r, "g"] & V \arrow[r, bend left, "f"] & W \arrow[l, bend left, dashed, "s"] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

zerfällt in R-$\mathfrak{Mod}$. Sei $L \subseteq G$ eine kompakte Untergruppe. Nach Prop. 1.2.5 gibt es eine kompakt-offene Untergruppe $K \in \Omega(G)$ mit $L \subseteq K$. Auf dieser gibt es ein Haarmaß, und sie ist unimodular. Für jedes $w \in W$ ist

$$\varphi_w\colon K \longrightarrow V, \quad k \longmapsto ks(k^{-1}w),$$

ein Element von $\mathcal{D}(K, V)$, und man erhält so eine K-äquivariante Abbildung

$$\tilde{s}\colon W \longrightarrow V, \quad \tilde{s}(w) := \int_K ks(k^{-1}w)\,\mathrm{d}k.$$

Zu festem $w \in W$ sei $K' \in \Omega(K)$ eine Pro-p-Untergruppe, unter der φ_w von rechts invariant ist. Dann gilt

$$\begin{aligned} f \circ \tilde{s}(w) &= \sum_{k \in K/K'} \mathrm{vol}(K') \cdot f\big(ks(k^{-1}w)\big) \\ &= \sum_{k \in K/K'} \mathrm{vol}(K') \cdot w = [K : K'] \cdot \mathrm{vol}(K') \cdot w = \mathrm{vol}(K) \cdot w. \end{aligned}$$

Wenn ℓ nicht die Proordnung von G teilt, dann kann das Haarmaß auf K mit $\mathrm{vol}(K) = 1$ normiert werden, und $\tilde{s}$ ist insbesondere ein L-äquivarianter Schnitt von f. Daraus folgt, daß jede kurze exakte Sequenz in ${}_B\mathfrak{M}$ sogar c-zerfallend, der Modul V_2 aus Folgerung 3.9.4 sogar projektiv und der Modul V_1' sogar injektiv ist. □

4. ERSTE ADJUNGIERTHEIT

Die erste Adjungiertheit ist eine Form der Frobenius-Reziprozität und besagt, daß $(\mathcal{R},\mathcal{I})$ ein adjungiertes Paar von Funktoren ist. Dies ist einfach zu sehen; man kann ein Paar kanonischer, zueinander inverser natürlicher Isomorphismen unmittelbar hinschreiben:

$$\mathrm{Hom}_M({}_NV,W) \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} \mathrm{Hom}_G(V,i_M^G(W)), \qquad \begin{cases} f(\varphi)(v)(g/N) = \varphi[g^{-1}v], \\ g(\psi)[v] = \psi(v)(1/N). \end{cases}$$

Wir wollen diese erste Adjungiertheit nun aber genau untersuchen, und zwar zwischen den Kategorien ${}_A\mathfrak{M}$ und ${}_B\mathfrak{M}$. Wir leiten eine neue Formel für die Eins dieser Adjungiertheit her, mit der wir zuerst die erste Adjungiertheit erneut beweisen, die uns aber vor allem beim Beweis der zweiten Adjungiertheit dienlich sein wird.

4.1 *Hilfsmittel aus der Kategorientheorie*

Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei Kategorien, $\mathcal{R}\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ und $\mathcal{I}\colon \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ zwei Funktoren.

Definition 4.1.1. Ein Funktor $\mathcal{F}\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ heißt *treu* (*voll*, *volltreu*), wenn die Abbildung

$$\mathcal{F}\colon \mathfrak{A}(X,Y) \longrightarrow \mathfrak{B}(\mathcal{F}X,\mathcal{F}Y), \quad f \longmapsto \mathcal{F}(f),$$

für alle Paare $(X,Y) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{A}) \times \mathrm{Ob}(\mathfrak{B})$ injektiv (surjektiv, bijektiv) ist.

Definition 4.1.2. Der Funktor $\mathcal{R}$ ist *linksadjungiert* zu $\mathcal{I}$, der Funktor $\mathcal{I}$ *rechtsadjungiert* zu $\mathcal{R}$ und $(\mathcal{R},\mathcal{I})$ ein *adjungiertes Paar* von Funktoren, wenn es einen natürlichen Isomorphismus

$$\mathfrak{B}(\mathcal{R}-,-) \cong \mathfrak{A}(-,\mathcal{I}-)\colon \mathfrak{A}^{\mathrm{op}} \times \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{Me}$$

gibt. Dabei ist $\mathfrak{Me}$ die Kategorie der Mengen.

Lemma 4.1.3. Genau dann ist $(\mathcal{R},\mathcal{I})$ ein adjungiertes Paar von Funktoren, wenn es zwei natürliche Transformationen, die Eins $\eta\colon 1 \to \mathcal{IR}$ und die Koeins $\varepsilon\colon \mathcal{RI} \to 1$ der Adjunktion, derart gibt, daß

$$\begin{aligned} &\mathcal{R}(V) \xrightarrow{\mathcal{R}(\eta_V)} \mathcal{RIR}(V) \xrightarrow{\varepsilon_{\mathcal{R}(V)}} \mathcal{R}(V), \\ &\mathcal{I}(W) \xrightarrow{\eta_{\mathcal{I}(W)}} \mathcal{IRI}(W) \xrightarrow{\mathcal{I}(\varepsilon_W)} \mathcal{I}(W) \end{aligned} \tag{4.1}$$

für alle $V \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{A})$ und $W \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{B})$ jeweils die Identität auf $\mathcal{R}(V)$ bzw. $\mathcal{I}(W)$ ergeben. Wir bezeichnen diese Identitäten als die »Zickzackgleichungen«.

Beweis. Siehe zum Beispiel [51, 4.2.6]. □

Lemma 4.1.4. Sei $(\mathcal{R},\mathcal{I})$ ein adjungiertes Paar, und seien $\eta\colon 1 \to \mathcal{IR}$ und $\varepsilon\colon \mathcal{RI} \to 1$ Eins und Koeins dieser Adjunktion. Dann gilt folgendes:

(1) Der Funktor $\mathcal{R}\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ ist dann und nur dann

 (i) treu, wenn $\eta_V\colon V \to \mathcal{IR}(V)$ für alle $V \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{A}$ ein Monomorphismus ist;

 (ii) voll, wenn es zu $\eta_V\colon V \to \mathcal{IR}(V)$ einen Schnitt $s_V\colon \mathcal{IR}(V) \to V$ gibt, das heißt $\eta_V \circ s_V = 1$; insbesondere ist η_V dann ein Epimorphismus;

 (iii) volltreu, wenn η ein natürlicher Isomorphismus ist.

(2) Der Funktor $\mathcal{I}\colon \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ ist dann und nur dann

 (i) treu, wenn $\varepsilon_W\colon \mathcal{RI}(W) \to W$ für alle $W \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{A}$ ein Epimorphismus ist;

 (ii) voll, wenn es zu $\varepsilon_W\colon \mathcal{RI}(W) \to W$ für alle W einen Schnitt $t_W\colon W \to \mathcal{RI}(W)$ gibt, das heißt $t_W \circ \varepsilon_W = 1$; insbesondere ist ε_W dann ein Monomorphismus;

 (iii) volltreu, wenn ε ein natürlicher Isomorphismus ist.

Beweis. Siehe zum Beispiel [51, 4.5.13]. □

4.1.1 Adjungierte Paare von Tensorproduktfunktoren

Seien A und B assoziative Algebren mit genügend idempotenten Elementen über dem Ring R. Wir nehmen nun an, daß wir es zu tun haben mit Funktoren der Form

$$\mathcal{R} = Y \otimes_A -\colon {}_A\mathfrak{M} \to {}_B\mathfrak{M}, \quad \mathcal{I} = X \otimes_B -\colon {}_B\mathfrak{M} \to {}_A\mathfrak{M},$$

die von Bimoduln $X \in {}_A\mathfrak{M}_B$ und $Y \in {}_B\mathfrak{M}_A$ induziert werden. Sei

$$C \coloneqq Y \otimes_A X \in {}_B\mathfrak{M}_B \quad \text{und} \quad D \coloneqq X \otimes_B Y \in {}_A\mathfrak{M}_A.$$

Lemma 4.1.5. Seien $Y, Z \in {}_B\mathfrak{M}_A$. Jede natürliche Transformation

$$\tau\colon Y \otimes_A - \to Z \otimes_A -$$

ist von der Form $\tau = \varphi \otimes -$ mit einem Morphismus $\varphi \in \mathrm{Hom}_{B,A}(Y, Z)$.

Beweis. Sei τ gegeben. Der gesuchte Morphismus φ ist dann derjenige, welcher das Diagramm

$$\begin{tikzcd} Y \otimes_A A \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "\sim"] & Z \otimes_A A \arrow[d, "\sim"] \\ Y \arrow[r, dashed, "\varphi"] & Z \end{tikzcd}$$

kommutativ macht: für jedes $a \in A$ ist $A \to A$, $x \mapsto xa$, ein Morphismus in ${}_A\mathfrak{M}$. Weil τ eine natürliche Transformation ist, folgt daraus, daß φ *rechts* A-äquivariant ist, insgesamt also ein Morphismus in ${}_B\mathfrak{M}_A$, weil die Strukturen miteinander verträglich sind. Sei $V \in {}_A\mathfrak{M}$ beliebig. Mit Hilfe der Morphismen $A \to V$, $a \mapsto av$, wobei $v \in V$, zeigt man ähnlich, daß τ von der angegebenen Form ist. □

Proposition 4.1.6.

(1) *Genau dann ist $(\mathcal{R}, \mathcal{I})$ ein adjungiertes Paar, wenn es Morphismen von Bimoduln*

$$\varepsilon \in \mathrm{Hom}_{B,B}(Y \otimes_A X, B) \quad \textit{und} \quad \eta \in \mathrm{Hom}_{A,A}(A, X \otimes_B Y)$$

derart gibt, daß die davon gebildeten Morphismen $Y \to Y$ und $X \to X$ die Identität ergeben, das heißt, daß die folgenden Diagramme kommutieren:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, dashed, "\mathrm{id}_Y"] \arrow[d, "\sim"] & & Y \\ Y \otimes_A A \arrow[r, "Y \otimes \eta"] & Y \otimes_A X \otimes_B Y \arrow[r, "\varepsilon \otimes Y"] & B \otimes_B Y, \arrow[u, "\sim"'] \end{tikzcd} \tag{4.2}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, dashed, "\mathrm{id}_X"] \arrow[d, "\sim"] & & X \\ A \otimes_A X \arrow[r, "\eta \otimes X"] & X \otimes_B Y \otimes_A X \arrow[r, "X \otimes \varepsilon"] & X \otimes_B B. \arrow[u, "\sim"'] \end{tikzcd}$$

(2) *Sei $(\mathcal{R},\mathcal{I})$ ein adjungiertes Paar, ε und η wie im vorhergehenden Teil. Dann gilt des weiteren folgendes:*

(i) *Mit den Morphismen*

$$\Delta\colon C \xrightarrow{Y\otimes\eta\otimes X} C\otimes_B C \quad \text{und} \quad \nabla\colon D\otimes_A D \xrightarrow{X\otimes\varepsilon\otimes Y} D$$

wird das Tripel (C,Δ,ε) zu einer koassoziativen Koalgebra mit Koeins in ${}_B\mathfrak{M}_B$ und (D,∇,η) zu einer assoziativen Algebra mit Eins in ${}_A\mathfrak{M}_A$, siehe (2.2).

(ii) *Für alle $V\in {}_A\mathfrak{M}$ ist $\mathcal{R}(V)$ ein linker C-Komodul mit der Kowirkung*

$$\mathcal{R}(V)=Y\otimes_A V \xrightarrow{Y\otimes\eta\otimes V} Y\otimes_A X\otimes_B Y\otimes_A V = C\otimes_B\mathcal{R}(V).$$

Dadurch läßt sich $\mathcal{R}$ als Funktor ${}_A\mathfrak{M}\to{}^C\mathfrak{M}$ auffassen, der vom Vergißfunktor ${}^C\mathfrak{M}\to{}_B\mathfrak{M}$ faktorisiert wird.

(iii) *Für alle $W\in{}_B\mathfrak{M}$ ist $\mathcal{I}(V)$ ein linker D-Modul mit der Wirkung*

$$D\otimes_A\mathcal{I}(W)=X\otimes_B Y\otimes_A X\otimes_B V \xrightarrow{X\otimes\varepsilon\otimes W} X\otimes_B W=\mathcal{I}(W).$$

Dadurch läßt sich $\mathcal{I}$ als Funktor ${}_B\mathfrak{M}\to{}_D\mathfrak{M}$ auffassen, der vom Vergißfunktor ${}_D\mathfrak{M}\to{}_A\mathfrak{M}$ faktorisiert wird.

(iv) *Durch*

$$X \xrightarrow{\eta\otimes X} X\otimes_B Y\otimes_A X \xrightarrow{X\otimes\varepsilon} X,$$

$$Y \xrightarrow{Y\otimes\eta} Y\otimes_A X\otimes_B Y \xrightarrow{\varepsilon\otimes Y} Y$$

wird X zu einem linken D-Modul und einem rechten C-Komodul, Y zu einem linken C-Komodul und einem rechten D-Modul. Genauer gilt $X\in{}_D\mathfrak{M}_B\cap{}_A\mathfrak{M}^C$ und $Y\in{}_B\mathfrak{M}_D\cap{}^C\mathfrak{M}_A$.

Beweis. (1) Nach Lemma 4.1.3 ist die Adjunktion äquivalent zur Existenz von Eins- und Koeinstransformation, $\tilde\eta\colon 1\to\mathcal{IR}$ und $\tilde\varepsilon\colon\mathcal{RI}\to 1$, die nach Lemma 4.1.5 von der Form $\tilde\eta=\eta\otimes -$ und $\tilde\varepsilon=\varepsilon\otimes -$ mit $\eta\colon A\to D$ und $\varepsilon\colon C\to B$ sind, wobei $\eta=\tilde\eta_A$ und $\varepsilon=\tilde\varepsilon_B$. Die Zickzackgleichungen (4.1) sind daher äquivalent zu (4.2).

(2) (i) Die Komultiplikation Δ ist von selbst koassoziativ, die Multiplikation ∇ von selbst assoziativ, sobald η und ε gegeben sind. Das liegt daran, daß man, sich das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\Delta} & C\otimes C \\ \downarrow{\scriptstyle\Delta} & & \downarrow{\scriptstyle\Delta\otimes C} \\ C\otimes C & \xrightarrow{C\otimes\Delta} & C\otimes C\otimes C \end{array}$$

vorlegend, $(\Delta \otimes C) \circ \Delta = (C \otimes \Delta) \circ \Delta = Y \otimes \eta \otimes \eta \otimes X$ findet, wenn man $C \cong Y \otimes A \otimes A \otimes X$ schreibt, ähnlich für ∇. Aus der Kommutativität der Diagramme (4.2) folgt sofort, daß

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] & C \otimes C \arrow[r, bend left, "\varepsilon\otimes C"] \arrow[r, bend right, "C\otimes\varepsilon"'] & C \end{tikzcd} \quad \text{und} \quad \begin{tikzcd} D \arrow[r, bend left, "\eta\otimes D"] \arrow[r, bend right, "D\otimes\eta"'] & D \otimes D \arrow[r, "\nabla"] & D \end{tikzcd}$$

jeweils die Identität ergeben, also η Eins der assoziativen Algebra (D, ∇) und ε Koeins der koassoziativen Koalgebra (C, Δ) ist.

(ii–iv) Alle Aussagen sind leicht zu zeigen. Wir führen (ii) aus: Das Diagramm der Koassoziativität

$$\begin{tikzcd} Y \otimes_A V \arrow[r, "Y\otimes\eta\otimes V"] \arrow[d, "Y\otimes\eta\otimes V"] & C \otimes_B Y \otimes_A V \arrow[d, "C\otimes Y\otimes\eta\otimes V"] \\ C \otimes_B Y \otimes_A V \arrow[r, "Y\otimes\eta\otimes X\otimes Y\otimes V"] & C \otimes_B C \otimes_B Y \otimes_A V \end{tikzcd}$$

kommutiert, weil quer auf beiden Wegen der Morphismus

$$Y \otimes_A X = Y \otimes_A A \otimes_A A \otimes V \xrightarrow{Y\otimes\eta\otimes\eta\otimes V} C \otimes_B C \otimes_B Y \otimes_A V$$

herauskommt. Das ergibt sich also von selbst. Das zweite zu überprüfende Diagramm, nämlich daß

$$Y \otimes_A V \xrightarrow{Y\otimes\eta\otimes V} C \otimes_B Y \otimes_A V \xrightarrow{\varepsilon\otimes Y\otimes V} Y \otimes_A V$$

die Identität ergibt, folgt wiederum aus (4.2). □

Bemerkung 4.1.7. Indes $X \in {}_A\mathfrak{M}^C$ usw. völlig klar ist, hat man i. allg. nicht $X \in {}_D\mathfrak{M}^C$, das heißt, die Kowirkung $X \to X \otimes_B C$ muß nicht D-linear sein. Die D-Linearität der Kowirkung wäre nämlich gleichbedeutend damit, daß in dem Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \otimes_B Y \otimes_A X \arrow[rr, dashed, "\eta\otimes X\otimes\varepsilon"] \arrow[dr, "X\otimes\varepsilon"'] & & X \otimes_B Y \otimes_A X \\ & X \arrow[ur, "\eta\otimes X"'] & \end{tikzcd}$$

der gestrichtelte Pfeil die Identität ergäbe.

Seien $\rho_V\colon V \to V \otimes_B C$ und $\rho_W\colon W \to C \otimes_B W$ Komoduln über der Koalgebra $C \in {}_B\mathfrak{M}_B$. Insbesondere ist C bzgl. der Komultiplikation $\Delta\colon C \to C \otimes_B C$ ein Links- oder Rechtskomodul über sich selbst. Wir bilden die R-lineare Abbildung

$$\varphi_{V,W}\colon V \otimes_B W \xrightarrow{\rho_V\otimes W - V\otimes\rho_W} V \otimes_B C \otimes_B W.$$

Definition 4.1.8. Das *Kotensorprodukt* $V \boxtimes_C W$ ist der Kern von $\varphi_{V,W}$.

Lemma 4.1.9. Die Sequenz

$$0 \longrightarrow V \xrightarrow{\rho_V} V \otimes_B C \xrightarrow{\varphi_{V,C}} V \otimes_B C \otimes_B C$$

ist exakt, das heißt $V \boxtimes_C C \cong V$. Analog dazu gilt $C \boxtimes_C W \cong W$.

Beweis. Vgl. [18, 10.1]. Sei $\rho = \rho_V$ und $\varphi = \varphi_{V,C}$. Aus $(V \otimes \varepsilon) \circ \rho = \mathrm{id}_V$, siehe immer wieder die Diagramme in Abschnitt 2.2, folgt sofort, daß ρ ein Monomorphismus ist. Es bleibt $\rho(V) = \ker \varphi$ zu zeigen. Die Inklusion »$\subseteq$« ist klar. »$\supseteq$«: Sei $x = \sum v_i \otimes c_i \in \ker \varphi$. Dann ist $v := \sum v_i \cdot \varepsilon(c_i) \in V$, und wir behaupten $\rho(v) = x$. Dazu betrachten wir die Komposition

$$V \otimes_B C \xrightarrow{\varphi} V \otimes_B C \otimes_B C \xrightarrow{V \otimes C \otimes \varepsilon} V \otimes_B C.$$

Aus $\varphi(x) = 0$ folgt $(V \otimes \Delta)(x) = (\rho \otimes C)(x)$ und durch Anwendung von $V \otimes C \otimes \varepsilon$ hierauf weiter, da ρ ein Morphismus in $\mathfrak{M}_B$ ist,

$$x = \sum v_i \otimes c_i = \sum v_i \otimes (C \otimes \varepsilon) \circ \Delta(c_i) = \sum \rho(v_i) \cdot \varepsilon(c_i) = \rho(v). \qquad \square$$

Sei nun $V \in {}_A\mathfrak{M}^C$, das heißt, es ist $V \in {}_A\mathfrak{M}_B$ und das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes_R V \arrow[r, "A \otimes \rho_V"] \arrow[d, "\pi_V"] & A \otimes_R V \otimes_B C \arrow[d, "\pi_V \otimes C"] \\
V \arrow[r, "\rho_V"] & V \otimes_B C.
\end{tikzcd}$$

Hierbei ist π_V der Strukturmorphismus, der V zum A-Linksmodul macht, und die Kommutativität des Diagramms bedeutet $\pi_V \in \mathfrak{M}^C$ und $\rho_V \in {}_A\mathfrak{M}$. Wir setzen jetzt $\varphi = \varphi_{V,W}$. In dem Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & A \otimes_R (V \boxtimes_C W) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & A \otimes_R V \otimes_B W \arrow[r, "A \otimes \varphi"] \arrow[d, "\pi_V \otimes V"] & A \otimes_R V \otimes_B C \otimes_B W \arrow[d, "\pi_V \otimes C \otimes W"] \\
0 \arrow[r] & V \boxtimes_C W \arrow[r] & A \otimes_R V \otimes_B W \arrow[r, "\varphi"] & A \otimes_R V \otimes_B C \otimes_B W
\end{tikzcd}$$

mit exakter unterer Zeile wird, durch die universelle Eigenschaft des Kerns $V \boxtimes_C W$, der eindeutig bestimmte gestrichelte Pfeil induziert, wodurch das Diagramm insgesamt kommutativ wird und $V \boxtimes_C W \in {}_A\mathfrak{M}$.

Sei weiter $U \in \mathfrak{M}_A$ ein Rechtsmodul und $\iota \colon V \boxtimes_C W \to V \otimes_B W$ die Inklusion. Der B-Rechtsmodul $U \otimes_A V$ wird durch

$$U \otimes_A V \xrightarrow{U \otimes \rho_V} U \otimes_A V \otimes_B C$$

in kanonischer Weise zu einem C-Rechtskomodul. Aus diesen Betrachtungen ergibt sich das folgende Diagramm mit exakter unterer Zeile:

$$\begin{tikzcd}
& U \otimes_A (V \boxtimes_C W) \arrow[d, dashed, "\psi"] \arrow[dr, "U\otimes\iota"] & & \\
0 \arrow[r] & (U \otimes_A V) \boxtimes_C W \arrow[r, "\subseteq"] & U \otimes_A V \otimes_B W \arrow[r, "U\otimes\varphi"] & U \otimes_A V \otimes_B C \otimes_B W.
\end{tikzcd}$$

Wegen $(U \otimes \varphi) \circ (U \otimes \iota) = U \otimes (\varphi \circ \iota) = 0$ gibt es, aufgrund der universellen Eigenschaft des Kerns $(U \otimes_A V) \boxtimes_C W$, eine eindeutig bestimmte R-lineare Abbildung ψ, die das Diagramm kommutativ macht.

Lemma 4.1.10. Wenn U_A flach ist, dann ist ψ ein Isomorphismus. Analog gilt $(V \boxtimes_C W) \otimes_A U' \cong V \boxtimes_C (W \otimes_A U')$ für $W \in {}^C\mathfrak{M}_A$ und $U' \in {}_A\mathfrak{M}$, wenn ${}_AU'$ flach ist.

Beweis. Unter dieser Voraussetzung ist $U \otimes \iota$ ein Monomorphismus mit

$$\mathrm{Bild}(U \otimes \iota) = \ker(U \otimes \varphi),$$

und daraus folgt sofort, daß ψ ein Isomorphismus ist. Vgl. [18, 21.4]. $\square$

Bemerkung 4.1.11. Mit anderen Worten verhalten sich Tensorprodukte und Kotensorprodukte unter gewissen Flachheitsbedingungen assoziativ. Diese Bedingungen werden für uns aufgrund der Exaktheit der Induktions- und Restriktionsfunktoren immer erfüllt sein.

Sei nun $f\colon W_1 \to W_2$ ein Morphismus von C-Linkskomoduln. Dann erhält man das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & V \boxtimes_C W_1 \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\exists! V\boxtimes f"] & V \otimes_B W_1 \arrow[r, "\varphi_{V,W_1}"] \arrow[d, "V\otimes f"] & V \otimes_B C \otimes_B W_1 \arrow[d, "V\otimes C\otimes f"] \\
0 \arrow[r] & V \boxtimes_C W_2 \arrow[r] & V \otimes_B W_2 \arrow[r, "\varphi_{V,W_2}"] & V \otimes_B C \otimes_B W_2
\end{tikzcd}$$

mit einem von der universellen Eigenschaft des Kerns $V \boxtimes_C W_2$ induzierten eindeutigen Morphismus $V \boxtimes f \in {}_A\mathfrak{M}$. In diesem Sinne wird $V \boxtimes_C -$ zu einem Funktor ${}^C\mathfrak{M} \to {}_A\mathfrak{M}$. Dieser Funktor ist im allgemeinen weder links- noch rechtsexakt; es ergibt sich jedoch sofort:

Lemma 4.1.12. Wenn V_B flach ist, dann ist $V \boxtimes_C -$ linksexakt. $\square$

Proposition 4.1.13. *Seien $\mathcal{R} = Y \otimes_A -$ und $\mathcal{I} = X \otimes_B -$ wie zuvor mit Bimoduln ${}_AX_B$ und ${}_BY_A$. Sei $(\mathcal{R}, \mathcal{I})$ ein adjungiertes Paar, $C = Y \otimes_A X$ die Koalgebra und $D = X \otimes_B Y$ die Algebra dazu. Schließlich sei*

$$\mathcal{S} := X \boxtimes_C -\colon {}^C\mathfrak{M} \longrightarrow {}_A\mathfrak{M}.$$

(1) *Es gilt $\mathcal{S} \circ (C \otimes_B -) = \mathcal{I}$. Die Adjunktion $(\mathcal{R}, \mathcal{I})$ läßt sich also in die adjungierten Paare $(\mathcal{R}, \mathcal{S})$ und $(\mathcal{V}, C \otimes_B -)$ aufspalten,*

$$\begin{tikzcd} {}_A\mathfrak{M} \arrow[r, bend left, "\mathcal{R}"] & {}^C\mathfrak{M} \arrow[l, bend left, "\mathcal{S}"] \arrow[r, bend left, "\mathcal{V}"] & {}_B\mathfrak{M}, \arrow[l, bend left, "C\otimes_B -"] \end{tikzcd} \tag{4.3}$$

wobei $\mathcal{V}$ der Vergißfunktor ist;

(2) *ebenso in die adjungierten Paare $(D \otimes_A -, \mathcal{V})$ und $(Y \otimes_D -, \mathcal{I})$,*

$$\begin{tikzcd} {}_B\mathfrak{M} \arrow[r, bend right, "\mathcal{I}"'] & {}_D\mathfrak{M} \arrow[l, bend right, "Y\otimes_D -"'] \arrow[r, bend right, "\mathcal{V}"'] & {}_A\mathfrak{M}. \arrow[l, bend right, "D\otimes_A -"'] \end{tikzcd} \tag{4.4}$$

(3) *$Y \otimes_D -$ ist volltreu. Wenn Y_A flach ist, dann ist auch $X \boxtimes_C -$ volltreu.*

Beweis. (1) Daß $(\mathcal{V}, C \otimes_B -)$ ein adjungiertes Paar bildet, wurde in Abschnitt 2.2.3 behandelt.

Wir zeigen $X \boxtimes_C (C \otimes_B W) \cong X \otimes_B W$ für $W \in {}_B\mathfrak{M}$. Lemma 4.1.10 können wir dafür jedoch nicht benutzen, da ${}_BW$ nicht flach zu sein braucht. Sei

$$\rho_X \colon X \xrightarrow{\sim} A \otimes_A X \xrightarrow{\eta \otimes X} X \otimes_B C$$

die Strukturabbildung, die X zum C-Rechtskomodul macht, s. Prop. 4.1.6 (2). Wir bilden die Sequenz

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \otimes_B W \arrow[r, bend right, "\rho_X \otimes W"'] & X \otimes_B C \otimes_B W \arrow[l, bend right, "X\otimes\varepsilon\otimes W"'] \arrow[r, "\varphi"] & X \otimes_B C \otimes_B C \otimes_B W, \end{tikzcd}$$

von der wir zeigen, daß es eine zerfallende exakte ist. Hierbei ist

$$\varphi = \rho_X \otimes C \otimes W - X \otimes \Delta \otimes W \quad \text{und} \quad \ker \varphi = X \boxtimes_C (C \otimes_B W),$$

zur Erinnerung $\Delta = Y \otimes \eta \otimes X$. Es folgt sofort $\mathrm{Bild}(\eta \otimes X \otimes W) \subseteq \ker \varphi$. Sei nun $y = \sum x_i \otimes c_i \otimes w_i \in \ker \varphi$ beliebig. Damit definieren wir

$$y_0 := \sum x_i \varepsilon(c_i) \otimes w_i \in X \otimes_B W.$$

und behaupten $(\rho_X \otimes W)(y_0) = y$. In der Tat, sei $e \in \mathrm{Id}(A)$ mit $ex_i = x_i$ für alle Indizes. Indem wir

$$X \otimes_B C \otimes_B C \otimes_B W \xrightarrow{X \otimes C \otimes \varepsilon \otimes W} X \otimes_B C \otimes_B W$$

auf $\varphi(y)$ anwenden, finden wir

$$\begin{aligned}(\rho_X \otimes W)(y_0) &= \sum \eta(e) \otimes x_i \varepsilon(c_i) \otimes w_i \\ &= \sum x_i \otimes (C \otimes \varepsilon) \circ \Delta(c_i) \otimes w_i = \sum x_i \otimes c_i \otimes w_i = y.\end{aligned}$$

Der Rest ist klar, und somit haben wir $\mathcal{S} \circ (C \otimes_B -) = \mathcal{I}$.

Es bleibt nun zu zeigen, daß $(\mathcal{R}, \mathcal{S})$ ein adjungiertes Paar bildet. Seien $V \in {}_A\mathfrak{M}$ und $W \in {}^C\mathfrak{M}$. Mit $\varepsilon\colon C = Y \otimes_A X \to B$ und $\eta\colon A \to D = X \otimes_B Y$, der Koeins und Eins der Adjunktion $(\mathcal{R}, \mathcal{I})$, können dann einerseits

$$\tilde{\varepsilon}_W \colon Y \otimes_A (X \boxtimes_C W) \xrightarrow{Y \otimes \iota} C \otimes_B W \xrightarrow{\varepsilon \otimes W} W$$

betrachten, wobei ι die Inklusion ist. Andererseits definieren wir $\tilde{\eta}_V$ im Sinne des Diagramms

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, dashed, "\tilde{\eta}_V"] \arrow[d, "\eta \otimes V"] & X \boxtimes_C (Y \otimes_A V) \\ X \otimes_B Y \otimes_A V \arrow[ur, "\iota'"'] & \end{tikzcd}$$

als Faktorisierung der V-Komponente der Eins $\eta \otimes V$ von $(\mathcal{R}, \mathcal{I})$ durch die kanonische Inklusion ι'. Wir zeigen, daß die so definierten natürlichen Transformationen $\tilde{\eta}$ und $\tilde{\varepsilon}$ Eins und Koeins der Adjunktion $(\mathcal{R}, \mathcal{S})$ sind: Für die eine Zickzackgleichung bekommen wir

$$\begin{tikzcd} Y \otimes_A V \arrow[r, "\mathcal{R}(\tilde{\eta}_V)"] \arrow[dr, "Y \otimes \eta \otimes V"'] & Y \otimes_A \big(X \boxtimes_C (Y \otimes_A V)\big) \arrow[r, "\tilde{\varepsilon}_{\mathcal{R}(V)}"] \arrow[d, "Y \otimes \iota'"] & Y \otimes_A V \\ & C \otimes_B Y \otimes_A V. \arrow[ur, "\varepsilon \otimes Y \otimes V"'] & \end{tikzcd}$$

Hierbei ist wiederum ι' die kanonische Inklusion. Das Diagramm kommutiert, und daß die Zeile die Identität ergibt, folgt somit aus der Adjunktion $(\mathcal{R}, \mathcal{I})$. Für die zweite Zickzackgleichung erhalten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \boxtimes_C W \arrow[rr, "\tilde{\eta}_{\mathcal{S}(W)}"] \arrow[d, "\eta \otimes \mathcal{S}(W)"'] & & X \boxtimes_C \big(Y \otimes_A (X \boxtimes_C W)\big) \arrow[r, "\mathcal{S}(\tilde{\varepsilon}_W)"] \arrow[dll, "\subseteq"] \arrow[d, "\mathcal{S}(Y \otimes \iota')"] & X \boxtimes_C W \arrow[dd, "\iota"] \\ D \otimes_A (X \boxtimes_C W) \arrow[d, "D \otimes \iota"'] & & X \boxtimes_C (C \otimes_B W) \arrow[ur, "\mathcal{S}(\varepsilon \otimes W)"'] \arrow[dll, "\subseteq"] \arrow[dr, "\cong"] & \\ X \otimes_B C \otimes_B W \arrow[rrr, "X \otimes \varepsilon \otimes W"'] & & & X \otimes_B W. \end{tikzcd}$$

Nun gilt $(D \otimes \iota) \circ (\eta \otimes \mathcal{S}(W)) = (\eta \otimes X \otimes W) \circ \iota$. Weil ι ein Monomorphismus ist, folgt aufgrund der Adjunktion $(\mathcal{R}, \mathcal{I})$, daß die obere Zeile die Identität ergibt.

(2) Analog wie zuvor, aber einfacher, da Tensorprodukte rechtsexakt sind und sich daher als Kokerne assoziativ verhalten.

(3) Die Eins der Adjunktion $(Y \otimes_D -, \mathcal{I})$ nimmt die Gestalt des natürlichen Isomorphismus

$$V \cong D \otimes_D V \cong X \otimes_B (Y \otimes_D V), \quad V \in {}_D\mathfrak{M},$$

an. Wenn Y_A flach ist, dann nimmt die Koeins der Adjunktion $(\mathcal{R}, \mathcal{S})$ nach Lemma 4.1.10 die Gestalt des natürlichen Isomorphismus

$$Y \otimes_A (X \boxtimes_C W) \cong C \boxtimes_C W \cong W, \quad W \in {}^C\mathfrak{M},$$

an. Die Behauptung folgt nun aus Lemma 4.1.4. □

4.2 Die erste Adjungiertheit

Seien $\mathcal{R} = Y \otimes_A -\colon {}_A\mathfrak{M} \to {}_B\mathfrak{M}$ und $\mathcal{I} = X \otimes_B -\colon {}_B\mathfrak{M} \to {}_A\mathfrak{M}$ parabolische Restriktion und Induktion wie in Abschnitt 2.5.2 bzgl. einer parabolischen Untergruppe $P \subseteq G$ mit

$$X = \mathcal{D}(G/N) \cdot \chi \quad \text{und} \quad Y = \chi \cdot N \backslash \mathcal{D}(G).$$

Eins und Koeins der Adjunktion $(\mathcal{R}, \mathcal{I})$ werden von Morphismen

$$\eta\colon A \longrightarrow X \otimes_B Y, \quad \varepsilon\colon Y \otimes_A X \longrightarrow B$$

induziert, die wir selbst der Einfachheit halber auch als Eins und Koeins der Adjunktion bezeichnen. Wie sich diese in Formeln hinschreiben lassen, daran erinnern wir in den folgenden beiden Abschnitten.

4.2.1 Die Koeins ε

Wir interpretieren $\mathcal{I}(W)$ für $W \in {}_B\mathfrak{M}$ als Modul der von links gleichmäßig lokal konstanten Funktionen $G/N \to W$ mit

$$\varphi(gm^{-1}/N) \cdot \chi(m) = \rho(m) \cdot \varphi(g/N), \quad g \in G,\ m \in M,$$

vgl. Abschnitt 2.5.2; zu χ siehe Def. 2.5.3. Die Koeins ist in der einfachsten Formulierung, wie wohlbekannt ist, von der Form

$$\varepsilon_W\colon \chi \cdot N \backslash \mathcal{I}(W) \longrightarrow W, \quad \varepsilon_W[\varphi] = \varphi(1/N).$$

Das ist ein Morphismus in ${}_B\mathfrak{M}$ und, wenn man $W = \mathcal{D}(M)$ setzt, sogar ein Morphismus von B-Bimoduln. Man hat den Isomorphismus

$$F\colon \mathcal{D}(G/N) \cdot \chi \otimes_M W \longrightarrow \mathcal{I}(W), \tag{4.5}$$

$$F(\varphi \otimes w)(g/N) = \int_M \chi^{-1}(m)\, \varphi(gm/N)\, \rho_W(m) \cdot w \,\mathrm{d}m, \tag{4.6}$$

siehe (2.12). Wendet man darauf den Funktor $\mathcal{R}$ an und setzt es mit ε_W für $W = \mathcal{D}(M)$ zusammen, erhält man das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \chi \cdot N\backslash\mathcal{D}(G/N) \cdot \chi \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, dashed, "\varepsilon"'] & \chi \cdot N\backslash\mathcal{D}(G/N) \cdot \chi \otimes_M \mathcal{D}(M) \arrow[d, "\mathcal{R}(F)"] \\ \mathcal{D}(M) & \chi \cdot N\backslash\mathcal{I}(\mathcal{D}(M)). \arrow[l, "\varepsilon_W"'] \end{tikzcd}$$

Der obere horizontale Isomorphismus bildet $[\varphi]$ auf $[\varphi] \otimes e_K$ ab, wobei $K \in \Omega(M)$ beliebig so gewählt ist, daß φ von rechts K-invariant ist. Nach einfacher Rechnung bekommt man

$$\varepsilon\colon \chi \cdot N\backslash\mathcal{D}(G/N) \cdot \chi \longrightarrow \mathcal{D}(M), \quad \varepsilon[\varphi](m) = \chi^{-1}(m)\, \varphi(m/N),$$

also den gewünschten Morphismus $\varepsilon\colon Y \otimes_A X \to B$ unter der Identifikation

$$Y \otimes_A X = \chi \cdot N\backslash\mathcal{D}(G) \otimes_G \mathcal{D}(G/N) \cdot \chi = \chi \cdot N\backslash\mathcal{D}(G/N) \cdot \chi,$$

siehe Abschnitt 2.4. Zu dieser Formel kommt auch Guiraud [30, Obs. 5.1.2].

4.2.2 Die Eins η

Die Eins der ersten Adjungiertheit ist in ihrer einfachsten Ausprägung von der Form

$$\eta\colon \mathcal{D}(G) \longrightarrow \mathcal{I}(\chi \cdot N\backslash\mathcal{D}(G)), \quad \eta(\varphi)(g/N) = [g^{-1}\varphi].$$

Das ist ein Morphismus von A-Bimoduln. Indem wir $W = N\backslash\mathcal{D}(G)$ bei dem Isomorphismus aus (4.5) setzen, können wir die Identifikation

$$\begin{aligned} X \otimes_B Y &= \mathcal{I}(\chi \cdot N\backslash\mathcal{D}(G)) = \mathcal{D}(G/N) \otimes_M N\backslash\mathcal{D}(G) \\ &= \mathcal{D}(G)/N \cdot \delta_P^{-1} \otimes_M N\backslash\mathcal{D}(G) \end{aligned} \tag{4.7}$$

treffen, siehe Abschnitt 2.4.

Eine weitere nützliche Interpretation des Bimoduls $X \otimes_B Y$ betrachtet Guiraud [30, Rem. 4.5.13]:

Definition 4.2.1. Der R-Modul $\mathcal{D}(G/N \times_M N\backslash G, \delta_P^{-1})$ besteht aus den Funktionen $\varphi\colon G/N \times N\backslash G \to R$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) Die Funktion ist von beiden Seiten gleichmäßig glatt, das heißt, es gibt $K \in \Omega(G)$ mit

$$\varphi(k_1 g_1/N, N\backslash g_2 k_2) = \varphi(g_1/N, N\backslash g_2), \quad k_i \in K,\ g_i \in G.$$

(2) Es gilt

$$\varphi(g_1 m^{-1}/N, N\backslash m g_2) = \delta_P^{-1}(m) \cdot \varphi(g_1/U, U\backslash g_2), \quad g_i \in G,\ m \in M.$$

(3) $\mathrm{Bild}(\mathrm{Tr}\,\varphi) \subseteq G/N \times_M N\backslash G$ ist kompakt.

Mit Hilfe des Isomorphismus $N\backslash\mathcal{D}(G) \to \delta_P^{-1} \cdot \mathcal{D}(N\backslash G)$ erhält man

$$\mathcal{D}(G/N) \otimes_M N\backslash\mathcal{D}(G) \xrightarrow{\sim} i_M(\chi \cdot N\backslash\mathcal{D}(G)) \xrightarrow{\sim} i_M(\chi \cdot \delta_P^{-1} \cdot \mathcal{D}(N\backslash G)).$$

Der rechtsstehende Modul besteht aus Funktionen $\varphi\colon G/N \to \mathcal{D}(N\backslash G)$, und es ist leicht, ihn direkt mit $\mathcal{D}(G/N \times_M N\backslash G, \delta_P^{-1})$ zu identifizieren. Man erhält den Isomorphismus

$$\begin{aligned} F\colon \mathcal{D}(G/N) \otimes_M N\backslash\mathcal{D}(G) &\longrightarrow \mathcal{D}(G/N \times_M N\backslash G, \delta_P^{-1}),\\ F(\varphi \otimes [\psi])(g/N, N\backslash h) &= \int_M \varphi(gm/N)\, \bar{\psi}(N\backslash m^{-1}h)\,\mathrm{d}m,\\ \bar{\psi}(N\backslash m^{-1}h) &= \int_N \psi(nm^{-1}h)\,\mathrm{d}n. \end{aligned}$$

4.2.3 Eine neue Formel für η

Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}(G) \arrow[rr, dashed, "?"] \arrow[dr, "\eta"'] & & \mathcal{D}(G)/N \cdot \delta_P^{-1} \otimes_M N\backslash\mathcal{D}(G) \arrow[dl, "\sim"] \\ & \mathcal{I}(\chi \cdot N\backslash\mathcal{D}(G)). & \end{tikzcd}$$

Obwohl wir η so, wie es hier angeschrieben ist, und den unbezeichneten Isomorphismus in der einen eingezeichneten Richtung gut verstehen, möchten wir η gerne in möglichst beherrschbarer Form in Gestalt des gestrichelten Pfeiles haben. Diese Herleitung ist Aufgabe des vorliegenden Abschnitts.

Es sei K stets eine Pro-p-Kongruenzuntergruppe und K_0 eine fest gewählte maximale kompakte Untergruppe von G, siehe Satz 1.5.1. Wenn $p \in R^*$, dann gibt es ein Haarmaß in $\mathcal{D}'(G)$, aber auch in $\mathcal{D}'(K_0)$, und $K_{\bar{N}}$, K_P, K_N sind ebenfalls Pro-p-Untergruppen. Wegen Prop. 1.7.17 kann man Haarmaße auf G, $\bar{N}$, M, N eindeutig so wählen, daß $\mathrm{vol}(K_{\bar{N}}) = \mathrm{vol}(K_P) = \mathrm{vol}(K_N) = \mathrm{vol}(K) = 1$. Wir stellen an den Ring außerdem die Bedingung, daß $K_{0,P} = K_0 \cap P$ invertierbares Volumen hat. Diese Bedingung ermöglicht es uns, die Formel für η als Integral über K_0 zu schreiben. Daneben gibt es eine Summenformel, die ohne diese Bedingung auskommt. Letztlich wird der Faktor $\mathrm{vol}(K_{0,P})$ doch keine Rolle spielen.

Bemerkung 4.2.2. In Charakteristik 0 gibt es natürlich keine Schwierigkeit: normiert man $\mathrm{vol}(K) = 1$, dann gilt, weil K_0 selbst eine kompakt-offene Gruppe ist,

$$\mathrm{vol}(K_0) = [K_0 : K] \quad \text{und} \quad \mathrm{vol}(K_{0,P}) = [K_{0,P} : K_P]\,\mathrm{vol}(K_P) \in \mathbb{Z}[\tfrac{1}{p}].$$

Beispiel 4.2.3. Wenn $G = \mathrm{GL}_n(k)$, so ist $K_0 = \mathrm{GL}_n(\mathfrak{o})$ eine maximale kompakte Untergruppe. Sei q die Anzahl der Elemente im Restklassenkörper $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ von K. Ein Haarmaß auf G mit $\mathrm{vol}(K_0) = 1$ gibt es dann und nur dann, wenn $(q-1)\cdots(q^n-1) \in R^*$ (Vignéras [58, I.2.5]).

Wir wollen η als Morphismus

$$\eta\colon \mathcal{D}(G) \to \mathcal{D}(G)/N \cdot \delta_P^{-1} \otimes_M N\backslash\mathcal{D}(G) \tag{4.8}$$

beschreiben. Als Morphismus von $\mathcal{D}(G)$-Bimoduln ist η durch die Bilder $\eta(e_K)$ schon eindeutig bestimmt.

Lemma 4.2.4. Man hat $\mathrm{vol}_G(K_{\bar{N}}K_{0,P}) = \mathrm{vol}_{\bar{N}}(K_{\bar{N}}) \cdot \mathrm{vol}_P(K_{0,P})$ und

$$|K\backslash G/P| = \frac{\mathrm{vol}(K_0)}{\mathrm{vol}(K_{\bar{N}}) \cdot \mathrm{vol}(K_{0,P})}.$$

Beweis. Wir betrachten die stetige Gruppenoperation

$$K_0 \curvearrowright K\backslash G/P, \quad \lambda \cdot KgP := K\lambda gP.$$

Aufgrund der Iwasawa-Zerlegung ist diese Operation transitiv. Der Raum $K\backslash G/P$ ist endlich. Isotropiegruppe des Punktes $K1P$ ist, wie man leicht sieht, $KK_{0,P} = K_{\bar{N}}K_{0,P}$, wobei wir hier die Iwahori-Zerlegung von K bzgl. P benutzt haben. Wegen $K \trianglelefteq K_0$ ist klar, daß $KK_{0,P}$ eine kompakt-offene Untergruppe von K_0 ist, die K als Normalteiler enthält. Nun gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}_G(K_{\bar{N}}K_{0,P}) &= \int_G \mathbb{1}_{K_{\bar{N}}K_{0,P}}(g)\,\mathrm{d}g \\
&= \int_{\bar{N}}\int_M\int_N \delta_P^{-1}(m)\ \mathbb{1}_{K_{\bar{N}}K_{0,P}}(\bar{n}mn)\,\mathrm{d}\bar{n}\,\mathrm{d}m\,\mathrm{d}n \\
&= \int_{\bar{N}}\int_P \mathbb{1}_{K_{\bar{N}}}(\bar{n})\ \mathbb{1}_{K_{0,P}}(p)\,\mathrm{d}\bar{n}\,\mathrm{d}p = \mathrm{vol}_{\bar{N}}(K_{\bar{N}}) \cdot \mathrm{vol}_P(K_{0,P}).
\end{aligned}$$

Das ist das erste. Weiter hat man $\mathrm{vol}(K_0) = [K_0 : K_{0,P}K_{\bar{N}}] \cdot \mathrm{vol}(K_{0,P}K_{\bar{N}})$ und $[K_0 : K_{0,P}K_{\bar{N}}] = |K\backslash G/P|$. □

Satz 4.2.5. *Sei* $W \coloneqq \chi \cdot N\backslash\mathcal{D}(G)$.

(1) Der Morphismus η *wird beschrieben von*

$$\eta\colon \mathcal{D}(G) \longrightarrow \mathcal{I}_M^G(W), \quad \eta(\varphi)(g/N) = [g^{-1}\varphi].$$

(2) Er wird auch beschrieben von

$$\begin{aligned} \eta\colon \mathcal{D}(G) &\longrightarrow \mathcal{D}(G/N \times_M N\backslash G, \delta_P^{-1}), \\ \eta(\varphi)(g/N, N\backslash h) &= \int_N \varphi(gnh)\,\mathrm{d}n. \end{aligned}$$

(3) Schließlich lautet unsere neue Beschreibung

$$\begin{aligned} \eta\colon \mathcal{D}(G) \longrightarrow E \coloneqq \mathcal{D}(G)/N \cdot \delta_P^{-1} \otimes_M N\backslash\mathcal{D}(G),& \\ \eta(e_K) = \frac{1}{\mathrm{vol}(K_{0,P})} \int_{K_0} [\lambda e_K] \otimes [e_K\lambda^{-1}]\,\mathrm{d}\lambda& \\ = \mathrm{vol}(K_{\bar{N}}) \sum_{\lambda\in K\backslash G/P} [\lambda e_K] \otimes [e_K\lambda^{-1}].& \end{aligned}$$

Dabei ist $K \in \Omega(G)$ *eine Pro-p-Kongruenzuntergruppe, und die Integralformel setzt* $\mathrm{vol}(K_{0,P}) \in R^*$ *voraus.*

Beweis. (1) und (2) wurden oben schon bemerkt. (3) In $\mathcal{I}_M^G(W)$ ist $\xi \coloneqq \eta(e_K)$ nach Teil 1 die Funktion

$$\xi\colon G/N \to W, \quad \xi(g/N) = [g^{-1}e_K] = [e_{g^{-1}K}] = [e_K(g\_)]. \tag{4.9}$$

Sei Λ ein Repräsentantensystem von $K\backslash G/P$. Dann ist Λ endlich: G/P ist kompakt, und $K\backslash G$ ist diskret. Daraus folgt, daß $K\backslash G/P$ kompakt und diskret, also endlich ist. Aufgrund der Iwasawa-Zerlegung können wir $\Lambda \subseteq K_0$ annehmen. Wir betrachten nun das Element

$$x \coloneqq \mathrm{vol}(K_P)^{-1} \sum_{\lambda\in\Lambda} [\lambda\, \mathbb{1}_K] \otimes [e_K\lambda^{-1}] \in \mathcal{D}(G)/N \cdot \delta_P^{-1} \otimes_M N\backslash\mathcal{D}(G). \tag{4.10}$$

Wenn wir dieses mit dem Isomorphismus (4.5) zu einem Element $\psi \in \mathcal{I}_M^G(W)$

transformieren, erhalten wir

$$\psi(g/N) = \mathrm{vol}(K_P)^{-1} \sum_{\lambda\in\Lambda} \int_M \int_N \mathbb{1}_{\lambda K}(gmn)\, \rho_W(m) \cdot [\lambda^{-1} \cdot e_K]\, \mathrm{d}n\, \mathrm{d}m. \quad (4.11)$$

Wir benutzen immer wieder, daß K ein Normalteiler von K_0 ist. Sei $g \in G$ beliebig. Dann gibt es genau ein $\lambda \in \Lambda$, so daß $g \in K\lambda P$. Wir schreiben $g = k_0\lambda m_0 n_0$. Einfache Umformungen ergeben dann

$$\begin{aligned}\psi(g/N) = \mathrm{vol}(K_P)^{-1} \int_M \int_N \mathbb{1}_{K_M}(m)\ \mathbb{1}_{K_N}(n)\, \rho_W(m_0^{-1}m) \cdot [\lambda^{-1}e_K]\, \mathrm{d}n\, \mathrm{d}m \\ = \rho_W(m_0^{-1}) \cdot [\lambda^{-1}e_K] = [g^{-1}e_K] = \xi(g/N).\end{aligned}$$

Das bedeutet, daß $\eta(e_K)$ in $\mathcal{D}(G)/N \otimes_M N\backslash\mathcal{D}(G)$ im Sinne unserer Isomorphismen von x repräsentiert wird. Sei E wie im Text des Satzes. Wir definieren

$$\varphi \in \mathcal{D}(K_0, E), \quad \varphi(\lambda) := [\lambda e_K] \otimes [e_K\lambda^{-1}] = [e_K\lambda] \otimes [\lambda^{-1}e_K], \quad (4.12)$$

Wegen $\mathrm{vol}(K) = \mathrm{vol}(K_{\bar N})\,\mathrm{vol}(K_P)$ können wir damit

$$x = \mathrm{vol}(K_{\bar N}) \sum_{\lambda\in\Lambda} \varphi(\lambda) \quad (4.13)$$

schreiben. Weiterhin gilt $\varphi|K\lambda P = \varphi(\lambda)$ für alle $\lambda \in K_0$, und wegen

$$K\backslash G/P \cong K_0/K_{\bar N}K_{0,P}$$

können wir das Integral folgendermaßen berechnen:

$$\int_{K_0} \varphi(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda = \sum_{\lambda\in\Lambda} \varphi(\lambda)\ \mathrm{vol}(K_{\bar N})\ \mathrm{vol}(K_{0,P}) = \mathrm{vol}(K_{0,P}) \cdot x. \quad (4.14)$$

□

4.2.4 Beweis der ersten Adjungiertheit

Wir betrachten einerseits

$$\begin{aligned}\varepsilon\colon \chi \cdot N\backslash\mathcal{D}(G) \otimes_G D(G/N) \cdot \chi \xrightarrow{\sim} \chi \cdot N\backslash\mathcal{D}(G/N) \cdot \chi \longrightarrow \mathcal{D}(M), \\ [\varphi] \otimes \bar\psi \longmapsto (\chi^{-1} \cdot \varphi * \bar\psi)|M.\end{aligned}$$

Es ergibt sich folgende Formel:

$$\begin{aligned}
\chi^{-1} \cdot \varphi * \bar{\psi}(m) &= \chi^{-1}(m) \cdot \int_G \varphi(g)\, \bar{\psi}(g^{-1}m/N)\, \mathrm{d}g \\
&= \chi^{-1}(m) \cdot \int_G \int_N \varphi(g)\, \psi(g^{-1}mn)\, \mathrm{d}n\, \mathrm{d}g.
\end{aligned}$$

Andererseits betrachten wir

$$\begin{gathered}
\eta \colon \mathcal{D}(G) \longrightarrow \mathcal{D}(G/N) \otimes_M N \backslash \mathcal{D}(G), \\
\eta(e_K) = c \cdot \int_{K_0} \lambda \cdot \overline{e_K} \otimes [e_K] \cdot \lambda^{-1}\, \mathrm{d}\lambda, \quad c := \frac{1}{\mathrm{vol}(K_{0,P})}.
\end{gathered}$$

Proposition 4.2.6. *Die Abbildungen η und ε stellen als Eins und Koeins eine Adjungiertheit $(\mathcal{R}, \mathcal{I})$ her.*

Beweis. Wir schreiben χ zur Vereinfachung der Formeln nicht mehr mit an. Betrachten wir zunächst

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}(G/N) \arrow[rr, dashed] \arrow[d, "\sim"'] & & \mathcal{D}(G/N) \otimes_M N\backslash\mathcal{D}(G) \otimes_G \mathcal{D}(G/N) \arrow[rr, dashed] \arrow[d, "1\otimes\varepsilon"] & & \mathcal{D}(G/N) \\
\mathcal{D}(G) \otimes_G \mathcal{D}(G/N) \arrow[urr, "\eta\otimes 1"'] & & \mathcal{D}(G/N) \otimes_M \mathcal{D}(M). \arrow[urr, "\sim"'] & &
\end{tikzcd}$$

Wir müssen zeigen, daß die obere Zeile die Identität ergibt. Sei $\bar{\varphi} \in \mathcal{D}(G/N)$. Wir können ein $K \in \Omega(G)$ finden mit $e_K * \bar{\varphi} = \bar{\varphi}$. Dann wird $\bar{\varphi}$ unter dem ersten Isomorphismus auf $e_K \otimes \bar{\varphi}$ abgebildet und dann weiter auf

$$\begin{aligned}
c \int_{K_0} \lambda \overline{e_K} \otimes \varepsilon\big([e_K \lambda^{-1}] \otimes \bar{\varphi}\big)\, \mathrm{d}\lambda &= c \int_{K_0} \lambda \overline{e_K} \otimes (\chi^{-1} \cdot \lambda^{-1} e_K * \bar{\varphi})|M\, \mathrm{d}\lambda \\
&= c \int_{K_0} \lambda \overline{e_K} \otimes (\chi^{-1} \cdot \lambda^{-1} \bar{\varphi})|M\, \mathrm{d}\lambda \in \mathcal{D}(G/N) \otimes_M \mathcal{D}(M).
\end{aligned}$$

Wir haben hier $\lambda^{-1} e_K = e_K \lambda^{-1}$ benutzt. Wenn $h \in \mathcal{D}(G/N)$ das Bild von $\bar{\varphi}$ unter dieser Komposition von Morphismen bezeichnet, dann erhalten wir dafür

$$\begin{aligned}
h(g/N) &= c \int_M \int_{K_0} \overline{e_K}(\lambda^{-1} g m^{-1}/N)\, \bar{\varphi}(\lambda m/N)\, \mathrm{d}\lambda\, \mathrm{d}m \\
&= c \int_M \int_{K_0} \overline{e_K}(\lambda g m/N)\, \bar{\varphi}(\lambda^{-1} m^{-1}/N)\, \mathrm{d}\lambda\, \mathrm{d}m \\
&= c \int_M \int_N \int_{K_0} e_K(g m n \lambda)\, \bar{\varphi}\big((m n \lambda)^{-1}/N\big)\, \mathrm{d}\lambda\, \mathrm{d}n\, \mathrm{d}m \\
&= \int_G e_K(gx)\, \bar{\varphi}(x^{-1}/N)\, \mathrm{d}x = \int_G e_K(x)\, \bar{\varphi}(x^{-1}g/N)\, \mathrm{d}x = \bar{\varphi}(g/N).
\end{aligned}$$

Hier sind einige Bemerkungen angebracht: Wie der Beweis von Lemma 1.7.17 zeigt, verschwindet die Konstante c gerade, wenn wir mit dem Dreifachintegral ein Haarmaß auf G erklären. Der Charakter χ verschwindet, weil wir es ja mit $\mathcal{D}(G/N)\cdot\chi$ zu tun haben.

Betrachten wir nun

$$\begin{tikzcd}
N\backslash\mathcal{D}(G) \arrow[rr, dashed] \arrow[d, "\sim"'] & & N\backslash\mathcal{D}(G)\otimes_G \mathcal{D}(G/N)\otimes_M N\backslash\mathcal{D}(G) \arrow[rr, dashed] \arrow[d, "\varepsilon\otimes 1"] & & N\backslash\mathcal{D}(G) \\
N\backslash\mathcal{D}(G)\otimes_G \mathcal{D}(G) \arrow[urr, "1\otimes\eta"'] & & \mathcal{D}(M)\otimes_M N\backslash\mathcal{D}(G). \arrow[urr, "\sim"'] & &
\end{tikzcd}$$

Wir geben uns $[\varphi]\in N\backslash\mathcal{D}(G)$ vor. Wenn $e_K*\varphi*e_K=\varphi$, so ein $K\in\Omega(G)$ können wir immer finden, dann wird $[\varphi]$ abgebildet auf

$$c\int_{K_0}\varepsilon\big([\varphi]\otimes\overline{e_K}\cdot\lambda\big)\otimes[e_K]\cdot\lambda^{-1}\,\mathrm{d}\lambda = c\int_{K_0}\big(\chi^{-1}\cdot\varphi*(\overline{e_K}\cdot\lambda)\big)|M\otimes[e_K]\cdot\lambda^{-1}\,\mathrm{d}\lambda,$$

und das geht nun weiter auf

$$\begin{aligned}
&c\int_M\int_{K_0}\big(\chi^{-1}\cdot\varphi*(\overline{e_K}\cdot\lambda^{-1})\big)(m)\,\chi(m)\,(m\lambda)\cdot[e_K]\,\mathrm{d}\lambda\\
&= c\int_G\int_M\int_N\int_{K_0}\varphi(g)\,e_K(g^{-1}mn\lambda)\,[(mn\lambda)\cdot e_K]\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}n\,\mathrm{d}m\,\mathrm{d}g\\
&= \int_G\int_G\varphi(g)\,e_K(g^{-1}h)\,[h\cdot e_K]\,\mathrm{d}g\,\mathrm{d}h = \int_G\int_G\varphi(hg)\,e_K(g)\,[h\cdot e_K]\,\mathrm{d}g\,\mathrm{d}h\\
&= \Big[\int_G\varphi(g)\,g\cdot e_K\,\mathrm{d}g\Big] = [\varphi*e_K] = [\varphi]. \qquad\square
\end{aligned}$$

4.2.5 Eigenschaften von Restriktion und Induktion

Man hat aufgrund der bisherigen Betrachtungen die folgende (wohlbekannte) Situation: $(\mathcal{R},\mathcal{I})$ ist ein adjungiertes Paar von Funktoren, aber auch $(\mathcal{I},\mathcal{R}')$ ist eines, wenn man

$$\mathcal{R}' := B\operatorname{Hom}_A(X,-)\colon\ {}_A\mathfrak{M}\longrightarrow{}_B\mathfrak{M}$$

betrachtet. Dies folgt aus der Hom-Tensor-Adjunktion 2.1.16. Also gibt es zu $\mathcal{I}$ sowohl einen links- als auch einen rechtsadjungierten Funktor. Wir wollen in diesem Abschnitt einige ebenfalls bekannte Eigenschaften von $\mathcal{R}$ und $\mathcal{I}$ zusammenstellen (siehe etwa Vignéras [58, II.2]), verwenden aber die Modulsprache.

Lemma 4.2.7.

(1) Sei $K \in \Omega(G)$ und $e = e_K$. Dann sind

$$Ye = N\backslash\mathcal{D}(G) * e \in {}_B\mathfrak{M} \quad \text{und} \quad eX = e * \mathcal{D}(G/N) \in \mathfrak{M}_B$$

endlich erzeugt.

(2) Für alle $e \in \mathrm{Id}(B)$ ist Xe als Element von ${}_A\mathfrak{M}$ endlich erzeugt.

Beweis. (1) Zunächst besteht $\mathcal{D}(G) * e_K$ aus den $\varphi \in \mathcal{D}(G)$, die rechtsinvariant unter K sind. Sei Γ ein Repräsentantensystem von $P\backslash G/K$. Dann ist Γ endlich, und

$$\{[e_{gK}] \mid g \in \Gamma\}$$

ist ein Erzeugendensystem von $N\backslash\mathcal{D}(G) * e_K$ als B-Modul. In der Tat, wir können ja jedes $\varphi \in \mathcal{D}(G) * e_K$ in der Form

$$\varphi = \sum_{g \in G/K} \varphi(g)\, \mathbb{1}_{gK}$$

schreiben, und in jeder Bahn $M \cdot [\mathbb{1}_{gK}]$ liegt ein $\mathbb{1}_{gK}$ mit $g \in \Gamma$. Für eX ergibt es sich ganz analog. □

Proposition 4.2.8.

(1) $\mathcal{I}$ erhält alle Limites und Kolimites.

(2) $\mathcal{R}$ erhält alle Kolimites.

(3) $\mathcal{I}$ und $\mathcal{R}$ sind exakt.

(4) $\mathcal{I}$ ist treu.

(5) $\mathcal{I}$ erhält injektive Moduln; $\mathcal{R}$ erhält projektive Moduln.

(6) $\mathcal{R}$ und $\mathcal{I}$ sind transitiv in folgendem Sinne: Sind $P = MN$ und $Q = LU$ parabolische Untergruppen mit $Q \subseteq P \subseteq G$, dann gilt

$$\mathcal{R}_L^M \mathcal{R}_M^G \cong \mathcal{R}_L^G, \quad \mathcal{I}_M^G \mathcal{I}_L^M \cong \mathcal{I}_L^G.$$

Diese beiden Aussagen sind äquivalent.

(7) $\mathcal{R}$ erhält endlich erzeugte Moduln, $\mathcal{I}$ zulässige Moduln.

Beweis. (1–3) Das folgt daraus, daß $(\mathcal{R}, \mathcal{I})$ und $(\mathcal{I}, \mathcal{R}')$ zwei adjungierte Paare sind. Nur daß $\mathcal{R}$ linksexakt ist, bleibt zu zeigen: Sei $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(V, W)$ injektiv. Es genügt zu zeigen, daß $[\varphi(v)] = 0$ in $N\backslash W$ nur gilt, wenn $v = 0$. Aus Lemma 2.4.5 folgt: $[\varphi(v)] = 0$ dann und nur dann, wenn $e_{K_N} * \varphi(v) = 0$ für ein $K_N \in \Omega(N)$. Aber es gilt $e_{K_N} * \varphi(v) = \varphi(e_{K_N} * v)$. Das impliziert $e_{K_N} * v = 0$, weil φ injektiv ist, und das ist nach demselben Lemma äquivalent zu $[v] = 0$ in $N\backslash V$.

(4) Aufgrund der Adjungiertheit $(\mathcal{R}, \mathcal{I})$ und Lemma 4.1.4 genügt es zu zeigen, daß $\varepsilon\colon N\backslash\mathcal{D}(G/N) \otimes_M W \longrightarrow \mathcal{D}(M)$ surjektiv ist. Nun ist $\varepsilon[\overline{e_K}] = \mathrm{vol}(K_{\bar N})^{-1} \cdot e_{K_M}$, und weil es zu jedem $w \in W$ ein K mit $e_{K_M} * w = w$ gibt, so ist klar, daß die angeschriebene Abbildung surjektiv ist.

(5) folgt aus (3).

(6) Wegen der Adjungiertheit und der Eindeutigkeit (bis auf Isomorphie) eines adjungierten Funktors ergibt sich die Transitivität von $\mathcal{I}$ aus der von $\mathcal{R}$ und umgekehrt. Es genügt, die Aussage für $\mathcal{R}$ zu zeigen. Nach Lemma 2.4.6 hat man in der vorliegenden Situation

$$\begin{array}{lll} L \subseteq M, & N \subseteq U, & \delta_Q = \delta_P \delta_{M\cap Q}, \\ U = (M \cap U)N, & Q = (M \cap Q)N, & M \cap Q = L(M \cap U). \end{array}$$

Dabei ist $M \cap Q$ eine parabolische Untergruppe von M mit der angegebenen Levizerlegung. Manipulationen von Bimoduln führen dann auf

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_L^M \mathcal{R}_M^G(V) &= \delta_{M\cap Q}^{1/2} \cdot (M \cap U)\backslash\mathcal{D}(M) \otimes_M \delta_P^{1/2} \cdot N\backslash\mathcal{D}(G) \otimes_G V \\ &= \delta_{M\cap Q}^{1/2} \cdot \delta_P^{1/2} \cdot \big((M \cap U)N\big)\backslash\mathcal{D}(G) \otimes_G V \\ &= \delta_Q^{1/2} \cdot U\backslash\mathcal{D}(G) \otimes_G V = \mathcal{R}_L^G(V). \end{aligned}$$

(7) Sei $V \in {}_A\mathfrak{M}$ endlich erzeugt. Dann gibt es einen Epimorphismus

$$(Ae)^{\oplus n} \xrightarrow{\varphi} V \longrightarrow 0.$$

Weil $\mathcal{R}$ exakt ist und die endlichen Biprodukte erhält, so ist auch

$$(Ye)^{\oplus n} \xrightarrow{\mathcal{R}(\varphi)} \mathcal{R}(V) \longrightarrow 0$$

exakt, und da Ye endlich erzeugt ist (4.2.7), folgt die Behauptung.

Sei nun $W \in {}_B\mathfrak{M}$ zulässig, d. h., eW ist für alle $e \in \mathrm{Id}(B)$ ein endlich erzeugter R-Modul. Sei $f \in \mathrm{Id}(A)$. Dann ist fX ein endlich erzeugter B-Rechtsmodul. Sei

$$\textstyle\bigoplus_{i=1}^n eB \xrightarrow{\psi} fX \longrightarrow 0$$

ein Epimorphismus in $\mathfrak{M}_B$. Das ist insbesondere auch ein R-Epimorphismus. Der Funktor $-\otimes_B W$ ist rechtsexakt, so daß man eine exakte Sequenz

$$\bigoplus_{i=1}^n eW \xrightarrow{\mathcal{I}(\psi)} fX \otimes_B W \longrightarrow 0$$

erhält. Das zeigt aber, daß $fX \otimes_B W$ ein endlich erzeugter R-Modul und $\mathcal{I}(W)$ somit in ${}_A\mathfrak{M}$ zulässig ist, wenn W es in ${}_B\mathfrak{M}$ ist. □

Bemerkung 4.2.9. Mit Hilfe tieferliegender Eigenschaften von reduktiven $\mathfrak{p}$-adischen Gruppen zeigt man, daß $\mathcal{R}$ zulässige und $\mathcal{I}$ endlich erzeugte Moduln erhält. Das erste folgt aus dem Jacquetschen Lemma für zulässige Moduln, das zweite aus der Bernsteinzerlegung, die u. a. zur Folge hat, daß ${}_A\mathfrak{M}$ noethersch ist, siehe [48, VI.7.5].

4.3 Die erste Zerlegung der Kategorie ${}_A\mathfrak{M}$

Wir betrachten den R-Modul

$$B := \bigoplus_{M<G} \mathcal{D}(M).$$

Diese direkte Summe ist endlich, und indem wir die Multiplikation komponentenweise definieren, wird B eine assoziative R-Algebra mit genügend Idempotenten. Ein (glatter) B-Linksmodul ist ein R-Modul W, der von der Form

$$W = \bigoplus_{M<G} W_M$$

ist, wobei W_M jeweils ein $\mathcal{D}(M)$-Linksmodul ist. Ein Morphismus

$$f\colon W_1 \to W_2$$

zwischen zwei B-Linksmoduln ist von der Form $f = (f_M)$, wobei

$$f_M\colon W_{1,M} \to W_{2,M}$$

jeweils ein Morphismus von $\mathcal{D}(M)$-Linksmoduln zwischen den Komponenten ist. Auf diese Weise entsteht die abelsche Kategorie ${}_B\mathfrak{M}$ und entsprechend $\mathfrak{M}_B$. Wie üblich definiert man Kategorien von Bimoduln.

Lemma 4.3.1. Sei $V \in \mathfrak{M}_B$ und $W \in {}_B\mathfrak{M}$. Dann gilt

$$V \otimes_B W = \bigoplus_{M<G} V_M \otimes_M W_M.$$

Beweis. Schreiben wir die Elemente von V und W als Summen der Komponenten. Sei $v \in V$ und $w \in W$. Die Behauptung folgt aus der Beobachtung, daß $v_M \otimes w_L = 0$ für $M \neq L$ in $V \otimes_B W$ gilt. In der Tat, sei e_M ein idempotentes Element von $\mathcal{D}(M)$ mit $v_M e_M = v_M$ in V_M. Als Element von V hat e_M Nullen in allen anderen Komponenten, und in $V \otimes_B W$ gilt $v_M \otimes w_L = v_M e_M \otimes w_L = v_M \otimes e_M w_L = 0$. □

Die Bimoduln, die wir nun betrachten, sind die folgenden:

$$Y \coloneqq \bigoplus_{M<G} N\backslash\mathcal{D}(G), \quad \bar{Y} \coloneqq \bigoplus_{M<G} \bar{N}\backslash\mathcal{D}(G), \quad X \coloneqq \bigoplus_{M<G} \mathcal{D}(G)/N.$$

Sei wie immer $A = \mathcal{D}(G)$. Es ist dann $Y, \bar{Y} \in {}_B\mathfrak{M}_A$ sowie $X \in {}_A\mathfrak{M}_B$, und diese Bimoduln haben die folgende Interpretation:

- $\mathcal{I} \coloneqq X \otimes_B -$ steht für die gemeinsame parabolische Induktion eines Tupels $(W_M)_{M<G}$, wobei W_M ein $\mathcal{D}(M)$-Modul ist.
- $\mathcal{R} \coloneqq Y \otimes_A -$ und $\bar{\mathcal{R}} \coloneqq \bar{Y} \otimes_A -$ stehen für die gleichzeitige parabolische Restriktion bzgl. aller echten standardparabolischen Untergruppen von G bzgl. P_0 bzw. $\bar{P}_0$.

Proposition 4.3.2. $(\mathcal{R}, \mathcal{I})$ *ist ein adjungiertes Paar von Funktoren.*

Beweis. Das ist klar, weil die direkten Summen endlich sind. □

Die Eins dieser Adjunktion wird von dem Morphismus

$$\eta\colon \mathcal{D}(G) \longrightarrow D \coloneqq \bigoplus_{M<G} \mathcal{D}(G)/N \otimes_M N\backslash\mathcal{D}(G), \quad \varphi \longmapsto \sum_{M<G} \eta_M(\varphi).$$

die Koeins von dem Morphismus

$$\varepsilon\colon C \coloneqq \bigoplus_{L,M<G} U\backslash\mathcal{D}(G)/N \longrightarrow B = \bigoplus_{L<G} \mathcal{D}(L), \quad \sum_{L,M<G} [\varphi_{L,M}] \longmapsto \sum_{L<G} \varepsilon_L[\varphi_{L,L}].$$

Aus Proposition 4.1.6 folgt nun:

- (C, Δ, ε) ist eine koassoziative Koalgebra mit Koeins ε und Komultiplikation $\Delta = Y \otimes \eta \otimes X$. Die Koalgebra C beschreibt alle möglichen Funktoren $\mathcal{R}_L\mathcal{I}_M$.
- (D, ∇, η) ist eine assoziative Algebra mit Eins η und $\nabla = X \otimes \varepsilon \otimes Y$.
- $X \in {}_D\mathfrak{M}_B$ und $X \in {}_A\mathfrak{M}^C$ sowie $Y \in {}^C\mathfrak{M}_A$ und $Y \in {}_B\mathfrak{M}_D$.

Ohne weiteres erhält man:

Proposition 4.3.3.

(1) $\mathcal{R} = Y \otimes_A -$ *läßt sich als Funktor* ${}_A\mathfrak{M} \to {}^C\mathfrak{M}$ *auffassen, und* $\mathcal{S} := X \boxtimes_C -$ *ist dazu rechtsadjungiert.*

(2) $\mathcal{R}$ *ist exakt, und* $\mathcal{S}$ *ist linksexakt.*

(3) Y_A *und* X_B *sind flach.*

(4) $\mathcal{S}$ *ist volltreu, insbesondere bis auf Isomorphie eindeutig auf den Objekten. Äquivalent dazu ist* $\varepsilon\colon \mathcal{RS} \to 1$ *ein natürlicher Isomorphismus.*

(5) $V \in {}_A\mathfrak{M}$ *ist genau dann kuspidal, wenn* $\mathcal{R}(V) = 0$*.* □

Aufgrund der Proposition wissen wir, daß sich ${}^C\mathfrak{M}$ als volle Unterkategorie von ${}_A\mathfrak{M}$ auffassen läßt. Wir wollen zeigen, daß sogar eine kategorielle Produktzerlegung ${}_A\mathfrak{M} = {}^C\mathfrak{M} \times {}_A\mathfrak{M}^{\mathrm{c}}$ vorliegt:

Satz 4.3.4.

(1) Sei $\eta\colon 1 \to \mathcal{SR}$ *die Eins der Adjunktion* $(\mathcal{R}, \mathcal{S})$*. Der Untermodul* $\ker \eta_V \subseteq V$ *ist dann der kuspidale Anteil von* V *(s. 3.0.3).*

Sei R *ein Körper, dessen Charakteristik nicht die Proordnung von* G *teilt, so daß die Voraussetzungen von Satz 3.9.6 erfüllt sind. Sei* ${}^C\mathfrak{M}$ *mit Hilfe des volltreuen Funktors* $\mathcal{S}$ *als volle Unterkategorie in* ${}_A\mathfrak{M}$ *eingebettet. Dann gilt:*

(2) Die vollen Unterkategorien ${}^C\mathfrak{M}$ *und* ${}_A\mathfrak{M}^{\mathrm{c}}$ *von* ${}_A\mathfrak{M}$ *sind orthogonal.*

(3) Es gilt die kategorielle Zerlegung ${}_A\mathfrak{M} = {}^C\mathfrak{M} \times {}_A\mathfrak{M}^{\mathrm{c}}$*.*

(4) ${}^C\mathfrak{M}$ *besteht aus den A-Moduln, die keine nicht-trivialen kuspidalen Unterquotienten haben.*

Beweis. Sei $V \in {}_A\mathfrak{M}$ beliebig und V^{c} der kuspidale Anteil. Dann erhält man zunächst aufgrund der Adjunktion $(\mathcal{R}, \mathcal{S})$ das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{R}(V) \arrow[r, "\mathcal{R}(\eta_V)"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & \mathcal{RSR}(V) \arrow[d, "\varepsilon_{\mathcal{R}(V)}", "\sim"'] \\ & \mathcal{R}(V), \end{tikzcd}$$

wobei $\varepsilon_{\mathcal{R}(V)}$ nach Prop. 4.3.3 ein Isomorphismus ist. Daraus folgt, daß $\mathcal{R}(\eta_V)$ ebenfalls ein Isomorphismus ist. Weil $\mathcal{R}$ exakt ist, erhält man weiter die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{R}(\ker \eta_V) \longrightarrow \mathcal{R}(V) \xrightarrow[\sim]{\mathcal{R}(\eta_V)} \mathcal{RSR}(V) \longrightarrow \mathcal{R}(\operatorname{coker} \eta_V) \longrightarrow 0,$$

aus der $\mathcal{R}(\ker \eta_V) = 0 = \mathcal{R}(\operatorname{coker} \eta_V)$ folgt. Also sind $\ker \eta_V$ und $\operatorname{coker} \eta_V$ für alle V kuspidal.

(1) Daß $\ker \eta_V$ kuspidal ist, bedeutet $\eta_V \subseteq V^{\mathrm{c}}$. Aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \ker \eta_V \arrow[r, "\subseteq"] & V \arrow[r, "\eta_V"] & \mathcal{SR}(V) \\
& & V^{\mathrm{c}} \arrow[u, "\subseteq"] \arrow[r, "\eta_{V^{\mathrm{c}}}"] \arrow[ul, dashed, "\varphi"] & 0 \arrow[u, "\subseteq"]
\end{tikzcd}$$

folgt aufgrund der universellen Eigenschaft des Kerns, daß es einen eindeutig bestimmten Morphismus φ gibt, der das Diagramm kommutativ erweitert. Dieser ist injektiv, das heißt $V^{\mathrm{c}} \subseteq \ker \eta_V$, also $V^{\mathrm{c}} = \ker \eta_V$.

(2) Sei $V \in {}_A\mathfrak{M}^{\mathrm{c}}$ und $W \in {}^C\mathfrak{M}$. Wegen

$$\operatorname{Hom}_A(V, X \boxtimes_C W) = \operatorname{Hom}_C(Y \otimes_A V, W) = 0$$

ist klar, daß es keine nicht-trivialen Morphismen $V \to X \boxtimes_C W$ geben kann. Sei umgekehrt $\varphi \in \operatorname{Hom}_A(X \boxtimes_C W, V)$. Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X \boxtimes_C W \arrow[r, two heads, "\varphi"] & \operatorname{Bild}(\varphi) \arrow[r, tail, "\subseteq"] & V \\
& P. \arrow[u, two heads, "\pi"'] \arrow[ul, dashed, "\exists\tilde{\pi}"] &
\end{tikzcd}$$

Zur Erläuterung: Der Morphismus φ wurde, wie üblich in abelschen Kategorien, aufspalten, und $\operatorname{Bild}(\varphi)$ ist nach Prop. 3.0.3 kuspidal. Gilt Satz 3.9.6, dann gibt es, wie eingezeichnet, einen projektiven kuspidalen Modul P und einen Epimorphismus π, der von φ faktorisiert wird, weil P projektiv ist. Aber der Morphismus $\tilde{\pi}$ muß Null sein, weil P kuspidal ist. Daraus folgt $\pi = 0$, somit $\operatorname{Bild}(\varphi) = 0$, somit $\varphi = 0$.

(3) Wir zeigen, daß η_V einen Schnitt besitzt: Weil $\operatorname{coker} \eta_V$ kuspidal ist, gibt es einen projektiven kuspidalen Modul P und einen Epimorphismus $f\colon P \to \operatorname{coker} \eta_V$, der, weil P projektiv ist, von dem kanonischen Epimorphismus $\pi\colon \mathcal{SR}(V) \to \operatorname{coker} \eta_V$ faktorisiert wird:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{SR}(V) \arrow[r, "\pi"] & \operatorname{coker} \eta_V \arrow[r] & 0 \\
& P. \arrow[u, two heads, "f"'] \arrow[ul, dashed, "\exists\tilde{f}"] &
\end{tikzcd}$$

Wegen $\operatorname{Hom}_A(P, \mathcal{SR}(V)) \cong \operatorname{Hom}_C(\mathcal{R}(P), \mathcal{R}(V)) = 0$ ist $\tilde{f} = 0$ und somit $\operatorname{coker} \eta_V = 0$, so daß η_V selbst ein Epimorphismus ist.

Da $\ker \eta_V$ kuspidal ist, gibt es einen Monomorphismus $g\colon \ker \eta_V \to I$ in einen injektiven kuspidalen Modul I, der von dem kanonischen Monomorphismus $\iota\colon \ker \eta_V \to V$ faktorisiert wird. Man erhält das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} & & I & & \\ 0 \arrow[r] & \ker \eta_V \arrow[ur, tail, "g"] \arrow[r, "\iota"] & V \arrow[u, dashed, tail, "\exists h"] \arrow[r, "\eta"] & \mathcal{SR}(V) \arrow[r] & 0 \\ & & \ker h \arrow[u, tail, "j"] \arrow[r, "\eta"] & \mathcal{SR}(\ker h) \arrow[u, "\mathcal{SR}(j)", "\sim"'] \arrow[r] & 0. \end{tikzcd} \tag{4.15}$$

Da I kuspidal ist, muß, weil $\mathcal{R}$ als exakter Funktor Kerne erhält, $\mathcal{R}(j)$ und somit auch $\mathcal{SR}(j)$ ein Isomorphismus sein. Daraus folgt, daß

$$\varphi := \eta \circ j = \mathcal{SR}(j) \circ \eta$$

ein Epimorphismus ist. Aber es handelt sich sogar ebenfalls um einen Isomorphismus, da $\ker h \cap \ker \eta_V = \{0\}$. Daraus folgt $V = \ker \eta_V \oplus \ker h$, wobei $\ker h \cong \mathcal{SR}(V)$.

(4) Sei $W \in {}^C\mathfrak{M}$. Alle A-Untermoduln von $X \boxtimes_C W$ sind nach dem Vorhergehenden C-Unterkomoduln, und daraus folgt, daß es keine nicht-trivialen kuspidalen Unterquotienten von $X \boxtimes_C W$ geben kann. Umgekehrt ist der kuspidale Anteil V^{c} eines $V \in {}_A\mathfrak{M}$ ein kuspidaler Unterquotient. Hat V keinen nicht-trivialen, muß folglich $V^{\mathrm{c}} = 0$ und somit $V \in {}^C\mathfrak{M}$ sein. □

Bemerkung 4.3.5. Wir sind hiermit auf etwas anderem Wege zu der Zerlegung der Kategorie ${}_A\mathfrak{M}$ in kuspidalen und nicht-kuspidalen Teil gelangt und haben nun die Aussage gewonnen, daß der nicht-kuspidale Teil von der Kategorie der C-Komoduln beschrieben wird.

Lemma 4.3.6. Sei $V \in {}_A\mathfrak{M}$ rein nicht-kuspidal. Dann ist

$$\eta_V : V \longrightarrow \mathcal{IR}(V) = \bigoplus_{M<G} \underbrace{\mathcal{D}(G/N) \otimes_M N\backslash\mathcal{D}(G) \otimes_G V}_{=\mathcal{I}_M\mathcal{R}_M(V)}$$

ein Monomorphismus.

Beweis. Eingeschränkt auf die volle Unterkategorie der rein nicht-kuspidalen Moduln, ist $\mathcal{R}$ treu, so daß die Behauptung aus Lemma 4.1.4 folgt. □

5. DOPPELNEBENKLASSEN PARAB. UNTERGRUPPEN

Sei G eine reduktive $\mathfrak{p}$-adische Gruppe und S ein maximaler k-zerfallender k-Torus, weiter $P_0 = M_0 N_0$ die minimale parabolische Untergruppe mit $M_0 = \mathcal{Z}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S})(k)$ und $\mathcal{W} = \mathcal{W}_G = \mathcal{N}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S})(k)/\mathcal{Z}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S})(k)$ die (relative) Weylgruppe von G.

5.1 *Coxetergruppen*

Wir verweisen, was Coxetergruppen anbetrifft, auf das Buch von Björner und Brenti [11]. Wir stellen hier einiges Grundlegende zusammen. Ein *Coxetersystem* ist ein Paar $(\mathcal{W}, \Sigma)$, bestehend aus einer Gruppe $\mathcal{W}$ mit einem System $\Sigma \subseteq \mathcal{W}$ von Erzeugern, die Relationen der Form

$$(st)^{m(s,t)} = 1, \quad m(s,t) \in \{1, 2, 3, \ldots\} \cup \{\infty\}$$

unterworfen sind, wobei die folgenden Axiome gelten:

(1) $s^2 = 1$ für alle $s \in \Sigma$, d. h. $m(s,s) = 1$.

(2) $m(s,t) = m(t,s) \geq 2$ für $s \neq t$.

(3) $m(s,t) = \infty$, wenn s und t keiner Relation unterworfen ist.

Die Gruppe $\mathcal{W}$ selbst heißt in diesem Kontext *Coxetergruppe*; die Elemente von Σ heißen *einfache Spiegelungen*, die Konjugate

$$\Sigma' := \{wsw^{-1} \mid w \in \mathcal{W}, s \in \Sigma\}$$

Spiegelungen. Eine Darstellung $w = s_1 s_2 \cdots s_n$ eines Elements $w \in \mathcal{W}$ durch Erzeuger $s_i \in \Sigma$ nennen wir ein *Wort* für w. Ein Wort minimaler Länge heißt *reduziertes Wort*. Diese minimale Länge ist wohlbestimmt und definiert die Längenfunktion $\ell \colon W \to \mathbb{N}^*$. Man setzt $\ell(1) = 0$.

Proposition 5.1.1 ([11, I.4.2]). *Die Längenfunktion ℓ hat folgende Eigenschaften:*

(1) $\ell(sw) = \ell(w) \pm 1$ für alle $s \in \Sigma$.

(2) $\ell(w^{-1}) = \ell(w)$.

(3) $|\ell(w) - \ell(z)| \leq \ell(wz) \leq \ell(w) + \ell(z)$.

(4) $d(w, z) := \ell(wz^{-1})$ *ist eine Metrik auf* $\mathcal{W}$. □

Definition 5.1.2. Schreibe $w \to z$ für $w, z \in \mathcal{W}$, wenn $tw = z$ mit $t \in \Sigma'$ und $\ell(w) \leq \ell(z)$. Die *(starke) Bruhatordnung* ist diejenige Halbordnung auf $\mathcal{W}$, die folgendermaßen definiert ist: $w \leq z$ dann und nur dann, wenn es eine Kette $w = w_0 \to w_1 \to \ldots \to w_n = z$ gibt. Der *Bruhatgraph* ist der gerichtete Graph mit den Elementen von $\mathcal{W}$ als Ecken und den Relationen $w \to z$ als Kanten.

Proposition 5.1.3. *Seien* $w, z \in \mathcal{W}$.

(1) Sei $w = s_1 \cdots s_n$ *ein reduziertes Wort für* w. *Es gilt* $z \leq w$ *dann und nur dann, wenn* z *durch Wegstreichen einiger der* s_i *aus* w *entsteht, das heißt, wenn* $z = s_{i_1} \cdots s_{i_r}$ *mit gewissen* $1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n$.

(2) »Streichungseigenschaft«: Sei $w = s_1 \cdots s_n$ *irgendein Wort für* w. *Gilt* $\ell(w) < n$, *so erhält man aus* $s_1 \cdots s_n$ *durch Wegstreichen einiger Buchstaben ein reduziertes Wort für* w.

(3) »Hochhebungseigenschaft«: Sei $z < w$ *und* $s \in \Sigma$ *mit* $z < sz$ *und* $sw < w$. *Dann gilt* $sz \leq w$ *und* $z \leq sw$.

Beweis. (1) [11, Th. 2.2.2], (2) [11, Prop. 1.4.7], (3) [11, Th. 2.2.7]. □

Wenn $\mathcal{W}$ endlich ist, und dies ist der einzige Fall, den wir betrachten, dann gibt es ein eindeutiges Element maximaler Länge w_0.

Proposition 5.1.4 ([11, Abschn. 2.3])**.** *Das Element* w_0 *hat die folgenden Eigenschaften:*

(1) $w_0^2 = 1$.

(2) $\ell(ww_0) = \ell(w_0) - \ell(w)$ *für alle* $w \in \mathcal{W}$.

(3) $w \mapsto w_0 w$ *und* $w \mapsto ww_0$ *sind ordnungsumkehrende Automorphismen von* $\mathcal{W}$.

(4) $w \mapsto w_0 w w_0$ *ist ein ordnungserhaltender Automorphismus von* $\mathcal{W}$. □

Sei nun $\Phi = \Phi(G, S)$ das relative Wurzelsystem des Paares (G, S). Dieses ist ein abstraktes (im allgemeinen nicht reduziertes) Wurzelsystem in dem reellen Vektorraum $V = \langle\Phi\rangle \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, und die Weylgruppe $\mathcal{W}$ ist kanonisch isomorph zur Weylgruppe des Wurzelsystems Φ, weil $\mathcal{W}$ treu auf S operiert. Man versieht V mit einem $\mathcal{W}$-invarianten Skalarprodukt. Sei Δ die zu P_0 korrespondierende Basis von Φ.

Proposition 5.1.5 ([43, C.10]). *Die Weylgruppe $\mathcal{W}$, aufgefaßt als Weylgruppe des Wurzelsystems Φ, wird von den orthogonalen Reflexionen σ_α mit $\alpha \in \Delta$ erzeugt, und diese Erzeuger unterliegen einzig den Relationen*

$$(\sigma_\alpha \sigma_\beta)^{m(\alpha,\beta)} = 1,$$

wobei $m(\alpha, \beta)$ die Ordnung von $\sigma_\alpha\sigma_\beta$ in $\mathcal{W}$ ist. Folglich ist $\mathcal{W}$ zusammen mit dem Erzeugendensystem $\Sigma := \{\sigma_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$ eine Coxetergruppe. □

5.2 Zellzerlegung von G

5.2.1 Minimaler Fall

Offensichtlich zerfällt G disjunkt in (P_0, P_0)-Doppelnebenklassen. Das *Bruhatsche Lemma* besagt, daß diese von der (endlichen) Weylgruppe $\mathcal{W}_G$ indiziert werden:

Proposition 5.2.1 ([12, V.21]).

(1) Es gilt die (relative) Bruhatzerlegung $G = \dot{\bigcup}_{w \in \mathcal{W}_G} P_0 w P_0$.

(2) Der Morphismus $(N_0 \cap w\bar{N}_0 w^{-1}) \times P_0 \to P_0 w P_0$, $(x, y) \mapsto xwy$, ist ein k-Isomorphismus von Varietäten. □

Bemerkung 5.2.2. Bei gegebenem $w \in \mathcal{W}_G$ soll die (unpräzise) Schreibweise $P_0 w P_0$ bedeuten, daß man einen Repräsentanten $\dot{w} \in \mathcal{N}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S})(k) \subseteq G$ von w auswählt und $P_0 \dot{w} P_0$ bildet. Selbstverständlich erhält man für jeden Repräsentanten dieselbe Doppelnebenklasse.

Sei $\mathfrak{C}(w) := P_0 w P_0$ für $w \in \mathcal{W}_G$.

Proposition 5.2.3.

(1) Sei $w \in \mathcal{W}_G$ und $w = s_1 s_2 \cdots s_n$ ein reduziertes Wort. Dann gilt

$$\overline{\mathfrak{C}(w)} = \dot{\bigcup_{1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n}} P_0 s_{i_1} \cdots s_{i_r} P_0.$$

Der Abschluß versteht sich im Sinne der Zariskitopologie, stimmt jedoch mit dem Abschluß bzgl. der $\mathfrak{p}$-adischen Topologie überein.

(2) *Es gilt $w \leq z$ bzgl. der Bruhatordnung auf $\mathcal{W}_G$ genau dann, wenn $\mathfrak{C}(w) \subseteq \overline{\mathfrak{C}(z)}$ gilt.*

Beweis. (1) Siehe die Sätze 3.13 und 3.15 in [14]. (2) Sei $z = s_1 s_2 \cdots s_r$ ein reduziertes Wort. Dann ist $w \leq z$ äquivalent dazu, daß w aus z durch Wegstreichen einiger der s_i entsteht. Das zeigt $\mathfrak{C}(w) \subseteq \overline{\mathfrak{C}(z)}$, aber die Umkehrung ist dann ebenfalls klar. □

Infolge der Proposition kann man also schreiben:

$$\overline{\mathfrak{C}(w)} = \dot{\bigcup_{z \leq w}} \mathfrak{C}(z). \tag{5.1}$$

Proposition 5.2.4.

(1) *$\mathfrak{C}(w)$ ist genau dann offen, wenn $w = w_0$ ist.*

(2) *Sei $w_0, w_1, \ldots, w_n$ irgendeine Numerierung der Elemente von $\mathcal{W}_G$, welche die invertierte Bruhatordnung zu einer Totalordnung verfeinert, so daß w_0 das eindeutige längste und $w_n = 1$ das eindeutige kürzeste Element ist. Dann ist*

$$\mathfrak{C}(w_0) \subseteq \mathfrak{C}(w_0) \,\dot{\cup}\, \mathfrak{C}(w_1) \subseteq \cdots \subseteq \dot{\bigcup_{i=0}^{n}} \mathfrak{C}(w_i) = G$$

eine Filtrierung von G durch offen ineinanderliegende Teilmengen.

Beweis. (1) Aus den einleitenden Bemerkungen und daraus, daß w_0 das eindeutige Element maximaler Länge ist, ergibt sich

$$G = \overline{\mathfrak{C}(w_0)} = \dot{\bigcup_{z \leq w_0}} \mathfrak{C}(z), \quad \mathfrak{C}(w_0) = G \setminus \bigcup_{\ell(z) = \ell(w_0) - 1} \overline{\mathfrak{C}(z)}.$$

Das erste ist die Bruhatzerlegung. Die Vereinigungen sind endlich. Deswegen ist $\mathfrak{C}(w_0)$ sowohl in der Zariski-Topologie als auch in der $\mathfrak{p}$-adischen Topologie offen. Sei umgekehrt $\mathfrak{C}(w)$ offen. Weil G zusammenhängend ist (das heißt irreduzibel in der Zariskitopologie), gilt $\overline{\mathfrak{C}(w)} = G$. Dann muß w aber das eindeutige Element maximaler Länge sein, weil in der Charakterisierung (5.1) des Abschlusses sonst nicht alle Doppelnebenklassen vorkämen.

(2) Für alle $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ gilt

$$\left[G \setminus \overline{\mathfrak{C}(w_{k+1})}\right] \cap \dot{\bigcup_{i=0}^{k+1}} \mathfrak{C}(w_i) = \dot{\bigcup_{i=0}^{k}} \mathfrak{C}(w_i).$$

Das zeigt, daß diese Vereinigungen von Zellen offen ineinanderliegen und daß es auf die Totalordnung überhaupt nicht ankommt, solange sie nur die Bruhatordnung verfeinert. □

Sei $\mathfrak{C}'(w) := \bar{P}_0 w P_0$. Aus der Bruhatzerlegung folgt wegen $\bar{P}_0 = w_0 P_0 w_0$ leicht

$$G = \dot{\bigcup_{w \in W_G}} \mathfrak{C}'(w) = \dot{\bigcup_{w \in W_G}} \bar{P}_0 w P_0.$$

Da $\mathcal{W}_G \to \mathcal{W}_G$, $w \mapsto w_0 w$, eine ordnungsumkehrende Bijektion ist, ergibt sich ohne weiteres die

Folgerung 5.2.5.

(1) $\mathfrak{C}'(1) = \bar{P}_0 P_0$ ist offen in G, und $\mathfrak{C}'(w)$ ist nur dann offen, wenn $w = 1$ ist.

(2) Sei $w_0, w_1, \ldots, w_n$ eine Numerierung der Elemente von $\mathcal{W}_G$ wie in Proposition 5.2.4 (2). Dann ist

$$\mathfrak{C}'(w_n) \subseteq \mathfrak{C}'(w_n) \mathbin{\dot\cup} \mathfrak{C}'(w_{n-1}) \subseteq \cdots \subseteq \dot{\bigcup_{i=0}^{n}} \mathfrak{C}'(w_{n-i}) = G$$

eine Filtrierung von G durch offen ineinanderliegende Teilmengen.

Beweis. Beides folgt aus Proposition 5.2.4: (1) Wegen $\bar{P}_0 P_0 = w_0(P_0 w_0 P_0)$ ist $\mathfrak{C}'(1)$ das Bild einer offenen Menge unter einem Homöomorphismus, also offen. Ist $\mathfrak{C}'(w)$ offen, muß $P_0 w_0 w P_0$ offen sein, und das geht nur, wenn $w_0 w = w_0$, also $w = 1$ ist. (2) Wir setzen $w_i' := w_0 w_{n-i}$. Das definiert eine neue die inverse Bruhatordnung verfeinernde Totalordnung, und es gilt dann $\mathfrak{C}'(w_{n-i}) = w_0 \mathfrak{C}(w_i')$. Nun kann man die Proposition auf die $\mathfrak{C}(w_i')$ anwenden. □

5.2.2 Standardparabolische Untergruppen

Seien P und Q standardparabolische Untergruppen bzgl. P_0. Sei Δ die von P_0 definierte Basis des Wurzelsystems $\Phi(G, S)$ und $I, J \subseteq \Delta$ jene Teilmengen, für die $P = P_I$ und $Q = P_J$ ist. Seien $\mathcal{W}_I$ und $\mathcal{W}_J$ die von I und J erzeugten Untergruppen von $\mathcal{W} = \mathcal{W}_G$. Wir setzen $\mathfrak{X}(w) := PwQ$.

Definition 5.2.6. Für $u, v \in \mathcal{W}$ setzen wir $[u, v] := \{w \in \mathcal{W} \mid u \leq w \leq v\}$. Diese Mengen heißen *Bruhatintervalle.*

Proposition 5.2.7. *Jede Doppelnebenklasse $D(x) = \mathcal{W}_I x \mathcal{W}_J \subseteq \mathcal{W}$ hat ein eindeutiges Element kleinster und ein eindeutiges Element größter Länge. Es handelt sich bei $D(x)$ sogar um ein Bruhatintervall.*

Beweis. Da $\mathcal{W}$ eine endliche Gruppe ist, muß es in $D(x)$ ein Element minimaler (bzw. maximaler) Länge geben. Zu zeigen ist, daß dieses eindeutig bestimmt ist. Seien y und y' zwei Elemente in $D(x)$. Dann kann man

$$y' = wyz$$

mit $w \in \mathcal{W}_I$ und $z \in \mathcal{W}_J$ schreiben: falls $y = w_1 x z_1$ und $y' = w_2 x z_2$ mit $w_1, w_2 \in \mathcal{W}_I$ und $z_1, z_2 \in W_J$, so nehme man $w = w_2 w_1^{-1}$ und $z = z_1^{-1} z_2$, denn $\mathcal{W}_I$ und $\mathcal{W}_J$ sind ja Untergruppen von $\mathcal{W}$. Schreiben wir nun

$$y' = wyz = (w_1 w_2 \cdots w_r)(y_1 y_2 \cdots y_s)(z_1 z_2 \cdots z_t)$$

mit $w_i \in I$, $y_j \in \Delta$, $z_k \in J$ und reduzierten Wörtern für w, y, z. Wenn der Ausdruck rechts nicht schon reduziert ist, so erhält man daraus nach Prop. 5.1.3 (2) durch Wegstreichen einiger Buchstaben ein reduziertes Wort für y'. Wenn y' in $D(x) = D(y')$ minimale Länge hat, darf dieses reduzierte Wort aber nicht mit einem Buchstaben aus I beginnen oder einem aus J enden, so daß es ein Unterwort von $y_1 y_2 \cdots y_s$ sein muß. Wenn auch y von minimaler Länge ist, muß daher $y = y'$ gelten.

Sei nun y von maximaler Länge. Wir folgen Kobayashi [36, Prop. 23]: Es gilt zunächst $w_i y < y$ und $y z_j < y$ für alle Indizes, insbesondere $w_r y < y$. Aus der Hochhebungseigenschaft der Bruhatordnung, s. Prop. 5.1.3 (3), folgt $w_{r-1} w_r y \leq y$. Gleichheit kann aber nicht gelten, weil dann wegen $w_{r-1} w_r = 1$ das Wort für w nicht reduziert gewesen wäre, also hat man $w_{r-1} w_r y < y$ und per Induktion $wy < y$. Wegen $y z_1 < y$ führt eine erneute Anwendung der Hochhebungseigenschaft zu $wyz_1 \leq y$. Bei Gleichheit hat man $wyz_1 z_2 < y$; sonst erhält man durch erneute Anwendung $wyz_1 z_2 \leq y$ und induktiv $y' = wyz \leq y$. Wenn auch y' von maximaler Länge ist, geht das aber nur, wenn $y = y'$ ist. Man kann auch schließen, daß aus Symmetriegründen zugleich $y \leq y'$ gelten muß, woraus ebenfalls $y = y'$ folgt.

Man kann nun o. b. d. A. annehmen, daß x das minimale Element von $D(x)$ ist. Sei mit neuen Bezeichnungen

$$uxv \leq y \leq wxz, \quad u, w \in \mathcal{W}_I,\ y \in \mathcal{W},\ v, z \in \mathcal{W}_J,$$

und seien

$$w = w_1 \cdots w_r, \quad x = x_1 \cdots x_s, \quad z = z_1 \cdots z_t, \quad w_i \in I,\ x_j \in \Sigma,\ z_k \in J,$$

reduzierte Wörter. Durch Streichen einiger der Buchstaben erhalten wir wegen Prop. 5.1.3 ein reduziertes Wort für wxz. Daraus entsteht y wiederum durch Streichen einiger Buchstaben, also

$$y = (w_{i_1} \cdots w_{i_a})(x_{j_1} \cdots x_{j_b})(z_{k_1} \cdots z_{k_c}).$$

Daraus wiederum entsteht uxv durch Streichen weiterer Buchstaben, also

$$x = (u^{-1} w_{i_{a_1}} \cdots w_{i_{a_\alpha}})(x_{j_{b_1}} \cdots x_{j_{b_\beta}})(z_{k_{c_1}} \cdots z_{k_{c_\gamma}} v^{-1}).$$

Da das Element x das minimale von $D(x)$ ist, kann keines seiner Wörter mit einem Buchstaben aus I beginnen oder mit einem Buchstaben aus J enden. Da seine Länge zudem eindeutig bestimmt ist, muß $x_{j_{b_1}} \cdots x_{j_{b_\beta}} = x$ sein. Dann ist also $y = (w_{i_1} \cdots w_{i_a}) x (z_{k_1} \cdots z_{k_c}) \in D(x)$. □

Definition 5.2.8. Mit $\mathcal{W}_{I,J}^{\min}$ bezeichnen wir das System der Repräsentanten minimaler Länge von $\mathcal{W}_I \backslash \mathcal{W} / \mathcal{W}_J$, mit $\mathcal{W}_{I,J}^{\max}$ das System der Repräsentanten maximaler Länge.

Die Mengen $\mathcal{W}_{I,J}^{\min}$ und $\mathcal{W}_{I,J}^{\max}$ sind halbgeordnete Teilmengen von $\mathcal{W}$ unter der Bruhatordnung. Dadurch wird auch $\mathcal{W}_I \backslash \mathcal{W} / \mathcal{W}_J$ eine halbgeordnete Menge, und die Quotientenabbildung $\mathcal{W} \to \mathcal{W}_I \backslash \mathcal{W} / \mathcal{W}_J$ ist ordnungserhaltend.

Proposition 5.2.9. *Man hat die folgenden Zerlegungen:*

(1) $P = \dot{\bigcup}_{w \in \mathcal{W}_I} P_0 w P_0$ *und* $Q = \dot{\bigcup}_{w \in \mathcal{W}_J} P_0 w P_0$.

(2) $G = \dot{\bigcup}_{w \in \mathcal{W}_I \backslash \mathcal{W} / \mathcal{W}_J} P w Q$ *(verallgemeinerte Bruhatzerlegung).*

(3) $PzQ = \dot{\bigcup}_{w \in \mathcal{W}_I z \mathcal{W}_J} P_0 w P_0$.

Beweis. Siehe Borel-Tits [13, 5.17 und 5.20]. □

Proposition 5.2.10. *Sei $u_0, \ldots, u_n$ eine beliebige Verfeinerung der umgedrehten Bruhatordnung auf $\mathcal{W}_{I,J}^{\min}$, und seien $v_0, \ldots, v_n$ die zugehörigen Elemente in $\mathcal{W}_{I,J}^{\max}$.*

(1) *Sei $[u, v] \in \mathcal{W}_I \backslash \mathcal{W} / \mathcal{W}_J$ mit $u \in \mathcal{W}_{I,J}^{\min}$ und $v \in \mathcal{W}_{I,J}^{\max}$. Dann ist*

$$\overline{PxQ} = \overline{P_0 v P_0} = \dot{\bigcup_{\substack{w \in \mathcal{W} \\ w \leq v}}} P_0 w P_0, \quad x \in [u, v].$$

(2) *$\mathfrak{X}(u_0) = \mathfrak{X}(v_0)$ ist offen, und $\mathfrak{X}(u)$ ist nur dann offen, wenn $u \in \mathcal{W}_I u_0 \mathcal{W}_J$. Hierbei ist $\mathfrak{X}(w) = PwQ$.*

(3) Man erhält folgendermaßen eine Filtrierung offen ineinanderliegender Teilmengen:

$$\mathfrak{X}(u_0) \subseteq \mathfrak{X}(u_0) \mathbin{\dot\cup} \mathfrak{X}(u_1) \subseteq \cdots \subseteq \dot{\bigcup_{i=1}^{n}} \mathfrak{X}(u_i) = G.$$

Beweis. (1) Weil sich der Abschluß mit endlichen Vereinigungen verträgt, gilt

$$\overline{\mathfrak{X}(v)} = \bigcup_{u \leq w \leq v} \overline{\mathfrak{C}(w)} = \overline{\mathfrak{C}(v)}.$$

Wegen $v_0 = w_0$ folgt daraus (2) wie in 5.2.4. (3) Wir erhalten eine Zerlegung

$$\mathcal{W} = [u_n, v_n] \mathbin{\dot\cup} \ldots \mathbin{\dot\cup} [u_0, v_0]$$

von $\mathcal{W}$ in Bruhatintervalle, die eine Verfeinerung der Bruhatordnung auf $\mathcal{W}$ definiert. Somit folgt die Behauptung aus (5.2.4). □

Sei jetzt $\mathfrak{X}'(w) \coloneqq \bar{P}wQ$ $(w \in \mathcal{W})$ mit der P entgegengesetzten parabolischen Untergruppe.

Proposition 5.2.11.

(1) Es ergibt sich auch für die $\mathfrak{X}'(w)$ eine Bruhatzerlegung, nämlich

$$G = \dot{\bigcup_{w \in \mathcal{W}_I \backslash \mathcal{W} / \mathcal{W}_J}} \mathfrak{X}'(w) = \dot{\bigcup_{w \in \mathcal{W}_I \backslash \mathcal{W} / \mathcal{W}_J}} \bar{P}wQ.$$

(2) Seien $[u_0, v_0], \ldots, [u_n, v_n]$ wie in 5.2.10. Dann ist

$$\mathfrak{X}'(u_n) \subseteq \mathfrak{X}'(u_n) \mathbin{\dot\cup} \mathfrak{X}'(u_{n-1}) \subseteq \cdots \subseteq \dot{\bigcup_{i=1}^{n}} \mathfrak{X}'(u_{n-1}) = G$$

eine Filtrierung von G durch offen ineinanderliegende Mengen.

(3) $\mathfrak{X}'(w)$ ist dann und nur dann offen, wenn $w \in [u_n, v_n]$, wenn also $\mathfrak{X}'(w) = \bar{P}Q$.

Beweis. (1) Die Gruppe $w_0\bar{P}w_0$ enthält $P_0 = w_0\bar{P}_0w_0$ und ist daher standardparabolisch, und zwar zu $w_0Iw_0 \subseteq \Delta$. Die zugehörige Weylgruppe ist $w_0\mathcal{W}_Iw_0$. Man erhält daraus die verallgemeinerte Bruhatzerlegung

$$G = \dot{\bigcup_{w \in w_0\mathcal{W}_Iw_0 \backslash \mathcal{W} / \mathcal{W}_J}} \bar{P}w_0wQ.$$

Nun gilt es zu bemerken, daß

$$w_0\mathcal{W}_Iw_0 \backslash \mathcal{W} / \mathcal{W}_J \longrightarrow \mathcal{W}_I / \mathcal{W} / \mathcal{W}_J, \quad [x] \mapsto [w_0x],$$

eine (ordnungsumkehrende) Bijektion ist. Daraus folgt alles Weitere, weil die Bruhatintervalle der Doppelnebenklassen ineinander überführt werden. □

5.3 Die Multiplikation von Doppelnebenklassen

5.3.1 Minimale parabolische Untergruppen

Wir schreiben nun $B = MN$ für unsere minimale parabolische Untergruppe P_0. Wohlgemerkt handelt es sich im allgemeinen nicht um eine Boreluntergruppe. Sei $(\mathcal{W}, \Sigma)$ die Weylgruppe von G, aufgefaßt als Coxetersystem mit dem Erzeugendensystem Σ der einfachen Spiegelungen. Aus der Bruhatzerlegung folgt, daß G von P_0 und $\mathcal{N}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S})(k)$ erzeugt wird. Nach Borel-Tits [13, Prop. 5.16] gilt für $s \in \Sigma$ und $w \in \mathcal{W}$ des weiteren

$$wBs \subseteq BwB \cup BwsB \quad \text{und} \quad sBs \neq B. \tag{5.2}$$

Das bedeutet, daß $(G, B, \mathcal{N}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S})(k), S)$ ein *Titssystem* ist, siehe Bourbaki [16, S. 22]. Man kann daraus die folgende Multiplikationsregel folgern:

Proposition 5.3.1. *Sei $s \in \Sigma$ und $w \in \mathcal{W}$. Dann gilt die folgende Multiplikationsregel:*

$$(BwB)(BsB) = \begin{cases} BwsB, & \textit{falls } \ell(ws) > \ell(w), \\ BwB \cup BwsB, & \textit{falls } \ell(ws) < \ell(w). \end{cases}$$

Beweis. Siehe Borel-Tits [14, 3.5] oder auch Humphreys [33, 29.3]. □

Folgerung 5.3.2. Unter denselben Voraussetzungen wie in Proposition 5.3.1 gilt

$$(\bar{B}wB)(BsB) = \begin{cases} \bar{B}wsB, & \text{falls } \ell(ws) < \ell(w), \\ \bar{B}wB \cup \bar{B}wsB, & \text{falls } \ell(ws) > \ell(w). \end{cases}$$

Beweis. Man hat $(\bar{B}wB)(BsB) = w_0(Bw_0wBsB)$. Die Behauptung folgt dann aus der Proposition, weil $w \mapsto w_0w$ die Ordnung umkehrt. □

5.3.2 Durchschnitte mit der großen Zelle, minimaler Fall

Satz 5.3.3. *Sei $B \subseteq G$ eine minimale parabolische Untergruppe und $w \in \mathcal{W}$ beliebig. Für alle $z \in \mathcal{W}$ gilt dann:*

(1) $\ell(z) < \ell(w) \implies (\bar{B}wB)(BzB) \cap \bar{B}B = \emptyset$.

(2) Wenn $\ell(z) = \ell(w)$, dann gilt:

$$(\bar{B}wB)(BzB) \cap \bar{B}B \neq \emptyset \iff z = w^{-1},$$

und in diesem Fall ist $(\bar{B}wB)(Bw^{-1}B) = \bar{B}B$.

Beweis. (1) Die Bedingung erzwingt $\ell(w) \geq 1$. Für $z = 1$ erhält man dann $\bar{B}wB \cap \bar{B}B = \emptyset$, weil je zwei verschiedene Bruhatzellen disjunkt sind. Für $\ell(z) \geq 1$ können wir z als reduziertes Wort $z = s_1 \cdots s_r$ schreiben. Aus der Multiplikationsregel 5.3.2 folgt mit vollständiger Induktion über $\ell(z)$ dann

$$\bar{B}wBzB = \bar{B}w(Bs_1B)(Bs_2B)\cdots(Bs_rB) \subseteq \bigcup_{1 \leq i_1 < \ldots < i_s \leq r} \bar{B}ws_{i_1} \cdots s_{i_s}B. \tag{5.3}$$

Daran erkennt man aber, daß die »dicke Zelle« $\bar{B}B$ wegen $r < \ell(w)$ nicht unter den Zellen der Vereinigung vorkommen kann.

(2) Wenn $w = z^{-1} = s_r \cdots s_1$, dann folgt mit Hilfe der Multiplikationsregel sofort $\bar{B}wBzB = \bar{B}B$. Umgekehrt ist $\bar{B}wzB$ die einzige Zelle der Vereinigung rechts in (5.3), die nicht-leeren Durchschnitt mit der dicken Zelle haben kann, und eintreten kann das nur, wenn $z = w^{-1}$, da sonst $\ell(wz) > 1$. □

5.4 Standardparabolische Untergruppen

Seien $P = P_I = \dot{\bigcup}_{w \in \mathcal{W}_I} BwB$ und $Q = P_J = \dot{\bigcup}_{w \in \mathcal{W}_J} BwB$ wie in Proposition 5.2.9. Sei $\mathfrak{C}(I, J)$ das System der Vertreter maximaler Länge von Doppelnebenklassen aus $\mathcal{W}_I \backslash \mathcal{W} / \mathcal{W}_J$ und $\mathfrak{D}(I, J)$ das System der Vertreter minimaler Länge. Wir haben:

- $QcP = \dot{\bigcup}_{w \in \mathcal{W}_J c \mathcal{W}_I} BwB$ für $c \in \mathfrak{C}(J, I)$.
- $\bar{P}dQ = \dot{\bigcup}_{w \in \mathcal{W}_I d \mathcal{W}_J} \bar{B}wB$ für $d \in \mathfrak{D}(I, J)$.
- Insbesondere gilt $\bar{P}P = \dot{\bigcup}_{w \in \mathcal{W}_I} \bar{B}wB$.

Satz 5.4.1. *Sei $w \in \mathfrak{D}(I,J)$. Dann gilt:*

$$\ell(z) < \ell(w) \implies \bar{P}wQzP \cap \bar{P}P = \emptyset.$$

Wenn $\ell(z) = \ell(w)$, dann ist $\bar{P}wQzP \cap \bar{P}P \neq \emptyset$ nur für $z = w^{-1}$.

Beweis. Wegen $Q = \dot{\bigcup}_{u \in \mathcal{W}_J} BuB$ und Folgerung 5.3.2 ist wQz enthalten in einer Vereinigung von Doppelnebenklassen der Form $\bar{B}wuz'B$, wobei $u \in \mathcal{W}_J$ und $z' \leq z$. Daraus folgt

$$\bar{P}wQzP \subseteq \bigcup_{\substack{u \in \mathcal{W}_J \\ z' \leq z}} \bar{P}wuz'P.$$

Wegen $w \in \mathfrak{D}(I,J)$ ist stets $\ell(w) \leq \ell(wu)$, und aus $\ell(z) < \ell(w)$ folgt $\bar{P}wuz'P \neq \bar{P}P$. Sei nun $\ell(z) = \ell(w)$ und $\bar{P}wQzP \cap \bar{P}P \neq \emptyset$. Dann muß $\bar{P}wuz'P = \bar{P}P$ für irgendwelche $u \in \mathcal{W}_J$ und $z' \leq z$ sein. Die Bruhatzerlegung impliziert $wuz' \in \mathcal{W}_I$, also

$$(vwu)z' = 1$$

für ein $v \in \mathcal{W}_I$. Wegen $\ell(z') \leq \ell(z) = \ell(w) \leq \ell(vwu)$ ist das wegen der Eindeutigkeit des Elements kleinster Länge in seiner Doppelnebenklasse nur möglich, wenn $z = z'$ und $vwu = w$ ist. □

5.5 Beispiele

Wir betrachten als Beispiele SL_2 und GL_3. In unserer Notation stehen Doppelkreuze (#) für Matrixeinträge, die nicht Null sind, und Sterne ($*$) für völlig beliebige Matrixeinträge.

5.5.1 SL_2

Sei $G = \mathrm{SL}_2(k)$ die Gruppe der unimodularen (2×2)-Matrizen mit Einträgen aus k, das heißt

$$G = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{M}_2(k) \;\middle|\; ac - bd = 1 \right\}.$$

Diese Gruppe ist halbeinfach, daher insbesondere reduktiv. Ihr halbeinfacher Rang ist 1. Es gibt nur eine einzige Konjugationsklasse echter parabolischer Untergruppen. Der k-Torus

$$T = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{smallmatrix}\right) \;\middle|\; t \in k^* \right\} \cong \mathfrak{G}_m(k)$$

ist maximal in G und zerfällt über k. Er ist daher sein eigener Zentralisator und selbst Levifaktor einer minimalen parabolischen Untergruppe, nämlich

$$B = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{smallmatrix}\right) \mid a \in k^*, b \in k \right\},$$

mit dem unipotenten Radikal

$$U = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mid n \in N \right\} \cong \mathfrak{G}_a(k).$$

Es gilt also $B = T \ltimes U = G_m \ltimes G_a$. Für die B entgegengesetzte parabolische Untergruppe $\bar{B} = T\bar{U}$ hat man $\bar{B} = \left(\begin{smallmatrix} \# & 0 \\ * & \# \end{smallmatrix}\right)$ und $\bar{U} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Der Normalisator $\mathcal{N}_G(T)$ besteht aus allen Monomialmatrizen in G, das heißt

$$\mathcal{N}_G(T) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & -s \\ s^{-1} & 0 \end{smallmatrix}\right) \mid s, t \in k^* \right\}.$$

In der Weylgruppe $W = \mathcal{N}_G(T)/T$ bleiben davon zwei Nebenklassen übrig, als deren Vertreter in G wir $1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $w_0 := \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ wählen können. Es gilt $w_0^{-1} = w_0$, $\bar{B} = w_0 B w_0$ und $\bar{N} = w_0 N w_0$.

Sei $x := \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in G$. Wenn $c = 0$, dann ist $x \in B$. Wenn $c \neq 0$, dann überzeugt man sich leicht, daß $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} c^{-1} & a \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & dc^{-1} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, das heißt, es gilt die Bruhatzerlegung

$$G = B \mathbin{\dot\cup} B w_0 B = B \mathbin{\dot\cup} B w_0 U.$$

Dabei ist B die abgeschlossene Zelle, und Bw_0B ist die offene Zelle: B besteht aus denjenigen $x \in G$ mit $x_{21} = 0$ und Bw_0B aus denjenigen mit $x_{21} \neq 0$. Weiter ergibt sich die Bruhatzerlegung

$$G = \bar{B} w_0 B \mathbin{\dot\cup} \bar{B} B = \bar{B} w_0 U \mathbin{\dot\cup} \bar{B} U,$$

wobei $\bar{B}B$ offen und $\bar{B}w_0B$ abgeschlossen ist: $\bar{B}w_0B$ besteht aus denjenigen $x \in G$ mit $x_{11} = 0$ und $\bar{B}B$ aus denjenigen mit $x_{11} \neq 0$. Die beiden nicht-trivialen Produkte von Bruhatzellen können wir mit der Regel 5.3.2 ausrechnen:

$$\bar{B} B w_0 B = \bar{B} B \mathbin{\dot\cup} \bar{B} w_0 B = G, \quad \bar{B} w_0 B w_0 B = \bar{B} B.$$

Zusammen mit $\bar{B} w_0 B \cap \bar{B} B = \emptyset$ ergibt das die Aussage von Prop. 5.3.3.

5.5.2 GL_3

Sei $G = \mathrm{GL}_3(k) = \{x \in \mathbb{M}_3(k) \mid \det(x) \neq 0\}$ die Gruppe der invertierbaren (3×3)-Matrizen mit Einträgen in k. Diese Gruppe ist k-zerfallend mit dem k-zerfallenden maximalen k-Torus

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} t_1 & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & 0 \\ 0 & 0 & t_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; t_i \in k^* \right\} \cong \mathfrak{G}_m^3(k).$$

Wir haben drei echte parabolische Untergruppen:

$$B = \begin{pmatrix} \# & * & * \\ 0 & \# & * \\ 0 & 0 & \# \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & \# \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$
$$Q = \begin{pmatrix} \# & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{vmatrix} q_{22} & q_{23} \\ q_{32} & q_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$$

davon B die minimale. Die Weylgruppe von G ist

$$\mathcal{W} = S_3 = \{1, s_1, s_2, s_1s_2, s_2s_1, s_1s_2s_1\},$$

wobei $s_1 = (1, 2)$ und $s_2 = (2, 3)$ als Zyklen. Wir identifizieren die Elemente von W mit den folgenden Permutationsmatrizen in G:

$$s_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_1s_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$s_2s_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_1s_2s_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir schreiben $w_0 := s_1s_2s_1 = s_2s_1s_2$ für das Element maximaler Länge. Der Bruhatgraph ist

$$\begin{tikzcd}
& w_0 & \\
s_1s_2 \arrow[ur] & & s_2s_1 \arrow[ul] \\
s_2 \arrow[u] \arrow[urr] & & s_1 \arrow[u] \arrow[ull] \\
& 1. \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Proposition 5.5.1. *Die in der Standardbruhatzerlegung* $G = \dot\bigcup_{w \in W} BwB$

auftretenden Zellen sind folgende:

$$B = \begin{pmatrix} \# & * & * \\ 0 & \# & * \\ 0 & 0 & \# \end{pmatrix}, \quad Bs_1B = \begin{pmatrix} * & * & * \\ \# & * & * \\ 0 & 0 & \# \end{pmatrix}, \quad Bs_2B = \begin{pmatrix} \# & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & \# & * \end{pmatrix},$$

$$Bs_1s_2B = \begin{pmatrix} * & * & * \\ \# & * & * \\ 0 & \# & * \end{pmatrix}, \quad Bs_2s_1B = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ \# & * & * \end{pmatrix} \; mit \begin{vmatrix} x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{vmatrix} = 0,$$

$$Bw_0B = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ \# & * & * \end{pmatrix} \; mit \begin{vmatrix} x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Bemerkung 5.5.2. Man kann sagen, daß die große Zelle Bw_0B aus denjenigen Matrizen $x \in \mathbb{M}_3(k)$ besteht mit

$$x_{31} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Beweis. Seien stets $a, b \in B$. Es ist also $a_{ii} \neq 0$, weiter $a_{ij} = 0$ für $i > j$ und a_{ij} beliebig für $i < j$. Wir betrachten $awb \in BwB$. Wegen $BwB = BwN$ können wir $b_{ii} = 1$ setzen.

(1) Ein beliebiges Element $x = as_1b \in Bs_1B$ ist von der Form

$$x = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} + a_{12}b_{12} & a_{11}b_{23} + a_{12}b_{13} + a_{13} \\ a_{22} & a_{22}b_{12} & a_{22}b_{13} + a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Man liest sofort $x_{21} = a_{22} \neq 0$ und $x_{22} = a_{33} \neq 0$ ab. Die einzige weitere Einschränkung rüht von

$$0 \neq a_{11} = x_{12} - a_{12}b_{12} = x_{12} - \frac{x_{11}x_{22}}{x_{21}} \iff \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

her; das ist aber zusammen mit $x_{33} \neq 0$ äquivalent dazu, daß x invertierbar ist, was vorausgesetzt ist. Also hat Bs_1B die angegebene Form.

(2) Ein beliebiges Element $x = as_2b \in Bs_2B$ ist von der Form

$$x = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11}b_{12} + a_{13} & a_{11}b_{13} + a_{12} + a_{13}b_{23} \\ 0 & a_{23} & a_{22} + a_{23}b_{23} \\ 0 & a_{33} & a_{33}b_{23} \end{pmatrix}.$$

Man liest sofort $x_{11} = a_{11} \neq 0$ und $x_{32} = a_{33} \neq 0$ ab. Die einzige weitere Einschränkung rüht von

$$0 \neq a_{22} = x_{23} - a_{23}b_{23} = x_{23} - \frac{x_{22}x_{33}}{x_{32}} \iff \begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} \\ x_{32} & x_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

her; das ist aber zusammen mit $x_{11} \neq 0$ äquivalent dazu, daß x invertierbar ist, was vorausgesetzt ist. Also hat Bs_2B die angegebene Form.

(3) Ein beliebiges Element $x = as_1s_2b \in Bs_1s_2B$ ist von der Form

$$x = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{12}b_{12} + a_{13} & a_{11} + a_{12}b_{13} + a_{13}b_{23} \\ a_{22} & a_{22}b_{12} + a_{23} & a_{22}b_{13} + a_{23}b_{23} \\ 0 & a_{33} & a_{33}b_{23} \end{pmatrix}.$$

Man liest sofort $x_{21} = a_{22} \neq 0$ und $x_{32} = a_{33} \neq 0$ ab. Die einzige weitere Einschränkung rüht von

$$0 \neq a_{11} = x_{13} - a_{12}b_{13} - a_{13}b_{23} = x_{13} - x_{11} \cdot \frac{x_{23} - a_{23}b_{23}}{x_{21}} - (x_{12} - x_{11}b_{12})b_{23}. \tag{5.4}$$

Setzt man $b_{23} = x_{33}/x_{32}$ und $a_{23} = x_{22} - x_{21}b_{12}$ ein, so fallen die Terme mit b_{12} weg, und man findet, daß (5.4) äquivalent ist zu $a_{11}x_{21}x_{32} = \det(x) \neq 0$, so daß keine zusätzliche Bedingung entsteht und Bs_1s_2B die angegebene Form hat.

(4) Ein beliebiges Element $x = as_2s_1b \in Bs_2s_1B$ ist von der Form

$$x = \begin{pmatrix} a_{13} & a_{11} + a_{13}b_{12} & a_{11}b_{23} + a_{12} + a_{13}b_{13} \\ a_{23} & a_{23}b_{12} & a_{22} + a_{23}b_{13} \\ a_{33} & a_{33}b_{12} & a_{33}b_{13} \end{pmatrix}.$$

Man erhält die Bedingung $x_{31} \neq 0$; für x_{22}, x_{12} und x_{23} findet man die Bedingungen

$$\begin{vmatrix} x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{31} & x_{32} \end{vmatrix} = -x_{31}a_{11} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} x_{21} & x_{23} \\ x_{31} & x_{33} \end{vmatrix} = -x_{31}a_{22} \neq 0. \tag{5.5}$$

Nun gilt aber für x stets, wenn man $x_{31} \neq 0$ und $x_{22}x_{31} = x_{21}x_{32}$ benutzt,

$$0 \neq x_{31} \cdot \det(x) = x_{31}x_{11} \begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} \\ x_{32} & x_{33} \end{vmatrix} - x_{31}x_{12} \begin{vmatrix} x_{21} & x_{23} \\ x_{31} & x_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{31} & x_{32} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_{21} & x_{23} \\ x_{31} & x_{33} \end{vmatrix},$$

und das ist äquivalent zu den letzten beiden Bedingungen in (5.5), so daß diese überflüssig sind.

(5) Ein beliebiges Element $x = aw_0b \in Bw_0B$ ist von der Form

$$x = \begin{pmatrix} a_{13} & a_{12} + a_{13}b_{12} & a_{11} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{13} \\ a_{23} & a_{22} + a_{23}b_{12} & a_{22}b_{23} + a_{23}b_{13} \\ a_{33} & a_{33}b_{12} & a_{33}b_{13} \end{pmatrix}.$$

Man erhält sofort die Bedingung $x_{31} = a_{33} \neq 0$ und die Relationen

$$a_{13} = x_{11}, \quad a_{23} = x_{21}, \quad b_{12} = \frac{x_{32}}{x_{31}}, \quad a_{12} = x_{12} - a_{13}b_{12} = \frac{x_{12}x_{31} - x_{11}x_{32}}{x_{31}},$$
$$b_{13} = \frac{x_{33}}{x_{31}}, \quad b_{23} = \frac{x_{23} - a_{23}b_{13}}{a_{22}} = \frac{x_{21}x_{33} - x_{23}x_{31}}{x_{21}x_{32} - x_{22}x_{31}},$$

und x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{23}, x_{32}, x_{33} sind hierdurch frei wählbar. Für x_{22} erhält man die Bedingung

$$\begin{vmatrix} x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{vmatrix} = -x_{31}a_{22} \neq 0.$$

Durch Einsetzen alles Bisherigen erhält man für x_{13} schließlich die Relation

$$a_{11}x_{31} \begin{vmatrix} x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{vmatrix} = \det(x) \neq 0,$$

die a priori erfüllt ist. □

Folgerung 5.5.3. Die $(\bar{B}, B)$-Bruhatzellen von $\mathrm{GL}_3(k)$ sind:

$$\bar{B}w_0B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \# \\ 0 & \# & * \\ \# & * & * \end{pmatrix}, \quad \bar{B}s_1s_2B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \# \\ \# & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix},$$
$$\bar{B}s_2s_1B = \begin{pmatrix} 0 & \# & * \\ 0 & * & * \\ \# & * & * \end{pmatrix},$$
$$\bar{B}s_1B = \begin{pmatrix} 0 & \# & * \\ \# & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}, \quad \bar{B}s_2B = \begin{pmatrix} \# & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix} = 0,$$
$$\bar{B}B = \begin{pmatrix} \# & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Bemerkung 5.5.4. Anders ausgedrückt, besteht die große Zelle $\bar{B}B$ aus denjenigen Matrizen, deren führende Hauptminoren invertierbar sind.

Beweis. Wegen $\bar{B} = w_0Bw_0$ folgt das unmittelbar aus Prop. 5.5.1. □

Uns interessiert, welche Produkte $(\bar{B}w_iB)(Bw_jB) = \bar{B}w_iBw_jB$ leeren Durchschnitt mit $\bar{B}B$ haben. Mit unserer Multiplikationsregel 5.3.2 können wir dieselben ausrechnen:

w	$\bar{B}wB$	$\bar{B}wBs_1B$	$\bar{B}wBs_2B$
w_0	$\bar{B}w_0B$	$\bar{B}s_1s_2B$	$\bar{B}s_2s_1B$
s_2s_1	$\bar{B}s_2s_1B$	$\bar{B}s_2B$	$\bar{B}s_2s_1B \cup \bar{B}w_0B$
s_1s_2	$\bar{B}s_1s_2B$	$\bar{B}s_1s_2B \cup \bar{B}w_0B$	$\bar{B}s_1B$
s_2	$\bar{B}s_2B$	$\bar{B}s_2B \cup \bar{B}s_2s_1B$	$\bar{B}B$
s_1	$\bar{B}s_1B$	$\bar{B}B$	$\bar{B}s_1B \cup \bar{B}s_1s_2B$
1	$\bar{B}B$	$\bar{B}B \cup \bar{B}s_1B$	$\bar{B}B \cup \bar{B}s_2B$

w	$\bar{B}wBs_1s_2B$
w_0	$\bar{B}s_1B$
s_2s_1	$\bar{B}B$
s_1s_2	$\bar{B}s_1B \cup \bar{B}s_2s_1B$
s_2	$\bar{B}B \cup \bar{B}s_2s_1B \cup \bar{B}w_0B$
s_1	$\bar{B}B \cup \bar{B}s_2B$
1	$\bar{B}B \cup \bar{B}s_1B \cup \bar{B}s_2B \cup \bar{B}s_1s_2B$

w	$\bar{B}wBs_2s_1B$	$\bar{B}wBw_0B$
w_0	$\bar{B}s_2B$	$\bar{B}B$
s_2s_1	$\bar{B}s_2B \cup \bar{B}s_1s_2B$	$\bar{B}B \cup \bar{B}s_1B$
s_1s_2	$\bar{B}B$	$\bar{B}B \cup \bar{B}s_2B$
s_2	$\bar{B}B \cup \bar{B}s_1B$	$\bar{B}B \cup \bar{B}s_1B \cup \bar{B}s_2B \cup \bar{B}s_1s_2B$
s_1	$\bar{B}B \cup \bar{B}s_1s_2B \cup \bar{B}w_0B$	$\bar{B}B \cup \bar{B}s_1B \cup \bar{B}s_2B \cup \bar{B}s_2s_1B$
1	$\bar{B}B \cup \bar{B}s_1B \cup \bar{B}s_2B \cup \bar{B}s_2s_1B$	G

Wir können anhand dieser Tabelle Prop. 5.3.3 verifizieren: Es gilt

(1) $\bar{B}wBzB \cap \bar{B}B = \emptyset$ für $\ell(w) \geq \ell(z)$ mit $w \neq z^{-1}$,

(2) $\bar{B}wBw^{-1}B = \bar{B}B$.

Die nicht minimalen Fälle

Wir betrachten $P = MN$ und $Q = LU$ wie eingangs. Die Levifaktoren und unipotenten Radikale sind

$$M = \begin{pmatrix} \mathrm{GL}_2 & 0 \\ 0 & \# \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} \# & 0 \\ 0 & \mathrm{GL}_2 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

die Weylgruppen $\mathcal{W}_M = \{1, s_1\}$ und $\{1, s_2\} = \mathcal{W}_L$, beide also isomorph zu S_2. Es gibt zwei $(\mathcal{W}_L, \mathcal{W}_M)$-Doppelnebenklassen in $\mathcal{W}_G$, nämlich:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_L\mathcal{W}_M &= \mathcal{W}_L s_1 \mathcal{W}_M = \mathcal{W}_L s_2 \mathcal{W}_M = \mathcal{W}_L s_2 s_1 \mathcal{W}_M, \\ \mathcal{W}_L w_0 \mathcal{W}_M &= \mathcal{W}_L s_1 s_2 \mathcal{W}_M. \end{aligned}$$

Man sieht insbesondere, daß die Doppelnebenklassen, im Gegensatz zu einfachen Nebenklassen, nicht gleichmächtig sind, außerdem, daß jede ein eindeutiges Element von minimaler und ein eindeutiges von maximaler Länge enthält. Wir betrachten nun des weiteren die P entgegengesetzte parabolische Untergruppe

$$\bar{P} = \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & \# \end{pmatrix}.$$

Es gilt $P = B \uplus Bs_1B$, $\bar{P} = \bar{B} \uplus \bar{B}s_1\bar{B}$ und $Q = B \uplus Bs_2B$. Man hat die Bruhatzerlegungen

$$G = \bar{P}Q \uplus \bar{P}w_0Q = Qw_0P \uplus QP$$

mit den offenen Zellen $\bar{P}Q$ und Qw_0P. Weiter ist unmittelbar klar, daß

$$\begin{aligned} \bar{P}Q &= \bar{B}B \uplus \bar{B}s_1B \uplus \bar{B}s_2B \uplus \bar{B}s_1s_2B, & \bar{P}w_0Q &= \bar{B}s_2s_1B \uplus \bar{B}w_0B, \\ QP &= B \uplus Bs_2B \uplus Bs_1B \uplus Bs_2s_1B, & Qw_0P &= Bw_0B \uplus Bs_1s_2B, \\ \bar{P}w_0P &= \bar{B}s_2B \uplus \bar{B}s_1s_2B \uplus \bar{B}s_2s_1B \uplus \bar{B}w_0B, & \bar{P}P &= \bar{B}B \uplus \bar{B}s_1B. \end{aligned}$$

Wir können nun Prop. 5.4.1 verifizieren, denn es gilt

$$\begin{aligned} \bar{P}w_0QP &= (\bar{B}s_2s_1B \uplus \bar{B}w_0B)(B \uplus Bs_1B) \\ &= \bar{B}s_2B \uplus \bar{B}s_1s_2B \uplus \bar{B}s_2s_1B \uplus \bar{B}w_0B \\ &= \bar{P}w_0P, \end{aligned}$$

also $\bar{P}w_0QP \cap \bar{P}P = \emptyset$; andererseits bekommt man genauso einfach

$$\begin{aligned} \bar{Q}w_0PQ &= (\bar{B}s_1s_2B \uplus \bar{B}w_0B)(B \uplus Bs_2B) \\ &= \bar{B}s_1B \uplus \bar{B}s_1s_2B \uplus \bar{B}s_2s_1B \uplus \bar{B}w_0B, \\ \bar{Q}Q &= \bar{B}B \uplus \bar{B}s_2B, \end{aligned}$$

also $\bar{Q}w_0PQ \cap \bar{Q}Q = \emptyset$.

6. EINE DUALITÄTSAUSSAGE

Sei G eine reduktive $\mathfrak{p}$-adische Gruppe, $P = MN$ und $Q = LU$ zwei standard-parabolische Untergruppen von G, ferner $\bar{P} = M\bar{N}$ die P entgegengesetzte parabolische Untergruppe,

$$A = \mathcal{D}(G), \quad B := \mathcal{D}(M), \quad D := \mathcal{D}(L)$$

die Heckealgebren, $W \in {}_B\mathfrak{M}$ und $E \in {}_D\mathfrak{M}$ glatte Moduln.

Wir verwenden in diesem Kapitel die normierten Funktoren bzw. Bimoduln, setzen also $\chi_M = \delta_P^{1/2}$ usw., siehe Def. 2.5.3, da dies den Vorzug hat, daß sich die Unterquotientenbimoduln, die ab Abschnitt 6.5 betrachtet werden, so unmittelbar mit (wiederum normierten) Restriktions- und Induktionsfunktoren schreiben lassen. Es ergibt sich die Bedingung, daß p in R eine Quadratwurzel besitzen muß.

Wir betrachten die Bimoduln

$$\begin{aligned} S &:= \delta_Q^{1/2} \cdot U\backslash\mathcal{D}(G)/N \cdot \delta_P^{-1/2} \in {}_D\mathfrak{M}_B, \\ \bar{S} &:= \delta_P^{-1/2} \cdot \bar{N}\backslash\mathcal{D}(G)/U \cdot \delta_Q^{-1/2} \in {}_B\mathfrak{M}_D. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Für diese gilt dann $S \otimes_B W \cong \mathcal{R}_L^G \circ \mathcal{I}_M^G(W)$ und $\bar{S} \otimes_D E \cong \bar{\mathcal{R}}_M^G \circ \mathcal{I}_L^G(E)$. Insbesondere hat man $S \cong \mathcal{R}_L^G \circ \mathcal{I}_M^G(B)$ und $\bar{S} \cong \bar{\mathcal{R}}_M^G \circ \mathcal{I}_L^G(D)$. In diesem Kapitel beweisen wir die Kernaussage der Arbeit, nämlich daß es einen in E natürlichen Isomorphismus

$$B \operatorname{Hom}_D(S, E) \cong \bar{S} \otimes_D E$$

gibt. Später zeigen wir, daß diese Dualität zwischen S und $\bar{S}$ äquivalent zur Bernsteinschen zweiten Adjungiertheit ist, daß nämlich $(\mathcal{I}_M^G, \bar{\mathcal{R}}_M^G)$ und $(\bar{\mathcal{I}}_M^G, \mathcal{R}_M^G)$ adjungierte Paare von Funktoren sind.

6.1 Der Morphismus $\bar{\eta}$

Eine abstrakte Begründung für die Existenz einer Abbildung

$$\operatorname{Hom}_G(\mathcal{I}_M^G(W), V) \to \operatorname{Hom}_M(W, \bar{\mathcal{R}}_M^G(V)), \tag{6.2}$$

bei der die Filtrierung von $\bar{\mathcal{R}}_M^G \circ \mathcal{I}_M^G$ aus dem Geometrischen Lemma verwendet wird, geht zurück auf Bernstein [3], siehe auch [4, 3.1]. In der Diplomarbeit von Guiraud [30, 7.4] wird konkreter ausgeführt, daß es einen Morphismus

$$\bar{\eta}\colon \mathcal{D}(M) \longrightarrow \bar{C}_M = \chi^{-1} \cdot \bar{N}\backslash\mathcal{D}(G/N) \cdot \chi$$

von B-Bimoduln gibt, der dann (6.2) induziert. Wir rekapitulieren dieses Argument hier und geben dann eine Formel für $\bar{\eta}$ an:

Die $(\bar{P}, P)$-Bruhatzelle $\bar{P}P \subseteq G$ ist als einzige offen, siehe Prop. 5.2.11. Aufgrund des Bernsteinschen Lemmas 1.3.4 ist die Fortsetzung durch Null $\mathcal{D}(\bar{P}P) \to \mathcal{D}(G)$ ein Monomorphismus von $(\bar{P}, P)$-Bimoduln, der einen Monomorphismus

$$\bar{N}\backslash\mathcal{D}(\bar{P}P)/N \longrightarrow \bar{N}\backslash\mathcal{D}(G)/N$$

induziert. Andererseits erhält man mit $\delta_{\bar{P}} = \delta_P^{-1}$ und Folgerung 2.4.10 die kanonischen Isomorphismen

$$\begin{aligned} \bar{N}\backslash\mathcal{D}(\bar{P}P)/N &\cong \bar{N}\backslash\mathcal{D}(\bar{P}) \otimes_M \mathcal{D}(P)/N \\ &\cong \delta_P \cdot \mathcal{D}(M) \otimes_M \mathcal{D}(M) \cdot \delta_P \cong \delta_P \cdot \mathcal{D}(M) \cdot \delta_P. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Wegen $\mathcal{D}(M) \cong \chi^{-1} \cdot \mathcal{D}(M) \cdot \chi^{-1}$, siehe Lemma 2.4.7, liefert das einen Morphismus von $\mathcal{D}(M)$-Bimoduln

$$\bar{\eta}\colon \mathcal{D}(M) \longrightarrow \chi^{-1} \cdot \bar{N}\backslash\mathcal{D}(\bar{P}P)/N \cdot \chi^{-1} \longrightarrow \chi^{-1} \cdot \bar{N}\backslash\mathcal{D}(G)/N \cdot \chi^{-1}.$$

Dieser wird die Eins der Bernsteinschen zweiten Adjungiertheit vermitteln, und wir nennen ihn auch selbst die *Eins der zweiten Adjungiertheit.*

Proposition 6.1.1. *Sei* $\chi = \delta_P^{1/2}$ *und* $\varphi \in \mathcal{D}(M)$, *weiter* $K \in \Omega(G)$ *eine Kongruenzgruppe mit* $\varphi = e_{K_M} * \varphi * e_{K_M}$ *und* $\tilde{\varphi} \in \mathcal{D}(G)$ *die durch*

$$\tilde{\varphi}(g) := \begin{cases} \chi(m) \cdot e_{K_{\bar{N}}}(\bar{n}) \cdot \varphi(m) \cdot e_{K_N}(n), & \textit{falls } g = \bar{n}mn \in \bar{P}P, \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

definierte Funktion. Dann gilt $\bar{\eta}(\varphi) = [\tilde{\varphi}]$.

Beweis. Zunächst hat man den Isomorphismus

$$\mathcal{D}(M) \longrightarrow \chi \cdot \mathcal{D}(M) \cdot \chi, \quad \varphi \mapsto \chi\varphi,$$

siehe Lemma 2.4.7; daher rührt der Faktor χ. Weiterhin hat man

$$\begin{array}{ccccc} \chi \cdot \mathcal{D}(M) \cdot \chi & \longrightarrow & \chi \cdot \mathcal{D}(M) \otimes_M \mathcal{D}(M) \cdot \chi & \longrightarrow & \chi^{-1} \cdot \bar{N}\backslash\mathcal{D}(\bar{P}) \otimes_M \mathcal{D}(P)/N \cdot \chi^{-1} \\ \Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow \\ \psi & \longmapsto & e_{K_M} \otimes \psi & \longmapsto & [e_{K_{\bar{P}}}] \otimes [\psi e_{K_N}], \end{array}$$

siehe Prop. 2.4.3. Für die Funktion $\tilde{\varphi}$, aufgefaßt als Element von $\mathcal{D}(\bar{P}P)$, erhält man mit Folgerung 2.4.10 die Formel

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(\bar{n}mn) &= \int_M e_{K_{\bar{P}}}(\bar{n}mx)\,(\chi\varphi e_{K_N})(x^{-1}n)\,\mathrm{d}x \\ &= e_{K_{\bar{N}}}(\bar{n})\cdot e_{K_N}(n)\cdot \int_M e_{K_M}(x)\,(\chi\varphi)(x^{-1}m)\,\mathrm{d}x \\ &= \chi(m)\cdot e_{K_{\bar{N}}}(\bar{n})\cdot e_{K_N}(n)\cdot e_{K_M} * \varphi(m) \\ &= \chi(m)\cdot e_{K_{\bar{N}}}(\bar{n})\cdot \varphi(m)\cdot e_{K_N}(n).\end{aligned}$$

Wir haben hier $\chi|K_M = 1$ benutzt. Nun wird $\tilde{\varphi}$ durch Null auf ganz G fortgesetzt. □

Bemerkung 6.1.2. Insbesondere gilt $\bar{\eta}(e_{K_M}) = [e_K]$, wie auch Guiraud feststellt.

6.2 Der Ansatz

Wir definieren einen Morphismus τ von (B, B)-Bimoduln als die folgende Komposition:

$$\tau\colon B \xrightarrow{\bar{\eta}} \bar{N}\backslash\mathcal{D}(G)/N \xrightarrow{[\eta]} \bar{S}\otimes_D S.$$

Dieser Morphismus induziert eine (in W und E) natürliche Transformation

$$\tau^*\colon \operatorname{Hom}_D(S\otimes_B W, E) \longrightarrow \operatorname{Hom}_B(W, \bar{S}\otimes_D E). \tag{6.4}$$

Weiter gibt τ in ${}_B\mathfrak{M}$ zu der folgenden Komposition von Morphismen Anlaß:

$$\alpha\colon B\operatorname{Hom}_D(S, E) \xrightarrow{\tau^*} B\operatorname{Hom}_B(B, \bar{S}\otimes_D E) \xrightarrow[\sim]{\nu^{-1}} \bar{S}\otimes_D E, \tag{6.5}$$

wobei der eingezeichnete Isomorphismus ν^{-1} der kanonische ist: zu jedem $\psi \in B\operatorname{Hom}_B(B, \bar{S}\otimes_D E)$ gibt es $e \in \operatorname{Id}(B)$ mit $e\psi = \psi$, und dann ist $\nu^{-1}(\psi) = \psi(e)$. Das ist offensichtlich unabhängig von der Wahl von e. Für $e \in \operatorname{Id}(B)$ bekommt man

$$\alpha(e\varphi) = (\bar{S}\otimes\varphi)\circ\tau(e). \tag{6.6}$$

Satz 6.2.1. *Der Morphismus α ist ein Isomorphismus.*

Der Beweis dieses Satzes, welcher zu Bernsteins zweiter Adjungiertheit äquivalent ist, wird sich über den Rest des Kapitels erstrecken.

Annahme 6.2.2. Wir führen den Beweis mit vollständiger Induktion über den halbeinfachen Rang von G, und machen daher die folgende Induktionsannahme: Die Bernsteinsche zweite Adjungiertheit gelte für alle reduktiven $\mathfrak{p}$-adischen Gruppen, deren halbeinfacher Rang echt kleiner als der von G ist. Weiterhin sei angenommen, daß $\bar{\eta}$ in diesem Falle tatsächlich die Eins der zweiten Adjungiertheit ist.

Diese Induktionsannahme trifft vor allem auf alle Levifaktoren aller echten parabolischen Untergruppen von G zu. Der Induktionsanfang ist trivial, denn G hat genau dann den halbeinfachen Rang 0, wenn es gar keine echten über k definierten parabolischen Untergruppen gibt [43, Ch. 20 a].

6.3 Algebraisches Lemma

Sei $f\colon G \to H$ ein Morphismus zwischen zwei abelschen Gruppen G und H. Zu dem Paar (G, H) sei eine endliche aufsteigende Filtrierung durch Untergruppen,

$$0 = G_0 \subseteq \cdots \subseteq G_n = G \quad \text{und} \quad 0 = H_0 \subseteq \cdots \subseteq H_n = H,$$

gegeben. Der Morphismus f *erhält die Filtrierung*, wenn

$$f(G_k) \subseteq H_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Die Gruppen G_k/G_{k-1} und H_k/H_{k-1} sind die *Unterquotienten* der Filtrierung.

Lemma 6.3.1.

(1) Wenn f die Filtrierung erhält, so induzieren die Einschränkungen

$$f_k := f|G_k\colon G_k \longrightarrow H_k$$

jeweils eindeutig bestimmte Morphismen $\tilde{f}_k$ zwischen den Unterquotienten, die das folgende Diagramm kommutativ machen:

$$\begin{tikzcd} G_k \arrow[r, "f_k"] \arrow[d] & H_k \arrow[d] \\ G_k/G_{k-1} \arrow[r, dashed, "\tilde{f}_k"] & H_k/H_{k-1}. \end{tikzcd}$$

(2) Wenn alle $\tilde{f}_k$ Isomorphismen sind, dann ist auch f ein Isomorphismus.

Bemerkung. Insbesondere besagt die Voraussetzung bei (2), daß $f_1 \colon G_1 \to H_1$ ein Isomorphismus ist.

Beweis. (1) ist eine Konsequenz der universellen Eigenschaft des Quotienten. (2) Der Morphismus f_1 ist nach Voraussetzung ein Isomorphismus. Das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & G_{k-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{k-1}"] & G_k \arrow[r] \arrow[d, "f_k"] & G_k/G_{k-1} \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{f}_k"] & 0 \\
0 \arrow[r] & H_{k-1} \arrow[r] & H_k \arrow[r] & H_k/H_{k-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

hat exakte Zeilen und kommutiert, wobei die unbezeichneten horizontalen Pfeile die kanonischen Injektionen und Projektionen sind. Wenn f_{k-1} ein Isomorphismus ist, und $\tilde{f}_k$ ist nach Voraussetzung einer, so ist nach dem kurzen Fünferlemma auch f_k ein solcher. Mit vollständiger Induktion können wir schließen, daß auch $f = f_n$ ein Isomorphismus ist. □

6.4 Direkte Summenzerlegungen

Es ist ein wichtiges Zwischenergebnis, daß die Heckealgebra $\mathcal{D}(G)$ einer reduktiven $\mathfrak{p}$-adischen Gruppe G als regulärer Links- und Rechtsmodul, d. h. über sich selbst, projektiv ist. In [38, Prop. 4.12] beweist R. Meyer dies für glatte Darstellungen lokal kompakter Gruppen auf bornologischen Vektorräumen. Wir leiten dieses Ergebnis für unseren Spezialfall jedoch in diesem Unterabschnitt direkt unter Verwendung idempotenter Elemente her.

6.4.1 Die Heckealgebra ist projektiv über sich selbst

Lemma 6.4.1 ([30, 2.5.12])**.** Es gibt eine 1-Umgebungsbasis von G, die aus einer abzählbaren absteigenden Folge

$$K_1 \supseteq K_2 \supseteq \cdots$$

kompakt-offener Pro-p-Kongruenzuntergruppen von G besteht.

Beweis. Nach Lemma 1.5.4 gibt es eine Pro-p-Untergruppe $K' \in \Omega(G)$, nach Satz 1.2.7 eine abzählbare 1-Umgebungsbasis $(K'_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \Omega(G)$, und nach Satz 1.5.1 kann man o. b. d. A. annehmen, daß die K'_n Kongruenzuntergruppen sind. In

$$K_n := \bigcap_{m=1}^{n} K'_m \cap K', \quad n = 1, 2, \ldots,$$

erhält man wegen Lemma 1.5.3 dann eine 1-Umgebungsbasis mit den gewünschten Eigenschaften. □

Proposition 6.4.2. *Sei $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ eine 1-Umgebungsbasis wie in Lemma 6.4.1 und $e_n := e_{K_n}$.*

(1) Die idempotenten Elemente e_n bilden eine Kette $e_1 \leq e_2 \leq \cdots$ in $\mathrm{Id}(A)$, siehe Abschn. 2.1.2, und kommutieren miteinander.

(2) Die Elemente $f_1 := e_1$ und $f_n := e_n - e_{n-1}$ für $n > 1$ bilden eine Familie orthogonaler *idempotenter Elemente, das heißt $f_n^2 = f_n$ und $f_n f_m = 0$ für $n \neq m$.*

(3) Die Algebra A besitzt in den e_n genügend idempotente Elemente, das heißt

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} e_n A e_n.$$

(4) In ${}_A\mathfrak{M}$ gilt $Ae_n = Ae_{n-1} \oplus A(e_n - e_{n-1})$ für $n > 1$, und daraus ergibt sich die Zerlegung

$$A = \bigoplus_{n=1}^{\infty} A f_n. \tag{6.7}$$

(5) Für jedes $e \in \mathrm{Id}(A)$ ist $Ae \in {}_A\mathfrak{M}$ projektiv und endlich erzeugt.

(6) In $\mathfrak{M}_A$ gelten analoge Aussagen.

Beweis. (1) Es ist genau dann $n \leq m$, also $K_m \subset K_n$, wenn $e_n = e_m e_n e_m$, also $e_n \leq e_m$, weil e_n dann von beiden Seiten K_m-invariant ist. Daraus folgt $e_n e_m = e_m e_n = e_n$. (2) ergibt sich unmittelbar durch Nachrechnen. (3) Die e_n bilden genügend Idempotente, weil die K_n eine Umgebungsbasis der Eins bilden. (4) Aus $e_n f_n = f_n e_n = f_n$ folgt

$$Ae_n \subseteq Ae_{n-1} + Af_n = (Ae_{n-1} + Af_n)e_n \subseteq Ae_n \implies Ae_n = Ae_{n-1} + Af_n.$$

Aus $e_{n-1} f_n = f_n e_{n-1} = 0$ folgt $Ae_{n-1} \cap Af_n = \{0\}$, so daß die Summe wie behauptet direkt ist. Offensichtlich gilt $\bigoplus_{n=1}^{\infty} Af_n \subseteq A$. Wir müssen zeigen, daß sogar Gleichheit gilt. Sei aber $a \in A$. Dann gibt es e_n mit $e_n a e_n = a$. Aus $e_n = f_1 + \cdots + f_n$ folgt dann das Gewünschte. (5) Als linker A-Modul wird Ae von e erzeugt. Betrachten wir nun in ${}_A\mathfrak{M}$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & Ae \arrow[dl, dashed, "\tilde{\psi}"'] \arrow[d, "\psi"] & \\
V \arrow[r, "\varphi"] & W \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

mit irgendeinem Epimorphismus φ und Morphismus ψ. Es gibt $v_e \in V$ mit $\varphi(v_e) = \psi(e)$, und $\tilde{\psi}(ae) := av_e$ definiert dann einen Morphismus, der das Diagramm kommutativ macht. (6) ist klar. $\square$

Bemerkung. Die Proposition besagt, daß die Heckealgebra einer reduktiven $\mathfrak{p}$-adischen Gruppe sogar genügend idempotente Elemente im Sinne von Fuller [28] hat. Er spricht auch von einem *vollständigen Satz idempotenter Elemente* (engl. *complete set of idempotents*).

Folgerung 6.4.3. Die Heckealgebra $\mathcal{D}(G)$ einer reduktiven $\mathfrak{p}$-adischen Gruppe G ist als Links- bzw. Rechtsmodul über sich selbst projektiv, zwar i. allg. nicht endlich erzeugt, aber eine abzählbare direkte Summe endlich erzeugter Links- bzw. Rechtsideale.

Beweis. Das folgt daraus, daß direkte Summen projektive Moduln respektieren. $\square$

6.4.2 Direkte Summenzerlegung von S

Sei $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \cdots$ eine 1-Umgebungsbasis von M wie in Lemma 6.4.1. Die Bezeichnungen im weiteren sind wie in Prop. 6.4.2. Für $n \leq m$ gilt $e_m e_n e_m = e_n$, und daraus folgt

$$Se_n \subseteq Se_m, \quad S(e_n - e_m) \subseteq Se_m, \quad n \leq m.$$

Proposition 6.4.4. *Sei $f_1 := e_1$ und $f_n := e_n - e_{n-1}$ für $n > 1$. Für S als linken D-Modul gilt dann*

$$S = \bigoplus_{n=1}^{\infty} Sf_n.$$

Beweis. Die f_n bilden einen Satz orthogonaler Idempotenter, so daß die Summe auf jeden Fall direkt ist. Die Sf_n kann man als D-Untermoduln von S auffassen, und es bleibt nur »$\subseteq$« zu zeigen. Das ist aber klar, denn zu jedem $s \in S$ gibt es ein e_n mit $s = se_n = se_1 + s(e_2 - e_1) + \cdots + s(e_n - e_{n-1})$. $\square$

Wegen $Sf_n = S \otimes_B Bf_n = \mathcal{R}_L^G \circ \mathcal{I}_M^G(Bf_n)$ folgt also aus der Induktionsannahme (und später aus dem erbrachten Beweis), daß ${}_DS$ projektiv ist, weil die zweite Adjungiertheit es nach sich zieht, daß die Induktionsfunktoren $\mathcal{I}$ projektive Objekte respektieren.

6.5 Die Unterquotientenbimoduln

Guiraud [30, 6.2] zeigt, daß es einen in $W \in {}_B\mathfrak{M}$ natürlichen Isomorphismus

$$\begin{aligned} &\mathcal{I}^L_{L\cap{}^wM} \circ w \circ \mathcal{R}^M_{M\cap L^w}(W) = \delta_Q^{1/2} \cdot U\backslash\mathcal{D}(QwP)/N \cdot \delta_P^{-1/2} \otimes_M W \qquad (6.8)\\ &= \big(\mathcal{D}(L)/(L\cap{}^wN)\cdot\delta^{-1/2}_{L\cap{}^wP}\big) \otimes_{L\cap{}^wM} \big(\delta^{1/2}_{M\cap Q^w}\cdot(M\cap U^w)\backslash\mathcal{D}(M)\big)\otimes_M W\end{aligned}$$

gibt. Dabei operiert $L\cap{}^wM$ unten auf dem mittleren Tensorfaktor von links vermittelst des kanonischen Isomorphismus

$$L\cap wMw^{-1} \longrightarrow w^{-1}Lw\cap M, \quad x\mapsto w^{-1}xw.$$

Wir müssen wissen, wie Elemente von dem Isomorphismus (6.8) konkret abgebildet werden. Das setzen wir in diesem Abschnitt auseinander.

Sei $H := Q\cap{}^wP$. Wir erinnern daran (Abschnitt 2.5.1), daß der (Q,P)-Bimodul $\operatorname{ind}_H^Q\mathcal{D}(P)$ aus den Funktionen $\varphi\colon Q\to\mathcal{D}(P)$ mit den folgenden Eigenschaften besteht:

(1) φ ist von links gleichmäßig glatt unter einem $K\in\Omega(Q)$, das heißt

$$\varphi(kq) = \varphi(q), \quad k\in K,\ q\in Q.$$

(2) Es gilt $\varphi(qh)(p) = \varphi(q)(w^{-1}hwp)$ für alle $q\in Q$, $p\in P$, $h\in H$.

(3) Es gibt eine kompakte Menge $\Gamma\subseteq Q$ mit $\operatorname{Tr}\varphi\subseteq\Gamma H$. Äquivalent dazu ist, daß $\operatorname{Bild}(\operatorname{Tr}\varphi)\subseteq Q/H$ kompakt ist, siehe Lemma 2.5.1.

Es ergibt sich leicht, daß, wenn φ und K wie in (1) gewählt sind,

$$\operatorname{Tr}\varphi = \dot{\bigcup_{i=1}^n} Kq_iH$$

mit endlich vielen Repräsentanten q_i von (K,H)-Doppelnebenklassen. Sodann wird $\operatorname{ind}_H^Q\mathcal{D}(P)$ zu einem (glatten) (Q,P)-Bimodul durch

$$(q_0\psi p_0)(q)(p) := \psi(q_0^{-1}q)(pp_0^{-1}), \quad q_0,q\in Q,\ p_0,p\in P,\ \psi\in\operatorname{ind}_H^Q\mathcal{D}(P).$$

Proposition 6.5.1. *Man hat*

$$\mathcal{D}(QwP)\cong\operatorname{ind}_H^Q\mathcal{D}(P)\cong\mathcal{D}(Q)\cdot\delta_H^{-1}\otimes_H\mathcal{D}(P)$$

als (Q,P)-Bimoduln. Die Abbildung

$$\begin{aligned}\gamma\colon \mathcal{D}(Q)\cdot\delta_H^{-1}\otimes_H\mathcal{D}(P) &\longrightarrow \mathcal{D}(QwP),\\ \gamma(\varphi\otimes\psi)(qwp) &= \int_H \varphi(qh)\,\psi(w^{-1}h^{-1}wp)\,\mathrm{d}h\end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus von (Q, P)-Bimoduln und induziert einen Isomorphismus von (L, M)-Bimoduln

$$\tilde{\gamma}\colon U\backslash\mathcal{D}(Q)\cdot\delta_H^{-1}\otimes_H\mathcal{D}(P)/N \xrightarrow{\sim} U\backslash\mathcal{D}(QwP)/N.$$

Beweis. Es ist leicht zu sehen, daß es sich bei $\mathcal{D}(QwP)$ und $\operatorname{ind}_H^Q\mathcal{D}(P)$ um Spielarten des gleichen Objekts handelt; zwei zueinander inverse Isomorphismen lassen sich unmittelbar hinschreiben:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(QwP) \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} \operatorname{ind}_H^Q\mathcal{D}(P), \qquad & f(\varphi)(q)(p) := \varphi(qwp), \\ & g(\psi)(qwp) := \psi(q)(p). \end{aligned}$$

Es ist klar, daß diese R-linear, (Q, P)-äquivariant und invers zueinander sind. Zur Wohldefiniertheit: Sei $\psi \in \operatorname{ind}_H^Q\mathcal{D}(P)$ von links invariant unter $K \in \Omega(Q)$. Es gibt dann endlich viele Repräsentanten $q_1, \dots, q_n$ von Doppelnebenklassen $K\backslash Q/H$ derart, daß

$$\operatorname{Tr}\psi = \dot{\bigcup_{i=1}^{n}} Kq_iH.$$

Wegen $\psi(kq_ih)(p) = \psi(q_i)(w^{-1}hwp)$ kann man nun schließen, daß

$$\operatorname{Tr} g(\psi) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} Kq_iw\operatorname{Tr}\psi(q_i).$$

Also ist $\operatorname{Tr} g(\psi)$ kompakt. Es ist klar, daß $g(\psi)$ lokal konstant ist.

Sei umgekehrt $\varphi \in \mathcal{D}(QwP)$ vorgegeben. Man hat den Homöomorphismus

$$Q \times_H P \longrightarrow QwP, \quad [q, p] \longmapsto qwp,$$

siehe [30, Lemma 6.1.2]. Dabei ist $Q \times_H P$ der Bahnenraum der Operation

$$H \curvearrowright Q \times P, \quad h\cdot(q, p) := (qh^{-1}, hp).$$

Daraus folgt, daß es $K_1 \in \Omega(Q)$ und $K_2 \in \Omega(P)$ sowie endlich viele $q_i \in K_1\backslash Q$ und $p_i \in P/K_2$ derart gibt, daß

$$\operatorname{Tr}\varphi = \bigcup_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}} K_1q_iwp_jK_2.$$

Ist nun $f(\varphi)(q) \neq 0$, dann gibt es $p \in P$ mit $\varphi(qwp) \neq 0$, also $qwp = k_1q_iwp_jk_2 \in Kq_iwp_iL$ für irgendwelche Indizes. Es folgt

$$(kq_i)^{-1}q = wp_jk_2p^{-1}w \in H = Q \cap wPw^{-1},$$

also $q \in k_1 q_i H$ und somit

$$\operatorname{Tr} f(\varphi) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} K q_i H.$$

Mithin ist $\operatorname{Tr} f(\varphi)$ kompakt modulo H. Schließlich ist klar, daß $f(\varphi)(q)$ für festes q kompakten Träger hat. Die Glattheitsbedingungen sind gleichfalls klar.

Es ist bekannt, daß γ, aufgefaßt als Abbildung

$$\gamma\colon \mathcal{D}(Q)\cdot\delta_H^{-1}\otimes_H \mathcal{D}(P) \longrightarrow \operatorname{ind}_H^Q \mathcal{D}(P),$$

ein Isomorphismus ist, vgl. Abschnitt 2.5.1. Es folgt, daß $\tilde{\gamma}$ ein Isomorphismus ist, weil γ ein solcher von (Q,P)-Bimoduln ist. $\square$

Wir schreiben Isomorphismen der Art $\mathcal{D}(P)/N\cdot\delta_P^{-1} \to \mathcal{D}(M)$ mit Hilfe eines Querstrichs, dessen Bedeutung sich aus dem Kontext ergibt:

$$f\colon \mathcal{D}(P)/N\cdot\delta_P^{-1} \longrightarrow \mathcal{D}(M), \quad [\varphi] \longmapsto \bar{\varphi} := f([\varphi]), \quad \bar{\varphi}(m) := \int_N \varphi(mn)\,\mathrm{d}n, \tag{6.9}$$

vgl. Abschnitt 2.4. Sei $\psi \in \mathcal{D}(M)$. Dann gibt es eine Kongruenzuntergruppe $K \in \Omega(G)$ mit $e_{K_M} * \psi * e_{K_M} = \psi$, und die Levizerlegung $P = MN$ erlaubt es, die Funktion

$$\psi e_{K_N} \in \mathcal{D}(P), \quad (\psi e_{K_N})(mn) := \psi(m) e_{K_N}(n),$$

zu definieren. Für diese gilt $\overline{\psi e_{K_N}} = \psi$. Es folgt, daß man den zu (6.9) inversen Isomorphismus folgendermaßen notieren kann:

$$f^{-1}\colon \mathcal{D}(M) \longrightarrow \mathcal{D}(P)/N\cdot\delta_P^{-1}, \quad f^{-1}(\psi) = [\psi e_{K_N}]. \tag{6.10}$$

Lemma 6.5.2 ([30, Th. 2.5.4])**.** Als Charakter von $L \cap {}^wM$ ist

$$\delta_H^2 = \delta_Q \cdot \delta_{^wP} \cdot \delta_{L\cap {}^wP} \cdot \delta_{Q\cap {}^wM}. \qquad \square$$

Proposition 6.5.3. *Man hat den folgenden Isomorphismus von (L,M)-Bimoduln:*

$$\begin{aligned} \theta\colon \delta_Q^{1/2}\cdot U\backslash\mathcal{D}(Q)\cdot\delta_H^{-1}\otimes_H \mathcal{D}(P)/N\cdot\delta_P^{-1/2} \qquad & \\ \longrightarrow \mathcal{D}(L)/(L\cap {}^wN)\cdot\xi\otimes_{L\cap {}^wM} (M\cap U^w)\backslash\mathcal{D}(M), & \\ [\varphi]\otimes[\psi] \longmapsto [\delta_Q^{1/2}\cdot\bar{\varphi}]\otimes[\bar{\psi}\cdot\delta_P^{-1/2}]. \qquad & \end{aligned} \tag{6.11}$$

Dabei ist $\xi = \delta_H^{-1}\cdot\delta_Q^{1/2}\cdot\delta_{^wP}^{1/2} = \delta_{Q\cap {}^wM}^{-1/2}\cdot\delta_{L\cap {}^wP}^{-1/2}$, aufgefaßt als Charakter von $L\cap {}^wM$.

Beweis. Man hat zunächst die folgende Komposition von Isomorphismen:

$$\begin{array}{ccccc} \delta_Q^{1/2} \cdot U\backslash\mathcal{D}(Q) & \longrightarrow & \delta_Q^{-1/2} \cdot \mathcal{D}(L) & \longrightarrow & \mathcal{D}(L) \cdot \delta_Q^{1/2} \\ \Cup & & \Cup & & \Cup \\ [\varphi] & \longmapsto & \bar{\varphi} & \longmapsto & \delta_Q^{1/2}\bar{\varphi}, \end{array} \tag{6.12}$$

entsprechend auf der anderen Seite

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(P)/N \cdot \delta_P^{-1/2} & \longrightarrow & \delta_P^{-1/2} \cdot \mathcal{D}(M) \\ \Cup & & \Cup \\ [\psi] & \longmapsto & \delta_P^{-1/2}\bar{\psi}, \end{array} \tag{6.13}$$

siehe Abschnitt 2.4. Hierdurch entsteht die Abbildungsvorschrift (6.11) mit dem Charakter ξ von $L \cap {}^wM$. Es ist leicht zu sehen, daß θ ein Morphismus von (L, M)-Bimoduln ist. Sei $h_0 \in H$. Dann gibt es eine Zerlegung

$$\begin{aligned} &h_0 = wm_l n_l m_u n_u w^{-1}, \\ &\qquad\qquad m_l \in M^w \cap L,\ m_u \in M^w \cap U,\ n_l \in N^w \cap L,\ n_u \in N^w \cap U. \end{aligned}$$

Sei $l_0 \coloneqq wm_l n_l w^{-1} \in L \cap {}^wP$ und $u_0 \coloneqq wm_u n_u w^{-1} \in U \cap {}^wP$. Es gilt:

$$\begin{aligned} \theta([\varphi] \cdot h_0 \otimes [\psi]) &= [\delta_Q^{1/2} \cdot \overline{\varphi \cdot h_0}] \otimes [\bar{\psi} \cdot \delta_P^{-1/2}], \\ \big(\delta_Q^{1/2} \cdot \overline{\varphi \cdot h_0}\big)(l) &= \delta_Q^{1/2}(l) \cdot \delta_H^{-1}(l_0) \int_U \varphi(ull_0^{-1})\,\mathrm{d}u \\ &= \big(\delta_Q^{1/2} \cdot \delta_H^{-1} \cdot \xi^{-1}\big)(l_0) \cdot \big((\delta_Q^{1/2} \cdot \bar{\varphi}) \cdot l_0\big)(l), \\ \big[\delta_Q^{1/2} \cdot \overline{\varphi \cdot h_0}\big] \otimes [\bar{\psi} \cdot \delta_P^{-1/2}] &= \big[(\delta_Q^{1/2} \cdot \bar{\varphi})\big] \otimes \delta_P^{-1/2}(m_l) \cdot m_l \cdot [\bar{\psi} \cdot \delta_P^{-1/2}], \\ \big(\overline{(w^{-1}h_0 w) \cdot \psi} \cdot \delta_P^{-1/2})\big)(m) &= \delta_P^{-1/2}(m) \int_N \psi(w^{-1}h_0^{-1}wmn)\,\mathrm{d}n \\ &= \delta_P^{-1/2}(m) \int_N \psi(n_u^{-1}m_u^{-1}n_l^{-1}m_l^{-1}mn)\,\mathrm{d}n \\ &= \delta_P^{-1/2}(m_l) \cdot (\delta_P^{-1/2} \cdot m_u \cdot \bar{\psi})(m_l^{-1}m), \quad \text{also} \\ \theta([\varphi] \otimes (w^{-1}h_0 w) \cdot [\psi]) &= [\delta_Q^{1/2} \cdot \bar{\varphi}] \otimes \big[\overline{(w^{-1}h_0 w) \cdot \psi} \cdot \delta_P^{-1/2})\big] \\ &= \big[(\delta_Q^{1/2} \cdot \bar{\varphi})\big] \otimes \delta_P^{-1/2}(m_l) \cdot m_l \cdot [\bar{\psi} \cdot \delta_P^{-1/2}] \\ &= \theta([\varphi] \cdot h_0 \otimes [\psi]). \end{aligned}$$

Das zeigt, daß θ auch H-balanciert ist. Es ist klar, daß θ surjektiv ist. Daß θ auch injektiv ist, folgt nun aus

$$\theta([\varphi]\cdot l_0 \otimes [\psi]) = \theta([\varphi] \otimes [\psi]) = \theta([\varphi] \otimes m_0 \cdot [\psi]), \quad l_0 \in L \cap {}^wN, \quad m_0 \in M \cap U^w,$$

und der Tatsache, daß (6.12) und (6.13) Isomorphismen sind. □

Proposition 6.5.4. *Der Bimodulmorphismus, welcher die natürliche Transformation*

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_L(\mathcal{I}^L_{L\cap {}^wM} \circ w \circ \mathcal{R}^M_{M\cap L^w}(W'), E') \\ \longrightarrow \mathrm{Hom}_M(W', \mathcal{I}^M_{M\cap L^w} \circ w^{-1} \circ \bar{\mathcal{R}}^M_{L\cap {}^wM}(E'))\end{aligned} \tag{6.14}$$

vermittelt, ist durch

$$\begin{aligned}\tau' \colon \mathcal{D}(M) \longrightarrow \mathfrak{X} &:= \mathcal{D}(M)/(M\cap U^w) \otimes_{M\cap L^w} (L\cap {}^w\bar{N})\backslash\mathcal{D}(L) \\ &\quad \otimes_L \mathcal{D}(L)/(L\cap {}^wN) \otimes_{M\cap L^w} (M\cap U^w)\backslash\mathcal{D}(M), \\ e_{K_M} &\longmapsto \frac{1}{\mathrm{vol}(K_{0,M\cap Q^w})} \int_{K_{0,M}} [\lambda\cdot e_{K_M}] \otimes [e_{K_L}] \otimes [e_{K_L}] \otimes [e_{K_M}\cdot\lambda^{-1}]\,\mathrm{d}\lambda\end{aligned}$$

gegeben, vorausgesetzt $\mathrm{vol}(K_{0,M\cap Q^w}) \in R^*$. *Nach Induktionsannahme 6.2.2 handelt es sich bei* (6.14) *um einen natürlichen Isomorphismus.*

Beweis. Sei zur Abkürzung $c := \mathrm{vol}(K_{0,M\cap Q^w})^{-1}$. Der Morphismus τ' setzt sich wie folgt zusammen:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(M) &\xrightarrow{\eta} \mathcal{D}(M)/(M\cap U^w) \otimes_{M\cap L^w} (M\cap U^w)\backslash\mathcal{D}(M) \\ &\xrightarrow{\gamma} \mathcal{D}(M)/(M\cap U^w) \otimes_{M\cap L^w} \mathcal{D}(L\cap {}^wM) \otimes_{M\cap L^w} (M\cap U^w)\backslash\mathcal{D}(M) \\ &\xrightarrow{1\otimes\bar{\eta}\otimes 1} \mathcal{D}(M)/(M\cap U^w) \otimes_{M\cap L^w} (L\cap {}^w\bar{N})\backslash\mathcal{D}(L) \\ &\qquad \otimes_L \mathcal{D}(L)/(L\cap {}^wN) \otimes_{M\cap L^w} (M\cap U^w)\backslash\mathcal{D}(M).\end{aligned}$$

Nach Satz 4.2.5 ist dabei

$$\eta(e_{K_M}) = c\int_{K_{0,M}} [\lambda\cdot e_{K_M}] \otimes [e_{K_M}\cdot\lambda^{-1}]\mathrm{d}\lambda.$$

Unter dem Isomorphismus γ wird dies weiter abgebildet auf

$$\gamma\circ\eta(e_{K_M}) = c\int_{K_{0,M}} [\lambda\cdot e_{K_M}] \otimes e_{K_{L\cap {}^wM}} \otimes [e_{K_M}\cdot\lambda^{-1}]\mathrm{d}\lambda.$$

Die kompakt-offene Untergruppe K_L von L hat die Iwahori-Zerlegung

$$K_L = K_{L\cap {}^w\bar{N}} K_{L\cap {}^wM} K_{L\cap {}^wN},$$

siehe [58, II.1.3 (vi)]. Daraus folgt, daß $e_{L\cap {}^wM}$ unter $\bar{\eta}$ gemäß

$$\mathcal{D}(L\cap {}^wM) \longrightarrow (L\cap {}^w\bar{N})\backslash\mathcal{D}(L)/(L\cap {}^wN), \quad e_{L\cap {}^wM} \longmapsto [e_{K_L}],$$

abgebildet wird, siehe Bem. 6.1.2. Das ergibt nun leicht die Behauptung. □

Proposition 6.5.5. *Seien die Bezeichnungen wie in Prop. 6.5.4. Unter dem Isomorphismus*

$$\mathfrak{X} \xrightarrow{\sim} \bar{N}\backslash\mathcal{D}(\bar{P}w^{-1}Q)/U \otimes_L U\backslash\mathcal{D}(QwP)/N \tag{6.15}$$

wird $\tau'(e_{K_M})$ abgebildet auf

$$\begin{aligned}\Phi' &:= \frac{1}{\mathrm{vol}(K_{0,M\cap Q^w})}\int_{K_{0,M}} [e_{K_{\bar{P}}\lambda w^{-1}K_Q}] \otimes [e_{K_Q w\lambda^{-1}K_P}]\,\mathrm{d}\lambda \\ &\in \bar{N}\backslash\mathcal{D}(\bar{P}w^{-1}Q)/U \otimes_L U\backslash\mathcal{D}(QwP)/N,\end{aligned} \tag{6.16}$$

$$\textit{wobei} \qquad \begin{cases} e_{K_{\bar{P}}\lambda w^{-1}K_Q} := \dfrac{\mathrm{vol}(K_{\bar{P}} \cap w^{-1}K_Q w)}{\mathrm{vol}(K_{\bar{P}}) \cdot \mathrm{vol}(K_Q)} \cdot \mathbb{1}_{K_{\bar{P}}\lambda w^{-1}K_Q}, \\ e_{K_Q w\lambda^{-1}K_P} := \dfrac{\mathrm{vol}(K_P \cap w^{-1}K_Q w)}{\mathrm{vol}(K_P) \cdot \mathrm{vol}(K_Q)} \cdot \mathbb{1}_{K_Q w\lambda^{-1}K_P}. \end{cases}$$

Man erhält die folgende Summenformel:

$$\Phi' = \mathrm{vol}(K_{M\cap\bar{U}^w}) \sum_{\lambda\in K_M\backslash M/(M\cap Q^w)} [e_{K_{\bar{P}}\lambda w^{-1}K_Q}] \otimes [e_{K_Q w\lambda^{-1}K_P}].$$

Beweis. Wir können die beiden Tensorfaktoren in (6.15) getrennt betrachten. Der Isomorphismus setzt sich wie folgt zusammen:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(M)/(M\cap U^w) \otimes_{M\cap L^w} (L\cap {}^w\bar{N})\backslash\mathcal{D}(L) &\xrightarrow{\zeta} \bar{N}\backslash\mathcal{D}(\bar{P}) \otimes_{\bar{P}\cap Q^w} \mathcal{D}(Q)/U \\ &\xrightarrow{\beta} \bar{N}\backslash\mathcal{D}(\bar{P}w^{-1}Q)/U.\end{aligned}$$

Dabei ist

$$\zeta([\lambda\cdot e_{K_M}] \otimes [e_{K_L}]) = [e_{K_{\bar{N}}} e_{K_M}\cdot\lambda] \otimes [e_{K_L}e_{K_U}] = [\lambda\cdot e_{K_{\bar{P}}}] \otimes [e_{K_Q}],$$

und $\beta([e_{K_{\bar{P}}}\cdot\lambda] \otimes [e_{K_Q}])$ ist die Klasse der Funktion $\varphi \in \mathcal{D}(\bar{P}w^{-1}Q)$, die gegeben ist durch

$$\varphi(\bar{p}w^{-1}q) = \int\limits_{\bar{P}\cap Q^w} e_{\lambda K_{\bar{P}}}(\bar{p}x)e_{K_Q}(wx^{-1}w^{-1}q)\,\mathrm{d}x.$$

Es ist nur dann $\varphi(\bar{p}w^{-1}q) \neq 0$, wenn

$$(\bar{p}, q) \in \bigcup_{x_0\in\bar{P}\cap Q^w} (\lambda K_{\bar{P}}x_0^{-1}) \times (wx_0w^{-1}K_Q). \tag{6.17}$$

Dann gilt $\bar{p}w^{-1}q \in K_{\bar{P}}\lambda w^{-1}K_Q$, und für $(\bar{p}, q)$ wie in (6.17) gilt umgekehrt

$$\varphi(\bar{p}w^{-1}q) = \int\limits_{\bar{P}\cap Q^w} e_{K_{\bar{P}}}(x)e_{K_Q}(wx^{-1}w^{-1})\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{vol}(K_{\bar{P}} \cap w^{-1}K_Q w)}{\mathrm{vol}(K_{\bar{P}})\,\mathrm{vol}(K_Q)}.$$

Das zeigt die Behauptung. Der andere Tensorfaktor ergibt sich analog.

Um die Summenformel zu erhalten, argumentieren wir ähnlich wie im Beweis von Satz 4.2.5. Der Integrand bei (6.16) ist rechtsinvariant unter der kompakt-offenen Untergruppe $K_M(K_{0,M} \cap Q^w)$ von $K_{0,M}$. Aufgrund der Iwasawa-Zerlegung $M = K_{0,M}(M \cap Q^w)$ hat man

$$\begin{aligned} K_M\backslash M/(M\cap Q^w) &= K_M\backslash K_{0,M}/(K_{0,M}\cap Q^w) \\ &= K_{0,M}/(K_M K_{0,M\cap Q^w}) = K_{0,M}/(K_{M\cap\bar{U}^w}K_{0,M\cap Q^w}). \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich unmittelbar das Gewünschte. □

6.6 Die Filtrierung

Seien $[u_0, v_0], \ldots, [u_n, v_n] \subseteq \mathcal{W}$ die Bruhatintervalle, welche die $(\mathcal{W}_I, \mathcal{W}_J)$-Doppelnebenklassen repräsentieren. Die Numerierung ist so gewählt, daß sie eine die entgegengesetzte Bruhatordnung verfeinernde Totalordnung darstellt. Die weiteren Betrachtungen sind von der Wahl der Numerierung unabhängig (Abschnitt 5). Sei $w_i \in [u_i, v_i]$ ein beliebiger Vertreter. Es ist dann $v_0 = w_0$ das eindeutige Element maximaler Länge und $u_n = 1$ das eindeutige Element minimaler Länge in $\mathcal{W}$. Sei

$$S_k := U\backslash\mathcal{D}\Big(\dot{\bigcup_{i=0}^{k}} Qw_iP\Big)/N, \quad \text{und} \quad \bar{S}_k := \bar{N}\backslash\mathcal{D}\Big(\dot{\bigcup_{i=0}^{k}} \bar{P}w_{n-i}Q\Big)/U.$$

Insbesondere ist $S_n = S = U\backslash\mathcal{D}(G)/N$ und $\bar{S}_n = \bar{S} = \bar{N}\backslash\mathcal{D}(G)/U$.

Definition 6.6.1. Sei $Z \subseteq G$ eine offene, von rechts P-invariante Teilmenge und $W \in {}_B\mathfrak{M}$. Es sei dann $\mathcal{I}_{Z/N}(W)$ der Untermodul der $\psi \in \mathcal{I}_M(W)$ mit $\mathrm{Tr}\,\psi \subseteq Z/N$.

Lemma 6.6.2. Seien $\varphi \otimes w \in \mathcal{D}(Z/N) \cdot \chi \otimes_M W$ und $\psi \in \mathcal{I}_{Z/N}$ beide nicht Null. Dann gibt es eine Pro-p-Kongruenzuntergruppe $K \in \Omega(G)$ derart, daß, wenn $\Lambda \subseteq G$ ein Repräsentantensystem des endlichen Doppelquotienten $K\backslash G/P$ ist, folgendes gilt:

(1) Die Funktionen φ und ψ sind von links gleichmäßig glatt unter K.

(2) $g^{-1}Kg \subseteq K$ für alle $g \in \Lambda$.

(3) $g \in Z \implies KgM/N \subseteq Z/N$ für alle $g \in \Lambda$.

(4) Es gibt $g_1, \dots, g_n \in \Lambda$ mit $\operatorname{Tr}\psi = \dot{\bigcup}_{i=1}^n Kg_iM/N$ und $g_1', \dots, g_n' \in \Lambda$ mit $\operatorname{Tr}\varphi = \dot{\bigcup}_{i=1}^n Kg_i'M/N$.

(5) $w \in W^{K_M}$.

Beweis. Es ist klar, daß wir ein K mit den Eigenschaften (1) und (5) finden können. Weil Z offen und von rechts P-invariant ist, kann man annehmen, daß K auch Eigenschaft (3) hat. Schließlich kann man von K zu $K' := K \cap \bigcup_{g\in\Lambda} gKg^{-1}$ übergehen, um Eigenschaft (2) zu bekommen. Aussage (4) folgt daraus, daß G/P kompakt ist und die Träger $\operatorname{Tr}\psi$ und $\operatorname{Tr}\varphi$ vollständig in Bilder von (K,P)-Doppelnebenklassen zerfallen. Für ψ folgt das aus

$$\psi(gm^{-1}/N) \cdot \chi(m) = \rho(w) \cdot \psi(g/N), \quad g \in G,\ m \in M;$$

für φ aus $\varphi m^{-1} \otimes mw = \varphi \otimes w \neq 0$ für alle $m \in M$. □

Lemma 6.6.3. Jedes Element $x \in \mathcal{D}(Z/N) \cdot \chi \otimes_M W$ kann man mit einer gewissen Pro-p-Kongruenzuntergruppe $K \in \Omega(G)$ in der Form

$$x = \sum_{g \in K\backslash G/P} \mathbb{1}_{Kg/N} \otimes w_g$$

schreiben, wobei einige der w_g Null sein können und für alle anderen die Zusatzeigenschaft $Kg/N \subseteq Z/N$ gilt.

Beweis. Sei $x = \varphi \otimes w \neq 0$ und φ von links gleichmäßig glatt unter K. Zunächst zerfällt $\operatorname{Tr}\varphi$ in endlich viele Mengen der Form Ky/N, wobei $y \in K\backslash G/N$ und wir annehmen können, daß K die Zusatzeigenschaft hat. Außerdem können wir annehmen, daß jedes solche y von der Form $y = gm$ mit $g \in K\backslash G/P$ und $m \in M$ ist. Es gibt also endlich viele solche g_i und m_j derart, daß

$$x = \sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}} \mathbb{1}_{Kg_im_j/N} \otimes w = \Big(\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{Kg_i/N}\Big) \otimes \Big(\sum_{j=1}^m m_j w\Big).$$

Daraus folgt dann auch, daß die Aussage für irgendwelche Elemente gilt. □

Proposition 6.6.4. *Sei $Z \subseteq G$ eine offene, von rechts P-invariante Teilmenge und $\iota\colon \mathcal{D}(Z/N) \to \mathcal{D}(G/N)$ die Fortsetzung durch Null* (1.3.4)*. Dann ist*

$$\iota \otimes W \colon \mathcal{D}(Z/N) \cdot \chi \otimes_M W \longrightarrow \mathcal{D}(G/N) \cdot \chi \otimes_M W$$

injektiv, und unter dem Isomorphismus (2.12)*, nämlich*

$$\gamma\colon \mathcal{D}(G/N)\cdot\chi\otimes_M W \longrightarrow \mathcal{I}_M(W),$$
$$\gamma(\varphi\otimes w)(g/N) = \int_M \chi^{-1}(m)\,\varphi(gm/N)\,\rho_W(m)\cdot w\,\mathrm{d}m,$$

ist $\mathcal{D}(Z/N)\otimes_M W$ *isomorph zum Unterraum* $\mathcal{I}_{Z/N}$ *der* $\psi\in\mathcal{I}_M(W)$ *mit* $\operatorname{Tr}\psi\subseteq Z/N$.

Beweis. Wir betrachten die Komposition

$$\tilde\gamma\colon \mathcal{D}(Z/N)\cdot\chi\otimes_M W \xrightarrow{\iota\otimes W} \mathcal{D}(G/N)\cdot\chi\otimes_M W \xrightarrow[\sim]{\gamma} \mathcal{I}_M(W). \tag{6.18}$$

Es ist klar, daß, wenn $\operatorname{Tr}\varphi\subseteq Z/N$, so auch $\operatorname{Tr}\gamma(\varphi\otimes w)\subseteq Z/N$ für alle $w\in W$. Somit ist $\operatorname{Bild}(\tilde\gamma)\subseteq\mathcal{I}_{Z/N}(W)$.

Sei umgekehrt $\psi\in\mathcal{I}_{Z/N}(W)$ und $K\in\Omega(G)$ wie in Lemma 6.6.2. Dann kann man $\psi=\sum_{i=1}^n\psi_i$ schreiben, wobei die $\psi_i\in\mathcal{I}_{Z/N}(W)$ Funktionen sind mit $\operatorname{Tr}\psi_i = Kg_iM/N$ und

$$\chi^{-1}(m)\,\rho_W(m)\cdot\psi_i(kg_im/N) = \psi_i(g_i/N),\quad k\in K,\ m\in M.$$

Außerdem kann man das Element

$$x := \sum_{i=1}^n \frac{\mathbb{1}_{Kg_i/N}\otimes\psi(g_i/N)}{\operatorname{vol}(g_i^{-1}Kg_i\cap M)} \in \mathcal{D}(Z/N)\cdot\chi\otimes_M W$$

betrachten. Sei $\varphi := \gamma\circ(\iota\otimes W)(x)$. Es ist nicht schwer zu sehen, daß

$$\operatorname{Tr}\varphi = \dot{\bigcup_{i=1}^n} Kg_iM/N \quad\text{und}\quad \varphi(g_i/N)=\psi_i(g_i/N).$$

Das impliziert $\varphi=\psi$ und somit $\operatorname{Bild}\big(\gamma\circ(\iota\otimes W)\big)=\mathcal{I}_{Z/N}(W)$.

Es bleibt zu zeigen, daß $\iota\otimes W$ injektiv ist. Sei dazu

$$0\neq y := \sum_{g\in K\backslash G/P}\mathbb{1}_{Kg/N}\otimes w_g \in \mathcal{D}(Z/N)\cdot\chi\otimes_M W$$

irgendein Element (Lemma 6.6.3), wobei wir K so wählen können, daß es die Eigenschaften aus Lemma 6.6.2 für alle $\mathbb{1}_{Kg/N}\otimes w_g$ gleichzeitig hat. Vermöge $\iota\otimes W$ können wir y als Element von $\mathcal{D}(G/N)\cdot\chi\otimes_M W$ auffassen. Sei $h\in K\backslash G/P$ mit $w_h\neq 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\gamma(y)(h/N) &= \int_M \chi^{-1}(m)\,\mathbb{1}_{h^{-1}Kh/N}(m/N)\,\rho(m)\cdot w_h\,\mathrm{d}h\\ &= \operatorname{vol}(h^{-1}Kh\cap M)\cdot w_h\neq 0.\end{aligned}$$

Hier wird $h^{-1}Kh\subseteq K$ benutzt, wonach $h^{-1}Kh$ auch eine Pro-p-Kongruenzuntergruppe ist. Also ist $y\neq 0$ in $\mathcal{D}(G/N)\cdot\chi\otimes_M W$. □

Bimoduln vom Typ $\bar{N}\backslash\mathcal{D}(X)/U$, $N\backslash\mathcal{D}(X)/U$ oder $U\backslash\mathcal{D}(X)/N$ sind von nun an immer wie in (6.1) mit Deltafunktoren tordiert.

Proposition 6.6.5.

(1) Die sukzessive Fortsetzung durch Null induziert eine Filtrierung durch (D,B)-Bimoduln

$$S_0 = U\backslash\mathcal{D}(Qw_0P)/N \subseteq \cdots \subseteq S_n = S = U\backslash\mathcal{D}(G)/N \tag{6.19}$$

sowie eine Filtrierung von (B,D)-Bimoduln

$$\bar{S}_0 = \bar{N}\backslash\mathcal{D}(\bar{P}Q)/U \subseteq \cdots \subseteq \bar{S}_n = \bar{S} = \bar{N}\backslash\mathcal{D}(G)/U. \tag{6.20}$$

Für die Unterquotienten gilt

$$S_k/S_{k-1} = U\backslash\mathcal{D}(Qw_kP)/N \quad \textit{und} \quad \bar{S}_k/\bar{S}_{k-1} = \bar{N}\backslash\mathcal{D}(\bar{P}w_{n-k}Q)/U. \tag{6.21}$$

(2) Tensorieren mit $-\otimes_B W$, wobei $W \in {}_B\mathfrak{M}$, bzw. $-\otimes_D E$, wobei $E \in {}_D\mathfrak{M}$, erhält die Filtrierungen und Unterquotienten.

(3) Unter der Induktionsannahme 6.2.2 gilt

$$\begin{aligned} S_k &= \bigoplus_{i=0}^{k} U\backslash\mathcal{D}(Qw_iP)/N \quad \textit{und} \\ S_k * e_{K_M} &= \bigoplus_{i=0}^{k} U\backslash\mathcal{D}(Qw_iP)/N * e_{K_M}, \quad K_M \in \Omega(M), \end{aligned}$$

in ${}_D\mathfrak{M}$, und die Inklusionen (6.19) *sowie die Bildung der Unterquotienten stimmen überein mit den natürlichen Inklusionen und Projektionen*

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow S_{k-1} \otimes_M W \longrightarrow \big(S_{k-1} \otimes_M W\big) \oplus \big(U\backslash\mathcal{D}(Qw_kP)/N \otimes_M W\big) \\ \longrightarrow U\backslash\mathcal{D}(Qw_kP)/N \otimes_M W \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Beweis. (1) Das folgt aus den Filtrierungen in Kapitel 5, auf die man das Bernsteinsche Lemma 1.3.4 sowie die Tatsache, daß die Bildung der Koinvariantenräume bzgl. der unipotenten Radikale exakt ist, anwendet. Siehe auch Guiraud [30, 6.2].

(2) Sei $\iota_k\colon S_{k-1} \to S_k$ die Injektion. Weil Tensorieren immer rechtsexakt ist, genügt es einzusehen, daß

$$S_{k-1} \otimes_B W \xrightarrow{\iota_k \otimes W} S_k \otimes_B W$$

injektiv ist. Das folgt aber aus Lemma 6.6.4.

(3) Sei $e = e_{K_M}$ für $e_{K_M} \in \Omega(M)$. Nach (6.8) gilt

$$\begin{aligned} U\backslash\mathcal{D}(QwP)/N &= \mathcal{D}(L)/(L \cap {}^wN) \otimes_{L\cap {}^wN} (M \cap U^w)\backslash\mathcal{D}(M) \\ &= \mathcal{I}^L_{L\cap {}^wP} \circ w \circ \mathcal{R}^M_{M\cap Q^w}(B) \quad \text{und entsprechend} \\ U\backslash\mathcal{D}(QwP)/N * e &= \mathcal{I}^L_{L\cap {}^wP} \circ w \circ \mathcal{R}^M_{M\cap Q^w}(Be). \end{aligned}$$

Nach Prop. 6.4.2 und Folgerung sind B und Be als Linksmoduln über sich selbst projektiv; Restriktionsfunktoren respektieren projektive Moduln (siehe Proposition 6.4.2); nach Induktionsvoraussetzung ist $\mathcal{I}^L_{L\cap {}^wP}$ linksadjungiert zu dem exakten Funktor $\mathcal{R}^L_{L\cap {}^w\bar{P}}$ und respektiert somit ebenfalls projektive Moduln. Folglich sind $U\backslash\mathcal{D}(QwP)/N$ und $U\backslash\mathcal{D}(QwP)/N*e$ als Linksmoduln projektiv. Die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow S_{k-1} \longrightarrow S_k \longrightarrow U\backslash\mathcal{D}(Qw_kP)/N \longrightarrow 0$$

zerfällt daher, und es gilt $S_k = S_{k-1} \oplus U\backslash\mathcal{D}(Qw_kP)/N$. Daraus folgt sukzessive die direkte Summenzerlegung von S_k, entsprechend für $S_k * e$. □

6.6.1 Die Filtrierung für S^*

Für $E \in {}_D\mathfrak{M}$ sei $S^*(E) := \mathrm{Hom}_D(S, E) = \mathrm{Hom}_L(U\backslash\mathcal{D}(G)/N, E)$ sowie

$$S^*_k(E) := \big\{f \in S^*(E) \;\big|\; f|S_{n-k-1} = 0\big\}, \quad k = 1, \dots, n-1, \quad S^*_n(E) := S^*(E)$$

unter Verwendung der Filtrierung aus (6.19). Dies ergibt in ${}_B\widetilde{\mathfrak{M}}$ eine Filtrierung

$$S^*_0(E) \subseteq S^*_1(E) \subseteq \cdots \subseteq S^*_n(E) = S^*(E). \tag{6.22}$$

Für $e = e_{K_M}$ kann man außerdem den R-Modul $eS^*(E) = \mathrm{Hom}_D(Se, E)$ betrachten. Dieser besitzt ebenfalls eine Filtrierung

$$eS^*_0(E) \subseteq eS^*_1(E) \subseteq \cdots \subseteq eS^*_n(E) = eS^*(E), \tag{6.23}$$

wobei $eS^*_k(E) := \big\{f \in eS^*(E) \;\big|\; f|S_{n-k-1}e = 0\big\}$.

Proposition 6.6.6. *Aus der Induktionsvoraussetzung 6.2.2 folgt für die Unterquotienten der Filtrierung* (6.23)

$$\frac{eS^*_k(E)}{eS^*_{k-1}(E)} \cong eQ^*_k := \mathrm{Hom}(U\backslash\mathcal{D}(Qw_{n-k}P)/N \cdot e, D).$$

Beweis. Aufgrund von Prop. 6.6.5 hat man

$$\begin{aligned} S_{n-k} \cdot e &= S_{n-k-1} \cdot e \oplus U\backslash\mathcal{D}(Qw_{n-k}P)/N \cdot e, \quad k = 1, \ldots, n, \\ S \cdot e &= \bigoplus_{k=0}^{n} U\backslash\mathcal{D}(Qw_k P)/N \cdot e. \end{aligned}$$

Daraus folgt, daß die Sequenz

$$0 \longrightarrow e \cdot S_{k-1}^* \xrightarrow{\iota^*} e \cdot S_k^* \xrightarrow{\pi^*} e \cdot Q_k^* \longrightarrow 0$$

exakt ist. Dabei ist ι^* die Inklusion, und wenn $f \in e \cdot S_k^*$, das heißt $f|S_{n-k-1} \cdot e = 0$, dann ergibt sich $\pi^*(f)$ aus dem Diagramm

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & S_{n-k-1} \cdot e \arrow[r] & S_{n-k} \cdot e \arrow[r] \arrow[d, "f"] & U\backslash\mathcal{D}(Qw_{n-k}P)/N \cdot e \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "\exists!\pi^*(f)"] & 0 \\ & & E & & \end{tikzcd}$$

aufgrund der universellen Eigenschaft des Quotienten. □

6.7 α erhält die Filtrierung

Lemma 6.7.1. Sei $\theta \in \mathcal{D}(G/U \times_L U\backslash G, \delta_Q^{-1})$, siehe (6.18), und weiterhin $Z \subseteq G$ eine von rechts Q-invariante offene Teilmenge. Dann gibt es eine Pro-p-Kongruenzuntergruppe $K \in \Omega(G)$ derart, daß, wenn $\Lambda \subseteq G$ ein Repräsentantensystem von $K\backslash G/Q$ ist, folgendes gilt:

(1) Die Funktion θ ist auf beiden Seiten gleichmäßig glatt unter K, das heißt

$$\theta(k_1 g_1/U, U\backslash g_2 k_2) = \theta(g_1/U, U\backslash g_2), \quad g_1, g_2 \in G,\ k_1, k_2 \in K.$$

(2) $g^{-1}Kg \subseteq K$ für alle $g \in \Lambda$.

(3) $g \in Z \implies Kgl/U \subseteq Z/U$ für alle $g \in \Lambda$ und $l \in L$.

(4) Es gibt $g_1, \ldots, g_n, h_1, \ldots, h_m \in \Lambda$ mit

$$\operatorname{Tr}\theta = \dot{\bigcup_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m \\ l \in L}}} (Kg_i l/U \times U\backslash l^{-1} h_j^{-1} K).$$

Beweis. Die Funktion θ ist gleichmäßig glatt auf beiden Seiten durch ein gewisses $K \in \Omega(G)$, von dem wir annehmen können, daß es sich um eine Pro-p-Kongruenzuntergruppe handelt. Der Träger von θ ist kompakt modulo der Diagonaloperation von L. Sei $\Lambda \subseteq G$ ein Repräsentantensystem von $K\backslash G/Q$. Dieses ist aufgrund der Iwasawa-Zerlegung endlich, und es gibt $g_i, h_j \in \Lambda$ derart, daß man die Zerlegung in (4) hat. Zu jedem $g \in \Lambda \cap Z$ gibt es $K_g \in \Omega(K)$ mit $K_g g \subseteq Z$, weil Z offen ist. Da Z von rechts Q-invariant ist, kann man, indem man eventuell von K zu $K' := \bigcap_{g\in\Lambda} K_g$ übergeht, o. b. d. A. annehmen, daß K auch die Eigenschaft (3) besitzt. Sei nun

$$K'' := K \cap \bigcap_{g\in\Lambda} gKg^{-1} \subseteq K.$$

Dies ist wiederum eine Pro-p-Kongruenzuntergruppe, aber K'' hat nun auch die Eigenschaft (2). Indem man eventuell von K zu K'' übergeht, kann man o. b. d. A. annehmen, daß K alle Eigenschaften besitzt. □

Satz 6.7.2. *Sei $\tau\colon B \to \bar{S} \otimes_D S$ der kanonische Morphismus von B-Bimoduln. Für das Bild dieses Morphismus gilt dann*

$$\tau(B) \subseteq \bigcap_{k=0}^{n} (\bar{S}_k \otimes_D S + \bar{S} \otimes_D S_{n-k-1}).$$

Bemerkung 6.7.3. Der Satz gilt auch ohne die Induktionsannahme 6.2.2.

Beweis. Dieweil es sich bei τ um einen Morphismus von B-Bimoduln handelt, genügt es,

$$\tau(e_{K_M}) \in \bar{S}_k \otimes_D S + \bar{S} \otimes_D S_{n-k}, \quad k = 0, \dots, n,$$

zu zeigen. Dabei ist wie immer K_M der M-Anteil einer Kongruenzuntergruppe $K \in \Omega(G)$. Wir betrachten τ im Sinne des Diagramms

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}(M) \arrow[rr, "\bar{\eta}"] \arrow[d, "\tau"] & & \bar{N}\backslash\mathcal{D}(G)/N \arrow[d, "{[\eta]}"] \\
\bar{N}\backslash\mathcal{D}(G/U \times_L U\backslash G, \delta_Q^{-1})/N & & \bar{N}\backslash\mathcal{D}(G/U) \otimes_L \mathcal{D}(U\backslash G)/N, \arrow[ll, "\sim"']
\end{tikzcd} \tag{6.24}$$

siehe dazu Abschnitt 4.2.2. Nach Satz 6.1.1 gilt $\bar{\eta}(e_{K_M}) = [e_K]$, und setzen wir $\theta := \eta(e_K)$, so daß $\tau(e_{K_M}) = [\theta]$, so gilt dafür die Formel

$$\theta(g/U, U\backslash h) = \int_U e_K(guh)\,\mathrm{d}u. \tag{6.25}$$

Wir betrachten die offenen Mengen $\bar{Z}$, Z und die abgeschlossenen Komplemente $\bar{Z}^c$, Z^c, definiert durch

$$\bar{Z} := \dot{\bigcup_{i=n-k}^{n}} \bar{P}w_i^{-1}Q, \quad \bar{Z}^c := \dot{\bigcup_{i=0}^{n-k-1}} \bar{P}w_i^{-1}Q, \quad Z := \dot{\bigcup_{i=0}^{n-k-1}} Qw_iP, \quad Z^c := \dot{\bigcup_{i=n-k}^{n}} Qw_iP.$$

Es gilt dann also

$$\bar{S}_k = \bar{N}\backslash\mathcal{D}(\bar{Z}/U) \quad \text{und} \quad S_{n-k-1} = \mathcal{D}(U\backslash Z)/N.$$

Aufgrund der Iwahori-Zerlegung ist $K = K_{\bar{N}}K_MK_N \subseteq \bar{P}P$. Die Elemente g, h in der Formel (6.25) liegen in gewissen Bruhatdoppelnebenklassen, das heißt $g \in \bar{P}w^{-1}Q$ und $h \in QzP$ für irgendwelche $w, z \in \mathcal{W}_L\backslash\mathcal{W}/\mathcal{W}_M$. Dann liegt $guh \in \bar{P}w^{-1}QzP$. Wenn $\ell(z) \leq \ell(w)$, aber $z \neq w$, dann ist das Integral in (6.25) nach Prop. 5.4.1 Null, weil dann $\bar{P}w^{-1}QzP \cap \bar{P}P = \emptyset$ gilt. Das impliziert

$$\begin{gathered} \theta|(\bar{Z}^c/U \times U\backslash Z^c) = 0, \\ \operatorname{Tr}\theta \subseteq (\bar{Z}/U \times U\backslash G) \cup (G/U \times U\backslash Z). \end{gathered} \tag{6.26}$$

Wir erinnern daran, daß w_0 das längste und w_n das kürzeste Element ist.

Wir können nun eine Pro-p-Kongruenzuntergruppe Γ, ein Repräsentantensystem $\Lambda \subseteq G$ von $\Gamma\backslash G/Q$ und g_i, h_j mit den vier Eigenschaften aus Lemma 6.7.1 für die offenen Mengen $\bar{Z}$ und Z wählen. Insbesondere haben wir eine Zerlegung

$$\operatorname{Tr}\theta = \dot{\bigcup_{\substack{1\leq i\leq \nu \\ 1\leq j\leq m \\ l\in L}}} (\Gamma g_il/U \times U\backslash l^{-1}h_j^{-1}\Gamma).$$

Wir können $\theta = \sum_{i,j}\theta_{ij}$ schreiben, wobei θ_{ij} die Funktion ist, die auf der offenen, modulo L kompakten Menge $\bigcup_{l\in L}(\Gamma g_il/U \times U\backslash l^{-1}h_j^{-1}\Gamma)$ mit θ übereinstimmt und sonst Null ist.

Um die Behauptung zu zeigen, verwenden wir den Isomorphismus

$$\begin{aligned} \xi\colon \mathcal{D}(G/U) \otimes_L \delta_Q^{-1}\cdot\mathcal{D}(U\backslash G) &\longrightarrow \mathcal{D}(G/U \times_L U\backslash G, \delta_Q^{-1}), \\ \xi(\varphi\otimes\psi)(g/U, U\backslash h) &= \int_L \delta_Q^{-1}(l)\,\varphi(gl/U)\,\psi(U\backslash l^{-1}h)\,\mathrm{d}l. \end{aligned}$$

Sei nun $f_{ij} := \mathbb{1}_{\Gamma g_i/U} \otimes \mathbb{1}_{U\backslash h_j^{-1}\Gamma}$. Es ist dann

$$\operatorname{Tr}\xi(f_{ij}) = \bigcup_{l_0\in L}(\Gamma g_il_0/U \times U\backslash l_0^{-1}h_j^{-1}\Gamma)$$

Weil die Untergruppen $g_i^{-1}\Gamma g_i$ und $h_j^{-1}\Gamma h_j$ nach dem Lemma Pro-p-Kongruenzuntergruppen sind (diese besitzen eine Iwahorizerlegung, und alle abgeschlossenen Untergruppen haben ein invertierbares Maß in R), erhält man

$$\begin{aligned}\xi(f_{ij})(\gamma_1 g_i l_0/U, U\backslash l_0^{-1}h_j^{-1}\gamma_2) &= \delta_Q(l_0)\cdot c_{ij},\\ c_{ij} &:= \int_L \mathbb{1}_{g_i^{-1}\Gamma g_i/U}(l/U)\ \mathbb{1}_{U\backslash h_j^{-1}\Gamma h_j}(U\backslash l^{-1})\,\mathrm{d}l\\ &= \mathrm{vol}(g_i^{-1}\Gamma g_i\cap h_j^{-1}\Gamma h_j\cap L)\in R^*,\end{aligned}$$

und andererseits $\theta(\gamma_1 g_i l_0/U, U\backslash l_0^{-1}h_j^{-1}\gamma_2) = \delta_Q(l_0)\cdot\theta(g_i/U, U\backslash h_j)$. Sei

$$\tilde\theta_{ij} := \theta(g_i/U, U\backslash h_j)\cdot c_{ij}^{-1}\cdot f_{ij}.$$

Dann folgt aus dem Vorangehenden

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{D}(G/U)\otimes_L \delta_Q^{-1}\cdot\mathcal{D}(U\backslash G) & \xrightarrow{\ \xi\ } & \mathcal{D}(G/U\times_L U\backslash G, \delta_Q^{-1})\\ \Cup & & \Cup\\ \tilde\theta_{ij} & \longmapsto & \theta_{ij}.\end{array}$$

Hiervon kann man jetzt die Behauptung ablesen: Wir können annehmen, daß die g_i und h_j so numeriert sind, daß

$$g_1,\dots,g_r\in\bar Z,\quad g_{r+1},\dots,g_\nu\in\bar Z^c,\quad h_1,\dots,h_s\in Z,\quad h_{s+1},\dots,h_m\in Z^c.$$

Dann ist

- $[\tilde\theta_{ij}]\in\bar S_k\otimes S$ für $1\le i\le r$ und $1\le j\le m$,
- $[\tilde\theta_{ij}]=0$ für $r+1\le i\le n$ und $s+1\le j\le m$ und
- $[\tilde\theta_{ij}]\in\bar S\otimes S_{n-k-1}$ für $r+1\le i\le n$ und $1\le j\le s$. □

Folgerung 6.7.4. Der Morphismus $\alpha\colon S^*(E) = B\operatorname{Hom}_D(S,E)\to\bar S\otimes_D E$ erhält die Filtrierung, das heißt

$$\alpha(S_k^*)\subseteq\bar S_k\otimes_D E,\qquad k=1,\dots,n.$$

Beweis. Sei $f\in S_k^*(E)$, das heißt $f|S_{n-k-1}=0$. Wir betrachten

$$B\xrightarrow{\ \tau\ }\bar S\otimes_D S\xrightarrow{\bar S\otimes f} S\otimes_D E.$$

Per definitionem ist $\alpha(f) = (\bar S\otimes f)\circ\tau(e_{K_M})$, wenn man eine Pro-$p$-Kongruenzuntergruppe $K\in\Omega(G)$ so wählt, daß $e_{K_M}*f=f$. Aus Satz 6.7.2 folgt dann sofort die Behauptung. □

6.8 α induziert den Isomorphismus

6.8.1 Die induzierte Abbildung

Wir setzen auseinander, wie die von $\alpha\colon B\operatorname{Hom}_D(S,E)\to \bar S\otimes_D E$ auf den Unterquotienten induzierte Abbildung aussieht. Sei $e=e_{K_M}$, wobei K_M der M-Anteil einer Kongruenzuntergruppe $K\in\Omega(G)$ ist, und

$$F=eF\in eS_k^*(E)\iff F|S_{n-k-1}e=0. \tag{6.27}$$

Weil $G_n^{n-k}:=\dot\bigcup_{i=n-k}^n Qw_iP\subseteq G$ abgeschlossen ist, kann man nach Lemma 1.3.4 den Einschränkungsmorphismus

$$\pi\colon S\longrightarrow S_{n-k-1}^{\perp}:=U\backslash\mathcal{D}(G_n^{n-k})/N$$

betrachten, und wegen (6.27) kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\tau"] & \bar S\otimes_L S \arrow[r, "\bar S\otimes F"] \arrow[d, "S\otimes\pi"] & \bar S\otimes_L E \\ & \bar S\otimes_L S_{n-k-1}^{\perp}. \arrow[ur, "\bar S\otimes F|S_{n-k-1}^{\perp}"'] & \end{tikzcd}$$

Man hat nun

$$(S\otimes\pi)\circ\tau(e)\in \bar N\backslash\mathcal{D}(G)/U\otimes_L U\backslash\mathcal{D}\Big(\dot\bigcup_{i=n-k}^{n} Qw_iP\Big)/N,$$

aber wir wissen aus Abschnitt 6.7, daß dieser Ausdruck in dem Untermodul $\bar S_k\otimes_L S_{n-k-1}^{\perp}$ liegt, das heißt

$$(S\otimes\pi)\circ\tau(e)\in \bar N\backslash\mathcal{D}\Big(\dot\bigcup_{i=n-k}^{n}\bar Pw_i^{-1}Q\Big)/U\otimes_L U\backslash\mathcal{D}\Big(\dot\bigcup_{i=n-k}^{n} Qw_iP\Big)/N.$$

Wir setzen $w:=w_{n-k}$. Die Menge $\dot\bigcup_{i=n-k}^n \bar Pw_i^{-1}Q\subseteq G$ ist offen, und $\bar Pw^{-1}Q$ ist in dieser offenen Menge abgeschlossen. Man hat also einen Einschränkungsmorphismus

$$\rho\colon \bar N\backslash\mathcal{D}\Big(\dot\bigcup_{i=n-k}^{n}\bar Pw_i^{-1}Q\Big)/U\longrightarrow \bar N\backslash\mathcal{D}(\bar Pw^{-1}Q)/U.$$

Wir bemerken nun, daß $QwP\subseteq\dot\bigcup_{i=n-k}^n Qw_iP$ *offen* ist, und mit dem gleichen Argument wie zuvor sieht man, daß

$$\Phi:=(\rho\otimes\pi)\circ\tau(e)\in \bar N\backslash\mathcal{D}(\bar Pw^{-1}Q)/U\otimes_L U\backslash\mathcal{D}(QwP)/N.$$

Der Morphismus F induziert $\tilde{F}\colon U\backslash\mathcal{D}(QwP)/N * e \to E$, und die von α auf den Unterquotienten induzierte Abbildung ergibt sich dann gemäß

$$\begin{aligned} B\operatorname{Hom}_D(U\backslash\mathcal{D}(QwP)/N, E) &\longrightarrow \bar{N}\backslash\mathcal{D}(\bar{P}w^{-1}Q)/U \otimes_L E, \\ \tilde{F} &\longmapsto (1 \otimes \tilde{F})(\Phi). \end{aligned}$$

Wir haben für Φ die folgenden Formeln (Satz 4.2.5):

$$\begin{aligned} \Phi = \Phi_w &= \frac{1}{\operatorname{vol}(K_{0,Q})} \int_{K_0} [(\lambda \cdot e_K)|\bar{P}w^{-1}Q] \otimes [(e_K \cdot \lambda^{-1})|QwP]\,\mathrm{d}\lambda \\ &= \operatorname{vol}(K_{\bar{U}}) \sum_{\lambda \in K\backslash K_0/K_{0,Q}} [(\lambda \cdot e_K)|\bar{P}w^{-1}Q] \otimes [(e_K \cdot \lambda^{-1})|QwP]. \end{aligned} \tag{6.28}$$

Für die Integralform muß $\operatorname{vol}(K_{0,Q}) \in R^*$ gefordert werden. Weil K eine Pro-p-Kongruenzuntergruppe ist, hat man stets $\operatorname{vol}(K_{\bar{U}}) \in R^*$, wenn $p \in R^*$, was wir ohnehin voraussetzen. Der Rest des Beweises besteht nun darin zu zeigen, daß Φ (bis auf einen invertierbaren Faktor) mit dem Element Φ' aus Prop. 6.5.5 übereinstimmt.

6.8.2 Fallreduzierung

Wir nehmen im weiteren an, daß die Voraussetzungen von Satz 4.3.4 (3) gelten.

Satz 6.8.1. *Wenn der Morphismus $\alpha_E\colon B\operatorname{Hom}_D(S,E) \to \bar{S} \otimes_D E$ für alle kuspidalen $E \in {}_D\mathfrak{M}$ ein Isomorphismus ist, dann für alle E schlechthin.*

Beweis. Mit vollständiger Induktion über den halbeinfachen Rang von L: Wenn dieser minimal ist, dann hat L keine echten parabolischen Untergruppen, so daß jeder D-Modul per definitionem kuspidal ist. Sei L also beliebig. Aufgrund der Zerlegung $E = E^{\mathrm{c}} \oplus E^{\mathrm{nc}}$, siehe Satz 4.3.4, und weil α_E mit endlichen direkten Summen verträglich ist, genügt es, $E = E^{\mathrm{nc}}$ anzunehmen. Dann ist aber

$$\eta\colon E \longrightarrow V := \bigoplus_{L' < L} \underbrace{\mathcal{D}(L/U') \otimes_{L'} U'\backslash\mathcal{D}(L) \otimes_L E}_{=\mathcal{I}_{L'}^L \mathcal{R}_{L'}^L(E)}$$

ein Monomorphismus, siehe Lemma 4.3.6, wobei sich die direkte Summe über die endlich vielen echten standardparabolischen Untergruppen $Q' = L'U' \subsetneq L$ erstreckt. Man erhält daraus die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{\eta} V \longrightarrow W := \operatorname{coker}\eta \longrightarrow 0 \tag{6.29}$$

in der Kategorie der rein nicht-kuspidalen D-Moduln (Satz 4.3.4).

Wir wollen im nächsten Schritt zeigen, daß α_V ein Isomorphismus ist. Es genügt, nur einen der direkten Summanden zu betrachten. Wir fixieren also eine standardparabolische Untergruppe $Q' = L'U' \subseteq Q$ und setzen zur Abkürzung $V' := \mathcal{R}^L_{L'}(E)$. Wir machen uns die Transitivität von Induktion und Restriktion zunutze, siehe Prop. 4.2.8. Man hat zunächst

$$S = \mathcal{R}^G_L \mathcal{I}^G_M(B) \quad \text{und} \quad \bar{S} \otimes_D \mathcal{I}^L_{L'}(V') = \bar{\mathcal{R}}^G_M \mathcal{I}^G_L \mathcal{I}^L_{L'}(V') = \bar{\mathcal{R}}^G_M \mathcal{I}^G_{L'}(V').$$

Aufgrund der ersten Adjungiertheit kann man das folgende Diagramm betrachten:

$$\begin{tikzcd} B\operatorname{Hom}_L(U\backslash\mathcal{D}(G)/N, \mathcal{I}^L_{L'}(V')) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"', "1.\ \text{Adj.}"] & \bar{S} \otimes_D \mathcal{I}^L_{L'}(V') \\ B\operatorname{Hom}_L(U'\backslash\mathcal{D}(G)/N, V'). \arrow[ur, "\alpha'"'] & \end{tikzcd} \tag{6.30}$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist der Morphismus α', der wie α, nur mit Q' statt Q, konstruiert wird, ein Isomorphismus, und da auch β ein Isomorphismus ist, genügt es nun einzusehen, daß das Diagramm (6.30) kommutiert. Wir verwenden dazu wieder Bimoduln und Lemma 2.4.6. Sei

$$\varphi \in B\operatorname{Hom}_L\big(U\backslash\mathcal{D}(G)/N, \mathcal{D}(L)/(L\cap U') \otimes_{L'} \otimes V'\big).$$

Dann wird $\alpha' \circ \beta(\varphi)$ von der Komposition von Bimodulmorphismen

$$\begin{aligned} &\mathcal{D}(M) \xrightarrow{\tau} \bar{N}\backslash\mathcal{D}(G)/U \otimes_L U\backslash\mathcal{D}(G)/N \\ &\xrightarrow{1\otimes\eta^L_{L'}\otimes 1} \bar{N}\backslash\mathcal{D}(G)/U \otimes_L \mathcal{D}(L)/(L\cap U') \otimes_{L'} (L\cap U')\backslash\mathcal{D}(L) \otimes_L U\backslash\mathcal{D}(G)/N \\ &\xrightarrow{1\otimes 1\otimes 1\otimes\varphi} \bar{N}\backslash\mathcal{D}(G)/U \otimes_L \mathcal{D}(L)/(L\cap U') \otimes_{L'} (L\cap U')\backslash\mathcal{D}(L)/(L\cap U') \otimes_{L'} V' \\ &\qquad\qquad\qquad \xrightarrow{1\otimes 1\otimes\varepsilon^L_{L'}\otimes 1} \bar{N}\backslash\mathcal{D}(G)/U \otimes_L \mathcal{D}(L)/(L\cap U') \otimes_{L'} V' \end{aligned}$$

vermittelt. Dabei sind

$$\begin{aligned} \eta^L_{L'}\colon \mathcal{D}(L) &\longrightarrow \mathcal{D}(L)/(L\cap U') \otimes_{L'} (L\cap U')\backslash\mathcal{D}(L), \\ \varepsilon^L_{L'}\colon (L\cap U')\backslash\mathcal{D}(L)/(L\cap U') &\longrightarrow \mathcal{D}(L') \end{aligned}$$

wie gehabt Eins und Koeins der ersten Adjungiertheit. Nun gilt

$$\begin{aligned} &(1\otimes 1\otimes\varepsilon^L_{L'}) \circ (1\otimes 1\otimes 1\otimes\varphi) \circ (1\otimes\eta^L_{L'}) \circ \tau \\ &\qquad = \Big(1 \otimes \big((1\otimes\varepsilon^L_{L'}) \circ (\eta^L_{L'}\otimes 1)\big) \otimes 1\Big) \circ (1\otimes\varphi) \circ \tau = (1\otimes\varphi)\circ\tau. \end{aligned}$$

Das ist aber gerade der Bimodulmorphismus, der α vermittelt. Also kommutiert das Diagramm (6.30). Wir haben hier die »Zickzackgleichungen« (4.2) verwendet.

Aus der exakten Sequenz (6.29) erhalten wir nun im letzten Schritt das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & B\mathrm{Hom}_D(S,E) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_E"] & B\mathrm{Hom}_D(S,V) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_V", "\sim"'] & B\mathrm{Hom}_D(S,W) \arrow[d, "\alpha_W"] \\ 0 \arrow[r] & \bar{S}\otimes_D E \arrow[r] & \bar{S}\otimes_D V \arrow[r] & \bar{S}\otimes_D W. \end{tikzcd}$$

Weil es sich bei α_V erwiesenermaßen um einen Isomorphismus handelt, ist α_E ein Monomorphismus. Weil V rein nicht-kuspidal ist, so ist auch W als Quotient von V rein nicht-kuspidal. Indem wir E durch W ersetzen, sehen wir, daß auch α_W ein Monomorphismus sein muß. Daraus folgt aber, daß α_E sogar ein Isomorphismus ist. □

Folgerung 6.8.2. Satz 6.2.1 gilt schon unter der Induktionsannahme 6.2.2, wenn die von α induzierte Abbildung

$$B\,\mathrm{Hom}_L(U\backslash\mathcal{D}(QwP)/N,E)\longrightarrow \bar{N}\backslash\mathcal{D}(\bar{P}w^{-1}Q)/U\otimes_L E$$

ein Isomorphismus ist für alle $w\in W_{L,M}$ mit

$$L\subseteq wMw^{-1}. \tag{6.31}$$

Beweis. Aufgrund von Satz 6.8.1 kann man o. b. d. A. annehmen, daß E kuspidal ist; dann ist aber

$$\bar{N}\backslash\mathcal{D}(\bar{P}w^{-1}Q)/U\otimes_L E=\mathcal{I}^M_{M\cap L^w}\circ w^{-1}\circ\bar{\mathcal{R}}^L_{L\cap {}^wM}(E)=0,$$

wenn $L\cap w\bar{P}w^{-1}\subsetneq L$, und

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_L(U\backslash\mathcal{D}(QwP)/N,E)&=\mathrm{Hom}_L\big(\mathcal{I}^L_{L\cap {}^wM}\circ w\circ\mathcal{R}^M_{M\cap L^w}(B),E\big)\\&=\mathrm{Hom}_{L\cap {}^wM}\big(w\circ\mathcal{R}^M_{M\cap L^w}(B),\bar{\mathcal{R}}^L_{L\cap {}^wM}(E)\big)=0,\end{aligned}$$

wenn $L\cap wPw^{-1}\subsetneq L$, beides aufgrund der Definition der Kuspidalität, wobei wir beim zweiten die Induktionsannahme haben verwenden können. Übrig bleibt also der Fall, daß $L\cap w\bar{P}w^{-1}=L$ oder $L\cap wPw^{-1}=L$. Hieraus folgt in jedem Fall $L\cap wMw^{-1}=L$, also (6.31). □

Bemerkung und Vermutung 6.8.3. Die Idee, auf den Fall $L \subseteq wMw^{-1}$ zu reduzieren, findet sich auch bei Kazhdan [35, S. 53 f.]. Wir benötigen dies lediglich, um im folgenden Abschnitt

$$\bar{P}wQ \cap PwQ = MwQ \tag{6.32}$$

zeigen zu können. Diese Fallreduzierung ist jedoch nur ein Notbehelf. Eleganter wäre es, wenn wir sie gar nicht benötigten. Wir vermuten, daß (6.32) auch allgemein richtig ist, aber es ist nicht gelungen, das zu beweisen.

6.9 Φ' ist bis auf einen Faktor gleich Φ

Lemma 6.9.1. Wenn w das eindeutig bestimmte Element minimaler Länge in $W_M w W_L$ ist, dann gilt $MwQ \cap K_0 = K_{0,M} w K_{0,Q}$.

Beweis. Sei $Q' := wQw^{-1}$. Es ist $M \cap K_0$ eine maximale kompakte Untergruppe und $M \cap Q'$ eine standardparabolische Untergruppe von M bzgl. $M \cap P_0$, und nach der Iwasawa-Zerlegung gilt $M = (M \cap K_0)(M \cap Q')$, also $MQ' = (M \cap K_0)Q'$. Daraus folgt aber sofort $MQ' \cap K_0 = (M \cap K_0)Q' \cap K_0 = (M \cap K_0)(Q' \cap K_0)$, und wegen $w \in K_0$ ist das äquivalent zur Behauptung. □

6.9.1 $\bar{P}wQ \cap PwQ = MwQ$

Wir stellen hier zunächst einige Ergebnisse aus Borel [12, § 21] zusammen: Sei S ein maximaler über k zerfallender (nicht zentraler) Torus von G und Φ das relative Wurzelsystem des Paares (G, S). Dieses Wurzelsystem muß nicht reduziert sein, d. h., daß neben $\alpha \in \Phi$ auch $2\alpha \in \Phi$ oder $\frac{1}{2}\alpha \in \Phi$ vorkommen kann. Wenn $\Psi \subseteq \Phi$ eine *abgeschlossene* Teilmenge von Φ ist, d. h.

$$\forall \alpha, \beta \in \Psi \colon \alpha + \beta \in \Phi \implies \alpha + \beta \in \Psi,$$

so bezeichnet man mit Ψ_{nd} die Teilmenge derjenigen Wurzeln $\alpha \in \Psi$, für die $\frac{1}{2}\alpha \notin \Psi$. Für $\alpha \in \Phi$ bezeichnet man mit (α) die Teilmenge der positiven Vielfachen von α in Φ. Sei $\mathcal{W}_G = \mathcal{N}_G(S)/\mathcal{Z}_G(S)$ die relative Weylgruppe, P_0 eine minimale parabolische Untergruppe, Φ^+ das System der von P_0 definierten positiven Wurzeln, $\Phi^- := -\Phi^+$ und Δ die von P_0 definierte Basis von Φ.

Zu jedem $\alpha \in \Phi$ gibt es eine eindeutig bestimmte abgeschlossene zusammenhängende unipotente k-Untergruppe $N_{(\alpha)}$, die von $\mathcal{Z}_G(S) = M_0$ normalisiert wird und welche die Lie-Algebra

$$\mathfrak{g}_{(\alpha)} = \bigoplus_{\beta \in (\alpha)} \mathfrak{g}_\beta$$

besitzt. Die Lie-Algebra ist also entweder $\mathfrak{g}_\alpha$ oder $\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha}$, je nachdem, ob 2α vorkommt oder nicht. Siehe Borel [12, Proposition 21.9.i].

Zu jeder abgeschlossenen Teilmenge $\Psi \subseteq \Phi$ gibt es eine eindeutig bestimmte abgeschlossene zusammenhängende unipotente k-Untergruppe N_Ψ, die von M_0 normalisiert wird und welche die Lie-Algebra

$$\mathfrak{g}_{(\alpha)} = \bigoplus_{\beta \in \Psi} \mathfrak{g}_\beta$$

besitzt. Die Untergruppe N_Ψ ist in beliebiger Reihenfolge das Produkt der $N_{(\alpha)}$ mit $\alpha \in \Psi_{\mathrm{nd}}$. Mit anderen Worten ist der Produktmorphismus

$$\prod_{\alpha \in \Psi_{\mathrm{nd}}} N_{(\alpha)} \longrightarrow N_\Psi$$

bei beliebiger Anordnung der Faktoren ein Isomorphismus von Varietäten. Siehe Borel [12, Proposition 21.9.ii].

Für die unipotenten Radikale von P_0 und $\bar{P}_0$ gilt in diesem Sinne

$$N_0 = \prod_{\alpha \in \Phi^+_{\mathrm{nd}}} N_{(\alpha)} \quad \text{und} \quad \bar{N}_0 = \prod_{\alpha \in \Phi^-_{\mathrm{nd}}} N_{(\alpha)}.$$

Siehe Borel [12, Abschnitt 21.11].

Die standardparabolischen Untergruppen von G bzgl. P_0 befinden sich in Bijektion mit den Teilmengen $I \subseteq \Delta$. Sei $\langle I \rangle$ die Menge der ganzzahligen Linearkombinationen in Φ von Elementen aus I und $\Phi(I)^+ := \Phi^+ \setminus \langle I \rangle$. Also besteht $\Phi(I)^+$ aus denjenigen $\alpha = \sum_{\beta \in \Delta} c_\beta \beta \in \Phi^+$ mit $c_\beta > 0$ für mindestens ein $\beta \notin I$. Die von I bestimmte standardparabolische Gruppe P_I hat den Standardlevifaktor $M_I = \mathcal{Z}_G(S_I)$ mit dem Torus $S_I := (\bigcap_{\alpha \in I} \ker \alpha)^\circ$. Die Gruppe M_I wird erzeugt von M_0 und denjenigen $N_{(\alpha)}$ mit $\alpha \in \langle I \rangle$. Das unipotente Radikal von P_I ist $N_I = N_{\Phi(I)^+}$. Siehe Borel [12, Abschnitt 21.11].

Lemma 6.9.2. Die Teilmenge $\Phi(I)^+ \subseteq \Phi^+$ ist abgeschlossen, und man hat $\Phi(I)^+_{\mathrm{nd}} = \Phi^+_{\mathrm{nd}} \setminus \langle I \rangle$.

Beweis. Seien $\alpha_1, \alpha_2 \in \Phi^+$ mit $c_{\beta_1}(\alpha_1), c_{\beta_2}(\alpha_2) > 0$ für $\beta_1, \beta_2 \in I$. Es ist klar, daß dann $c_{\beta_i}(\alpha_1 + \alpha_2) > 0$. Daraus folgt die erste Behauptung. Was die zweite Behauptung betrifft, so gilt offensichtlich $(\Phi^+ \setminus \langle I \rangle)_{\mathrm{nd}} \supseteq \Phi^+_{\mathrm{nd}} \setminus \langle I \rangle$. »$\subseteq$«: Sei $\alpha \in \Phi^+ \setminus \langle I \rangle$ mit $\frac{\alpha}{2} \notin \Phi^+ \setminus \langle I \rangle$. Wäre $\alpha \notin \Phi^+_{\mathrm{nd}}$, hieße das $\frac{\alpha}{2} \in \Phi^+ \cap \langle I \rangle$, also auch $\alpha \in \Phi^+ \cap \langle I \rangle$, im Widerspruch zur Annahme an α. □

Da man die gleichen Betrachtungen für das System der negativen Wurzeln durchführen kann, findet man für die unipotenten Radikale von P_I und $\bar{P}_I$

nach dem Obenstehenden die Produktzerlegungen

$$N_I = \prod_{\Phi^+_{\mathrm{nd}} \smallsetminus \langle I \rangle} N_{(\alpha)} \quad \text{und} \quad \bar{N}_I = \prod_{\Phi^-_{\mathrm{nd}} \smallsetminus \langle I \rangle} N_{(\alpha)}.$$

Die Weylgruppe $\mathcal{W}_G = \mathcal{N}_G(S)/\mathcal{Z}_G(S)$ operiert auf $\Phi \subseteq X(S)$ durch »Zwischenschaltung« innerer Automorphismen. Wir notieren dies in der Form

$$w.\alpha(s) := \alpha(w^{-1}sw), \quad w \in \mathcal{W}_G,\ \alpha \in \Phi,\ s \in S.$$

Lemma 6.9.3. Man hat die Zerlegung

$$U = (U \cap M^w)(U \cap N^w)(U \cap \bar{N}^w) = (U \cap P^w)(U \cap \bar{N}^w).$$

Beweis. Für das unipotente Radikal U kann man

$$U = \prod_{\alpha \in \Phi(J)^+_{\mathrm{nd}}} N_{(\alpha)}$$

schreiben, wobei es nicht auf die Reihenfolge der Faktoren dieses Produkts ankommt. Das Wurzelsystem $\Phi(J)^+_{\mathrm{nd}} = \Phi^+_{\mathrm{nd}} \smallsetminus \langle J \rangle$ können wir disjunkt so aufteilen, daß wir die folgende Zerlegung erhalten:

$$\begin{aligned} U = \prod_{\alpha \in \Phi^+_{\mathrm{nd}} \smallsetminus \langle J \rangle} N_{(\alpha)} &= \Big(\prod_{\substack{\alpha \in \Phi^+_{\mathrm{nd}} \smallsetminus \langle J \rangle \\ w.\alpha \in \langle I \rangle}} N_{(\alpha)} \Big) \times \Big(\prod_{\substack{\alpha \in \Phi^+_{\mathrm{nd}} \smallsetminus \langle J \rangle \\ w.\alpha \in \Phi^+ \smallsetminus \langle I \rangle}} N_{(\alpha)} \Big) \times \Big(\prod_{\substack{\alpha \in \Phi^+_{\mathrm{nd}} \smallsetminus \langle J \rangle \\ w.\alpha \in \Phi^- \smallsetminus \langle I \rangle}} N_{(\alpha)} \Big) \\ &= (U \cap M^w)(U \cap N^w)(U \cap \bar{N}^w). \end{aligned}$$ □

Lemma 6.9.4. Für alle parabolischen Untergruppen P, Q gilt das Kriterium

$$\bar{P}wQ \cap PwQ = MwQ \iff \bar{N}w \cap PwQ \subseteq MwQ. \tag{6.33}$$

Beweis. »$\Rightarrow$«: Man schließt $\bar{N}w \cap PwQ \subseteq \bar{P}wQ \cap PwQ = MwQ$. »$\Leftarrow$«: Hier kann man $\bar{P}wQ \cap PwQ = M(\bar{N}w \cap PwQ)Q \subseteq MwQ$ schließen. Die Inklusion »$\supseteq$« ist trivialerweise auch richtig. □

Lemma 6.9.5. Sei $P = MN$ eine *minimale* parabolische Untergruppe von G. Dann sind die Multiplikationsabbildungen

$$(N \cap w\bar{N}w^{-1}) \times P \longrightarrow PwP \quad \text{und} \quad (\bar{N} \cap w\bar{N}w^{-1}) \times P \longrightarrow \bar{P}wP, \tag{6.34}$$

die also gemäß $(x, y) \mapsto xwy$ abbilden, Isomorphismen von Varietäten.

Beweis. Borel [12, 21.14] beweist, daß die Produktabbildung $(N \cap w\bar{N}w^{-1}) \times N \to NwN$ ein Isomorphismus von Varietäten ist. Da $M = \mathcal{Z}_G(S)$ von w, identifiziert mit einem beliebigen Vertreter aus $\mathcal{N}_G(S)$, normalisiert wird, hat man $PwP = NwNM$, und daraus folgt leicht die Behauptung für die erste Abbildung, aber auch für die zweite, da

$$\bar{P}wP = w_0Pw_0wP = w_0(N \cap w_0w\bar{N}w^{-1}w_0)w_0wP = (\bar{N} \cap w\bar{N}w^{-1})wP. \qquad \square$$

Proposition 6.9.6. *Sei $P = MN$ eine minimale parabolische Untergruppe von G. Dann gilt $\bar{P}wP \cap PwP = wP$.*

Beweis. Die Inklusion »$\supseteq$« ist klar. »$\subseteq$«: Sei $x \in \bar{P}wP \cap PwP$. Nach Lemma 6.9.5 kann man $x = \bar{n}wp = nwq$ mit $\bar{n} \in \bar{N} \cap {}^w\bar{N}$, $n \in N \cap {}^w\bar{N}$ und $p, q \in P$ schreiben. Es folgt $pq^{-1} = (w^{-1}\bar{n}^{-1}w)(w^{-1}nw) \in P \cap \bar{N} = \{1\}$, also $p = q$ und $n = \bar{n} \in N \cap \bar{N} = \{1\}$, so daß $x \in wP$. $\square$

Proposition 6.9.7. *Seien wiederum $P = MN$ und $Q = LU$ standardparabolisch. Unter Annahme 6.31, also $L \subseteq w^{-1}Mw$, gilt*

$$\bar{P}wQ \cap PwQ = MwQ.$$

Beweis. Wegen Lemma 6.9.3 folgt aus der Voraussetzung

$$PwQ = PwU = Pw(w^{-1}Pw \cap U)(w^{-1}\bar{N}w \cap U) = Pw(w^{-1}\bar{N}w \cap U). \tag{6.35}$$

Wegen $\bar{N} \cap P = \{1\}$ folgt daraus aber, daß das Kriterium aus Lemma 6.9.4 erfüllt ist:

$$\bar{N}w \cap PwQ = \bar{N}w \cap Pw(w^{-1}\bar{N}w \cap U) \overset{(*)}{=} \bar{N}w \cap wU \subseteq wQ \subseteq MwQ.$$

Wir begründen $(*)$: »$\subseteq$«: Sei $x \in \bar{N}w \cap Pw(w^{-1}\bar{N}w \cap U)$, das heißt

$$x = \bar{n}_1w = pwu \quad \text{mit} \quad u = w^{-1}\bar{n}_2w, \quad \bar{n}_i \in \bar{N},\ p \in P,\ u \in U.$$

Es folgt $p = \bar{n}_1\bar{n}_2^{-1}$, also $p = 1$ und somit $x \in \bar{N}w \cap wU$. Die Inklusion »$\supseteq$« ist trivial. $\square$

Proposition 6.9.8. *Sei K eine Kongruenzgruppe von G und $\lambda \in K_{0,M}$. Unter Annahme* (6.31) *gilt $\lambda wK \cap PwQ = K_P\lambda wK_Q$.*

Beweis. Da K ein Normalteiler von K_0 ist, wird $K_{0,P}$ von λ normalisiert, und wenn die Behauptung für $\lambda = 1$ gilt, folgt daraus sofort $\lambda wK \cap PwQ = \lambda(wK \cap PwQ) = \lambda K_P wK_Q = K_P \lambda wK_Q$. Es genügt daher, folgendes zu zeigen:

$$K \cap w^{-1}PwQ = w^{-1}K_P wK_Q.$$

»$\supseteq$«: Da man $w \in K_0$ wählen kann und w somit K normalisiert, erhält man

$$w^{-1}K_P wK_Q \subseteq w^{-1}KwK \cap w^{-1}PwQ = K \cap w^{-1}PwQ.$$

»$\subseteq$«: Wir behaupten, daß man folgendermaßen schließen kann:

$$\begin{aligned} K \cap w^{-1}PwQ &= K \cap w^{-1}Pw(w^{-1}\bar{N}w \cap U) \\ &= w^{-1}K_P w(w^{-1}K_{\bar{N}}w \cap U) \subseteq w^{-1}K_P w(K \cap U) \subseteq w^{-1}K_P wK_Q. \end{aligned}$$

Das erste Gleichheitszeichen ist (6.35). Es bleibt daher

$$K \cap w^{-1}Pw(w^{-1}\bar{N}w \cap U) = w^{-1}K_P w(w^{-1}K_{\bar{N}}w \cap U)$$

zu beweisen. Die Inklusion »$\supseteq$« ist klar. »$\subseteq$«: Sei

$$k = (w^{-1}pw)u \quad \text{mit} \quad u = w^{-1}\bar{n}w, \quad k \in K,\ p \in P,\ \bar{n} \in \bar{N},\ u \in U.$$

Es folgt $p\bar{n} \in K$, da ${}^wK = K$, und aus der Iwahorizerlegung $K = K_P K_{\bar{N}}$ nebst $P \cap \bar{N} = \{1\}$ ergibt sich weiter $p \in K_P$ und $\bar{n} \in K_{\bar{N}}$. Das zeigt bereits das Gewünschte. □

Beispiel 6.9.9. Wir führen das Beispiel GL_3 aus Abschnitt 5.5.2 weiter. Proposition 6.9.6 kann man unmittelbar verifizieren:

(1) $\bar{B}B \cap B = B$.

(2) $\bar{B}s_1B \cap Bs_1B = \begin{pmatrix} 0 & \# & * \\ \# & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} * & * & * \\ \# & * & * \\ 0 & 0 & \# \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \# & * \\ \# & * & * \\ 0 & 0 & \# \end{pmatrix} = s_1B.$

(3) $\bar{B}s_2B \cap Bs_2B$ besteht aus den Matrizen

$$x \in Bs_2B = \begin{pmatrix} \# & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & \# & * \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Daraus folgt $\bar{B}s_2B \cap Bs_2B = \begin{pmatrix} \# & * & * \\ 0 & 0 & \# \\ 0 & \# & * \end{pmatrix} = s_2B.$

(4) $\bar{B}s_1s_2B \cap Bs_1s_2B = \begin{pmatrix} * & * & * \\ \# & * & * \\ 0 & \# & * \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} 0 & 0 & \# \\ \# & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \# \\ \# & * & * \\ 0 & \# & * \end{pmatrix} = s_1s_2B.$$

(5) $\bar{B}s_2s_1B \cap Bs_2s_1B$ besteht aus den Matrizen

$$x \in \bar{B}s_2s_1B = \begin{pmatrix} 0 & \# & * \\ 0 & * & * \\ \# & * & * \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{vmatrix} x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{vmatrix} = 0.$$

Daraus folgt $\bar{B}s_2s_1B \cap Bs_2s_1B = \begin{pmatrix} 0 & \# & * \\ 0 & 0 & \# \\ \# & * & * \end{pmatrix} = s_2s_1B.$

(6) $\bar{B}w_0B \cap Bw_0B = \bar{B}w_0B = w_0B.$

Für die nicht-minimalen parabolischen Untergruppen P und Q verifizieren wir Kriterium 6.9.4. Es gibt die folgenden Doppelnebenklassen:

$$\begin{aligned} Pw_0Q &= Bs_2s_1B \cup Bw_0B, & PQ &= B \cup Bs_1B \cup Bs_2B \cup Bs_1s_2B, \\ Qw_0P &= Bs_1s_2B \cup Bw_0B, & QP &= B \cup Bs_1B \cup Bs_2B \cup Bs_2s_1B, \\ P &= B \cup Bs_1B, & Pw_0P &= Bs_2B \cup Bs_1s_2B \cup Bs_2s_1B \cup Bw_0B, \\ Q &= B \cup Bs_2B, & Qw_0Q &= Bs_1B \cup Bs_1s_2B \cup Bs_2s_1B \cup Bw_0B. \end{aligned}$$

Zu betrachten sind Durchschnitte mit

$$\bar{N} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ * & * & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{N}w_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & * & * \end{pmatrix}, \quad \bar{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 \\ * & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{U}w_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & * \\ 1 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

Zur Erinnerung:

$$\begin{aligned} P &= \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & \# \end{pmatrix} \cap \mathrm{GL}_3, & Q &= \begin{pmatrix} \# & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \cap \mathrm{GL}_3, \\ w_0P &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \# \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \cap \mathrm{GL}_3, & w_0Q &= \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & * & * \\ \# & * & * \end{pmatrix} \cap \mathrm{GL}_3\,. \end{aligned}$$

Man sieht sofort $\bar{N}w_0 \cup \bar{U}w_0 \subseteq Bw_0B$, außerdem $\bar{N}w_0 \cup \bar{U}w_0 \subseteq w_0Q \cap w_0P$. Daraus folgt

$$\bar{N}w_0 \cap Pw_0Q = \bar{N}w_0 \cap Pw_0P = \bar{N}w_0 \quad \text{und} \quad \bar{U}w_0 \cap Qw_0P = \bar{U}w_0 \cap Qw_0Q = \bar{U}w_0,$$

somit

$$\begin{aligned} &\bar{N}w_0 \cap Pw_0Q \subseteq w_0Q, && \bar{N}w_0 \cap Pw_0P \subseteq w_0P,\\ &\bar{U}w_0 \cap Qw_0P \subseteq w_0P, && \bar{U}w_0 \cap Qw_0Q \subseteq w_0Q. \end{aligned}$$

Für $w = 1$ bleiben vier Fälle. Zwei davon sind trivial, nämlich $\bar{N} \cap P = \{1\} = \bar{U} \cap Q$. Schließlich ist

$$\bar{N} \cap PQ = \bar{N} \cap Bs_2B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \# & 1 \end{pmatrix} \subseteq Q,$$

$$\bar{U} \cap QP = \bar{U} \cap Bs_1B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \# & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \subseteq P.$$

6.9.2 Induktionsschritt

Sei $V := \bar{N}\backslash\mathcal{D}(\bar{P}w^{-1}Q)/U \otimes_L U\backslash\mathcal{D}(QwP)/N$ und $f \in \mathcal{D}(K_0, V)$ die durch $f(\lambda) := [\mathbb{1}_{K\lambda}] \otimes [\mathbb{1}_{\lambda^{-1}K}]$ definierte Funktion. Dabei ist $\mathbb{1}_{K\lambda}$ als die auf $\bar{P}w^{-1}Q$ und $\mathbb{1}_{\lambda^{-1}K}$ als die auf QwP eingeschränkte Funktion zu verstehen. Nach Satz 4.2.5 und Prop. 6.5.5 hat man

$$\Phi = r \sum_{\lambda \in K\backslash K_0/K_{0,Q}} f(\lambda) \quad \text{und} \quad \Phi' = s \sum_{\lambda \in K_M\backslash K_{0,M}/K_{0,M\cap Q^w}} [\mathbb{1}_{K_{\bar{P}}\lambda w^{-1}K_Q}] \otimes [\mathbb{1}_{K_Q w\lambda^{-1}K_P}]$$

mit zwei gewissen Konstanten $r, s \in p^{\mathbb{Z}}$, die als Brüche von Volumina von Pro-p-Untergruppen von G in R invertierbar sind, wenn $p \in R^*$. Mit Hilfe von Lemma 6.9.1 und Prop. 6.9.7 erhält man

$$\begin{aligned} K\lambda \cap \bar{P}w^{-1}Q \cap Pw^{-1}Q &= K\lambda \cap Mw^{-1}Q \cap K_0 \\ &= K\lambda \cap K_{0,M}w^{-1}K_{0,Q} \\ &= K\lambda \cap (K_{0,M}K_{0,Q^w}) \cdot w^{-1}. \end{aligned}$$

Also gilt $f(\lambda) \neq 0$ nur für $\lambda \in (KK_{0,M}K_{0,Q^w}) \cdot w^{-1}$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} sr^{-1} \cdot \Phi = s \sum_{\lambda \in K\backslash K_0/K_{0,Q}} f(\lambda) &= s \sum_{\lambda \in K_M\backslash K_{0,M}/K_{0,M\cap Q^w}} f(\lambda w^{-1}) = s \sum_{\lambda \in K_M\backslash K_{0,M}/K_{0,M\cap Q^w}} [\mathbb{1}_{K\lambda w^{-1}}] \otimes [\mathbb{1}_{w\lambda^{-1}K}] \\ &\overset{(*)}{=} s \sum_{\lambda \in K_M\backslash K_{0,M}/K_{0,M\cap Q^w}} [\mathbb{1}_{K_{\bar{P}}\lambda w^{-1}K_Q}] \otimes [\mathbb{1}_{K_Q w\lambda^{-1}K_P}] = \Phi'. \end{aligned}$$

Hierbei ergibt sich der Schritt $(*)$ mit Hilfe von Prop. 6.9.8.

6.10 Halbeinfacher Rang 1

Wir wollen den einfachsten nicht-trivialen Fall als Beispiel auseinandersetzen: Sei G von halbeinfachem Rang 1. Das ist äquivalent dazu, daß $W = \{1, s\}$. Sei $P = MN$ unsere fixierte minimale parabolische Untergruppe. Für die entgegengesetzte hat man dann $sPs = \bar{P} = M\bar{N}$. In den Filtrierungen des Geometrischen Lemmas für (P, P) und $(\bar{P}, P)$ tritt jeweils nur ein einziger nicht-trivialer Unterbimodul auf, nämlich zu den offenen Doppelnebenklassen $\bar{P}P$ und PsP; hingegen sind $\bar{P}sP$ und P abgeschlossen in G. Sei $\chi = \delta_P^{1/2}$, weiter $B = \mathcal{D}(M)$ und

$$\begin{aligned} C_1 &:= \chi \cdot N\backslash\mathcal{D}(PsP/N) \cdot \chi, & C &:= \chi \cdot N\backslash\mathcal{D}(G/N) \cdot \chi, \\ \bar{C}_2 &:= \chi^{-1} \cdot \bar{N}\backslash\mathcal{D}(\bar{P}sP)/N \cdot \chi^{-1}, & \bar{C} &:= \chi^{-1} \cdot \bar{N}\backslash\mathcal{D}(G)/N \cdot \chi^{-1}. \end{aligned}$$

Wir erhalten die beiden kurzen exakten Sequenzen

$$\begin{aligned} &0 \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\iota} C \xrightarrow{\varepsilon} B \longrightarrow 0, \\ &0 \longrightarrow B \xrightarrow{\bar{\eta}} \bar{C} \xrightarrow{\pi} \bar{C}_2 \longrightarrow 0. \end{aligned} \tag{6.36}$$

Der Morphismus ι wird von der Fortsetzung durch Null induziert, und ε ist die Koeins der ersten Adjungiertheit:

$$\varepsilon[\varphi](m) = \int_N \frac{\varphi(nm)}{\chi(m)} \,\mathrm{d}n.$$

Der Morphismus π wird von der Einschränkung induziert, und $\bar{\eta}$ ist die Eins der zweiten Adjungiertheit:

$$\bar{\eta}(\varphi) = \left[e_{K_{\bar{N}}}(\chi^{-1}\varphi)e_{K_N}\right], \quad \text{falls} \quad \varphi = e_{K_M} * \varphi * e_{K_M}.$$

Man hat also $C_1 = \ker\varepsilon$ und $\bar{C}_2 = \operatorname{coker}\bar{\eta}$. Wir betrachten nun $C^* = B\operatorname{Hom}_B(C, B)$. Sei $C_1^* := \left\{f \in C^* \;\middle|\; f|C_1 = 0\right\}$. Wir erhalten dann eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow C_1^* \longrightarrow C^* \longrightarrow B\operatorname{Hom}_B(C_1, B) \longrightarrow 0,$$

wobei der zweite Pfeil die Inklusion und der dritte die Einschränkung auf C_1 ist. Sei nun ${}^s\mathcal{D}(M)$ der Bimodul $\mathcal{D}(M)$, versehen mit der von

$$(m_1\varphi m_2)(x) := \varphi(sm_1^{-1}sxm_2^{-1}), \quad m_1, m_2, x \in M,\ \varphi \in \mathcal{D}(M),$$

induzierten Struktur in ${}_B\mathfrak{M}_B$ und $e = e_{K_M}$ zu einer Kongruenzuntergruppe $K \in \Omega(G)$. Es gilt dann $C_1 \cong {}^s\mathcal{D}(M) \cong \bar{C}_2$, siehe (6.8), und wir haben wegen $sK_Ms = K_M$ den Isomorphismus von linken B-Moduln

$${}^s\mathcal{D}(M) * e \longrightarrow \mathcal{D}(M) * e, \quad \varphi \longmapsto \big(x \longmapsto \varphi(sxs)\big).$$

Nun ist Be projektiv, und daher folgt $Ce \cong Be \oplus Be$ aus (6.36). Es genügt nun zu zeigen, daß in dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & eC_1^* & \longrightarrow & eC^* & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_B(C_1e, B) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \big\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & eB & \longrightarrow & e\bar{C} & \longrightarrow & e\bar{C}_2 & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

mit exakten Zeilen die senkrechten Pfeile, insbesondere α, Isomorphismen von R-Moduln sind. Die unbezeichneten werden von α induziert. Aber dieses Diagramm geht in das folgende über:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_B(Be, B) & \longrightarrow & eC^* & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_B(Be, B) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \big\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & eB & \longrightarrow & e\bar{C} & \longrightarrow & eB & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

Die unbezeichneten senkrechten Pfeile kommen von dem kanonischen Isomophismus $B \operatorname{Hom}_B(B, B) \to B$, $b\varphi \mapsto \varphi(b)$ und sind daher selbst Isomorphismen von R-Moduln. Aus dem Fünferlemma folgt dann, daß auch α ein solcher ist.

7. FOLGERUNGEN

In diesem Kapitel sollen einige Schlußfolgerungen daraus gezogen werden, daß

$$\mathcal{D}(M) \otimes_M \operatorname{Hom}_L(U\backslash\mathcal{D}(G/N), E) \cong \bar{N}\backslash\mathcal{D}(G/U) \otimes_L E. \tag{7.1}$$

Es ist eine Fortsetzung des Abschnitts 4.3. Die Bezeichnungen und Begriffe sind dieselben wie dort, und es werden nun der Restriktions- und Induktionsfunktor bezüglich $\bar{P}$ hinzugenommen, also

$$\bar{\mathcal{I}} = \bar{X} \otimes_B -, \quad \bar{X} = \bigoplus_{M<G} \mathcal{D}(G/\bar{N}) \cdot \chi_P^{-1};$$
$$\bar{\mathcal{R}} = \bar{Y} \otimes_A -, \quad \bar{Y} = \bigoplus_{M<G} \chi_P^{-1} \cdot \bar{N}\backslash\mathcal{D}(G).$$

Im Falle der normierten Funktoren ist $\chi_P = \delta_P^{1/2}$, im Falle der nicht normierten hingegen $\chi_P = 1$. Des weiteren ist $\delta_{\bar{P}} = \delta_P^{-1}$. Der Faktor χ_P wird im folgenden explizit nicht mehr erwähnt, sondern als implizit in den $\mathcal{D}(M)$-Modulstrukturen enthalten betrachtet. Sei

$$C \coloneqq Y \otimes_A X = \bigoplus_{L,M<G} U\backslash\mathcal{D}(G/N) \quad \text{und} \quad \bar{C} \coloneqq \bar{Y} \otimes_A X = \bigoplus_{M,L<G} \bar{N}\backslash\mathcal{D}(G/U).$$

Hierbei ist C die aus Abschnitt 4.3 bekannte Koalgebra in B-$\mathfrak{Bim}$ über der Algebra

$$B = \bigoplus_{M<G} \mathcal{D}(M).$$

7.1 *Die zweite Adjungiertheit*

Aus (7.1) kann man die »klassische« zweite Adjungiertheit von Bernstein folgern:

> **Satz 7.1.1.** *Sei $P = M \ltimes N \subsetneq G$ eine parabolische Untergruppe, $\bar{\mathcal{R}}_M$ die parabolische Restriktion via $\bar{P}$ und $\mathcal{I}_M$ die parabolische Induktion via P. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus* $\operatorname{Hom}_G(\mathcal{I}_M(W), V) \cong \operatorname{Hom}_M(W, \bar{\mathcal{R}}_M(V))$.

Beweis. Sei W ein $\mathcal{D}(M)$-Modul und V ein $\mathcal{D}(G)$-Modul, beide von links. Dann hat man zunächst den natürlichen Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}_G(\mathcal{D}(G/N) \otimes_M W, V) = \mathrm{Hom}_M(W, \mathrm{Hom}_G(\mathcal{D}(G/N), V)_0), \tag{7.2}$$

wobei $\mathrm{Hom}_G(\mathcal{D}(G/N), V)_0 \coloneqq \mathcal{D}(M) \otimes_M \mathrm{Hom}_G(\mathcal{D}(G/N), V)$ gesetzt wurde. Wir wenden nun Satz 4.3.4 an. Nach diesem können wir $V = V^{\mathrm{c}} \oplus V'$ schreiben, wobei V^{c} der maximale kuspidale Untermodul von V ist und V' isomorph zu einem C-Komodul. Nun ist (7.2) mit dieser Zerlegung verträglich, und weil ${}_A\mathfrak{M}^{\mathrm{c}}$ und ${}^C\mathfrak{M}$ orthogonal zueinander sind, ergibt sich für $V = V^{\mathrm{c}}$ auf beiden Seiten Null. Daher kann man ohne Einschränkung annehmen, daß V selbst zu einem C-Komodul isomorph ist, also von der Form

$$V = \mathcal{S}(E) = X \boxtimes_C E, \quad E \in {}^C\mathfrak{M}.$$

Das Kotensorprodukt ist ein Kern. Sei

$$0 \longrightarrow X \boxtimes_C E \longrightarrow X \otimes_B E \longrightarrow X \otimes_B C \otimes_B E$$

die definierende exakte Sequenz und $\mathcal{F} \coloneqq \mathrm{Hom}_G(\mathcal{D}(G/N), -)_0$. Man erhält das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{F}(X \boxtimes_C E) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & \mathcal{F}(X \otimes_B E) \arrow[r] \arrow[d, "\sim"] & \mathcal{F}(X \otimes_B C \otimes_B E) \arrow[d, "\sim"] \\
0 \arrow[r] & \bar{\mathcal{R}}_M(X \boxtimes_C E) \arrow[r] & \bar{\mathcal{R}}_M(X \otimes_B E) \arrow[r] & \bar{\mathcal{R}}_M(X \otimes_B C \otimes_B E).
\end{tikzcd}$$

Zur Erläuterung: Die Funktoren $\mathcal{F}$ und $\bar{\mathcal{R}}_M$ sind linksexakt. Der mittige und der rechte vertikale Pfeil kommen durch die in $J \in {}_B\mathfrak{M}$ natürlichen Isomorphismen

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}(X \otimes_B J) = \mathrm{Hom}_G(\mathcal{D}(G/N), X \otimes_B J)_0 \cong \mathrm{Hom}_B(Y \otimes_G \mathcal{D}(G/N), J)_0 \\
&\cong \prod_{L<G} \mathrm{Hom}_B(U\backslash\mathcal{D}(G/N), J_L)_0 \overset{(*)}{\cong} \bigoplus_{L<G} \bar{N}\backslash\mathcal{D}(G/U) \otimes_L J_L = \bar{\mathcal{R}}_M(X \otimes_B J)
\end{aligned}$$

zustande, wobei das auftretende Produkt endlich ist und daher das gleiche wie die direkte Summe. An der Stelle $(*)$ geht das Ergebnis (7.1) aus Kap. 6 ein. Schließlich existiert der gestrichelte vertikale Pfeil aufgrund der universellen Eigenschaft des Kerns $\bar{\mathcal{R}}_M(X \boxtimes_C E)$. Eine »Diagrammjagd« ergibt, daß es sich um einen Isomorphismus handelt. $\square$

Bemerkung 7.1.2. Indem man die Rollen von P und $\bar{P}$ vertauscht, erhält man die Aussage, daß auch $(\bar{\mathcal{I}}, \mathcal{R})$ ein adjungiertes Paar ist.

Man kann nun noch eine verallgemeinerte zweite Adjungiertheit anschreiben:

Folgerung 7.1.3. $(X \otimes_B -, \bar{Y} \otimes_A -)$ ist ein adjungiertes Paar von Funktoren zwischen den Kategorien ${}_A\mathfrak{M}$ und ${}_B\mathfrak{M}$.

Beweis. Das folgt ohne weiteres aus Satz 7.1.1:

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_G(X \otimes_B W, V) &= \prod_{M<G} \mathrm{Hom}_G(\mathcal{D}(G/N) \otimes_M W_M, V) \\ &= \prod_{M<G} \mathrm{Hom}_M(W_M, \bar{N}\backslash\mathcal{D}(G) \otimes_G V) \\ &= \mathrm{Hom}_B(W, \bar{Y} \otimes_A V).\end{aligned}$$ □

7.2 Die verallgemeinerte Dualitätsaussage

Zu C kann man die duale Algebra ${}^*C = B\,\mathrm{Hom}_B(C, B)$ bilden, wobei hier die Morphismen $C \to B$ in ${}_B\mathfrak{M}$ (also der Linksmoduln) betrachtet werden und B auf denselben durch Rechtstranslation operiert.

Satz 7.2.1. *Es gilt* $B\,\mathrm{Hom}_B(C, E) = \bar{C} \otimes_B E$. *Insbesondere ist* ${}^*C = \bar{C}$.

Beweis. Das ergibt sich unmittelbar aus (7.1) nur mit Hilfe der Definition von C, $\bar{C}$ und der Morphismen in ${}_B\mathfrak{M}$:

$$\begin{aligned}B\,\mathrm{Hom}_B(C, E) &= \prod_{L,M<G} \mathcal{D}(M) \otimes_M \mathrm{Hom}_L(U\backslash\mathcal{D}(G/N), E_L) \\ &= \prod_{L,M<G} \bar{N}\backslash\mathcal{D}(G/U) \otimes_L E_L = \bar{C} \otimes_B E.\end{aligned}$$

Indem man $E = B$ setzt, ergibt sich die zweite Aussage. □

Bemerkung 7.2.2. Hierdurch erhält $\bar{C}$ die Struktur einer Algebra.

7.3 Die zweite Zerlegung von ${}_A\mathfrak{M}$

Seien $\bar{\eta}\colon \mathcal{D}(M) \longrightarrow \bar{N}\backslash\mathcal{D}(G/N)$ und $\bar{\varepsilon}\colon \mathcal{D}(G/N) \otimes_M \bar{N}\backslash\mathcal{D}(G)$ die Morphismen von Bimoduln, welche Eins und Koeins der Adjunktion $(\mathcal{I}, \bar{\mathcal{R}})$ induzieren. Die Ergebnisse aus Kapitel 4 besagen, daß $\bar{C} = \bar{Y} \otimes_A X$ eine Algebra in B-$\mathfrak{Bim}$ mit der Eins $\bar{\eta}$ und der Multiplikation $\bar{\nabla} = \bar{Y} \otimes \bar{\varepsilon} \otimes X$ ist. Auch $Y \otimes_A \bar{X}$ ist eine Algebra. Seien

$$\bar{\eta}_M \colon \mathcal{D}(M) \longrightarrow \bar{N}\backslash\mathcal{D}(G/N) \quad \text{und} \qquad \bar{\varepsilon}_M \colon \mathcal{D}(G/N) \otimes_M \bar{N}\backslash\mathcal{D}(G) \longrightarrow \mathcal{D}(G)$$

Eins und Koeins der zweiten Adjunktion bei festem M. Es besteht der folgende Zusammenhang:

$$\begin{aligned} \bar{\eta}\colon \bigoplus_{L<G} \mathcal{D}(L) &\longrightarrow \bigoplus_{L,M<G} \bar{U}\backslash\mathcal{D}(G/N), & \sum_{L<G} b_L &\longmapsto \sum_{L<G} \bar{\eta}_L(b_L), \\ \bar{\varepsilon}\colon \bigoplus_{M<G} \mathcal{D}(G/N) \otimes_M \bar{N}\backslash\mathcal{D}(G) &\longrightarrow \mathcal{D}(G), & \sum_{M<G} z_M &\longmapsto \sum_{M<G} \bar{\varepsilon}_M(z_M). \end{aligned}$$

Proposition 7.3.1. *Die Involution $\mathcal{D}(G) \to \mathcal{D}(G)$, $\varphi \mapsto \check{\varphi}$, $\check{\varphi}(g) = \varphi(g^{-1})$, induziert einen Isomorphismus $\bar{Y} \otimes_A X \to Y \otimes_A \bar{X}$ von R-Moduln, der ein Antimorphismus von Algebren ist, das heißt $\bar{Y} \otimes_A X = (Y \otimes_A \bar{X})^{\mathrm{op}}$.*

Gemäß Kapitel 4 ist $\bar{\mathcal{R}}(V)$ für $V \in {}_A\mathfrak{M}$ ein $\bar{C}$-Modul, und $\bar{\mathcal{R}}$ wird in diesem Sinne von dem Vergißfunktor ${}_{\bar{C}}\mathfrak{M} \to {}_B\mathfrak{M}$ faktorisiert.

Satz 7.3.2.

(1) *Aufgefaßt als Funktor ${}_A\mathfrak{M} \to {}_{\bar{C}}\mathfrak{M}$, ist $\bar{\mathcal{R}}$ rechtsadjungiert zu $\bar{\mathcal{S}} := X \otimes_{\bar{C}} -$.*

(2) *Der Funktor $\bar{\mathcal{S}}$ ist volltreu, und ${}_{\bar{C}}\mathfrak{M}$ ist somit isomorph zu einer vollen Unterkategorie von ${}_A\mathfrak{M}$.*

(3) *Man hat die kategorielle Zerlegung ${}_A\mathfrak{M} = {}_A\mathfrak{M}^{\mathfrak{c}} \times {}_{\bar{C}}\mathfrak{M}$.*

(4) *${}_{\bar{C}}\mathfrak{M} = {}^{C}\mathfrak{M}$.*

Beweis. (1) Die Eins dieser Adjunktion wird von der Eins $\bar{\eta}\colon B \to \bar{C}$ der Algebra $\bar{C}$ induziert, die Koeins von dem Morphismus ζ, der sich aus dem folgenden Diagramm ergibt:

$$\begin{tikzcd} X \otimes_B \bar{C} \otimes_B \bar{Y} \arrow[r, "\varphi"] & X \otimes_B \bar{Y} \arrow[r] \arrow[dr, "\bar{\varepsilon}"'] & X \otimes_{\bar{C}} \bar{Y} \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\zeta"] & 0 \\ & & \mathcal{D}(G). & \end{tikzcd}$$

Erläuterung: Der Morphismus φ ist durch $\varphi = \bar{\varepsilon} \otimes X \otimes \bar{Y} - X \otimes \bar{Y} \otimes \bar{\varepsilon}$ gegeben, wobei $\bar{\varepsilon} \otimes X$ die $\bar{C}$-Multiplikation von $X_{\bar{C}}$ ist, $\bar{Y} \otimes \bar{\varepsilon}$ jene von ${}_{\bar{C}}\bar{Y}$, und das Tensorprodukt $Y \otimes_{\bar{C}} \bar{Y}$ ist per definitionem der Kokern von φ. Wegen $\bar{\varepsilon} \circ \varphi = 0$ existiert in eindeutiger Weise ζ und bildet gemäß $\zeta(x \otimes \bar{y}) = \bar{\eta}(x \otimes \bar{y})$ ab. Die »Zickzackgleichungen« für $\bar{\eta}$ und ζ folgen daher aus denjenigen für $\bar{\eta}$ und $\bar{\varepsilon}$.

(2) Sei $W \in {}_{\bar{C}}\mathfrak{M}$. Die W-Komponente von $\bar{\eta}$ ist dann

$$W = B \otimes_B W \xrightarrow{\bar{\eta} \otimes W} \bar{C} \otimes_{\bar{C}} W = W,$$

und das ist ein natürlicher Isomorphismus. Die Behauptungen ergeben sich nun aus Lemma 4.1.4.

(3) Der Beweis ist ähnlich wie jener von Satz 4.3.4: Für alle $V \in {}_A\mathfrak{M}$ ergibt

$$\bar{\mathcal{R}}(V) \xrightarrow{\bar{\eta}_{\bar{\mathcal{R}}(V)}} \bar{\mathcal{R}}\bar{\mathcal{I}}\bar{\mathcal{R}}(V) \xrightarrow{\bar{\mathcal{R}}(\zeta_V)} \bar{\mathcal{R}}(V)$$

die Identität auf $\bar{\mathcal{R}}(V)$, und weil $\bar{\eta}_{\bar{\mathcal{R}}(V)}$ ein (in V natürlicher) Isomorphismus ist, so auch $\bar{\mathcal{R}}(\zeta_V)$. Wendet man den exakten Funktor $\bar{\mathcal{R}}$ auf die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \ker \zeta_V \xrightarrow{\iota} \bar{\mathcal{S}}\bar{\mathcal{R}}(V) \xrightarrow{\zeta_V} V \xrightarrow{\pi} \operatorname{coker} \zeta_V \longrightarrow 0$$

an, so folgt aus der vorhergehenden Bemerkung, daß

$$\bar{\mathcal{R}}(\ker \zeta_V) = 0 = \bar{\mathcal{R}}(\operatorname{coker} \zeta_V),$$

daß also $\ker \zeta_V$ und $\operatorname{coker} \zeta_V$ kuspidal sind. Nach Satz 3.9.6 gibt es einen Monomorphismus $f\colon \ker \zeta_V \to I$ in einen injektiven kuspidalen A-Modul I, welcher von ι faktorisiert wird:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \ker \zeta_V \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, tail, "g"'] & \bar{\mathcal{S}}\bar{\mathcal{R}}(V) \arrow[d, dashed, "\exists \tilde{g}"] \\ & & I. \end{tikzcd}$$

Wegen $\operatorname{Hom}_A(\bar{\mathcal{S}}\bar{\mathcal{R}}(V), I) = \operatorname{Hom}_{\bar{C}}(\bar{\mathcal{R}}(V), \bar{\mathcal{R}}(I)) = 0$ ist $\tilde{g} = 0$, aber dann muß $\ker \zeta_V = 0$ sein, folglich ζ_V ein Monomorphismus. Andererseits gibt es nach Satz 3.9.6 auch einen Epimorphismus $g\colon P \to \operatorname{coker} \zeta_V$ ausgehend einem projektiven kuspidalen A-Modul P, der von π faktorisiert wird:

$$\begin{tikzcd} & & P \arrow[d, dashed, "\exists h"] \arrow[dr, two heads, "g"] & & \\ 0 \arrow[r] & \bar{\mathcal{S}}\bar{\mathcal{R}}(V) \arrow[r, "\zeta_V"] \arrow[d, "\varphi", "\sim"'] & V \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, two heads, "j"] & \operatorname{coker} \zeta_V \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \bar{\mathcal{S}}\bar{\mathcal{R}}(\operatorname{coker} h) \arrow[r, "\zeta"] & \operatorname{coker} h. & & \end{tikzcd}$$

Weil P kuspidal ist, d. h. $\bar{\mathcal{R}}(P) = 0$, muß $\bar{\mathcal{R}}(j)$ ein Isomorphismus sein. Dann ist auch $\varphi := \bar{\mathcal{S}}\bar{\mathcal{R}}(j)$ ein solcher, und $\psi := \zeta \circ \varphi$ ist injektiv. Aber ψ ist auch surjektiv: Sei $v \in V$ beliebig. Dann gibt es $p \in P$ mit $\pi(v) = g(p) = \pi \circ h(p)$, also $\pi(h(p) - v) = 0$. Daher gibt es ein $x \in \bar{\mathcal{S}}\bar{\mathcal{R}}(V)$ mit $\zeta(x) = h(p) - v$, und dafür gilt $\psi(x) = j \circ \zeta(x) = j(v)$. Insgesamt ist ψ also ein Isomorphismus, und $s := \psi^{-1} \circ j$ ist ein Schnitt zu ζ_V, d. h. $s \circ \zeta_V = 1$. Daraus folgt

$$V = \bar{\mathcal{S}}\bar{\mathcal{R}}(V) \oplus \operatorname{coker} \zeta_V,$$

wobei $\bar{\mathcal{S}}\bar{\mathcal{R}}(V)$ isomorph zu einem $\bar{C}$-Modul ist und $\operatorname{coker} \zeta_V \in {}_A\mathfrak{M}^{\mathfrak{c}}$. Es bleibt nur noch zu zeigen, daß ${}_{\bar{C}}\mathfrak{M}$ und ${}_A\mathfrak{M}^{\mathfrak{c}}$ als volle Unterkategorien von ${}_A\mathfrak{M}$ orthogonal sind. Für $V \in {}_A\mathfrak{M}^{\mathfrak{c}}$ ist $\operatorname{Hom}_A(\bar{\mathcal{S}}(W), V) = \operatorname{Hom}_{\bar{C}}(W, \bar{\mathcal{R}}(V)) = 0$. Sei umgekehrt $\varphi \in \operatorname{Hom}_A(V, \bar{\mathcal{S}}(W))$. Dann ist $V/\ker\varphi \cong \operatorname{Bild}(\varphi) \subseteq X \otimes_{\bar{C}} W$ kuspidal. Mit anderen Worten gibt es einen Monomorphismus $W_0 \to X \otimes_{\bar{C}} W$ in ${}_A\mathfrak{M}$ mit kuspidalem W_0. Zu diesem gibt es einen Monomorphismus $W_0 \to I$ in einen injektiven kuspidalen Modul I, der sich auf $X \otimes_{\bar{C}} W$ fortsetzen läßt, aber diese Fortsetzung ist Null:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & W_0 \arrow[r] \arrow[dr, tail] & X \otimes_{\bar{C}} W \arrow[d, dashed, "0"] \\
& & I.
\end{tikzcd}$$

Dann muß $W_0 = 0$ und somit $\varphi = 0$ gewesen sein. Wendet man das auf $W = \bar{\mathcal{R}}(V)$ und $W_0 = \bar{\mathcal{S}}\bar{\mathcal{R}}(V) \cap V^{\mathrm{c}}$ an, findet man insbesondere $\operatorname{coker} \zeta_V = V^{\mathrm{c}}$.

(4) Man hat nun die beiden Zerlegungen ${}_A\mathfrak{M} = {}_A\mathfrak{M}^{\mathfrak{c}} \times {}^C\mathfrak{M} = {}_A\mathfrak{M}^{\mathfrak{c}} \times {}_{\bar{C}}\mathfrak{M}$. Daraus folgt ${}^C\mathfrak{M} = {}_{\bar{C}}\mathfrak{M}$. $\square$

8. ANHANG

A Lokale Körper

Wir verweisen auf die Bücher von Neukirch [45, §§3, 5] und Serre [53].

Ein *diskreter Bewertungsring* ist ein lokaler Hauptidealring $\mathfrak{o}$, der jedoch kein Körper ist. Sei $\mathfrak{p}$ das eindeutig bestimmte maximale Ideal. Ein Erzeuger ϖ davon heißt *uniformisierendes Element*. Sei K der Quotientenkörper von $\mathfrak{o}$. Jedes Element $x \in K^*$ läßt sich in der Form $x = x_0\varpi^{v(x)}$ schreiben mit einer Einheit $x_0 \in \mathfrak{o}^*$ und einer ganzen Zahl $v(x) \in \mathbb{Z}$, die nur von x, nicht aber von der Wahl des uniformisierenden Elements abhängt. Hierdurch entsteht ein surjektiver Gruppenhomomorphismus $v\colon K^* \to (\mathbb{Z}, +)$, den man durch $v(0) := \infty$ zu einer Abbildung

$$v\colon K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$$

fortsetzt. Man kann v auch durch $v(x) = \sup\{n \in \mathbb{Z} \mid x \in \mathfrak{p}^n\}$ beschreiben, und man hat die folgenden Eigenschaften:

(1) $v(x) = \infty \iff x = 0$,

(2) $v(xy) = v(x) + v(y)$,

(3) $v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$,

(4) $\exists x \in K^*\colon v(x) \neq 0$.

Eine solche Abbildung auf einem beliebigen Körper K heißt *nicht-archimedische Bewertung*, und K heißt dann ein *diskret bewerteter Körper*. Jeder diskret bewertete Körper kommt auf diese Weise zustande. Der zugehörige diskrete Bewertungsring mit K als Quotientenkörper ist

$$\mathfrak{o} = \{x \in K \mid v(x) \geq 0\}.$$

Das maximale Ideal und die Einheitengruppe sind

$$\mathfrak{p} = \{x \in K \mid v(x) > 0\}, \quad \mathfrak{o}^* = \{x \in K \mid v(x) = 0\}.$$

Der Körper $\mathfrak{k} = \mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ heißt *Restklassenkörper* von K.

Sei K ein diskret bewerteter Körper mit endlichem Restklassenkörper $\mathfrak{k}$ der Kardinalität q, das heißt $q = p^n$ mit einer Primzahl p. Dann definiert v einen Absolutbetrag

$$|\cdot|\colon K \to \mathbb{Z}[\tfrac{1}{q}], \qquad |x| := q^{-v(x)}.$$

Dieser hat folgende Eigenschaften:

(1) $|x| = 0 \iff x = 0$,

(2) $|xy| = |x|\,|y|$,

(3) $|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\}$,

(4) $\exists x \in K^*\colon |x| \neq 1$.

Die Ungleichung (3) heißt *verschärfte Dreiecksungleichung*. Durch $|\cdot|$ wird K insbesondere ein topologischer Körper. Die Topologie läßt sich durch Konvergenz von Folgen charakterisieren, und man kann fragen, ob K vollständig ist. Wie üblich kann man einen diskret bewerteten Körper stets vervollständigen und in seine Vervollständigung einbetten.

Definition A.1. Sei K ein diskret bewerteter Körper mit endlichem Restklassenkörper $\mathfrak{k} = \mathfrak{o}/\mathfrak{p} \cong \mathbb{F}_{p^r}$. Man bezeichnet K als *lokalen Körper*, wenn K bzgl. $|\cdot|$ vollständig ist.

Bemerkung A.2. Wir haben die Terminologie von Neukirch übernommen. Oft nennt man diese Körper *nicht-archimedische* lokale Körper. Die *archimedischen* lokalen Körper sind dann die in bezug auf einen Absolutbetrag $|\cdot|$ vollständigen, für welche die *verschärfte* Dreiecksungleichung $|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\}$ aber *falsch* ist. Die einzigen archimedischen lokalen Körper sind (bis auf Isomorphie) der Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen und der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen. In dieser Arbeit geht es aber ausschließlich um nicht-archimedische lokale Körper.

Satz A.3.

(1) Ein diskret bewerteter Körper ist genau dann vollständig, wenn er lokal kompakt ist.

(2) Ein lokaler Körper ist ein total unzusammenhängender, lokal kompakter, hausdorffscher topologischer Körper.

(3) *Der diskrete Bewertungsring* $\mathfrak{o}$ *ist eine maximale kompakte Untergruppe der topologischen Gruppe* $(K,+)$. *Die Ideale* $\mathfrak{p}^n$ $(n \in \mathbb{Z})$ *bilden eine Umgebungsbasis des neutralen Elements* $0 \in (K,+)$ *aus kompakt-offenen Untergruppen.*

(4) *Klassifikation: Die lokalen Körper der Charakteristik 0 sind die endlichen Erweiterungen der* p*-adischen Zahlkörper* $\mathbb{Q}_p$*; diejenigen von Charakteristik* $l \neq 0$ *sind die* Potenzreihenkörper $\mathbb{F}_{l^r}((X))$.

Definition A.4. Die endlichen Erweiterungskörper der p-adischen Zahlkörper $\mathbb{Q}_p$, also die lokalen Körper der Charakteristik 0, heißen $\mathfrak{p}$-*adische Zahlkörper.*

Beispiele:

(1) Auf dem Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen hat man den üblichen Absolutbetrag, der in diesem Kontext mit $|\cdot|_\infty$ bezeichnet wird und eine archimedische Bewertung ist. Für jede Primzahl p hat man außerdem den p-adischen Absolutbetrag $|\cdot|_p$: jede rationale Zahl x hat eine eindeutige Darstellung $x = p^r \frac{a}{b}$ mit $r \in \mathbb{Z}$ und nicht durch p teilbaren Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$, und man setzt nun $|x|_p := p^{-r}$. Dies ist eine nichtarchimedische Bewertung, und bis auf Äquivalenz sind das bereits alle: jede Bewertung auf $\mathbb{Q}$ ist zu einer der Bewertungen

$$|\cdot|_2, \quad |\cdot|_3, \quad |\cdot|_5 \quad \cdots \quad |\cdot|_\infty$$

äquivalent. Die Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ bzgl. $|\cdot|_p$ ist der p-adische Zahlkörper $\mathbb{Q}_p$. Seine Elemente lassen sich als formale Laurentreihen $f = \sum_{n=m}^{\infty} f_n p^n$ mit $f_n \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ und $m \in \mathbb{Z}$ darstellen. Die p-adischen Zahlen mit $m \geq 0$ bilden den diskreten Bewertungsring $\mathbb{Z}_p$ der ganzen p-adischen Zahlen. Die Bewertung ist durch

$$v(f) = \min\{n \in \mathbb{Z} \mid f_n \neq 0\}$$

gegeben. Die Ringstruktur auf $\mathbb{Z}_p$ ergibt sich folgendermaßen: für $f \in \mathbb{Z}_p$ betrachtet man die Partialsummen $s_k := \sum_{n=0}^{k-1} f_k$. Dann ist

$$(s_k \mod p^k)_{k=1}^{\infty} \in \prod_{k=1}^{\infty} \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z},$$

und so als Unterring des Produkts aufgefaßt, bilden die ganzen p-adischen Zahlen gerade den inversen Limes $\varprojlim \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ des inversen Systems $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \leftarrow \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \leftarrow \ldots$

(2) Der Ring $\mathbb{F}_q[\![X]\!]$ der formalen Potenzreihen ist ein diskreter Bewertungsring. Ein Element ist von der Form $f(X) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n X^n$ mit $f_n \in \mathbb{F}_q$. Die algebraischen Operationen sind die üblichen. Die Einheitengruppe ist

$$\mathbb{F}_q[\![X]\!]^* = \{f \in \mathbb{F}_q[\![X]\!] \mid f_0 \neq 0\}.$$

Das Komplement ist das eindeutige maximale Ideal (X) mit dem uniformisierenden Element X. Der Quotientenkörper von $\mathbb{F}_q[\![X]\!]$ ist der Körper $\mathbb{F}_q(\!(X)\!)$ der formalen Laurentreihen, dessen Elemente sich in der Form $f = \sum_{n=-m}^{\infty} f_n X^n$ mit $m \in \mathbb{Z}$ schreiben lassen. Die Bewertung ist

$$v \colon \mathbb{F}_q(\!(X)\!)^* \to \mathbb{Z}, \quad v(f) = \min\{n \in \mathbb{Z} \mid f_n \neq 0\},$$

der Absolutbetrag $|f| = q^{-v(f)}$.

Bemerkung A.5. Sei $\overline{\mathbb{Q}}_p$ ein algebraischer Abschluß von $\mathbb{Q}_p$. Der Absolutbetrag von $\mathbb{Q}_p$ läßt sich in eindeutiger Weise auf $\overline{\mathbb{Q}}_p$ fortsetzen. Die Körpererweiterung $\mathbb{Q}_p \subseteq \overline{\mathbb{Q}}_p$ ist ∞-dimensional, aber $\overline{\mathbb{Q}}_p$ ist nicht vollständig. Die Vervollständigung von $\bar{\mathbb{Q}}_p$ wird mit $\mathbb{C}_p$ bezeichnet und ist algebraisch abgeschlossen, aber nicht lokal kompakt. Als Körper ist $\mathbb{C}_p$ isomorph zu $\mathbb{C}$.

B Affine algebraische Gruppen

Wir verweisen auf die Bücher von Borel [12], Humphreys [33], Springer [54], Milne [43], zu reduktiven Gruppen besonders auch auf Borel/Tits [13, 14]. Eine gute und knappe Übersicht über alles, was wir brauchen, bietet der Artikel [44] von Murnaghan.

Sei k ein Körper und $K = \overline{k}$ ein algebraischer Abschluß.

Definition B.1. Eine *affine algebraische Gruppe* (wir werden dafür kurz *algebraische Gruppe* schreiben) ist eine Gruppe $\mathfrak{G}$, die zugleich eine affine algebraische Varietät (über K) ist, und zwar so, daß die Multiplikation und Inversenbildung als Abbildungen

$$\mu \colon \mathfrak{G} \times \mathfrak{G} \to \mathfrak{G} \quad \text{und} \quad \iota \colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}$$

Morphismen von Varietäten sind.

Es ist ein bemerkenswerter Umstand, daß jede (affine) algebraische Gruppe isomorph ist zu einer (Zariski-)abgeschlossenen Untergruppe irgendeiner allgemeinen algebraischen Gruppe $\mathrm{GL}_m(K)$, also zu einer Matrixgruppe, woher die synonyme Bezeichnung *lineare algebraische Gruppe* rührt. Genauer gibt es eine treue Darstellung $\mathfrak{G} \to \mathrm{GL}_m$, von der diese Identizifierung abhängt. Wir stellen uns $\mathfrak{G}$ als in einen affinen Raum K^n eingebettet vor. Da wir die Ergebnisse, die wir benötigen, nur zitieren werden, legt es uns für die vorlegende Arbeit keine Beschränkung auf, diese sehr konkrete Betrachtungsweise anzunehmen.

Definition B.2.

(1) Eine affine algebraische Varietät $X \subseteq K^n$ heißt *über k definiert* oder *k-Varietät*, wenn das Ideal $\mathfrak{I}(X) \subseteq K[X_1, \ldots, X_n]$ der Polynome, deren Nullstellengebilde sie ist, Erzeuger mit Koeffizienten in k besitzt.

(2) Ein Morphismus $\varphi\colon X \to Y$ zwischen zwei über k definierten affinen algebraischen Varietäten ist selbst über k definiert, wenn seine polynomialen Koordinatenfunktionen Koeffizienten in k haben.

(3) Schließlich heißt eine affine algebraische Gruppe $\mathfrak{G}$ über k definiert oder *k-Gruppe*, wenn $\mathfrak{G}$, μ und ι in diesem Sinne über k definiert sind.

(4) Die Menge $\mathfrak{G}(k) := \mathfrak{G} \cap k^n$ wird als die Menge der *k-rationalen Punkte* bezeichnet und besitzt eine Gruppenstruktur.

Die Einheitskomponente von $\mathfrak{G}$ ist die eindeutig bestimmte irreduzible Komponente von $\mathfrak{G}$, die das Einselement enthält, und wird mit $\mathfrak{G}^\circ$ bezeichnet. Es handelt sich um einen Normalteiler von endlichem Index in $\mathfrak{G}$, dessen Nebenklassen die irreduziblen Komponenten von $\mathfrak{G}$ sind. Gilt $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}^\circ$, so wird $\mathfrak{G}$ üblicherweise als *zusammenhängend* bezeichnet, weil Irreduzibilität und Zusammenhang bei algebraischen Gruppen das gleiche bedeuten. Wenn $\mathfrak{G}$ eine k-Gruppe ist, so auch $\mathfrak{G}^\circ$.

Definition B.3. Ein Element $x \in \mathfrak{G}$ heißt

(1) *halbeinfach*, wenn es, als Matrix aufgefaßt, diagonalisierbar ist, das heißt, es gibt $g \in \mathrm{GL}_n(K)$ derart, daß $g^{-1}xg$ eine Diagonalmatrix ist;

(2) *unipotent*, wenn $x - 1$ *nilpotent* ist, also $(x-1)^n = 0$ für irgendein $n \in \mathbb{N}$.

Die *Jordanzerlegung* besagt, daß sich jedes $g \in \mathfrak{G}$ eindeutig in der Form $g = g_s g_u = g_u g_s$ zerlegen läßt, wobei g_s halbeinfach (*semisimple*) und g_u unipotent ist.

Bemerkung. Wenn man algebraische Gruppen abstrakter definiert, dann gibt es eine treue Darstellung $\mathfrak{G} \to \mathrm{GL}_n(K)$, die mit der Jordanzerlegung verträglich ist.

Die *Kommutatoruntergruppe* $\mathscr{D}(\mathfrak{G}) = [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$ ist abgeschlossen, zusammenhängend, wenn $\mathfrak{G}$ es ist, und über k definiert, wenn $\mathfrak{G}$ es ist. Die algebraische Gruppe $\mathfrak{G}$ heißt *auflösbar*, wenn sie es im üblichen algebraischen Sinne ist.

Definition B.4.

(1) Das *Radikal* $\mathscr{R}(\mathfrak{G})$ von $\mathfrak{G}$ ist die Einheitskomponente des eindeutig bestimmten maximalen auflösbaren Normalteilers von $\mathfrak{G}$. Dieser ist stets abgeschlossen.

(2) Das *unipotente Radikal* $\mathscr{R}_u(\mathfrak{G})$ ist die Gruppe, die aus den unipotenten Elementen von $\mathscr{R}(\mathfrak{G})$ besteht. Es handelt sich um den eindeutig bestimmten maximalen zusammenhängenden unipotenten Normalteiler von $\mathfrak{G}$ und ist stets abgeschlossen.

(3) Man nennt $\mathfrak{G}$ *halbeinfach*, wenn $\mathscr{R}(\mathfrak{G}) = \{1\}$ ist, und *reduktiv*, wenn $\mathscr{R}_u(\mathfrak{G}) = \{1\}$ ist.

(4) Ein *Torus* ist eine algebraische Gruppe $\mathfrak{T}$, die zu einem endlichen Produkt $\mathfrak{G}_m^d = \mathfrak{G}_m \times \cdots \times \mathfrak{G}_m$ (d-mal) multiplikativer Gruppen isomorph ist. Die natürliche Zahl d ist die *Dimension* von $\mathfrak{T}$. Der Torus $\mathfrak{T}$ heißt *k-Torus*, wenn er über k definiert ist, und *k-zerfallender k-Torus*, wenn außerdem der Isomorphismus $\mathfrak{T} \cong \mathfrak{G}_m^d$ über k definiert ist.

Wenn k unendlich ist, was bei uns immer der Fall sein wird, dann gibt es einen über k definierten maximalen Torus in $\mathfrak{G}$, siehe [54, 13.3.6].

Definition B.5.

(1) $\mathfrak{G}$ heißt *k-zerfallend* oder auch nur *zerfallend* (*split*), wenn es einen k-zerfallenden maximalen k-Torus gibt.

(2) $\mathfrak{G}$ heißt *quasizerfallend* (*quasi-split*), wenn es eine über k definierte Boreluntergruppe gibt.

Es sei von jetzt an $\mathfrak{G}$ eine zusammenhängende reduktive k-Gruppe.

Proposition B.6.

(1) Das Radikal $\mathscr{R}(\mathfrak{G})$ ist ein zentraler Torus. Es ist die Einskomponente des Zentrums, d. h. $\mathscr{R}(\mathfrak{G}) = \mathcal{Z}(\mathfrak{G})^\circ$. Der Durchschnitt $\mathscr{R}(\mathfrak{G}) \cap \mathscr{D}(\mathfrak{G})$ ist endlich. Siehe [54, 7.3.1].

(2) *$\mathscr{D}(G)$ ist halbeinfach, und $\mathfrak{G}$ wird von $\mathscr{R}(\mathfrak{G})$ und $\mathscr{D}(G)$ erzeugt, in dem Sinne, daß $\mathfrak{G} = \mathscr{R}(\mathfrak{G}) \cdot \mathscr{D}(\mathfrak{G})$. Siehe [54, 8.1.6].*

(3) *Es gibt in $\mathfrak{G}$ einen maximalen über k zerfallenden k-Torus. Siehe [54, 13.2.4, 13.3.6].*

(4) *Zwei maximale über k zerfallende k-Tori sind durch ein Element von $\mathfrak{G}(k)$ zueinander konjugiert. Siehe [54, 15.2.6].*

Definition B.7.

(1) Der *Rang* von $\mathfrak{G}$ ist die Dimension eines maximalen Torus von $\mathfrak{G}$.

(2) Der *k-Rang* von $\mathfrak{G}$ ist die Dimension eines maximalen über k zerfallenden k-Torus von $\mathfrak{G}$.

(3) Der *halbeinfache Rang* von $\mathfrak{G}$ ist der Rang von $\mathfrak{G}/\mathscr{R}(\mathfrak{G})$.

(4) Der *halbeinfache k-Rang* von $\mathfrak{G}$ ist der k-Rang von $\mathfrak{G}/\mathscr{R}(\mathfrak{G})$.

Bemerkung B.8. Weil zwei verschiedene $\mathfrak{T}$ konjugiert sind, so hängt der k-Rang nicht von der Wahl von $\mathfrak{T}$ ab und ist somit eine Invariante von $\mathfrak{G}$.

Eine *Boreluntergruppe* ist eine maximale zusammenhängende, auflösbare Untergruppe $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{G}$. Es gibt solche Untergruppen, aber eine Boreluntergruppe ist im allgemeinen *nicht* über k definiert. Der Quotient $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ ist eine projektive Varietät, und für eine Zariski-abgeschlossene Untergruppe $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{G}$ ist $\mathfrak{G}/\mathfrak{P}$ dann und nur dann eine projektive Varietät, wenn $\mathfrak{P}$ eine Boreluntergruppe enthält. Eine solche Untergruppe $\mathfrak{P}$ wird als *parabolische Untergruppe* bezeichnet. Eine parabolische Untergruppe ist zusammenhängend und ihr eigener Normalisator in $\mathfrak{G}$.

Sei $\mathfrak{P}$ eine parabolische k-Untergruppe von $\mathfrak{G}$. Ein *k-Levifaktor* von $\mathfrak{P}$ ist eine reduktive k-Untergruppe $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{P}$ mit $\mathfrak{P} = \mathfrak{M} \ltimes \mathfrak{N}$, wobei $\mathfrak{N} := \mathscr{R}_u(\mathfrak{P})$. Diese Zerlegung heißt *Levizerlegung* von $\mathfrak{P}$, aber sie ist nicht eindeutig. Wir bezeichnen eine k-Untergruppe $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{G}$ als k-Leviuntergruppe von $\mathfrak{G}$, wenn $\mathfrak{M}$ ein k-Levifaktor einer parabolischen k-Untergruppe $\mathfrak{P}$ ist.

Die reduktive k-Gruppe $\mathfrak{G}$ ist selbst eine parabolische k-Untergruppe mit $\mathscr{R}_u(\mathfrak{G}) = \{1\}$. Es gibt also solche. Daher gibt es auch minimale parabolische k-Untergruppen.

Proposition B.9.

(1) *Das unipotente Radikal $\mathfrak{N}$ einer parabolischen k-Gruppe $\mathfrak{P}$ ist über k definiert und zerfällt über k. Es gibt über k definierte Leviuntergruppen*

von $\mathfrak{P}$, und zwei solche sind durch ein eindeutiges Element von $N := \mathfrak{N}(k)$ zueinander konjugiert. Des weiteren enthält $\mathfrak{P}$ einen maximalen über k zerfallenden k-Torus von $\mathfrak{G}$. Siehe [54, 16.1.1].

(2) *Dann und nur dann gibt es echte parabolische k-Untergruppen von $\mathfrak{G}$, wenn der halbeinfache k-Rang von $\mathfrak{G}$ nicht Null ist. Das ist äquivalent dazu, daß es einen über k zerfallenden Torus gibt, der nicht in $\mathscr{Z}(\mathfrak{G})$ liegt. Siehe [13, 4.17].*

(3) *Der halbeinfache k-Rang eines Levifaktors einer echten parabolischen k-Untergruppe ist echt kleiner als der von $\mathfrak{G}$.*

(4) *Zwei minimale parabolische k-Untergruppen von $\mathfrak{G}$ sind durch ein Element von $\mathfrak{G}(k)$ zueinander konjugiert.*

(5) *Sei $\mathfrak{P}_0$ eine minimale parabolische Untergruppe. Dann gibt es einen maximalen über k zerfallenden k-Torus $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{G}$, der in $\mathfrak{P}_0$ liegt, und der Zentralisator $\mathfrak{M}_0 = \mathscr{Z}_G(\mathfrak{T})$ ist über k definiert und ein k-Levifaktor von $\mathfrak{P}_0$. Der halbeinfache k-Rang von $\mathfrak{M}_0$ ist Null.*

Bemerkung B.10. Punkt (2) erlaubt es uns, Beweise mit Hilfe vollständiger Induktion über den halbeinfachen k-Rang von $\mathfrak{G}$ zu führen.

Definition B.11. Wenn $\mathfrak{G}$ eine über k definierte echte parabolische Untergruppe besitzt, heißt $\mathfrak{G}$ *isotrop*, sonst *anisotrop*.

B.1 Die Liealgebra einer affinen algebraischen Gruppe

Sei $\mathfrak{G}$ eine affine algebraische Gruppe über K und $A := K[\mathfrak{G}]$ der affine Koordinatenring. Dessen Elemente kann man, wenn $\mathfrak{G}$ als Matrixgruppe vorliegt, als polynomiale Funktionen $\mathfrak{G} \to K$ auffassen. Eine *Derivation* auf A ist eine K-lineare Abbildung $D\colon A \to A$, für welche die Produktregel

$$D(\varphi \cdot \psi) = \varphi \cdot D(\psi) + D(\varphi) \cdot \psi \tag{8.1}$$

gilt. Die Derivationen auf A bilden einen K-Vektorraum $\mathrm{Der}_K(A)$, der mit dem Kommutator $[D_1, D_2] := D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$ eine Lie-Algebra wird. Zu gegebenem $g \in G$ sei

$$\lambda_g\colon A \longrightarrow A, \quad (\lambda_g \varphi)(x) := \varphi(g^{-1}x), \quad \varphi \in A,\ x \in G,$$

die Linkstranslation. Die Lie-Algebra von $\mathfrak{G}$ ist

$$\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\mathfrak{G}) := \{D \in \mathrm{Der}_K(A) \mid \forall g \in G\colon \lambda_g \circ D = D \circ \lambda_g\}.$$

Es handelt sich um eine Lie-Unteralgebra von $\mathrm{Der}_K(A)$, die man die Lie-Algebra der *linksinvarianten Derivationen* von A nennt.

Der *Tangentialraum* $T_e(\mathfrak{G}) := \mathrm{Der}_K(A, K)$ von $\mathfrak{G}$ bei e besteht aus den K-linearen Abbildungen $D\colon A \to K$ mit

$$D(\varphi \cdot \psi) = \varphi(e) \cdot D(\psi) + \psi(e) \cdot D(\varphi), \quad \varphi, \psi \in A,$$

und ist als K-Vektorraum isomorph zu $\mathrm{Lie}(\mathfrak{G})$. Durch

$$\alpha\colon \mathrm{Der}_K(A) \to \mathrm{Der}_K(A, K), \quad \alpha(D)(\varphi) := (D\varphi)(e),$$

ist ein kanonischer Isomorphismus gegeben. Durch Strukturtransport wird $T_e(\mathfrak{G})$ so zur Lie-Algebra, und mit Hilfe dieser Identifizierung erweist sich die Bildung der Lie-Algebra als Funktor: Zu einem Morphismus $\varphi\colon \mathfrak{G}_1 \to \mathfrak{G}_2$ algebraischer Gruppen kann man das *Differential* $d\varphi\colon \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ definieren. Ist $D \in \mathfrak{g}_1$, so ergibt sich $d\varphi(D)$ aus dem Diagramm

$$\begin{tikzcd} K[\mathfrak{G}_2] \arrow[r, "\varphi^*"] \arrow[dr, "d\varphi(D)"'] & K[\mathfrak{G}_1] \arrow[d, "D"] \\ & K. \end{tikzcd}$$

Das Differential ist ein Homomorphismus von Lie-Algebren. Hiervon gibt zwei wichtige Spezialfälle:

(1) Sei $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{G}$ eine abgeschlossene Untergruppe und $\iota\colon \mathfrak{H} \hookrightarrow \mathfrak{G}$ die Inklusion. Dann ist $d\iota\colon \mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{g}$ ein Monomorphismus von Lie-Algebren. Man kann also $\mathfrak{h}$ als Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ auffassen.

(2) Zu jedem $g \in \mathfrak{G}$ kann man das Differential des inneren Automorphismus $\iota_g\colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}$, $\iota_g(x) := gxg^{-1}$, betrachten. Dieses ist ein Automorphismus von $\mathfrak{g}$. Hierdurch wird die *adjungierte Darstellung* von $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{g}$ definiert:

$$\mathrm{Ad}\colon \mathfrak{G} \longrightarrow \mathrm{Aut}_K(\mathfrak{g}), \quad \mathrm{Ad}\, g(D) := d\iota_g(D).$$

B.2 Wurzelzerlegung einer reduktiven k-Gruppe

Sei $G = \mathfrak{G}(k)$ eine reduktive $\mathfrak{p}$-adische Gruppe mit maximalem k-zerfallendem k-Torus $S = \mathfrak{S}(k)$. Dann sind $\mathcal{N}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S})$ und $\mathcal{Z}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S})$ über k definiert.

Definition B.12. Wir schreiben

$$\mathcal{N}_G(S) := \mathcal{N}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S})(k) \quad \text{und} \quad \mathcal{Z}_G(S) := \mathcal{Z}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S})(k).$$

Definition B.13. Die *Weylgruppe* von G ist die endliche Gruppe

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}_G := \mathcal{N}_G(S)/\mathcal{Z}_G(S) = \mathcal{N}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S})/\mathcal{Z}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S}).$$

Dabei ist $\mathfrak{M}_0 = \mathcal{Z}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S})$ Levifaktor einer minimalen parabolischen k-Untergruppe $\mathfrak{P}_0$ von $\mathfrak{G}$. Es gibt ein Repräsentantenssystem von $\mathcal{W}$ in G, und $\mathcal{W}$ operiert einfach transitiv auf der Menge der minimalen parabolischen k-Untergruppen von $\mathfrak{G}$.

Bemerkung B.14. Wenn $\mathfrak{T}$ ein maximaler Torus in einer zusammenhängenden reduktiven Gruppe $\mathfrak{G}$ ist, dann gilt $\mathcal{Z}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{T}$. Ein maximaler k-zerfallender k-Torus muß jedoch nicht im ganzen maximal sein.

Unter der adjungierten Operation $\mathrm{Ad}\colon \mathfrak{S} \to \mathrm{Aut}_K(\mathfrak{g})$ läßt sich die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ in *Wurzelräume* zerlegen:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{m}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Phi} \mathfrak{g}_\alpha, \quad \mathfrak{g}_\alpha := \big\{ X \in \mathfrak{g} \,\big|\, \forall s \in \mathfrak{S}\colon \ \mathrm{Ad}\, s(X) = \alpha(s)X \big\}.$$

Dabei ist $\mathfrak{m}_0$ die Liealgebra von M_0 und $\Phi = \Phi(\mathfrak{G}, \mathfrak{S}) \subseteq X(\mathfrak{S})$ die Menge der Charaktere α von $\mathfrak{S}$ mit $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$. Diese Charaktere sind über k definiert, und Φ ist das *Wurzelsystem* des Paares $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$. Sei $\langle\Phi\rangle \subseteq X(\mathfrak{S})$ die von Φ erzeugte Untergruppe und $V := \langle\Phi\rangle \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ die Koeffizientenerweiterung zu einem reellen Vektorraum. Dann kann man Φ als Teilmenge von V auffassen, und (V, Φ) ist in diesem Sinne ein abstraktes Wurzelsystem (Bourbaki [16, Ch. VI]), das aber (im Gegensatz zum absoluten Fall, wo man einen absolut maximalen Torus $\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{G}$ betrachtet) nicht *reduziert* sein muß, das heißt, zu $\alpha \in \Phi$ kann es die Vielfachen $\pm\frac{1}{2}\alpha, \pm\alpha, \pm 2\alpha$ in Φ geben. Man betrachtet die *nicht-teilbaren* (*non-divisible*) Wurzeln

$$\Phi_{\mathrm{nd}} := \big\{ \alpha \in \Phi \,\big|\, \tfrac{1}{2}\alpha \notin \Phi \big\},$$

und dies ist ein reduziertes Wurzelsystem. Die Weylgruppe $\mathcal{W}(V, \Phi)$ ist die von den Reflexionen s_α in $\mathrm{GL}(V)$ erzeugte endliche Untergruppe und kanonisch isomorph zu $\mathcal{W}_G$. Das Wurzelsystem beinhaltet die ganze Struktur der reduktiven Gruppe, insbesondere die für uns wichtigen parabolischen Untergruppen. Wir fassen einiges zusammen:

- Der *Rang* $\mathrm{rg}(\Phi)$ ist per definitionem gleich $\dim_{\mathbb{R}} V$ und stimmt überein mit dem halbeinfachen k-Rang von G.

- Eine *Basis* $\Delta \subseteq \Phi$ ist eine Teilmenge mit $\#\Delta = \mathrm{rg}(\Phi)$ derart, daß Δ eine Basis von V ist und sich jedes $\alpha \in \Phi$ in der Form

  $$\alpha = \sum_{\beta\in\Delta} c_\beta(\alpha)\beta$$

schreiben läßt, wobei die $c_\beta(\alpha)$ ganze Zahlen mit gleichem Vorzeichen sind. Dadurch zerfällt $\Phi = \Phi_\Delta^+ \cup \Phi_\Delta^-$ in die Teilmengen der Wurzeln, die positive bzw. negative ganzzahlige Linearkombinationen über Δ sind.

- Sei $\alpha \in \Phi$. Dann ist

$$\mathfrak{g}_{(\alpha)} := \begin{cases} \mathfrak{g}_\alpha, & \text{falls } 2\alpha \notin \Phi, \\ \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha} & \text{sonst} \end{cases}$$

eine Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{g}$. Die *Wurzeluntergruppe* von α ist die eindeutig bestimmte von $\mathfrak{M}_0$ normalisierte zusammenhängende unipotente k-Untergruppe $\mathfrak{U}_{(\alpha)}$ mit $\mathfrak{g}_{(\alpha)}$ als Lie-Algebra.

- Die minimalen parabolischen Untergruppen $\mathfrak{P}_0$, die $\mathfrak{S}$ enthalten, befinden sich in Bijektion mit den Basen Δ von Φ. Sei Δ ausgewählt und Φ^+ das System der positiven Wurzeln bzgl. Δ. Dann gilt

$$\mathfrak{N}_0 = \prod_{\alpha \in \Phi_{\mathrm{nd}}^+} \mathfrak{U}_{(\alpha)} \quad \text{und} \quad \mathfrak{M}_0 = \mathcal{Z}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S}).$$

- Seien $\mathfrak{P}_0$ und Δ festgelegt. Die standardparabolischen Untergruppen von $\mathfrak{G}$ sind dann diejenigen, die $\mathfrak{P}_0$ enthalten, und befinden sich in Bijektion mit den Teilmengen $I \subseteq \Delta$. Die von I bestimmte standardparabolische Untergruppe $\mathfrak{P}_I$ ist folgendermaßen gegeben: Sei zunächst $\langle I \rangle := \mathbb{Z} \cdot I \cap \Phi$. Dann gilt für das unipotente Radikal

$$\mathfrak{N}_I = \prod_{\alpha \in \Phi_{\mathrm{nd}}^+ \setminus \langle I \rangle} \mathfrak{U}_{(\alpha)},$$

und $\mathfrak{M}_I$, die von $\mathfrak{M}_0$ und den $\mathfrak{U}_{(\alpha)}$ mit $\alpha \in \langle I \rangle$ erzeugte Untergruppe von $\mathfrak{G}$, ist ein Levifaktor von $\mathfrak{P}_I$, den wir als *Standardlevifaktor* bezeichnen. Wir schreiben $\mathfrak{M} < \mathfrak{G}$. Insbesondere hat man die Extremfälle $\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{P}_\emptyset$ und $\mathfrak{G} = \mathfrak{P}_\Delta$.

Für $\mathfrak{M} < \mathfrak{G}$ haben wir die Weylgruppe $\mathcal{W}_M = \mathcal{N}_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{S})/\mathcal{Z}_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{S})$. Wegen $\mathfrak{M}_0 \subseteq \mathfrak{M}$ gilt $\mathcal{Z}_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{S}) = \mathcal{Z}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S}) = \mathfrak{M}_0$, und daraus folgt, daß man $\mathcal{W}_M$ als Untergruppe von $\mathcal{W}_G$ auffassen kann. Aus den vorhergehenden Betrachtungen ergibt sich außerdem, daß der halbeinfache k-Rang eines Levifaktors einer echten parabolischen Untergruppe von $\mathfrak{G}$ echt kleiner als der von $\mathfrak{G}$ selbst ist.

C Gruppenoperationen

Das Material in diesem Abschnitt findet sich zum Beispiel in dem Buch [56] von Tammo tom Dieck.

Sei G eine topologische Gruppe, X ein topologischer Raum und

$$\rho\colon G \times X \longrightarrow X, \quad (g, x) \longmapsto gx,$$

eine stetige Gruppenoperation. Diese gibt Anlaß zu der stetigen Abbildung

$$\theta\colon G \times X \to X \times X, \quad (g, x) \mapsto (x, gx).$$

Sei $R := \operatorname{Bild}\theta \subseteq X \times X$. Wenn die Operation ρ frei ist, das heißt $gx = x$ dann und nur dann, wenn $g = 1$, so läßt sich außerdem die Abbildung

$$\varphi\colon R \to G, \quad (x, gx) \mapsto g,$$

definieren. Diese ist nicht von vornherein stetig.

Definition C.1. Eine stetige Abbildung $f\colon Z \to Y$ zwischen topologischen Räumen heißt *eigentlich*, wenn wenn sie abgeschlossen ist und alle Urbilder $f^{-1}(\{y\})$ von Punkten $y \in Y$ kompakt sind. Die Operation ρ heißt *eigentlich*, wenn die stetige Abbildung θ eigentlich ist.

Proposition C.2 (tom Dieck [56, I.11, VIII.19 f.])**.**

(1) Sei $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen. Wenn f eigentlich ist, dann sind die Urbilder $f^{-1}(K)$ aller kompakten Mengen $K \subseteq Y$ kompakt. Wenn X ein lokal kompakter Hausdorffraum und Y ein Hausdorffraum ist, dann gilt davon auch die Umkehrung, und man kann schließen, daß Y auch lokal kompakt ist.

(2) Wenn die Operation frei ist, dann ist sie genau dann eigentlich, wenn R abgeschlossen und φ stetig ist.

(3) Sei ρ eigentlich und $x \in X$. Dann gilt folgendes:

- *Der Bahnenraum $G\backslash X$ ist hausdorffsch in der Quotiententopologie. Wenn G hausdorffsch ist, dann muß auch X hausdorffsch sein.*
- *Sei $H \subseteq G$ eine abgeschlossene Untergruppe und $A \subseteq X$ eine G-stabile Teilmenge. Dann sind die Einschränkungen $H \times X \to X$ und $G \times A \to A$ eigentliche Operationen.*
- *Die Abbildung $G \to X$, $g \mapsto gx$, ist eigentlich.*

- *Die Standgruppe $G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$ ist kompakt.*
- *Die kanonische Abbildung $G/G_x \to Gx$ ist ein Homöomorphismus.*
- *Die Bahn Gx ist in X abgeschlossen.*

(4) *Sei G hausdorffsch und lokal kompakt mit einer abzählbaren Basis, X ein lokal kompakter Hausdorffraum und ρ transitiv. Für jedes $x \in X$ ist die Abbildung $G \to X$, $g \mapsto gx$, dann offen und die induzierte Abbildung $G/G_x \to X$ ein Homöomorphismus.* □

Bemerkung C.3. Es ist eine wesentliche Tatsache, daß der Bahnenraum einer eigentlichen stetigen Operation hausdorffsch ist.

Definition C.4. Eine stetige Abbildung $p\colon X \to Y$ in einen topologischen Raum Y heißt *G-Prinzipalbündel*, wenn sie auf den Bahnen der Operation konstant ist, das heißt $p(gx) = p(x)$ für alle $g \in G$, und wenn jedes $y \in Y$ eine offene Umgebung U derart besitzt, daß es einen G-Homöomorphismus $\psi\colon p^{-1}(U) \to G \times U$ gibt, mit dem das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[r, "\psi", "\sim"'] \arrow[dr, "p"'] & G \times U \arrow[d, "\mathrm{pr}_2"] \\ & U. \end{tikzcd}$$

Dabei operiert G durch $g(h,u) := (gh,u)$ auf $G \times U$. Die Abbildung ψ heißt *Bündelkarte.*

Wenn es auf dem G-Raum X ein G-Prinzipalbündel gibt, dann muß die Operation frei sein. Denn sei $gx = x \in p^{-1}(U)$, wobei U Bildbereich einer Bündelkarte mit $p(x) \in U$ ist. Dann ist $\psi(x) = (h, p(x)) = (gh, p(x))$ für ein eindeutig bestimmtes $h \in G$, also $g = 1$. Die von p induzierte Abbildung $G\backslash X \to Y$ ist ein Homöomorphismus. Daraus folgt, daß die Quotientenabbildung $q\colon X \to G\backslash X$ ebenfalls ein G-Prinzipialbündel ist. Man kann nun umgekehrt fragen, wann die Quotientenabbildung einer beliebigen freien stetigen Operation ρ sogar ein G-Prinzipalbündel ist. Dies ist eine schwierige Frage. Es genügt nicht, daß die Operation eigentlich ist. Man hat jedoch:

Proposition C.5. *Sei ρ frei.*

(1) *Wenn G diskret ist, dann $q\colon X \to G\backslash X$ genau dann ein G-Prinzipalbündel, wenn φ stetig ist [56, I.11.2]. Insbesondere ist das der Fall, wenn ρ frei und eigentlich ist.*

(2) *Im allgemeinen ist q genau dann ein Prinzipalbündel, wenn es eine offene Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ durch* triviale *G-Unterräume gibt, das heißt, es gibt zu jedem Index eine stetige G-Abbildung $f_i \colon U_i \to G$ [56, IX.1.4].*

Bemerkungen C.6. Die zweite Aussage charakterisiert die G-Prinzipalbündel als die *lokal trivialen* G-Räume. Was den Begriff des G-Prinzipalbündels anbetrifft, so besteht eine gewisse historische Uneinheitlichkeit: in manchen Texten, etwa Palais [46], wird als *G-Prinzipalbündel (im weiteren Sinne)* ein vollständig regulärer ($T_{3a} + T_1$) G-Raum X bezeichnet, auf dem eine lokal kompakte Gruppe G frei operiert. Die lokale Trivialität wird nicht gefordert. Bei Cartan [21], wo der Begriff wohl zum erstenmal eingeführt wurde, ist ein Prinzipalbündel (frz. *éspace fibré principal*) per Definition dasselbe wie eine freie, eigentliche Operation. Aber eine solche muß nicht lokal trivial sein.

Definition C.7 ([56, VIII.20.7])**.** Für zwei Teilmengen $U, V \subseteq X$ sei

$$\mathfrak{W}(U,V) \coloneqq \{g \in G \mid gU \cap V \neq \emptyset\}.$$

Die Operation ρ hat *kompakte Wiederkehr*, wenn es zu jedem Paar $(x, y) \in X \times X$ offene Umgebungen U_x und V_y derart gibt, daß $\mathfrak{W}(U_x, V_x)$ in einer kompakten Teilmenge von G liegt.

Proposition C.8 ([56, VIII.20.8 ff.])**.**

(1) *Sei X hausdorffsch. Wenn ρ kompakte Wiederkehr hat, dann ist ρ eigentlich. Wenn G lokal kompakt ist, dann gilt hiervon auch die Umkehrung.*

(2) *Sei $G\backslash X$ hausdorffsch. Dann hat ρ genau dann kompakte Wiederkehr, wenn X ein* Cartanscher G-Raum *(Palais [46]) ist, das heißt, jedes $x \in X$ besitzt eine Umgebung V derart, daß $\mathfrak{W}(V, V)$ in einer kompakten Menge liegt.*

LITERATURVERZEICHNIS

[1] G. D. Abrams: *Morita equivalence for rings with local units.* In: Comm. in Algebra, Bd. 11 (1983), Nr. 8, S. 801–837.

[2] P. N. Ánh und L. Márki: *Morita equivalence for rings without identity.* In: Tsukuba J. Math., Bd. 11 (1987), Nr. 1, S. 1–16.

[3] J. Bernstein: *Second adjointness for representations of p-adic groups.* Unveröffentlichter Entwurf, 1987, `http://www.math.tau.ac.il/~bernstei/Unpublished_texts/unpublished_texts/Bernstein87-second-adj-from-chicago.pdf`, abgerufen am 20.5.2022.

[4] J. Bernstein: *Draft of: Representations of p-adic Groups.* Vorlesungsskriptum, 1992, `http://www.math.tau.ac.il/~bernstei/Unpublished_texts/unpublished_texts/Bernstein93new-harv.lect.from-chic.pdf`, abgerufen am 20.5.2022.

[5] J. Bernstein, P. Deligne, D. Kazhdan und M.-F. Vignéras: *Répresentations des groupes réductifs sur un corps local.* Hermann, 1984.

[6] J. Bernstein und A. Zelevinsky: *Representations of the group $GL(n, F)$ where F is a non-Archimedean local field.* In: Russian Math. Surveys, Bd. 31 (1976), Nr. 3, S. 1–68.

[7] J. Bernstein und A. Zelevinsky: *Induced representations of reductive $\mathfrak{p}$-adic groups. I.* In: Ann. Sci. Éc. Norm. Supér., Serie 4, Bd. 4 (1977), Nr. 4, S. 441–472.

[8] R. Bezrukavnikov und D. Kazhdan: *Geometry of second adjointness for p-adic groups.* In: Represent. Theory, Bd. 19 (2015), S. 299–332.

[9] H. Biller: *Proper actions on cohomology manifolds.* In: Trans. Am. Math. Soc., Bd. 355 (2002), Nr. 1, S. 407–432.

[10] S. Billey, M. Kovalinka, T. K. Petersen, W. Slofstra und B. E. Tenner: *Parabolic double cosets in Coxeter groups.* In: Electron. J. Comb., Bd. 25 (2018), Nr. 1, Artikel P1.23.

[11] A. Björner und F. Brenti: *Combinatorics of Coxeter Groups.* Springer, 2005.

[12] A. Borel: *Linear algebraic groups.* Springer, 1991.

[13] A. Borel und J. Tits: *Groupes réductifs.* In: Publ. Math. IHÉS, Bd. 27 (1965), S. 55–151.

[14] A. Borel und J. Tits: *Compléments à l'article « Groupes réductifs ».* In: Publ. Math. IHÉS, Bd. 41 (1972), S. 253–276.

[15] N. Bourbaki: *Elements of Mathematics. General Topology. Part 1.* Hermann, 1966.

[16] N. Bourbaki: *Groupes et algèbres de Lie. Chapitres 4, 5 et 6.* Masson, 1981.

[17] F. Bruhat und J. Tits: *Groupes réductifs sur un corps local : I. Données radicielles valuées.* In: Publ. Math. IHÉS, Bd. 41 (1972), S. 5-251; *II. Schémas en groupes. Existence d'une donnée radicielle valuée.* In: Publ. Math. IHÉS, Bd. 60 (1984), S. 5-184.

[18] T. Brzeziński und R. Wisbauer: *Corings and Comodules.* Cambridge University Press, 2003.

[19] C. J. Bushnell: *Representations of reductive p-adic groups: localization of Hecke algebras and applications.* In: J. London Math. Soc., Bd. 66 (2001), Nr. 2, S. 364–386.

[20] C. J. Bushnell und P. C. Kutzko: *Smooth representations of reductive p-adic groups: structure theory via types.* In: Proc. London Math. Soc., Bd. 77 (1998), Nr. 3, S. 582–634.

[21] H. Cartan: *Généralités sur les espaces fibrés, I.* Séminaire Henri Cartan, Bd. 2 (1949-1950), Nr. 6, S. 1-13.

[22] W. Casselman: *Introduction to the theory of admissible representations of p-adic reductive groups.* Unveröffentlichter Entwurf, `https://personal.math.ubc.ca/~cass/research/pdf/p-adic-book.pdf`, abgerufen am 30.08.2021.

[23] C. Cunningham (Hrsg.) und M. Nevins (Hrsg.): *Ottawa Lectures on Admissible Representations of Reductive p-adic Groups.* American Mathematical Society, 2009.

[24] J.-F. Dat: *Finitude pour les représentations lisses de groupes p-adiques.* In: J. Inst. Math. Jussieu, Bd. 8 (2009), Nr. 2, S. 261–333.

[25] J. D. Dixon, M. P. du Sautoy, A. Mann und D. Segal: *Analytic pro-p-groups.* Cambridge University Press, 1999.

[26] J. Dugundji: *Topology.* Allyn and Bacon, 1966.

[27] D. Flath: *Decomposition of representations into tensor products.* In: Proc. Sympos. Pure Math., Bd. 33, Teil I (1979), S. 179–183.

[28] K. R. Fuller: *On rings whose left modules are direct sums of finitely generated modules.* In: Proc. Amer. Math. Soc., Bd. 54 (1976), Nr. 1, S. 9-44.

[29] P. Garrett: Buildings and Classical Groups. Chapman & Hall, 1997.

[30] D.-A. Guiraud: *Jacquet's Functors in the Representation Theory of Reductive p-adic Groups.* Diplomarbeit, Mathematisches Institut Göttingen, 2009.

[31] Harish-Chandra: *Harmonic Analysis on Reductive p-adic Groups.* Springer, 1970.

[32] E. Hewitt und K. Ross: *Abstract harmonic analysis I.* Springer, 1979.

[33] J. E. Humphreys: *Linear algebraic groups. Corrected third printing.* Springer, 1987.

[34] D. Kazhdan: *Lecture notes in representations of p-adic groups.* Vorlesungsskriptum, `http://www.math.huji.ac.il/~kazhdan/padic.pdf`, abgerufen am 26.3.2022.

[35] D. Kazhdan: *Representations of reductive groups.* Vorlesungsskriptum, 2007, `http://www.math.huji.ac.il/~kazhdan/Notes/l.pdf`, abgerufen am 26.3.2022.

[36] M. Kobayashi: *Two-sided structure of double cosets in Coxeter groups.* Vordruck, `http://www.math.titech.ac.jp/~tosho/Preprints/pdf/162.pdf`, abgerufen am 26.3.2022.

[37] S. Mac Lane: *Categories for the Working Mathematician. Second Edition.* Springer, 1998.

[38] R. Meyer: *Smooth group representations on bornological vector spaces.* `arXiv:math/0310094v2 [math.FA]` (2003).

[39] R. Meyer: *Smooth and rough modules over self-induced algebras.* `arXiv:0911.3882 [math.RA]` (2009).

[40] R. Meyer: *Cuspidal representations of reductive p-adic groups are relatively injective and projective.* `arXiv:1504.02690v2 [math.RT]` (2015).

[41] R. Meyer und M. Solleveld: *Resolutions for representations of reductive p-adic groups via their buildings.* `arXiv:0902.4856v2 [math.RT]` (2009).

[42] R. Meyer und M. Solleveld: *The second adjointness theorem for reductive p-adic groups.* `arXiv:1004-4290v2 [math.RT]` (2010).

[43] J. S. Milne: *Algebraic Groups.* Cambridge University Press, 2017.

[44] F. Murnaghan: *Linear Algebraic Groups.* In: Clay Mathematics Proceedings, Bd. 4 (2005), S. 379–391.

[45] J. Neukirch: *Algebraische Zahlentheorie.* Springer, 1992.

[46] R. S. Palais: *On the Existence of Slices for Actions of Non-Compact Lie Groups.* Ann. of Math., Serie 2, Bd. 73 (1961), Nr. 2, S. 295–323.

[47] B. v. Querenburg: *Mengentheoretische Topologie.* Springer, 2001.

[48] D. Renard: *Représentations des groupes réductifs p-adiques.* Société mathématique de France, 2010.

[49] R. Richardson: *Intersections of double cosets in algebraic groups.* In: Indag. Math. (N.S.), Bd. 3 (1992), Nr. 1, S. 69–77.

[50] R. Richardson, G. Röhrle und R. Steinberg: *Parabolic subgroups with Abelian unipotent radical.* In: Invent. Math., Bd. 110 (1992), S. 649–671.

[51] E. Riehl: *Category Theory in Context.* Dover Publications, 2016.

[52] P. Schneider und U. Stuhler: *Representation theory and sheaves on the Bruhat-Tits building.* In: Publ. Math. IHÉS, Bd. 85 (1997), S. 97–191.

[53] J.-P. Serre: *Corps locaux.* Hermann, 1968.

[54] T. A. Springer: *Linear Algebraic Groups, Second Edition.* Birkhäuser, 1998.

[55] S. Stevens: *Semisimple characters for p-adic classical groups.* In: Duke Math. J., Bd. 127 (2005), Nr. 1, S. 123–173.

[56] T. tom Dieck: *Topologie. 2. Auflage.* De Gruyter, 2000.

[57] J. Vercruysse: *Equivalences between categories of modules and categories of comodules.* `arXiv:math/0604423 [math.RA]` (2006).

[58] M.-F. Vignéras: *Représentations l-modulaires d'un groupe réductif p-adique avec $l \neq p$.* Birkhäuser, 1996.

[59] N. R. Wallach: *Introductory lectures on automorphic forms.* Vorlesungsskriptum, `https://mathweb.ucsd.edu/~nwallach/luminy-port2.pdf`, abgerufen am 23.3.2022.

[60] W. C. Waterhouse: *Introduction to Affine Group Schemes.* Springer, 1979.

[61] R. Wisbauer: *Grundlagen der Modul- und Ringtheorie.* Verlag Reinhard Fischer, 1988.

[62] A. Zelevinsky: *Induced Representations of reductive $\mathfrak{p}$-adic groups. II. On irreducible representations of* $\mathrm{GL}(n)$. In: Ann. Sci. Éc. Norm. Supér., Serie 4, Bd. 13 (1980), Nr. 2, S. 165–210.