Numerische Untersuchungen zur Wechselwirkung von Mantelplumes mit Mittelozeanischen Rücken

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultäten
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von

Michael Albers

aus

Osnabrück

Göttingen 2000

D 7
Referent: Prof. Dr. U. Christensen
Korreferent: Prof. Dr. H. Eckelmann
Tag der mündlichen Prüfung: 16. Juni 2000

Inhaltsverzeichnis

Abstract **1**

1 Einleitung **3**

2 Geophysikalische Motivation **7**
2.1 Hotspot-Verteilung 7
2.2 Hinweise auf die Wechselwirkung von Mantelplumes mit Mittelozeanischen Rücken 8
2.2.1 Seismische Tomographie 8
2.2.2 Schwere- und Topographiedaten 9
2.2.3 Geochemische Daten 12
2.3 Ergebnisse bisheriger fluiddynamischer Untersuchungen 13

3 Physikalisches Modell **15**
3.1 Modellbeschreibung 15
3.2 Modellgleichungen 17
3.2.1 Grundgleichungen der Hydrodynamik 17
3.2.2 Vereinfachungen 19
3.2.3 Skalierung der Gleichungen 21
3.2.4 Randbedingungen 22
3.3 Rheologie 25
3.3.1 Fließmechanismen in Festkörpern 25
3.3.2 Temperatur- und Druckabhängigkeit der Viskosität 27

4 Numerisches Lösungsverfahren **29**
4.1 Finite-Volumen Diskretisierung 29
4.1.1 Grundlagen der Diskretisierung 29
4.1.2 Diskretisierung der Kontinuitäts- und Stokesgleichung 31
4.1.3 Diskretisierung der Wärmeleitungsgleichung 32
4.1.4 Numerischer Lösungsansatz 35
4.2 Mehrgitterverfahren 36
4.2.1 Literaturüberblick 36

4.2.2 Grundlagen 37
4.2.3 Implementierter Mehrgitteralgorithmus 42
4.2.4 Glätter 42
4.2.5 Prolongation and Restriktion 43
4.2.6 Approximation der Grobgittergleichungen 47
4.3 Lokale Gitterverfeinerungen 49
4.3.1 Erzeugung nicht-äquidistanter Gitter 49
4.3.2 Modifikation des Mehrgitterverfahrens 51
4.3.3 Berechnung innerer Randwerte 52
4.4 Konvergenzeigenschaften des Mehrgitterverfahrens 53
4.4.1 Konvergenztest für stark variable Viskosität 53
4.4.2 Rechenzeit 58
4.5 Verifikation der numerischen Lösung 60

5 Parameterstudie für Mantelplumes mit zeitlich konstantem Plumefluß 67
5.1 Voruntersuchungen in 2–D 67
5.1.1 Referenzmodell 67
5.1.2 Variation der Boxlänge 71
5.1.3 Variation des Viskositätscutoffs 71
5.1.4 Variation der Geschwindigkeitsglättung an der Spreadingachse . . . 73
5.1.5 Vergleich mit anderen numerischen Verfahren 75
5.2 Modellrechnungen in 3–D 77
5.2.1 Untersuchter Parameterbereich 77
5.2.2 Referenzmodell 79
5.2.3 Variation der Spreadingrate und der Plumeviskosität 84
5.2.4 Variation des Plumeflusses 92
5.3 Skalierungsgesetz zur Plumeausbreitung unter Mittelozeanischen Rücken . 93
5.3.1 Analytische Bestimmung der Skalierungsgrößen 93
5.3.2 Berechnung der Plumebreite in den numerischen Modellen 95
5.3.3 Abhängigkeit der Plumebreite von den Modellparametern 96

6 Ergebnisse für Mantelplumes mit zeitlich variablem Plumefluß 101
6.1 Erzeugung kurzzeitiger Störungen im Plumefluß 101
6.1.1 Ausbreitung von Volumenstörungen in Zweiflüssigkeitssystemen . 101
6.1.2 Übertragung der Ergebnisse auf Einflüssigkeitssysteme 104
6.1.3 Modifikation der Modellrandbedingungen 106
6.2 Modellrechnungen in 3–D 107
6.2.1 Zeitliche Entwicklung einer Störung im Referenzmodell 107
6.2.2 Ergebnisse für verschiedene Spreadingraten und Plumeviskositäten 112
6.3 Erklärungsansatz zur Ausbreitung der Störungen 116

7 Diskussion 119

8 Zusammenfassung **125**

Anhang **127**
A.1 Zusammenstellung der Modellparameter 128
A.2 Parameter der Modellrechnungen 129
A.3 Parameter der Skalierungsanalyse 130

Literaturverzeichnis **131**

Danksagung **143**

Abbildungsverzeichnis

2.1 Hotspot-Verteilung 8
2.2 Anomalie der seismischen Wellengeschwindigkeit unter Island 10
2.3 Schwerekarte des Nordatlantiks 11

3.1 Skizze des Modells mit Randbedingungen 16
3.2 Isothermen einer ozeanischen Lithosphäre 25

4.1 Räumliche Anordnung der Variablen im Gittervolumen Ω_{ijk} 30
4.2 Beispiele für unterschiedliche Mehrgitterzyklen 41
4.3 Anordnung der Fein- und Grobgitterwerte für Temperatur und Druck 44
4.4 Anordnung der Fein- und Grobgitterwerte für die Geschwindigkeit 45
4.5 Anordnung der Fein- und Grobgitterwerte für die Viskosität 48
4.6 Erzeugung eines nicht-äquidistanten Gitters durch äquidistante Teilgitter . . 50
4.7 Anordnung der Variablen auf einem nicht-äquidistanten Gitter 52
4.8 Eindimensionales Beispiel einer kubischen Interpolation 53
4.9 Temperaturfelder aus einer dreidimensionalen, zeitabhängigen Konvektionsrechnung mit variabler Viskosität 55
4.10 Konvergenzverhalten für unterschiedliche Mehrgitterzyklen 56
4.11 Konvergenzverhalten für unterschiedliche Viskositätsrestriktionen 58
4.12 Rechenzeit in Abhängigkeit von der Anzahl der Gittervolumen 59
4.13 Stationäre 2-D Konvektion mit variabler Viskosität 61
4.14 Stationäre 2-D Konvektion mit stark variabler Viskosität 63
4.15 Stationäre 3-D Konvektion mit variabler Viskosität 64

5.1 Stationäre Plume-Rücken-Wechselwirkung in 2–D 69
5.2 Geschwindigkeitsprofile für unterschiedliche Gitterauflösungen 70
5.3 Geschwindigkeitsprofile für unterschiedliche Boxlängen 72
5.4 Geschwindigkeitsprofile für unterschiedliche Viskositätscutoffs 73
5.5 Geschwindigkeitsprofile für unterschiedlich starke Glättungen der vorgegebenen Plattengeschwindigkeit 74
5.6 Geschwindigkeitsprofile für unterschiedliche numerische Verfahren 76
5.7 Untersuchter Parameterbereich der dreidimensionalen Modellrechnungen. . 78
5.8 Temperatur und Strömungsstruktur für das 3–D Referenzmodell 80

5.9 Geschwindigkeitsprofile des Referenzmodells 82
5.10 Laterale Ausbreitungsgeschwindigkeit des Plumematerials 83
5.11 Variation der Spreadingrate 85
5.12 Variation der Aktivierungsenergie 86
5.13 Variation des Aktivierungsvolumens 87
5.14 Modell mit hohem Aktivierungsvolumen 88
5.15 Variation der Temperaturanomalie des Plumes 90
5.16 Variation der Spreadingrate und der Plumeviskosität 91
5.17 Variation des Auftriebsflusses 92
5.18 Skizze zur Flüssigkeitsströmung in dünnen Schichten unter Mittelozeanischen Rücken 94
5.19 Schichtdicke des Plumematerials an der Spreadingachse 97
5.20 Skalierte Plumebreite als Funktion der Auftriebszahl 98
5.21 Skalierte Plumebreite als Funktion der “Upslope”-Zahl 99
5.22 Skalierte Plumebreite als Funktion der Auftriebs- und “Upslope”-Zahl . . . 99

6.1 Skizze zur Flüssigkeitsströmung in einem niedrigviskosen Kanal umgeben von einer hochviskosen Matrix 102
6.2 Plumebreite und Volumenfluß für eine Störung im Referenzmodell 108
6.3 Zeitliche Entwicklung einer Störung im Referenzmodell 110
6.4 Zeitliche Variation der Temperaturanomalie an der Spreadingachse 111
6.5 Ausbreitungsgeschwindigkeit der Störung im Referenzmodell 112
6.6 Plumebreite und Volumenfluß für Störungen bei unterschiedlicher Spreadingrate und Plumeviskosität 114
6.7 Momentaufnahmen von Störungen bei unterschiedlicher Spreadingrate und Plumeviskosität 115
6.8 Ausbreitungsgeschwindigkeit der Störung bei geringem Viskositätskontrast 116

7.1 Anomalie der Freiluft-Schwere am Reykjanes-Rücken 123

Tabellenverzeichnis

3.1 Skalierung der Variablen 22

4.1 Benchmark-Resultate für Testfall 1 62
4.2 Benchmark-Resultate für Testfall 2 64
4.3 Benchmark-Resultate für Testfall 3 65

5.1 Parameter des zweidimensionalen Referenzmodells 68
5.2 Parameter des dreidimensionalen Referenzmodells 79

6.1 Parameter zur Erzeugung einer Störung im Referenzmodell 108
6.2 Parameter zur Erzeugung einer Störung bei geringem Viskositätskontrast . . 113

A.1 Zusammenstellung der Modellparamter 128
A.2 Parameter der Modellrechnungen 129
A.3 Parameter der Skalierungsanalyse 130

Abstract

The interaction of mantle plumes with mid-ocean ridges is investigated in 3-D numerical convection models. A new numerical method for solving convection problems with variable viscosity in Cartesian geometry is presented. It is based on a finite-volume discretization in combination with a multigrid method. A local mesh refinement technique, which is more efficient and flexible than previously used refinement methods, makes a simple implementation of complex grid structures feasible. Comparisons with other numerical methods reveal that accurate results are obtained even when viscosity varies strongly. Using this numerical method, a much stronger temperature-dependence of viscosity can be considered than was possible in previous models. For the first time, numerical calculations of plume-ridge-interaction with a realistic viscosity law, which allow lateral viscosity variations of more than 6 orders of magnitude, are presented.

In models with constant plume flux the influence of various model parameters on the interaction of plumes with mid-ocean ridges is determined. It turns out that the dynamics of plume-ridge-interaction depends more strongly on the plume viscosity than previously assumed. The plume material is significantly channeled along the axis of a slow-spreading ridge if the plume viscosity is of order 10^{17} Pa s. The plume material spreads radially below the ridge if the spreading rate is fast or the viscosity contrast between plume and ambient mantle is small. A scaling law is derived from the numerical calculations in order to describe the along-axis plume width dependence on the model parameters.

In time-dependent calculations the temporal evolution of short-term variations of the plume flux is investigated. If the plume viscosity is small and the spreading rate is slow, these perturbations propagate in the form of pulses along the ridge with a speed much larger than the spreading rate of the ridge. The concentration of the perturbation on the ridge axis becomes smaller with increasing spreading rate and decreasing viscosity contrast between plume material and ambient mantle. Pulsations of the Iceland mantle plume have been suggested as the cause of V-shaped topography and gravity anomalies at the Reykjanes Ridge. The model results are discussed in this context.

Kapitel 1

Einleitung

Die Erde ist der einzige Planet im Sonnensystem, der plattentektonisches Verhalten zeigt. Die Lithosphäre der Erde ist in mehrere Plattensegmente unterteilt, die sich gegeneinander verschieben und Bestandteil einer großräumigen Konvektion im Erdmantel sind [*Fowler*, 1990]. An konvergenten Plattengrenzen wird die Lithosphäre subduziert, während an divergenten Plattengrenzen, wie z.B. Mittelozeanischen Rücken, Mantelmaterial aufsteigt und kontinuierlich neue Lithosphäre bildet. Diese Konvektion im Erdmantel, die über Längenskalen von mehreren tausend Kilometern mit Strömungsgeschwindigkeiten von wenigen Zentimetern pro Jahr erfolgt, wird hauptsächlich thermisch durch primordiale Wärme aus dem Erdkern und durch radioaktive Wärmefreisetzung im Erdmantel getrieben [*Turcotte und Schubert*, 1982].

Neben dieser großräumigen Konvektion existieren auch kleinräumige Konvektionsphänomene im Erdmantel. Isolierter Vulkanismus an der Erdoberfläche, der über einen längeren Zeitraum erhalten bleibt und Vulkanketten mit fortschreitendem Alter der vulkanischen Aktivität bildet, wurde von *Wilson* [1963] durch Bereiche erhöhter Temperatur unterhalb der Lithosphäre erklärt, die sich nicht mit der großräumigen Plattenbewegung mitbewegen. *Morgan* [1971, 1972] hat als Ursache dieser “Hotspots” lokal eng begrenzte Aufströme im Erdmantel vorgeschlagen, die er als Mantelplumes bezeichnet. Diese Mantelplumes transportieren heißes Material aus größerer Tiefe im Erdmantel bis unterhalb der Lithosphäre und verursachen dadurch den Vulkanismus an der Erdoberfläche. Der Aufstieg der Mantelplumes aus dem tiefen Erdmantel erklärt zum einen die räumlich feste Lage der Hotspots zueinander, die nicht durch die Plattenbewegungen beeinflußt wird [*Duncan und Richards*, 1991], und zum anderen die unterschiedliche geochemische Zusammensetzung der an Hotspots und an Mittelozeanischen Rücken erzeugten Basalte [u.a. *Zindler und Hart*, 1986; *Hofmann*, 1997]. Aus Untersuchungen der Schmelzzusammensetzung und Schmelzmenge sind Temperaturanomalien der Mantelplumes unterhalb der Lithosphäre von 200–300 K relativ zu normalem Mantelmaterial abgeschätzt worden [*Watson und McKenzie*, 1991; *White*, 1993]. Auch wenn der endgültige Beweis für die Existenz von Mantelplumes noch aussteht, ergeben sich doch insbesondere aus seismologischen Untersuchungen immer mehr Hinweise auf lokale Anomalien unter Hotspots, die bis in den tiefen Erdmantel reichen, so daß Mantelplumes als

Ursache der Hotspots im allgemeinen anerkannt sind. Die bekanntesten Beispiele für Mantelplumes sind der Hawaii-Plume unter der pazifischen Platte und der Island-Plume unterhalb des Mittelatlantischen Rückens.

Als Quellregion der Mantelplumes wird häufig der Bereich oberhalb der Grenze von Erdmantel und Erdkern in etwa 2900 km Tiefe angenommen. Wegen des großen Temperaturunterschieds zwischen dem unteren Erdmantel und dem äußeren Erdkern, der möglicherweise mehr als 1000 K beträgt [*Böhler*, 1993], entsteht oberhalb der Kern-Mantel-Grenze eine thermische Grenzschicht. Diese Grenzschicht wird in der Regel mit der seismologischen D”-Schicht gleichgesetzt, die sich durch Einschluß von Eisen aus dem Erdkern in ihrer geochemischen Zusammensetzung vom darüberliegenden Erdmantel unterscheiden könnte [*Wysession et al.*, 1998]. Numerische Modellrechnungen zeigen, daß in dieser Grenzschicht eine kleinräumige Konvektion einsetzt und Instabilitäten entstehen, die sich aus der Grenzschicht ablösen und im Erdmantel aufsteigen [*Christensen*, 1984a; *Olson et al.*, 1987]. Wenn diesen Instabilitäten kontinuierlich Material aus der Grenzschicht nachfolgt, können sich auf diese Weise Mantelplumes entwickeln. Weitere Instabilitäten, die sich in der Grenzschicht bilden, werden in bereits bestehende Mantelplumes gezogen und erzeugen kurzzeitige Störungen im Volumenfluß des Plumes [*Olson et al.* 1987], die, wie experimentelle Laboruntersuchungen zeigen, als solitäre Wellen im Plume aufsteigen können [*Olson und Christensen*, 1986; *Whitehead und Helfrich*, 1988, 1990; *Helfrich und Whitehead*, 1990].

Die Annahme, die Kern-Mantel-Grenze sei Quellregion der Mantelplumes, wirft allerdings auch einige Probleme auf. Variationen der geochemischen Zusammensetzung, die in Basalten unterschiedlicher Hotspots gefunden werden, sind mit einer gemeinsamen Quellregion aller Mantelplumes nur schwer zu erklären, sondern deuten vielmehr auf eine Entstehung der Mantelplumes in unterschiedlichen Tiefen des Erdmantels hin [*Hofmann*, 1997]. Numerische Untersuchungen der thermischen Struktur von Mantelplumes zeigen, daß Mantelplumes mit großem Volumenfluß während des Aufstiegs durch den gesamten Erdmantel nur einen geringen Teil ihrer thermischen Anomalie durch Wärmediffusion an den umgebenden Mantel abgeben. Mantelplumes mit geringem Volumenfluß lösen sich dagegen während des Aufstiegs auf und erreichen nicht die Lithosphäre [*Albers und Christensen*, 1996]. Damit ist zumindest für schwache Mantelplumes mit geringem Volumenfluß anstelle der Kern-Mantel-Grenze eine Quellregion in geringerer Tiefe wahrscheinlich. Außerdem ist unsicher, ob Mantelplumes die seismische Diskontinuität in einer Tiefe von etwa 660 km, die auf eine endotherme Phasenumwandlung des Olivins von der γ-Spinel-Phase in Perovskit und Magnesiowüstit zurückgeführt wird, durchdringen können [*Nakakuki et al.*, 1994; *Davies*, 1995; *Schubert et al.*, 1995]. Die Übergangszone zwischen oberem und unterem Mantel in einem Tiefenbereich von etwa 410–660 km kommt als weitere Quellregion der Mantelplumes in Frage, falls sich dort durch eine zumindest teilweise geschichtete Konvektion mit nur geringem Massenaustausch zwischen oberem und unterem Mantel eine thermische Grenzschicht ausbildet.

Eine alternative Modellvorstellung zur Konvektion im Erdmantel, die auch Auswirkungen auf die Quellregion der Mantelplumes hat, wird derzeit intensiv diskutiert. Dieses Modell

geht von zwei Schichten unterschiedlicher geochemischer Zusammensetzung im Erdmantel aus, deren Grenze sich in einer Tiefe von etwa 1600 km befindet [*Kellogg et al.*, 1999]. Aufgrund der unterschiedlichen Zusammensetzung hat die untere Schicht trotz einer erhöhten Temperatur eine etwas höhere Dichte als die obere Schicht, so daß kein großer Massenaustausch zwischen den beiden Schichten stattfindet. Allerdings verursachen Konvektionsströmungen eine Variation der Tiefenlage der Grenze zwischen den beiden Schichten von mehreren hundert Kilometern. Während es in einigen Gebieten zu einer starken Depression der Grenze kommt, wölbt sie sich in anderen Bereichen großräumig auf. Sowohl numerische Modellrechnungen [*Kellogg et al.*, 1999] als auch Laboruntersuchungen [*Davaille*, 1999] zeigen, daß sich oberhalb dieser großräumigen Aufwölbungen lokale Instabilitäten bilden können, aus denen Mantelplumes enstehen. Damit liegt nach dieser Modellvorstellung die Quellregion der Mantelplumes im mittleren Erdmantel.

Die Wechselwirkung von Mantelplumes mit einer sich bewegenden Lithosphäre ist in verschiedenen Arbeiten untersucht worden. Sowohl semianalytische Ansätze, die eine vereinfachte Theorie zur Beschreibung der Ausbreitung des Plumematerials verwenden [u.a. *Olson*, 1990; *Davies*, 1994; *Sleep*, 1994, 1996], als auch zweidimensionale [*Monnereau et al.*, 1993] und dreidimensionale [*Ribe und Christensen*, 1994; *Moore et al.*, 1998] numerische Modellrechnungen zeigen, daß sich das Plumematerial unterhalb der Lithosphäre lateral ausbreitet. Die thermische Struktur der Lithosphäre wird dabei durch das heiße Plumematerial nur wenig beeinflußt, solange keine sekundäre Konvektion im Übergangsbereich zwischen Lithosphäre und Plumematerial einsetzt [*Sleep*, 1994; *Moore et al.*, 1998]. Lediglich bei einer sich nicht bewegenden Lithosphäre spielt die thermische Aufheizung der Lithosphäre durch das darunterliegende heiße Plumematerial eine Rolle [*Monnereau et al.*, 1993]. Damit ergibt sich aus diesen Untersuchungen, daß die großräumigen Topographie- und Geoidanomalien, die an vielen Hotspots beobachtet werden [u.a. *Crough*, 1983], einen dynamischen Ursprung unterhalb der Lithosphäre haben. Für den Hawaii-Plume können durch dreidimensionale, numerische Modellrechnungen sowohl die Topographieanomalie [*Ribe und Christensen*, 1994] als auch die zeitliche Abfolge der vulkanischen Aktivität [*Ribe und Christensen*, 1999] erklärt werden.

Die Wechselwirkung von Mantelplumes mit Mittelozeanischen Rücken ist komplexer. Geophysikalische und geochemische Beobachtungen zeigen, daß Mantelplumes über große Entfernungen mit Mittelozeanischen Rücken wechselwirken [*Schilling*, 1985, 1991; *Schilling et al.*, 1985; *Small*, 1995]. Dabei werden die Daten so interpretiert, daß es bei Mantelplumes, die sich in der Nähe von Mittelozeanischen Rücken befinden, zu einer Strömung des Plumematerials zum Mittelozeanischen Rücken kommt, während bei Mantelplumes, die sich direkt unterhalb eines Mittelozeanischen Rückens befinden, die Ausbreitung des Plumematerials hauptsächlich entlang der Rückenachse stattfindet. So ist z.B. der Reykjanes-Rücken, der Bereich des Mittelatlantischen Rückens südwestlich von Island, bis zu einer Entfernung von mehr als 1000 km von Island anormal flach [*Vogt*, 1976; *Smallwood et al.*, 1995; *White et al.*, 1995; *White*, 1997]. Gleichzeitig weisen die Spurenelement- und Isotopen-Zusammensetzungen der Basalte auf eine mögliche Plumequelle unterhalb des Reykjanes-

Rückens hin, wobei die Werte schrittweise auf für normale Mittelozeanische Rücken charakteristische Werte in großer Entfernung von Island abfallen [*Schilling*, 1973, 1985]. Diese Ergebnisse werden durch eine Strömung des Plumematerials von Island über mehrere hundert Kilometer entlang des Reykjanes-Rückens erklärt [u.a. *Vogt*, 1971, 1976; *Schilling*, 1973]. Lokale Variationen, die sich neben diesen ausgedehnten Anomalien am Reykjanes-Rücken finden, werden dabei als kurzzeitige Variationen im Volumenfluß des Island-Plumes gedeutet [*Vogt*, 1971; *White et al.*, 1995].

Vereinfachte Modelle zur Untersuchung der Ausbreitung des Plumematerials unter Mittelozeanischen Rücken zeigen in der Tat für Mantelplumes, die sich abseits eines Mittelozeanischen Rückens befinden, eine Strömung des Plumematerials zum Mittelozeanischen Rücken. Für Mantelplumes, die sich direkt unterhalb eines Mittelozeanischen Rückens befinden, ergibt sich eine deutliche Strömung entlang der Rückenachse [*Sleep*, 1996; *Yale und Phipps Morgan*, 1998]. Dagegen zeigen realistischere dreidimensionale Untersuchungen, die alle relevanten dynamischen Effekte der Wechselwirkung von Mantelplumes mit Mittelozeanischen Rücken berücksichtigen, nur eine sehr eingeschränkte laterale Ausbreitung des Plumematerials entlang der Rückenachse, die nicht mit den Beobachtungen konsistent ist [*Feighner und Richards*, 1995; *Feighner et al.*, 1995; *Ribe et al.*, 1995; *Ito et al.*, 1996]. Das Plumematerial wird in diesen Modellen im Gegenteil sehr effizient durch die Bewegung der Lithosphärenplatten von der Rückenachse wegtransportiert. Allerdings sind dreidimensionale Berechnungen der Plume-Rücken-Wechselwirkung numerisch sehr anspruchsvoll, weil unterhalb des Mittelozeanischen Rückens extreme Viskositätsgradienten zwischen dem niedrigviskosen Plumematerial und der hochviskosen Lithosphäre auftreten. Aus diesem Grund waren alle bisherigen Untersuchungen auf moderate Viskositätsvariationen beschränkt, die deutlich kleiner sind, als es für die Erde realistisch ist.

In dieser Arbeit wird der Einfluß einer starken Temperaturabhängigkeit der Viskosität auf die Dynamik der Wechselwirkung von Mantelplumes mit Mittelozeanischen Rücken untersucht. Dazu wird ein neu entwickeltes, numerisches Verfahren vorgestellt, das die Berücksichtigung deutlich stärkerer Viskositätsvariationen erlaubt, als es in bisherigen Untersuchungen möglich war. Die Modellrechnungen werden auf Mantelplumes, die sich direkt unterhalb des Mittelozeanischen Rückens befinden, beschränkt. Für Modelle mit zeitlich konstantem Plumefluß wird in einer systematischen Parameterstudie die Strömungsstruktur des Plumematerials unterhalb des Mittelozeanischen Rückens in Abhängigkeit von den verschiedenen Modellparametern vorgestellt. In zeitabhängigen Modellen wird dann zum ersten Mal die Ausbreitung kurzzeitiger Störungen im Plumefluß unter Mittelozeanischen Rücken untersucht. Abschließend werden die Ergebnisse im Zusammenhang mit den Beobachtungsdaten für den Island-Plume diskutiert.

Kapitel 2

Geophysikalische Motivation

In diesem Kapitel wird die Themenstellung der vorliegenden Arbeit motiviert. Dazu werden verschiedene Beobachtungen vorgestellt, die Rückschlüsse auf die Wechselwirkung von Mantelplumes mit Mittelozeanischen Rücken erlauben und damit als Anhaltspunkte für die numerischen Modellrechnungen dienen. Im ersten Abschnitt wird ein Überblick über die Hotspots der Erde gegeben, die auf Mantelplumes zurückgeführt werden, und auf ihre räumliche Lage zu Mittelozeanischen Rücken eingegangen. Im zweiten Abschnitt werden verschiedene geophysikalische und geochemische Beobachtungsdaten vorgestellt, die Hinweise auf die Art der Wechselwirkung zwischen Mantelplumes und Mittelozeanischen Rücken geben. Die Ergebnisse bisheriger fluiddynamischer Untersuchungen zu diesem Themenkomplex werden dann im dritten Abschnitt diskutiert.

2.1 Hotspot-Verteilung

Die Anzahl der Hotspots der Erde, die mit Mantelplumes in Verbindung gebracht werden, hat in den letzten knapp 30 Jahren seit Einführung des Konzepts der Mantelplumes durch *Morgan* [1971, 1972] deutlich variiert. Nachdem *Morgan* [1972] insgesamt 19 Mantelplumes angegeben hat, stieg diese Zahl im Laufe der Jahre auf mehr als 100 an [u.a. *Burke und Wilson*, 1976]. Nach genaueren Untersuchungen wurden in den folgenden Jahren nicht mehr für alle Hotspots Mantelplumes als Ursache angenommen, so daß in neueren Arbeiten von etwa 30–50 Mantelplumes ausgegangen wird [*Davies*, 1988; *Richards et al.*, 1988; *Sleep*, 1990; *Steinberger und O'Connell*, 1998]. Das Ergebnis einer aktuellen Arbeit, in der aus dem Oberflächenwärmefluß der Erde eine Abschätzung von bis zu 5200 Mantelplumes gemacht wird, ist dagegen sehr spekulativ [*Malamud und Turcotte*, 1999].

Die räumliche Verteilung der Hotspots, die durch Mantelplumes erklärt werden, ist in Abbildung 2.1 dargestellt. Einige dieser Hotspots befinden sich in der Nähe von Mittelozeanischen Rücken. Dazu gehören u.a. das Galápagos Plume-Rücken-System, die Kerguelen nahe des Südostindischen Rückens und mehrere Mantelplumes entlang des Mittelatlantischen Rückens, wobei Island das bekannteste Beispiel eines Mantelplumes direkt unterhalb eines

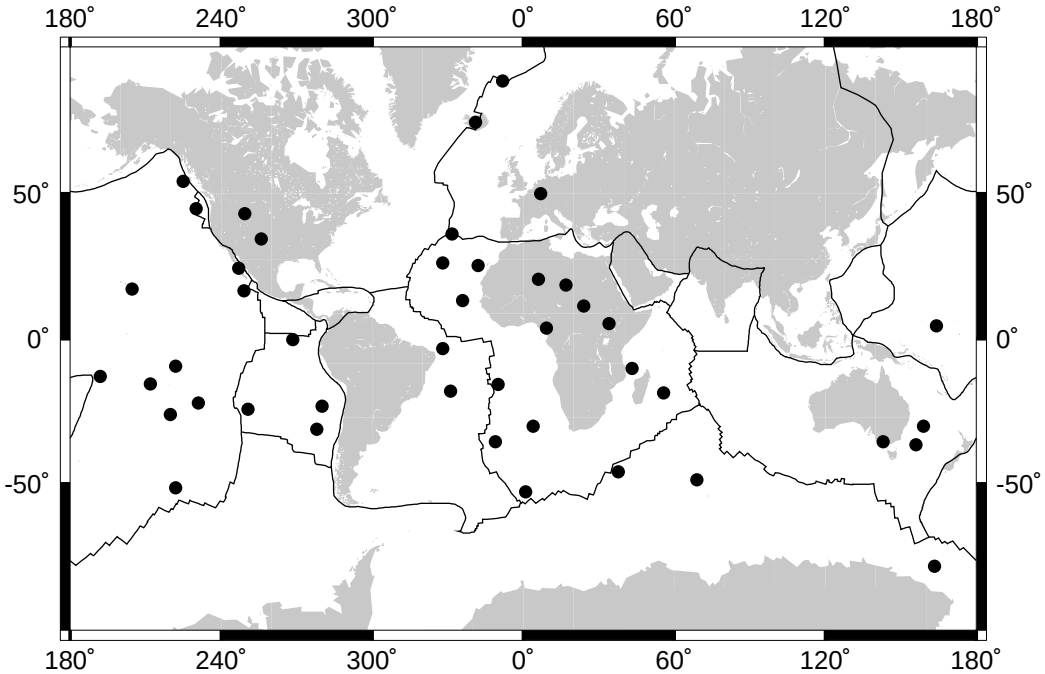

Abbildung 2.1: Räumliche Verteilung der mit Mantelplumes in Verbindung gebrachten Hotspots der Erde (nach *Steinberger und O'Connell* [1998]) und Grenzen der Lithosphärenplatten.

Mittelozeanischen Rückens ist. Die Zuordnung von Mantelplumes zu einigen der in Abbildung 2.1 dargestellten Hotspots ist noch sehr umstritten. Jedoch haben sich insbesondere für Island in den letzten Jahren verschiedene Hinweise auf die Existenz eines Mantelplumes ergeben, die im folgenden Abschnitt genauer vorgestellt werden.

2.2 Hinweise auf die Wechselwirkung von Mantelplumes mit Mittelozeanischen Rücken

2.2.1 Seismische Tomographie

In der seismischen Tomographie wird aus den Laufzeitdifferenzen registrierter Erdbebenwellen, die durch lokale Anomalien in der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Erdbebenwellen entstehen, relativ zu einem Referenzmodell eine dreidimensionale, räumliche Verteilung der Variation der seismischen Wellengeschwindigkeit in der Erde erstellt. Durch regionale Studien, in denen über einen begrenzten Zeitraum in einem ausgewählten Gebiet eine größere Anzahl von Seismometern aufgestellt wird, kann das räumliche Auflösungsvermögen für seismische Geschwindigkeitsanomalien unterhalb dieses Gebietes erhöht werden. Die so bestimmten lokalen Variationen der seismischen Wellengeschwindigkeit können dann mit Hilfe von petrophysikalischen Modelle in Temperaturanomalien umgerechnet werden, wobei die

Ausbreitungsgeschwindigkeit der seismischen Wellen mit steigender Temperatur geringer wird. Damit bietet die seismische Tomographie eine Möglichkeit, die thermische Struktur von Plumes im Erdmantel nachzuweisen. Eine aktuelle Zusammenstellung laufender und in den letzten Jahren durchgeführter Projekte zur Untersuchung von Mantelplumes mit Hilfe seismologischer Methoden findet sich bei *Nataf* [2000].

Im Rahmen des ICEMELT-Projektes wurden von 1993–1996 15 Breitband-Seismometer auf Island betrieben. Aus den registrierten Erdbeben wurden die Variationen in der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Erdbebenwellen unter Island bestimmt. Die Ergebnisse sind in Abbildung 2.2 dargestellt. Sowohl für P-Wellen als auch für S-Wellen ergibt sich eine negative Geschwindigkeitsanomalie von zwei bzw. vier Prozent mit einem Durchmesser von etwa 300 km unter Island, die bis in eine Tiefe von 400 km reicht und durch eine Temperaturanomalie von etwa 300 K erklärt werden kann [*Wolfe et al.*, 1997]. Die geringe Auslage des Stationsnetzes, das auf das isländische Festland beschränkt war, erlaubt es nicht, Aussagen über die Geschwindigkeitsanomalie in größerer Tiefe zu machen. Globale Tomographiemodelle deuten aber eine Anomalie unter Island an, die bis zur Kern-Mantel-Grenze reicht [*Bijwaard und Spakman*, 1999], wobei allerdings das räumliche Auflösungsvermögen dieser globalen Modelle sehr gering ist. Aber auch in der regionalen Studie ist die Anomalie in den obersten 100 km wegen der geringen Stationsdichte von 15 Seismometern nur relativ ungenau bestimmt [*Wolfe et al.*, 1997], so daß diese Untersuchungen zwar die Existenz eines Mantelplumes unter Island andeuten, aber direkt unterhalb des Mittelatlantischen Rückens kein genaues Plumebild liefern, welches exakte Rückschlüsse auf die Wechselwirkung des Island-Plumes mit dem Mittelatlantischen Rücken erlaubt.

2.2.2 Schwere- und Topographiedaten

Aus der Bestimmung der Erdschwere und der Topographie lassen sich Informationen über die Wechselwirkung von Mantelplumes mit Mittelozeanischen Rücken gewinnen. Abbildung 2.3 zeigt eine Schwerekarte des Nordatlantiks. Auffällig ist die großräumige, positive Schwereanomalie am Reykjanes-Rücken südwestlich von Island. Neben dieser Schwereanomalie findet sich ebenfalls eine entsprechende Topographieanomalie am Reykjanes-Rücken. Die Topographieerhöhung beträgt mehr als 2500 m im Bereich von Island und nimmt mit zunehmender Entfernung von Island ab [*Vogt*, 1976; *Smallwood et al.*, 1995; *White et al.*, 1995; *White*, 1997]. Diese Schwere- und Topographieanomalien erstrecken sich über mehr als 1000 km entlang des Reykjanes-Rückens und werden durch anormal heißes Material unterhalb des Rückens erklärt. Die Topographieerhöhung resultiert zum einen aus einer dynamischen Hebung durch das heiße Material und zum anderen aus der Krustenverdickung, die die Folge einer erhöhten Schmelzproduktion ist [*White et al.*, 1995]. Die verringerte Dichte des heißen Materials reduziert die Schwere am Reykjanes-Rücken. Gleichzeitig hat aber die zusätzliche Masse durch die Topographieerhöhung einen gegenteiligen Einfluß auf die Schwere, so daß sich insgesamt eine positive Schwereanomalie ergibt. Als Ursache der erhöhten Temperatur unterhalb des Reykjanes-Rückens wird eine Strömung des Plume-

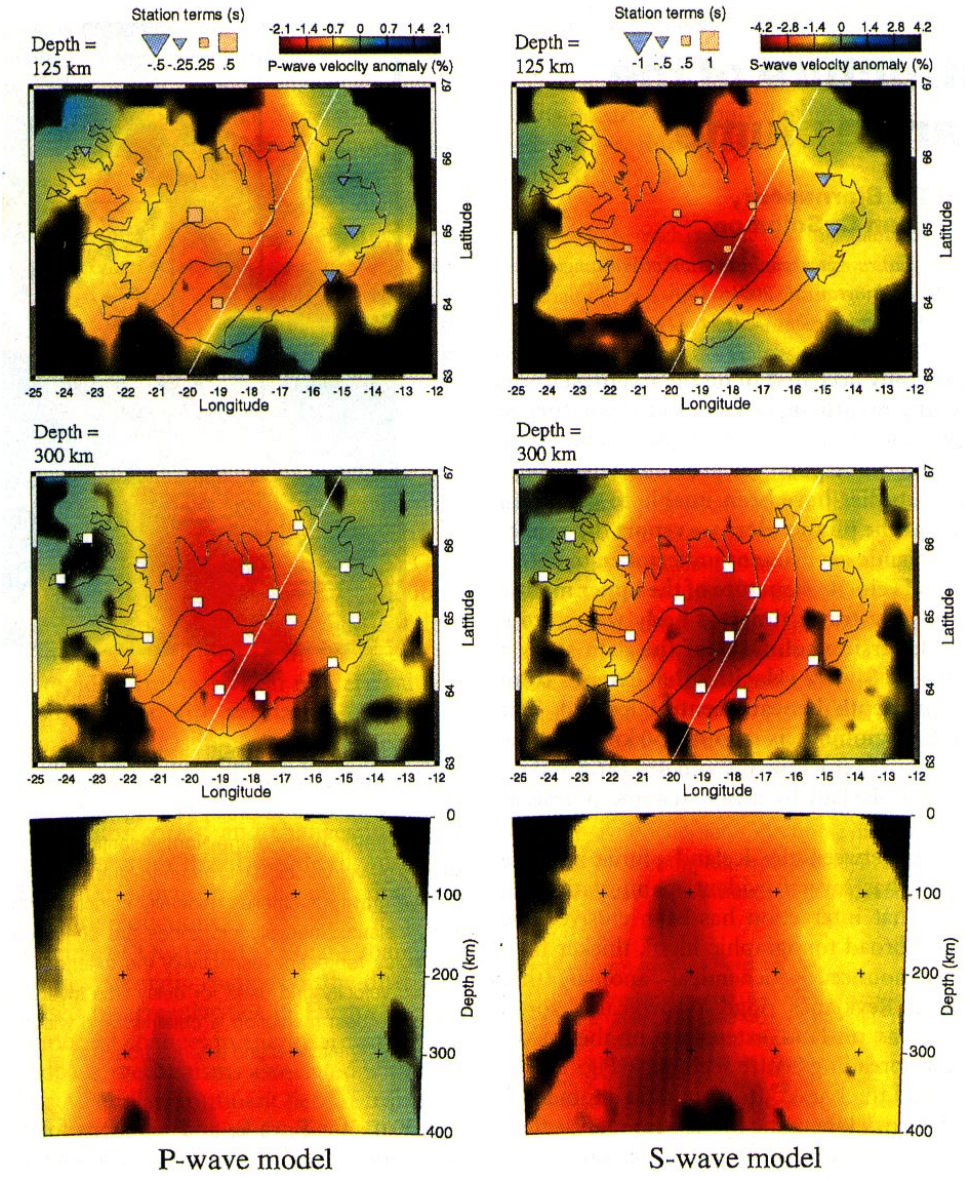

Abbildung 2.2: Geschwindigkeitsanomalie der seismischen P-Wellen (links) und S-Wellen (rechts) unter Island (aus *Wolfe et al.* [1997]). Die beiden oberen Reihen zeigen horizontale Schnitte in 125 km und 300 km Tiefe. Unten sind vertikale Schnitte dargestellt. In den schwarzen Randbereichen des Modells ist die Auflösung zu gering, um Geschwindigkeitsanomalien zu bestimmen.

materials von Island über mehr als 1000 km entlang des Reykjanes-Rückens angenommen [u.a. *Vogt*, 1971, 1976; *White et al.*, 1995].

In den Schwere- und Topographieanomalien am Reykjanes-Rücken ist ein auffälliges V-förmiges Streifenmuster zu erkennen (siehe Abbildung 2.3), das mit lokalen Variationen der Krustendicke korreliert und auf zeitliche Variationen im Volumenfluß des Island-Plumes zurückgeführt wird [u.a. *Vogt*, 1971; *White et al.*, 1995; *White*, 1997]. Zur Erklärung wurden

kurzzeitige Temperaturstörungen des Plumematerials vorgeschlagen, die sich von Island aus entlang des Reykjanes-Rückens ausbreiten. Diese Temperaturerhöhungen können über einen Zeitraum von einigen Millionen Jahren zu einer lokal verstärkten Schmelzproduktion und damit zu einer verdickten Kruste am Reykjanes-Rücken führen. Während sich die Temperaturstörungen weiter entlang der Rückenachse ausbreiten, wird die Anomalie der Krustendicke durch das Spreading vom Reykjanes-Rücken wegtransportiert, so daß eine V-förmige Struktur entsteht. Aus der Variation der Krustendicke, die in der Größenordnung von 2 km liegt, läßt sich eine Temperaturerhöhung des Plumematerials von etwa 30°C abschätzen [*White et al.*, 1995]. Aus dem Öffnungswinkel der V-Struktur ergibt sich eine Ausbreitungsgeschwindigkeit der Temperaturstörungen, die mit 10–20 cm/a eine Größenordnung höher als die Spreadingrate am Reykjanes-Rücken ist [*Vogt*, 1971; *White et al.*, 1995]. Insgesamt weisen damit die Schwere- und Topographiedaten auf eine ausgeprägte Strömung des Plumematerials von Island entlang des Reykjanes-Rückens hin.

Island ist der am besten untersuchte Mantelplume unterhalb eines Mittelozeanischen Rückens. Aber auch für andere Hotspots finden sich Hinweise in den Schwere- und Topographiedaten, die auf eine Wechselwirkung zwischen Plumematerial und Mittelozeani-

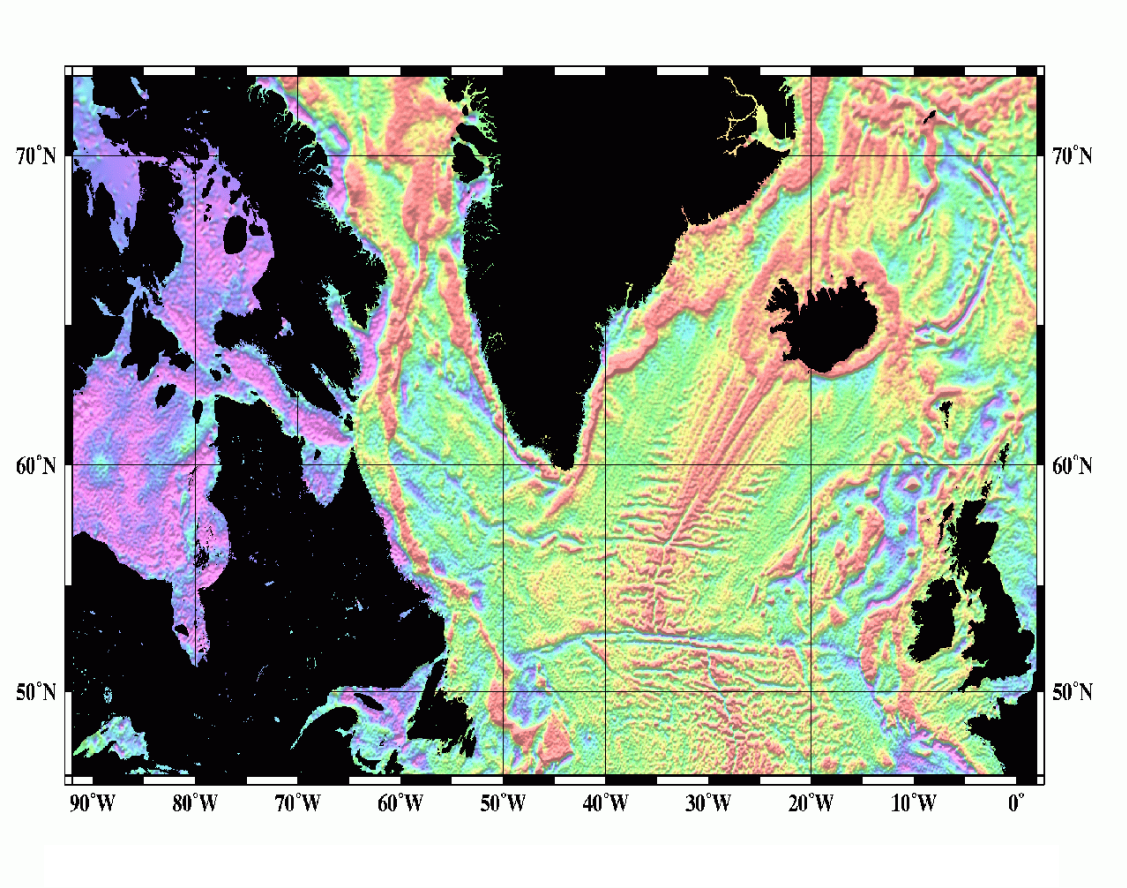

Abbildung 2.3: Anomalie der Freiluft-Schwere im Nordatlantik (nach *Sandwell und Smith* [1995]). Der Farbbereich von violett bis grün kennzeichnet negative Anomalien, der Farbbereich von grün bis rot positive Anomalien.

schem Rücken hinweisen [*Small*, 1995]. Insbesondere für die Beobachtungen im Bereich des Azoren-Hotspots wurde eine ähnliche Interpretation wie für Island vorgeschlagen [*Cannat et al.*, 1999]. Auch hier zeigen die Schwere- und Topographiedaten eine V-förmige Anomalie, die durch eine sich von den Azoren aus südwärts bewegende Temperaturstörung erklärt wird. Dabei werden für die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Störung 6 cm/a bei einer Temperaturanomalie von etwa 70°C angegeben [*Cannat et al.*, 1999].

2.2.3 Geochemische Daten

Geochemische Untersuchungen bieten ebenfalls eine Möglichkeit, Hinweise auf die Wechselwirkung zwischen Mantelplumes und Mittelozeanischen Rücken zu erhalten. Weil sich die geochemische Zusammensetzung des Plumematerials von der Zusammensetzung des normalen Mantelmaterials unter Mittelozeanischen Rücken unterscheidet, läßt sich die Ausbreitung des Plumematerials anhand der geochemischen Signatur der an Mittelozeanischen Rücken erzeugten Basalte nachvollziehen. Dazu sind geochemische Untersuchungen an verschiedenen Mittelozeanischen Rücken durchgeführt worden. Untersuchungen im Südatlantik haben ergeben, daß die Spurenelement-Zusammensetzung der Basalte entlang des Mittelatlantischen Rückens mehrere Anomalien aufweist [*Schilling et al.*, 1985]. Diese Anomalien treten in Gebieten auf, in denen abseits der Rückenachse Mantelplumes vermutet werden, und werden deshalb als Anzeichen einer Strömung des Plumematerials in Richtung des Mittelatlantischen Rückens gedeutet. Auch an anderen Mittelozeanischen Rücken finden sich ähnliche Anomalien [*Schilling*, 1985]. Dabei hat sich ein Zusammenhang zwischen der Breite der geochemischen Anomalie am Mittelozeanischen Rücken und der Entfernung des Mantelplumes vom Rücken ergeben. Für Mantelplumes, die sich direkt unterhalb eines Mittelozeanischen Rückens befinden, ist die Breite der Anomalie am größten und nimmt mit zunehmender Entfernung des Mantelplumes vom Rücken ab. Diese geochemischen Ergebnisse deuten an, daß Mantelplumes möglicherweise mit Mittelozeanischen Rücken wechselwirken können, die sich in einer Entfernung von deutlich mehr als 1000 km vom Mantelplume befinden [*Schilling*, 1991].

Für Island haben geochemische Untersuchungen erhöhte Werte in der Spurenelement- und Isotopen-Zusammensetzung ergeben [*Schilling*, 1973, 1985]. Diese Werte nehmen allerdings entlang des Reykjanes-Rückens schnell ab, so daß sich bereits in einer Entfernung von etwa 500 km von Island eine für normale Mittelozeanische Rücken charakteristische Zusammensetzung ergibt. Damit ist die Ausdehnung der geochemischen Anomalie kleiner als die Ausdehnung der Schwere- und Topographieanomalien. Dennoch ist auch diese geochemische Anomalie als Anzeichen einer Strömung des Plumematerials von Island entlang des Reykjanes-Rückens interpretiert worden [*Schilling*, 1973; 1985]. Allerdings kann die geochemische Zusammensetzung der Basalte am Reykjanes-Rücken auch durch Mantelmaterial erklärt werden, das lediglich etwas wärmer als der normale Mantel unter Mittelozeanischen Rücken ist, so daß nicht notwendigerweise Plumematerial unterhalb des Reykjanes-Rückens vorhanden sein muß [*White et al.*, 1995; *White*, 1997]. Damit erlauben die geochemischen

Daten bislang keine eindeutige Aussage, über welche Entfernungen Plumematerial von Island entlang des Reykjanes-Rückens strömen kann.

2.3 Ergebnisse bisheriger fluiddynamischer Untersuchungen

In diesem Abschnitt werden kurz die Ergebnisse vorgestellt, die sich in bisherigen fluiddynamischen Untersuchungen zur Wechselwirkung von Mantelplumes mit Mittelozeanischen Rücken ergeben haben. *Feighner und Richards* [1995] haben diese Problemstellung in Laborexperimenten untersucht. Dazu haben sie zur Simulation der Plume-Rücken-Wechselwirkung einen mit Glukosesirup gefüllten Tank verwendet, an dessen Oberfläche mechanisch eine divergente Plattenbewegung vorgegeben wurde. Um einen Plume zu erzeugen, haben sie verdünnten Sirup mit geringerer Dichte in den Tank injiziert und die Ausbreitung des Sirups beobachtet. Neben diesen Experimenten haben sie die Wechselwirkung von Mantelplumes mit Mittelozeanischen Rücken auch in dreidimensionalen, numerischen Modellrechnungen untersucht, wobei der Auftrieb wie in den Experimenten durch chemische Dichteunterschiede erzeugt wurde [*Feighner et al.*, 1995]. Sowohl die Experimente als auch die numerischen Modellrechnungen haben gezeigt, daß die Ausbreitung des Plumematerials von der Spreadingrate des Mittelozeanischen Rückens und dem Volumenfluß des Plumes abhängt. In allen untersuchten Fällen hat sich das Plumematerial dabei stärker in Richtung der Plattenbewegung als entlang der Rückenachse ausgebreitet.

Ribe et al. [1995] haben in dreidimensionalen, numerischen Modellrechnungen die Wechselwirkung thermischer Mantelplumes mit Mittelozeanischen Rücken untersucht. Dabei haben sie eine temperaturabhängige Viskosität mit einem maximalen Viskositätskontrast von zwei Größenordnungen zwischen Plumematerial und Lithosphäre berücksichtigt. In einer systematischen Parameterstudie haben sie den Einfluß der Spreadingrate und des Volumenflusses des Plumes auf die Ausbreitung des Plumematerials unterhalb des Mittelozeanischen Rückens bestimmt. Dabei haben auch sie in keinem Modell eine deutliche Strömung des Plumematerials entlang des Mittelozeanischen Rückens gefunden. *Ito et al.* [1996] haben ein ähnliches Modell verwendet. Sie haben aber zusätzlich den Einfluß der Schmelzentstehung auf die Dynamik der Plume-Rücken-Wechselwirkung berücksichtigt. Dazu gehören zum einen der Verlust an latenter Wärme durch die Schmelzbildung und zum anderen Auftriebskräfte der Schmelze und des Residuums. Es hat sich allerdings herausgestellt, daß diese Effekte nur einen geringen Einfluß auf die Ausbreitung des Plumematerials haben und sich keine grundsätzlich anderen Resultate als in den Modellen ergeben, in denen diese Effekte nicht berücksichtigt werden.

Alle bisher erwähnten Untersuchungen waren auf Mantelplumes beschränkt, die sich direkt unterhalb des Mittelozeanischen Rückens befinden. *Kincaid et al.* [1995] haben in Laborexperimenten die Wechselwirkung von Mantelplumes mit Mittelozeanischen Rücken untersucht, wobei sich der Plume abseits der Rückenachse befindet. Dazu haben sie einen ähnli-

chen experimentellen Aufbau wie *Feighner und Richards* [1995] (siehe oben) verwendet. Allerdings haben sie kein Material in den Tank injiziert, sondern durch eine lokale Aufheizung des Sirups am Boden des Tanks einen thermischen Plume erzeugt. Insgesamt haben sie vier Experimente vorgestellt. Dabei hat sich eine Strömung des Plumematerials zum Mittelozeanischen Rücken ergeben, die um so größer war, je stärker die Mächtigkeit der Lithosphäre in größerer Entfernung vom Mittelozeanischen Rücken zunahm. In nachfolgenden, numerischen Modellrechnungen wurde dann der Einfluß der Spreadingrate und des Auftriebs des Plumematerials auf die Strömung des Plumematerials in Richtung des Mittelozeanischen Rückens genauer untersucht und die Voraussetzungen für eine Wechselwirkung von Mantelplumes mit Mittelozeanischen Rücken über große Entfernungen diskutiert [*Kincaid et al.*, 1996]. Allerdings waren diese Modellrechnungen auf zwei Raumdimensionen beschränkt, so daß keine Aussagen über die Plumebreite in Richtung der Rückenachse gemacht werden konnten. *Ito et al.* [1997] haben in dreidimensionalen, numerischen Modellrechnungen die Breite des Plumes am Mittelozeanischen Rücken systematisch in Abhängigkeit von der Spreadingrate, dem Volumenfluß des Plumes und dem Abstand des Plumes zum Mittelozeanischen Rücken untersucht. Dabei haben sie neben Modellrechnungen mit einem zeitlich konstanten Abstand des Plumes vom Mittelozeanischen Rücken auch Modellrechnungen durchgeführt, in denen sich der Abstand zeitlich ändert.

Diese Zusammenstellung zeigt, daß in den bisherigen Untersuchungen der Einfluß der Plumeviskosität nicht ausreichend betrachtet worden ist. In allen bisherigen Modellrechnungen lag die Viskosität des Plumematerials in der Größenordnung von 10^{19} Pa s und war damit höher, als für thermische Plumes im Erdmantel angenommen wird. Gleichzeitig haben diese Untersuchungen keine so deutliche Strömung des Plumematerials entlang des Mittelozeanischen Rückens ergeben, wie sie nach den Schwere- und Topographiedaten zu erwarten ist. Deshalb wird in der hier vorliegenden Arbeit insbesondere der Einfluß der Plumeviskosität auf die Dynamik der Wechselwirkung von Mantelplumes mit Mittelozeanischen Rücken untersucht.

Kapitel 3

Physikalisches Modell

In diesem Kapitel werden die physikalischen Grundlagen des Modells vorgestellt, das zur Untersuchung der Wechselwirkung von Mantelplumes mit Mittelozeanischen Rücken benutzt wird. Im ersten Abschnitt wird erläutert, wie die Problemstellung in fluiddynamischen Modellen realisiert wird. Dabei werden Fragen der Modellgeometrie und der Modellrandbedingungen diskutiert. Im zweiten Abschnitt werden die für das Modell relevanten Gleichungen zur Beschreibung von Materiebewegungen in hochviskosen Flüssigkeiten aus den Gleichungen der Hydrodynamik hergeleitet und die dabei gemachten Vereinfachungen erläutert. Der dritte Abschnitt befaßt sich mit der Rheologie des Erdmantels, die das Fließverhalten kontrolliert, und ihrer Implementierung im Modell.

3.1 Modellbeschreibung

Betrachtet man Prozesse im Erdmantel, die über geologisch lange Zeiträume (Millionen Jahre) ablaufen, läßt sich der feste Erdmantel ähnlich wie Gletschereis als hochviskose Flüssigkeit beschreiben. Deshalb wird die Wechselwirkung von Mantelplumes mit Mittelozeanischen Rücken in fluiddynamischen Modellen untersucht. Dazu wird eine dreidimensionale kartesische Modellbox der Höhe $h = 400$ km mit variabler lateraler Ausdehnung verwendet, die mit einer hochviskosen Flüssigkeit gefüllt ist. Eine Skizze des Modells mit Randbedingungen ist in Abbildung 3.1 dargestellt. Durch die im Vergleich zur Mächtigkeit des Erdmantels von etwa 2900 km geringe Boxhöhe werden die Modellrechnungen auf den obersten Bereich des Erdmantels beschränkt. Dadurch können die Entstehung der Mantelplumes in thermischen Grenzschichten im tieferen Erdmantel und ihr Aufstieg über große Bereiche des Erdmantels in den Modellen nicht untersucht werden. Dieses stellt allerdings keine Einschränkung der Modelle dar, weil das Hauptinteresse auf der Untersuchung der Strömungsstrukturen unterhalb von Mittelozeanischen Rücken liegt.

Die Höhe der Modellbox ist so gewählt worden, daß der Boden der Box nicht durch die Wechselwirkung des Mantelplumes mit dem Mittelozeanischen Rücken beeinflußt wird. Gleichzeitig rechtfertigt es die geringe Boxhöhe, die sphärische Geometrie der Erde zu ver-

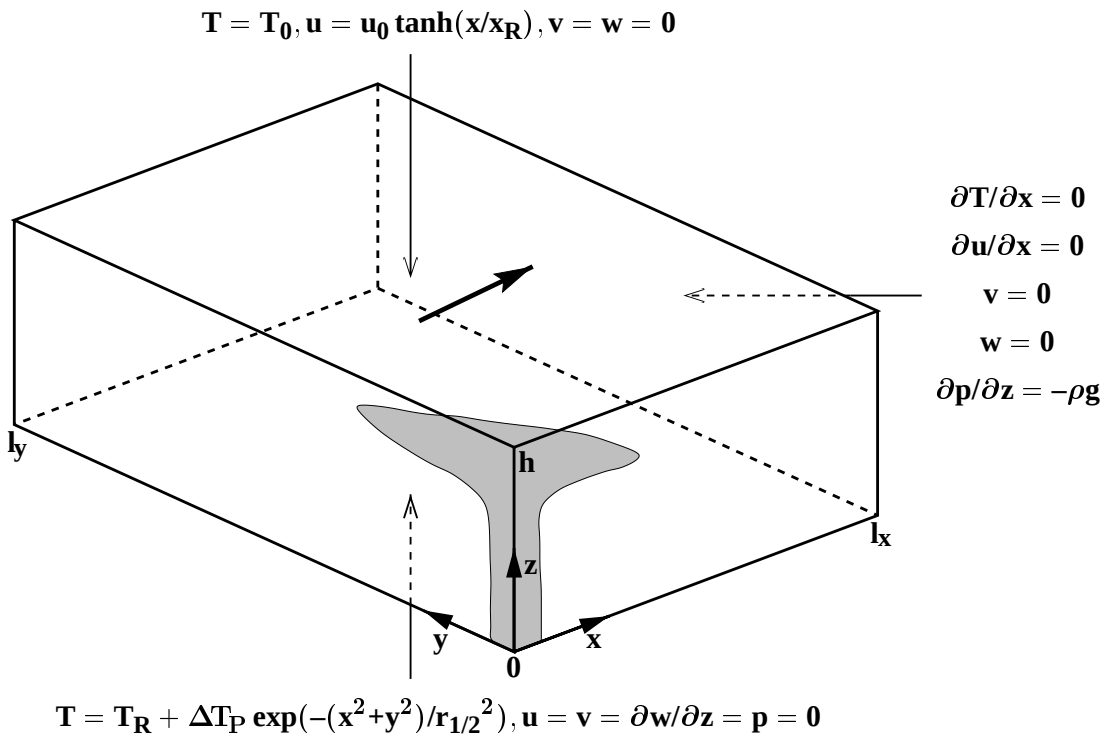

Abbildung 3.1: Skizze des Modells mit Randbedingungen. Das Spreading des Mittelozeanischen Rückens bei $x = 0$ wird durch eine vorgegebene horizontale Geschwindigkeit an der Oberfläche der Box erzeugt. Die Richtung der Plattenbewegung wird durch den dicken Pfeil angedeutet. Der Boden und die Seitenfläche bei $x = l_x$ sind offen. Für die übrigen Seitenflächen werden Symmetrierandbedingungen angenommen. Der Plume wird durch eine lokale Temperaturanomalie am Boden der Box erzeugt. Eine ausführliche Diskussion der Randbedingungen findet sich im Text.

nachlässigen und durch die einfachere kartesische Geometrie zu ersetzen, solange die laterale Ausdehnung des Modells die Boxhöhe nicht deutlich übersteigt. In der Regel sind die Modellrechnungen mit einer Boxlänge von $l_x = 800$ km und einer Boxbreite von $l_y = 1200$ km durchgeführt worden.

Das Spreading am Mittelozeanischen Rücken wird durch eine aufgeprägte Geschwindigkeit u_0 an der Oberfläche der Modellbox erzeugt, wobei die Singularität an der Rückenachse bei $x = 0$ geglättet wird. Konduktiver Wärmeverlust durch die Oberfläche führt zur Ausbildung einer thermischen Grenzschicht, deren Mächtigkeit mit zunehmender Entfernung vom Mittelozeanischen Rücken gemäß $(\kappa x/u_0)^{1/2}$ mit κ thermische Wärmediffusivität zunimmt [*Turcotte und Schubert*, 1982]. Aufgrund der Temperaturabhängigkeit der Viskosität ist diese thermische Grenzschicht hochviskos und damit mechanisch stabil, so daß eine typische ozeanische Lithosphäre entsteht. Der Boden der Box und die Seitenfläche in Richtung der Plattenbewegung sind offen. Diese offenen Boxränder, durch die Material ein- und ausströmen kann, ermöglichen es, das Modell auf den Bereich des Mittelozeanischen Rückens zu

beschränken und die Bereiche der Subduktion der Lithosphäre und des Rückstroms des Materials zum Mittelozeanischen Rücken in den Modellen zu vernachlässigen.

Wenn kein Plume vorhanden ist, erzeugen die Randbedingungen eine zweidimensionale Konvektionsstruktur, die charakteristisch für das Spreading an Mittelozeanischen Rücken ist. Mantelmaterial strömt von unten in die Box ein und steigt bis in den Rückenbereich auf. Dort wird es durch das Spreading lateral in Richtung der Plattenbewegung transportiert und verläßt die Modellbox durch den offenen Seitenrand. In dieser Hintergrundströmung wird ein thermischer Plume durch eine lokale Erhöhung der Temperatur am offenen, unteren Boxrand erzeugt. Für den Fall, daß das Spreading symmetrisch zu beiden Seiten des Rückens erfolgt und sich der Plume direkt unterhalb des Rückens befindet, ist es aufgrund der zweifachen Symmetrie des Problems möglich, die Berechnungen, so wie in Abbildung 3.1 dargestellt, auf eine Seite des Rückens ($x \geq 0$) und auf eine Seite des Plumes ($y \geq 0$) zu beschränken.

Das hier vorgestellte Modell zur Untersuchung der Wechselwirkung von Mantelplumes mit Mittelozeanischen Rücken ähnelt dem Modell von *Ribe et al.* [1995]. Lediglich die Randbedingungen am offenen Seitenrand unterscheiden sich als Folge unterschiedlicher numerischer Verfahren zur Lösung des Problems, wodurch die Implementation anderer Randbedingungen möglich wird. Dieser Ansatz mit offenen Modellrändern hat im Gegensatz zu Modellen mit geschlossenen Rändern, wie sie von *Ito et al.* [1996, 1997, 1999] benutzt werden, den Vorteil, daß zum einen die Position und Stärke des Plumes am offenen Boden des Modells sehr einfach vorgegeben werden kann und es zum anderen trotz der endlichen lateralen Ausdehnung des Modells wegen der offenen Seitenfläche zu keiner Subduktion der Lithosphäre und zu keinem Rückstrom von Material zum Rücken kommt. Allerdings sind offene Modellränder in gewissem Maße künstlich. Deshalb ist es wichtig, eine ausreichend große Modellbox mit möglichst “realistischen” Randbedingungen zu wählen, so daß die offenen Modellränder keinen Einfluß auf die zu untersuchenden Strömungsstrukturen im Bereich des Mittelozeanischen Rückens haben. Eine ausführliche Diskussion der Randbedingungen findet sich in Abschnitt 3.2.4.

3.2 Modellgleichungen

3.2.1 Grundgleichungen der Hydrodynamik

Ausgangspunkt für die Herleitung der Gleichungen zur Beschreibung hochviskoser Flüssigkeitsströmungen sind die Grundgleichungen der Hydrodynamik. In der Hydrodynamik wird eine Flüssigkeit als ein kontinuierliches Medium aufgefaßt, in dem sich alle physikalischen Größen über Längenskalen ändern, die groß sind gegenüber der mittleren freien Weglänge der Moleküle. Dadurch können Flüssigkeitsströmungen durch makroskopische Größen wie Temperatur, Druck, Geschwindigkeit und Dichte beschrieben werden, ohne die mikroskopische Bewegung der Moleküle betrachten zu müssen. In der Geodynamik, wo sich Fließprozesse in der Regel über Entfernungen von mehreren hundert Kilometern ändern, ist ein kontinuumsmechanischer Ansatz gerechtfertigt [*Turcotte und Schubert*, 1982].

Die Grundgleichungen der Hydrodynamik beinhalten die Erhaltungssätze für Masse, Impuls und Energie. In der hier dargestellten Form sind sie aus *Batchelor* [1992] entnommen. Die Kontinuitätsgleichung,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) \;=\; 0 \,, \tag{3.1}$$

mit $\vec{v} = (u, v, w)$ Geschwindigkeit, ρ Dichte und t Zeit beschreibt die Massenerhaltung an jedem Punkt des Kontinuums. Die Navier-Stokes-Gleichung,

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} \right) \;=\; -\vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \underline{\underline{\tau}} + \vec{f} \,, \tag{3.2}$$

mit p Druck, $\underline{\underline{\tau}}$ deviatorischer Spannungstensor und $\vec{f}$ allgemeine Volumenkraft(dichte) drückt die Impulserhaltung aus. Sie beschreibt das Kräftegleichgewicht zwischen Trägheitskräften auf der linken Seite und Druckgradienten, viskosen Kräften und Volumenkräften auf der rechten Seite. Als Volumenkräfte wirken Coriolis-, Zentrifugal- und Schwerkraft.

Bei viskosem Fließverhalten bewirken Spannungen eine kontinuierlich fortschreitende Deformation. Die deviatorische Spannung $\underline{\underline{\tau}}$ ist über die (Scher-)Viskosität η mit der Deformationsrate $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}$ verbunden [*Jarvis und McKenzie*, 1980],

$$\underline{\underline{\tau}} \;=\; 2\eta \left(\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} - \frac{1}{3} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{v} \right) \underline{\underline{\delta}} \right) \quad \text{mit} \quad \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} \;=\; \frac{1}{2} \left(\vec{\nabla} \vec{v} + \left(\vec{\nabla} \vec{v} \right)^{\mathrm{T}} \right) \,, \tag{3.3}$$

wobei $\underline{\underline{\delta}}$ den Einheitstensor symbolisiert. Die (Scher-)Viskosität ist eine Funktion der Temperatur, des Drucks und bei nicht-Newtonschem Fließverhalten der Spannung. Sie wird in Abschnitt 3.3 ausführlich diskutiert. Eine Volumenviskosität, die den Einfluß schneller Volumenänderungen beschreibt und von molekularen Relaxationsprozessen und der relativen Größe der Volumenänderung abhängt, ist in (3.3) vernachlässigt worden, weil sie für Konvektionsprozesse im Erdmantel, wo Volumenänderungen über Zeitskalen von Millionen Jahren ablaufen, unbedeutend ist [*Jarvis und McKenzie*, 1980].

Die Energieerhaltung wird durch die Wärmeleitungsgleichung beschrieben,

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T \right) - \alpha T \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} p \right) \;=\; \vec{\nabla} \cdot \left(k \vec{\nabla} T \right) + \left(\underline{\underline{\tau}} \vec{\nabla} \right) \vec{v} \,, \tag{3.4}$$

mit T Temperatur, c_p spezifische Wärmekapazität, α thermischer Ausdehnungskoeffizient und k Wärmeleitfähigkeit. Die zeitliche Änderung der Temperatur erfolgt durch advektiven Wärmetransport und adiabatische Zustandsänderungen (linke Seite) sowie durch Wärmediffusion und dissipative Reibungswärme (rechte Seite). Weitere interne Wärmequellen, wie z.B. die Freisetzung von Wärme durch Zerfall radioaktiver Elemente, die in Evolutionsmodellen der Erde oder anderer terrestrischer Planeten von Bedeutung ist, sind in (3.4) vernachlässigt worden.

Zusätzlich wird noch eine Zustandsgleichung der Form $\rho = \rho(T, p)$ benötigt. Unter der Annahme, daß Temperatur- und Druckänderungen nur kleine Abweichungen von einem Referenzzustand $\rho_0 = \rho(T_0, p_0)$ bewirken, läßt sich die Dichteverteilung durch eine Taylorreihe

bis zu Termen 1. Ordnung annähern,

$$\rho\,(T,p) \;=\; \rho_0\left(1-\alpha\,(T-T_0)+K_T^{-1}\,(p-p_0)\right)\;, \tag{3.5}$$

mit K_T (isothermer) Kompressionsmodul, wobei die thermodynamischen Relationen

$$\alpha \;=\; -\rho_0^{-1}\left(\frac{\partial\rho_0}{\partial T}\right)_p \quad \text{und} \quad K_T \;=\; \rho_0\left(\frac{\partial\rho_0}{\partial p}\right)_T^{-1}$$

ausgenutzt worden sind.

3.2.2 Vereinfachungen

Die im letzten Abschnitt vorgestellten Gleichungen beschreiben thermisch getriebene Konvektion in einer kompressiblen Flüssigkeit. Zur Untersuchung von Konvektionsprozessen im Erdmantel lassen sich jedoch einige Vereinfachungen der Gleichungen vornehmen, die in diesem Abschnitt genauer erläutert werden.

Aufgrund der hohen Viskosität des Erdmantels überwiegen die viskosen Kräfte gegenüber Trägheits- und Corioliskräften. Die relative Bedeutung dieser Kräfte wird durch die Prandtlzahl Pr und die Ekmanzahl Ek beschrieben,

$$\mathrm{Pr} \;=\; \frac{\nu}{\kappa} \quad \text{und} \quad \mathrm{Ek} \;=\; \frac{\nu}{\Omega h^2}\;,$$

mit $\nu=\eta/\rho$ kinematische Viskosität, $\kappa=k/(\rho c_p)$ thermische Diffusivität und Ω Rotationsrate. Die Prandtlzahl beschreibt das Verhältnis von viskosen Kräften zu Trägheitskräften. Die Ekmanzahl ist ein Maß für die relative Bedeutung von viskosen Kräften und Corioliskräften. Setzt man für den Erdmantel realistische Werte ($\eta=10^{21}$ Pa s, $\rho=3300$ kg/s, $\kappa=10^{-6}$ m^2/s und $\Omega=2\pi/(1\text{ Tag})$) ein, ergeben sich bei einer Längenskala von $h=400$ km Werte von $\mathrm{Pr}=3\cdot10^{23}$ und $\mathrm{Ek}=3\cdot10^{10}$. Deshalb können sowohl die Trägheitskräfte als auch die Corioliskräfte in (3.2) vernachlässigt werden. Weil die Zentrifugalkraft als Gradient eines Potentials geschrieben und damit in den Druckgradienten gezogen werden kann, bleibt als einzig relevante Volumenkraft die Schwerkraft $\vec{f}=\rho\vec{g}$ mit $\vec{g}$ Schwerebeschleunigung übrig. Die Navier-Stokes-Gleichung reduziert sich damit auf die Stokes-Gleichung,

$$-\vec{\nabla}p+\vec{\nabla}\cdot\underline{\underline{\tau}}+\rho\vec{g} \;=\; 0\;, \tag{3.6}$$

die ein lokales Kräftegleichgewicht zwischen Druckgradienten, viskosen Kräften und Auftriebskräften beschreibt.

Neben dieser allgemein für Problemstellungen aus dem Bereich der Mantelkonvektion gerechtfertigten Vernachlässigung der Trägheits- und Corioliskräfte lassen sich bei der Untersuchung lokaler Konvektionsprozesse im Erdmantel, wie z.B. der Wechselwirkung von Mantelplumes mit Mittelozeanischen Rücken, noch weitergehende Vereinfachungen der Gleichungen durchführen. Dabei werden alle thermodynamischen Parameter (außer der Viskosität) als konstant angenommen und die Flüssigkeit als inkompressibles Medium behandelt.

Lediglich thermische Dichtevariationen werden berücksichtigt, soweit sie als Antrieb der Konvektion dienen. *Spiegel und Veronis* [1960] geben Kriterien für die Anwendbarkeit dieser sogenannten Boussinesq-Approximation für kompressible Flüssigkeiten an. Die wesentlichen Punkte sind, daß zum einen die Höhe des Konvektionsbereichs deutlich kleiner sein muß als die Skalenhöhen sämtlicher Zustandsvariablen und daß zum anderen die durch die Strömung verursachten Dichte- und Druckvariationen gering sein müssen.

Die Anwendbarkeit der Boussinesq-Approximation wird durch die Dissipationszahl kontrolliert,

$$\mathrm{Di} \;=\; \frac{h}{H_T} \;=\; \frac{\alpha g h}{c_p}\,,$$

die das Verhältnis von Konvektionshöhe h zur thermischen Skalenhöhe H_T beschreibt, über die Flüssigkeitspakete auf- bzw. absteigen müssen, damit sich ihre Temperatur durch adiabatische Expansion bzw. Kompression um den Faktor e ändert [*Jarvis und McKenzie*, 1980]. Für Dissipationszahlen deutlich kleiner als Eins ist die Höhe des Konvektionsbereichs so gering, daß adiabatische Temperaturänderungen und kompressible Dichteänderungen über diesen Höhenbereich unbedeutend sind. Da die in dieser Arbeit vorgestellten Modellrechnungen auf einen Höhenbereich von $h = 400$ km beschränkt werden, ergibt sich für $\alpha = 3.5 \cdot 10^{-5}$ K^{-1}, $g = 9.81$ m/s^2 und $c_P = 1250$ J/(kgK) eine Dissipationszahl von $\mathrm{Di} = 0.1$. Deshalb ist es gerechtfertigt, die Temperaturänderungen durch adiabatische Kompression bzw. Dekompression und die Freisetzung dissipativer Reibungswärme (beide Effekte sind proportional zur Dissipationszahl) in (3.4) zu vernachlässigen, so daß sich folgende vereinfachte Wärmeleitungsgleichung ergibt,

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T \;=\; \kappa \vec{\nabla}^2 T\,, \tag{3.7}$$

die nur noch Temperaturänderungen durch Wärmeadvektion und -diffusion erlaubt.

Thermische Dichtevariationen sind nach (3.5) von der Größenordnung $\mathrm{O}(\alpha T)$. Mit $\alpha = 3.5 \cdot 10^{-5}$ K^{-1} sind sie für einen großen Temperaturbereich vernachlässigbar. Dasselbe gilt für die durch nichthydrostatische Druckänderungen erzeugten Dichtevariationen [*Jarvis und McKenzie*, 1980]. Dadurch ist bei kleiner Dissipationszahl und damit geringer kompressibler Dichteänderung eine inkompressible Behandlung der Flüssigkeit möglich, so daß die Erfüllung der Massenerhaltung nach (3.1) die Divergenzfreiheit des Geschwindigkeitsfeldes,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} \;=\; 0\,, \tag{3.8}$$

erfordert. Lediglich in (3.6) werden thermische Dichtevariationen berücksichtigt, die als Antrieb der Konvektion dienen. Durch Aufspaltung des Drucks in einen hydrostatischen Anteil p_{hydr} und einen nichthydrostatischen Anteil $\tilde{p} = p - p_{\mathrm{hydr}}$ und Ausnutzung der Beziehung $\vec{\nabla} p_{\mathrm{hydr}} = \rho_0 \vec{g}$ läßt sich die Stokes-Gleichung als

$$-\vec{\nabla}\tilde{p} + \vec{\nabla} \cdot \left(\eta \left(\vec{\nabla}\vec{v} + \left(\vec{\nabla}\vec{v}\right)^{\mathrm{T}} \right) \right) + \rho_0 \alpha (T - T_0) g \vec{e}_z \;=\; 0\,, \tag{3.9}$$

mit $\vec{e}_z$ Einheitsvektor in z-Richtung schreiben, wobei angenommen wurde, daß die Schwerkraft antiparallel zur z-Richtung wirkt.

Thermodynamische Parameter wie der thermische Ausdehnungskoeffizient α und die Wärmeleitfähigkeit k bzw. Wärmediffusivität κ sind Funktionen des Drucks und ändern sich deshalb mit zunehmender Tiefe im Erdmantel. Sowohl theoretische Untersuchungen [*Anderson*, 1987; *Reynard und Price*, 1990] als auch Hochdruckexperimente an verschiedenen Mantelgesteinen [*Chopelas*, 1990; *Chopelas und Böhler*, 1989, 1992; *Mao et al.*, 1991; *Utsumi et al.*, 1995] zeigen eine Abnahme des thermischen Ausdehnungskoeffizienten mit steigendem Druck. Messungen der thermischen Diffusivität weisen auf eine Zunahme mit steigendem Druck hin [*Osako und Ito*, 1991; *Katsura*, 1995]. Allerdings sind diese Druckabhängigkeiten gering, so daß die Änderungen über den gesamten Tiefenbereich des Erdmantels weniger als eine Größenordnung betragen.

Numerische Untersuchungen zum Aufstieg thermischer Mantelplumes zeigen, daß die Tiefenabhängigkeiten des thermischen Ausdehnungskoeffizienten und der thermischen Diffusivität zwar lokal Einfluß auf die Temperaturverteilung haben, die globale Temperaturänderung über den gesamten Höhenbereich aber sehr gut durch Mittelwerte von α und κ beschrieben werden kann [*Albers*, 1995; *Albers und Christensen*, 1996]. Deshalb ist die Annahme konstanter Materialparameter α und κ in (3.7) und (3.9) mit für den oberen Erdmantel realistischen Werten zur Untersuchung lokaler Konvektionsprozesse, wie der Wechselwirkung von Mantelplumes mit Mittelozeanischen Rücken, gerechtfertigt.

3.2.3 Skalierung der Gleichungen

Um die Zahl der freien Parameter zu reduzieren, ist es sinnvoll, die Gleichungen in eine dimensionslose Form zu bringen. Dazu werden alle dimensionsbehafteten Größen durch dimensionslose Größen ersetzt. Geeignete Skalierungsgrößen sind die Höhe der Modellbox h als Längenskala, die thermische Diffusionszeit h^2/κ als Zeitskala und der Temperaturunterschied zwischen Boden und Oberfläche der Modellbox ΔT als Temperaturskalierung. Die Skalierungsgröße für die Geschwindigkeit ergibt sich aus der Längen- und Zeitskalierung als κ/h. Hinzu kommen noch eine Referenzviskosität η_0 und ein Referenzdruck $\eta_0\kappa/h^2$. Eine Zusammenstellung der Skalierung findet sich in Tabelle 3.1.

Die Gleichungen (3.7)–(3.9) lassen sich mit Hilfe dieser Skalierung in folgendes dimensionslose Gleichungssystem überführen,

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}T = \vec{\nabla}^2 T \,, \tag{3.10}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0 \,, \tag{3.11}$$

$$-\vec{\nabla}p + \vec{\nabla}\cdot\left(\eta\left(\vec{\nabla}\vec{v} + \left(\vec{\nabla}\vec{v}\right)^{\mathrm{T}}\right)\right) + \mathrm{Ra}T\vec{e}_z = 0 \,, \tag{3.12}$$

wobei der Übersichtlichkeit wegen die Striche $'$ an den dimensionslosen Größen weggelassen wurden und abgesehen vom Druck dieselbe Notation wie zuvor für die dimensionsbehafteten

Tabelle 3.1: Skalierung der Variablen

Dimensionslose Größen	Bedeutung	Skalierung
$\vec{x}' = (x', y', z')$	räumliche Koordinaten	$\vec{x} = h \cdot \vec{x}'$
t'	Zeit	$t = h^2/\kappa \cdot t'$
$\vec{v}' = (u', v', w')$	Geschwindigkeit	$\vec{v} = \kappa/h \cdot \vec{v}'$
T'	Temperatur	$T = \Delta T \cdot T' + T_0$
p'	nichthydrostatischer Druck	$\tilde{p} = \eta_0 \kappa/h^2 \cdot p'$
η'	Viskosität	$\eta = \eta_0 \cdot \eta'$

Größen verwendet wurde. Da der hydrostatische Druckanteil aus den Gleichungen eliminiert wurde, bezeichnet p im folgenden nur noch den nichthydrostatischen Druckanteil.

Die Gleichungen (3.10)–(3.12) enthalten nach der Skalierung einen dimensionslosen Parameter, die Rayleighzahl,

$$\mathrm{Ra} = \frac{\rho_0 \alpha g \Delta T h^3}{\kappa \eta_0},$$

die das Verhältnis von konvektionsantreibenden Kräften (hier thermische Dichtevariationen) zu konvektionshemmenden Kräften (hier Wärmediffusion und Viskosität) beschreibt. Eine Zusammenstellung der in die Berechnung der Rayleighzahl eingehenden Parameter mit für den oberen Erdmantel typischen Referenzwerten findet sich im Anhang A.1.

Die Gleichungen (3.10)–(3.12) werden im folgenden verwendet, um die Konvektion in der Modellbox zu berechnen, und bilden zusammen mit entsprechenden Anfangs- und Randbedingungen die mathematische Grundlage zur Beschreibung der Wechselwirkung von Mantelplumes mit Mittelozeanischen Rücken.

3.2.4 Randbedingungen

Zur Lösung der Gleichungen (3.10)–(3.12) werden sowohl mechanische und thermische Randbedingungen als auch eine Anfangsbedingung für die Temperatur benötigt. Die wesentlichen Randbedingungen sind in Abbildung 3.1 auf Seite 16 dargestellt und wurden bereits in Abschnitt 3.1 qualitativ diskutiert und motiviert. In diesem Abschnitt wird die Wahl der Anfangs- und Randbedingungen genauer erläutert.

An der geschlossenen, isothermen Oberfläche der Modellbox mit Temperatur T_0 wird eine horizontale Geschwindigkeit in x-Richtung der Form $u = u_0 \tanh(x/x_R)$ vorgegeben. Diese Geschwindigkeit erzeugt das plattenähnliche Verhalten der Lithosphäre und damit das Spreading des Mittelozeanischen Rückens mit einer totalen Spreadingrate von $2 \cdot u_0$. Um eine Singularität an der Spreadingachse zu vermeiden, wird die Horizontalgeschwindigkeit bei $x = 0$ geglättet. Die Stärke der Glättung wird durch den Parameter x_R mit $u \approx 0.99 \cdot u_0$ bei $x = 2.5 \cdot x_R$ kontrolliert. Physikalisch entspricht diese Glättung einer endlichen Breite des

Mittelozeanischen Rückens. In dimensionsloser Form werden damit folgende Randbedingungen an der Oberfläche der Modellbox verwendet,

$$T = 0\,,\; u = u_0 \tanh\left(\frac{x}{x_R}\right)\,,\; v = w = 0 \qquad \text{bei} \quad z = 1\,. \tag{3.13}$$

Der Boden der Modellbox ist offen. Als thermische Randbedingung wird eine feste Temperatur $T_0 + \Delta T$ gewählt, die zur Erzeugung eines Plumes lokal durch eine Temperaturanomalie δT in Form einer Gaußverteilung,

$$\delta T\,(x,y) = \Delta T_P \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{{r_{1/2}}^2}\right)\,,$$

erhöht wird. Dabei kontrollieren die maximale Plumetemperatur ΔT_P und die Breite der Temperaturanomalie $r_{1/2}$ die Stärke des Plumes. Der Boden der Modellbox wird als neutrale Ebene einer horizontalen Scherströmung angesehen, in der die Horizontalgeschwindigkeiten verschwinden. Zusätzlich wird eine konstante Normalspannung $\sigma_{zz} = -p + 2\eta\partial w/\partial z$ angenommen, die das Ein- und Auströmen von Material ermöglicht und den Boden des Modells zur Ebene konstanten Drucks macht. Weil lediglich Ableitungen des Drucks in den Gleichungen auftreten, ist der Druck nur bis auf eine Konstante bestimmt, die so gewählt wird, daß der nichthydrostatische Druck am Boden der Box verschwindet. Die Randbedingungen in dimensionsloser Form lauten damit

$$T = 1 + \Delta T_P \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{{r_{1/2}}^2}\right)\,,\; u = v = \frac{\partial w}{\partial z} = p = 0 \qquad \text{bei} \quad z = 0\,, \tag{3.14}$$

wobei sich die Randbedingung für die Vertikalgeschwindigkeit w aus den Randbedingungen für die Horizontalgeschwindigkeiten u und v und der Kontinuitätsgleichung ergibt.

Am offenen Seitenrand bei $x = l_x$ werden Randbedingungen gewählt, die mit einer reinen Scherströmung in x-Richtung konsistent sind. Der Plume wird dabei als kleine Störung dieser Scherströmung angesehen. Wenn der Außenrand ausreichend weit vom Mittelozeanischen Rücken entfernt ist, kann die thermische Auskühlung der Lithosphäre vernachlässigt und Temperaturänderungen in x-Richtung gleich Null gesetzt werden. Unter der Voraussetzung, daß am Außenrand die Strömung ausschließlich in x-Richtung erfolgt und sich die Normalspannung $\sigma_{xx} = -p + 2\eta\partial u/\partial x$ gemäß $\partial\sigma_{xx}/\partial z = \rho g$ mit der Tiefe ändert, ergeben sich folgende, dimensionslose Randbedingungen,

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} = v = w = 0\,,\; \frac{\partial p}{\partial z} = \mathrm{Ra}T \qquad \text{bei} \quad x = l_x\,, \tag{3.15}$$

wobei die Geschwindigkeitsrandbedingungen so gewählt werden, daß die Kontinuitätsgleichung am Seitenrand erfüllt ist. Anstelle einer reinen Strömung in x-Richtung mit Geschwindigkeiten $v = w = 0$ können alternativ die Änderungen dieser Geschwindigkeiten in

x-Richtung zusammen mit der Ableitung der Normalspannung σ_{xx} gleich Null gesetzt werden, was zu folgenden Randbedingungen führt,

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \qquad \text{bei} \quad x = l_x \,. \tag{3.15a}$$

Auch in diesem Fall ist die Kontinuitätsgleichung zur Herleitung der Geschwindigkeitsrandbedingungen ausgenutzt worden. Beide Randbedingungen erlauben das Ausströmen von Material. In (3.15) können Druckgradienten das Ausströmen treiben, während in (3.15a) das Ausströmen ausschließlich durch die an der Oberfläche vorgegebene Geschwindigkeit und der daraus resultierenden Scherströmung erfolgt. Aus diesem Grund ist (3.15) gegenüber (3.15a) zu bevorzugen, wenn ebenfalls das Einströmen von Material durch die Seitenfläche erwünscht ist.

An den Seitenflächen bei $x = 0$, $y = 0$ und $y = l_y$ werden Spiegelrandbedingungen,

$$\frac{\partial T}{\partial x} = u = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \qquad \text{bei} \quad x = 0 \,, \tag{3.16}$$

und

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} = v = \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \qquad \text{bei} \quad y = 0 \quad \text{und} \quad y = l_y \,, \tag{3.17}$$

angenommen. Aufgrund der zweifachen Symmetrie des Problems mit den Symmetrieachsen $x = 0$ und $y = 0$ ist die Wahl der Randbedingungen an diesen Seitenflächen trivial. Die Randbedingung bei $y = l_y$ setzt voraus, daß die Breite der Modellbox ausreichend groß ist, so daß der Plume die Strömung am Außenrand nicht mehr beeinflußt und sich dort durch das Spreading eine zweidimensionale Konvektionsstruktur einstellt.

Die Modellrechnungen zur Plume-Rücken-Wechselwirkung werden in der Regel mit einem Temperaturfeld gestartet, das die thermische Struktur einer ozeanischen Lithosphäre oberhalb eines isothermen Mantels wiederspiegelt. Konduktiver Wärmeverlust durch die Oberfläche führt zu einer Temperaturverteilung in der ozeanischen Lithosphäre, die sich mit der Tiefe gemäß (dimensionsbehaftete Größen)

$$T(\tilde{z}) = T_0 + (T_M - T_0)\,\mathrm{erf}\left(\frac{\tilde{z}}{2\sqrt{\kappa t_L}}\right) \,, \tag{3.18}$$

mit T_0 Oberflächentemperatur, T_M Manteltemperatur, $\tilde{z}$ Tiefe und t_L Alter der ozeanischen Lithosphäre ändert [*Turcotte und Schubert*, 1982]. Das Gaußsche Fehlerintegral berechnet sich als

$$\mathrm{erf}(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} \mathrm{e}^{-\eta'^2} \mathrm{d}\eta' \,.$$

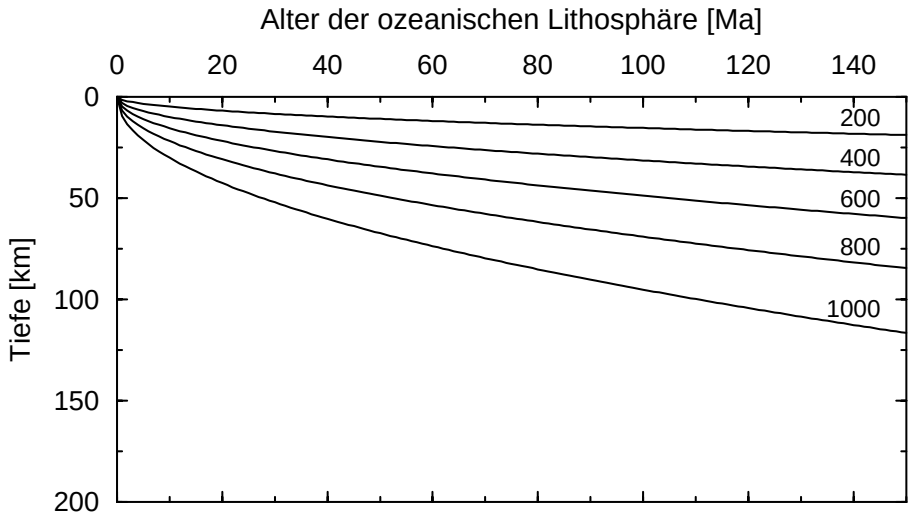

Abbildung 3.2: Isothermen einer ozeanischen Lithosphäre in °C unter Annahme einer Temperaturverteilung nach (3.18) mit $T_0 = 0°\mathrm{C}$, $T_M = 1300°\mathrm{C}$ und $\kappa = 10^{-6}\ \mathrm{m}^2/\mathrm{s}$ (nach *Turcotte und Schubert* [1982]).

mit $\mathrm{erf}(\eta = 0) = 0$ und $\mathrm{erf}(\eta \to \infty) = 1$. Eine Temperaturverteilung nach (3.18) ist in Abbildung 3.2 dargestellt. Mit $t_L = x/u_0$ ergibt sich folgende zweidimensionale Temperaturverteilung in dimensionsloser Form,

$$T(x,z) \;=\; \mathrm{erf}\left(\frac{1-z}{2\sqrt{x/u_0}}\right) \;, \tag{3.19}$$

die als Anfangsbedingung der Modellrechnungen verwendet wird.

3.3 Rheologie

Die Rheologie beschreibt den makroskopischen Zusammenhang zwischen wirkender Spannung und der daraus resultierenden Deformation bzw. Deformationsrate. In Abschnitt 3.2 wurde bei der Herleitung der Modellgleichungen bereits viskoses Fließverhalten angenommen, bei dem Spannungen eine kontinuierlich fortschreitende Deformation hervorrufen. Der Zusammenhang zwischen Spannung und Deformationsrate wird dabei durch die Viskosität beschrieben (siehe (3.3) auf Seite 18). In diesem Abschnitt werden mögliche Fließmechanismen im festen Erdmantel vorgestellt und das in den Modellrechnungen verwendete Viskositätsgesetz aus diesen Fließmechanismen abgeleitet und diskutiert.

3.3.1 Fließmechanismen in Festkörpern

Das viskose Fließverhalten fester Materie wird durch die Kriechmechanismen im Kristallgitter bestimmt. Diese Kriechmechanismen lassen sich in zwei Kategorien, Diffusions- und

Dislokationskriechen, unterteilen. Beim Diffusionskriechen werden die Kristalle durch Diffusion von freien Atomen bzw. durch Diffusion der entsprechenden Leerstellen im Kristallgitter deformiert. Beim Dislokationskriechen werden Störungen in der Kristallstruktur, sogenannte Dislokationen, durch Umorientierung der Kristallbindungen oder durch Diffusion von Atomen zwischen benachbarten Dislokationen verschoben und dadurch Deformationen des Kristalls hervorgerufen. Eine ausführliche Beschreibung dieser Deformationsprozesse findet sich u.a. bei *Ranalli* [1995] und *Turcotte und Schubert* [1982].

Diffusions- und Dislokationskriechen führen zu Fließgesetzen der Form [*Weertman und Weertman*, 1975]

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} = \frac{\gamma\Omega}{kTd^2} D \underline{\underline{\tau}} \qquad \text{und} \qquad \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} = \frac{\gamma\Omega}{kTb^2} D \left(\frac{\|\underline{\underline{\tau}}\|}{\mu} \right)^2 \underline{\underline{\tau}}\,, \tag{3.20}$$

(Diffusionskriechen) *(Dislokationskriechen)*

mit γ dimensionslose Konstante, Ω atomares Volumen, k Boltzmann-Konstante und d mittlere Korngröße des Kristalls, wobei Diffusion der freien Atome durch den Kristall (*Nabarro-Herring creep*) als Fließmechanismus beim Diffusionskriechen angenommen wurde. D ist der Selbstdiffusionskoeffizient, b die Länge des durch die Dislokation verursachten Gitterversatzes (Burger's Vektor), $\|\underline{\underline{\tau}}\| = (\frac{1}{2}\sum_{i,j}\tau_{ij}^2)^{1/2}$ die 2. Invariante des Spannungstensors und μ das Schermodul.

Beim Diffusionskriechen besteht ein linearer Zusammenhang zwischen Deformationsrate und Spannung, außer wenn die mittlere Korngröße d von der Spannung abhängt [*Weertman*, 1970]. Beim Dislokationskriechen ist das Fließgesetz nichtlinear. Deshalb ist Dislokationskriechen bei hohen Spannungen effektiver als Diffusionskriechen, während bei kleinen Spannungen Diffusionskriechen der dominierende Fließmechanismus ist. Dieses ist konsistent mit Labormessungen an verschiedenen Mantelgesteinen, die bei hohen Spannungen ein nichtlineares Fließverhalten mit einem Spannungsexponenten in der Größenordnung von 3 zeigen [*Weertman und Weertman*, 1975; *Post*, 1977; *Chopra und Paterson*, 1981; *Kirby*, 1983; *Kirby und Kronenberg*, 1987], während sich bei Spannungen unterhalb von 1 MPa ein lineares Fließverhalten andeutet [*Karato et al.*, 1986; *Karato und Li*, 1992].

Sowohl beim Diffusionskriechen als auch beim Dislokationskriechen hängt die Deformationsrate von der Zahl der freien Atome bzw. Dislokationen ab, die durch das Kristallgitter diffundieren können. Der Selbstdiffusionskoeffizient D zeigt deshalb eine starke Abhängigkeit von Temperatur und Druck. Mit steigender Temperatur wird der Selbstdiffusionskoeffizient größer, mit steigendem Druck nimmt er dagegen ab. Die Temperatur- und Druckabhängigkeit kann durch ein Arrhenius-Gesetz [*Ranalli*, 1995],

$$D = D_0 \exp\left(-\frac{E + pV}{RT} \right)\,, \tag{3.21}$$

mit D_0 materialabhängige Konstante, E Aktivierungsenergie, V Aktivierungsvolumen und R allgemeine Gaskonstante beschrieben werden.

Ein Vergleich der Fließgesetze in (3.20) mit der allgemeinen Beziehung $\underline{\underline{\tau}} = 2\eta\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}$ für viskoses Fließen liefert einen Ausdruck für die Viskosität. Unter Vernachlässigung der schwachen Temperaturabhängigkeit der Vorfaktoren in (3.20) gegenüber der exponentiellen Temperaturabhängigkeit des Selbstdiffusionskoeffizienten in (3.21) ergibt sich ein Viskositätsgesetz der Form,

$$\eta\left(T, p, \underline{\underline{\tau}}\right) = A \exp\left(\frac{E + pV}{RT}\right) \|\underline{\underline{\tau}}\|^{1-n} , \tag{3.22}$$

mit A Konstante und $n = 1$ für Diffusionskriechen und $n = 3$ für Dislokationskriechen.

3.3.2 Temperatur- und Druckabhängigkeit der Viskosität

Experimentelle Messungen der Deformationsrate von Mantelgesteinen zeigen eine starke Temperatur- und Druckabhängigkeit der Viskosität. Für die Aktivierungsenergie werden Werte im Bereich von $E = 350 - 600$ kJ/mol angegeben [*Weertman und Weertman*, 1975; *Post*, 1977; *Chopra und Paterson*, 1981; *Kirby*, 1983; *Kirby und Kronenberg*, 1987]. Häufig wird der von *Kohlstedt und Götze* [1974] für trockenes Olivin bestimmte Wert von $E = 525$ kJ/mol als Referenzwert für die Aktivierungsenergie des Erdmantels verwendet. Die Bestimmung des Aktivierungsvolumens ist deutlich unsicherer. Für den oberen Erdmantel liegen die gemessenen Werte im Bereich von $V = 10 - 18$ cm^3/mol [*Ross et al.*, 1979; *Kohlstedt et al.*, 1980; *Kirby*, 1983]. Allerdings wird davon ausgegangen, daß das Aktivierungsvolumen mit steigendem Druck abnimmt. Ein über den gesamten Tiefenbereich des Erdmantels konstantes Aktivierungsvolumen in der Größenordnung von $V = 10 - 18$ cm^3/mol würde zu einer Erhöhung der Viskosität im unteren Erdmantel führen, die die aus nacheiszeitlichen Hebungsraten bestimmte Tiefenzunahme der Viskosität von 1–2 Größenordnungen [u.a. *Lambeck et al.*, 1990; *Lambeck*, 1993; *Mitrovica und Peltier*, 1993, *Forte und Mitrovica*, 1996] um viele Größenordnungen übersteigen würde. Deshalb werden in der Regel kleinere Werte als repräsentativ für das Aktivierungsvolumen des gesamten Erdmantels angesehen.

Eine alternative Beschreibung der Temperatur- und Druckabhängigkeit der Viskosität kann über die homologe Temperatur erfolgen, die das Verhältnis von Temperatur zur Schmelztemperatur T_m angibt. Für die Viskosität ergibt sich folgende empirische Formulierung [*Weertman*, 1970],

$$\eta(T, p) = A \exp\left(g\frac{T_m}{T}\right) , \tag{3.23}$$

mit A und g Konstanten. Ein Vergleich von (3.23) mit (3.22) liefert einen Ausdruck für die Aktivierungsenergie und das Aktivierungsvolumen,

$$E = gRT_m(p = 0) \qquad \text{und} \qquad V = gR\frac{T_m - T_m(p = 0)}{p} . \tag{3.24}$$

Die Schmelztemperaturen verschiedener Mantelgesteine sind in Hochdruckexperimenten bei Druckbedingungen des unteren Erdmantels bestimmt worden [u.a. *Zerr und Böhler*, 1993, 1994]. Eine Analyse dieser Schmelztemperaturen nach (3.24) ergibt ein hohes Aktivierungsvolumen, das aber mit zunehmender Tiefe im Erdmantel abnimmt [*Albers*, 1995].

In den hier vorgestellten Modellrechnungen wird die Temperatur- und Druckabhängigkeit der Viskosität berücksichtigt, aber ein lineares Fließverhalten ($n = 1$) ohne Spannungsabhängigkeit der Viskosität angenommen. Nach Ersetzen der Druckabhängigkeit in (3.22) durch eine Tiefenabhängigkeit ergibt sich folgendes Viskositätsgesetz,

$$\eta(T,z) \;=\; \eta_0 \,\exp\left(\frac{E+\rho_0 g\,(h-z)V}{RT} - \frac{E+\rho_0 ghV}{R\,(T_0+\Delta T)}\right) \;, \tag{3.25}$$

mit η_0 Referenzviskosität für Temperatur $T_0 + \Delta T$ am Boden der Modellbox $z = 0$. Ein lineares Fließgesetz ist realistisch für den oberen Erdmantel, wenn die mittlere Korngröße der Kristalle kleiner als etwa 1 mm ist [*Ranalli*, 1995]. Dagegen überwiegt nichtlineares Fließen, wenn die Korngröße anwächst. Vergleichsrechnungen haben gezeigt, daß in Konvektionsmodellen mit nichtlinearer und linearer Rheologie großräumige Konvektionsstrukturen und globale Größen wie mittlere Temperatur und Geschwindigkeit in guter Übereinstimmung sind, wenn die Temperatur- und Druckabhängigkeit bei linearer Rheologie reduziert wird [*Christensen*, 1984b]. Aus diesen Gründen ist die Annahme eines linearen Fließgesetzes in den Modellrechnungen in erster Näherung gerechtfertigt.

Gleichung (3.25) läßt sich durch Skalierung der Variablen und Einführung dimensionsloser Parameter $E_1 = E/(R\Delta T)$, $E_2 = \rho_0 ghV/(R\Delta T)$ und $E_3 = T_0/\Delta T$ in dimensionslose Form bringen. Damit wird in den Modellrechnungen die Temperatur- und Druckabhängigkeit der Viskosität durch

$$\eta(T,z) \;=\; \exp\left(\frac{E_1+E_2\,(1-z)}{T+E_3} - \frac{E_1+E_2}{1+E_3}\right) \;=\; A\,\exp\left(\frac{E_1+E_2\,(1-z)}{T+E_3}\right) \;, \tag{3.26}$$

beschrieben. Alternativ wird eine linearisierte Form mit reiner Temperaturabhängigkeit verwendet,

$$\eta(T) \;=\; \exp(-E_4 T) \;, \tag{3.26a}$$

wobei der Parameter E_4 den maximalen Viskositätskontrast bestimmt.

Kapitel 4

Numerisches Lösungsverfahren

Die Gleichungen (3.10)–(3.12) bilden ein nichtlineares, gekoppeltes Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung. Nur für Spezialfälle läßt sich eine analytische Lösung der Gleichungen angeben, ansonsten muß das Gleichungssystem numerisch gelöst werden. In diesem Kapitel wird das numerische Verfahren zur Lösung der Gleichungen vorgestellt. Im ersten Abschnitt wird die Diskretisierung der Gleichungen auf einem numerischen Gitter beschrieben und der numerische Ansatz zur Lösung der diskretisierten Gleichungen erläutert. Im zweiten Abschnitt werden Details des Mehrgitterverfahrens als zentralem Bestandteil des numerischen Verfahrens vorgestellt. Der dritte Abschnitt befaßt sich mit der Erzeugung lokaler Gitterverfeinerungen und ihrer Implementierung in Mehrgitterverfahren. In den beiden letzten Abschnitten werden dann Konvergenzeigenschaften und Effizienz des numerischen Verfahrens und die Verifikation der numerischen Lösung vorgestellt. Der Hauptteil dieses Kapitels ist aus *Albers* [2000] entnommen. In der hier vorliegenden Arbeit wird jedoch eine detailliertere Beschreibung des numerischen Verfahrens gegeben.

4.1 Finite-Volumen Diskretisierung

4.1.1 Grundlagen der Diskretisierung

Die Diskretisierung der Gleichungen erfolgt mit einem Finite-Volumen-Verfahren. Dazu wird das Rechengebiet in gleichförmige Gittervolumen Ω_{ijk} aufgeteilt, wobei i, j und k die Indizierung in x-, y- und z-Richtung kennzeichnet. Die Lösung wird an diskreten Punkten im Gittervolumen berechnet. Diese Werte werden dann als repräsentativ für das gesamte Gittervolumen angenommen. Die Anordnung der Variablen T, p und $\vec{v}$ im Gittervolumen ist dabei unterschiedlich. Temperatur und Druck werden im Zentrum des Gittervolumens berechnet. Die Geschwindigkeitskomponenten sind dagegen im Mittelpunkt der jeweiligen Grenzfläche zu benachbarten Gittervolumen definiert, die sich in Richtung der Geschwindigkeitskomponente befindet (siehe Abbildung 4.1). Diese Anordnung der Variablen wurde von *Harlow und Welch* [1965] eingeführt und nachfolgend in den meisten numerischen Verfahren verwendet, die auf einer Formulierung mit primitiven Variablen T, p, $\vec{v}$ basieren [e.g. *Vanka*,

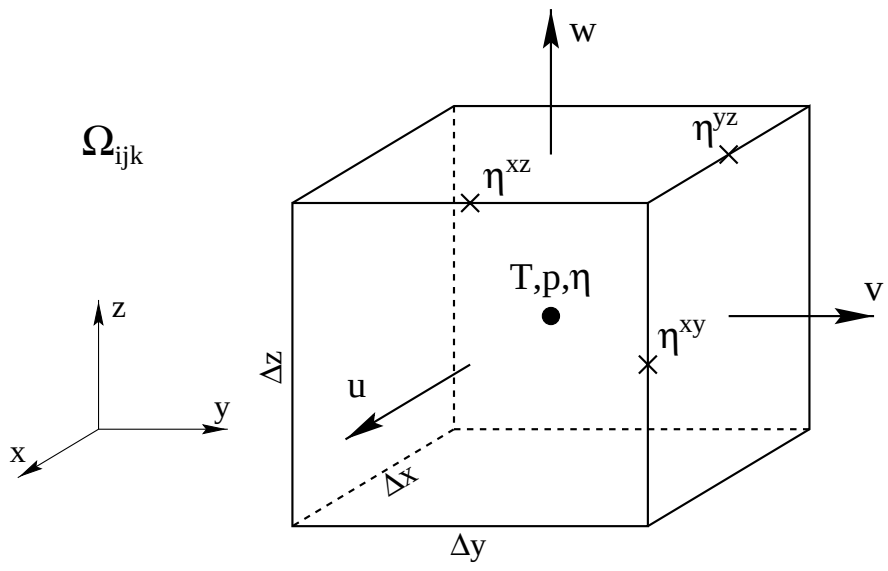

Abbildung 4.1: Räumliche Anordnung der Variablen im Gittervolumen Ω_{ijk}.

1986; *Ogawa et al.*, 1991; *Tackley*, 1994; *Trompert und Hansen*, 1996; *Auth und Harder*, 1999].

Eine versetzte Anordnung der Variablen hat gegenüber einer herkömmlichen Anordnung, bei der alle Variablen an derselben Position im Gitter definiert sind, mehrere Vorteile. Bei einer Anordnung aller Variablen an derselben Position im Gitter können künstliche Druck- und Geschwindigkeitsoszillationen auftreten. Beispiele solcher Oszillationen finden sich bei *Patankar* [1980]. Durch eine versetzte Anordnung der Variablen werden diese Oszillationen unterdrückt. Der Grund liegt in der unterschiedlichen Diskretisierung der Gleichungen auf einem herkömmlichen Gitter und einem Gitter mit versetzter Anordnung der Variablen (siehe Abschnitt 4.1.2). Dieses führt gleichzeitig zu einer höheren Genauigkeit der numerischen Lösung bei versetzter Anordnung der Variablen im Vergleich zu einer herkömmlichen Anordnung [*Brandt*, 1988; *Tackley*, 1994].

Zur Diskretisierung werden die Gleichungen zunächst über kleine Volumenelemente integriert. Diese Volumenelemente haben dieselbe Größe wie die Gittervolumen Ω_{ijk}, ihre räumliche Anordnung stimmt allerdings nicht in allen Fällen mit der Aufteilung des Rechengebiets in Gittervolumen überein. Die diskretisierten Gleichungen ergeben sich dann aus der Approximation dieser Integrale durch Differenzenformeln mit den an diskreten Punkten im Gitter bekannten Werten der Variablen. Bei einer Approximation der Integrale von zweiter Fehlerordnung, die im folgenden verwendet wird, ergeben sich keine wesentlichen Unterschiede zu einer Diskretisierung mit Finiten-Differenzen. Durch die Integration der Gleichungen über Volumenelemente und die versetzte Anordnung der Variablen im Gitter erfüllt die numerische Lösung die Erhaltung von Masse, Impuls und Energie über diese Volumenelemente exakt, unabhängig von der gewählten Gitterauflösung. Die Diskretisierung der einzelnen Gleichungen wird in den folgenden Abschnitten ausführlich dargestellt. Eine detaillierte Beschreibung findet sich ebenfalls bei *Patankar* [1980] und *Wesseling* [1992].

4.1.2 Diskretisierung der Kontinuitäts- und Stokesgleichung

Die Kontinuitätsgleichung (3.11) wird über Volumenelemente integriert, die mit den Gittervolumen Ω_{ijk} übereinstimmen. Die Umwandlung der Volumenintegrale in Oberflächenintegrale führt zu folgender diskretisierten Gleichung,

$$\frac{u_{ijk}-u_{i-1jk}}{\Delta x}+\frac{v_{ijk}-v_{ij-1k}}{\Delta y}+\frac{w_{ijk}-w_{ijk-1}}{\Delta z} = 0\,, \tag{4.1}$$

mit Δx, Δy und Δz Gitterabstand in x-, y- und z-Richtung.

Die Stokes-Gleichung (3.12) wird über Volumenelemente integriert, deren räumliche Lage zum Gittervolumen Ω_{ijk} in derselben Art versetzt ist wie die der Geschwindigkeitskomponenten. Nach Approximation der Terme durch Differenzenformeln von zweiter Fehlerordnung ergeben sich folgende diskretisierte Gleichungen,

$$\begin{aligned}
-\frac{p_{i+1jk}-p_{ijk}}{\Delta x}+\frac{\tau^{xx}_{i+1jk}-\tau^{xx}_{ijk}}{\Delta x}+\frac{\tau^{xy}_{ijk}-\tau^{xy}_{ij-1k}}{\Delta y}+\frac{\tau^{xz}_{ijk}-\tau^{xz}_{ijk-1}}{\Delta z} &= 0\,,\\
-\frac{p_{ij+1k}-p_{ijk}}{\Delta y}+\frac{\tau^{xy}_{ijk}-\tau^{xy}_{i-1jk}}{\Delta x}+\frac{\tau^{yy}_{ij+1k}-\tau^{yy}_{ijk}}{\Delta y}+\frac{\tau^{yz}_{ijk}-\tau^{yz}_{ijk-1}}{\Delta z} &= 0\,,\\
-\frac{p_{ijk+1}-p_{ijk}}{\Delta z}+\frac{\tau^{xz}_{ijk}-\tau^{xz}_{i-1jk}}{\Delta x}+\frac{\tau^{yz}_{ijk}-\tau^{yz}_{ij-1k}}{\Delta y}+\frac{\tau^{zz}_{ijk+1}-\tau^{zz}_{ijk}}{\Delta z} &= -\mathrm{Ra}\frac{T_{ijk+1}+T_{ijk}}{2}\,,
\end{aligned} \tag{4.2}$$

wobei die Normalspannungen,

$$\begin{aligned}
\tau^{xx}_{ijk} &= 2\eta_{ijk}\frac{u_{ijk}-u_{i-1jk}}{\Delta x}\,,\\
\tau^{yy}_{ijk} &= 2\eta_{ijk}\frac{v_{ijk}-v_{ij-1k}}{\Delta y}\,,\\
\tau^{zz}_{ijk} &= 2\eta_{ijk}\frac{w_{ijk}-w_{ijk-1}}{\Delta z}\,,
\end{aligned}$$

im Zentrum des Gittervolumens und die Scherspannungen,

$$\begin{aligned}
\tau^{xy}_{ijk} &= \eta^{xy}_{ijk}\left(\frac{u_{ij+1k}-u_{ijk}}{\Delta y}+\frac{v_{i+1jk}-v_{ijk}}{\Delta x}\right)\,,\\
\tau^{xz}_{ijk} &= \eta^{xz}_{ijk}\left(\frac{u_{ijk+1}-u_{ijk}}{\Delta z}+\frac{w_{i+1jk}-w_{ijk}}{\Delta x}\right)\,,\\
\tau^{yz}_{ijk} &= \eta^{yz}_{ijk}\left(\frac{v_{ijk+1}-v_{ijk}}{\Delta z}+\frac{w_{ij+1k}-w_{ijk}}{\Delta y}\right)\,,
\end{aligned}$$

an Seitenrändern zu benachbarten Gittervolumen berechnet werden.

Wegen der versetzten Anordnung der Variablen im Gitter treten sowohl in der diskretisierten Kontinuitätsgleichung (4.1) als auch in der diskretisierten Stokes-Gleichung (4.2) nur Differenzen zwischen benachbarten Gitterpunkten auf. Aus diesem Grund ergibt sich eine höhere Genauigkeit der numerischen Lösung und werden künstliche Druck- und Geschwindigkeitsoszillationen zwischen benachbarten Gitterpunkten vermieden.

Die Viskosität η_{ijk} ist im Zentrum des Gittervolumens Ω_{ijk} definiert und berechnet sich aus der Temperatur- und Tiefenabhängigkeit nach (3.26) oder (3.26a). Zusätzlich werden weitere Viskositäten η^{xy}_{ijk}, η^{xz}_{ijk} und η^{yz}_{ijk} an den Seitenrändern zu benachbarten Gittervolumen eingeführt (siehe Abbildung 4.1). Sie dienen zur Berechnung der Scherspannungen. Ihre Werte ergeben sich durch bilineare Interpolation aus den Viskositäten im Mittelpunkt der vier umliegenden Gittervolumen,

$$\begin{aligned}
\eta^{xy}_{ijk} &= \frac{\eta_{ijk}+\eta_{i+1jk}+\eta_{ij+1k}+\eta_{i+1j+1k}}{4}\,, \\
\eta^{xz}_{ijk} &= \frac{\eta_{ijk}+\eta_{i+1jk}+\eta_{ijk+1}+\eta_{i+1jk+1}}{4}\,, \\
\eta^{yz}_{ijk} &= \frac{\eta_{ijk}+\eta_{ij+1k}+\eta_{ijk+1}+\eta_{ij+1k+1}}{4}\,.
\end{aligned}$$

Folgt man dem allgemeinen Ansatz zur Diskretisierung von Gleichungen mit stark variablen Koeffizienten von *Wesseling* [1988, 1992], sollte eine Diskretisierung verwendet werden, die sicherstellt, daß sich Spannungen an den Grenzflächen zwischen Gittervolumen kontinuierlich ändern, auch wenn sich die Viskosität zwischen benachbarten Gittervolumen stark unterscheidet. Kontinuierliche Spannungen an den Grenzflächen erhält man, wenn eine harmonische Interpolation zur Berechnung der Viskositäten an den Seitenrändern benutzt wird,

$$\begin{aligned}
\eta^{xy}_{ijk} &= \frac{4}{1/\eta_{ijk}+1/\eta_{i+1jk}+1/\eta_{ij+1k}+1/\eta_{i+1j+1k}}\,, \\
\eta^{xz}_{ijk} &= \frac{4}{1/\eta_{ijk}+1/\eta_{i+1jk}+1/\eta_{ijk+1}+1/\eta_{i+1jk+1}}\,, \\
\eta^{yz}_{ijk} &= \frac{4}{1/\eta_{ijk}+1/\eta_{ij+1k}+1/\eta_{ijk+1}+1/\eta_{ij+1k+1}}\,.
\end{aligned}$$

Diese Art der Interpolation wird von *Ogawa et al.* [1991] verwendet. Ich habe beide Interpolationen ausprobiert. Es hat sich herausgestellt, daß eine harmonische Interpolation in dem hier vorgestellten numerischen Verfahren zu keiner signifikanten Erhöhung der Genauigkeit führt, so daß im folgenden die einfachere bilineare Interpolation verwendet wird.

4.1.3 Diskretisierung der Wärmeleitungsgleichung

Die Wärmeleitungsgleichung (3.10) wird in der Zeit durch ein Finite-Differenzen-Verfahren diskretisiert. Die Advektions- und Diffusionsterme werden dabei wahlweise implizit oder explizit behandelt. Damit ergibt sich folgende Gleichung,

$$\frac{T^{n+1}-T^n}{\Delta t} = \Theta\left(\vec{\nabla}^2 T^{n+1} - \vec{\nabla}\left(\vec{v}T\right)^{n+1}\right) + (1-\Theta)\left(\vec{\nabla}^2 T^n - \vec{\nabla}\left(\vec{v}T\right)^{n}\right)\,, \tag{4.3}$$

wobei Δt die Länge des Zeitschritts und die hochgestellten Indizes n und $n+1$ Werte zur alten und neuen Zeit bezeichnen. Das explizite Zeitschrittverfahren ($\Theta = 0$) ist nur für kleine Zeitschrittlängen stabil. Dagegen können bei Verfahren mit $\Theta \geq 0.5$ theoretisch beliebige

Zeitschrittlängen gewählt werden [*Lapidus und Pinder*, 1982]. Zur Berechnung stationärer Lösungen verwende ich das voll implizite Euler-Verfahren ($\Theta = 1$) mit großen Zeitschrittlängen. Bei zeitabhängigen Lösungen benutze ich das Crank-Nicolson-Verfahren ($\Theta = 0.5$), das von zweiter Fehlerordnung in der Zeit ist [*Lapidus und Pinder*, 1982], und beschränke die Zeitschrittlänge durch das Courant-Kriterium,

$$\Delta t \;<\; \min\left(\frac{|u|}{\Delta x} + \frac{|v|}{\Delta y} + \frac{|w|}{\Delta z}\right)^{-1} .$$

Das Courant-Kriterium gibt das maximale Zeitintervall an, in dem die Strömung Material nicht weiter als von einem Gitterpunkt bis zum benachbarten Gitterpunkt transportieren kann. Obwohl das Zeitschrittverfahren uneingeschränkt stabil ist, wird das Courant-Kriterium zur Begrenzung der Zeitschrittlänge bei zeitabhängigen Lösungen angewendet, um eine gute Auflösung der zeitlichen Entwicklung zu erhalten.

Zur räumlichen Diskretisierung wird Gleichung (4.3) über das Gittervolumen Ω_{ijk} integriert. Um Instabilitäten des numerischen Lösungsverfahrens zu vermeiden, wird anschließend die diskretisierte Kontinuitätsgleichung (4.1) mit der Temperatur multipliziert und von der Wärmeleitungsgleichung abgezogen [*Patankar*, 1980]. Dieses führt zu folgender diskretisierten Gleichung,

$$T_{ijk}^{n+1} + \Theta \Delta t\, J_{ijk}^{n+1} \;=\; T_{ijk}^{n} - (1-\Theta)\,\Delta t\, J_{ijk}^{n} \,, \tag{4.4}$$

mit

$$J_{ijk} \;=\; \frac{J^{x+}_{i+\frac{1}{2}jk} - J^{x-}_{i-\frac{1}{2}jk}}{\Delta x} + \frac{J^{y+}_{ij+\frac{1}{2}k} - J^{y-}_{ij-\frac{1}{2}k}}{\Delta y} + \frac{J^{z+}_{ijk+\frac{1}{2}} - J^{z-}_{ijk-\frac{1}{2}}}{\Delta z} \,,$$

und

$$\begin{aligned}
J^{x+}_{i+\frac{1}{2}jk} &= (uT)_{i+\frac{1}{2}jk} - \frac{T_{i+1jk} - T_{ijk}}{\Delta x} - u_{ijk}T_{ijk} \,, \\
J^{x-}_{i-\frac{1}{2}jk} &= (uT)_{i-\frac{1}{2}jk} - \frac{T_{ijk} - T_{i-1jk}}{\Delta x} - u_{i-1jk}T_{ijk} \,, \\
J^{y+}_{ij+\frac{1}{2}k} &= (vT)_{ij+\frac{1}{2}k} - \frac{T_{ij+1k} - T_{ijk}}{\Delta y} - v_{ijk}T_{ijk} \,, \\
J^{y-}_{ij-\frac{1}{2}k} &= (vT)_{ij-\frac{1}{2}k} - \frac{T_{ijk} - T_{ij-1k}}{\Delta y} - v_{ij-1k}T_{ijk} \,, \\
J^{z+}_{ijk+\frac{1}{2}} &= (wT)_{ijk+\frac{1}{2}} - \frac{T_{ijk+1} - T_{ijk}}{\Delta z} - w_{ijk}T_{ijk} \,, \\
J^{z-}_{ijk-\frac{1}{2}} &= (wT)_{ijk-\frac{1}{2}} - \frac{T_{ijk} - T_{ijk-1}}{\Delta z} - w_{ijk-1}T_{ijk} \,.
\end{aligned}$$

Der Diffusionsterm wird durch zentrale Differenzen approximiert, für den Advektionsterm wird ein Upwind-Verfahren verwendet. Upwind-Verfahren dienen dazu, künstliche Oszillationen der Lösung bei geringer Gitterauflösung zu dämpfen. Diese Oszillationen können

auftreten, wenn der Advektionsterm durch zentrale Differenzen approximiert wird und die lokale Gitter-Pécletzahl $\mathrm{Pe}_{ijk} = u_{ijk}\Delta x$ oder entsprechend in y- oder z-Richtung größer als 2 ist [*Vreugdenhil und Koren*, 1993]. In Upwind-Verfahren wird die Berechnung des Advektionsterms in Abhängigkeit von der Strömungsrichtung und der Pécletzahl modifiziert und die zentralen Differenzen durch einseitige Differenzen ersetzt. Eine Approximation des Advektionsterms mit einem Upwind-Verfahren entspricht einer Approximation mit zentralen Differenzen, der eine zusätzliche numerische Diffusion überlagert wird [*Vreugdenhil und Koren*, 1993]. Diese numerische Diffusion ist der Grund für die Dämpfung möglicher Gitteroszillationen. Weil bei hohen Pécletzahlen die durch das Upwind-Verfahren in die Wärmeleitungsgleichung eingeführte numerische Diffusion größer als die physikalische Diffusion ist, wird in Upwind-Verfahren bei hohen Pécletzahlen häufig der Diffusionsterm vernachlässigt. Eine Zusammenstellung verschiedener Upwind-Verfahren findet sich u.a. bei *Patankar* [1980].

In der hier vorgestellten Diskretisierung der Wärmeleitungsgleichung legt das Upwind-Verfahren fest, wie die Temperatur an den Grenzflächen des Gittervolumens Ω_{ijk}, die zur Berechnung des advektiven Wärmeflusses benötigt wird, aus der Temperatur im Zentrum der Gittervolumen berechnet wird. Es wurden zwei unterschiedliche Upwind-Verfahren implementiert: das Fromm-Schema, das von *Trompert und Hansen* [1996] verwendet wird, und das von *Patankar* [1980] favorisierte Upwind-Verfahren mit einer Abhängigkeit von der fünften Potenz der Pécletzahl ("power-law"-Schema). Das Fromm-Schema setzt sich zu gleichen Teilen aus einem zentralen Verfahren, z.B.

$$T_{i+\frac{1}{2}jk} = \frac{T_{i+1jk} + T_{ijk}}{2} ,$$

und einem einseitigen Verfahren von zweiter Fehlerordnung, z.B.

$$\begin{aligned} T_{i+\frac{1}{2}jk} &= \frac{3T_{ijk} - T_{i-1jk}}{2} \qquad \text{für} \quad u_{ijk} \geq 0 , \\ T_{i+\frac{1}{2}jk} &= \frac{3T_{i+1jk} - T_{i+2jk}}{2} \qquad \text{für} \quad u_{ijk} < 0 , \end{aligned}$$

zusammen. Die Temperaturen an den anderen Grenzflächen des Gittervolumens werden in derselben Art berechnet. Für den advektiven Wärmefluß in x-Richtung ergibt sich damit

$$\begin{aligned} (uT)_{i+\frac{1}{2}jk} = \max\left(u_{ijk}, 0\right) &\left(T_{ijk} + \frac{1}{4}\left(T_{i+1jk} - T_{i-1jk}\right)\right) + \\ \min\left(u_{ijk}, 0\right) &\left(T_{i+1jk} - \frac{1}{4}\left(T_{i+2jk} - T_{ijk}\right)\right) , \end{aligned} \tag{4.5}$$

und entsprechend für den Wärmefluß durch die anderen Grenzflächen des Gittervolumens.

Beim Upwind-Verfahren von *Patankar* [1980] geht nicht nur die Strömungsrichtung, sondern auch die Stärke der Strömung (gemessen durch die Pécletzahl) in die Berechnung des

advektiven Wärmeflusses ein. Der advektive Wärmefluß in x-Richtung ergibt sich als

$$(uT)_{i+\frac{1}{2}jk} = \left(\max\left(u_{ijk},0\right) + \frac{\max\left(\left(1-0.1\cdot|\mathrm{Pe}_{ijk}|\right)^5,0\right)-1}{\Delta x} \right) T_{ijk} + \left(\min\left(u_{ijk},0\right) - \frac{\max\left(\left(1-0.1\cdot|\mathrm{Pe}_{ijk}|\right)^5,0\right)-1}{\Delta x} \right) T_{i+1jk}\,, \tag{4.6}$$

mit $\mathrm{Pe}_{ijk} = u_{ijk}\Delta x$ und entsprechend für den Wärmefluß durch die anderen Grenzflächen. Für große Pécletzahlen ($|\mathrm{Pe}_{ijk}| \geq 10$) reduziert sich dieses Upwind-Verfahren auf das Upwind-Verfahren erster Fehlerordnung,

$$(uT)_{i+\frac{1}{2}jk} = \max\left(u_{ijk},0\right) T_{ijk} + \min\left(u_{ijk},0\right) T_{i+1jk}\,, \tag{4.7}$$

wobei zusätzlich der Diffusionsterm vernachlässigt wird. Für kleine Pécletzahlen nähert sich das Upwind-Verfahren dem zentralen Verfahren (siehe Abbildung 5.8 in *Patankar* [1980]).

4.1.4 Numerischer Lösungsansatz

Um die Schreibweise abzukürzen, fasse ich die diskretisierten Gleichungen (4.1), (4.2) und (4.4) formal zu folgender Matrixgleichung zusammen,

$$\begin{pmatrix} A(\eta(T)) & G & B \\ D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C(\vec{v}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{v} \\ p \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{f} \\ f_4 \\ f_5 \end{pmatrix}. \tag{4.8}$$

Nichtlinearitäten treten im Advektionsterm der Wärmeleitungsgleichung und bei temperaturabhängiger Viskosität in den viskosen Kräften der Stokes-Gleichung auf.

Das diskretisierte Gleichungssystem (4.8) wird iterativ gelöst. Dazu sind zwei unterschiedliche Lösungsstrategien implementiert worden. Beim ersten Lösungsansatz werden alle Gleichungen gekoppelt gelöst. Dieses ergibt eine Genauigkeit des numerischen Verfahrens von zweiter Fehlerordnung in Raum und Zeit. Bei der zweiten Lösungsstrategie wird die Wärmeleitungsgleichung von der Kontinuitäts- und Stokes-Gleichung abgekoppelt, indem die Geschwindigkeiten zur alten Zeit im Advektionsterm verwendet werden. Zuerst wird die Temperatur zur neuen Zeit berechnet. Danach werden aus der Temperatur neue Geschwindigkeiten und ein neuer Druck bestimmt. Diese Strategie reduziert die Genauigkeit auf erste Fehlerordnung in der Zeit, die Lösung der Gleichungen ist aber bei sehr großen Zeitschrittlängen robuster und weniger rechenintensiv als die gekoppelte Lösung aller Gleichungen. Deshalb wird sie zur Berechnung stationärer Lösungen verwendet, während der gekoppelte Lösungsansatz bei zeitabhängigen Rechnungen bevorzugt wird. Zentraler Bestandteil des implementierten Iterationsverfahrens zur Lösung der Gleichungen ist ein Mehrgitteralgorithmus, der im folgenden Abschnitt detailliert vorgestellt wird.

4.2 Mehrgitterverfahren

Mehrgitterverfahren sind sehr effiziente iterative Verfahren zur Lösung großer Gleichungssysteme. Dabei wird das Gleichungssystem nicht nur auf einem numerischen Gitter, sondern gleichzeitig auf mehreren Gittern mit unterschiedlicher Zahl an Gitterpunkten gelöst. Die Lösung auf den verschiedenen Gittern dient dazu, die Konvergenzrate der Lösung auf dem feinsten Gitter mit den meisten Gitterpunkten zu erhöhen. Eine detaillierte Beschreibung der Mehrgitterverfahren findet sich u.a. bei *Brandt* [1977], *Brandt und Dinar* [1979], *Hackbusch* [1985] und *Wesseling* [1992]. Im folgenden wird zunächst ein Überblick über in der Literatur vorgestellte Mehrgitterverfahren gegeben. Danach werden die Grundlagen, die für das Verständnis von Mehrgitterverfahren wichtig sind, erläutern, bevor dann in den anschließenden Abschnitten der implementierte Mehrgitteralgorithmus genauer beschrieben wird.

4.2.1 Literaturüberblick

Das Konzept von Mehrgitterverfahren wurde erfolgreich für unterschiedliche Problemstellungen, einschließlich der Berechnung von Flüssigkeitsströmungen, angewendet. Verschiedene Mehrgitterverfahren zur Lösung der Stokes- und Navier-Stokes-Gleichungen mit konstanter Viskosität wurden vorgestellt [u.a. *Vanka*, 1986; *Wittum*, 1989; *Koren*, 1990; *Zeng und Wesseling*, 1994]. *Parmentier et al.* [1994] haben ein Mehrgitterverfahren zur Berechnung von dreidimensionalen Konvektionsmodellen mit konstanter Viskosität in kartesischer Geometrie verwendet. Dazu haben sie die Stokes-Gleichung in zwei Poisson-Gleichungen überführt, die durch einen Mehrgitteralgorithmus gelöst werden.

Die meisten Arbeiten über Mehrgitterverfahren beschäftigen sich mit isoviskosen Flüssigkeitsströmungen. Nur wenige Veröffentlichungen behandeln Mehrgitterverfahren im Zusammenhang mit variabler Viskosität. *Baumgardner* [1985] hat ein Mehrgitterverfahren zur Lösung von Konvektionsproblemen in dreidimensionaler, sphärischer Geometrie vorgestellt. Das Verfahren wurde sowohl in Modellrechnungen mit konstanter Viskosität [*Baumgardner*, 1985] als auch mit tiefenabhängiger Viskosität [*Bunge et al.*, 1996, 1997] und mit einer in allen Raumrichtungen variablen Viskosität [*Hsui et al.*, 1995] verwendet. *Moresi und Solomatov* [1995] haben ein Mehrgitterverfahren für Konvektionsprobleme mit variabler Viskosität in kartesischer Geometrie vorgestellt. Die Stokes-Gleichung wird in diesem Fall durch ein Uzawa-Schema iterativ gelöst, wobei die Iterationen für die Geschwindigkeiten mit einem Mehrgitteralgorithmus, die Iterationen für den Druck dagegen mit einem Konjugierte-Gradienten Verfahren durchgeführt werden. Dieses Verfahren wurde in zweidimensionalen Rechnungen [*Moresi und Solomatov*, 1995] und in dreidimensionalen Rechnungen [*Moresi und Gurnis*, 1996; *Moresi und Lenardic*, 1997] verwendet. Sowohl das Verfahren von *Baumgardner* [1985] als auch das Verfahren von *Moresi und Solomatov* [1995] basieren auf einer Diskretisierung der Gleichungen mit Finiten-Elementen.

Tackley [1994] hat ein Mehrgitterverfahren für dreidimensionale Konvektionsprobleme mit variabler Viskosität in kartesischer Geometrie entwickelt, das auf einer Diskretisierung

der Gleichungen mit Finite-Volumen aufbaut. Dieses Verfahren wurde erfolgreich zur Untersuchung unterschiedlicher geodynamischer Problemstellungen angewendet [u.a. *Tackley*, 1996; *Ratcliff et al.*, 1997; *Moore et al.*, 1998], die auch Rechnungen mit lokal extremen Viskositätsgradienten einschließen [*Tackley*, 1998]. *Trompert und Hansen* [1996] verwenden ein ähnliches Mehrgitterverfahren. Sie erreichen Viskositätsvariationen von bis zu neun Größenordnungen, wobei allerdings die Konvergenzrate des Mehrgitterverfahrens mit steigenden Viskositätskontrasten geringer wird. *Auth und Harder* [1999] haben die Stabilität unterschiedlicher Mehrgitterverfahren für zweidimensionale Konvektionsprobleme mit stark variabler Viskosität untersucht.

Das Mehrgitterverfahren, das im folgenden vorgestellt wird, baut auf den Ansätzen von *Tackley* [1994] und *Trompert und Hansen* [1996] auf. Allerdings werden diese Ansätze durch Implementation eines modifizierten Mehrgitteralgorithmus, der auch die Berücksichtigung lokaler Gitterverfeinerungen erlaubt, erweitert.

4.2.2 Grundlagen

Iterative Lösungsverfahren

Mehrgitterverfahren bauen auf einem iterativen Lösungsansatz des Gleichungssystems auf. Zur Erläuterung dieses Verfahrens beziehe ich mich im folgenden allgemein auf ein Gleichungssystem der Form $Au = f$, das auf einem Gitter mit Gitterabstand h diskretisiert wird, d.h.

$$A_h u_h \;=\; f_h \;, \tag{4.9}$$

mit u_h exakte Lösung auf dem diskreten Gitter. Bei einer iterativen Lösung des Gleichungssystems wird aus einer aktuellen Näherungslösung u_h^j eine verbesserte Lösung u_h^{j+1} berechnet. Dazu wird die Matrix A_h in Matrizen M_h und N_h aufgespalten,

$$A_h \;=\; M_h - N_h \;,$$

wobei M_h eine leicht zu invertierende Matrix ist. Durch die Iterationsvorschrift,

$$M_h u_h^{j+1} \;=\; f_h + N_h u_h^j \;,$$

ergibt sich eine neue Näherungslösung,

$$u_h^{j+1} \;=\; M_h^{-1} f_h + M_h^{-1} N_h u_h^j \;=\; u_h^j + M_h^{-1}\left(f_h - A_h u_h^j\right) \;.$$

Das Iterationsverfahren ist konvergent gegen die exakte Lösung u_h, wenn der Spektralradius $\rho(M_h^{-1}N_h) < 1$ ist, d.h. wenn alle Eigenwerte der Matrix $M_h^{-1}N_h$ vom Betrag kleiner als 1 sind [*Wesseling*, 1992]. Für diagonal-dominante Matrizen ist eine solche Aufspaltung der Matrix A_h möglich.

Wenn keine Aufspaltung der Matrix A_h in Matrizen M_h und N_h existiert, die zu einem konvergenten Iterationsverfahren führt, müssen sogenannte distributive Iterationsverfahren

verwendet werden [*Wesseling*, 1992]. Dazu wird ein Vorkonditionierer B eingeführt, so daß anstelle von (4.9) die Gleichung,

$$A_h B_h \bar{u}_h \;=\; f_h \qquad \text{mit} \qquad u_h \;=\; B_h \bar{u}_h \;,$$

gelöst wird. B_h wird dabei so gewählt, daß eine Aufspaltung der Matrix $A_h B_h$ in Matrizen M_h und N_h zu einem konvergenten Iterationsverfahren führt. Eine neue Näherungslösung ergibt sich dann durch die Iterationsvorschrift,

$$u_h^{j+1} \;=\; u_h^j + B_h M_h^{-1} \left(f_h - A_h u_h^j \right) \;.$$

In der Regel gibt es verschiedene Möglichkeiten der Aufspaltung der Matrix A_h bzw. $A_h B_h$ in Matrizen M_h und N_h, die zu unterschiedlichen Iterationsverfahren führen. Wenn als Matrix M_h die Hauptdiagonale von A_h bzw. $A_h B_h$ gewählt wird, ergibt sich das Jacobi-Verfahren. Beim Gauß-Seidel-Verfahren wird für M_h die untere oder obere Dreiecksmatrix (inklusive der Hauptdiagonalen) von A_h bzw. $A_h B_h$ genommen [*Wesseling*, 1992].

Idee des Mehrgitterverfahrens

Die oben beschriebenen iterativen Lösungsverfahren reduzieren den kurzwelligen Fehleranteil in der Näherungslösung in wenigen Iterationsschritten, der langwellige Fehleranteil wird aber nur sehr langsam verringert, so daß die Konvergenzrate des Iterationsverfahrens durch die Reduktion des langwelligen Fehleranteils bestimmt wird [*Wesseling*, 1992]. An diesem Punkt setzen Mehrgitterverfahren an. Die Idee von Mehrgitterverfahren ist es, die Reduktion des langwelligen Fehlers zu verbessern, indem der langwellige Anteil der Lösung, der auf dem feinsten Gitter nur sehr langsam konvergiert, auf Gittern mit sukzessive verringerter Zahl an Gitterpunkten berechnet wird. Weil die Berechnung der Lösung auf Gittern mit geringer Zahl an Gitterpunkten weniger aufwendig ist als die Berechnung auf dem feinsten Gitter, wird der langwellige Fehleranteil der Lösung sehr effizient reduziert, so daß in Mehrgitterverfahren eine Konvergenzrate erreicht wird, die unabhängig von der Problemgröße ist [*Wesseling*, 1992]. Im folgenden möchte ich das Prinzip von Mehrgitterverfahren am Beispiel eines Zwei-Gitter-Algorithmus erläutern.

Linearer Mehrgitteralgorithmus

Unter der Voraussetzung, daß das zu lösende Gleichungssystem linear ist, läßt sich der Defekt der Näherungslösung u_h^j schreiben als

$$d_h \;=\; f_h - A_h u_h^j \;=\; A_h u_h - A_h u_h^j \;=\; A_h \left(u_h - u_h^j \right) \;=\; A_h v_h \;,$$

mit $v_h = u_h - u_h^j$ Fehler bzw. Korrektur der Näherungslösung u_h^j. Wenn der Defekt nur langwellige Anteile enthält, kann diese Gleichung auf einem gröberen Gitter mit Gitterabstand $2h$ diskretisiert werden,

$$A_{2h} v_{2h} \;=\; R d_h \;, \tag{4.10}$$

wobei Rd_h den vom Feingitter auf das Grobgitter übertragenen Defekt bezeichnet (Restriktion). Gleichung (4.10) wird auf dem Grobgitter gelöst und die Korrektur v_{2h} berechnet. Anschließend wird die Näherungslösung auf dem Feingitter durch diese Grobgitterlösung korrigiert,

$$u_h^{j+1} \;=\; u_h^j + Pv_{2h} \;,$$

wobei Pv_{2h} die Übertragung der Korrektur vom Grobgitter auf das Feingitter bezeichnet (Prolongation).

Für einen Zwei-Gitter-Algorithmus ergibt sich damit folgender Ablauf: Zuerst werden auf dem Feingitter einige wenige Iterationsschritte (Vorglätter) durchgeführt, um den kurzwelligen Fehleranteil zu reduzieren. Danach wird der Defekt auf das Grobgitter übertragen und mit (4.10) eine Korrektur der Lösung auf dem Grobgitter berechnet. Diese Korrektur wird dann auf das Feingitter übertragen und zur Feingitterlösung addiert. Abschließend werden weitere Iterationsschritte (Nachglätter) gemacht, um die durch die Übertragung der Korrektur vom Grobgitter auf das Feingitter erzeugten kurzwelligen Fehler zu dämpfen. Danach beginnt der Algorithmus von vorne und wird solange wiederholt, bis die Feingitterlösung gegen die exakte Lösung konvergiert ist.

Weil die Gleichungen (4.9) und (4.10) dieselbe Form haben, kann der hier vorgestellte Zwei-Gitter-Algorithmus sehr einfach rekursiv auf mehr als zwei Gitter ausgeweitet werden, indem die Lösung auf dem Grobgitter wiederum durch einen Zwei-Gitter-Algorithmus berechnet wird. Dabei werden auf allen Gittern, außer auf dem Gitter mit der geringsten Zahl an Gitterpunkten, jeweils nur wenige Iterationsschritte durchgeführt, bevor die Lösung auf das nächste Gitter übertragen wird. Nur auf dem gröbsten Gitter wird die Gleichung exakt gelöst, entweder durch ein direktes Lösungsverfahren oder durch Iteration bis zur Konvergenz. Die Reihenfolge, in der die unterschiedlichen Gitter durchlaufen werden, wird durch den Mehrgitterzyklus (siehe unten) festgelegt.

Der hier vorgestellte Algorithmus wird in der Literatur als “Correction Scheme” [*Brandt und Dinar*, 1979] oder als “Coarse Grid Correction” [*Wesseling*, 1992] bezeichnet, weil auf dem Grobgitter lediglich Korrekturen der Feingitterlösung berechnet werden und die Grobgitterlösung gegen Null geht, wenn die Feingitterlösung gegen die exakte Lösung konvergiert. Die Grundvoraussetzung für die Anwendung dieses Verfahrens ist allerdings die Linearität des Gleichungssystems, die bei der Herleitung der Gleichung für den Defekt vorausgesetzt wurde.

Nichtlinearer Mehrgitteralgorithmus

Für nichtlineare Gleichungen wird ein modifiziertes Mehrgitterverfahren verwendet, das als “Full Approximation Storage” (FAS) [*Brandt*, 1977] bezeichnet wird. Ausgangspunkt ist wieder die Gleichung für den Defekt der Näherungslösung u_h^j,

$$d_h \;=\; f_h - A_h u_h^j \;=\; A_h u_h - A_h u_h^j \;,$$

wobei allerdings keine weitergehende Umformung unter Voraussetzung der Linearität von A_h gemacht wird. Stattdesssen wird die Gleichung in der oben dargestellten Form auf dem Gitter mit Gitterabstand $2h$ diskretisiert,

$$A_{2h}u_{2h} = \underbrace{R\left(f_h - A_h u_h^j\right) + A_{2h}Ru_h^j}_{f_{2h}}, \tag{4.11}$$

wobei Ru_h^j die Restriktion der Näherungslösung des Feingitters auf das Grobgitter bezeichnet. Gleichung (4.11) ersetzt die Defektgleichung (4.10) des linearen Algorithmus. Anstelle einer Korrektur wird jetzt eine Approximation der vollen Lösung auf dem Grobgitter berechnet, so daß bei Konvergenz das Grobgitter die Restriktion der Feingitterlösung enthält. Fein- und Grobgitter unterscheiden sich nur in der Berechnung des Lastterms. Die Näherungslösung auf dem Feingitter wird durch Prolongation der Korrektur $v_{2h} = u_{2h} - Ru_h^j$ vom Grobgitter auf das Feingitter verbessert,

$$u_h^{j+1} = u_h^j + P\left(u_{2h} - Ru_h^j\right) .$$

Im Vergleich zum linearen Algorithmus ist beim nichtlinearen Algorithmus die Berechnung des Lastterms auf dem Grobgitter komplizierter, weil neben dem Defekt auch die Näherungslösung des Feingitters auf das Grobgitter übertragen werden muß. Allerdings hat der nichtlineare Algorithmus neben dem Vorteil, daß er auch für nichtlineare Gleichungen anwendbar ist, noch weitere Vorteile. Weil auf allen Gittern die volle Lösung berechnet wird, kann der lokale Diskretisierungsfehler des Feingitters abgeschätzt werden. Durch Berücksichtigung dieses Diskretisierungsfehlers im Lastterm des Feingitters lassen sich Mehrgitterverfahren mit höherer Fehlerordnung entwickeln ("τ-Extrapolation") [*Brandt und Dinar*, 1979]. Außerdem ermöglicht der nichtlineare Algorithmus eine sehr flexible Implementierung von lokalen Gitterverfeinerungen in Mehrgitterverfahren [*Brandt, 1977*; *Bai und Brandt*, 1987], die in Abschnitt 4.3 genauer vorgestellt wird.

Mehrgitterzyklen

Der Mehrgitterzyklus legt fest, in welcher Reihenfolge die unterschiedlichen Gitter im Mehrgitterverfahren durchlaufen werden. Die drei wichtigsten Mehrgitterzyklen sind in Abbildung 4.2 dargestellt. Der einfachste Mehrgitterzyklus ist der V-Zyklus. Abgesehen vom Gitter, auf dem die exakte Lösung berechnet wird, werden beim V-Zyklus auf allen Gittern insgesamt zweimal Iterationen als Vor- bzw. Nachglätter durchgeführt. Der V-Zyklus ist damit der Mehrgitterzyklus mit dem geringsten Rechenaufwand auf den Grobgittern. Bei F- und W-Zyklen werden die Grobgitter dagegen häufiger durchlaufen. Ziel dieser zusätzlichen Iterationen auf Gittern mit wenigen Gitterpunkten ist es, eine verbesserte Korrektur der Feingitterlösung am Ende des Mehrgitterzyklus bei nur geringer Erhöhung des Rechenaufwands zu erhalten.

Der Rechenaufwand der unterschiedlichen Mehrgitterzyklen läßt sich abschätzen. Unter der Voraussetzung, daß sich die Anzahl der Gitterpunkte zwischen den Gittern jeweils um

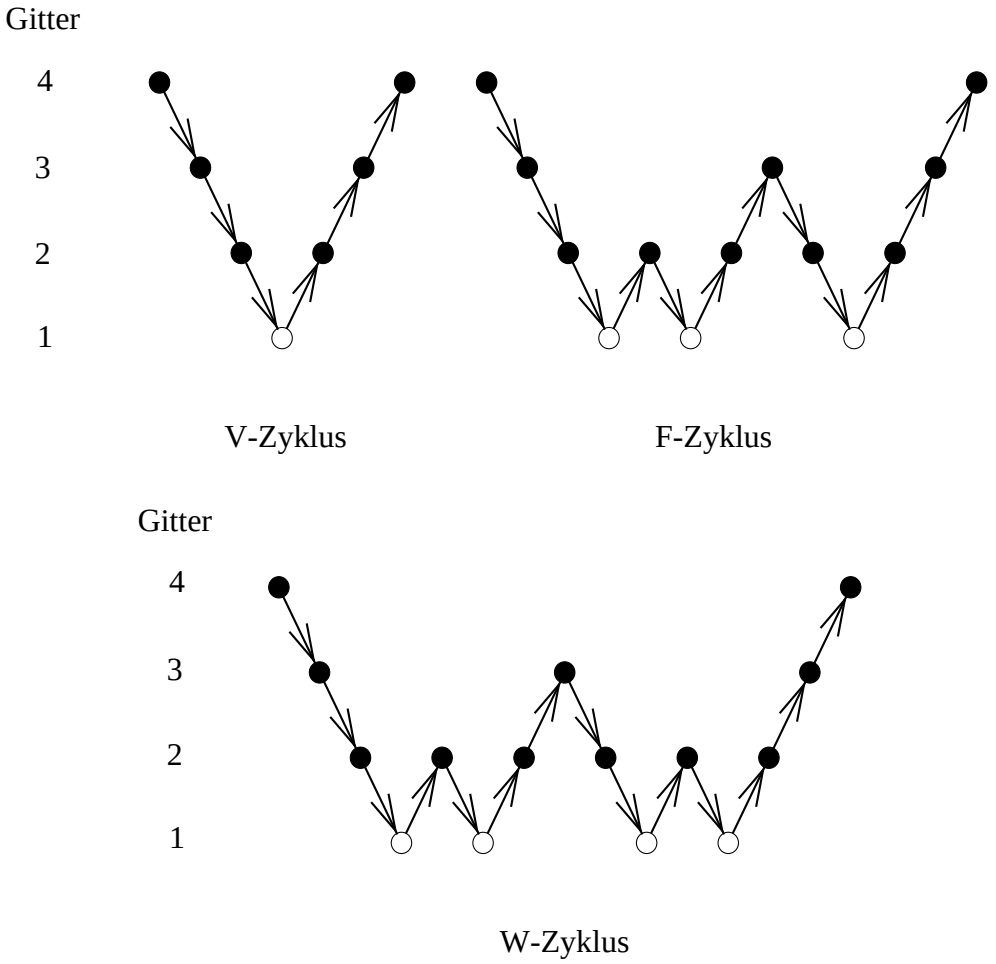

Abbildung 4.2: Unterschiedliche Mehrgitterzyklen am Beispiel eines Mehrgitterverfahrens mit vier Gittern. Die ausgefüllten Kreise stehen für Iterationen (Vor- bzw. Nachglätter), die nichtausgefüllten Kreise für exakte Lösung der Gleichung auf dem jeweiligen Gitter. Die Pfeile symbolisieren den Übergang zwischen den Gittern (Restriktion und Prolongation).

den Faktor 2 in jeder Raumrichtung ändert, beträgt bei dreidimensionalen Gittern der Rechenaufwand von V-, F- und W-Zyklen auf sämtlichen Grobgittern etwa 14, 31 und 33 Prozent des Rechenaufwands auf dem feinsten Gitter [*Wesseling*, 1992]. Diese moderate Erhöhung des Rechenaufwands wird durch die deutlich verbesserte Konvergenzrate des Iterationsverfahrens in Mehrgitterverfahren mehr als ausgeglichen. Es wird aber auch deutlich, daß noch komplexere Mehrgitterzyklen als F- und W-Zyklen, die noch mehr Iterationen auf den Grobgittern machen, in der Regel nicht sinnvoll sind, weil die Verbesserung der Lösung am Ende des Mehrgitterzyklus in keinem Verhältnis mehr zur Erhöhung des Rechenaufwands steht, der für einen Mehrgitterzyklus aufgewendet wird. Welcher Mehrgitterzyklus im Endeffekt der effizienteste ist, hängt von der jeweiligen Problemstellung ab.

4.2.3 Implementierter Mehrgitteralgorithmus

Das diskretisierte Gleichungssystem (4.8) wird mit dem nichtlinearen FAS-Algorithmus gelöst. Als Mehrgitterzyklen können V-, F- oder W-Zyklen gewählt werden, die alle auf dem feinsten Gitter beginnen. Die verschiedenen Gitter werden dabei durch Zusammenfassung von acht Feingittervolumen zu einem Grobgittervolumen erzeugt, d.h. die Anzahl der Gittervolumen ändert sich zwischen den Gittern um den Faktor 2 in jeder Raumrichtung. Diese Reduktion der Gittervolumen wird soweit wie möglich fortgeführt, wobei allerdings das Gitter mit den wenigsten Gitterpunkten mindestens drei Gittervolumen pro Raumrichtung enthalten muß. Auf diesem Gitter wird die exakte Lösung durch dasselbe Iterationsverfahren berechnet, das auch als Vor- und Nachglätter auf den anderen Gittern verwendet wird. Dazu wird die Iteration so lange fortgesetzt, bis die Lösung konvergiert ist. Obwohl der implementierte Mehrgitteralgorithmus für nichtlineare Gleichungen geeignet ist, wird (4.8) linearisiert, indem die Matrizen $A(\eta(T))$ und $C(\vec{v})$ auf allen Gittern im voraus berechnet werden. Dazu werden die Werte aus dem vorhergehenden Mehrgitterzyklus für T und $\vec{v}$ verwendet. Am Ende eines Mehrgitterzyklus werden diese Matrizen dann aktualisiert. Im folgenden werden das als Vor- und Nachglätter und zur Berechnung der exakten Lösung verwendete Iterationsverfahren, die Restriktions- und Prolongationsoperatoren zwischen den Gittern und die Approximation des diskretisierten Gleichungssystems (4.8) auf den Grobgittern im Detail beschrieben.

4.2.4 Glätter

Weil auf der Hauptdiagonalen des diskretisierten Gleichungssystems (4.8) ein Block Nullen auftritt, können einfache Iterationsverfahren, wie z.B. Jacobi- oder Gauß-Seidel-Verfahren, die das Inverse der Hauptdiagonalen zur Iteration verwenden, nicht als Glätter benutzt werden. Dieses macht es erforderlich, distributive Iterationsverfahren anzuwenden (siehe Abschnitt 4.2.2). Ich habe den SIMPLER-Algorithmus (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations Revised) [*Patankar*, 1980] implementiert, weil sich dieser Algorithmus als geeignet zur Lösung von Konvektionsproblemen mit stark variabler Viskosität erwiesen hat [*Trompert und Hansen*, 1996, 1998]. Der SIMPLER-Algorithmus kann in folgende Teile aufgespalten werden:

1. Berechnung einer neuen Temperatur aus der Wärmeleitungsgleichung $CT = f_5$.

2. Berechnung eines neuen Drucks aus

$$-DS^{-1}Gp \;=\; f_4 - D\left(\vec{v} + S^{-1}\left(\vec{f} - BT - A\vec{v}\right)\right) \;, \tag{4.12}$$

   mit S Hauptdiagonale der Matrix A. Diese Druckgleichung ergibt sich aus einer Kombination der Kontinuitäts- und Stokes-Gleichungen (siehe *Patankar* [1980]).

3. Berechnung neuer Geschwindigkeiten aus der Stokes-Gleichung $A\vec{v} = \vec{f} - BT - Gp$.

4. Berechung einer Druckkorrektur δp aus

$$-DS^{-1}G\delta p \;=\; f_4 - D\vec{v}\,. \tag{4.13}$$

5. Korrektur der Geschwindigkeiten durch Addition von $-S^{-1}G\delta p$, um die Kontinuitätsgleichung zu erfüllen.

Für den Fall einer entkoppelten Lösungsstrategie des Gleichungssystems (4.8) (siehe Abschnitt 4.1.4) wird Schritt 1 ausgelassen und eine neue Temperatur in separaten Mehrgitterzyklen berechnet.

Die Berechnungen der Schritte 1–4 bestehen jeweils aus einem einzigen Iterationsschritt, der mit einem punktweisen Gauß-Seidel-Verfahren durchgeführt wird. Wenn das Fromm-Schema (4.5) als Upwind-Verfahren zur Berechnung des advektiven Wärmeflusses verwendet wird, ist die Matrix C nicht diagonal-dominant, so daß Gauß-Seidel-Iterationen zu keinem konvergenten Verfahren führen. Deshalb wird anstelle der Gleichung $CT = f_5$ eine Fehler-Korrektur-Gleichung [*Désidéri und Hemker*, 1995],

$$\tilde{C}T \;=\; f_5 - \left(C - \tilde{C}\right) T\,, \tag{4.14}$$

gelöst, wobei $\tilde{C}$ die Diskretisierung der Wärmeleitungsgleichung mit dem Upwind-Verfahren erster Fehlerordnung (4.7) beschreibt und die rechte Seite nach jedem Mehrgitterzyklus neu berechnet wird. Weil $\tilde{C}$ diagonal-dominant ist, kann eine Gauß-Seidel-Iteration als Glätter für (4.14) verwendet werden.

4.2.5 Prolongation and Restriktion

In Mehrgitterverfahren müssen Daten zwischen den verschiedenen Gittern übertragen werden. Der Übergang vom feinen zum groben Gitter wird als Restriktion, der Übergang vom groben zum feinen Gitter als Prolongation bezeichnet. Um eine Konvergenzrate des Mehrgitterverfahrens zu erhalten, die unabhängig von der Gittergröße ist, müssen die Prolongations- und Restriktionsoperatoren die Bedingung,

$$m_P + m_R \;>\; 2m\,, \tag{4.15}$$

erfüllen, wobei m_P und m_R die Fehlerordnungen der Interpolation, die für die Prolongation und Restriktion verwendet werden, und $2m$ die Ordnung der zu lösenden Differentialgleichung bezeichnen [*Hackbusch*, 1985; *Hemker*, 1990; *Wesseling*, 1992].

Als Prolongation wird eine lineare Interpolation verwendet. Temperatur und Druck auf dem Feingitter werden durch eine Taylorreihe um den Grobgitterpunkt bis zum linearen Term approximiert. Die räumliche Anordnung der Fein- und Grobgitterpunkte ist in Abbildung 4.3

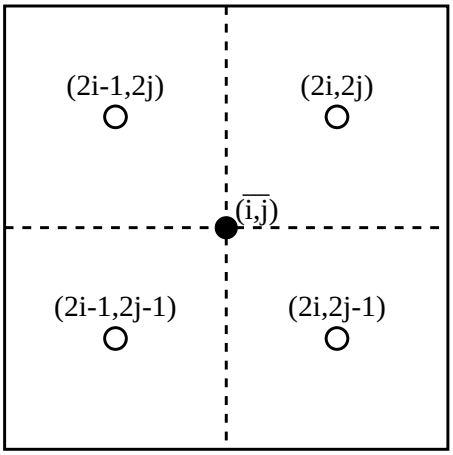

Abbildung 4.3: Zweidimensionales Beispiel der räumliche Anordnung von Temperatur und Druck auf dem Feingitter Ω_{ij} (nichtausgefüllte Kreise und gestrichelte Linien) und auf dem Grobgitter $\bar{\Omega}_{ij}$ (ausgefüllte Kreise und durchgezogene Linien).

dargestellt. Damit ergibt sich folgende Prolongation für die Temperatur,

$$\begin{aligned}
T_{2i2j2k} &= \bar{T}_{ijk} + T_x + T_y + T_z \ , \\
T_{2i-12j2k} &= \bar{T}_{ijk} - T_x + T_y + T_z \ , \\
T_{2i2j-12k} &= \bar{T}_{ijk} + T_x - T_y + T_z \ , \\
&\vdots \\
T_{2i-12j-12k-1} &= \bar{T}_{ijk} - T_x - T_y - T_z \ ,
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
T_x &= \frac{\bar{T}_{i+1jk} - \bar{T}_{i-1jk}}{8} \ , \\
T_y &= \frac{\bar{T}_{ij+1k} - \bar{T}_{ij-1k}}{8} \ , \\
T_z &= \frac{\bar{T}_{ijk+1} - \bar{T}_{ijk-1}}{8} \ ,
\end{aligned}$$

und entsprechend für den Druck. Grobgitterpunkte werden dabei durch Querstriche gekennzeichnet.

Weil die Geschwindigkeitskomponenten an den Grenzflächen der Gittervolumen definiert sind, müssen modifizierte Prolongationsoperatoren verwendet werden. Die räumliche Anordnung der Fein- und Grobgitterpunkte für die Geschwindigkeitskomponente in x-Richtung ist in Abbildung 4.4 dargestellt. Die Geschwindigkeitskomponenten auf dem Feingitter, die auch auf einer Grenzfläche des Grobgitters liegen, werden durch eine Taylorentwicklung in

den Richtungen senkrecht zur Geschwindigkeitskomponente berechnet, z.B.

$$
\begin{aligned}
u_{2i2j2k} &= \bar{u}_{ijk} + u_y + u_z \ , \\
u_{2i2j-12k} &= \bar{u}_{ijk} - u_y + u_z \ , \\
u_{2i2j2k-1} &= \bar{u}_{ijk} + u_y - u_z \ , \\
u_{2i2j-12k-1} &= \bar{u}_{ijk} - u_y - u_z \ ,
\end{aligned}
$$

mit

$$
\begin{aligned}
u_y &= \frac{\bar{u}_{ij+1k} - \bar{u}_{ij-1k}}{8} \ , \\
u_z &= \frac{\bar{u}_{ijk+1} - \bar{u}_{ijk-1}}{8} \ .
\end{aligned}
$$

Diese interpolierten Feingitterwerte werden dann benutzt, um die Geschwindigkeitskomponenten an den übrigen Punkten des Feingitters zu berechnen, z.B.

$$
\begin{aligned}
u_{2i-12j2k} &= \frac{u_{2i2j2k} + u_{2i-22j2k}}{2} \ , \\
u_{2i-12j-12k} &= \frac{u_{2i2j-12k} + u_{2i-22j-12k}}{2} \ , \\
u_{2i-12j2k-1} &= \frac{u_{2i2j2k-1} + u_{2i-22j2k-1}}{2} \ , \\
u_{2i-12j-12k-1} &= \frac{u_{2i2j-12k-1} + u_{2i-22j-12k-1}}{2} \ .
\end{aligned}
$$

Die Prolongationsoperatoren für die anderen Geschwindigkeitskomponenten ergeben sich in entsprechender Weise.

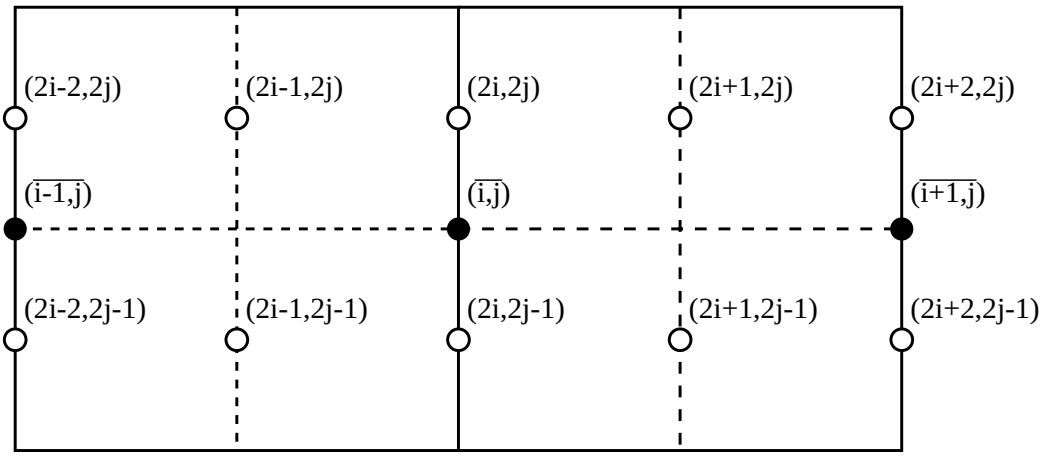

Abbildung 4.4: Zweidimensionales Beispiel der räumlichen Anordnung der Geschwindigkeit in x-Richtung auf dem Feingitter Ω_{ij} (nichtausgefüllte Kreise und gestrichelte Linien) und auf dem Grobgitter $\bar{\Omega}_{ij}$ (ausgefüllte Kreise und durchgezogene Linien).

Zur Restriktion der Temperatur und des Drucks werden die Werte der acht Gittervolumen des Feingitters, die zu einem Gittervolumen des Grobgitters gehören, gemittelt, z.B.

$$\bar{T}_{ijk} = \frac{T_{2i2j2k} + T_{2i-12j2k} + T_{2i2j-12k} + \cdots + T_{2i-12j-12k-1}}{8} ,$$

und entsprechend für den Druck. Die Geschwindigkeit auf dem Feingitter wird in Richtung der Geschwindigkeitskomponente durch das Inverse einer linearen Interpolation gewichtet und in den dazu senkrechten Richtungen gemittelt, z.B.

$$\bar{u}_{ijk} = \frac{\tilde{u}_{2i-1jk} + 2\tilde{u}_{2ijk} + \tilde{u}_{2i+1jk}}{4} ,$$

mit

$$\tilde{u}_{2ijk} = \frac{u_{2i2j2k} + u_{2i2j-12k} + u_{2i2j2k-1} + u_{2i2j-12k-1}}{4} ,$$

und entsprechend für die anderen Geschwindigkeitskomponenten. Neben den Variablen T, p und $\vec{v}$ müssen ebenfalls die Defekte des Feingitters auf das Grobgitter übertragen werden. Die oben beschriebenen Restriktionsoperatoren werden sowohl für die Variablen als auch für die Defekte benutzt. Mit diesen Prolongationsoperatoren ergibt sich $m_P = 2$ und $m_R = 1$, so daß Bedingung (4.15) für Differentialgleichungen zweiter Ordnung erfüllt ist.

In Problemen mit stark variablen Koeffizienten sind einfache Transferoperatoren zwischen Fein- und Grobgitter, wie sie oben beschrieben wurden, ausreichend für die Variablen, die im Zentrum der Gittervolumen definiert sind. Für die Variablen an Grenzflächen der Gittervolumen sollten dagegen Transferoperatoren benutzt werden, die von der zu lösenden Matrix abhängen [*Wesseling*, 1988, 1992; *Khalil und Wesseling*, 1992]. Bei einem Gitter mit versetzter Anordnung der Variablen ist dieses für die Geschwindigkeitskomponenten der Fall. *Alcouffe et al.* [1981] haben Prolongations- und Restriktionsoperatoren vorgestellt, die gewährleisten, daß bei der Prolongation und Restriktion eine kontinuierliche Spannung an den Grenzflächen der Gittervolumen erhalten bleibt, indem anstelle der linearen Interpolation in Richtung der jeweiligen Geschwindigkeitskomponente eine mit den Viskositäten in den Gittervolumen gewichtete Interpolation benutzt wird, z.B.

$$u_{2i-12j2k} = \frac{\eta_{2i2j2k} u_{2i2j2k} + \eta_{2i-12j2k} u_{2i-22j2k}}{\eta_{2i2j2k} + \eta_{2i-12j2k}} ,$$

und in entsprechender Weise für die anderen Geschwindigkeitskomponenten. Als Restriktion wird das Inverse dieser Interpolation verwendet. Ich habe Prolongations- und Restriktionsoperatoren dieser Art ausprobiert, es haben sich aber keine signifikanten Unterschiede zu “normalen” Transferoperatoren, wie sie weiter oben beschrieben wurden, gezeigt. Deshalb sind letztendlich die oben beschriebenen Prolongations- und Restriktionsoperatoren implementiert worden.

4.2.6 Approximation der Grobgittergleichungen

In Mehrgitterverfahren wird die Gleichung auf dem Feingitter (4.8) durch Gleichungen auf Grobgittern approximiert. Zur Bestimmung der Grobgittergleichungen gibt es zwei unterschiedliche Ansätze. In der sogenannten “Discretization Coarse Grid” (DCG)-Approximation [*Wesseling*, 1992] werden die Grobgittergleichungen in der gleichen Weise wie die Gleichungen des Feingitters aus der Diskretisierung der Differentialgleichung gewonnen. Deshalb ist diese Art der Approximation sehr einfach, sie kann aber sehr ungenau auf Gittern mit wenigen Gitterpunkten sein, wenn die Differentialgleichung stark variable Koeffizienten enthält.

Eine Alternative ist die sogenannte “Galerkin Coarse Grid”-Approximation [*Wesseling*, 1992], in der die Grobgittergleichungen aus den Gleichungen des Feingitters gewonnen werden. Die Gleichungsmatrix $\bar{A}$ auf dem Grobgitter wird aus der Matrix A des Feingitters berechnet,

$$\bar{A} = RAP \,,$$

mit R und P Restriktions- und Prolongationsoperatoren. Dieses Verfahren wird häufig für Differentialgleichungen mit stark variablen Koeffizienten verwendet [u.a. *Alcouffe et al.*, 1981; *Dendy*, 1982, 1987; *Wesseling*, 1988; *Khalil und Wesseling*, 1992; *Zeng und Wesseling*, 1994]. Bei dieser Approximation der Grobgittergleichungen hängt die Struktur der Matrizen auf den Grobgittern allerdings von der Wahl der Restriktions- und Prolongationsoperatoren ab. Um zu vermeiden, daß ein Großteil des Rechenaufwands, der durch die Berechnungen auf den Grobgittern mit weniger Gitterpunkten als das Feingitter eingespart wird, durch die komplizierte Struktur der Grobgittermatrizen wieder aufgebraucht wird, ist es wichtig, Restriktions- und Prolongationsoperatoren zu verwenden, die die Struktur der Matrix so wenig wie möglich vergrößern. Solche Transferoperatoren für die zweidimensionale Navier-Stokes-Gleichung werden von *Zeng und Wesseling* [1994] vorgestellt.

Aus Gründen der Einfachheit wird die DCG-Approximation verwendet. Um die Grobgittergleichungen aus der Diskretisierung der Differentialgleichungen zu bestimmen, muß die Viskosität auf allen Gittern bekannt sein. Auf dem feinsten Gitter wird die Viskosität im Zentrum der Gittervolumen aus der Temperatur- und Tiefenabhängigkeit nach (3.26) oder (3.26a) berechnet und die Viskositäten an den Seitenrändern aus den Viskositäten im Zentrum der Gittervolumen interpoliert (siehe Abschnitt 4.1.2). Die Viskositäten auf den Grobgittern werden dann durch Restriktion der Viskosität des Feingitters auf die Grobgitter bestimmt. Die Viskosität im Mittelpunkt der Grobgittervolumen ergibt sich durch Mittelung der Viskositäten im Zentrum der entsprechenden acht Feingittervolumen,

$$\bar{\eta}_{ijk} = \frac{\eta_{2i2j2k} + \eta_{2i-12j2k} + \eta_{2i2j-12k} + \cdots + \eta_{2i-12j-12k-1}}{8} \,. \tag{4.16}$$

Die Viskositäten an den Seitenrändern der Grobgittervolumen werden durch das Inverse einer bilinearen Interpolation aus den entsprechenden Viskositäten des Feingitters bestimmt.

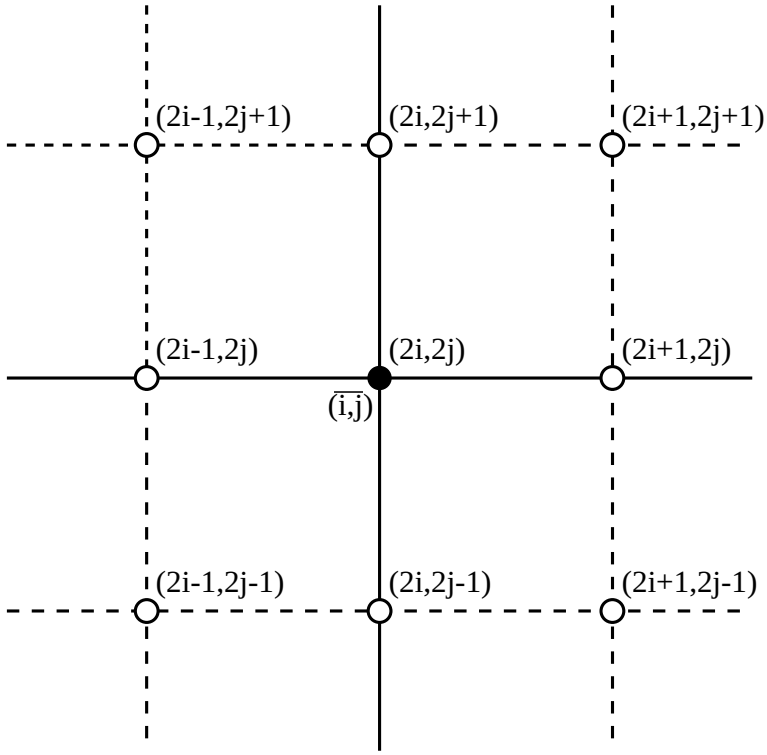

Abbildung 4.5: Zweidimensionales Beispiel der räumlichen Anordnung der Viskosität η^{xy} an den Grenzflächen der Gittervolumen auf dem Feingitter Ω_{ij} (nichtausgefüllte Kreise und gestrichelte Linien) und auf dem Grobgitter $\bar{\Omega}_{ij}$ (ausgefüllte Kreise und durchgezogene Linien).

Die räumliche Anordnung dieser Viskositäten auf dem Fein- und Grobgitter ist in Abbildung 4.5 dargestellt. Damit ergeben sich folgende Gleichungen für die Restriktion dieser Viskositäten,

$$\begin{aligned}\bar{\eta}^{xy}_{ijk} = & \frac{\tilde{\eta}^{xy}_{2i-12j-12k} + 2\tilde{\eta}^{xy}_{2i2j-12k} + \tilde{\eta}^{xy}_{2i+12j-12k}}{16} + \\ & \frac{2\tilde{\eta}^{xy}_{2i-12j2k} + 4\tilde{\eta}^{xy}_{2i2j2k} + 2\tilde{\eta}^{xy}_{2i+12j2k}}{16} + \\ & \frac{\tilde{\eta}^{xy}_{2i-12j+12k} + 2\tilde{\eta}^{xy}_{2i2j+12k} + \tilde{\eta}^{xy}_{2i+12j+12k}}{16}\,,\end{aligned} \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}\bar{\eta}^{xz}_{ijk} = & \frac{\tilde{\eta}^{xz}_{2i-12j2k-1} + 2\tilde{\eta}^{xz}_{2i2j2k-1} + \tilde{\eta}^{xz}_{2i+12j2k-1}}{16} + \\ & \frac{2\tilde{\eta}^{xz}_{2i-12j2k} + 4\tilde{\eta}^{xz}_{2i2j2k} + 2\tilde{\eta}^{xz}_{2i+12j2k}}{16} + \\ & \frac{\tilde{\eta}^{xz}_{2i-12j2k+1} + 2\tilde{\eta}^{xz}_{2i2j2k+1} + \tilde{\eta}^{xz}_{2i+12j2k+1}}{16}\,,\end{aligned} \tag{4.18}$$

$$\overline{\eta}^{yz}_{ijk} = \frac{\tilde{\eta}^{yz}_{2i2j-12k-1} + 2\tilde{\eta}^{yz}_{2i2j2k-1} + \tilde{\eta}^{yz}_{2i2j+12k-1}}{16} + \frac{2\tilde{\eta}^{yz}_{2i2j-12k} + 4\tilde{\eta}^{yz}_{2i2j2k} + 2\tilde{\eta}^{yz}_{2i2j+12k}}{16} + \frac{\tilde{\eta}^{yz}_{2i2j-12k+1} + 2\tilde{\eta}^{yz}_{2i2j2k+1} + \tilde{\eta}^{yz}_{2i2j+12k+1}}{16}, \tag{4.19}$$

mit

$$\begin{aligned}
\tilde{\eta}^{xy}_{2i2j2k} &= \frac{\eta^{xy}_{2i2j2k} + \eta^{xy}_{2i2j2k-1}}{2}, \\
\tilde{\eta}^{xz}_{2i2j2k} &= \frac{\eta^{xz}_{2i2j2k} + \eta^{xz}_{2i2j-12k}}{2}, \\
\tilde{\eta}^{yz}_{2i2j2k} &= \frac{\eta^{yz}_{2i2j2k} + \eta^{yz}_{2i-12j2k}}{2}.
\end{aligned}$$

Die Wahl der Viskositätsrestriktion ist entscheidend für die Stabilität des numerischen Verfahrens bei starken Viskositätsvariationen. Es wurden unterschiedliche Viskositätsrestriktionen ausprobiert. Die hier vorgestellte Restriktion hat sich in den durchgeführten Tests als die beste erwiesen. Eine ausführliche Diskussion wird in Abschnitt 4.4.1 gegeben.

4.3 Lokale Gitterverfeinerungen

4.3.1 Erzeugung nicht-äquidistanter Gitter

In typischen Konvektionsproblemen variiert die Lösung sehr stark in einigen Bereichen des Rechengebiets, wie z.B. in Grenzschichten, während sie sich anderswo nur wenig ändert. Dieses legt nahe, ein nicht-äquidistantes numerisches Gitter zu verwenden, um dort, wo es erforderlich ist, eine gute Auflösung zu bekommen, insgesamt aber den Rechenaufwand moderat zu halten. In normalen Finite-Differenzen- oder Finite-Volumen-Verfahren erfordern nicht-äquidistante Gitterabstände kompliziertere Differenzenformeln zur Diskretisierung der Gleichungen als bei äquidistanten Gitterabständen. Die numerische Lösung der diskretisierten Gleichungen wird deshalb deutlich aufwendiger. Aus diesem Grund werden häufig äquidistante Gitter verwendet.

Mehrgitterverfahren bieten dagegen eine sehr effiziente und flexible Möglichkeit zur Erzeugung lokaler Gitterverfeinerungen, indem das nicht-äquidistante Gitter aus äquidistanten Teilgittern zusammengesetzt wird. Dazu werden dieselben Gitter benutzt, die in Mehrgitterverfahren zur Iteration verwendet werden. Lokale Gitterverfeinerungen werden erzeugt, indem sich die äquidistanten Gitter mit den feinsten Gitterabständen nicht mehr über das gesamte Rechengebiet, sondern nur noch über die Bereiche erstrecken, in denen eine feine Gitterauflösung erforderlich ist. Ein zweidimensionales Beispiel zeigt Abbildung 4.6. Weil

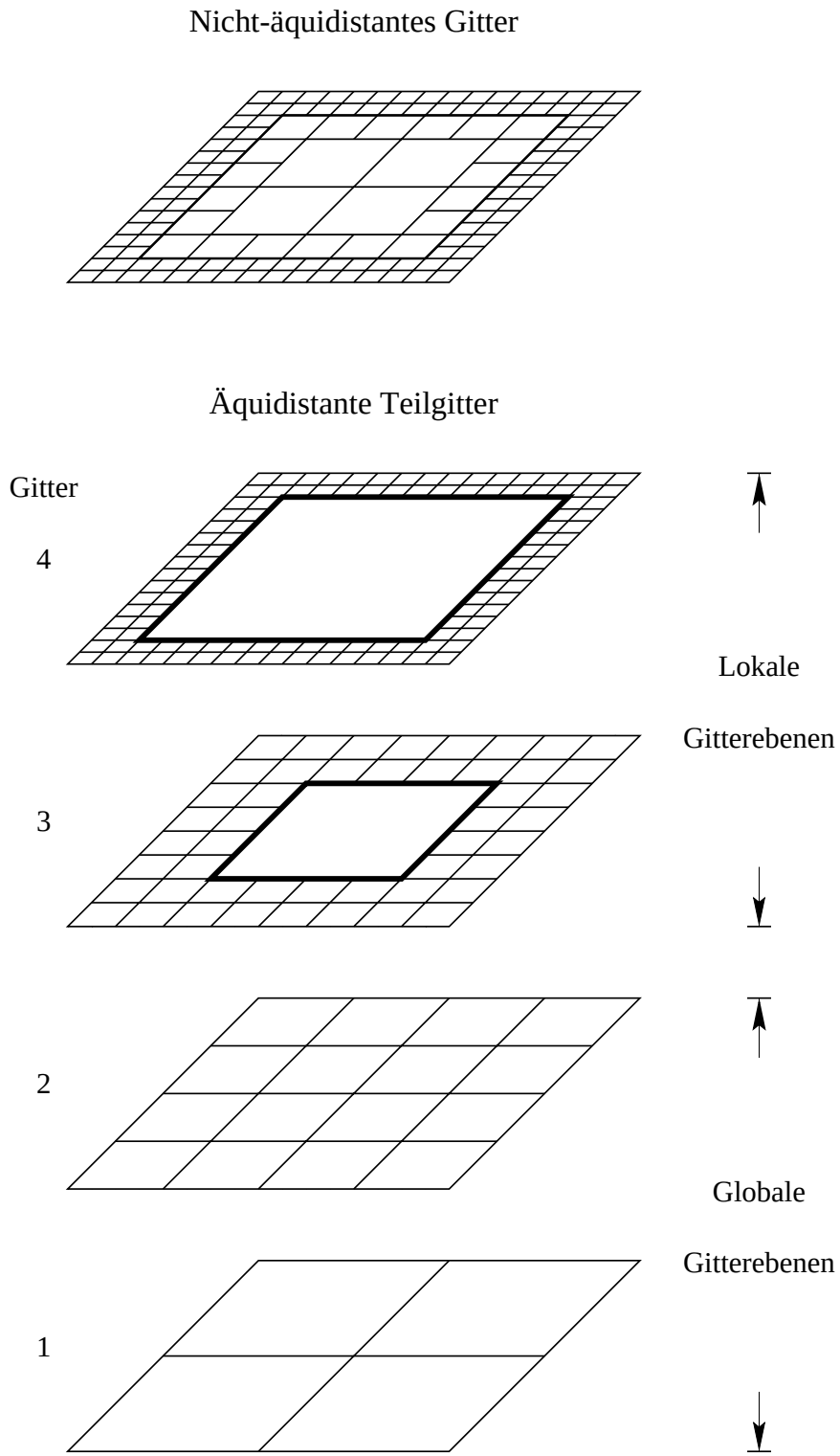

Abbildung 4.6: Zweidimensionales Beispiel der Erzeugung eines nicht-äquidistanten Gitters (oben) durch mehrere äquidistante Teilgitter (unten). An den dick markierten Gitterrändern werden Werte vom darunterliegenden Gitter interpoliert (siehe Text).

der Iterationsprozeß des Mehrgitterverfahrens auch weiterhin nur auf äquidistanten Gittern stattfindet, muß das Diskretisierungsschema nicht verändert werden, wenn Gitterverfeinerungen eingeführt werden. Die diskretisierten Gleichungen bleiben damit so einfach wie bei äquidistanten Gittern. Diese Methode der Erzeugung lokaler Gitterverfeinerungen hat zusätzlich den Vorteil, daß auch komplizierte Gitterstrukturen sehr einfach implementiert werden können. Prinzipiell besteht damit die Möglichkeit, zusätzliche Gitterverfeinerungen während des Iterationsprozesses einzuführen oder zu entfernen und dadurch ein Verfahren zur adaptiven Gittererzeugung zu entwickeln.

4.3.2 Modifikation des Mehrgitterverfahrens

Bei der oben beschriebenen Methode der Erzeugung lokaler Gitterverfeinerungen in Mehrgitterverfahren haben die Gitter zwei unterschiedliche Aufgaben zu erfüllen. In den Bereichen des Rechengebiets, wo weitere feinere Gitter existieren, wird auf dem Gitter eine Grobgitterkorrektur für die Lösung auf den feineren Gittern bestimmt, während in den anderen Bereichen auf dem Gitter die Feingitterlösung berechnet wird. Dieses führt zu Problemen beim linearen Mehrgitteralgorithmus, weil in einigen Bereichen des Gitters die volle Lösung, in anderen Bereichen aber nur der Fehler der Feingitterlösung berechnet werden müßte. Deshalb kann diese Gitterverfeinerungstechnik nur in Verbindung mit dem nichtlinearen FAS-Algorithmus genutzt werden. Im FAS-Algorithmus ist es möglich, in verschiedenen Bereichen des Rechengebiets unterschiedliche feinste Gitter zu haben, weil auf allen Gittern die volle Lösung berechnet wird. Die einzige Modifikation ist bei der Berechnung des Lastterms nötig. In Bereichen mit weiteren feineren Gittern berechnet sich der Lastterm gemäß (4.11) aus der Restriktion des Defekts und der Näherungslösung des Feingitters, während sich der Lastterm in den anderen Bereichen direkt aus der Diskretisierung der Differentialgleichung ergibt. Eine ausführliche Beschreibung dieser Methode zur Erzeugung lokaler Gitterverfeinerungen findet sich bei *Brandt* [1977] und *Bai und Brandt* [1987].

Wenn sich zur Erzeugung lokaler Gitterverfeinerungen die feinsten Gitter nur noch über Teilbereiche des Rechengebiets erstrecken, nimmt die Anzahl der Gitterpunkte und damit der Rechenaufwand zur Lösung der Gleichungen auf gröberen Gittern nicht unbedingt ab. Dieses ist problematisch bei Mehrgitterzyklen, die die Grobgitter in einem Zyklus häufiger durchlaufen (F- und W-Zyklen), weil dadurch der Rechenaufwand für einen Mehrgitterzyklus überproportional steigt. Deshalb wurde von *Bai und Brandt* [1987] ein modifizierter Mehrgitteralgorithmus vorgestellt. Dazu werden gleich mehrere nicht-äquidistante Gitter mit sukzessive abnehmender Gitterpunktzahl verwendet, die alle dieselbe nicht-äquidistante Gitterstruktur haben. Beginnend mit dem gröbsten nicht-äquidistanten Gitter wird die Lösung auf allen nicht-äquidistanten Gittern durch Aufteilung der Gitter in äquidistante Teilgitter nach der oben beschriebenen Methode mit einem Mehrgitterverfahren berechnet, wobei jeweils die Lösung des nächst gröberen nicht-äquidistanten Gitters als Startlösung genommen wird. Dieser modifizierte Algorithmus behält auch bei lokalen Gitterverfeinerungen die normale Effizienz von Mehrgitterverfahren.

Hier wird ein einfacherer Ansatz gewählt, indem die Mehrgitterzyklen modifiziert werden. Auf globalen Gitterebenen, wo sich die Gitter über das gesamte Rechengebiet erstrecken, sind alle Mehrgitterzyklen erlaubt. Auf lokalen Gitterebenen mit Gittern, die auf Teilbereiche des Rechengebiets beschränkt sind, werden diese Mehrgitterzyklen in V-Zyklen umgewandelt. Weil V-Zyklen die Grobgitter in einem Zyklus nur einmal durchlaufen, wird die Zunahme des Rechenaufwands durch lokale Gitterverfeinerungen durch diese Modifikation minimiert.

4.3.3 Berechnung innerer Randwerte

Wenn sich Gitter nur über Teilbereiche des Rechengebiets erstrecken, haben sie Gittergrenzen, die nicht mit den Rändern des Rechengebiets zusammenfallen (dicke Linien in Abbildung 4.6). Deshalb sind an diesen inneren Gitterrändern keine Randbedingungen definiert. Um dennoch die Gleichungen auf diesen Gittern lösen zu können, werden an den inneren Gitterrändern Werte für T, p und $\vec{v}$ interpoliert. Abbildung 4.7 zeigt die räumliche Anordnung der interpolierten Werte in einem nicht-äqudistanten Gitter. Die Genauigkeit der numerischen Lösung hängt von der Genauigkeit ab, mit der diese Werte interpoliert werden. Das unterscheidet diese Interpolation von normalen Restriktions- und Prolongationsoperatoren, die keinen Einfluß auf die Genauigkeit der Feingitterlösung haben, weil nur Korrekturen und deshalb bei Konvergenz nur noch Nullen interpoliert werden. An den inneren Gitterrändern der lokalen Gitterverfeinerungen wird dagegen die volle Lösung interpoliert. Der Fehler die-

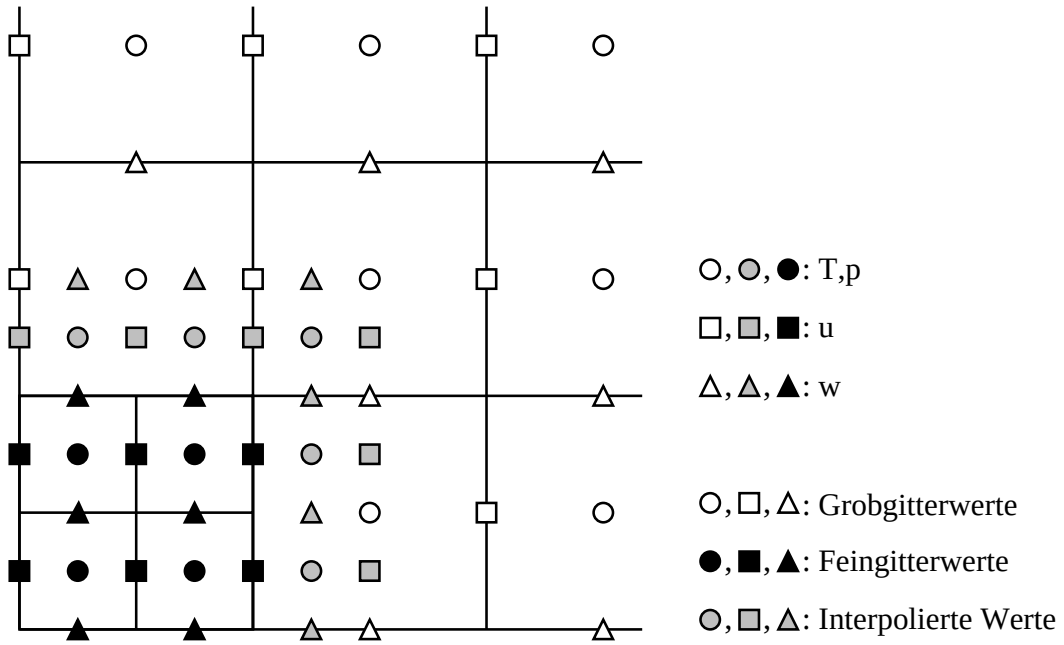

Abbildung 4.7: Zweidimensionales Beispiel der räumlichen Anordnung der Variablen auf einem nicht-äquidistanten Gitter. An inneren Gittergrenzen des Feingitters werden Werte vom Grobgitter interpoliert.

ser Interpolation sollte nicht größer als der lokale Diskretisierungsfehler der Gleichungen sein, der von der Größenordnung $m+p$ mit m Ordnung der Differentialgleichung und p Approximationsordnung ist [*Bai und Brandt*, 1987]. In diesem Fall mit $m = p = 2$ sollte die Interpolation der inneren Randwerte deshalb mindestens von vierter Fehlerordnung sein. Aus diesem Grund habe ich eine kubische Interpolation implementiert. Ein eindimensionales Beispiel für eine solche Interpolation ist in Abbildung 4.8 dargestellt.

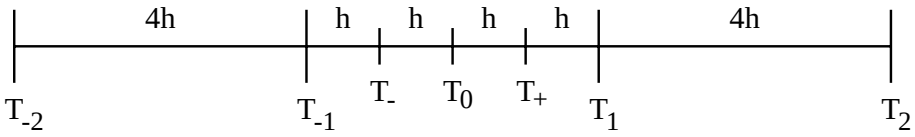

Abbildung 4.8: Eindimensionales Beispiel für eine kubische Interpolation.

Die interpolierten Werte berechnen sich wie folgt,

$$
\begin{aligned}
T_- &= \frac{-7T_{-2}+105T_{-1}+35T_1-5T_2}{128} && +\mathrm{O}\left(h^4\right) \ , \\
T_0 &= \frac{-T_{-2}+9T_{-1}+9T_1-T_2}{16} && +\mathrm{O}\left(h^4\right) \ , \\
T_+ &= \frac{-5T_{-2}+35T_{-1}+105T_1-7T_2}{128} && +\mathrm{O}\left(h^4\right) \ .
\end{aligned}
$$

Eine Erweiterung dieser Interpolation auf drei Raumdimensionen wird zur Berechnung der inneren Randwerte der Gitterverfeinerungen benutzt. Weil bei der Interpolation auch Werte aus Bereichen des Grobgitters verwendet werden, die von der lokalen Gitterverfeinerung überdeckt werden, werden die Randwerte nach jedem Iterationsschritt, der auf der Gitterverfeinerung ausgeführt wird, angepaßt. Dazu werden nach der Iteration zuerst die neuen Werte von der Gitterverfeinerung auf das Grobgitter übertragen und dann neue Randwerte für die Gitterverfeinerung aus den Werten des Grobgitters interpoliert.

4.4 Konvergenzeigenschaften des Mehrgitterverfahrens

4.4.1 Konvergenztest für stark variable Viskosität

Frühere Untersuchungen haben gezeigt, daß Mehrgitterverfahren Konvergenzprobleme aufweisen, wenn die Viskosität stark variiert [*Tackley*, 1994; *Trompert und Hansen*, 1996; *Auth und Harder*, 1999]. In diesem Abschnitt werden deshalb verschiedene Varianten des Mehrgitterverfahrens getestet und deren Konvergenzverhalten in Abhängigkeit von der Größe der Viskositätsvariationen bestimmt, um die bestmögliche Implementierung für geodynamische Problemstellungen zu finden.

Dazu sind Konvergenztests des Mehrgitterverfahrens durchgeführt worden, indem die Temperatur fest vorgegeben und nur die Kontinuitäts- und Stokes-Gleichungen gelöst wurden. Die vorgegebenen Temperaturfelder stammen aus einer dreidimensionalen, zeitabhängigen Konvektionsrechnung in einer geschlossenen Box mit konstanter Temperatur an der

Oberfläche und am Boden. Beide Randflächen sind scherspannungsfrei. An allen Seitenflächen wurden Spiegelrandbedingungen angenommen. Die Viskosität ist temperaturabhängig gemäß (3.26a) mit $E_4 = \ln(10^5)$. Die Rayleighzahl beträgt $\mathrm{Ra} = 1000$, basierend auf der Viskosität $\eta(T = 0)$. Die Konvektionsrechnung wurde von einer konduktiven Temperaturverteilung gestartet, auf die kleine Störungen addiert wurden. Zur numerischen Lösung wurde das Modellgebiet in $64 \times 64 \times 64$ äquidistante Gittervolumen aufgeteilt.

Ich habe drei unterschiedliche Temperaturfelder aus dieser Konvektionsrechnung für die Konvergenztests ausgewählt. Temperaturfeld 1 (Abbildung 4.9, oben) entstammt einem frühen Zeitpunkt der Zeitentwicklung, an dem die ersten Instabilitäten aus der thermischen Grenzschicht am Boden der Box aufsteigen. Temperaturfeld 2 (Abbildung 4.9, mitte) gehört zu einem transienten Stadium der Zeitentwicklung, in dem sich die Strömung umorganisiert. Temperaturfeld 3 (Abbildung 4.9, unten) zeigt zwei starke Aufströme unterhalb einer ausgeprägten thermischen Grenzschicht an der Oberfläche, die einen Großteil der Temperaturdifferenz zwischen Oberfläche und Boden der Box aufnimmt. Ich habe diese Temperaturfelder ausgewählt, weil sie eine unterschiedliche Verteilung von Viskositätsgradienten verursachen. In Temperaturfeld 1 variiert die Viskosität sehr stark in der unteren thermischen Grenzschicht und in den "Köpfen" der aufsteigenden Instabilitäten. Aufgrund der komplexen Struktur treten in Temperaturfeld 2 in der gesamten Box Viskositätsvariationen auf, die allerdings nicht so groß sind wie in Temperaturfeld 1. In Temperaturfeld 3 ist das Innere der Box nahezu isoviskos, weil ein Großteil der globalen Viskositätsänderung auf die obere thermische Grenzschicht konzentriert ist.

Obwohl die Temperatur in den Konvergenztests fest vorgegeben wird, variiere ich die Größe der Viskositätsgradienten in der Box durch Änderung der Temperaturabhängigkeit der Viskosität. Das Konvergenzverhalten des Mehrgitterverfahrens für unterschiedliche Mehrgitterzyklen zeigt Abbildung 4.10. Die Anzahl von Mehrgitterzyklen, die benötigt werden, um die anfängliche L^2-Norm des Residuums um acht Größenordnungen zu reduzieren, ist als Funktion des globalen Viskositätskontrastes zwischen Oberfläche und Boden der Box dargestellt. V-, F- und W-Zyklen mit zwei Vor- und Nachglättern sind dabei verwendet worden. Zusätzlich habe ich Modifikationen der V- und W-Zyklen getestet. Beim modifizierten W-Zyklus wird die Anzahl der Vor- und Nachglätter von einem Gitter zum nächst gröberen Gitter jeweils um den Faktor 2 erhöht. Im modifizierten V-Zyklus werden sie sukzessive um den Faktor 4 erhöht, so daß die modifizierten V- und W-Zyklen insgesamt die gleiche Anzahl an Glättungsschritten auf den gröberen Gittern haben. F-, W- und die modifizierten V- und W-Zyklen sind etwa um 15, 20 und 50 Prozent rechenaufwendiger als V-Zyklen.

Die Konvergenzrate des Mehrgitterverfahrens nimmt mit steigendem Viskositätskontrast für alle Mehrgitterzyklen ab. Oberhalb eines bestimmten Viskositätskontrastes divergiert das Verfahren. Man erkennt aber, daß das Mehrgitterverfahren stabiler wird, wenn aufwendigere Mehrgitterzyklen als der einfachste V-Zyklus verwendet werden. Dieses stimmt mit Schlußfolgerungen überein, die aus zweidimensionalen Ergebnissen gewonnen wurden [*Auth und Harder*, 1999]. Ein Vergleich der modifizierten V- und W-Zyklen zeigt, daß die Stabilität des Mehrgitterverfahrens nicht durch die Reihenfolge, in der die gröberen Gitter durchlau-

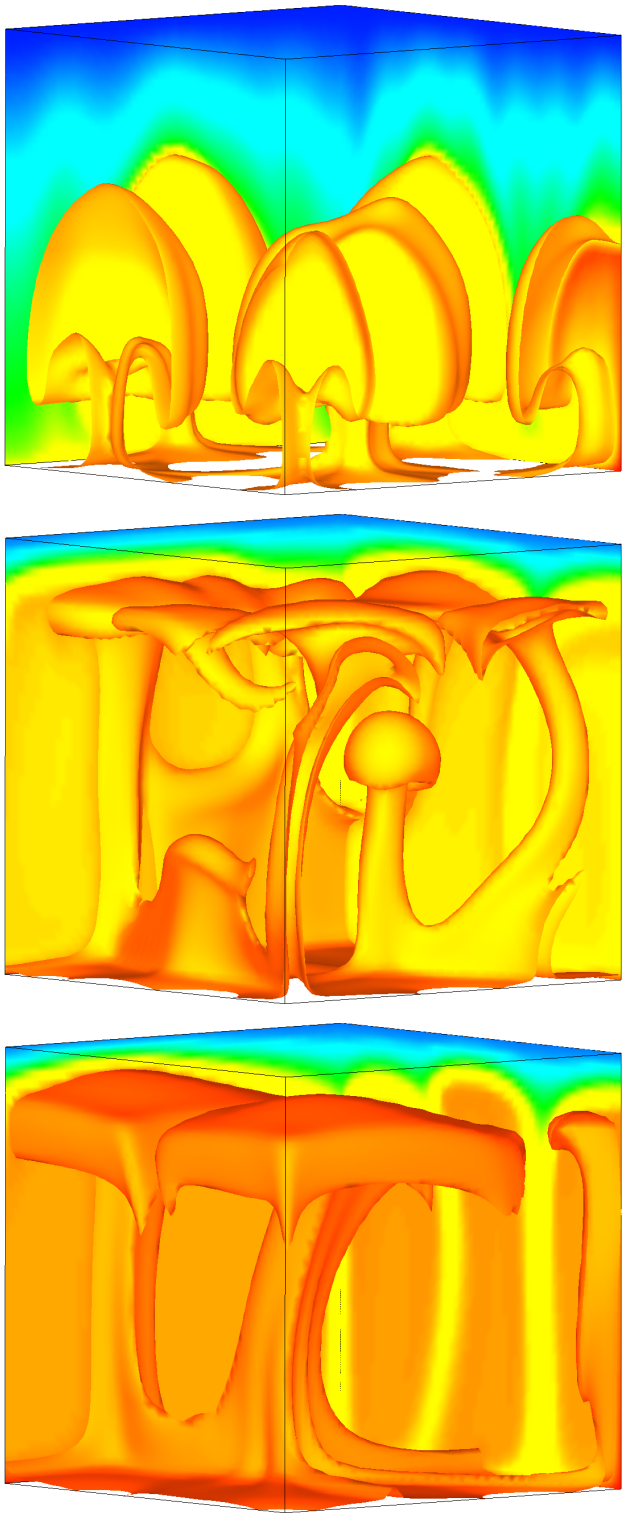

Abbildung 4.9: Temperaturfelder aus einer dreidimensionalen, zeitabhängigen Konvektionsrechnung mit variabler Viskosität zum Zeitpunkt $t \approx 0.0004$ (oben, Isofläche $T = 0.85$), $t \approx 0.032$ (mitte, Isofläche $T = 0.88$) und $t \approx 0.060$ (unten, Isofläche $T = 0.90$).

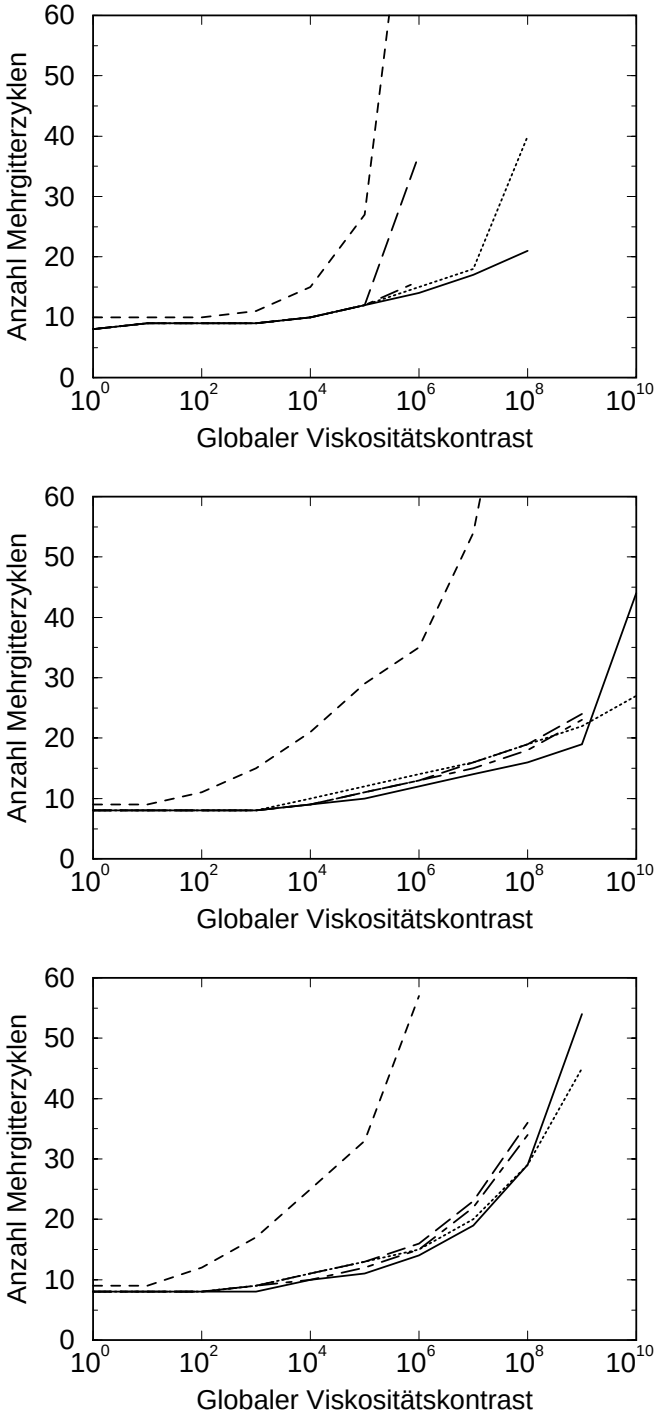

Abbildung 4.10: Konvergenzverhalten des Mehrgitterverfahrens für V-Zyklen (gestrichelt), F-Zyklen (lang gestrichelt), W-Zyklen (gepunktet-gestrichelt), modifizierte V-Zyklen (gepunktet) und modifizierte W-Zyklen (durchgezogen) unter Verwendung von Temperaturfeld 1 (oben), Temperaturfeld 2 (mitte) und Temperaturfeld 3 (unten). Die Kurven enden, wenn Divergenz des Mehrgitterverfahrens eintritt.

fen werden, sondern vielmehr durch die Gesamtzahl der Glättungsschritte auf den gröberen Gittern kontrolliert wird. Wenn in den Mehrgitterzyklen die Gesamtzahl der Iterationen auf jedem Gitter ausgeglichen wird, ist die Stabilität von V- und W-Zyklen ähnlich.

Die Konvergenzraten der modifizierten V- und W-Zyklen sind für Temperaturfeld 1 akzeptabel bis zu globalen Viskositätsvariationen von 10^8 (Abbildung 4.10, oben). Diese globale Viskositätsvariation entspricht lokalen Viskositätskontrasten von etwa 24000 über ein Gittervolumen in der unteren thermischen Grenzschicht. Für die Temperaturfelder 2 und 3 werden globale Viskositätsvariationen von 10^{10} bzw. 10^9 erreicht (Abbildung 4.10, mitte und unten). Diese im Vergleich zu Temperaturfeld 1 größeren globalen Viskositätsvariationen entsprechen aber lediglich lokalen Viskositätskontrasten von 1700 bzw. 700 über ein Gittervolumen, die deutlich kleiner sind als der lokale Viskositätskontrast, der für Temperaturfeld 1 erreicht wird. Dieses macht deutlich, daß das Konvergenzverhalten von Mehrgitterverfahren nicht ausschließlich durch die Größe der globalen oder lokalen Viskositätsvariationen kontrolliert wird. Es scheint vielmehr so zu sein, daß die räumliche Verteilung der Viskositätsvariationen eine ebenso wichtige Rolle spielt.

Die Stabilität des Mehrgitterverfahrens ist äußerst sensitiv auf die Art der Viskositätsberechnung auf den gröberen Gittern. Ich habe unterschiedliche Methoden ausprobiert, zum einen die direkte Berechnung der Viskosität auf allen Gittern aus der Temperatur- und Tiefenabhängigkeit, zum anderen verschiedene Restriktionen der Viskosität des Feingitters auf die Grobgitter. Es hat sich herausgestellt, daß die Berechnung der Viskosität auf allen Gittern aus der funktionalen Abhängigkeit von Temperatur und Tiefe nicht geeignet ist, weil sie zu keinem stabilen Mehrgitterverfahren führt, wenn die Viskosität stark variiert. Entsprechende Ergebnisse haben sich bereits zuvor in zwei Dimensionen ergeben [*Auth und Harder*, 1999]. Die Ergebnisse für verschiedene Restriktionsoperatoren zur Berechnung der Viskosität der Grobgitter aus der Viskosität des Feingitters sind in Abbildung 4.11 dargestellt. Dabei sind die Ergebnisse für die drei Temperaturfelder zusammengefaßt worden, indem für jeden globalen Viskositätskontrast aus den drei Einzelergebnissen die maximal benötigte Anzahl von Mehrgitterzyklen genommen wurde. Dieses ist sinnvoll, weil das numerische Verfahren zur Berechnung einer Zeitentwicklung für alle Temperaturfelder stabil sein muß und deshalb die geringste Konvergenzrate für die drei Temperaturfelder die Stabilität des Verfahrens insgesamt bestimmt. Es hat sich herausgestellt, daß die Stabilität des Mehrgitterverfahrens für Temperaturfeld 1 größer wird, wenn aufwendigere Restriktionsoperatoren verwendet werden, während für die Temperaturfelder 2 und 3 genau das Gegenteil der Fall ist. Deshalb hat im Endeffekt die relativ einfache Viskositätsrestriktion (4.16)–(4.19) im Mittel für alle getesteten Temperaturfelder die größte Stabilität geliefert.

Diese Konvergenztests zeigen, daß die Konvergenzrate des Mehrgitterverfahrens für globale Viskositätsvariationen bis wenigstens acht Größenordnungen akzeptabel ist, wenn modifizierte V- oder W-Zyklen verwendet werden. Konvektionsrechnungen mit noch größeren Viskositätskontrasten sind möglich, wenn die Anzahl der Vor- und Nachglätter im Mehrgitteralgorithmus erhöht wird, was allerdings gleichzeitig eine entsprechende Erhöhung des Rechenaufwands bedeutet. *Trompert und Hansen* [1996] haben einen alternativen Ansatz

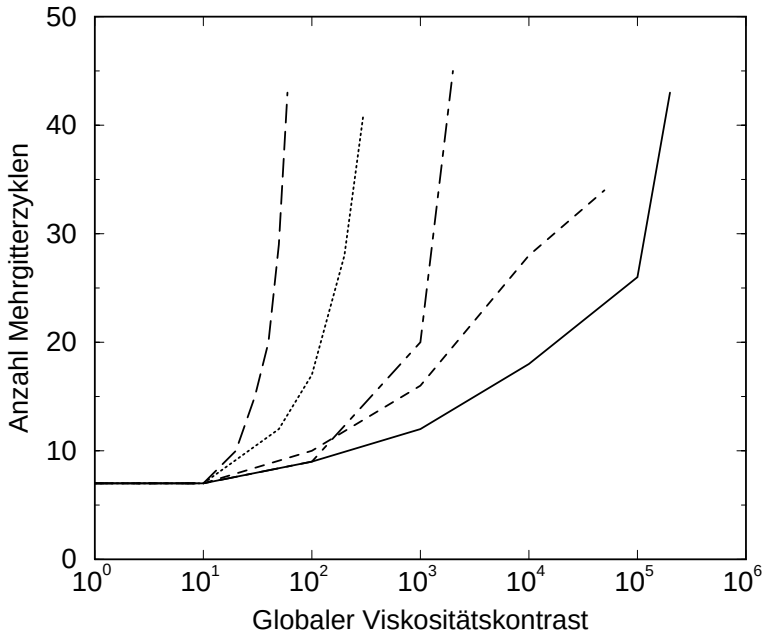

Abbildung 4.11: Konvergenzverhalten des Mehrgitterverfahrens für V-Zyklen mit zwei Vor- und Nachglättern und unterschiedlicher Restriktion der Viskositäten: (a) Restriktionen (4.16)–(4.19) (durchgezogen), (b) Restriktion (4.16) und Berechnung der Viskositäten an den Seitenrändern aus den Viskositäten im Zentrum der Grobgittervolumen (gestrichelt), (c) Restriktion (4.16) und Berechnung der Viskosität an den Seitenrändern durch Mittelung der umliegenden Viskositäten im Zentrum der Feingittervolumen (gestricheltgepunktet), (d) Kombination von (a) und (c) (gepunktet), (e) Berechnung aller Viskositäten durch Mittelung der umliegenden Viskositäten im Zentrum und an den Seitenrändern der Feingittervolumen (lang-gestrichelt). Die Ergebnisse für die drei Temperaturfelder in Abbildung 4.9 sind durch Darstellung der maximal benötigten Anzahl von Mehrgitterzyklen zusammengefaßt worden.

zur Verbesserung der Stabilität von Mehrgitterverfahren vorgestellt, indem die Druckgleichung (4.12) und die Druckkorrekturgleichung (4.13) im Glättungsschritt des SIMPLER-Verfahrens genauer als mit nur einer Gauß-Seidel-Iteration gelöst werden. Das beste Resultat erzielen sie, wenn diese Gleichungen wiederum durch Mehrgitterverfahren gelöst werden [*Trompert und Hansen*, 1996]. Allerdings macht auch diese Modifikation das numerische Verfahren deutlich rechenaufwendiger.

4.4.2 Rechenzeit

Mehrgitterverfahren haben gegenüber anderen numerischen Verfahren den Vorteil, daß ihre Konvergenzrate unabhängig von der Problemgröße ist, d.h. daß die Rechenzeit zur Lösung

des Problems nur linear mit der Anzahl der Unbekannten anwächst. Bei anderen numerischen Verfahren nimmt die Rechenzeit dagegen stärker zu, bei direkten Lösungsverfahren z.B. mit der dritten Potenz der Anzahl der Unbekannten und selbst bei Verfahren, die auf der Fast-Fourier-Transformation beruhen, noch mit $N \log_2(N)$, wobei N die Anzahl der Unbekannten ist (siehe u.a. *Burden und Faires* [1993]). Dadurch werden Mehrgitterverfahren im Vergleich zu anderen numerischen Verfahren sehr effizient bei der Lösung großer Probleme mit vielen Unbekannten.

Um die Abhängigkeit der Konvergenzrate von der Anzahl der Unbekannten zu überprüfen, ist in Abbildung 4.12 die Rechenzeit, die benötigt wird, um die anfängliche L^2-Norm des Residuums der Kontinuitäts- und Stokes-Gleichung um acht Größenordnungen zu reduzieren, in Abhängigkeit von der Anzahl der Gittervolumen aufgetragen. Für alle untersuchten Gitterauflösungen werden acht Mehrgitterzyklen bis zur Konvergenz benötigt, so daß die Rechenzeit linear mit der Anzahl der Gittervolumen zunimmt. Die Konvergenzraten auf äquidistanten und nicht-äquidistanten Gittern sind ähnlich. Die leichte Erhöhung der Rechenzeit auf nicht-äquidistanten Gittern im Vergleich zur Rechenzeit auf äquidistanten Gittern ist eine Folge des numerischen Mehraufwands, der bei der Verwendung von lokalen Gitterver-

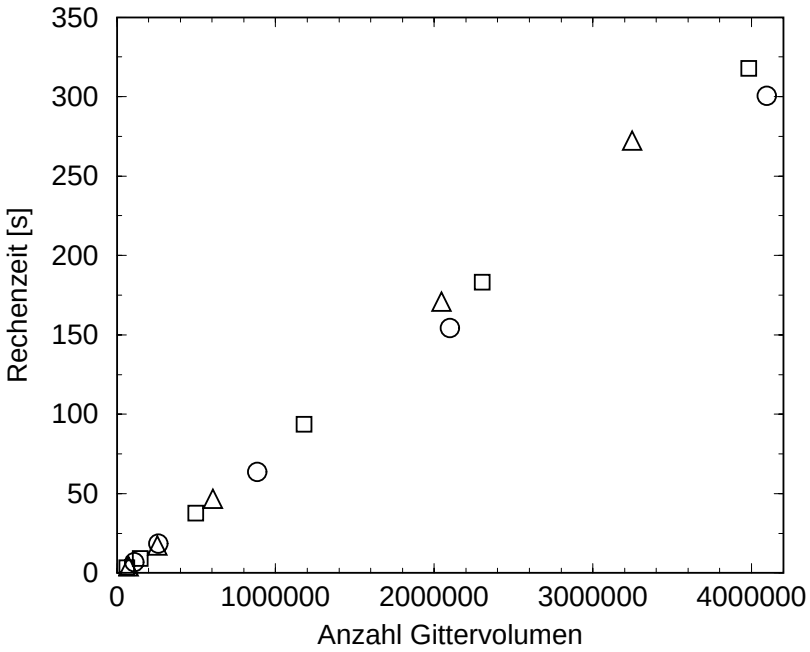

Abbildung 4.12: Rechenzeit zur Lösung der Kontinuitäts- und Stokes-Gleichung bei vorgegebener Temperaturverteilung als Funktion der Anzahl der Gittervolumen auf einem äquidistanten Gitter (Kreise) und auf nicht-äquidistanten Gittern mit einer (Quadrate) und zwei (Dreiecke) lokalen Gitterebenen. Als Mehrgitterzyklus wird ein V-Zyklus mit zwei Vor- und Nachglättern verwendet. Die vorgegebene Temperaturverteilung entspricht einem konduktiven Temperaturprofil mit kleinen Störungen.

feinerungen anfällt. Dazu gehören u.a. die Interpolation der inneren Randwerte der lokalen Gitterverfeinerungen nach jedem Glättungsschritt, der auf den lokalen Gitterebenen durchgeführt wird, und die damit verbundene vorhergehende Restriktion der aktuellen Lösung von den Gitterverfeinerungen auf das gröbere Gitter sowie weitere zusätzliche Berechnungen im numerischen Verfahren. Dieser Mehraufwand ist allerdings gering im Vergleich zum gesamten Rechenaufwand zur Lösung der Gleichungen. Bei herkömmlichen Verfahren, in denen die Gitterverfeinerungen durch eine nicht-äquidistante Diskretisierung der Gleichungen erzeugt werden, ist eine deutlich stärkere Erhöhung der Rechenzeit bei der Einführung lokaler Gitterverfeinerungen zu erwarten.

Die in Abbildung 4.12 aufgeführten Zeiten sind nicht repräsentativ für die Rechenzeit eines Zeitschritts in einer Konvektionsrechnung. Weil bei einer Zeitentwicklung die Lösung des letzten Zeitschritts als Startlösung für die Berechnung der Lösung zur neuen Zeit genommen werden kann, ist bereits zu Beginn des ersten Mehrgitterzyklus eine gute Näherungslösung vorhanden. Dadurch werden weniger Mehrgitterzyklen bis zur Konvergenz benötigt, so daß die Rechenzeit für einen Zeitschritt etwa um den Faktor 3–4 kleiner ist als die in Abbildung 4.12 angegebenen Zeiten.

4.5 Verifikation der numerischen Lösung

In diesem Abschnitt wird die Verifikation der numerischen Lösung beschrieben. Einzelne Teile des numerischen Verfahrens können durch analytische Betrachtungen auf ihre Richtigkeit überprüft werden. Bei konstanter oder exponentiell mit der Tiefe variierender Viskosität läßt sich für spezielle Temperaturverteilungen eine analytische Lösung der Kontinuitäts- und Stokes-Gleichung angeben. Ebenso kann die zeitliche Entwicklung der Temperatur bei reiner Wärmediffusion analytisch berechnet werden. Damit bieten sich Möglichkeiten, das numerische Lösungsverfahren der einzelnen Gleichungen an analytischen Lösungen zu testen. Alle Tests wurden mit Erfolg durchgeführt. Dieses liefert eine erste Bestätigung, daß die einzelnen Gleichungen separat numerisch korrekt gelöst werden.

Für das Gesamtverfahren existiert kein analytischer Test. Deshalb wird die numerische Lösung mit Benchmark-Resultaten verglichen, die sowohl für zweidimensionale (2-D) als auch für dreidimensionale (3-D) Konvektionsprobleme mit unendlicher Prandtlzahl veröffentlicht worden sind [*Blankenbach et al.*, 1989; *Busse et al.*, 1993]. Dazu werden global gemittelte Größen, wie die Nusseltzahl an der Oberfläche der Modellbox,

$$\mathrm{Nu} \;=\; -\frac{1}{l_x l_y}\int \frac{\partial T}{\partial z}(x,y,z=1)\,dx\,dy\;,$$

die mittlere Geschwindigkeit,

$$v_{rms} \;=\; \left(\frac{1}{l_x l_y}\int \left(u^2+v^2+w^2\right)\,dx\,dy\,dz\right)^{1/2}\;,$$

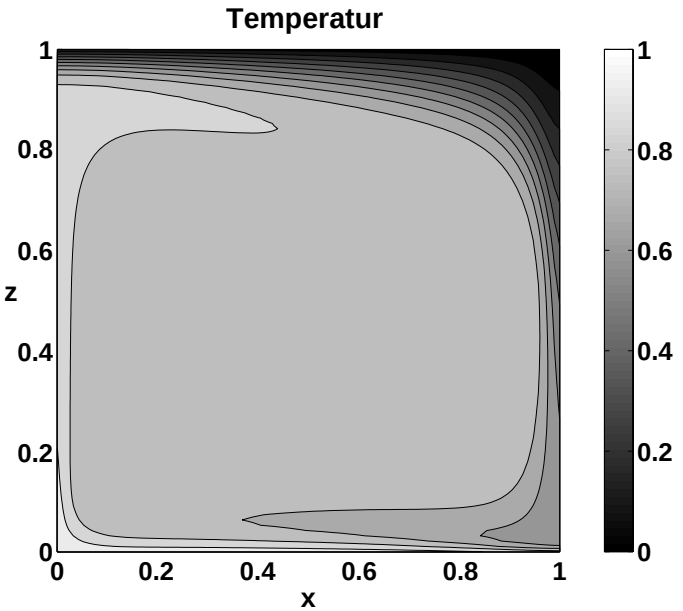

Abbildung 4.13: Stationäre 2-D Konvektion mit variabler Viskosität (Testfall 1).

und horizontal gemittelte Temperaturen,

$$\langle T \rangle_z = \frac{1}{l_x l_y} \int T(x,y,z)\, dx\, dy \,,$$

mit l_x and l_y skalierte horizontale Ausdehnung der Modellbox in x- und y-Richtung berechnet. Zusätzlich werden lokale Größen verglichen, wie Temperaturgradienten,

$$q = -\frac{\partial T}{\partial z} \,,$$

und Temperatur und Geschwindigkeit an bestimmten Punkten in der Modellbox, weil diese lokalen Größen eine genauere Information darüber geben, ob lokale Strukturen gut aufgelöst sind.

Ich habe insgesamt drei Testfälle untersucht, wobei ich für alle Testfälle Lösungen auf Gittern mit unterschiedlicher Zahl an Gitterpunkten berechnet habe, so daß eine Extrapolation der Resultate möglich ist. Testfall 1 entspricht Fall 2a in *Blankenbach et al.* [1989]. Stationäre 2-D Konvektion mit temperaturabhängiger Viskosität in einer quadratischen, geschlossenen Box mit scherspannungsfreien Rändern und fester Temperatur am oberen und unteren Rand wird dabei untersucht. Die variable Viskosität berechnet sich nach (3.26a) mit $E_4 = \ln(10^3)$. Die Rayleighzahl ist $\mathrm{Ra} = 10000$, basierend auf der Viskosität $\eta(T = 0)$. Es entwickelt sich eine einzellige Konvektionsstruktur mit dünnen thermischen Grenzschichten am oberen und unteren Rand. Das Temperaturfeld ist in Abbildung 4.13 dargestellt. Benchmark-Resultate finden sich in Tabelle 4.1. Alle extrapolierten Werte liegen nahe an den veröffentlichten Benchmark-Werten.

Ich habe diesen Testfall genutzt, um die beiden implementierten Upwind-Verfahren, das Fromm-Schema (4.5) und das “power-law”-Schema (4.6), zur Berechnung des Advektionsterms in der Wärmeleitungsgleichung zu vergleichen. Beide Upwind-Verfahren ergeben in etwa dieselbe Genauigkeit. Nur der Wärmefluß in der unteren, linken Ecke ist etwas genauer, wenn das Fromm-Schema verwendet wird (vergleiche I und II in Tabelle 4.1). Neben der bilinearen Interpolation habe ich auch die harmonische Interpolation zur Berechnung der

Tabelle 4.1: Benchmark-Resultate für Testfall 1

	Gitter	Nu	v_{rms}	q_1	q_2	q_3	q_4
Benchmark	–	10.0660	480.4334	17.5314	1.0085	26.8085	0.4974
I	32x32	10.9823	434.1955	22.5323	0.8369	21.4052	1.3240
	48x48	10.4675	467.0277	19.4143	0.9321	24.0071	0.7891
	64x64	10.2907	475.2379	18.5086	0.9664	25.4672	0.6321
	96x96	10.1683	479.2123	17.9482	0.9902	26.5126	0.5400
	extrapol.	10.0761	480.2397	17.5849	1.0076	27.1441	0.4909
II	32x32	10.6340	446.3899	21.8312	1.0591	20.8398	4.1433
	48x48	10.2298	468.2643	18.9488	1.0245	23.7434	2.3037
	64x64	10.1331	473.6656	18.2383	1.0151	25.1229	1.4430
	96x96	10.0855	477.2843	17.8193	1.0099	26.1127	0.8739
	extrapol.	10.0690	480.6073	17.5297	1.0074	26.7742	0.5835
III	32x32	10.9346	437.1142	22.1751	0.8583	21.2425	1.3496
	48x48	10.5298	467.8947	19.7232	0.9368	24.1876	0.7965
	64x64	10.3391	475.8778	18.7354	0.9687	25.7341	0.6344
	96x96	10.1935	479.5787	18.0605	0.9912	26.7861	0.5405
	extrapol.	10.0788	479.9999	17.6252	1.0070	27.3365	0.4928
IV	16x16	10.2540	465.3548	18.3486	0.9691	25.4857	0.6315
	24x24	10.1531	474.7340	17.9082	0.9869	26.5948	0.5441
	32x32	10.1187	477.5832	17.7531	0.9949	26.8368	0.5187
	48x48	10.0915	479.2310	17.6357	1.0015	26.8936	0.5047
	extrapol.	10.0647	480.0172	17.5302	1.0077	26.7858	0.4990

Anmerkung: Die Temperaturgradienten q_1–q_4 werden bei $(x,z) = (0,1)$, $(1,1)$, $(1,0)$ und $(0,0)$ berechnet. I: äquidistantes Gitter mit bilinearer Interpolation der Viskositäten an den Seitenrändern und Fromm-Schema für den Advektionsterm; II: identisch zu I, außer “power-law”-Schema für den Advektionsterm; III: identisch zu I, außer harmonische Interpolation der Viskositäten; IV: identisch zu I, außer nicht-äquidistantes Gitter, wobei die angegebenen Gitter die feinsten globalen Gitter sind, zu denen zwei lokale Gitterebenen hinzugefügt werden, die sich über die Bereiche $\{(x,z)\colon x \leq 0.25 \vee x \geq 0.75 \vee z \leq 0.25 \vee z \geq 0.75\}$ und $\{(x,z)\colon x \leq 0.125 \vee x \geq 0.875 \vee z \leq 0.125 \vee z \geq 0.875\}$ erstrecken. Insgesamt bestehen die nicht-äquidistanten Gitter damit aus 2176, 4896, 8704 und 19584 Gittervolumen.

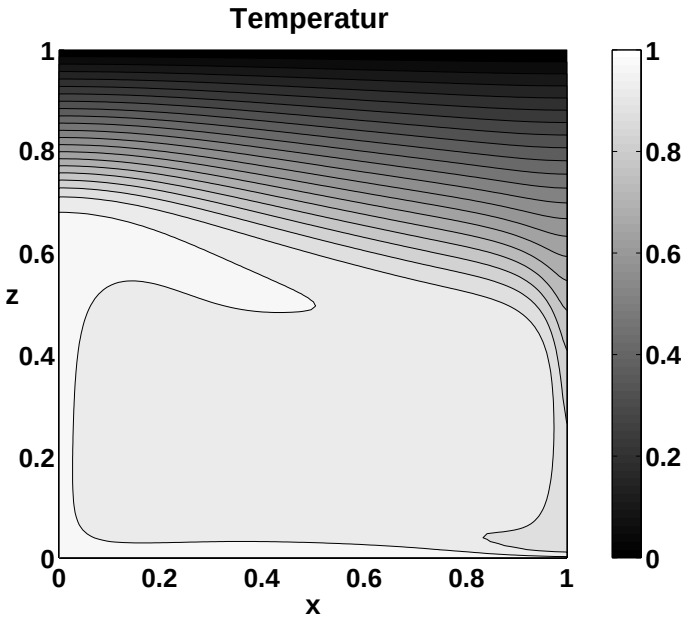

Abbildung 4.14: Stationäre 2-D Konvektion mit stark variabler Viskosität (Testfall 2).

Viskositäten an den Seitenrändern der Gittervolumen ausprobiert. Für diesen Testfall sind keine signifikanten Unterschiede in der Genauigkeit zu erkennen (vergleiche I und III in Tabelle 4.1). Neben äquidistanten Gittern werden auch nicht-äquidistante Gitter verwendet, in denen der Gitterabstand an den Rändern um den Faktor 4 kleiner ist als im Zentrum der Box. Ein Vergleich der Ergebnisse zeigt, daß die Verbesserung der Genauigkeit durch Verfeinerung der Gitterauflösung in den kritischen Bereichen des Rechengebiets vergleichbar mit der Verbesserung der Genauigkeit durch eine Verfeinerung der Gitterauflösung im gesamten Rechengebiet ist (vergleiche I und IV in Tabelle 4.1).

Um die Unterschiede zwischen der bilinearen und harmonischen Interpolation der Viskositäten an den Seitenrändern der Gittervolumen bei größeren Viskositätsvariationen zu untersuchen, habe ich Testfall 2 eingeführt. Er ist eine Modifikation von Testfall 1 mit deutlich stärkeren Viskositätskontrasten. Alle Randbedingungen und Modellparameter sind gleich, außer $\mathrm{Ra} = 0.3$ und $E_4 = \ln(10^8)$. Aufgrund der starken Temperaturabhängigkeit der Viskosität entsteht eine hochviskose, stagnierende Schicht am oberen Boxrand. Die Ergebnisse sind in Abbildung 4.14 und in Tabelle 4.2 dargestellt. Die harmonische Interpolation liefert etwas genauere Resultate als die bilineare Interpolation. Allerdings sind die Unterschiede selbst bei diesen extremen Viskositätsvariationen immer noch gering, so daß ich im folgenden ausschließlich die bilineare Interpolation verwenden werde.

Testfall 3 entspricht Fall 2 in *Busse et al.* [1993]. Stationäre 3–D Konvektion in einer kartesischen, geschlossenen Box mit plume-ähnlichen Auf- und Abströmen wird dabei untersucht. Die Oberfläche und der Boden der Box sind isotherm und fest. Die Viskosität variiert moderat mit der Temperatur gemäß (3.26) mit $A = \exp(-E_1/(0.5+E_3))$, $E_1 = 225/\ln(\Delta\eta) - 0.25\ln(\Delta\eta)$, $E_2 = 0$, $E_3 = 15/\ln(\Delta\eta) - 0.5$ und einem maximalen Vis-

Tabelle 4.2: Benchmark-Resultate für Testfall 2

	Gitter	Nu	v_{rms}	q_1	q_2	q_3	q_4
I	32x32	2.3076	246.2311	2.8278	1.8470	5.5275	0.2576
	48x48	2.4041	261.6192	2.9859	1.8974	6.9135	0.2403
	64x64	2.4377	266.3594	3.0388	1.9147	7.5930	0.1986
	96x96	2.4603	268.7643	3.0737	1.9261	8.0841	0.1727
	extrapol.	2.4759	269.1685	3.0974	1.9336	8.4133	0.1592
III	32x32	2.5113	256.3763	3.2438	1.9017	5.9361	0.3932
	48x48	2.5088	267.4990	3.1986	1.9255	7.1679	0.2506
	64x64	2.4993	269.9527	3.1632	1.9314	7.7753	0.2030
	96x96	2.4885	270.4448	3.1303	1.9339	8.1981	0.1743
	extrapol.	2.4759	269.1178	3.0977	1.9337	8.4493	0.1600

Anmerkung: Die Temperaturgradienten q_1–q_4 werden bei $(x,z) = (0,1)$, $(1,1)$, $(1,0)$ und $(0,0)$ berechnet. I: äquidistantes Gitter mit bilinearer Interpolation der Viskositäten an den Seitenrändern und Fromm-Schema für den Advektionsterm; III: identisch zu I, außer harmonische Interpolation der Viskositäten.

kositätskontrast von $\Delta\eta = 20$. Die Rayleighzahl beträgt $\mathrm{Ra} = 20000$, basierend auf der Viskosität $\eta(T = 0.5)$. Zwei Isoflächen der Temperatur sind in Abbildung 4.15 dargestellt.

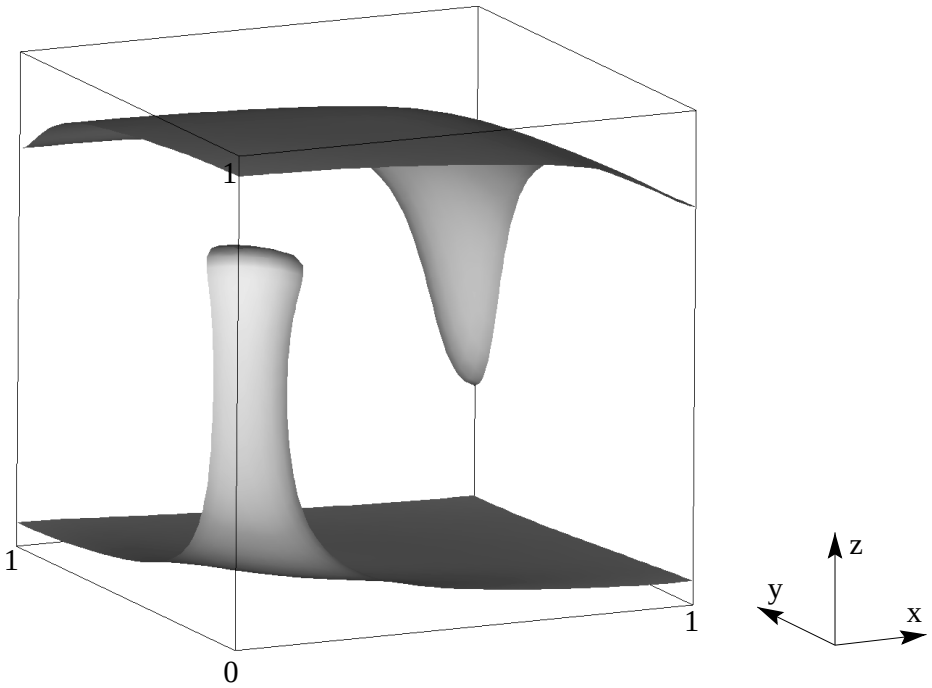

Abbildung 4.15: Stationäre 3-D Konvektion mit variabler Viskosität (Testfall 3). Zwei Isoflächen der Temperatur mit $T = 0.85$ und $T = 0.3$ werden gezeigt.

Tabelle 4.3: Benchmark-Resultate für Testfall 3

	Gitter	Nu	v_{rms}	$\langle T \rangle_{0.5}$	$\langle T \rangle_{0.75}$	T_P	w_P
Benchmark	–	3.0393	35.13	0.5816	0.5659	0.9053	165.9
I	16x16x16	3.0849	35.9987	0.6047	0.5787	0.9199	168.5796
	24x24x24	3.0648	35.5494	0.5925	0.5722	0.9129	167.6117
	32x32x32	3.0548	35.3692	0.5878	0.5696	0.9098	166.9876
	48x48x48	3.0466	35.2341	0.5844	0.5676	0.9074	166.4375
	extrapol.	3.0393	35.1233	0.5818	0.5659	0.9054	165.9184
IV	12x12x12	3.0566	35.5856	0.5992	0.5674	0.9157	165.2988
	18x18x18	3.0462	35.3058	0.5898	0.5839	0.9105	165.5992
	24x24x24	3.0424	35.2185	0.5864	0.5662	0.9084	165.6593
	36x36x36	3.0397	35.1610	0.5839	0.5660	0.9069	165.7218
	extrapol.	3.0376	35.1197	0.5818	0.5659	0.9058	165.8242

Anmerkung: Die Temperatur T_P und die Vertikalgeschwindigkeit w_P sind bei $(x,y,z) = (0,0,0.5)$ definiert. I: äquidistantes Gitter mit bilinearer Interpolation der Viskositäten an den Seitenrändern der Gittervolumen und Fromm-Schema für den Advektionsterm; IV: identisch zu I, außer nicht-äquidistantes Gitter, wobei die angegebenen Gitter die feinsten globalen Gitter sind, zu denen eine lokale Gitterebenen hinzugefügt wird, die sich über den Bereich $\{(x,y,z)\colon (x \leq 1/3 \wedge y \leq 1/3) \vee (x \geq 2/3 \wedge y \geq 2/3) \vee z \leq 1/6 \vee z \geq 5/6\}$ erstreckt. Insgesamt bestehen die nicht-äquidistanten Gitter damit aus 7552, 25488, 60416 und 203904 Gittervolumen.

Benchmark-Resultate finden sich in Tabelle 4.3. Alle Werte nähern sich mit steigender Gitterauflösung den veröffentlichten Benchmark-Werten. Aufgrund der geringen Viskositätsvariationen werden in diesem Testfall weniger Gitterpunkte benötigt als in den Testfällen 1 und 2, um eine gut aufgelöste Lösung zu erhalten. Dieser Testfall wird genutzt, um die lokale Gitterverfeinerungstechnik in 3–D zu testen. Dazu werden nicht-äquidistante Gitter verwendet, in denen der Gitterabstand in der oberen und unteren Grenzschicht und in den beiden Ecken der Auf- und Abströme um den Faktor 2 reduziert wird (siehe Tabelle 4.3 für genauere Details zur Gitterstruktur). Auch hier zeigt sich, daß durch die Einführung lokaler Gitterverfeinerungen in etwa eine Genauigkeit erreicht wird, die der Genauigkeit von äquidistanten Gittern entspricht, bei denen die Gitterauflösung im gesamten Rechengebiet verfeinert wird (vergleiche I und IV in Tabelle 4.3).

Die Benchmark-Rechnungen zeigen, daß das numerische Lösungsverfahren das Gleichungssystem korrekt löst. Aus Plausibilitätsbetrachtungen der numerischen Lösung läßt sich schlußfolgern, daß die offenen Randbedingungen ebenfalls korrekt implementiert worden sind, so daß das numerische Verfahren zur Untersuchung der Wechselwirkung von Mantelplumes mit Mittelozeanischen Rücken verwendet werden kann.

Kapitel 5

Parameterstudie für Mantelplumes mit zeitlich konstantem Plumefluß

In diesem Kapitel werden die Modellrechnungen zur Wechselwirkung von Mantelplumes mit Mittelozeanischen Rücken vorgestellt. Dazu werden Mantelplumes mit zeitlich konstantem Plumefluß betrachtet. Obwohl die Problemstellung intrinsisch dreidimensional ist, werden im ersten Abschnitt zunächst Voruntersuchungen in 2–D beschrieben, die dazu dienen, die Modellgeometrie und verschiedene Modellparameter für die dreidimensionalen Rechnungen festzulegen. Die Ergebnisse der dreidimensionalen Modellrechnungen folgen im zweiten Abschnitt, wobei der Einfluß der wichtigsten Modellparameter auf die Wechselwirkung von Mantelplumes mit Mittelozeanischen Rücken systematisch untersucht wird. Im dritten Abschnitt wird dann aus den Modellergebnissen ein Skalierungsgesetz hergeleitet, das die Ausbreitung des Plumematerials unter Mittelozeanischen Rücken in Abhängigkeit von den verschiedenen Modellparametern beschreibt.

5.1 Voruntersuchungen in 2–D

5.1.1 Referenzmodell

Für die Voruntersuchungen zur Wechselwirkung von Mantelplumes mit Mittelozeanischen Rücken wird das dreidimensionale Modell auf zwei Dimensionen reduziert. Dazu wird der zylindrische Plume durch einen flächenhaften Aufstrom unterhalb des Mittelozeanischen Rückens ersetzt, indem die Randbedingung für die Temperatur am unteren Rand der Modellbox in (3.14) wie folgt modifiziert wird,

$$T \;=\; 1 + \Delta T_P \,\exp\left(-\frac{x^2}{{r_{1/2}}^2}\right) \;.$$

Ansonsten werden die in Abschnitt 3.2.4 vorgestellten Randbedingungen mit (3.15) als Randbedingung am offenen Seitenrand auch für die zweidimensionalen Modellrechnungen verwendet.

Tabelle 5.1: Parameter des zweidimensionalen Referenzmodells

Parameter	Wert	Einheit	Skalierter Wert
Ra	–	–	40000
l_x	1600	km	4
E	500	kJ/mol	46.261
V	$4 \cdot 10^{-6}$	m^3/mol	4.884
η_{cut}	10^{23}	Pa s	100
ΔT_P	195	K	0.15
$r_{1/2}$	24	km	0.06
u_0	1.6	cm/a	200
x_R	20	km	0.05

Als Referenzmodell der Untersuchungen wird ein Modell mit starker Temperatur- und Tiefenabhängigkeit der Viskosität nach (3.26) gewählt. Die wichtigsten Modellparameter sind in Tabelle 5.1 aufgeführt. Die übrigen Parameter finden sich im Anhang A.1. Aufgrund der starken Temperaturabhängigkeit wird die Viskosität in der kalten Lithosphäre sehr groß. Um numerische Instabilitäten zu vermeiden, beschränke ich die Viskosität auf einen maximalen Wert η_{cut},

$$\tilde{\eta}\,(T,z) \;=\; \frac{1}{1/\eta\,(T,z) + 1/\eta_{cut}}\,,$$

wobei ich einen Wert von $\eta_{cut} = 100 \cdot \eta_0$ wähle. Dieser Wert hat sich als ausreichend erwiesen, damit sich die Lithosphäre als starrer, nicht deformierbarer Körper verhält. Die Temperaturabhängigkeit reduziert die Mantelviskosität von η_0 am unteren Rand der Modellbox auf etwa $\eta_0/50$ in geringen Tiefen, so daß Viskositätsvariationen von fast vier Größenordnungen zwischen Mantel und Lithosphäre entstehen. Durch das heiße Plumematerial erhöhen sich die lateralen Viskositätsvariationen im Bereich der Spreadingachse auf mehr als fünf Größenordnungen.

Die Modellrechnungen haben einen stationären Endzustand erreicht, der in Abbildung 5.1 (oben) dargestellt ist. Das heiße Material steigt in einem engen Kanal bis in den Bereich des Rückens auf und breitet sich dort lateral aus. Die entsprechenden Geschwindigkeitsprofile finden sich in Abbildung 5.2. Die Aufstiegsgeschwindigkeit im Zentrum des Plumes zeigt leichte Variationen als Funktion der Höhe (siehe Abbildung 5.2, oben). Durch Diffusion wird Wärme vom Plumezentrum nach außen transportiert. Dadurch kühlt der Plume etwas ab, so daß sich der Auftrieb des Plumematerials verringert. Dieses erklärt die leichte Abnahme der Vertikalgeschwindigkeit oberhalb des unteren Boxrandes. Auf der anderen Seite verursacht die Tiefenabhängigkeit der Viskosität eine Abnahme der Viskosität mit zunehmender Höhe, was zu der nachfolgenden Erhöhung der Aufstiegsgeschwindigkeit in größeren Höhen führt. Weil das Plumematerial im Bereich der Spreadingachse fast bis zum oberen Rand der Modellbox aufsteigt, ergeben sich in diesem Bereich große Temperatur- und Geschwindig-

keitsgradienten.

Die Horizontalgeschwindigkeit zeigt sehr deutlich, daß sich die hochviskose Lithosphäre im obersten Teil der Modellbox nahezu mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, die der vorgegebenen Plattengeschwindigkeit entspricht (siehe Abbildung 5.2, unten). Unterhalb der Lithosphäre breitet sich das Plumematerial in einem engen Kanal schneller aus als die Lithosphäre. Mit zunehmender Tiefe nimmt die Horizontalgeschwindigkeit allerdings sehr schnell ab. Dieses zeigt, daß die Boxhöhe ausreichend ist, um zu verhindern, daß die Randbedingungen am unteren Rand der Modellbox die laterale Strömung unterhalb der Lithosphäre beeinflussen.

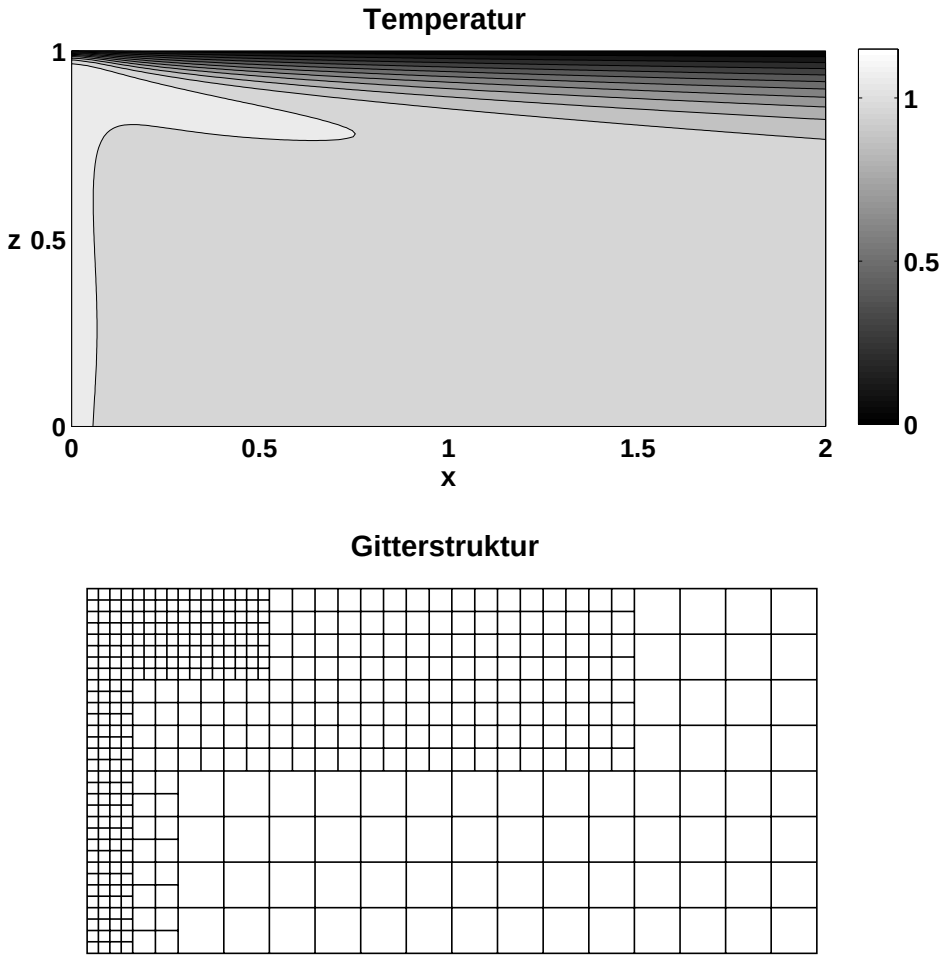

Abbildung 5.1: Stationäre Plume-Rücken-Wechselwirkung in 2–D mit großen lokalen Viskositätsvariationen (oben) und nicht-äquidistantes numerisches Gitter zur Lösung des Problems (unten). Die Berechnungen werden mit viermal mehr Gitterzellen durchgeführt als dargestellt sind, so daß sich ein Gitterabstand von $\Delta x = \Delta z = 1/64$ im Bereich des Plumestamms und der Spreadingachse und $\Delta x = \Delta z = 1/16$ in größerer Entfernung vom Rücken ergibt. Nur die linke Hälfte des Modellgebiets ($l_x = 4$) wird gezeigt.

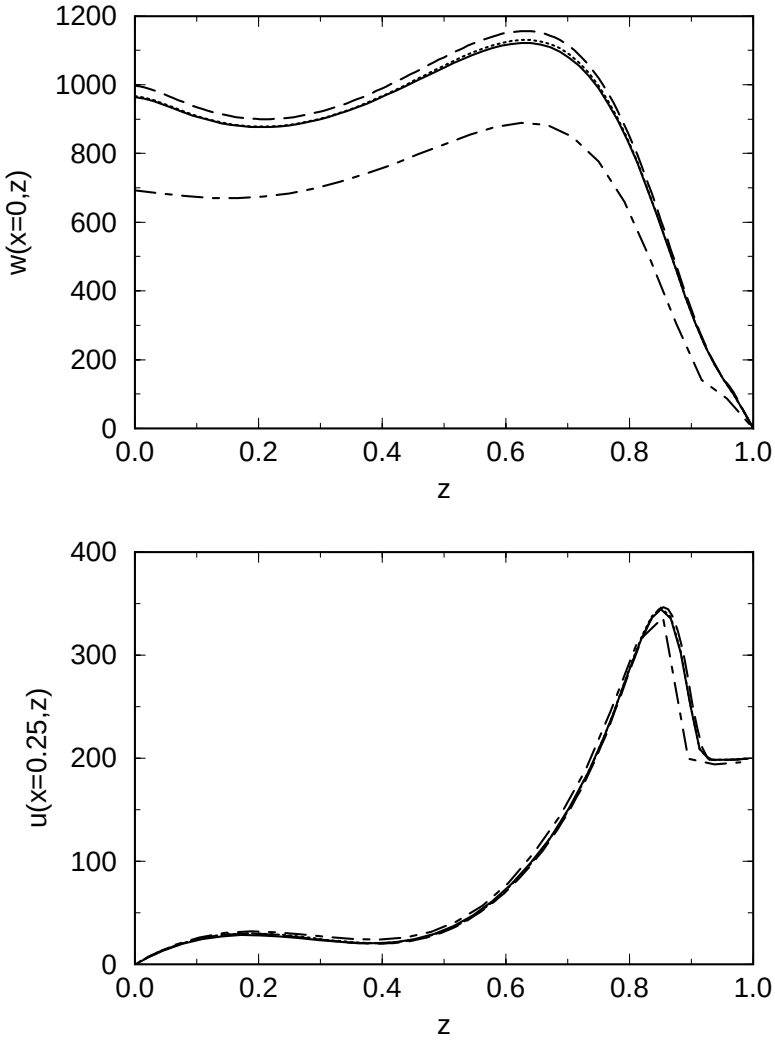

Abbildung 5.2: Vertikalgeschwindigkeit bei $x = 0$ (oben) und Horizontalgeschwindigkeit bei $x = 0.25$ (unten) als Funktion der Höhe auf äquidistanten Gittern mit 96×24 (gestrichelt-gepunktet), 256×64 (gepunktet) und 512×128 (gestrichelt) Gitterzellen und auf dem in Abbildung 5.1 dargestellten nicht-äquidistanten Gitter mit insgesamt 2368 Gitterzellen (durchgezogen).

Die Ergebnisse sind sowohl auf äquidistanten Gittern mit unterschiedlicher Gitterauflösung als auch auf einem nicht-äquidistanten Gitter mit Gitterverfeinerungen im Bereich des Plumestamms und der Spreadingachse (siehe Abbildung 5.1, unten) berechnet worden. Die Geschwindigkeitsprofile zeigen, daß bei äquidistanter Anordnung 256×64 Gitterzellen notwendig sind, um eine gute Auflösung, insbesondere der Vertikalgeschwindigkeit im Zentrum des Plumes, zu erreichen (siehe Abbildung 5.2). Es zeigt sich, daß die Lösung auf dem nicht-äquidistanten Gitter nahezu identisch zu der Lösung auf dem äquidistanten Gitter mit 256×64 Gitterzellen ist, obwohl das nicht-äquidistante Gitter nur in den verfeinerten Bereichen dieselbe Gitterauflösung hat. Im Vergleich zu dem äquidistanten Gitter mit 96×24

Gitterzellen, das ungefähr dieselbe Anzahl an Gitterzellen wie das nicht-äquidistante Gitter enthält, ist die Lösung auf dem nicht-äquidistanten Gitter deutlich genauer. Dieses zeigt, daß die gewählte Gitterstruktur mit Verfeinerungen im Bereich des Plumestamms und der Spreadingachse für diese Untersuchungen sinnvoll ist.

5.1.2 Variation der Boxlänge

Um den Einfluß der endlichen lateralen Ausdehnung der Modellbox mit künstlichem, offenem Seitenrand auf die Strömung unterhalb der Spreadingachse zu untersuchen, habe ich Modellrechnungen für unterschiedliche Boxlängen und Randbedingungen am Seitenrand durchgeführt. Die Ergebnisse sind in Abbildung 5.3 dargestellt. Für Boxlängen von $l_x = 4$ und $l_x = 2$ ergeben sich ähnliche Resultate. Dagegen sind die Geschwindigkeiten für $l_x = 1$ deutlich größer. Bei dieser geringen lateralen Ausdehnung der Modellbox ist die Annahme, daß der Plume am Seitenrand nur eine kleine Störung der durch die Plattenbewegung getriebenen Scherströmung hervorruft, noch nicht gerechtfertigt. Unter anderem weicht der Druck am Seitenrand deutlich von der hydrostatischen Druckverteilung ab. Die Randbedingungen scheinen deshalb große Druckgradienten am offenen Seitenrand zu erzeugen, die zu einer stärkeren Strömung in der Modellbox führen. Unterschiedliche Randbedingungen am offenen Seitenrand sind für $l_x = 2$ getestet worden. Die Ergebnisse ändern sich aber nur geringfügig. Diese Untersuchungen zeigen, daß ab einer Boxlänge von $l_x = 2$ die endliche laterale Ausdehnung der Modellbox keinen Einfluß mehr auf die Strömung unterhalb der Spreadingachse hat und dadurch die Lösung nicht mehr entscheidend durch die Wahl der Randbedingungen am offenen Seitenrand beeinflußt wird.

5.1.3 Variation des Viskositätscutoffs

In allen Modellrechnungen, die in den vorhergehenden Abschnitten vorgestellt worden sind, ist die Viskosität in der Lithosphäre auf einen Maximalwert von $\eta_{\text{cut}} = 100 \cdot \eta_0$ beschränkt worden (siehe Abschnitt 5.1.1). In diesem Abschnitt untersuche ich den Einfluß unterschiedlicher Werte für den Viskositätscutoff. Dazu habe ich zum einen eine Rechnung mit einem sehr niedrigen Wert von $\eta_{\text{cut}} = 2.5 \cdot \eta_0$ gemacht, der die Viskositätsvariationen zwischen Mantel und Lithosphäre auf zwei Größenordnungen und zwischen Plume und Lithosphäre auf weniger als vier Größenordnungen reduziert. Zum anderen habe ich den Maximalwert der Viskosität auf $\eta_{\text{cut}} = 10000 \cdot \eta_0$ hochgesetzt, wodurch sich die Viskositätsvariationen auf knapp sechs Größenordnungen zwischen Mantel und Lithosphäre und auf mehr als sieben Größenordnungen zwischen Plume und Lithosphäre erhöhen.

Die Ergebnisse sind in Abbildung 5.4 dargestellt. Bei einer Verringerung des Viskositätscutoffs auf $\eta_{\text{cut}} = 2.5 \cdot \eta_0$ werden die Geschwindigkeiten etwas größer. Wegen des geringen Viskositätscutoffs wird bereits die Viskosität des normalen Mantels im unteren Bereich der Modellbox reduziert und dadurch eine leicht erhöhte Ausbreitungsgeschwindigkeit des Plumematerials erzeugt. Bei einer Erhöhung des Viskositätscutoffs auf $\eta_{\text{cut}} = 10000 \cdot \eta_0$ sind

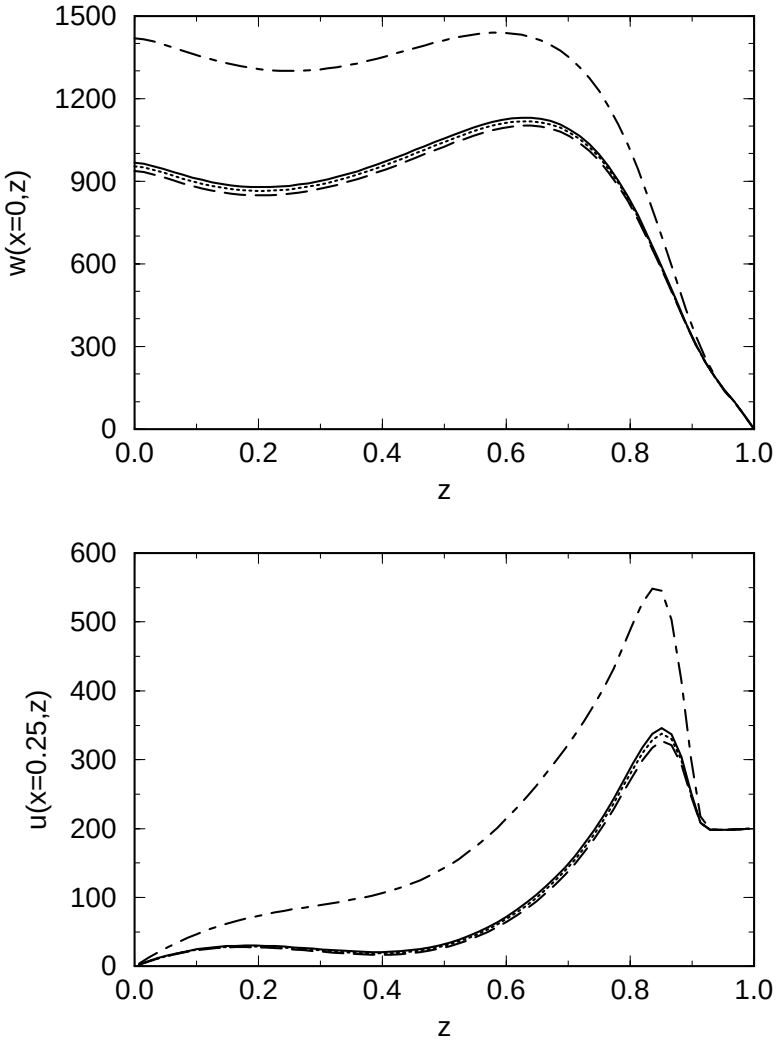

Abbildung 5.3: Vertikalgeschwindigkeit bei $x = 0$ (oben) und Horizontalgeschwindigkeit bei $x = 0.25$ (unten) als Funktion der Höhe für Boxlängen von $l_x = 1$ (gestricheltgepunktet), $l_x = 2$ (gestrichelt) und $l_x = 4$ (durchgezogen). Für $l_x = 2$ ist anstelle von (3.15) auch (3.15a) als Randbedingung am offenen Seitenrand getestet worden (gepunktet). Die Ergebnisse sind auf einem äquidistanten Gitter mit 64 Gitterzellen in vertikaler Richtung und 64 ($l_x = 1$), 128 ($l_x = 2$) bzw. 256 ($l_x = 4$) Gitterzellen in horizontaler Richtung berechnet worden.

dagegen keine Unterschiede zu der Lösung mit $\eta_{\text{cut}} = 100 \cdot \eta_0$ zu erkennen. Allerdings verschlechtert sich die Konvergenzrate des Mehrgitterverfahrens aufgrund der dabei auftretenden großen lokalen Viskositätsgradienten im Bereich der Spreadingachse. Diese Untersuchungen zeigen, daß durch die Einführung eines Viskositätscutoffs von $\eta_{\text{cut}} = 100 \cdot \eta_0$ keine signifikante Änderung der Lösung hervorgerufen wird, auf der anderen Seite aber eine Verschlechterung der Konvergenzeigenschaften des numerischen Lösungsverfahrens und damit eine Erhöhung des Rechenaufwands vermieden wird.

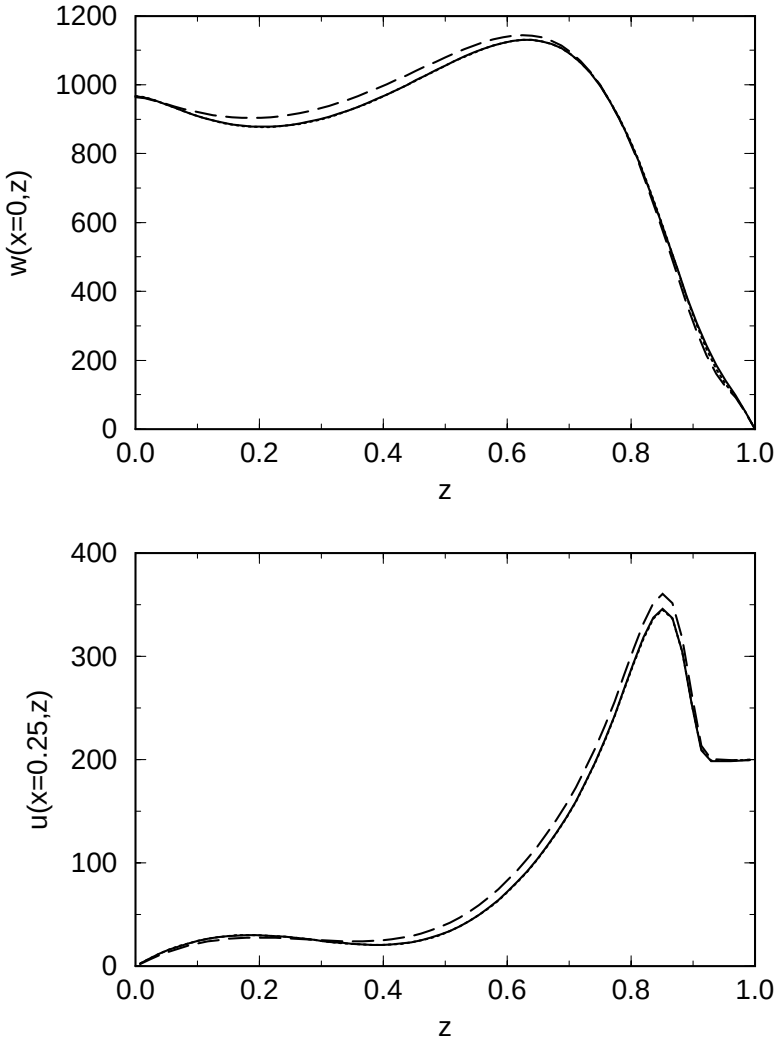

Abbildung 5.4: Vertikalgeschwindigkeit bei $x = 0$ (oben) und Horizontalgeschwindigkeit bei $x = 0.25$ (unten) als Funktion der Höhe für Viskositätscutoffs von $\eta_{\text{cut}} = 2.5 \cdot \eta_0$ (gestrichelt), $\eta_{\text{cut}} = 100 \cdot \eta_0$ (durchgezogen) und $\eta_{\text{cut}} = 10000 \cdot \eta_0$ (gepunktet). Die Ergebnisse sind auf einem äquidistanten Gitter mit 256×64 Gitterzellen und Boxlänge $l_x = 4$ berechnet worden.

5.1.4 Variation der Geschwindigkeitsglättung an der Spreadingachse

Die vorgegebene Plattengeschwindigkeit wird an der Spreadingachse durch eine Tangenshyperbolikusfunktion geglättet, um eine Inkonsistenz mit der Randbedingung am Seitenrand bei $x = 0$ zu vermeiden (siehe Abschnitt 3.2.4). Die Stärke der Glättung wird durch den Parameter x_R kontrolliert. In Abbildung 5.5 sind neben der Lösung für $x_R = 0.05$ auch Ergebnisse für $x_R = 0.01$ und $x_R = 0.1$ dargestellt. Die Unterschiede sind sehr gering. Lediglich die Vertikalgeschwindigkeit direkt unterhalb der Spreadingachse variiert leicht (siehe Abbildung 5.5, oben). Bei einem großen Wert für x_R ist die Horizontalgeschwindigkeit nahe der Spreading-

achse noch gering, so daß wenig Material von unten nachströmen muß. Bei einem kleinen Wert für x_R steigt die Horizontalgeschwindigkeit dagegen mit zunehmender Entfernung von der Spreadingachse sehr schnell auf die vorgegebene Plattengeschwindigkeit, was ein stärkeres Nachströmen von Material in den Rückenbereich nach sich zieht. Dadurch lassen sich die kleinen Unterschiede in der Vertikalgeschwindigkeit direkt unterhalb der Spreadingachse erklären. Die Horizontalgeschwindigkeit zeigt, daß sich für $x_R = 0.1$ die Lithosphäre bei $x = 0.25$ noch nicht mit einheitlicher Geschwindigkeit bewegt, sondern daß noch leichte Variationen der Geschwindigkeit in der Lithosphäre auftreten (siehe Abbildung 5.5, unten). Insgesamt zeigen die Modellergebnisse aber, daß die Wechselwirkung von Mantelplumes mit

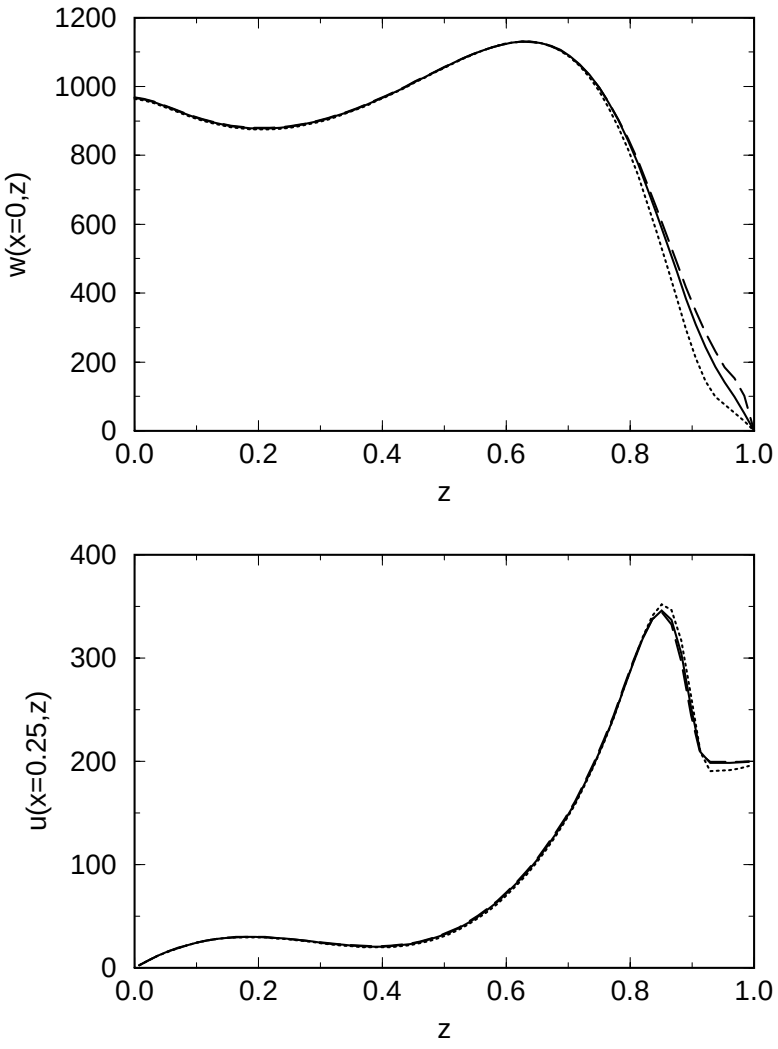

Abbildung 5.5: Vertikalgeschwindigkeit bei $x = 0$ (oben) und Horizontalgeschwindigkeit bei $x = 0.25$ (unten) als Funktion der Höhe für $x_R = 0.01$ (gestrichelt), $x_R = 0.05$ (durchgezogen) und $x_R = 0.1$ (gepunktet). Die Ergebnisse sind auf einem äquidistanten Gitter mit 256×64 Gitterzellen und Boxlänge $l_x = 4$ berechnet worden.

Mittelozeanischen Rücken nicht durch die Glättung der vorgegebenen Plattengeschwindigkeit im Bereich der Spreadingachse beeinflußt wird, solange der Bereich, über den geglättet wird, klein ist gegenüber den für die Plume-Rücken-Wechselwirkung relevanten Längeskalen.

5.1.5 Vergleich mit anderen numerischen Verfahren

Um die Genauigkeit des hier vorgestellten Finite-Volumen-Verfahrens speziell für die Problemstellung der Wechselwirkung eines Mantelplumes mit einem Mittelozeanischen Rücken zu untersuchen, vergleiche ich in diesem Abschnitt die Lösung des Finite-Volumen-Verfahrens mit den Lösungen anderer numerischer Verfahren. Dazu ziehe ich ein Finite-Elemente-Verfahren mit dritter Konvergenzordnung [*Christensen*, 1992] und ein hybrides Verfahren mit Finite-Differenzen in vertikaler Richtung und einem spektralen Ansatz in horizontaler Richtung [*Christensen und Harder*, 1991] zum Vergleich heran.

Grundlage für die Vergleichsrechnungen bildet wieder das in Abschnitt 5.1.1 vorgestellte zweidimensionale Modell. Allerdings habe ich die Temperaturabhängigkeit der Viskosität für die Vergleichsrechnungen auf $E = 200$ kJ/mol ($E_1 = 18.504$) verringert, wodurch sich die lokalen Viskositätsvariationen im Bereich der Spreadingachse auf vier Größenordnungen reduzieren. Im Finite-Elemente-Verfahren werden dieselben Randbedingungen wie im Finite-Volumen-Verfahren verwendet. Um im spektralen Verfahren die Fast-Fourier-Transformation anwenden zu können, muß die Ausströmgeschwindigkeit am offenen Seitenrand vorgegeben werden. Deshalb wird im spektralen Verfahren am offenen Seitenrand eine modifizierte Randbedingung verwendet,

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \, , \; u = u_{\text{shear}}(z) \, , \; \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \qquad \text{bei} \quad x = l_x \, .$$

Die Scherströmung $u_{\text{shear}}(z)$ berechnet sich aus

$$\frac{d}{dz}\left(\bar{\eta}\,\frac{d}{dz}u_{\text{shear}}\right) = 0 \, ,$$

mit $u_{\text{shear}}(0) = 0$, $u_{\text{shear}}(1) = u_0$ und $\bar{\eta}(z)$ horizontal gemittelte Viskosität. Außerdem wird die Boxlänge im spektralen Verfahren auf $l_x = 2$ begrenzt, während sie in den beiden anderen Verfahren $l_x = 4$ beträgt.

Die Ergebnisse für die verschiedenen numerischen Verfahren sind in Abbildung 5.6 dargestellt. Das Finite-Volumen-Verfahren und das Finite-Elemente-Verfahren liefern ähnliche Resultate. Konvergenztests mit unterschiedlicher Gitterauflösung haben gezeigt, daß diese Lösungen nahe an der korrekten Lösung liegen. Beide Lösungen sind auf einem nicht-äquidistanten Gitter mit verringertem Gitterabstand im Bereich der Spreadingachse berechnet worden. Im Finite-Elemente-Verfahren variiert der Gitterabstand sowohl in vertikaler als auch in horizontaler Richtung. Im Finite-Volumen-Verfahren wird das in Abbildung 5.1 dargestellte nicht-äquidistante Gitter verwendet. Aufgrund der höheren Konvergenzordnung

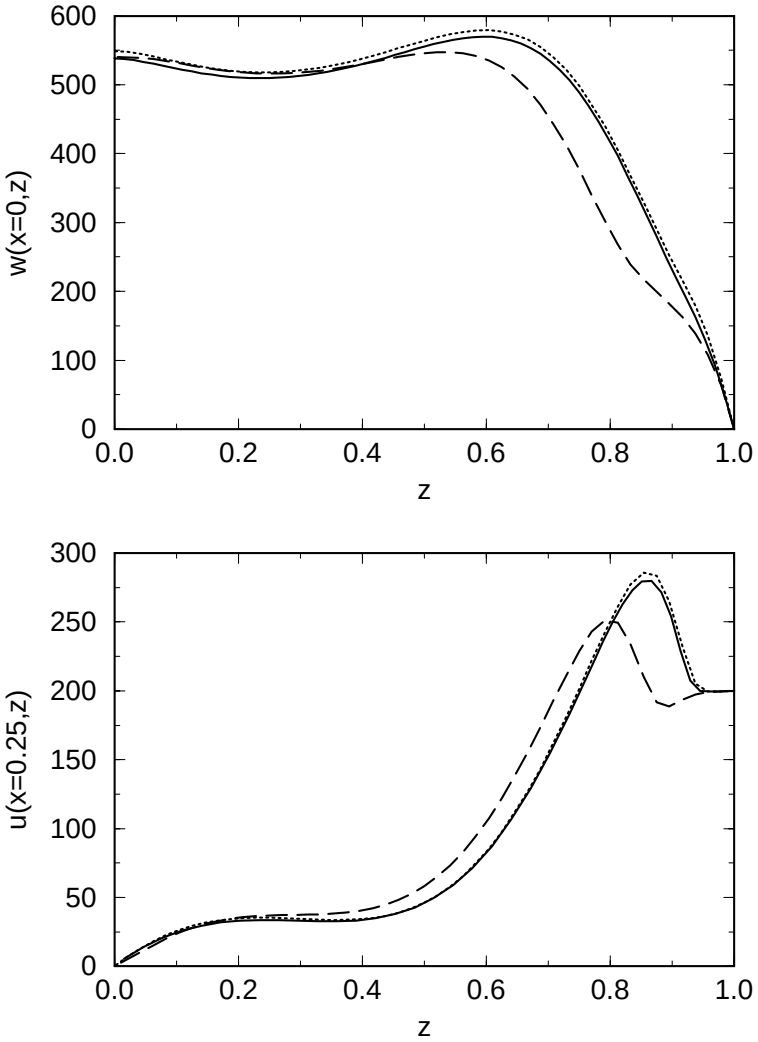

Abbildung 5.6: Vertikalgeschwindigkeit bei $x = 0$ (oben) und Horizontalgeschwindigkeit bei $x = 0.25$ (unten) als Funktion der Höhe für das Finite-Elemente-Verfahren auf einem Gitter mit 39×48 nicht-äquidistant angeordneten Gitterpunkten (gepunktet), für das spektrale Verfahren auf einem äquidistanten Gitter mit 96×48 Gitterpunkten (gestrichelt) und für das Finite-Volumen-Verfahren auf dem in Abbildung 5.1 dargestellten nicht-äquidistanten Gitter mit insgesamt 2368 Gitterzellen (durchgezogen).

werden im Finite-Elemente-Verfahren etwas weniger Gitterpunkte im Bereich direkt unterhalb der Spreadingachse als im Finite-Volumen-Verfahren benötigt, um eine gute Auflösung der Ergebnisse zu erzielen. Auf der anderen Seite ist das Finite-Volumen-Verfahren für diese Problemstellung mit relativ geringer Anzahl an Gitterpunkten bereits ungefähr dreimal schneller als das Finite-Elemente-Verfahren (3.5 s im Vergleich zu 9.2 s für zehn Zeitschritte auf einer IBM RS/6000 58H Workstation). Weil im Finite-Volumen-Verfahren aufgrund der Mehrgittertechnik die Rechenzeit nur linear mit der Anzahl der Gitterpunkte anwächst, ist zu

erwarten, daß bei größeren Problemen mit mehr Unbekannten das Finite-Volumen-Verfahren im Vergleich zum Finite-Elemente-Verfahren noch effizienter ist.

Die Lösung des spektralen Verfahrens weicht deutlich von den anderen Lösungen ab. Im Höhenbereich $z = 0.5 - 0.9$ ist die Vertikalgeschwindigkeit im Zentrum des Plumes systematisch zu klein (siehe Abbildung 5.6, oben). Die laterale Ausbreitung des Plumematerials scheint im Vergleich zu den Lösungen der beiden anderen numerischen Verfahren in größerer Tiefe zu erfolgen, was auch an dem Versatz der Kurve für die Horizontalgeschwindigkeit deutlich wird (siehe Abbildung 5.6, unten). Die Untersuchungen zum Einfluß der Boxlänge und der Randbedingungen am offenen Seitenrand, die mit dem Finite-Volumen-Vefahren durchgeführt und in Abschnitt 5.1.2 diskutiert worden sind, lassen vermuten, daß die Abweichung der Lösung des spektralen Verfahrens nicht durch die unterschiedlichen Randbedingungen oder Boxgeometrie verursacht werden. Es scheint, daß das spektrale Verfahren die Viskosität in den Bereichen mit starken lateralen Viskositätsvariationen systematisch überschätzt. Auch eine Erhöhung der Gitterauflösung bringt nur eine unwesentliche Verbesserung der Lösung. Die Genauigkeit des spektralen Verfahrens läßt sich nur durch eine deutliche Reduktion der lateralen Viskositätsvariationen verbessern.

Diese Vergleichsrechungen zeigen, daß das Finite-Volumen-Verfahren auch bei großen lokalen Viskositätsvariationen, wie sie bei der Untersuchung der Wechselwirkung von Mantelplumes mit Mittelozeanischen Rücken auftreten, genaue Lösungen liefert. Im Gegensatz dazu haben sich spektrale Verfahren als nur bedingt geeignet für diese Untersuchungen erwiesen. Die hohe Genauigkeit des Finite-Volumen-Verfahrens auch bei großen Viskositätsvariationen ermöglicht es, eine deutlich stärkere Temperaturabhängigkeit der Viskosität zu berücksichtigen als bisher in dreidimensionalen Untersuchungen, die alle auf einem spektralen Lösungsansatz basierten, möglich war.

5.2 Modellrechnungen in 3–D

5.2.1 Untersuchter Parameterbereich

In den folgenden Abschnitten wird der Einfluß verschiedener Modellparameter auf die Wechselwirkung von Mantelplumes mit Mittelozeanischen Rücken in dreidimensionalen Modellrechnungen systematisch untersucht. Skalenanalysen der für die Plume-Rücken-Wechselwirkung relevanten Kräfte haben ergeben, daß es im wesentlichen drei entscheidende Modellparameter gibt [*Feighner und Richards*, 1995; *Ribe et al.*, 1995]: die Spreadingrate des Rückens $2 \cdot u_0$, der Auftriebsfluß B bzw. der Volumenfluß Q des Plumes,

$$B = \rho_0 \alpha \int w\,(T - T_R)\,dx\,dy = \rho_0 \alpha \Delta T_P\, Q\,,$$

der am Boden der Modellbox berechnet wird, und die Viskosität des Plumematerials im Bereich des Rückens, die im folgenden durch den Viskositätskontrast zur Referenzviskosität

des Mantels,

$$\gamma = \eta_0/\eta\,(x=0, y=0, z=0.9)\ ,$$

ausgedrückt wird.

Ich habe Modellrechnungen im Parameterbereich 0.25 cm/a $\leq u_0 \leq$ 4 cm/a, 600 kg/s $\leq B \leq$ 3900 kg/s und $100 \leq \gamma \leq 540\,000$ durchgeführt. Die Spreadingrate kann als direkter Eingabeparameter leicht variiert werden. Der Auftriebsfluß wird durch Variation der Breite der Temperaturanomalie $r_{1/2}$ am offenen Boden der Modellbox bei vorgegebener Temperaturanomalie des Plumes ΔT_P angepaßt. Die Plumeviskosität im Rückenbereich wird durch Variation der Temperatur- und Tiefenabhängigkeit der Viskosität bei vorgegebener Temperaturanomalie des Plumes oder umgekehrt verändert. Insgesamt sind 41 Modellrechnungen gemacht worden, wobei ich versucht habe, den Parameterraum möglichst gut abzudecken. Abbildung 5.7 zeigt die Parameterkombinationen für einen Großteil der Modellrechnungen. Es sind allerdings nicht alle Modelle, in denen der Viskositätskontrast bei festen anderen Modellparametern variiert wird, dargestellt, weil sich der Parameterbereich dieser Modelle teilweise überschneidet. Eine detaillierte Aufstellung der Parameter aller Modellrechnungen findet sich im Anhang A.2.

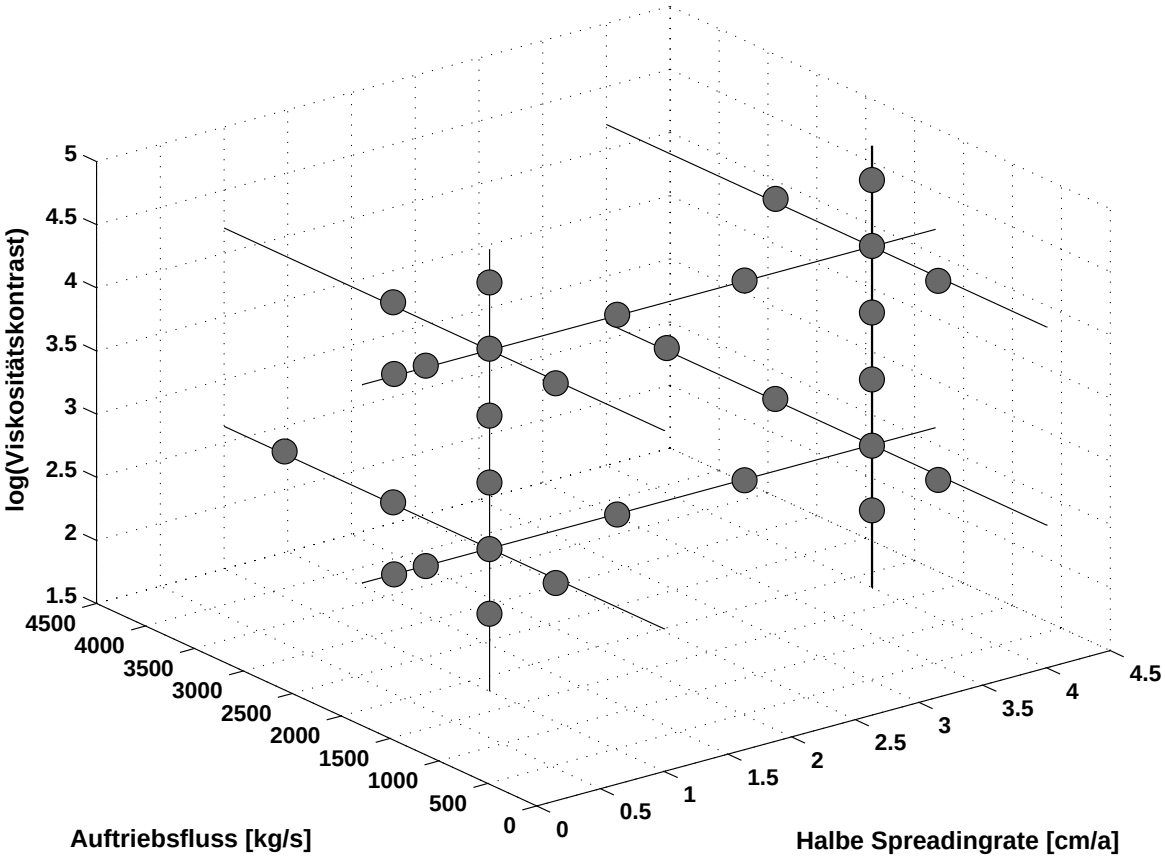

Abbildung 5.7: Untersuchter Parameterbereich der dreidimensionalen Modellrechnungen.

Tabelle 5.2: Parameter des dreidimensionalen Referenzmodells

Parameter	Wert	Einheit	Skalierter Wert
Ra	–	–	96096
l_x	800	km	2
l_y	1200	km	3
E	500	kJ/mol	46.261
V	$4 \cdot 10^{-6}$	m^3/mol	4.885
η_{cut}	10^{23}	Pa s	100
γ	–	–	16253
ΔT_P	300	K	0.23
$r_{1/2}$	42	km	0.105
B	1785	kg/s	128.75
u_0	1.0	cm/a	128.6
x_R	12	km	0.03

Der Parameterbereich für die Spreadingrate und den Auftriebsfluß des Plumes wurde bereits zum Teil von früheren Untersuchungen abgedeckt [*Ribe et al.*, 1995; *Ito et al.*, 1996]. Allerdings waren diese Untersuchungen auf einen Viskositätskontrast von $\gamma < 500$ beschränkt. Damit werden hier Modelle vorgestellt, in denen die Plumeviskosität um bis zu drei Größenordnungen kleiner ist als in früheren Untersuchungen. Alle Modelle haben einen stationären Zustand erreicht, außer Modell 1 mit einer sehr geringen Spreadingrate und einem kleinen Viskositätsunterschied zwischen Plumematerial und Mantel und Modell 19 mit einer starken Tiefenabhängigkeit der Viskosität bei langsamem Spreading des Rückens. In diesen Modellen entwickeln sich periodisch Instabilitäten in der Lithosphäre.

5.2.2 Referenzmodell

Um den Einfluß der verschiedenen Modellparameter auf die Wechselwirkung von Mantelplumes mit Mittelozeanischen Rücken zu untersuchen, werden die Parameter ausgehend von einem Referenzmodell systematisch variiert. Als Referenzmodell wird ein Modell mit geringer Spreadingrate, mittlerem Auftriebsfluß des Plumes und starker Temperatur- und Tiefenabhängigkeit der Viskosität nach (3.26) gewählt (Modell 9.2 im Anhang A.2). Die wichtigsten Modellparameter sind in Tabelle 5.2 aufgeführt. Die übrigen Parameter finden sich im Anhang A.1.

Die Temperaturverteilung und die Strömungsstruktur der stationären Lösung sind in Abbildung 5.8 (oben) dargestellt. Das Plumematerial steigt in einem engen Kanal auf und breitet sich unterhalb des Rückens lateral aus. Die Ausbreitung ist entlang der Spreadingachse deutlich ausgeprägter als in Richtung der Plattenbewegung. Die durch thermische Auskühlung zunehmende Mächtigkeit der Lithosphäre in x-Richtung verhindert, daß das Plumematerial

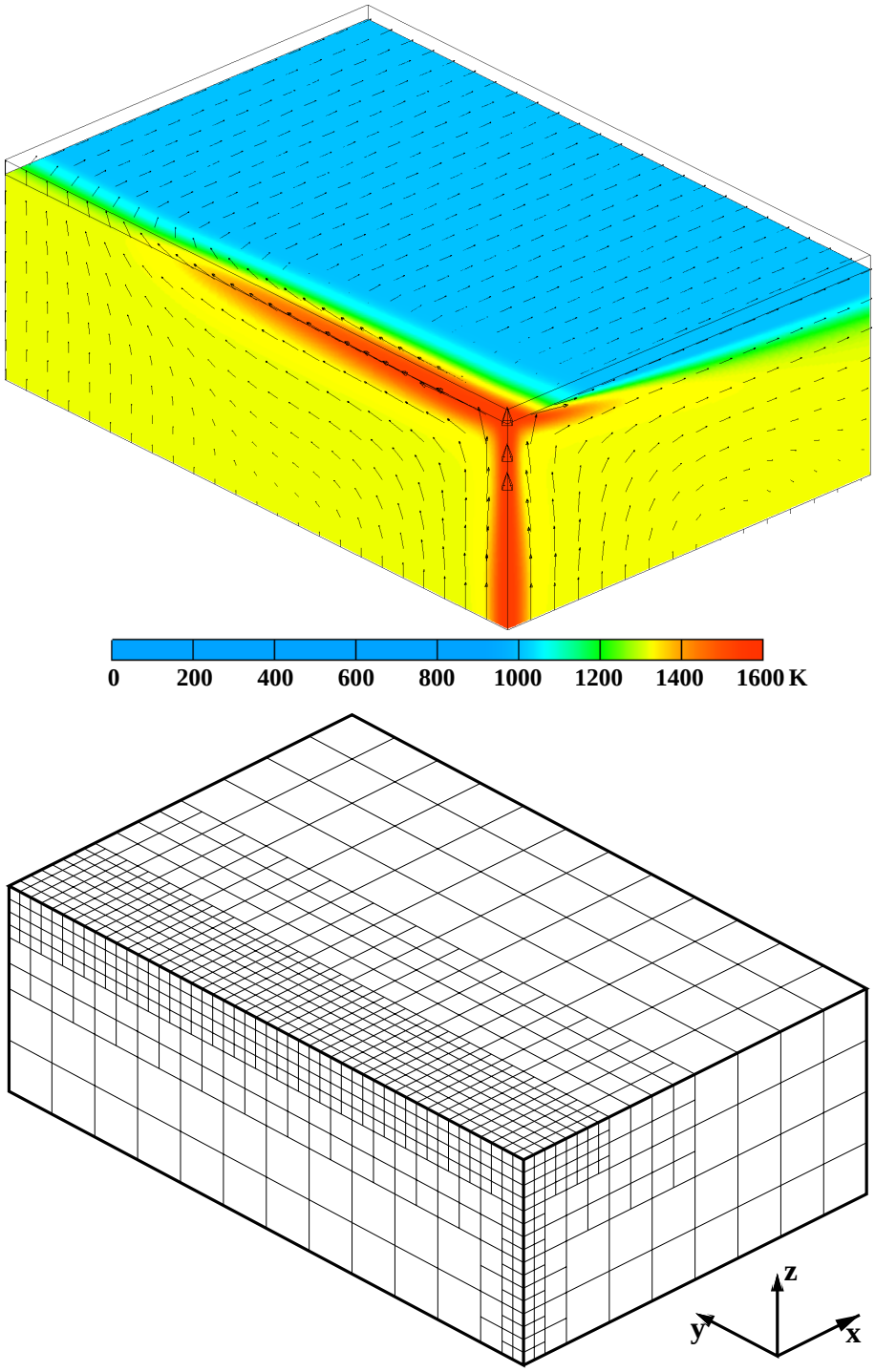

Abbildung 5.8: Temperatur (farbliche Darstellung) und Strömungsstruktur (Pfeile mit Länge proportional zur Wurzel der Geschwindigkeit) für das Referenzmodell mit $u_0 = 1$ cm/a, $B = 1785$ kg/s und $\gamma = 16\,253$ (oben), wobei die obersten 25 km der Modellbox nicht gezeigt werden, und nicht-äquidistantes numerisches Gitter zur Lösung des Problems (unten). Jede dargestellte Gitterzelle setzt sich in der numerischen Rechnung aus 512 Gittervolumen zusammen.

durch die Plattenbewegung von der Spreadingachse wegtransportiert wird. Die Lithosphäre bildet den Rand einer langgestreckten, keilförmigen Region unterhalb des Rückens, so daß der Großteil des Plumematerials entlang der Spreadingachse strömt. Dabei kühlt sich das Plumematerial langsam ab und wird letztendlich in die an der Spreadingachse neu entstehende Lithosphäre integriert.

Die Berechnungen sind auf einem nicht-äquidistanten numerischen Gitter mit Gitterverfeinerungen im Bereich des Plumestamms und entlang der Spreadingachse durchgeführt worden. Die Struktur des numerischen Gitters ist in Abbildung 5.8 (unten) dargestellt. Ein globales Gitter mit $64 \times 96 \times 32$ Gittervolumen, d.h. mit einem Gitterabstand von $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 1/32$, wird durch zwei lokale Gitterebenen verfeinert, so daß der Gitterabstand im Plumestamm und unterhalb der Spreadingachse $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 1/128$ beträgt. Als Auflösungstest sind in Abbildung 5.9 Geschwindigkeitsprofile für unterschiedliche Gitterauflösungen dargestellt. Es zeigt sich, daß der maximale Fehler der numerischen Lösung auf diesem Gitter in der Größenordnung von wenigen Prozent liegt.

Die Aufstiegsgeschwindigkeit des Plumematerials ist wegen der geringen Plumeviskosität sehr hoch und erreicht in der oberen Boxhälfte einen Wert von 40 000 im Zentrum des Plumes, was in dimensionierten Größen einer Geschwindigkeit von etwa 3 m/a entspricht (siehe Abbildung 5.9, oben). Diese Geschwindigkeit ist deutlich größer als die Aufstiegsgeschwindigkeiten in den zweidimensionalen Modellrechnungen (siehe z.B. Abbildung 5.2 auf Seite 70), was hauptsächlich eine Folge der größeren und breiteren Temperaturanomalie des Plumes in der dreidimensionalen Rechnung ist. Allerdings setzt sich diese hohe Geschwindigkeit nicht bis an den Oberrand der Modellbox fort. Im obersten Teil fällt die Vertikalgeschwindigkeit sehr schnell ab, so daß im Bereich direkt unterhalb der Spreadingachse das Material nur in dem Maße nach oben strömt, wie es durch das Spreading vom Rücken wegtransportiert wird.

Die Horizontalgeschwindigkeit in Richtung der Plattenbewegung zeigt, daß die laterale Ausbreitung des Plumematerials in x-Richtung direkt unterhalb der Lithosphäre erfolgt, die sich mit einheitlicher Geschwindigkeit bewegt (siehe Abbildung 5.9, mitte). Entlang der Spreadingachse beschränkt sich die Strömung auf einen engen Kanal, der eine vertikale Ausdehnung von weniger als 50 km hat (siehe Abbildung 5.9, unten). Auch hier zeigt sich, daß die Strömung in den obersten 20 km unterhalb der Spreadingachse, wo durch das Spreading neue Lithosphäre gebildet wird, sehr gering ist und die Ausbreitung des Plumematerials im wesentlichen in einer Tiefe von etwa 40 km unter dem Rücken erfolgt. Ein Vergleich der lateralen Ausbreitung in Richtung der Plattenbewegung und entlang der Spreadingachse zeigt, daß die Ausbreitungsgeschwindigkeit entlang der Spreadingachse um eine Größenordnung höher ist als in Richtung der Plattenbewegung.

In Abbildung 5.10 wird die laterale Ausbreitungsgeschwindigkeit des Plumematerials entlang der Spreadingachse mit der Geschwindigkeit in Richtung der Plattenbewegung in Abhängigkeit von der Entfernung zum Plumezentrum verglichen. Die laterale Ausbreitung ist am Rand des Plumes am größten. In Richtung der Plattenbewegung fällt die Geschwindigkeit allerdings innerhalb von 100 km Entfernung zum Plumezentrum auf die vorgegebene

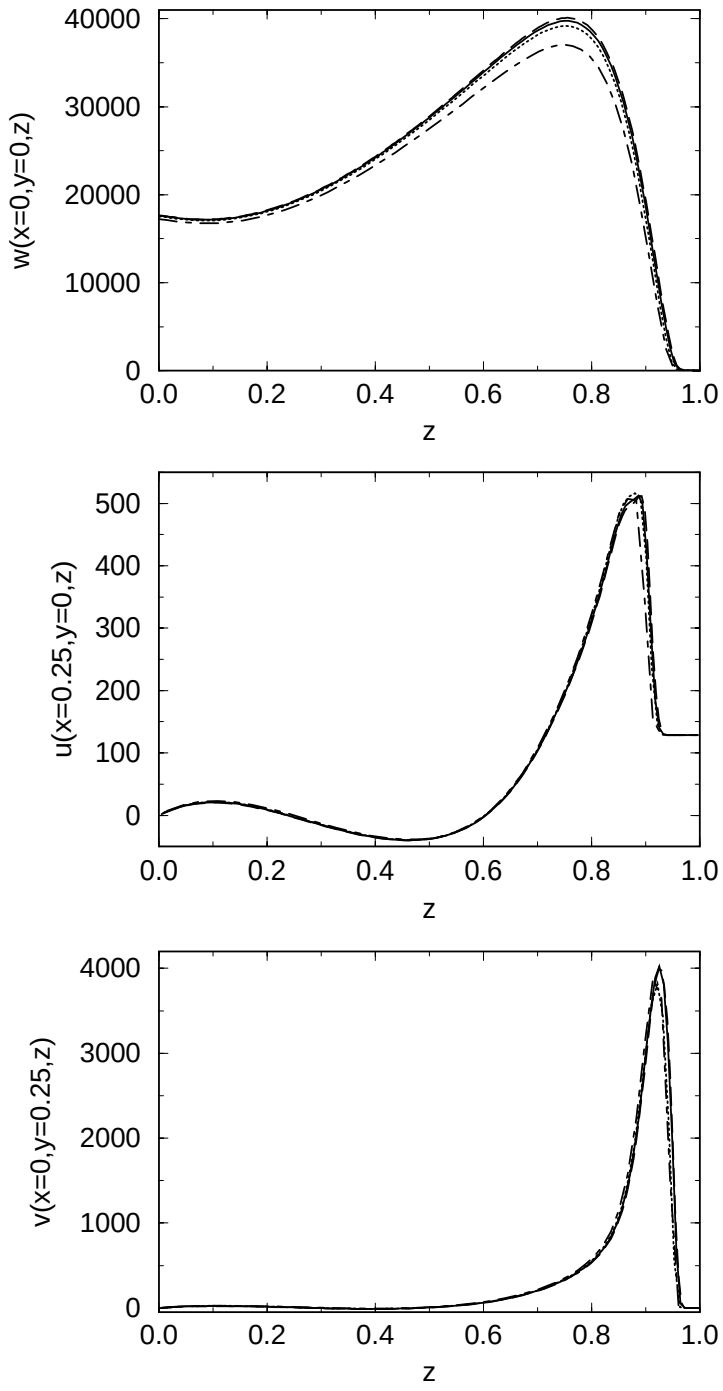

Abbildung 5.9: Vertikalgeschwindigkeit bei $x = 0$, $y = 0$ (oben), Horizontalgeschwindigkeit in Richtung der Plattenbewegung bei $x = 0.25$, $y = 0$ (mitte) und Horizontalgeschwindigkeit entlang der Spreadingachse bei $x = 0$, $y = 0.25$ (unten) als Funktion der Höhe auf nicht-äquidistanten Gittern mit der in Abbildung 5.8 dargestellten Gitterstruktur und $32 \times 48 \times 16$ (gestricheltgepunktet), $48 \times 72 \times 24$ (gepunktet), $64 \times 96 \times 32$ (durchgezogen) und $96 \times 144 \times 48$ (gestrichelt) Gittervolumen auf dem globalen Gitter.

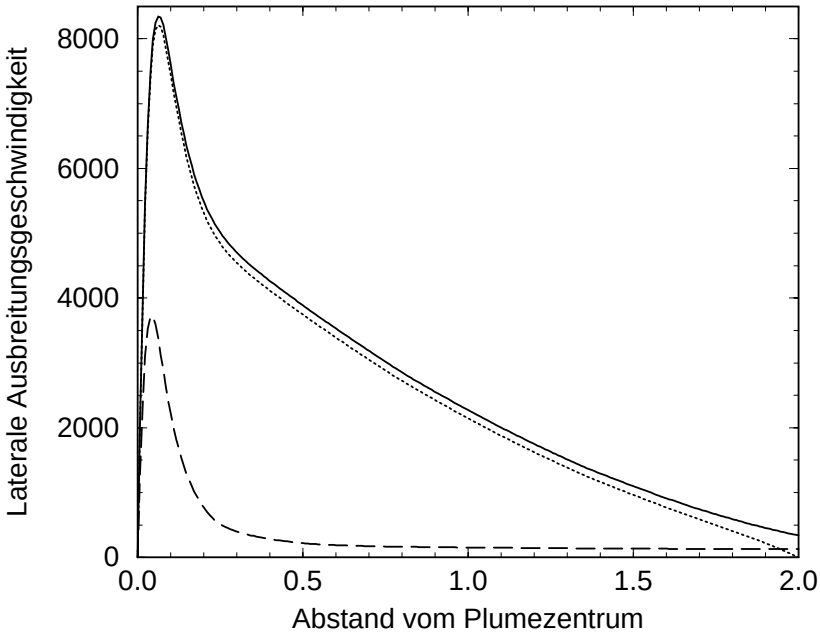

Abbildung 5.10: Laterale Ausbreitungsgeschwindigkeit des Plumematerials in Richtung der Plattenbewegung $u_{\max}(x, y = 0)$ (gestrichelt) und entlang der Spreadingachse $v_{\max}(x = 0, y)$ für $l_y = 2$ (gepunktet) und $l_y = 3$ (durchgezogen) als Funktion des Abstandes vom Plumezentrum. Als laterale Ausbreitungsgeschwindigkeit des Plumematerials wird der über die Tiefe bestimmte Maximalwert der jeweiligen Geschwindigkeitskomponente definiert.

Geschwindigkeit der Plattenbewegung ab. Auf der anderen Seite bleibt die Ausbreitungsgeschwindigkeit entlang der Spreadingachse über einen Entfernungsbereich von mehr als 800 km zum Plumezentrum deutlich größer als die Spreadingrate. Um zu überprüfen, ob der geschlossene Seitenrand bei $y = l_y$ die Ausbreitung des Plumematerials entlang der Spreadingachse behindert, ist in Abbildung 5.10 neben dem Ergebnis für $l_y = 3$ zusätzlich die Geschwindigkeit entlang der Spreadingachse für eine Modellrechnung mit $l_y = 2$ dargestellt. Bei einer Breite der Modellbox von $l_y = 2$ reduziert der geschlossene Seitenrand die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Plumematerials in größerer Entfernung vom Plumezentrum. Ein Vergleich der Ausbreitungsgeschwindigkeit für $l_y = 3$ mit der Geschwindigkeit für eine Modellrechnung mit $l_y = 4$ zeigt allerdings keine Unterschiede, so daß eine Breite der Modellbox von $l_y = 3$ ausreichend ist, um zu verhindern, daß der geschlossene Seitenrand die Ausbreitung des Plumematerials entlang der Spreadingachse beeinträchtigt.

Das hier vorgestellte Modell zur Wechselwirkung eines Mantelplumes mit einem Mittelozeanischen Rücken zeigt eine ausgeprägte Kanalisierung des Plumematerials über große Entfernungen entlang der Spreadingachse. Damit unterscheidet es sich grundlegend von den Modellen, die von *Ribe et al.* [1995] und *Ito et al.* [1996] vorgestellt wurden und in denen keine signifikante Strömung des Plumematerials entlang der Spreadingachse gefunden wurde. Der wesentliche Unterschied des hier vorgestellten Modells zu den Modellen von *Ribe et*

al. [1995] und *Ito et al.* [1996] ist die deutlich geringere Plumeviskosität. In den folgenden Abschnitten wird deshalb genauer untersucht, inwieweit eine Variation der unterschiedlichen Modellparameter das hier vorgestellte Ergebnis des Referenzmodells verändert.

5.2.3 Variation der Spreadingrate und der Plumeviskosität

Um den Einfluß der einzelnen Modellparameter auf die Plume-Rücken-Wechselwirkung zu untersuchen, habe ich Modellserien berechnet, in denen ein Parameter schrittweise variiert wird, während alle anderen Parameter konstant bleiben. Als erstes werde ich den Einfluß der Spreadingrate vorstellen. Dazu werden in Abbildung 5.11 zwei Modelle gezeigt, in denen ausgehend vom Referenzmodell die Plattengeschwindigkeit um den Faktor 4 auf $u_0 = 4$ cm/a erhöht bzw. auf $u_0 = 0.25$ cm/a verringert worden ist (Modelle 12.2 und 7 im Anhang A.2) . Alle anderen Modellparameter entsprechen den Parametern des Referenzmodells. Bei hoher Plattengeschwindigkeit breitet sich der Plume unterhalb des Rückens annähernd radialsymmetrisch aus (siehe Abbildung 5.11, oben), während die Plumestruktur bei geringer Plattengeschwindigkeit entlang der Spreadingachse gestreckt ist (siehe Abbildung 5.11, unten).

Die Spreadingrate beeinflußt die Plume-Rücken-Wechselwirkung in mehrerer Hinsicht. Eine hohe Spreadingrate reduziert zum einen die Zunahme der Lithosphärenmächtigkeit durch thermische Auskühlung in Richtung der Plattenbewegung, die für die Kanalisierung des Plumematerials entlang der Spreadingachse eine entscheidende Rolle spielt, und erhöht die Wärmeabgabe durch die Oberfläche und damit die Abkühlung des Plumematerials an der Rückenachse. Zum anderen führt eine hohe Spreadingrate zu einer verstärkten passiven Advektion des Plumematerials durch die Plattenbewegung weg von der Spreadingachse. Bei kleiner Spreadingrate ist die Wärmeabgabe durch die Oberfläche geringer und die Zunahme der Lithosphärenmächtigkeit in Richtung der Plattenbewegung größer. Dadurch sammelt sich heißes Plumematerial im Rückenbereich und erstreckt sich über große Entfernungen entlang der Spreadingachse. Das Modell in Abbildung 5.11 (unten) hat von allen berechneten Modellen die größte Ausdehnung des Plumematerials entlang der Spreadingachse bis zu einer Entfernung von etwa 1500 km vom Plumezentrum.

Die Plumeviskosität im Bereich des Rückens kann auf unterschiedliche Weise variiert werden. Abbildung 5.12 zeigt die beiden Endresultate einer Modellserie, in der die Temperaturabhängigkeit der Viskosität durch Variation der Aktivierungsenergie über einen Bereich von $E = 100 - 600$ kJ/mol verändert worden ist. Alle übrigen Modellparameter werden konstant gehalten und entsprechen den Parametern des Referenzmodells. In den beiden dargestellten Modellen beträgt der Kontrast zwischen der Viskosität des Plumematerials im Bereich des Rückens und der Referenzviskosität des Mantels $\gamma = 129$ bzw. $\gamma = 54\,416$ (Modelle 13 und 16 im Anhang A.2). Bei geringer Temperaturabhängigkeit der Viskosität ist die Aufstiegsgeschwindigkeit des Plumematerials klein, so daß der Plume relativ breit ist, um den vorgegebenen Auftriebsfluß zu erzeugen. Unterhalb des Rückens ist keine signifikante Kanalisierung des Plumematerials entlang der Spreadingachse zu erkennen (siehe Abbildung 5.12, oben). Dieses ändert sich bei stärkerer Temperaturabhängigkeit der Viskosität. Aufgrund

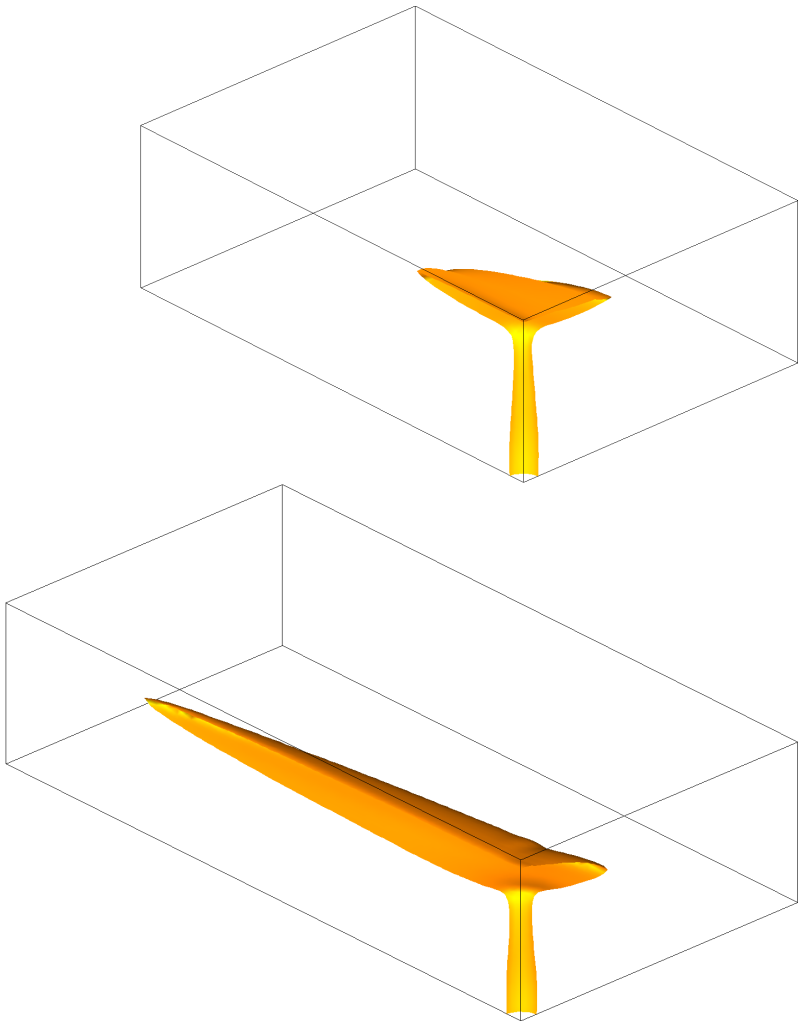

Abbildung 5.11: Variation der Spreadingrate mit $u_0 = 4$ cm/a (oben) und $u_0 = 0.25$ cm/a (unten) für einen Auftriebsfluß des Plumes von $B = 1785$ kg/s, einer Aktivierungsenergie von $E = 500$ kJ/mol, einem Aktivierungsvolumen von $V = 4 \cdot 10^{-6}$ m^3/mol und einer Temperaturanomalie des Plumes von $\Delta T_P = 300$ K. Dargestellt sind Isoflächen der Temperatur mit $T = 1375°$C. Bei geringer Spreadingrate ist die Boxbreite auf $l_y = 4$ erhöht worden.

der höheren Aufstiegsgeschwindigkeit ist der Plume schmaler. Unterhalb des Rückens ist er dabei deutlich entlang der Spreadingachse gestreckt (siehe Abbildung 5.12, unten). Man erkennt, daß mit steigender Temperaturabhängigkeit der Viskosität und damit sinkender Viskosität des Plumematerials die Ausbreitung des Plumematerials entlang der Spreadingachse zunimmt.

Alternativ zur Variation der Temperaturabhängigkeit kann die Plumeviskosität unterhalb der Spreadingachse auch durch Variation der Tiefenabhängigkeit der Viskosität verändert werden. Abbildung 5.13 zeigt Modelle mit einem Aktivierungsvolumen von $V = 2 \cdot 10^{-6}$ m^3/mol und $V = 6 \cdot 10^{-6}$ m^3/mol. Alle übrigen Modellparameter entsprechen den Parame-

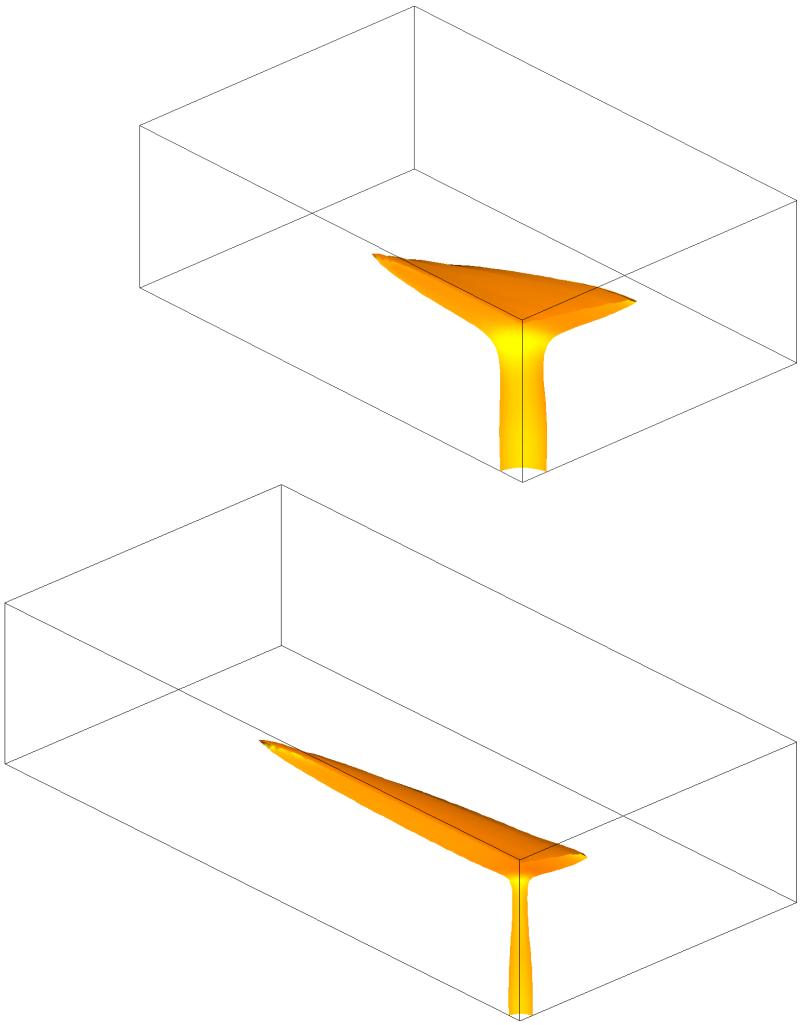

Abbildung 5.12: Variation der Aktivierungsenergie mit $E = 100$ kJ/mol (oben) und $E = 600$ kJ/mol (unten) für eine Spreadingrate von $u_0 = 1$ cm/a, einen Auftriebsfluß des Plumes von $B = 1785$ kg/s, einem Aktivierungsvolumen von $V = 4 \cdot 10^{-6}$ m^3/mol und einer Temperaturanomalie des Plumes von $\Delta T_P = 300$ K. Dargestellt sind Isoflächen der Temperatur mit $T = 1375^\circ$C. Bei hoher Aktivierungsenergie ist die Boxbreite auf $l_y = 4$ erhöht worden.

tern des Referenzmodells. In diesen Modellen beträgt der Viskositätskontrast $\gamma = 2574$ bzw. $\gamma = 98\,940$ (Modelle 17 und 18 im Anhang A.2). Anders als bei der Variation der Aktivierungsenergie hat das Aktivierungsvolumen keinen großen Einfluß auf die Plumeviskosität am unteren Rand der Modellbox. Aus diesem Grund ändert sich dort die Plumebreite bei Variation des Aktivierungsvolumens nur wenig. Bei geringer Tiefenabhängigkeit der Viskosität bleibt die Breite des Plumes während des Aufstiegs nahezu konstant (siehe Abbildung 5.13, oben). Bei starker Tiefenabhängigkeit wird die Viskosität mit zunehmender Höhe kleiner, die Aufstiegsgeschwindigkeit des Plumematerials größer und der Plume deshalb schmaler (siehe Abbildung 5.13, unten). Auch hier erkennt man, daß mit größerer Tiefenabhängigkeit

der Viskosität und damit kleinerer Viskosität im Bereich des Rückens die Konzentration des Plumematerials auf den Rückenbereich zunimmt.

Ich habe zusätzlich noch ein Modell mit einem Aktivierungsvolumen von $V = 8 \cdot 10^{-6}$ m^3/mol berechnet. Ansonsten entsprechen die Modellparametern den Parametern des Referenzmodells. Aufgrund der starken Tiefenabhängigkeit der Viskosität ist in diesem Modell der Kontrast zwischen Plumeviskosität im Bereich des Rückens und Referenzviskosität des Mantels mit $\gamma = 538\,733$ von allen berechneten Modellen am größten (Modell 19 im Anhang A.2). Allerdings hat das Aktivierungsvolumen im Unterschied zur Aktivierungsenergie nicht nur Einfluß auf die Plumeviskosität. Auch die Viskosität des Mantelmaterials unter-

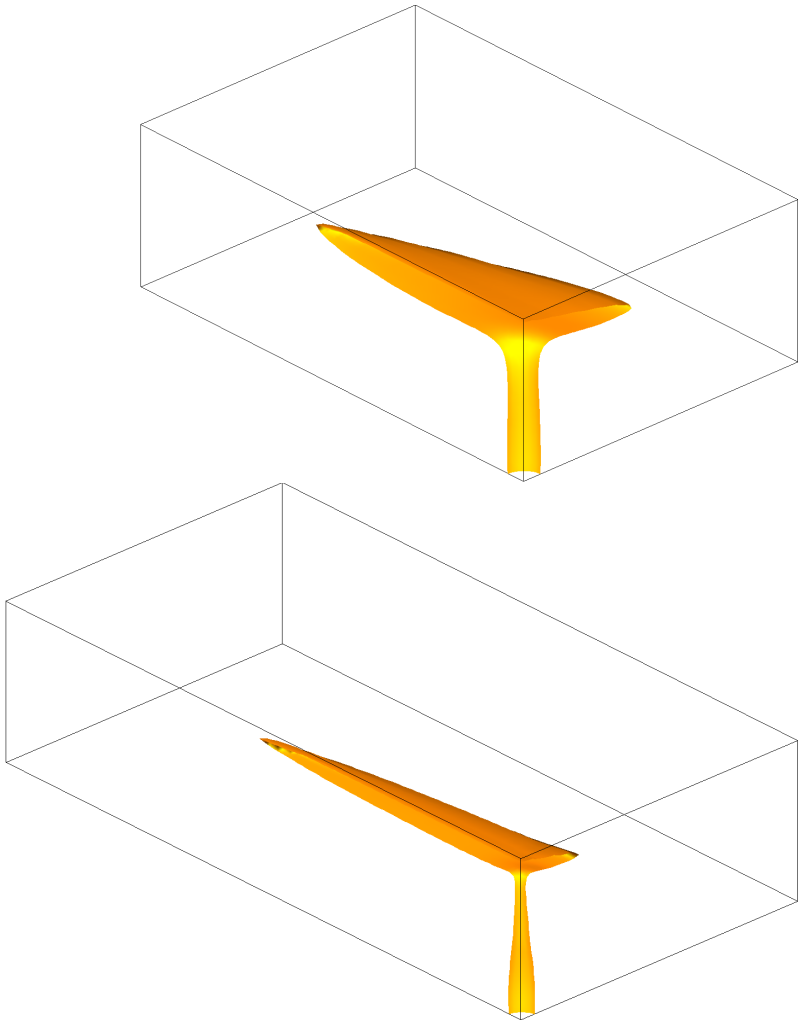

Abbildung 5.13: Variation des Aktivierungsvolumens mit $V = 2 \cdot 10^{-6}$ m^3/mol (oben) und $V = 6 \cdot 10^{-6}$ m^3/mol (unten) für eine Spreadingrate von $u_0 = 1$ cm/a, einen Auftriebsfluß des Plumes von $B = 1785$ kg/s, einer Aktivierungsenergie von $E = 500$ kJ/mol und einer Temperaturanomalie des Plumes von $\Delta T_P = 300$ K. Dargestellt sind Isoflächen der Temperatur mit $T = 1375°$C. Bei hohem Aktivierungsvolumen ist die Boxbreite auf $l_y = 4$ erhöht worden.

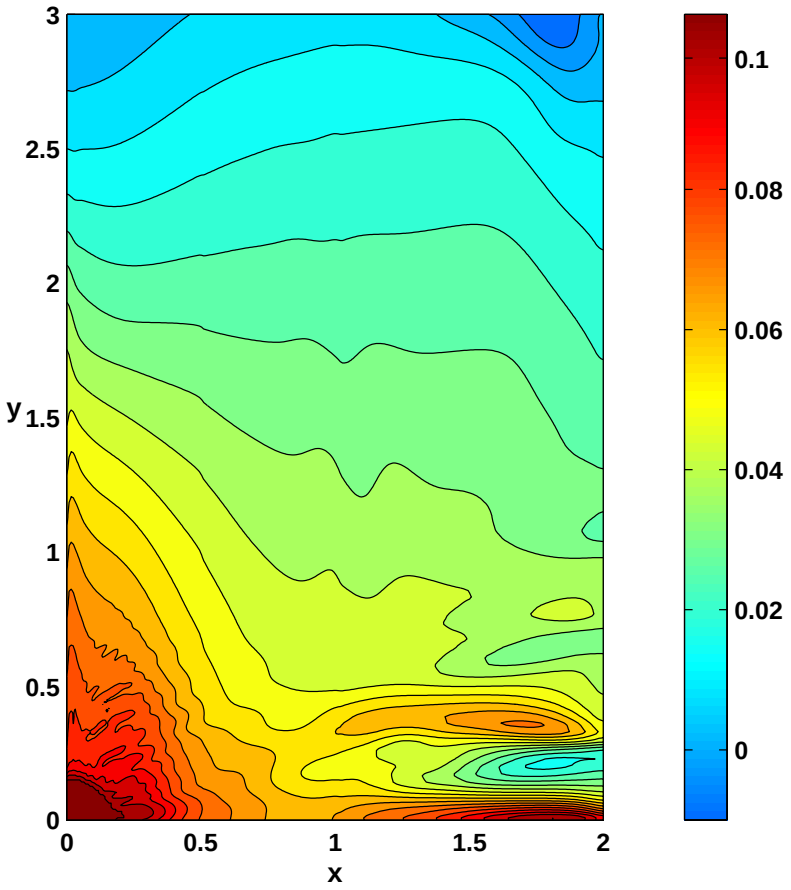

Abbildung 5.14: Temperaturanomalie nach (5.1) für ein Modell mit einem Aktivierungsvolumen von $V = 8 \cdot 10^{-6}$ m^3/mol. Alle anderen Modellparameter entsprechen den Parametern der Modelle in Abbildung 5.13. Nur ein Ausschnitt des Modellgebiets ($l_y = 4$) wird gezeigt.

halb der Lithosphäre wird in diesem Modell um drei Größenordnungen reduziert. Dadurch wird die Lithosphäre instabil und eine kleinräumige Konvektion unterhalb der Lithosphäre setzt ein. Um dieses zu verdeutlichen, ist in Abbildung 5.14 die in vertikaler Richtung aufintegrierte Temperaturanomalie,

$$S = \frac{1}{\Delta T_P} \int_0^1 \delta T \, dz \,, \tag{5.1}$$

mit δT Temperaturanomalie relativ zu einem Modell ohne Plume dargestellt. Man erkennt kleinräumige Temperaturvariationen im Randbereich des Plumes und langgestreckte Anomalien in Richtung der Plattenbewegung in größerer Entfernung von der Spreadingachse, die eine ähnliche Form wie Richter-Rollen [*Richter*, 1973] haben. Obwohl die Lösung insgesamt leicht zeitabhängig ist, bleiben diese Strukturen über den gesamten berechneten Zeitraum erhalten.

Der Einsatz kleinräumiger Konvektion unterhalb der Lithosphäre wurde bereits zuvor so-

wohl in experimentellen Untersuchungen zur Ausbreitung eines niedrigviskosen Plumekopfes unter einer höherviskosen Lithosphäre [*Griffiths und Campbell*, 1991] als auch in numerischen Untersuchungen zur Plume-Lithosphären-Wechselwirkung mit stark tiefenabhängiger Viskosität [*Yuen und Fleitout*, 1985; *Olson et al.*, 1988; *van Keken und Gable*, 1995] oder mit stark temperaturabhängiger Viskosität [*Moore et al.*, 1998] gefunden. Es hat sich gezeigt, daß derartige Instabilitäten der Lithosphäre immer dann auftreten, wenn die Viskosität in der Asthenosphäre sehr gering ist.

Neben der Variation der Temperatur- und Tiefenabhängigkeit kann die Viskosität ebenfalls durch eine Variation der Temperaturanomalie des Plumes verändert werden. Die Ergebnisse für Temperaturanomalien von $\Delta T_P = 100$ K und $\Delta T_P = 400$ K sind in Abbildung 5.15 dargestellt. Die übrigen Modellparameter entsprechen wieder den Parametern des Referenzmodells. Allerdings wird in den Modellen nicht der Auftriebsfluß, der proportional zur Temperaturanomalie des Plumes ist, sondern der Volumenfluß des Plumes konstant gehalten. In den dargestellten Modellen ergeben sich Viskositätskontraste zwischen dem Plumematerial im Bereich des Rückens und dem Mantelmaterial am unteren Rand der Modellbox von $\gamma = 374$ bzw. $\gamma = 86\,894$ (Modelle 20 und 22 im Anhang A.2). Bei einer geringen Temperaturanomalie ist der Plume sehr breit, und es ist nur eine leichte Ausdehnung entlang der Spreadingachse zu erkennen (siehe Abbildung 5.15, oben). Bei einer hohen Temperaturanomalie ist der Plume schmaler, und die Konzentration des Plumematerials auf den Rückenbereich nimmt zu. Die oben vorgestellten Ergebnisse zeigen, daß sich das Plumematerial deutlich entlang der Spreadingachse ausbreitet, wenn die Plumeviskosität im Bereich des Rückens gering ist. Dabei ist es unerheblich, auf welche Art die Plumeviskosität verringert wird. Variationen der Temperatur- oder Tiefenabhängigkeit der Viskosität oder der Temperaturanomalie des Plumes liefern ähnliche Resultate.

Bisher sind in diesem Abschnitt Ergebnisse vorgestellt worden, in denen die Spreadingrate und die Plumeviskosität getrennt voneinander variiert worden sind. In Abbildung 5.16 sind Modelle zusammengestellt, in denen sowohl die Spreadingrate als auch die Plumeviskosität variiert werden. Der Auftriebsfluß ist in allen Modellen gleich. Eine Reduktion der Spreadingrate führt unabhängig von der Plumeviskosität zu einer stärkeren Ausbreitung des Plumematerials entlang der Spreadingachse (vergleiche die linke und rechte Spalte in Abbildung 5.16). Eine Verringerung der Plumeviskosität erzeugt dagegen nur bei einer geringen Spreadingrate eine stärkere Konzentration des Plumematerials auf den Rückenbereich (vergleiche Modelle a und c in Abbildung 5.16). Dagegen hat die Plumeviskosität bei einer hohen Spreadingrate nur einen geringen Einfluß. Auch bei einer geringen Plumeviskosität kommt es zu keiner signifikanten Strömung des Plumematerials entlang der Spreadingachse (siehe Modelle b und d in Abbildung 5.16). Diese Ergebnisse zeigen, daß sowohl eine geringe Spreadingrate als auch eine niedrige Viskosität des Plumematerials im Bereich des Rückens erforderlich sind, um eine ausgeprägte Strömung des Plumematerials entlang der Spreadingachse zu erhalten.

Der Einfluß der Plumeviskosität auf die Wechselwirkung von Mantelplumes mit Mittelozeanischen Rücken erklärt, weshalb in früheren Modellrechnungen von *Ribe et al.* [1995]

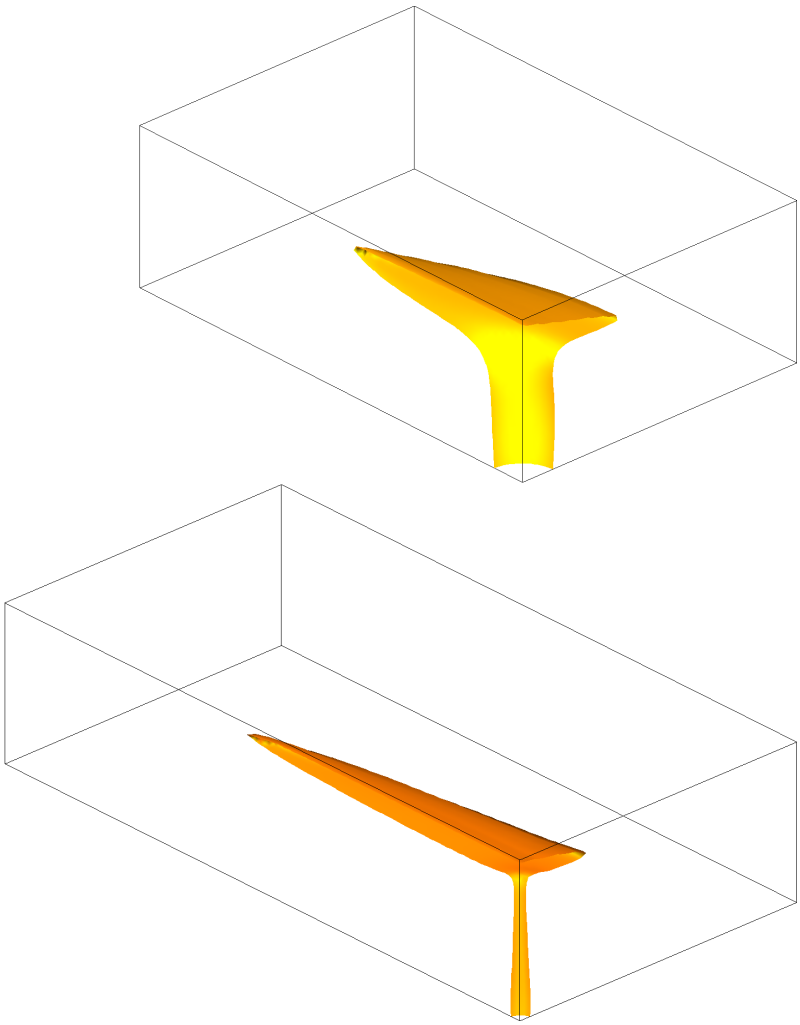

Abbildung 5.15: Variation der Temperaturanomalie des Plumes mit $\Delta T_P = 100$ K (oben) und $\Delta T_P = 400$ K (unten) für eine Spreadingrate von $u_0 = 1$ cm/a, einer Aktivierungsenergie von $E = 500$ kJ/mol und einem Aktivierungsvolumen von $V = 4 \cdot 10^{-6}$ m^3/mol. Der Auftriebsfluß beträgt $B = 619$ kg/s für $\Delta T_P = 100$ K und $B = 2398$ kg/s für $\Delta T_P = 400$ K bei konstantem Volumenfluß Q des Plumes. Dargestellt sind Isoflächen der Temperatur mit einem Viertel der maximalen Temperaturanomalie des Plumes, d.h. $T = 1325^\circ$C (oben) und $T = 1400^\circ$C (unten). Bei hoher Temperaturanomalie ist die Boxbreite auf $l_y = 4$ erhöht worden.

und *Ito et al.* [1996] keine signifikante Kanalisierung des Plumematerials entlang der Spreadingachse gefunden wurde. Diese Untersuchungen waren auf einen Parameterbereich mit geringen Viskositätsvariationen beschränkt, wie sie in den Modellen der unteren Reihe in Abbildung 5.16 auftreten. Die hier vorgestellten Ergebnisse zeigen, daß die Plumeviskosität in den früheren Untersuchungen nicht klein genug war, um das Plumematerial auf den Rückenbereich zu konzentrieren.

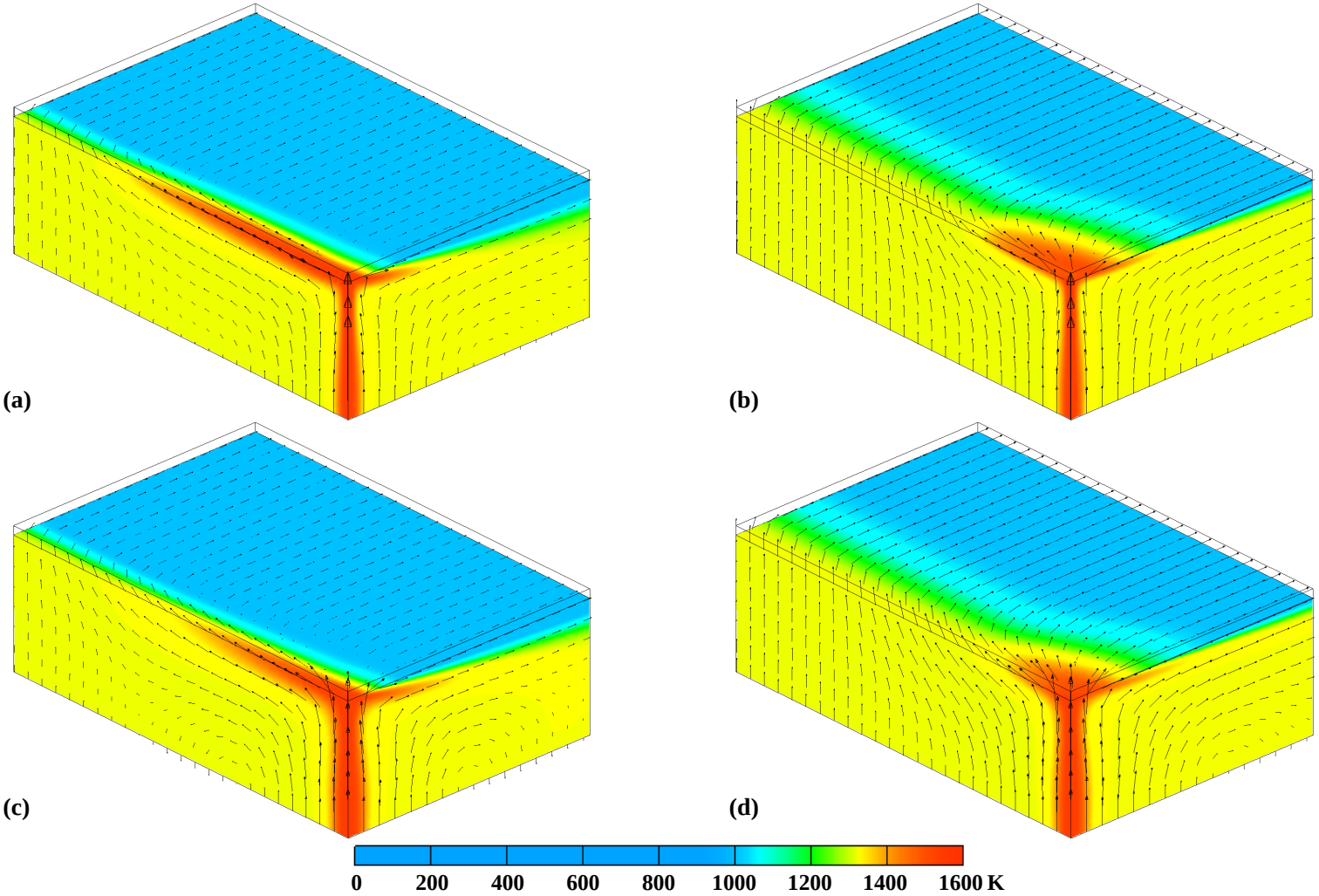

Abbildung 5.16: Temperaturfelder für (a) $u_0 = 1$ cm/a, $\gamma = 16\,253$ (Modell 9.2), (b) $u_0 = 4$ cm/a, $\gamma = 16\,024$ (Modell 12.2), (c) $u_0 = 1$ cm/a, $\gamma = 423$ (Modell 3.2) und (d) $u_0 = 4$ cm/a, $\gamma = 420$ (Modell 6.2). In allen Modellen beträgt der Auftriebsfluß des Plumes $B = 1785$ kg/s.

5.2.4 Variation des Plumeflusses

Im vorhergehenden Abschnitt ist der Einfluß der Spreadingrate und der Plumeviskosität in Modellen untersucht worden, in denen der Plumefluß annähernd konstant gehalten wurde. In diesem Abschnitt wird der Plumefluß bei konstanter Spreadingrate und Plumeviskosität variiert. Dazu sind in Abbildung 5.17 zwei Modelle dargestellt, in denen ausgehend von den Parametern des Referenzmodells in Tabelle 5.2 auf Seite 79 der Auftriebsfluß des Plumes auf $B = 1109$ kg/s verringert bzw. auf $B = 2771$ kg/s erhöht worden ist (Modelle 9.1 und 9.3 im Anhang A.2). Der Vergleich dieser Modelle zeigt, daß mit steigendem Plumefluß die

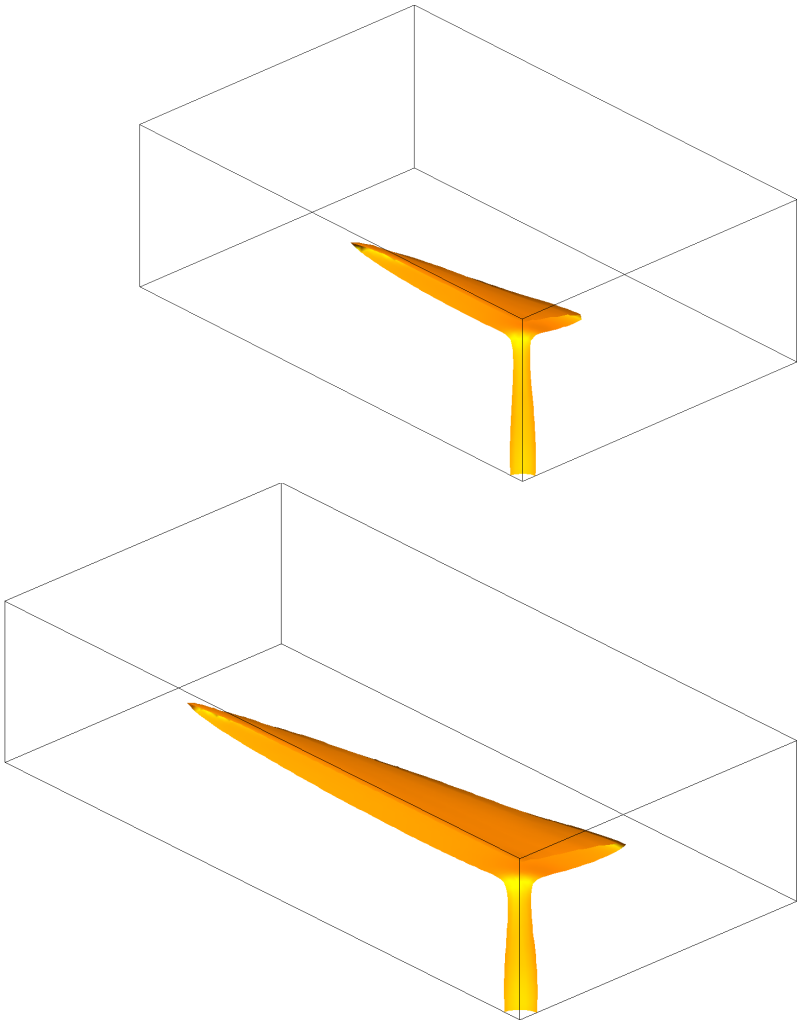

Abbildung 5.17: Variation des Auftriebsflusses des Plumes mit $B = 1109$ kg/s (oben) und $B = 2771$ kg/s (unten) für eine Spreadingrate von $u_0 = 1$ cm/a, einer Aktivierungsenergie von $E = 500$ kJ/mol, einem Aktivierungsvolumen von $V = 4 \cdot 10^{-6}$ m^3/mol und einer Temperaturanomalie des Plumes von $\Delta T_P = 300$ K. Dargestellt sind Isoflächen der Temperatur mit $T = 1375°$C. Bei hohem Auftriebsfluß ist die Boxbreite auf $l_y = 4$ erhöht worden.

Ausbreitung des Plumematerials entlang der Spreadingachse größer wird. Im Unterschied zur Variation der Spreadingrate oder der Plumeviskosität ändert sich die Form der Plumestruktur allerdings nicht, wenn der Auftriebsfluß variiert wird. Ob eine Kanalisierung des Plumematerials entlang der Spreadingachse auftritt, oder ob sich das Plumematerial eher radialsymmetrisch unterhalb des Rückens ausbreitet, wird nicht durch den Auftriebsfluß des Plumes beeinflußt. Eine Variation des Plumeflusses ändert lediglich die totale laterale Ausdehnung des Plumes in beiden Raumrichtungen, so daß der Plume mit steigendem Auftriebsfluß insgesamt größer wird.

5.3 Skalierungsgesetz zur Plumeausbreitung unter Mittelozeanischen Rücken

5.3.1 Analytische Bestimmung der Skalierungsgrößen

Die numerischen Modellrechnungen haben gezeigt, daß die Ausbreitung des Plumematerials unter Mittelozeanischen Rücken stark von verschiedenen Parametern beeinflußt wird. In diesem Abschnitt wird ein Skalierungsgesetz vorgestellt, das die Breite des Plumes entlang der Spreadingachse in Abhängigkeit der Modellparameter beschreibt.

Um die zugrundeliegende Dynamik der Plume-Rücken-Wechselwirkung zu verstehen und geeignete Skalierungsgrößen abzuleiten, haben sich analytische Betrachtungen von Flüssigkeitsströmungen in dünnen Schichten ("*lubrication theory*"), in denen angenommen wird, daß die laterale Ausdehnung des Plumematerials unterhalb der Lithosphäre deutlich größer ist als die Schichtdicke des Plumematerials, als sehr erfolgreich erwiesen. *Olson* [1990] und *Ribe und Christensen* [1994] haben diesen Ansatz zur Untersuchung der Plume-Lithosphären-Wechselwirkung verwendet. Eine Erweiterung auf die Wechselwirkung von Mantelplumes mit Mittelozeanischen Rücken wurde von *Ribe et al.* [1995], *Ribe* [1996] und *Ribe und Delattre* [1998] vorgestellt. In beiden Fällen haben sich gute Übereinstimmungen der durch diese vereinfachten Untersuchungen vorhergesagten Skalenabhängigkeiten mit Ergebnissen dreidimensionaler Modellrechnungen mit variabler Viskosität ergeben [*Ribe und Christensen*, 1994; *Ribe et al.*, 1995; *Ito et al.*, 1996; *Ito et al.*, 1997]. Weil dieser Ansatz der Flüssigkeitsströmung in dünnen Schichten die Grundlage für die Herleitung des Skalierungsgesetzes zur Plumeausbreitung unter Mittelozeanischen Rücken bildet, werden die wesentlichen Punkte im folgenden kurz vorgestellt. Eine detaillierte Beschreibung findet sich bei *Ribe et al.* [1995] und *Ribe* [1996].

Ausgangspunkt für die vereinfachte Beschreibung der Plume-Rücken-Wechselwirkung ist ein Halbraum mit konstanter Viskosität und Dichte unterhalb einer hochviskosen Lithosphäre, deren Mächtigkeit mit größerer Entfernung zum Mittelozeanischen Rücken zunimmt. Eine Skizze des Modells wird in Abbildung 5.18 gezeigt. Durch das vorgegebene Spreading am Mittelozeanischen Rücken wird eine Strömung im Halbraum erzeugt. Plumematerial mit geringerer Viskosität und Dichte wird durch eine Punktquelle in diese Hintergrundströmung

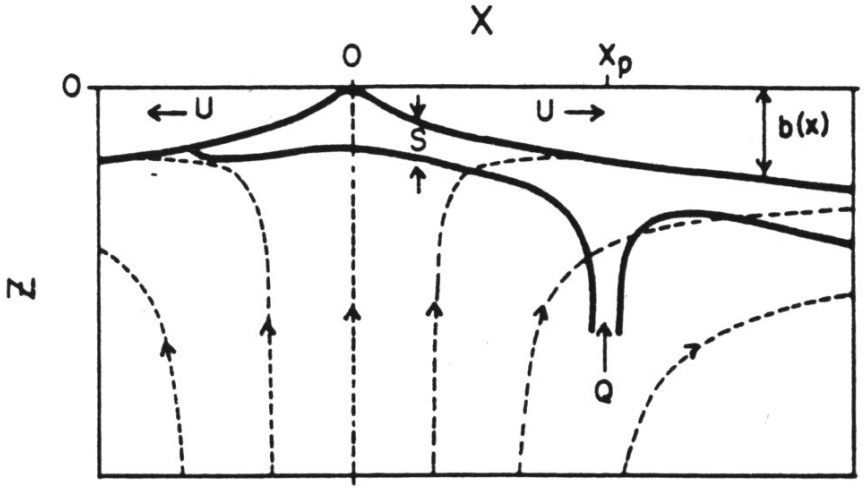

Abbildung 5.18: Skizze des Modells zur vereinfachten Beschreibung der Wechselwirkung von Mantelplumes mit Mittelozeanischen Rücken durch eine Theorie der Flüssigkeitsströmung in dünnen Schichten (entnommen aus *Ribe* [1996]).

injiziert und breitet sich unterhalb der Lithosphäre aus. Unter der Annahme, daß diese laterale Ausbreitung in einer Schicht mit geringer vertikaler Ausdehnung erfolgt, berechnet sich die Schichtdicke $S(x,y)$ des Plumematerials durch folgende Beziehung (siehe *Ribe et al.* [1995] und *Ribe* [1996] zur Herleitung der Gleichung),

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\Psi(x, S+b) - \sigma\vec{\nabla}_H^2 S^4 - 4\sigma\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial b}{\partial x}S^3\right) = Q\,\delta(x-x_P)\,\delta(y) \ , \tag{5.2}$$

mit Ψ Stromfunktion der Hintergrundströmung, $b \sim (\kappa x/u_0)^{1/2}$ Lithosphärendicke, Q Volumenfluß des Plumes, $\vec{\nabla}_H^2$ horizontaler Laplace-Operator und δ Deltafunktion. Der Parameter $\sigma = g\Delta\rho/48\eta_P$ mit $\Delta\rho$ Dichteunterschied zwischen Mantel- und Plumematerial und η_P Plumeviskosität ist im wesentlichen ein Maß für den Auftrieb des Plumematerials. Im stationären Fall beschreibt (5.2) das Gleichgewicht zwischen der horizontalen Ausbreitung des Plumematerials durch passive Advektion mit der Hintergrundströmung, durch Auftrieb des Plumematerials und durch Strömung entlang des geneigten Unterrandes der Lithosphäre auf der linken Seite und der Injektion des Plumematerials auf der rechten Seite. Dieser vereinfachte Ansatz hat den Vorteil, daß die für die Plume-Rücken-Wechselwirkung relevanten Kräfte explizit in (5.2) auftreten. Dadurch läßt sich der Einfluß der einzelnen Kräfte auf die Dynamik des Gesamtsystems deutlich einfacher bestimmen, als es in den dreidimensionalen Modellrechnungen möglich ist.

Durch Abschätzung der Größenordnung der Terme in (5.2) können Skalierungsgrößen für die Schichtdicke S und die Plumebreite L senkrecht zur Richtung der Plattenbewegung angegeben werden. Die Längenskala für die Schichtdicke S ergibt sich durch Gleichsetzen des Quellterms ($\sim Q/L^2$) mit der durch den Auftrieb verursachten Ausbreitung des Plumemate-

rials ($\sim \sigma S^4/L^2$) als [*Ribe et al.*, 1995; *Ribe*, 1996],

$$S \sim \left(\frac{Q}{\sigma}\right)^{\frac{1}{4}} \equiv S_0 \,.$$

Die Längenskala für die Plumebreite L resultiert aus einer Balance des Quellterms mit der passiven Advektion durch die Hintergrundströmung. In großer Entfernung zur Spreadingachse ergibt sich für die Hintergrundströmung $\partial\Psi/\partial x \sim u_0 S/L$ und damit [*Ribe et al.*, 1995; *Ribe*, 1996],

$$L \sim \frac{Q^{\frac{3}{4}}\sigma^{\frac{1}{4}}}{u_0} \equiv L_0 \,.$$

Für die Plumebreite direkt an der Spreadingachse folgt dagegen mit $\partial\Psi/\partial x \sim u_0$ [*Ribe et al.*, 1995; *Ribe*, 1996],

$$L \sim \left(\frac{Q}{u_0}\right)^{\frac{1}{2}} \equiv W_0 \,.$$

Diese Längenskalen werden im folgenden verwendet, um ein Skalierungsgesetz für die Plumebreite an Mittelozeanischen Rücken abzuleiten.

5.3.2 Berechnung der Plumebreite in den numerischen Modellen

In den Arbeiten von *Ribe et al.* [1995] und *Ribe* [1996] wird die Plumebreite W an der Spreadingachse als die Entfernung zum Plumezentrum definiert, bei der die normierte Schichtdicke S/S_0 des Plumematerials unter einen vorgegebenen Wert gefallen ist,

$$S\,(x=0, y=W/2) \;=\; 0.1 \cdot S_0 \,. \tag{5.3}$$

Ich übernehme diese Definition, um die Plumebreite in den numerischen Modellen zu bestimmen. Allerdings sind geringfügige Modifikationen notwendig, um die im letzten Abschnitt unter der Annahme einer konstanten Plumeviskosität η_P abgeleiteten Längenskalen auf die dreidimensionalen Modelle mit variabler Viskosität zu übertragen. Der Parameter σ, der in die Berechnung der Längenskalen S_0 und L_0 eingeht, ergibt sich aus dem Dichteunterschied zwischen Mantel- und Plumematerial und der Plumeviskosität. In den dreidimensionalen Modellen verwende ich die Werte im Zentrum des Plumes in einer Höhe von $z = 0.9h$ als repräsentative Werte für die laterale Ausbreitung des Plumematerials, so daß sich der Parameter σ wie folgt berechnet,

$$\sigma \;=\; \frac{g\Delta\rho}{48\eta_0}\gamma \,,$$

mit $\Delta\rho = \rho_0\alpha(T(x=0, y=0, z=0.9) - T_R)$. Die Schichtdicke S des Plumematerials berechne ich nach Gleichung (5.1) auf Seite 88 durch Aufintegration der Temperaturanomalie

in vertikaler Richtung relativ zu einem Modell ohne Plume. Auf dieselbe Weise haben auch *Ribe et al.* [1995] die Schichtdicke in ihren dreidimensionalen Modellen bestimmt. Unter der Annahme lokaler isostatischer Kompensation entspricht diese aufintegrierte Temperaturanomalie der durch den Plume erzeugten dynamischen Topographieanomalie [*Ribe et al.*, 1995],

$$\delta\xi = \frac{\rho_0 \alpha \Delta T_P}{(\rho_0 - \rho_w)} S ,$$

mit ρ_w Dichte des Seewassers.

Abbildung 5.19 zeigt Profile der Schichtdicke S entlang der Spreadingachse für die in Abbildung 5.16 dargestellten Modelle. Die Ergebnisse zeigen, daß die Ausbreitung des Plumematerials entlang der Spreadingachse bei geringerer Spreadingrate größer ist. Man erkennt aber auch, daß der Abfall der Kurven bei kleiner Plumeviskosität zunächst gering ist und sich am Rand des Plumes ein schärferer Übergang von Plumematerial zu normalem Mantel ergibt, während der Übergang bei hoher Plumeviskosität eher kontinuierlich stattfindet (siehe Abbildung 5.19, oben). In allen Modellen erzeugt der Plumestamm sehr große Werte nahe des Plumezentrums. Nach Normierung der Schichtdicke S mit der Längenskala S_0 ergibt sich ein Versatz der Kurven mit unterschiedlicher Plumeviskosität, weil die Längenskala S_0 von der Plumeviskosität abhängt. Bei geringer Plumeviskosität und damit großem Viskositätskontrast zwischen Plumematerial und Mantel wird der Parameter σ größer und S_0 kleiner, so daß die Kurven der normierten Schichtdicke für eine geringe Plumeviskosität deutlich über den Kurven für eine höhere Plumeviskosität liegen (siehe Abbildung 5.19, unten).

Aus diesen normierten Profilen für die Schichtdicke S habe ich die Plumebreite für alle Modellrechnungen nach Gleichung (5.3) bestimmt. Die Ergebnisse mit den entsprechenden Werten für die Längenskalen sind im Anhang A.3 zusammengestellt. Im folgenden Abschnitt wird die Abhängigkeit dieser Plumebreite von den Modellparametern durch ein Skalierungsgesetz beschrieben.

5.3.3 Abhängigkeit der Plumebreite von den Modellparametern

Die numerische Lösung der Gleichung (5.2) für unterschiedliche Parameterkombinationen hat ergeben, daß die normierte Plumebreite W/W_0 in erster Näherung nur von einem dimensionslosen Parameter, der sogenannten Auftriebszahl,

$$\Pi_b = \frac{Q\sigma}{{u_0}^2} \sim \frac{Q\gamma}{{u_0}^2} , \tag{5.4}$$

abhängt [*Ribe et al.*, 1995; *Ribe*, 1996]. Dreidimensionale Modellrechnungen mit leicht variabler Viskosität haben eine solche Abhängigkeit der Plumebreite von den Modellparametern bestätigt [*Ribe et al.*, 1995; *Ito et al.*, 1996]. Allerdings bleibt dabei unklar, ob der große Einfluß starker Viskositätsvariationen auf die Ausbreitung des Plumematerials entlang der Spreadingachse, den die hier vorgestellten Modellrechnungen gezeigt haben, adäquat durch

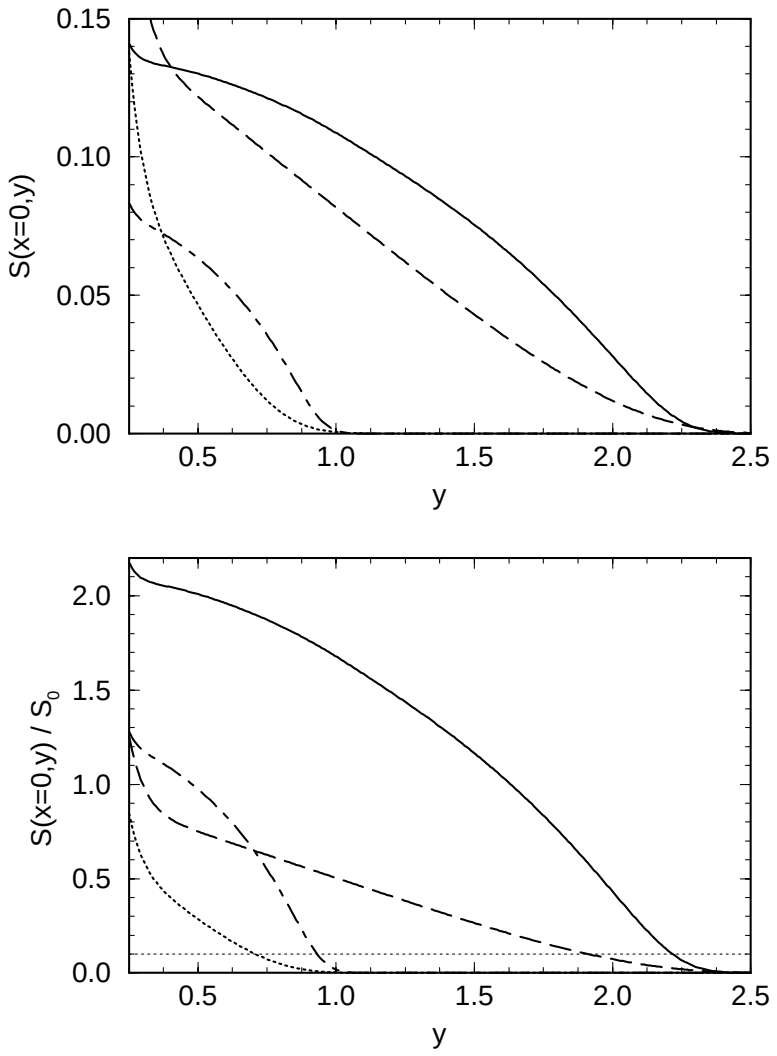

Abbildung 5.19: Schichtdicke des Plumematerials an der Spreadingachse (oben) und normierte Schichtdicke an der Spreadingachse (unten) als Funktion der Entfernung zum Plumezentrum für die in Abbildung 5.16 dargestellten Modelle mit $u_0 = 1$ cm/a, $\gamma = 16\,253$ (Modell 9.2, durchgezogen), $u_0 = 4$ cm/a, $\gamma = 16\,024$ (Modell 12.2, gestrichelt-gepunktet), $u_0 = 1$ cm/a, $\gamma = 423$ (Modell 3.2, gestrichelt) und $u_0 = 4$ cm/a, $\gamma = 420$ (Modell 6.2, gepunktet). Die dünn-gepunktete Linie in der unteren Abbildung definiert die Plumebreite nach (5.3).

die Parameterkombination in (5.4) beschrieben wird, oder ob es eine zusätzliche Abhängigkeit der Plumebreite von der Viskosität gibt.

Um diese Frage zu klären, ist in Abbildung 5.20 die normierte Plumebreite für alle berechneten Modelle als Funktion der Auftriebszahl aufgetragen. Die entsprechenden Werte für die Auftriebszahlen in den Modellrechnungen finden sich im Anhang A.3. Obwohl die Modellparameter über einen großen Bereich variiert worden sind, lassen sich die Ergebnisse

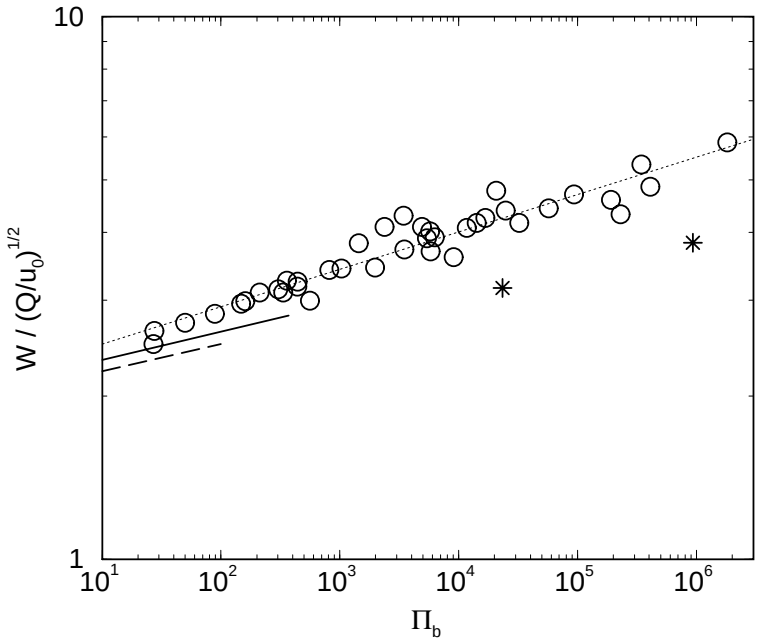

Abbildung 5.20: Skalierte Plumebreite entlang der Spreadingachse als Funktion der Auftriebszahl für alle berechneten Modelle (Kreise und Sterne) im Vergleich zu den Skalierungsgesetzen von *Ribe et al.* [1995] (durchgezogen) und von *Ito et al.* [1996] (gestrichelt) über den in diesen Arbeiten untersuchten Parameterbereichen. Zwei Modelle (markiert durch Sterne) sind bei der Berechnung der Regressionsgeraden (dünn-gepunktet) nicht berücksichtigt worden.

gut durch folgende Regressionsgerade anpassen,

$$W = (2.13 \pm 0.06) \left(\frac{Q}{u_0}\right)^{\frac{1}{2}} \Pi_b^{0.069 \pm 0.004} , \tag{5.5}$$

mit zwei Ausnahmen, die zu den Modellen mit der geringsten Spreadingrate mit $u_0 = 0.25$ cm/a gehören (Modelle 1 und 7 im Anhang A.2). Es scheint, als wenn die endliche Dicke der Lithosphäre an der Spreadingachse, die in der vereinfachten Theorie nicht berücksichtigt wird, bei dieser geringen Spreadingrate die laterale Ausbreitung des Plumematerials beeinflußt.

Ribe [1996] hat eine zusätzliche leichte Abhängigkeit der Plumebreite von dem folgenden dimensionslosen Parameter vorgeschlagen,

$$\Pi_u = \frac{Q^{\frac{1}{8}} \sigma^{\frac{3}{8}} \kappa^{\frac{1}{2}}}{u_0} ,$$

der ein Maß für die Zunahme der Lithosphärendicke im Vergleich zur Schichtdicke des Plumematerials ist und deshalb von *Ribe* [1996] als “Upslope”-Zahl bezeichnet wird. Die Abbildungen (5.21) und (5.22) zeigen allerdings, daß in den hier vorgestellten dreidimensionalen

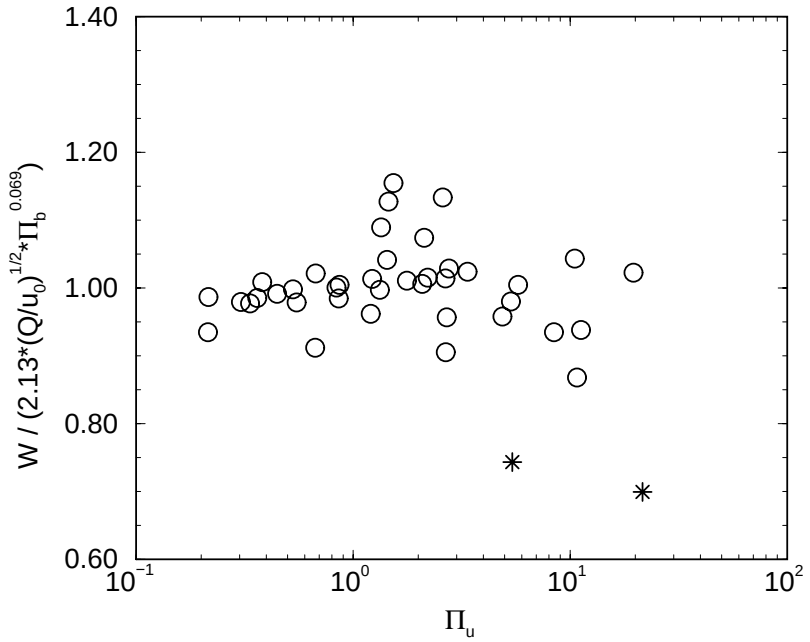

Abbildung 5.21: Abweichung der Plumebreite von der Regressionsgeraden als Funktion der "Upslope"-Zahl für alle berechneten Modelle.

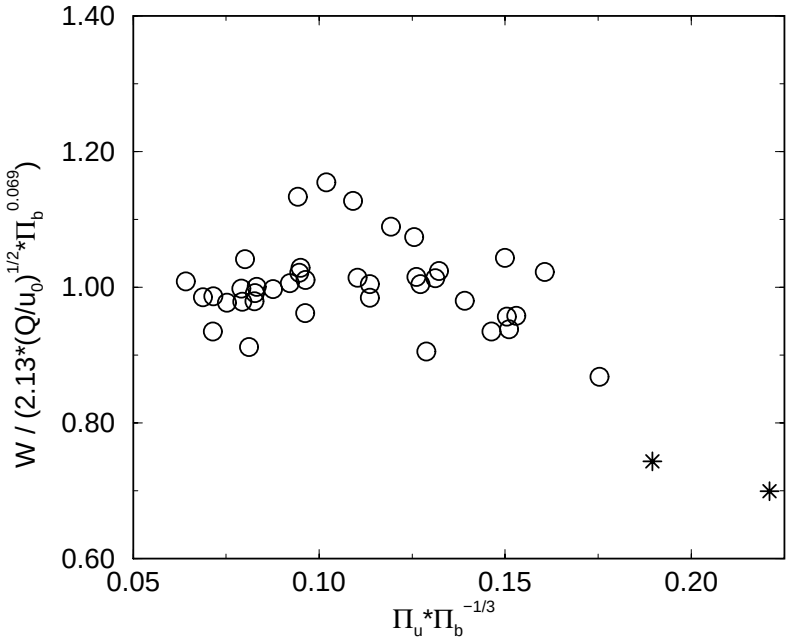

Abbildung 5.22: Abweichung der Plumebreite von der Regressionsgeraden als Funktion der von *Ribe et al.* [1996] vorgeschlagenen Kombination aus Auftriebs- und "Upslope"-Zahl für alle berechneten Modelle.

Modellrechnungen die Abweichung der Plumebreite von der Regressionsgeraden (5.5) keine derartige Abhängigkeit erkennen läßt.

Ein Vergleich des hier abgeleiteten Skalierungsgesetzes (5.5) mit den Skalierungsgesetzen von *Ribe et al.* [1995],

$$W = 2.07 \left(\frac{Q}{u_0}\right)^{\frac{1}{2}} \Pi_b^{0.052} , \tag{5.6}$$

und von *Ito et al.* [1996],

$$W = 2.37 \left(\frac{Q}{u_0}\right)^{\frac{1}{2}} \Pi_b^{0.04} , \tag{5.7}$$

die aus dreidimensionalen Modellrechnungen mit kleinen Viskositätsvariationen bestimmt worden sind, zeigt eine gute Übereinstimmung, obwohl der in dieser Arbeit untersuchte Parameterbreich in Folge der stärkeren Viskositätsvariationen deutlich größer ist (siehe Abbildung 5.20). Zwar ist die Abhängigkeit der Plumebreite von der Auftriebszahl in (5.5) etwas größer als in (5.6) und (5.7), die Unterschiede sind allerdings gering. Das deutet an, daß die ausgeprägte Strömung des Plumematerials über große Entfernungen entlang der Spreadingachse, die in den früheren Untersuchungen nicht gefunden wurde, die Konsequenz der deutlich größeren Auftriebszahlen in den hier vorgestellten Modellen mit starken Viskositätskontrasten ist.

Kapitel 6

Ergebnisse für Mantelplumes mit zeitlich variablem Plumefluß

In allen bisherigen Untersuchungen zur Wechselwirkung von Mantelplumes mit Mittelozeanischen Rücken ist ein zeitlich konstanter Plumefluß angenommen worden. In diesem Kapitel werden Modellrechnungen vorgestellt, die die zeitliche Entwicklung von Volumenstörungen im Plumefluß unter Mittelozeanischen Rücken zeigen. Im ersten Abschnitt werden die zur Erzeugung kurzzeitiger Störungen notwendigen Modifikationen des numerischen Modells aus Untersuchungen der Ausbreitung von Volumenstörungen in Zweiflüssigkeitssystemen abgeleitet. Die Ergebnisse der dreidimensionalen Modellrechnungen folgen dann im zweiten Abschnitt, wobei die Ausbreitung der Volumenstörungen in Abhängigkeit von der Spreadingrate und der Plumeviskosität untersucht wird.

6.1 Erzeugung kurzzeitiger Störungen im Plumefluß

6.1.1 Ausbreitung von Volumenstörungen in Zweiflüssigkeitssystemen

Die Ausbreitung von Volumenstörungen in einem niedrigviskosen Flüssigkeitskanal, der von einer hochviskosen Matrix umgeben ist, ist für Zweiflüssigkeitssysteme in analytischen Betrachtungen abgeleitet [u.a. *Olson und Christensen*, 1986; *Olson*, 1990; *Helfrich und Whitehead*, 1990; *Whitehead und Helfrich*, 1990] und durch numerische Berechnungen [u.a. *Schubert et al.*, 1989] und durch Laborexperimente [u.a. *Olson und Christensen*, 1986; *Whitehead und Helfrich*, 1988, 1990; *Helfrich und Whitehead*, 1990] bestätigt worden. Die Ergebnisse dieser Untersuchungen dienen als Grundlage für die Erzeugung kurzzeitiger Störungen in den numerischen Modellrechnungen. Deshalb werden die wesentlichen Resultate im folgenden kurz vorgestellt.

Ausgangspunkt für die Untersuchungen ist ein in eine hochviskose Matrix eingebetteter Kanal, durch den eine Flüssigkeit mit relativ zur Matrix geringer Viskosität und Dichte aufsteigt. Eine Skizze des Modells ist in Abbildung 6.1 dargestellt. Der Volumenfluß läßt sich unter den Annahmen, daß die Strömung laminar ist, sich die Breite des Kanals in vertikaler

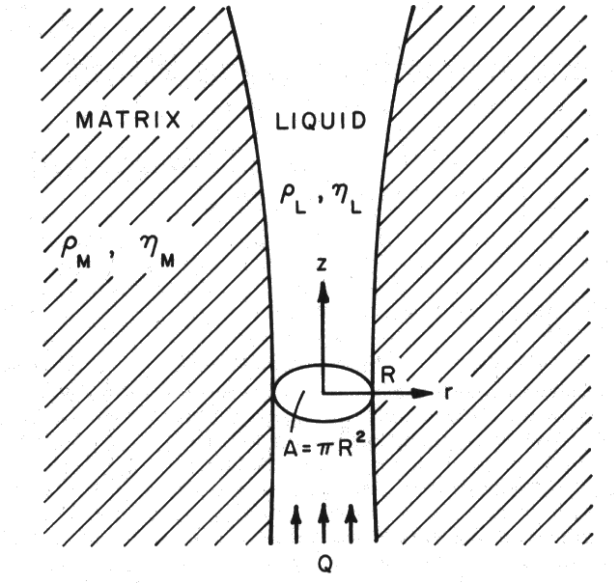

Abbildung 6.1: Skizze des Modells zur Untersuchung von Flüssigkeitsströmungen in einem niedrigviskosen Kanal, der von einer hochviskosen Matrix umgeben ist (aus *Olson und Christensen* [1986]).

Richtung nur langsam ändert und der Wärme- und Massenaustausch zwischen dem Kanal und der Matrix vernachlässigbar ist, durch das Poiseuille-Gesetz beschreiben [*Olson und Christensen*, 1986; *Olson* 1990; *Helfrich und Whitehead*, 1990; *Whitehead und Helfrich*, 1990],

$$Q = -\frac{A^2}{8\pi\eta_L}\frac{\partial p_L}{\partial z} , \tag{6.1}$$

mit Q Volumenfluß, A Querschnittsfläche des Kanals, η_L Viskosität der Kanalflüssigkeit und p_L nicht-hydrostatischer Druck im Kanal. Die Druckverteilung im Kanal ergibt sich aus der radialen Kräftebalance an der Kanalwand. Wenn sich die Breite des Kanals in vertikaler Richtung nur langsam ändert, berechnet sich der Druck im Kanal als [*Olson und Christensen*, 1986],

$$p_L = -\Delta\rho g z + \frac{\eta_M}{A}\frac{\partial A}{\partial t} , \tag{6.2}$$

mit $\Delta\rho = \rho_M - \rho_L$ Dichteunterschied zwischen Matrix und Kanal und η_M Viskosität der Matrix. Der nicht-hydrostatische Druck setzt sich zusammen aus einem Beitrag durch den Auftrieb der Kanalflüssigkeit und aus einem Beitrag durch die zeitliche Variation der Querschnittsfläche. Durch Einsetzen von (6.2) in (6.1) und unter Berücksichtigung der Massenerhaltung [*Olson und Christensen*, 1986; *Olson* 1990; *Helfrich und Whitehead*, 1990; *Whitehead und Helfrich*, 1990],

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{\partial Q}{\partial z} , \tag{6.3}$$

ergibt sich folgender Ausdruck für den Volumenfluß,

$$Q = \frac{A^2}{8\pi\eta_L}\left(\Delta\rho g + \eta_M \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\right) . \tag{6.4}$$

Im stationären Fall ohne Störung ($\partial Q/\partial z = 0$) reduziert sich (6.4) auf die Gleichung für die Poiseuille-Strömung [*Olson und Christensen*, 1986; *Olson* 1990],

$$Q_0 = \frac{\Delta\rho g}{8\pi\eta_L} {A_0}^2 .$$

Zeitabhängige Lösungen der Gleichungen (6.3) und (6.4) existieren für im Kanal aufsteigende Wellen, die die folgende Form haben [*Olson*, 1990],

$$\begin{aligned} A &= A_0 + (A_{\max} - A_0)\exp\left(-\frac{4\zeta^2}{\lambda^2}\right) \\ &\approx A_{\max}\exp\left(-\frac{4\zeta^2}{\lambda^2}\right) \qquad \text{für} \quad A_{\max} \gg A_0 , \end{aligned} \tag{6.5}$$

mit $\zeta = z - ct$ und $\lambda = \sqrt{8\eta_M c/(\Delta\rho g)}$ vertikale Länge bzw. λ/c zeitliche Dauer der Störung, wobei c die Aufstiegsgeschwindigkeit der Welle bezeichnet. Gleichung (6.5) beschreibt eine solitäre Welle, die ihre Form während des Aufstiegs beibehält und deren Aufstiegsgeschwindigkeit von der Amplitude der Störung abhängt [*Olson und Christensen*, 1986; *Helfrich und Whitehead*, 1990; *Whitehead und Helfrich*, 1990],

$$c = c_0 \frac{2{A_{\max}}^2 \ln(A_{\max}/A_0) - {A_{\max}}^2 + {A_0}^2}{(A_{\max} - A_0)^2} , \tag{6.6}$$

mit $c_0 = \Delta\rho g A_0/(8\pi\eta_L)$ mittlere Geschwindigkeit der Poiseuille-Strömung im stationären Kanal. Die Dispersionsbeziehung (6.6) vereinfacht sich für den Grenzfall kleiner Störungen zu [*Olson und Christensen*, 1986; *Helfrich und Whitehead*, 1990],

$$\lim_{A_{\max}\to A_0} c = 2c_0 ,$$

was der maximalen Geschwindigkeit der Poiseuille-Strömung im Zentrum des stationären Kanals entspricht. Für den Grenzfall großer Störungen reduziert sich (6.6) auf [*Olson und Christensen*, 1986; *Olson* 1990],

$$\lim_{A_{\max}\to\infty} c = 2c_0 \ln(A_{\max}/A_0) .$$

Neben der Aufstiegsgeschwindigkeit der solitären Welle kann auch ein Ausdruck für die Geschwindigkeit der Flüssigkeit in der Welle hergeleitet werden. Unter der Annahme einer Poiseuille-Strömung berechnet sich die Geschwindigkeit im Kanal als [*Helfrich und Whitehead*, 1990],

$$w = -\frac{R^2 - r^2}{4\eta_L}\frac{\partial p_L}{\partial z} \qquad \text{für} \quad r \le R , \tag{6.7}$$

mit r radiale Koordinate und $R = \sqrt{A/\pi}$ Radius des Kanals. Durch Einsetzen von (6.1) in (6.7) läßt sich die Geschwindigkeit schreiben als,

$$w = 2\left(1 - \frac{\pi r^2}{A}\right)\frac{Q}{A} . \tag{6.8}$$

Im stationären Fall ohne Störung ($Q = Q_0$ und $A = A_0$) ergibt sich,

$$w_0 = 2c_0\left(1 - \frac{\pi r^2}{A}\right) , \tag{6.9}$$

wobei die Beziehung $c_0 = Q_0/A_0$ ausgenutzt worden ist.

Für eine solitäre Welle der Form (6.5) läßt sich die Kontinuitätsgleichung (6.3) durch Verwendung der Variablen $\zeta = z - ct$ umformen zu,

$$\frac{dQ}{d\zeta} = c\frac{dA}{d\zeta} .$$

Nach Integration und Wahl der Integrationskonstanten, so daß $Q = Q_0$ für $A = A_0$, ergibt sich der Volumenfluß als,

$$Q = cA + (c_0 - c)A_0 . \tag{6.10}$$

Einsetzen von (6.10) in (6.8) liefert einen Ausdruck für die Geschwindigkeit der Flüssigkeit in der Welle,

$$w = 2\left(1 - \frac{\pi r^2}{A}\right)\frac{cA + (c_0 - c)A_0}{A} . \tag{6.11}$$

Für $A = A_0$ reduziert sich (6.11) auf Gleichung (6.9) für die Geschwindigkeit im stationären Kanal. Die Geschwindigkeit der Flüssigkeit im Zentrum der Welle beträgt,

$$w_{\max} = 2\frac{cA + (c_0 - c)A_0}{A} , \tag{6.12}$$

und ist für alle Amplituden $A > A_0$ größer als die Aufstiegsgeschwindigkeit c der solitären Welle [*Helfrich und Whitehead*, 1990; *Whitehead und Helfrich*, 1990]. Das bedeutet, daß Stagnationspunkte der Strömung vor und hinter der Welle existieren, wenn die Flüssigkeitsströmung in einem Koordinatensystem betrachtet wird, das sich mit der aufsteigenden Welle bewegt. Die Konsequenz sind geschlossene Stromlinien in der solitären Welle, so daß das Material in der Welle eingeschlossen bleibt [*Helfrich und Whitehead*, 1990; *Whitehead und Helfrich*, 1990].

6.1.2 Übertragung der Ergebnisse auf Einflüssigkeitssysteme

Der Aufstieg des Plumematerials im Erdmantel wird hauptsächlich durch thermische Dichtevariationen und nicht durch Dichtevariationen aufgrund einer unterschiedlichen chemischen

Zusammensetzung von Plume- und Mantelmaterial getrieben, so daß sich keine strikte Trennung zwischen Kanal und Matrix, wie es im Zweiflüssigkeitssystem möglich war, vornehmen läßt, sondern der Übergang von Plume- zu Mantelmaterial vielmehr kontinuierlich erfolgt. Um dennoch Aussagen über die Strömung machen zu können, werden die im letzten Abschnitt für Zweiflüssigkeitssysteme abgeleiteten Ergebnisse auf Einflüssigkeitssysteme übertragen, in denen die Strömung durch eine Temperaturanomalie der Form,

$$T = T_R + \Delta T_P \exp\left(-\frac{r^2}{{r_{1/2}}^2}\right) ,$$

erzeugt wird. Dazu wird die Breite des Kanals im Zweiflüssigkeitssystem mit der Halbwertsbreite $r_{1/2}$ der Temperaturanomalie im Einflüssigkeitssystem gleichgesetzt. Für große Störungen der Form (6.5) ergibt sich damit,

$$r_{1/2} = r_0 + (r_{\max} - r_0) \exp\left(-\frac{2\zeta^2}{\lambda^2}\right) ,$$

mit r_0 Halbwertsbreite der stationären Lösung ohne Störung. Die maximale Aufstiegsgeschwindigkeit im Zentrum der Temperaturanomalie berechnet sich nach (6.12) als,

$$w_{\max} = 2\,\frac{c\,{r_{1/2}}^2 + (c_0 - c)\,{r_0}^2}{{r_{1/2}}^2} , \tag{6.13}$$

wobei sich die Aufstiegsgeschwindigkeit der Störung c in Abhängigkeit von der Halbwertsbreite der Temperaturanomalie als,

$$c = c_0 \frac{4\,{r_{\max}}^4 \ln(r_{\max}/r_0) - {r_{\max}}^4 + {r_0}^4}{\left({r_{\max}}^2 - {r_0}^2\right)^2} , \tag{6.14}$$

schreiben läßt.

Die Änderungen der Maximalgeschwindigkeit als Funktion der Höhe und der Zeit ergeben sich durch Ableitung von (6.13) nach ζ als,

$$\frac{dw_{\max}}{d\zeta} = -\frac{16\,(c - c_0)}{\lambda^2}\,\frac{{r_0}^2\left(r_{1/2} - r_0\right)}{{r_{1/2}}^3}\,\zeta . \tag{6.15}$$

Um einen Ausdruck für die Radialgeschwindigkeit herleiten zu können, muß die Vertikalgeschwindigkeit als Funktion von r bekannt sein. In der Poiseuille-Strömung fällt die Vertikalgeschwindigkeit parabolisch von $w = w_{\max}$ im Zentrum auf $w = 0$ am Rand des Kanals ab (siehe Gleichung (6.9) bzw. (6.11)). Im Einflüssigkeitssystem verwende ich stattdessen ein Gaußprofil zur Fortsetzung des Gradienten der Vertikalgeschwindigkeit in radialer Richtung,

$$\frac{\partial w}{\partial \zeta} = \frac{dw_{\max}}{d\zeta} \exp\left(-\frac{4r^2}{{r_{1/2}}^2}\right) . \tag{6.16}$$

Dabei wähle ich eine geringere Halbwertsbreite für die Vertikalgeschwindigkeit als für die Temperaturanomalie. Dieses ist durch Untersuchungen der thermischen und dynamischen Struktur von Mantelplumes motiviert, die gezeigt haben, daß sich die Strömung, insbesondere bei temperaturabhängiger Viskosität, auf den inneren Bereich der thermischen Anomalie konzentriert [u.a. *Loper und Stacey*, 1983; *Olson et al.*, 1993; *Hauri et al.*, 1994; *Albers*, 1995]. Die Annahme eines Gaußprofils für die Abnahme des Gradienten der Vertikalgeschwindigkeit in radialer Richtung ermöglicht eine einfache Berechnung der radialen Strömung, die erforderlich ist, um die Massenerhaltung zu erfüllen. Die Radialgeschwindigkeit ergibt sich als,

$$u_r = \frac{{r_{1/2}}^2}{8r} \frac{dw_{\max}}{d\zeta} \left(\exp\left(-\frac{4r^2}{{r_{1/2}}^2} \right) - 1 \right) . \tag{6.17}$$

Die Übertragung der Ergebnisse für die Poiseuille-Strömung auf den Aufstieg des Plumematerials im Erdmantel kann nur näherungsweise erfolgen. Die in diesem Abschnitt vorgestellten Gleichungen beschreiben deshalb die räumliche und zeitliche Entwicklung von Störungen im Plumefluß insgesamt nur sehr qualitativ. Sie können allerdings dazu verwendet werden, um die Modifikationen des numerischen Modells, die zur Erzeugung dieser kurzzeitigen Störungen notwendig sind, abzuleiten. Diese Modifikationen werden im folgenden Abschnitt genauer erläutert.

6.1.3 Modifikation der Modellrandbedingungen

In den numerischen Modellrechnungen werden Störungen im Plumefluß erzeugt, indem die Randbedingungen am unteren Rand der Modellbox verändert werden. Die Modellrechnungen werden von den stationären Lösungen, die in Kapitel 5 vorgestellt worden sind, gestartet. Störungen im Plumefluß werden zu diesen stationären Lösungen hinzugefügt, indem die Breite der Temperaturanomalie bei $z = 0$ für einen kurzen Zeitraum erhöht wird,

$$r_{1/2} = r_0 + \delta r_{1/2} \exp\left(-\frac{4\,(t-t_0)^2}{{t_{1/2}}^2} \right) \qquad \text{für} \quad t \geq 0 \,, \tag{6.18}$$

mit r_0 Plumebreite im stationären Modell. Dagegen bleibt die maximale Temperaturanomalie im Zentrum des Plumes ΔT_P unverändert. Die Störungen werden durch ihre maximale Amplitude $\delta r_{1/2}$, durch den Zeitpunkt t_0, an dem das Maximum der Störung am unteren Rand der Modellbox erreicht wird, und durch die Dauer der Störung $t_{1/2}$ festgelegt. In allen Modellrechnungen, die im folgenden präsentiert werden, verwende ich $t_0 = 1.5 \cdot t_{1/2}$, so daß zu Beginn der Rechnung bei $t = 0$ noch annähernd die Lösung des stationären Modells vorliegt. Alternativ zur Zeitdauer $t_{1/2}$ kann die vertikale Ausdehnung der Störung $\lambda = c\,t_{1/2}$ angegeben werden. Die Aufstiegsgeschwindigkeit der Störung c berechnet sich aus der Dispersionsbeziehung (6.14), wobei c_0 so gewählt wird, daß für den stationären Fall ohne Störung die Dispersionsbeziehung mit $c = 2 \cdot c_0$ die Vertikalgeschwindigkeit im Zentrum des Plumes liefert.

Neben der Variation der Breite der Temperaturanomalie werden auch die mechanischen Randbedingungen verändert, um zu berücksichtigen, daß die Störung als Welle von unten in die Box eintritt und entlang des Plumestamms aufsteigt. Aus den Gleichungen (6.15)–(6.17) ergeben sich folgende Randbedingungen für den Gradienten der Vertikalgeschwindigkeit,

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w_{\max}}{\partial z} \exp\left(-\frac{4\left(x^2+y^2\right)}{{r_{1/2}}^2}\right) , \tag{6.19}$$

und für die horizontalen Geschwindigkeitskomponenten,

$$u = \frac{\partial w_{\max}}{\partial z}\left(\exp\left(-\frac{4\left(x^2+y^2\right)}{{r_{1/2}}^2}\right)-1\right)\cdot\frac{{r_{1/2}}^2\cdot x}{8\left(x^2+y^2\right)} , \tag{6.20}$$

und

$$v = \frac{\partial w_{\max}}{\partial z}\left(\exp\left(-\frac{4\left(x^2+y^2\right)}{{r_{1/2}}^2}\right)-1\right)\cdot\frac{{r_{1/2}}^2\cdot y}{8\left(x^2+y^2\right)} , \tag{6.21}$$

mit

$$\frac{\partial w_{\max}}{\partial z} = C\,\frac{{r_0}^2\left(r_{1/2}-r_0\right)}{{r_{1/2}}^3}\left(t-t_0\right) , \tag{6.22}$$

und C Konstante, die den maximalen Betrag der Geschwindigkeitsgradienten kontrolliert. Ein Vergleich von (6.22) mit (6.15) liefert $C = 32(1-c_0/c)/{t_{1/2}}^2$, wodurch sich die Größenordnung von C bei gegebener Amplitude und Dauer der Störung abschätzen läßt. In der Poiseuille-Strömung werden durch die Störung Druckvariationen im Kanal erzeugt (siehe Gleichung (6.2) auf Seite 102). Eine entsprechende Modifikation der Druckrandbedingung in den Modellrechnungen hat sich allerdings als nicht notwendig erwiesen, um eine Störung im Plumefluß zu erzeugen. Damit ersetzen die Gleichungen (6.18)–(6.22) die Randbedingungen am unteren Rand der Modellbox in Gleichung (3.14) auf Seite 23. Für $t \ll t_0$ und $t \gg t_0$ reduzieren sie sich auf die Randbedingungen des stationären Modells mit $r_{1/2} = r_0$ und $u = v = \partial w/\partial z = 0$.

6.2 Modellrechnungen in 3–D

6.2.1 Zeitliche Entwicklung einer Störung im Referenzmodell

Ausgangspunkt für die Untersuchungen zur Wechselwirkung von Störungen im Plumefluß mit Mittelozeanischen Rücken ist das in Abschnitt 5.2.2 vorgestellte Referenzmodell mit einer geringen Spreadingrate von $u_0 = 1$ cm/a, einem mittleren Auftriebsfluß von $B = 1785$ kg/s und einer starken Temperaturabhängigkeit der Viskosität von $E = 500$ kJ/mol, durch die ein Viskositätskontrast zwischen Plumematerial im Bereich des Rückens und Mantel

Tabelle 6.1: Parameter zur Erzeugung einer Störung im Referenzmodell

Parameter	Bedeutung	Wert	Einheit	Skalierter Wert
$\delta r_{1/2}/r_0$	Amplitude der Störung	–	–	0.5
$t_{1/2}$	Zeitdauer der Störung	0.5	Ma	10^{-4}
t_0	Zeitpunkt des Maximums	0.75	Ma	$1.5{\cdot}10^{-4}$
c_0	Referenzgeschwindigkeit	71	cm/a	9000
c/c_0	Geschwindigkeit der Störung	–	–	2.65
λ	Vertikale Ausdehnung der Störung	954	km	2.4
C	Max. Geschwindigkeitsgradienten	156	Ma^{-2}	$4{\cdot}10^9$

von $\gamma = 16\,253$ entsteht (Modell 9.2 im Anhang A.2). Die in Abbildung 5.8 auf Seite 80 dargestellte stationäre Lösung des Modells wird durch die modifizierten Randbedingungen (6.18)–(6.22) am unteren Rand der Modellbox kurzzeitig gestört, indem die Plumebreite über ein Zeitintervall von 500 000 Jahren um 50 Prozent erhöht wird. Die genauen Parameter zur Erzeugung der Störung sind in Tabelle 6.1 aufgeführt.

Abbildung 6.2 zeigt die Plumebreite und den Volumenfluß des Plumes am unteren Rand der Modellbox als Funktion der Zeit. Mit steigender Breite der Temperaturanomalie wird auch der Volumenfluß des Plumes größer und erreicht leicht zeitversetzt zur Plumebreite ein Maximum mit einem um den Faktor 2.6 höheren Wert als in der stationären Lösung.

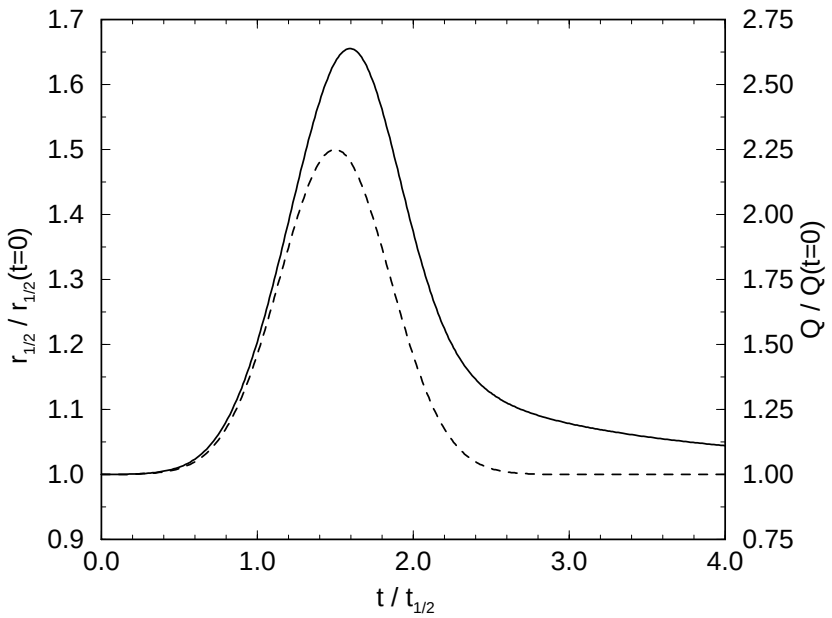

Abbildung 6.2: Zeitliche Entwicklung der Breite der Temperaturanomalie (gestrichelt) und des Volumenflusses des Plumes (durchgezogen) am unteren Rand der Modellbox für eine Störung im Referenzmodell.

Nachfolgend nimmt der Volumenfluß wieder ab. Er bleibt aber über einen längeren Zeitraum relativ zur stationären Lösung erhöht, weil die Störung nach Eintritt in die Modellbox und Aufstieg entlang des Plumestamms zusätzliches Material hinter sich herzieht. Im weiteren Verlauf der Rechnung fällt der Volumenfluß dann aber wieder auf den Wert der stationären Lösung ab.

Die zeitliche Entwicklung der Störung ist in Abbildung 6.3 dargestellt. Aufgrund der Verbreiterung des Plumes bei $z = 0$ entsteht eine Temperaturanomalie relativ zu dem Modell ohne Störung. Diese Anomalie breitet sich entlang des Plumestamms aus, bleibt aber auf den Randbereich des Plumes beschränkt, weil die maximale Temperaturanomalie im Zentrum des Plumes nicht variiert wird (siehe Abbildung 6.3a). Die geringe Plumeviskosität und die daraus resultierende hohe Geschwindigkeit im Plume führen dazu, daß die vertikale Ausdehnung der Anomalie sehr groß ist. Eine einfache Abschätzung aus der zeitlichen Dauer und der Aufstiegsgeschwindigkeit der Störung ergibt einen Wert für die Ausdehnung, der mehr als das Zweifache der Boxhöhe beträgt (siehe Tabelle 6.1). Dieses ist konsistent mit der Modellrechnung. In Abbildung 6.3a erreicht die Störung den oberen Rand der Modellbox, während die Breite der Temperaturanomalie am unteren Rand gerade ihr Maximum durchläuft. Unterhalb des Rückens bildet sich eine pulsförmige Anomalie, die entlang der Spreadingachse strömt. Nur ein geringer Teil der Anomalie breitet sich in Richtung der Plattenbewegung aus (siehe Abbildungen 6.3b–e). Die relative Temperaturanomalie des Pulses wird während der Ausbreitung entlang der Spreadingachse zunächst größer, weil sich der vordere Teil mit einer geringeren Geschwindigkeit bewegt als das nachströmende Material. Dadurch sammelt sich das wärmere Material in der Störung, so daß die Störung weniger stark abkühlt als das Plumematerial im stationären Modell. Ungefähr 9 Millionen Jahre nach Einsatz der Störung am unteren Rand der Modellbox erreicht die Anomalie das äußere Ende des Plumes unterhalb des Rückens. Dort stoppt die Ausbreitung, und die Anomalie beginnt, sich durch thermische Auskühlung aufzulösen (siehe Abbildung 6.3f). Während der gesamten Zeit ist die Temperaturanomalie an der Spreadingachse am größten und wird nicht durch die Plattenbewegung vom Rücken wegtransportiert. Die zusätzliche langlebige Anomalie nahe des unteren Modellrandes (siehe Abbildungen 6.3b–d) ist eine Folge der etwas “künstlichen” Randbedingungen bei $z = 0$ zur Erzeugung der Störung.

Um die Position der Störung an der Spreadingachse zeitlich nachzuvollziehen, habe ich die Temperaturanomalie relativ zur stationären Lösung entsprechend der Gleichung 5.1 auf Seite 88 in vertikaler Richtung aufintegriert,

$$\delta S(y,t) \;=\; \frac{1}{\Delta T_P} \int_0^1 \left(T(x=0,y,z,t) - T(x=0,y,z,t=0) \right) dz \,. \tag{6.23}$$

Abbildung 6.4 zeigt als Beispiel die Ergebnisse für die in den Abbildungen 6.3b–f dargestellten Temperaturanomalien (für die Temperaturanomalie in Abbildung 6.3a ergibt sich noch keine signifikante Störung entlang der Spreadingachse). Das Maximum der aufintegrierten Temperaturanomalie verschiebt sich im Laufe der Zeit entlang der Spreadingachse, bis es den äußeren Rand des Plumes erreicht. Weil sich der vordere Teil der Anomalie dort nur

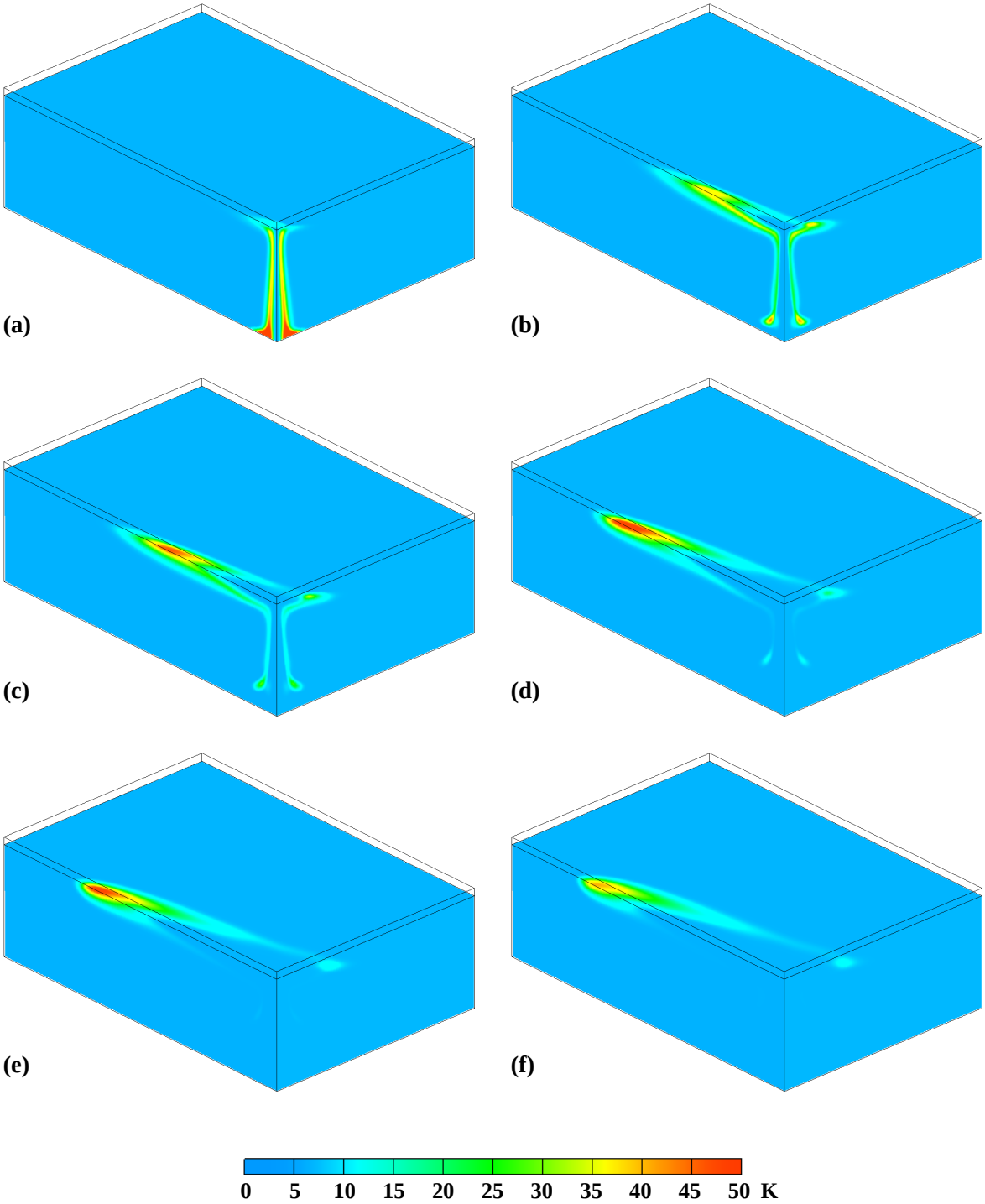

Abbildung 6.3: Zeitliche Entwicklung einer Störung im Referenzmodell mit $u_0 = 1$ cm/a, $B = 1785$ kg/s und $\gamma = 16\,253$. Die Temperaturanomalie relativ zur stationären Lösung (Abbildung 5.8 auf Seite 80) ist für (a) $t = 0.76$ Ma, (b) $t = 1.52$ Ma, (c) $t = 2.28$ Ma, (d) $t = 4.56$ Ma, (e) $t = 6.84$ Ma und (f) $t = 9.13$ Ma nach Einsatz der Störung am unteren Rand der Modellbox dargestellt. Die obersten 25 km der Modellbox werden nicht gezeigt.

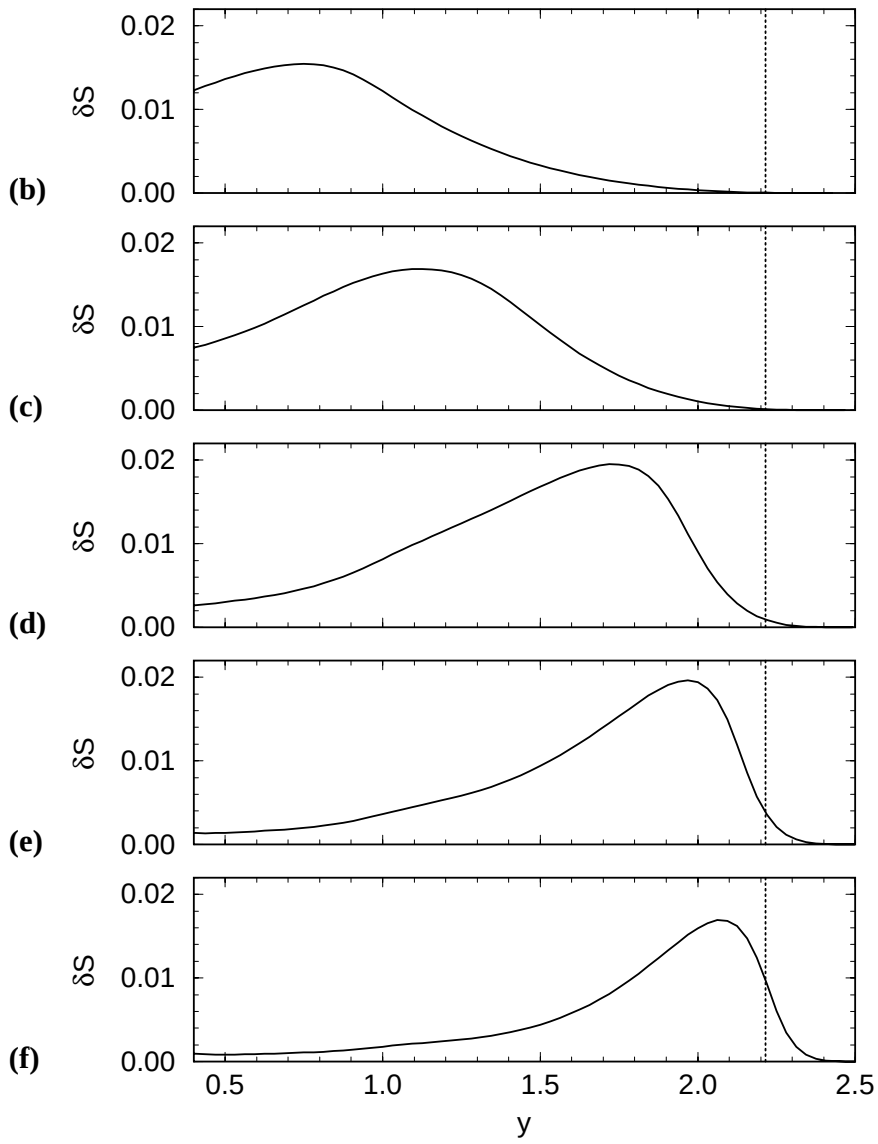

Abbildung 6.4: Aufintegrierte Temperaturanomalie an der Spreadingachse nach (6.23) als Funktion der Entfernung zum Plumezentrum für (b) $t = 1.52$ Ma, (c) $t = 2.28$ Ma, (d) $t = 4.56$ Ma, (e) $t = 6.84$ Ma und (f) $t = 9.13$ Ma nach Einsatz der Störung am unteren Rand der Modellbox. Die gepunktete vertikale Linie markiert die Plumebreite im stationären Modell.

noch sehr langsam weiterbewegt, wird die Anomalie durch das nachströmende Material zusammengeschoben. Dadurch wächst das Maximum der Anomalie zunächst etwas an, bevor sich die Anomalie dann am Außenrand des Plumes langsam auflöst. Insgesamt breitet sich die Störung nur unwesentlich weiter entlang des Rückens aus als das Plumematerial im stationären Modell.

Aus der zeitlichen Verschiebung des Maximums der aufintegrierten Temperaturanomalie habe ich die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Störung entlang der Spreadingachse berech-

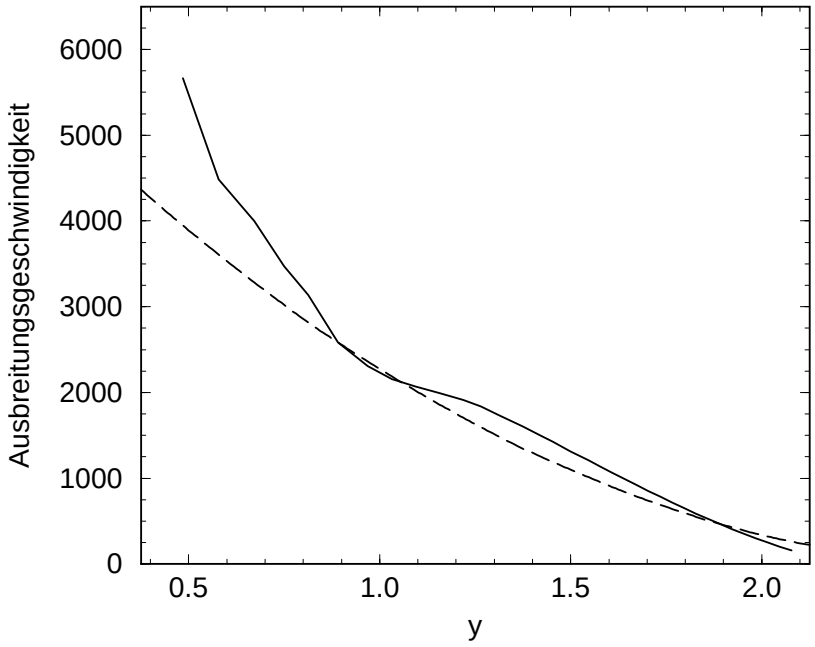

Abbildung 6.5: Ausbreitungsgeschwindigkeit der Störung (durchgezogen) und laterale Geschwindigkeit des Plumematerials im stationären Modell (gestrichelt) entlang der Spreadingachse in Abhängigkeit von der Entfernung zum Plumezentrum.

net. Das Ergebnis ist in Abbildung 6.5 dargestellt. Dabei konnte nahe des Plumezentrums keine Geschwindigkeit bestimmt werden, weil sich in diesem Bereich noch keine pulsförmige Anomalie gebildet hatte. Ein Vergleich mit der lateralen Geschwindigkeit des Plumematerials im Modell ohne Störung zeigt, daß die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Störung und die Strömungsgeschwindigkeit des Plumematerials in derselben Größenordnung liegen. Die Temperaturanomalie wird also im wesentlichen rein passiv mit der Strömung entlang des Rückens transportiert. Mit wachsender Entfernung zum Plumezentrum nimmt die Ausbreitungsgeschwindigkeit dabei ab. Allerdings bleibt die Geschwindigkeit der Störung über einen weiten Bereich deutlich größer als die Spreadingrate des Rückens ($u_0 = 128.6$ in dimensionsloser Form). Aus diesem Grund wird die Anomalie nicht durch die Plattenbewegung von der Spreadingachse wegtransportiert, sondern bleibt auf den Rückenbereich konzentriert.

6.2.2 Ergebnisse für verschiedene Spreadingraten und Plumeviskositäten

Um den Einfluß der Spreadingrate und der Plumeviskosität auf die Ausbreitung von Volumenstörungen des Plumes unter Mittelozeanischen Rücken zu untersuchen, habe ich neben der im letzten Abschnitt vorgestellten Modellrechnung noch drei weitere Rechnungen mit zeitabhängiger Plumebreite am unteren Rand der Modellbox durchgeführt. Dazu habe ich

Tabelle 6.2: Parameter zur Erzeugung einer Störung bei geringem Viskositätskontrast

Parameter	Bedeutung	Wert	Einheit	Skalierter Wert
$\delta r_{1/2}/r_0$	Amplitude der Störung	–	–	0.5
$t_{1/2}$	Zeitdauer der Störung	1.0	Ma	$2{\cdot}10^{-4}$
t_0	Zeitpunkt des Maximums	1.5	Ma	$3{\cdot}10^{-4}$
c_0	Referenzgeschwindigkeit	14	cm/a	1750
c/c_0	Geschwindigkeit der Störung	–	–	2.65
λ	Vertikale Ausdehnung der Störung	371	km	0.9
C	Max. Geschwindigkeitsgradienten	12	Ma^{-2}	$3{\cdot}10^{8}$

die in Abbildung 5.16 auf Seite 91 dargestellten stationären Modelle mit unterschiedlicher Spreadingrate und Plumeviskosität als Startlösung der zeitabhängigen Rechnungen gewählt. In dem Modell mit hoher Spreadingrate, das einen ähnlichen Viskositätskontrast zwischen Plume- und Mantelmaterial wie das Referenzmodell hat (Modell 12.2 im Anhang A.2), sind dieselben Parameter zur Erzeugung der Störung wie im Referenzmodell verwendet worden (siehe Tabelle 6.1). In den Modellen mit geringem Viskositätskontrast (Modelle 3.2 und 6.2 im Anhang A.2) ist die Geschwindigkeit im Plume und damit auch die Aufstiegsgeschwindigkeit der Störung kleiner. Deshalb habe ich in diesen beiden Modellen die Plumebreite über einen längeren Zeitraum erhöht. Die genauen Parameter zur Erzeugung der Störung bei geringem Viskositätskontrast finden sich in Tabelle 6.2. Der Volumenfluß des Plumes am unteren Rand der Modellbox ist als Funktion der Zeit für die vier berechneten Modelle in Abbildung 6.6 zusammengestellt. Bei geringem Viskositätskontrast ist die durch die zeitabhängigigen Randbedingungen erzeugte Amplitude der Volumenstörung etwas größer und im Vergleich zu den Störungen bei großem Viskositätskontrast zeitlich leicht versetzt. Insgesamt sind die Störungen in allen Modellen aber sehr ähnlich, so daß die Ergebnisse der Modellrechnungen direkt miteinander verglichen werden können.

Abbildung 6.7 zeigt Momentaufnahmen der Zeitentwicklung für die vier Modelle. Dabei sind die Ergebnisse der Modelle mit unterschiedlicher Spreadingrate, aber gleichem Viskositätskontrast jeweils zu derselben Zeit dargestellt. Die Ergebnisse der Modelle mit unterschiedlichem Viskositätskontrast unterscheiden sich dagegen zeitlich, weil die Ausbreitung der Störung bei kleinem Viskositätskontrast langsamer erfolgt. Bei geringer Spreadingrate bildet sich unabhängig vom Viskositätskontrast eine pulsförmige Anomalie, die sich entlang der Spreadingachse bewegt (siehe Abbildungen 6.7a und c). In dem Modell mit geringem Viskositätskontrast erfolgt die Ausbreitung der Störung allerdings nicht über so große Entfernungen entlang der Spreadingachse wie in dem Modell mit großem Viskositätskontrast, weil auch die Ausdehnung des stationären Plumes an der Spreadingachse in diesem Modell geringer ist. Gleichzeitig breitet sich ein etwas größerer Teil der Störung in Richtung der Plattenbewegung aus. In beiden Modellen erreicht die Anomalie den äußeren Bereich des Plumes, wo die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Störung deutlich kleiner wird und sich die

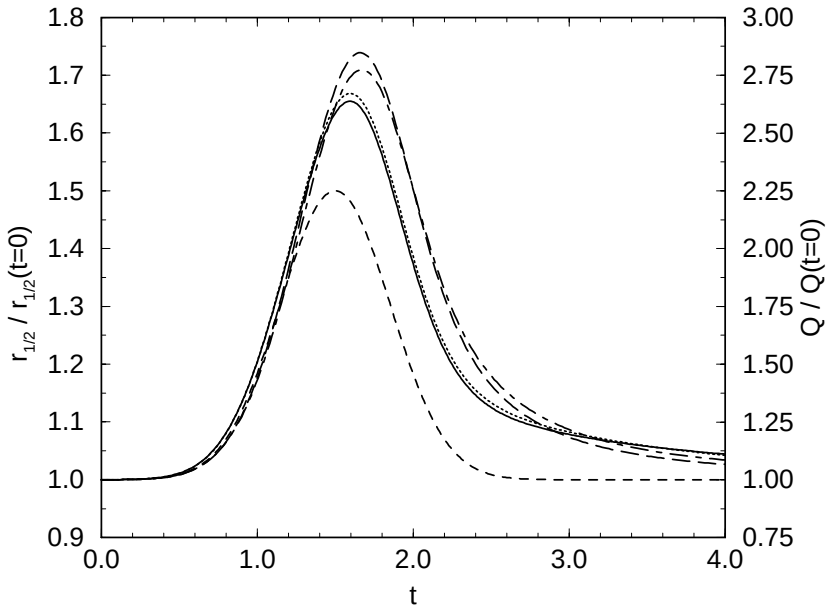

Abbildung 6.6: Zeitliche Entwicklung der Breite der Temperaturanomalie (kurz-gestrichelt) und des Volumenflusses des Plumes am unteren Rand der Modellbox für Modell 9.2 (durchgezogen), Modell 12.2 (gepunktet), Modell 3.2 (gepunktet-gestrichelt) und Modell 6.2 (lang-gestrichelt).

Temperaturanomalie langsam auflöst.

Bei hoher Spreadingrate bietet sich ein etwas anderes Bild. Zwar strömt auch hier der überwiegende Teil der Anomalie zunächst entlang der Spreadingachse, die Ausbreitung stoppt allerdings bereits in geringer Entfernung vom Plumezentrum, weil die Ausdehnung des Plumes an der Spreadingachse in beiden Modellen sehr gering ist. Dadurch ist die Temperatur im Randbereich des Plumes über einen längeren Zeitraum deutlich erhöht (siehe Abbildungen 6.7b und d). Während dieser Zeit kühlt die neugebildete Lithosphäre in diesem Bereich des Rückens weniger stark ab als in dem stationären Modell, so daß eine thermische Anomalie in der Lithosphäre entsteht, die nachfolgend mit der Plattenbewegung von der Spreadingachse wegtransportiert wird und letztendlich die Modellbox durch den offenen Seitenrand verläßt. Ebenso wie in den Modellen mit geringer Spreadingrate strömt auch bei hoher Spreadingrate ein größerer Teil der Störung in Richtung der Plattenbewegung, wenn der Viskositätskontrast gering ist.

Die Ausbreitung der Strömung entlang der Spreadingachse erfolgt bei hoher Spreadingrate über zu geringe Entfernungen, um sinnvoll eine Ausbreitungsgeschwindigkeit der Störung bestimmen zu können. Das Ergebnis für die Störung bei geringer Spreadingrate und geringem Viskositätskontrast ist in Abbildung 6.8 dargestellt. Abgesehen von dem Bereich nahe des Plumezentrums, wo die Bestimmung der Geschwindigkeit sehr ungenau ist, weil noch keine eindeutige pulsförmige Anomalie vorliegt, breitet sich die Störung in diesem Modell etwas langsamer aus als das Plumematerial im stationären Modell. Möglicherweise wird die-

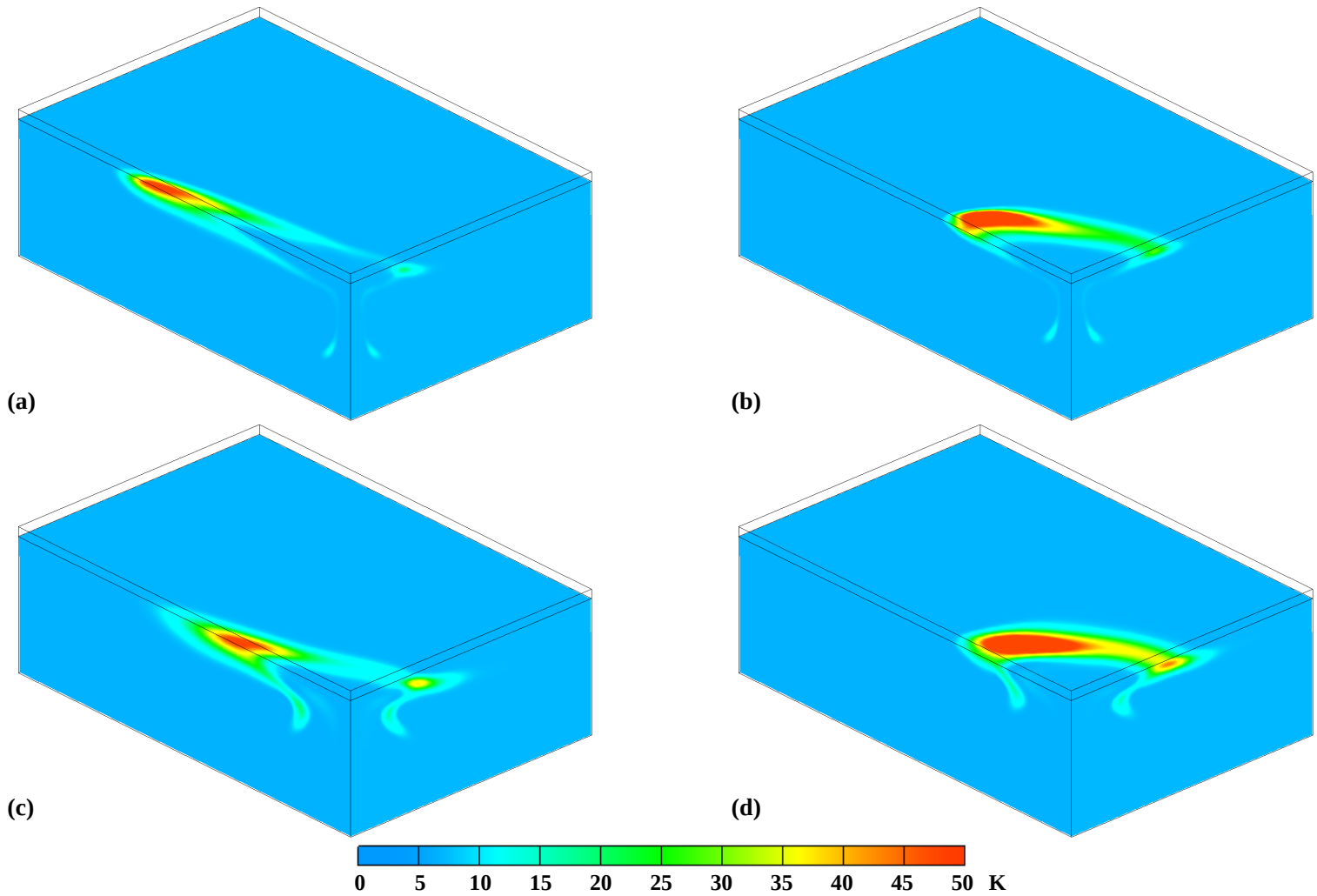

Abbildung 6.7: Momentaufnahmen der zeitlichen Entwicklung von Störungen für (a) $u_0 = 1$ cm/a, $\gamma = 16\,253$ (Modell 9.2) und (b) $u_0 = 4$ cm/a, $\gamma = 16\,024$ (Modell 12.2) zur Zeit $t = 4.56$ Ma und für (c) $u_0 = 1$ cm/a, $\gamma = 423$ (Modell 3.2) und (d) $u_0 = 4$ cm/a, $\gamma = 420$ (Modell 6.2) zur Zeit $t = 6.75$ Ma nach Einsatz der Störung am unteren Rand der Modellbox.

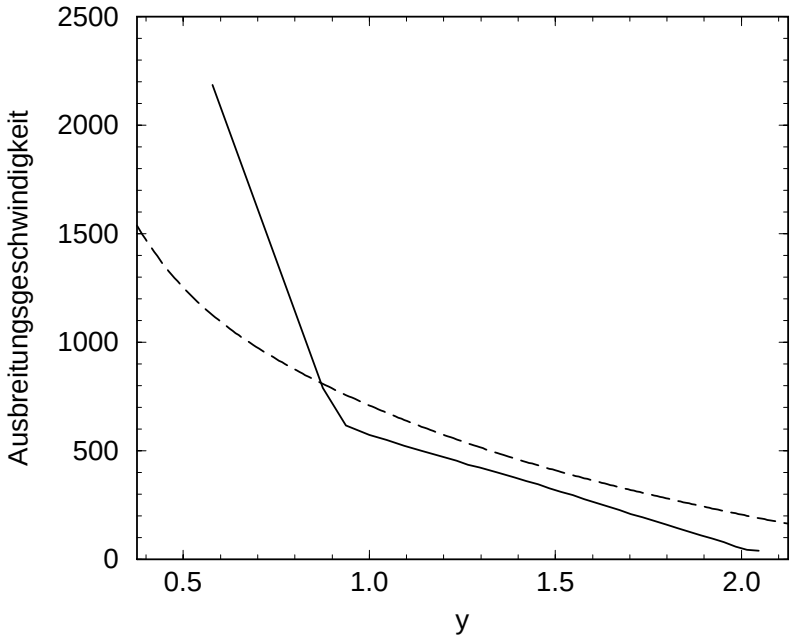

Abbildung 6.8: Ausbreitungsgeschwindigkeit der Störung für Modell 3.2 (durchgezogen) und laterale Geschwindigkeit des Plumematerials im stationären Modell (gestrichelt) entlang der Spreadingachse in Abhängigkeit von der Entfernung zum Plumezentrum.

se leichte Verringerung der Ausbreitungsgeschwindigkeit dadurch verursacht, daß über einen längeren Zeitraum heißes Material von hinten in die Störung nachströmt und das Fortschreiten des Maximums der Temperaturanomalie entlang der Spreadingachse verzögert.

Die Modellrechnungen zeigen, daß die Entfernung, über die sich Störungen im Plumefluß entlang der Spreadingrate ausbreiten, von der Plumebreite im zugrundeliegenden stationären Modell abhängt. Bei geringer Spreadingrate bilden sich pulsförmige Anomalien unterhalb des Rückens, die ungefähr mit der Strömung des Plumematerials entlang der Spreadingachse transportiert werden. Dabei nimmt die Konzentration der Anomalie auf den Rückenbereich mit kleiner werdender Plumeviskosität zu. Bei hoher Spreadingrate endet die Ausbreitung der Störung dagegen bereits in geringer Entfernung zum Plumezentrum, worauf sich eine Anomalie in der Lithosphäre bildet, die mit der Plattenbewegung von der Spreadingachse wegtransportiert wird.

6.3 Erklärungsansatz zur Ausbreitung der Störungen

Um die numerischen Modellergebnisse zur Ausbreitung von Störungen im Plumefluß unter Mittelozeanischen Rücken physikalisch zu verstehen, komme ich zurück zu der analytischen Betrachtung von Flüssigkeitsströmungen in dünnen Schichten (siehe Abschnitt 5.3.1). In dieser vereinfachten Theorie hatte sich gezeigt, daß die Wechselwirkung von Mantelplumes mit

Mittelozeanischen Rücken im wesentlichen durch drei Kräfte bestimmt wird: die passive Advektion des Plumematerials mit der durch die Plattenbewegung erzeugten Hintergrundströmung, die Ausbreitung aufgrund des Auftriebs des Plumematerials und die Strömung des Plumematerials entlang des geneigten Unterrandes der Lithosphäre in Richtung des Mittelozeanischen Rückens (siehe Gleichung (5.2) auf Seite 94). Der Auftrieb des Plumematerials führt zu einer radialsymmetrischen Ausbreitung unterhalb der Lithosphäre. Deshalb ist zu erwarten, daß die Entstehung einer pulsförmigen Anomalie, die sich entlang der Spreadingachse ausbreitet, entscheidend von der relativen Bedeutung der beiden anderen Terme abhängt. Die passive Advektion mit der Plattenbewegung, durch die die Anomalie vom Rücken wegtransportiert wird, ist an der Spreadingachse von der Größenordnung u_0 [*Ribe* et al., 1995; *Ribe*, 1996]. Für die Strömung entlang des Unterrandes der Lithosphäre, durch die die Anomalie auf den Rückenbereich konzentriert wird, ergibt sich,

$$4\sigma\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial b}{\partial x}S^3\right) \sim \sigma^{\frac{1}{4}}\kappa^{\frac{1}{2}}{u_0}^{\frac{1}{4}} ,$$

wobei für die Lithosphärenmächtigkeit $b \sim (\kappa L/u_0)^{1/2}$ [*Ribe*, 1996], für die relevante Längenskala an der Spreadingachse $L \sim (Q/u_0)^{1/2}$ [*Ribe et al.*, 1995; *Ribe*, 1996] und für die Längenskala der Schichtdicke $S_0 \sim (Q/\sigma)^{1/4}$ [*Ribe et al.*, 1995; *Ribe*, 1996] angenommen worden ist. Eine Konzentration der Störung auf den Rückenbereich ist demnach bei einem großen Wert für das Verhältnis,

$$\left(\frac{\kappa^2\sigma}{{u_0}^3}\right)^{\frac{1}{4}} = \pi_u \cdot {\pi_b}^{-\frac{1}{8}} ,$$

mit $\pi_b = Q\sigma/u_0^2$ und $\pi_u = Q^{1/8}\sigma^{3/8}\kappa^{1/2}/u_0$ zu erwarten, während sich die Störung bei einem kleinen Wert stärker in Richtung der Plattenbewegung ausbreiten sollte.

Das Verhältnis von π_u zu ${\pi_b}^{1/8}$ wird mit steigendem Viskositätskontrast ($\sigma \sim \gamma$) und mit sinkender Spreadingrate größer. Es ist dagegen unabhängig vom Volumenfluß. Für die vier zeitabhängigen Modellrechnungen ergeben sich Werte von $\pi_u \cdot {\pi_b}^{-1/8} = 1.36$ (Modell 9.2), $\pi_u \cdot {\pi_b}^{-1/8} = 0.48$ (Modell 12.2), $\pi_u \cdot {\pi_b}^{-1/8} = 0.54$ (Modell 3.2) und $\pi_u \cdot {\pi_b}^{-1/8} = 0.19$ (Modell 6.2). Damit ist der Wert für das Modell, das die größte Konzentration der Störung auf den Rückenbereich zeigt (Modell 9.2), am größten und für das Modell mit der stärksten Strömung der Anomalie in Richtung der Plattenbewegung (Modell 6.2) am kleinsten. Allerdings unterscheiden sich die Werte nur um eine Größenordnung, obwohl die Modellparameter über einen weiten Bereich variiert worden sind. Die Ursache liegt in der Korrelation der Parameter π_b und π_u, die beide aus denselben Modellparametern berechnet werden, die lediglich mit unterschiedlicher Potenz eingehen, so daß bei Variation der Modellparameter beide Parameter entweder größer oder beide kleiner werden. Damit besteht in den numerischen Modellrechnungen nicht die Möglichkeit, die Parameter π_b und π_u getrennt voneinander zu variieren.

Ob das Produkt $\pi_u \cdot {\pi_b}^{-1/8}$ wirklich der entscheidende Parameter ist, der die Ausbreitung der Störung unter Mittelozeanischen Rücken kontrolliert, kann anhand der vier Modellrech-

nungen nicht eindeutig beantwortet werden. Um diese Frage zu klären, sind weitere Modellrechnungen notwendig. Eine systematische Parameterstudie ist allerdings aufgrund des hohen Rechenzeitaufwands der zeitabhängigen Modellrechnungen als Folge der für eine gute zeitliche Auflösung notwendigen sehr kleinen Zeitschrittlängen in den Rechnungen nicht möglich. Eine Alternative, um die Ausbreitung von Volumenstörungen unter Mittelozeanischen Rücken systematisch zu untersuchen, bietet die vereinfachte Theorie der Flüssigkeitsströmung in dünnen Schichten, indem in Gleichung (5.2) auf Seite 94, die von *Ribe et al.* [1995], *Ribe* [1996] und *Ribe und Delattre* [1998] nur für zeitlich konstante Volumenflüsse gelöst worden ist, ein zeitlich variabler Volumenfluß angenommen wird.

Kapitel 7

Diskussion

Die vorgestellten Modellrechnungen zur Wechselwirkung von Mantelplumes mit Mittelozeanischen Rücken haben die Ergebnisse früherer Untersuchungen bestätigt, daß die Dynamik der Plume-Rücken-Wechselwirkung von der Spreadingrate des Mittelozeanischen Rückens und vom Plumefluß abhängt [*Feighner und Richards*, 1995; *Feighner et al.*, 1995; *Ribe et al.*, 1995; *Ito et al.*, 1996]. Gleichzeitig haben sie aber auch gezeigt, daß der Viskositätskontrast zwischen Plumematerial und umgebendem Mantel eine wichtigere Rolle spielt, als bisher angenommen wurde. Bei einer geringen Spreadingrate strömt das Plumematerial hauptsächlich entlang der Rückenachse, wenn der Viskositätskontrast zwischen Plume- und Mantelmaterial groß ist. Damit zeigen die numerischen Modellrechnungen zum ersten Mal eine signifikante Kanalisierung des Plumematerials, die in früheren Untersuchungen nicht gefunden wurde. Bei einer hohen Spreadingrate oder einem geringen Viskositätskontrast breitet sich das Plumematerial dagegen radial unterhalb des Rückens aus und wird durch die Plattenbewegung sehr effektiv von der Spreadingachse wegtransportiert.

Aus den Modellrechnungen lassen sich insbesondere einige Schlußfolgerungen für den Island-Plume ableiten, dem am besten untersuchten Mantelplume unter einem Mittelozeanischen Rücken mit geringer Spreadingrate ($u_0 \approx 1$ cm/a im Nord-Atlantik, *Schilling* [1991]). Die Temperaturanomalie des Island-Plumes wird mit $\Delta T_P = 263$ K angegeben [*Schilling*, 1991]. Der Auftriebsfluß wurde mit $B \approx 1400$ kg/s abgeschätzt, wobei die Unsicherheiten allerdings einen Faktor 2 ausmachen [*Sleep*, 1990; *Schilling*, 1991]. Das in Abschnitt 5.2.2 vorgestellte Referenzmodell (Modell 9.2 im Anhang A.2), dessen Parameter am besten mit der Situation für Island übereinstimmen, zeigt eine Ausbreitung des Plumematerials über große Entfernungen entlang der Spreadingachse. Dieses ist konsistent mit Variationen der geochemischen Zusammensetzung [*Schilling*, 1973], mit den großräumigen Topographie- und Schwereanomalien [*White*, 1997] und mit der anormal dicken Kruste [*Schmallwood et al.*, 1995; *White*, 1997] im Bereich des Reykjanes-Rückens südwestlich von Island, die auf eine Strömung des Plumematerials von Island über mehr als 1000 km entlang des Rückens hinweisen.

In den Modellrechnungen hat sich herausgestellt, daß die Viskosität des Plumematerials unterhalb des Mittelozeanischen Rückens sehr gering sein muß, um eine Kanalisierung des

Plumematerials über derart große Entfernungen zu ermöglichen. In den Modellen mit einer hohen Aktivierungsenergie von $E = 500$ kJ/mol, die für das viskose Fließen von Olivin realistisch ist [u.a. *Kohlstedt und Götze*, 1974], beträgt die Viskosität im oberen Bereich des Plumestamms weniger als 10^{17} Pas. Mit zunehmender Entfernung zum Plumezentrum steigt die Viskosität unterhalb des Rückens an und erreicht Werte von $10^{18} - 10^{19}$ Pas im Randbereich des Plumes. Damit ist die Viskosität in den Modellrechnungen deutlich kleiner als der Wert von 10^{21} Pas, der üblicherweise für die Viskosität des oberen Erdmantels angenommen wird [u.a. *Lambeck et al.*, 1990; *Lambeck*, 1993; *Mitrovica und Peltier*, 1993, *Forte und Mitrovica*, 1996]. Weil unter Mittelozeanischen Rücken das Plumematerial bis in geringe Tiefen aufsteigen kann, gehören diese Regionen vermutlich zu den Bereichen mit der geringsten Viskosität im Erdmantel. Für den oberen Erdmantel unter Island ist eine Viskosität von $3 \cdot 10^{18}$ Pas abgeschätzt worden, um die gemessenen horizontalen und vertikalen Verschiebungsraten an der Erdoberfläche zu erklären [*Pollitz und Sacks*, 1996]. Abgesehen vom Bereich direkt oberhalb des Plumestamms weicht die Viskosität in den numerischen Modellrechnungen nicht signifikant von diesem Wert ab.

Ein niedrigviskoser Mantelplume mit großer Temperaturanomalie unter Island kann qualitativ die Anomalien am Reykjanes-Rücken erklären. Allerdings ergeben sich auch einige Probleme mit dieser Vorstellung. In der seismischen Tomographie ist durch Inversion der Laufzeiten von P- und S-Wellen eine Anomalie der seismischen Wellengeschwindigkeit mit einem Durchmesser von etwa 300 km unter Island gefunden worden, die bis in eine Tiefe von wenigstens 400 km reicht [*Wolfe et al.*, 1997]. Diese Anomalie deutet an, daß unter Island heißes Material in einem engen Kanal aus größerer Tiefe im Erdmantel, möglicherweise von der Kern-Mantel-Grenze [*Shen et al.*, 1998; *Helmberger et al.*, 1998; *Bijwaard und Spakman*, 1999], aufsteigt. In den Modellrechnungen ergibt sich aufgrund der niedrigen Plumeviskosität eine Breite der Temperaturanomalie, die mit einem Radius von etwa 40 km schmaler ist als die Geschwindigkeitsanomalie in den Ergebnissen der seismischen Tomographie. Ein breiterer Plume mit derselben Temperaturanomalie im Plumezentrum und demselben Viskositätskontrast transportiert deutlich mehr Material, was inkonsistent mit dem für Island bestimmten Auftriebsfluß ist. Auf der anderen Seite haben die Modellrechnungen gezeigt, daß eine Verringerung der Temperaturanomalie oder des Viskositätskontrastes bei konstantem Auftriebsfluß zwar zu einer Verbreiterung des Plumes führt, gleichzeitig aber auch die Strömung des Plumematerials entlang der Spreadingachse reduziert wird. Eine Verbreiterung des Plumes bei gleichbleibender Ausbreitung des Plumematerials entlang des Rückens läßt sich nur durch eine stärkere Tiefenabhängigkeit der Viskosität erreichen. Dadurch wird die Viskosität im Rückenbereich nicht verändert, in größerer Tiefe steigt sie aber auf höhere Werte als die in den Modellrechnungen angenommenen 10^{21} Pas an. Diese erhöhte Viskosität in größerer Tiefe führt dann zu einer Verbreiterung des Plumes in diesem Tiefenbereich [*Albers und Christensen*, 1996].

Eine weitere Ursache für die Unterschiede zwischen der Plumebreite in den numerischen Modellrechnungen und den seismologischen Ergebnissen können Verschmierungseffekte als Folge von räumlichen Auflösungsproblemen in der seismischen Tomographie sein, die klein-

räumige Anomalien mit großer Amplitude als großräumigere Anomalien mit verringerter Amplitude erscheinen lassen. Untersuchungen der Diffraktion von S-Wellen, die durch die Temperaturanomalie des Plumes verursacht wird, deuten eine geringere Plumebreite mit einem Radius von etwa 100 km an [*Allen et al.*, 1999]. Messungen von Helium-Isotopen in basaltischen Laven auf Island zeigen einen im Vergleich zu normalen Mittelozeanischen Rücken erhöhten Wert des ^{3}He/^{4}He-Verhältnisses über einen Bereich mit einem Durchmesser von etwa 100 km im südöstlichen Teil Islands, der als Breite des Plumes in größerer Tiefe interpretiert wird [*Breddam et al.*, 2000]. Auch dieser Wert ist kleiner als die Breite der Geschwindigkeitsanomalie in den Ergebnissen der seismischen Tomographie und in guter Übereinstimmung mit den Resultaten der numerischen Modellrechnungen. Insgesamt bleibt damit festzuhalten, daß die Modellrechnungen mit einem niedrigviskosen Plume, der sich unterhalb des Mittelozeanischen Rückens über große Entfernungen entlang der Spreadingachse ausbreitet, im Prinzip konsistent mit den Beobachtungsdaten für Island und den Reykjanes-Rücken sind.

Ein grundlegendes Problem stellt allerdings die Schmelzmenge dar, die durch kleinräumige Mantelplumes mit großer Temperaturanomalie unter Mittelozeanischen Rücken erzeugt wird. Im Bereich des Mittelozeanischen Rückens steigt das heiße Plumematerial bis in geringe Tiefen auf. Im Vergleich zum passiven Aufströmen des Mantelmaterials durch die divergente Plattenbewegung ist die Aufstiegsgeschwindigkeit des Plumematerials sehr viel größer. Dadurch transportiert der Plume mehr Material in die Schmelzregion unterhalb des Mittelozeanischen Rückens, so daß lokal große Mengen an Schmelzen entstehen. Eine Extraktion der Schmelze aus der Matrix führt zur Ausbildung einer verdickten Kruste und damit zu einer Topographieerhöhung am Mittelozeanischen Rücken. Für einen heißen, kleinräumigen Plume unter Island ergeben sich auf diese Weise eine Krustendicke und Topographieerhöhung, die die Beobachtungsdaten bei weitem übersteigen [*Ribe et al.*, 1995; *Ito et al.*, 1996]. Um mit den Beobachtungen konsistente Ergebnisse zu erzielen, muß sich entweder die Schmelze zunächst über große Entfernungen in lateraler Richtung ausbreiten, bevor sie aus der Matrix extrahiert wird, oder die Schmelzmenge, die durch Mantelplumes erzeugt wird, muß deutlich reduziert werden. Dazu haben *Ribe et al.* [1995] und *Ito et al.* [1996] großräumige Aufströme mit einem Durchmesser von 600 km und einer Temperaturanomalie von weniger als 100 K vorgeschlagen. Diese Modelle können zwar die Krustendicke bei Island erklären, stimmen aber nicht mit der kleinräumigeren Geschwindigkeitsanomalie der seismischen Tomographie überein.

Eine andere Möglichkeit zur Reduktion der durch Mantelplumes erzeugten Schmelzmenge könnte sich aus dem Einfluß von Wasser auf die Viskosität des Plumematerials ergeben. Experimentelle Messungen der Viskosität von Peridotit deuten an, daß die Viskosität von feuchtem Peridotit mit einem geringen Wasseranteil möglicherweise um 2–3 Größenordnungen kleiner ist als von trockenem Peridotit ohne Wasser [*Hirth und Kohlstedt*, 1996]. Wenn das Plumematerial einen geringen Anteil an Wasser enthält, geht das Wasser nach Überschreiten der Solidustemperatur in die Schmelze, so daß nach Extraktion der Schmelze die Viskosität des an Wasser verarmten Residuums ansteigt [*Hirth und Kohlstedt*, 1996].

Durch diesen Effekt wird die Viskosität des Plumematerials in der Schmelzregion erhöht. *Ito et al.* [1999] haben gezeigt, daß eine Erhöhung der Viskosität um den Faktor 50 bereits ausreichend ist, um die Aufstiegsgeschwindigkeit des Plumematerials in der Schmelzregion so weit zu verringern, daß die erzeugte Schmelzmenge konsistent mit der für Island bestimmten Krustendicke ist. Allerdings sind noch weitere experimentelle Messungen nötig, um den Einfluß des Wassers auf die Rheologie des Erdmantels eindeutig zu klären. Insbesondere ist nicht klar, inwieweit durch den in der Matrix verbleibenden Teil der Schmelze die Viskosität wieder verringert und dadurch dem Effekt der Dehydration entgegengewirkt wird. In den hier vorgestellten Modellrechnungen hatte sich herausgestellt, daß eine sehr niedrige Viskosität des Plumematerials erforderlich ist, um eine Ausbreitung des Plumematerials über große Entfernungen entlang der Spreadingachse zu erhalten. Sollte sich die Erhöhung der Plumeviskosität in der Schmelzregion durch den Effekt der Dehydration als real erweisen, stellt sich die Frage, ob die Kanalisierung des Plumematerials entlang der Spreadingachse erhalten bleibt, oder ob durch die Viskositätserhöhung die Ausbreitung des Plumematerials entlang der Spreadingachse reduziert wird.

Die Modellrechnungen zur Ausbreitung von Störungen im Plumefluß unter Mittelozeanischen Rücken haben gezeigt, daß pulsförmige Temperaturanomalien entstehen, die sich entlang der Rückenachse fortbewegen, wenn die Spreadingrate und die Plumeviskosität gering sind. Dabei ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Störung über einen großen Entfernungsbereich höher als die Spreadingrate des Rückens. Pulsförmige Temperaturanomalien, die sich entlang der Rückenachse ausbreiten, sind für den Island-Plume postuliert worden, um die V-förmigen Schwere- und Topographieanomalien am Reykjanes-Rücken zu erklären [u.a. *Vogt*, 1971; *White et al.*, 1995; *White*, 1997]. Die zeitabhängigen Modellrechnungen können herangezogen werden, um diese Annahme zu überprüfen. Dazu wird davon ausgegangen, daß sich eine punktförmige Temperaturstörung mit der in Abbildung 6.5 auf Seite 112 dargestellten Geschwindigkeit entlang der Spreadingachse ausbreitet. Dabei erzeugt sie an dem entsprechenden Punkt an der Rückenachse, wo sie sich zu einem bestimmten Zeitpunkt gerade befindet, durch eine erhöhte Schmelzproduktion eine Anomalie, z.B. in der Krustendicke. Während sich die Temperaturstörung weiter entlang der Spreadingachse bewegt, wird die Anomalie der Krustendicke durch die Plattenbewegung von der Rückenachse wegtransportiert. Die sich daraus ergebende räumliche Struktur der Anomalie kann mit den beobachteten Anomalien am Reykjanes-Rücken verglichen werden.

Abbildung 7.1 zeigt die Struktur der Krustenanomalie etwa 2.3 Ma und 10.0 Ma, nachdem die Temperaturstörung das obere Ende des Plumestamms erreicht hat. Dazu sind die Ergebnisse in kartesischer Geometrie auf eine Kugeloberfläche mit einem Radius von 6371 km projeziert worden, wobei das Zentrum des Plumes bei 64.8°N und 21.4°W und ein Winkel von 41.4° zwischen der Rückenachse und der Nordrichtung angenommen worden sind. Bei 2.3 Ma stimmt die berechnete Struktur der Anomalie recht gut mit der beobachteten V-förmigen Schwereanomalie überein. Der ähnliche Öffnungswinkel der V-Struktur deutet an, daß die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Temperaturstörung in der Modellrechnung in der richtigen Größenordnung liegt. Bei 10.0 Ma ist die Übereinstimmung bis zu einer Entfer-

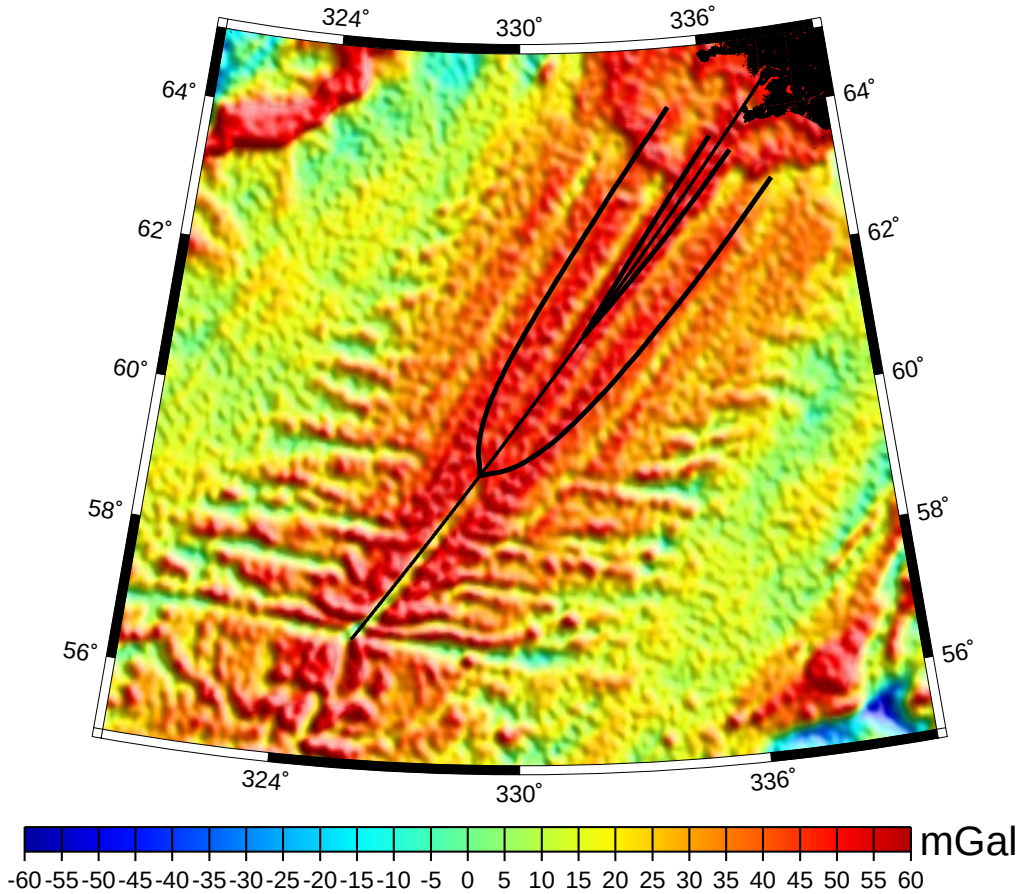

Abbildung 7.1: Anomalie der Freiluft-Schwere am Reykjanes-Rücken (entnommen aus dem globalen Datensatz von *Sandwell und Smith* [1995]) in stereographischer, winkeltreuer Projektion. Die beiden dicken Linien kennzeichnen die aus der Modellrechnung abgeleitete räumliche Struktur der Krustenanomalie zu zwei unterschiedlichen Zeiten (siehe Text). Diese Abbildung wurde ebenso wie Abbildung 2.1 auf Seite 8 mit Hilfe der interaktiven Oberfläche der GMT-Software erstellt [*Wessel und Smith*, 1991; *Becker und Braun*, 1998].

nung von etwa 700 km zum Plumezentrum immer noch gut. An der Spitze wird die Anomalie aber mehr U- als V-förmig. Dieses ist die Konsequenz aus der Abnahme der Ausbreitungsgeschwindigkeit mit zunehmender Entfernung vom Plumezentrum. Die Temperaturstörung hat das äußere Ende des Plumes erreicht, wo die weitere Ausbreitung stoppt, so daß die Anomalie der Krustendicke durch die Plattenbewegung auseinandergezogen wird und damit im Laufe der Zeit immer mehr eine U-Form annimmt. Weil sich die Temperaturstörung im wesentlichen passiv mit der Strömung des Plumematerials ausbreitet, ist nicht zu erwarten, daß eine Variation der Amplitude der Temperaturstörung eine signifikante Änderung der erzeugten Anomalie bewirkt.

Um eine mit den Schwere- und Topographiedaten konsistente Anomalie zu erhalten, muß die Ausbreitung des Plumematerials über größere Entfernungen mit hoher Geschwindigkeit

erfolgen. Unter der Annahme, daß sich die Temperaturstörungen passiv mit der Strömung in den stationären Modellen fortbewegen, ergibt sich auch in den Modellen mit geringerer Plumeviskosität unterhalb des Mittelozeanischen Rückens, die ansonsten aber die gleiche Spreadingrate und den gleichen Auftriebsfluß haben (Modelle 16, 18 und 19 im Anhang A.2), eine U-förmige Struktur, die nicht mit den Schweredaten übereinstimmt. Eine quantitative Übereinstimmung der Modellrechnungen mit den beobachteten Anomalien am Reykjanes-Rücken erfordert deshalb möglicherweise ein nichtlineares Fließgesetz mit Spannungsabhängigkeit der Viskosität. Dadurch entsteht im Randbereich des Plumes, wo hohe Scherspannungen auftreten, eine Zone erniedrigter Viskosität, durch die die Strömung des Plumematerials stärker vom umgebenden Mantel entkoppelt wird. Dieses könnte möglicherweise eine Ausbreitung des Plumematerials über größere Entfernungen mit hoher Geschwindigkeit fördern.

In den Modellrechnungen ist eine zweifache Symmetrie angenommen worden. Die Symmetrie um die Spreadingachse ist bei der Berechnung der Struktur der Anomalien in Abbildung 7.1 bereits ausgenutzt worden. Durch die Symmetrie um das Plumezentrum wird in den Modellrechnungen dieselbe Struktur, die sich am Reykjanes-Rücken ergibt, auch für den Kolbeinsey-Rücken nordöstlich von Island vorhergesagt. Die Schwere- und Topographiedaten zeigen aber keine so ausgeprägten V-förmigen Anomalien am Kolbeinsey-Rücken wie am Reykjanes-Rücken (siehe Abbildung 2.3 auf Seite 11). Allerdings ist auch die Struktur des Rückens nordöstlich von Island mit einigen Transform-Störungen, an denen sich die räumliche Lage der Spreadingachse sprunghaft ändert, komplizierter als in den Modellrechnungen. Diese Transform-Störungen lassen keine signifikante Strömung des Plumematerials entlang der Spreadingachse erwarten. Um detaillierte Aussagen über die Strömung machen zu können, muß die Asymmetrie in der Rückenstruktur in den Modellrechnungen berücksichtigt werden. Außerdem ist bei einem Vergleich der Modellergebnisse mit den Beobachtungsdaten für Island zu beachten, daß sich der Island-Plume möglicherweise nicht, wie in den Modellrechnungen angenommen, direkt unterhalb des Mittelatlantischen Rückens, sondern etwas versetzt zur Rückenachse befindet.

Die Modellrechnungen haben gezeigt, daß die Plumeviskosität eine wichtige Rolle bei der Wechselwirkung von Mantelplumes mit Mittelozeanischen Rücken spielt. Obwohl die Effekte der Schmelzbildung in den Modellrechnungen nicht berücksichtigt und eine einfache Struktur des Mittelozeanischen Rückens angenommen worden sind, können die Modelle mit stark variabler Viskosität im Prinzip die Kanalisierung der Plumeströmung erklären, die für Island postuliert, aber in früheren numerischen Modellrechnungen mit geringeren Viskositätsvariationen nicht gefunden wurde. Um allerdings detaillierte Aussagen über den Island-Plumes machen zu können, müssen diese Effekte berücksichtigt werden. Die Modellrechnungen haben gezeigt, daß es wichtig ist, ein realistisches Viskositätsgesetz mit starker Temperaturabhängigkeit für detaillierte Studien der Wechselwirkung von Mantelplumes mit Mittelozeanischen Rücken zu verwenden.

Kapitel 8

Zusammenfassung

Die Wechselwirkung von Mantelplumes mit Mittelozeanischen Rücken wurde in dreidimensionalen numerischen Konvektionsmodellen untersucht. Dazu wurde ein neues numerisches Verfahren zur Lösung von Konvektionsproblemen mit variabler Viskosität in kartesischer Geometrie vorgestellt. Dieses Verfahren basiert auf einer Finite-Volumen Diskretisierung in Kombination mit einem Mehrgitterverfahren. Durch eine lokale Gitterverfeinerungstechnik, die effizienter und flexibler ist als zuvor verwendete Methoden zur Erzeugung nichtäquidistanter Gitter, wurde eine einfache Implementation komplexer numerischer Gitterstrukturen realisiert. Ein Vergleich mit anderen numerischen Verfahren hat ergeben, daß die Genauigkeit der numerischen Lösung auch bei großen Viskositätsvariationen hoch ist. Damit ermöglicht dieses neu entwickelte Verfahren die Berücksichtigung einer deutlich stärkeren Temperaturabhängigkeit der Viskosität als in bisherigen Untersuchungen. Im Rahmen dieser Arbeit wurden zum ersten Mal Modellrechnungen zur Plume-Rücken-Wechselwirkung mit einem realistischen Viskositätsgesetz durchgeführt, das laterale Viskositätsvariationen von mehr als sechs Größenordnungen zuläßt.

In Modellen mit zeitlich konstantem Plumefluß wurde der Einfluß der verschiedenen Modellparameter auf die Wechselwirkung von Mantelplumes mit Mittelozeanischen Rücken systematisch untersucht. Dabei wurde ein deutlich größerer Parameterbereich abgedeckt als in früheren Untersuchungen. Es hat sich herausgestellt, daß die Dynamik der Plume-Rücken-Wechselwirkung stärker von der Viskosität des Plumematerials abhängt, als bisher angenommen wurde. Bei einer Plumeviskosität in der Größenordnung von 10^{17} Pa s und einer geringen Spreadingrate hat sich eine signifikante Strömung des Plumematerials entlang der Rückenachse ergeben. Eine solche Kanalisierung des Plumematerials wurde seit längerem zur Erklärung von Beobachtungsdaten an Mittelozeanischen Rücken vorgeschlagen, konnte aber bislang in Modellen mit geringeren Viskositätsvariationen nicht realisiert werden. Erst in den hier vorgestellten Modellrechnungen hat sich durch die starke Temperaturabhängigkeit der Viskosität eine ausgeprägte Strömung entlang der Rückenachse eingestellt. In Modellen mit hoher Spreadingrate oder geringem Viskositätskontrast zwischen Plumematerial und umgebenden Mantel hat sich dagegen eine radiale Ausbreitung des Plumematerials unterhalb des Mittelozeanischen Rückens ergeben. Um die Ausbreitung des Plumematerials

in Abhängigkeit von den Modellparametern zu beschreiben, wurde aus den Ergebnissen der numerischen Modellrechnungen ein Skalierungsgesetz für die Plumebreite am Mittelozeanischen Rücken abgeleitet.

In zeitabhängigen Modellrechnungen wurde erstmalig die Auswirkung kurzzeitiger Störungen im Plumefluß auf die Wechselwirkung von Mantelplumes mit Mittelozeanischen Rücken untersucht. Es hat sich gezeigt, daß bei geringer Spreadingrate und Plumeviskosität pulsförmige Temperaturanomalien entstehen, die sich entlang der Rückenachse ausbreiten. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist dabei deutlich größer als die Spreadingrate des Mittelozeanischen Rückens. Ein Vergleich der zeitlichen Entwicklung der Störungen für unterschiedliche Modellparameter hat ergeben, daß mit steigender Spreadingrate und abnehmendem Viskositätskontrast zwischen Plumematerial und umgebenden Mantel die Konzentration der Temperaturanomalie auf den Rückenbereich geringer wird. In allen Fällen erfolgte die Ausbreitung der Störungen unterhalb des Mittelozeanischen Rückens im wesentlichen passiv mit der Plumeströmung. Pulsationen des Island-Plumes sind als Ursache der V-förmigen Topographie- und Schweranomalien am Reykjanes-Rücken vorgeschlagen worden. Die Ergebnisse der Modellrechnungen haben Hinweise auf die Existenz entsprechender Störungen geliefert und wurden im Zusammenhang mit den Beobachtungen am Reykjanes-Rücken diskutiert.

Anhang

A.1 Zusammenstellung der Modellparameter

Parameter	Bedeutung	Wert	Einheit
h	Höhe der Modellbox	400	km
l_x	Länge der Modellbox	800–1200	km
l_y	Breite der Modellbox	800–1600	km
ρ_0	Referenzwert der Dichte	3300	kg/m^3
α	Therm. Ausdehnungskoeffizient	$3.5 \cdot 10^{-5}$	K^{-1}
g	Schwerebeschleunigung	9.81	m/s^2
κ	Thermische Diffusivität	10^{-6}	m^2/s
η_0	Referenzwert der Viskosität	10^{21}	Pa s
E	Aktivierungsenergie	100–600	kJ/mol
V	Aktivierungsvolumen	$2 \cdot 10^{-6}$–$8 \cdot 10^{-6}$	m^3/mol
R	allgemeine Gaskonstante	8.314	J/mol K
T_0	Oberflächentemperatur	273	K
T_R	Manteltemperatur	1573	K
ΔT	Temperaturänderung in der Modellbox	1300	K
ΔT_P	Temperaturanomalie des Plumes	100–400	K
$r_{1/2}$	Breite der Temperaturanomalie	29–80	km
Q	Volumenfluß des Plumes	32–112	m^3/s
B	Auftriebsfluß des Plumes	600–3900	kg/s
γ	Viskositätskontrast	100–540 000	–
u_0	Plattengeschwindigkeit	0.25–4	cm/a
x_R	“Breite” der Spreadingachse	12	km

A.2 Parameter der Modellrechnungen

Modell	l_x/h	l_y/h	u_0h/κ	$\Delta T_P/\Delta T$	$r_{1/2}/h$	$Q/h\kappa$	$E/R\Delta T$	$\rho ghV/R\Delta T$	γ
1	2	4	32.15	0.23	0.157	128.75	18.504	4.885	426
2	2	4	64.30	0.23	0.154	128.75	18.504	4.885	425
3.1	2	3	128.60	0.23	0.132	79.97	18.504	4.885	396
3.2	2	3	128.60	0.23	0.150	128.75	18.504	4.885	423
3.3	3	3	128.60	0.23	0.169	199.92	18.504	4.885	439
3.4	3	4	128.60	0.23	0.184	279.89	18.504	4.885	448
4	2	3	257.20	0.23	0.147	128.78	18.504	4.885	422
5	2	3	385.80	0.23	0.146	128.76	18.504	4.885	421
6.1	2	3	514.40	0.23	0.127	79.97	18.504	4.885	392
6.2	2	3	514.40	0.23	0.144	128.75	18.504	4.885	420
6.3	2	3	514.40	0.23	0.161	200.08	18.504	4.885	437
6.4	2	4	514.40	0.23	0.176	280.04	18.504	4.885	446
7	2	4	32.15	0.23	0.107	128.75	46.261	4.885	16520
8	2	4	64.30	0.23	0.106	128.76	46.261	4.885	16397
9.1	2	3	128.60	0.23	0.094	79.99	46.261	4.885	15076
9.2	2	3	128.60	0.23	0.105	128.77	46.261	4.885	16253
9.3	2	4	128.60	0.23	0.116	199.92	46.261	4.885	16964
10	2	3	257.20	0.23	0.104	128.77	46.261	4.885	16131
11	2	3	385.80	0.23	0.104	128.85	46.261	4.885	16070
12.1	2	3	514.40	0.23	0.092	80.03	46.261	4.885	14750
12.2	2	3	514.40	0.23	0.103	128.80	46.261	4.885	16024
12.3	2	3	514.40	0.23	0.115	199.94	46.261	4.885	16792
13	2	3	128.60	0.23	0.160	128.75	9.252	4.885	129
14	2	3	128.60	0.23	0.137	128.83	27.757	4.885	1416
15	2	3	128.60	0.23	0.124	128.79	37.009	4.885	4799
16	2	4	128.60	0.23	0.088	128.76	55.513	4.885	54416
17	2	3	128.60	0.23	0.118	128.75	46.261	2.443	2574
18	2	4	128.60	0.23	0.094	128.77	46.261	7.328	98940
19	2	4	128.60	0.23	0.086	128.96	46.261	9.770	538733
20	2	3	128.60	0.08	0.200	128.80	46.261	4.885	374
21	2	3	128.60	0.15	0.148	128.76	46.261	4.885	2391
22	2	4	128.60	0.31	0.073	128.79	46.261	4.885	86894
23	2	3	514.40	0.23	0.152	128.85	9.252	4.885	129
24	2	3	514.40	0.23	0.134	128.85	27.757	4.885	1403
25	2	3	514.40	0.23	0.119	128.85	37.009	4.885	4748
26	2	3	514.40	0.23	0.087	128.85	55.513	4.885	53239
27	2	3	514.40	0.23	0.115	128.75	46.261	2.443	2553
28	2	3	514.40	0.23	0.093	128.76	46.261	7.328	95838
29	2	3	514.40	0.08	0.189	128.85	46.261	4.885	371
30	2	3	514.40	0.15	0.144	128.85	46.261	4.885	2366
31	2	3	514.40	0.31	0.073	128.84	46.261	4.885	84565

A.3 Parameter der Skalierungsanalyse

Modell	$\sigma h^3/\kappa$	S_0/h	L_0/h	W_0/h	Π_b	Π_u	W/h	W/W_0
1	187515	0.162	24.73	2.00	23354	5.42	6.33	3.16
2	186648	0.162	12.35	1.42	5812	2.70	5.23	3.70
3.1	168013	0.148	4.21	0.79	812	1.22	2.69	3.42
3.2	185550	0.162	6.17	1.00	1445	1.35	3.83	3.82
3.3	196314	0.179	8.70	1.25	2373	1.46	5.10	4.09
3.4	202017	0.193	11.28	1.48	3419	1.54	6.34	4.30
4	184519	0.163	3.08	0.71	359	0.67	2.31	3.26
5	184012	0.163	2.05	0.58	159	0.45	1.73	2.99
6.1	165341	0.148	1.05	0.39	50	0.30	1.08	2.73
6.2	183596	0.163	1.54	0.50	89	0.34	1.42	2.83
6.3	194861	0.179	2.17	0.62	147	0.36	1.84	2.96
6.4	200806	0.193	2.82	0.74	213	0.38	2.29	3.10
7	7460567	0.065	62.09	2.00	929303	21.57	7.67	3.83
8	7394094	0.065	31.00	1.42	230274	10.75	6.11	4.32
9.1	6686665	0.059	10.58	0.79	32342	4.88	3.28	4.16
9.2	7316445	0.065	15.45	1.00	56968	5.35	4.43	4.43
9.3	7700539	0.071	21.77	1.25	93088	5.77	5.86	4.70
10	7250972	0.065	7.71	0.71	14115	2.67	2.95	4.16
11	7217950	0.065	5.14	0.58	6249	1.78	2.27	3.92
12.1	6513950	0.059	2.63	0.39	1970	1.21	1.36	3.45
12.2	7193470	0.065	3.85	0.50	3502	1.33	1.86	3.72
12.3	7607531	0.072	5.43	0.62	5748	1.43	2.51	4.02
13	56089	0.219	4.57	1.00	437	0.86	3.19	3.18
14	628424	0.120	8.37	1.00	4895	2.13	4.10	4.10
15	2148964	0.088	11.38	1.00	16735	3.38	4.26	4.25
16	24536493	0.048	20.90	1.00	191034	8.43	4.60	4.59
17	1161028	0.103	9.76	1.00	9039	2.68	3.61	3.60
18	44135799	0.041	24.25	1.00	343656	10.50	5.34	5.34
19	232990389	0.027	36.73	1.00	1816817	19.60	5.88	5.87
20	56847	0.218	4.59	1.00	443	0.87	3.25	3.25
21	694466	0.117	8.58	1.00	5407	2.21	3.90	3.90
22	52659000	0.040	25.35	1.00	410084	11.22	4.86	4.86
23	55725	0.219	1.14	0.50	27	0.21	1.25	2.49
24	620755	0.120	2.09	0.50	302	0.53	1.57	3.15
25	2120588	0.088	2.84	0.50	1033	0.84	1.72	3.43
26	23920107	0.048	5.20	0.50	11648	2.09	2.04	4.08
27	1149695	0.103	2.43	0.50	559	0.67	1.50	3.00
28	42484902	0.042	6.00	0.50	20674	2.59	2.39	4.78
29	56200	0.219	1.14	0.50	27	0.22	1.32	2.64
30	685246	0.117	2.14	0.50	334	0.55	1.55	3.10
31	51022588	0.040	6.28	0.50	24843	2.77	2.20	4.39

Literaturverzeichnis

Albers, M., *Numerische Untersuchung stationärer Mantel-Plumes*, Diplomarbeit, Institut für Geophysik, Universität Göttingen (1995).

Albers, M., A local mesh refinement multigrid method for 3-D convection problems with strongly variable viscosity, *J. Comput. Phys.* **160**, 126–150 (2000).

Albers, M. und U.R. Christensen, The excess temperature of plumes rising from the core-mantle boundary, *Geophys. Res. Lett.* **23**, 3567–3570 (1996).

Alcouffe, R.E., A. Brandt, J.E. Dendy und J.W. Painter, The multi-grid method for diffusion equation with strongly discontinous coefficients, *SIAM J. Sci. Comput.* **2**, 430–454 (1981).

Allen, R.M., G. Nolet, W.J. Morgan, K. Vogfjörd, B.H. Bergsson, P. Erlendsson, G.R. Foulger, S. Jakobsdóttir, B.R. Julian, M. Pritchard, S. Ragnarsson und R. Stefánsson, The thin hot plume beneath Iceland, *Geophys. J. Int.* **137**, 51–63 (1999).

Anderson, D.L., A seismic equation of state II. Shear properties and thermodynamics of the lower mantle, *Phys. Earth Planet. Int.* **45**, 307–323 (1987).

Auth, C. und H. Harder, Multigrid solution of convection problems with strongly variable viscosity, *Geophys. J. Int.* **137**, 793–804 (1999).

Bai, D. und A. Brandt, Local mesh refinement multilevel techniques, *SIAM J. Sci. Statist. Comput.* **8**, 109–134 (1987).

Batchelor, G.K., *An introduction to fluid dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge (1992).

Baumgardner, J.R., Three-dimensional treatment of convective flow in the Earth's mantle, *J. Stat. Phys.* **39**, 501–511 (1985).

Becker, T. und A. Braun, New program maps geoscience data sets interactively, *EOS Transactions AGU* **79**, 505 (1998).

Bijwaard, H. und W. Spakman, Tomographic evidence for a narrow whole mantle plume below Iceland, *Earth Planet. Sci. Lett.* **166**, 121–126 (1999).

Blankenbach, B., F. Busse, U. Christensen, L. Cserepes, D. Gunkel, U. Hansen, H. Harder, G. Jarvis, M. Koch, G. Marquart, D. Moore, P. Olson, H. Schmeling und T. Schnaubelt, A benchmark comparison for mantle convection codes, *Geophys. J. Int.* **98**, 23–38 (1989).

Böhler, R., Temperatures in the Earth's core from melting-point measurements of iron at high static pressures, *Nature* **363**, 534–536 (1993).

Brandt, A., Multi-level adaptive solution to boundary-value problems, *Math. Comp.* **31**, 333–390 (1977).

Brandt, A., Multilevel computations: Review and recent developments, in: S.F. McCormick (Hrsg.), *Multigrid methods: Theory, applications and supercomputing*, Marcel Dekker, New York (1988), p. 35–62.

Brandt, A. und N. Dinar, Multigrid solutions to elliptic flow problems, in: S.V. Parter (Hrsg.), *Numerical methods for partial differential equations*, Academic Press, San Diego (1979), p. 53–147.

Breddam, K., M.D. Kurz und M. Storey, Mapping out the conduit of the Iceland mantle plume with helium isotopes, *Earth Planet. Sci. Lett.* **176**, 45–55 (2000).

Bunge, H.-P., M.A. Richards und J.R. Baumgardner, Effect of depth-dependent viscosity on the planform of mantle convection, *Nature* **379**, 436–438 (1996).

Bunge, H.-P., M.A. Richards und J.R. Baumgardner, A sensitivity study of three-dimensional spherical mantle convection at 10^8 Rayleigh number: Effects of depth-dependent viscosity, heating mode, and an endothermic phase change, *J. Geophys. Res.* **102**, 11991–12007 (1997).

Burden, R.L. und J.D. Faires, *Numerical analysis*, 5. Auflage, PWS-Kent, Boston (1993).

Burke, K.C. und J.T. Wilson, Hot spots on the Earth's surface, *Sci. Am.* **235**, 46–57 (1976).

Busse, F.H., U. Christensen, R. Clever, L. Cserepes, C. Gable, E. Giannandrea, L. Guillou, G. Houseman, H.-C. Nataf, M. Ogawa, M. Parmentier, C. Sotin und B. Travis, 3D convection at infinite Prandtl number in Cartesian geometry - a benchmark comparison, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **75**, 39–59 (1993).

Cannat, M., A. Briais, C. Deplus, J. Escartin, J. Georgen, J. Lin, S. Mercouriev, C. Meyzen, M. Muller, G. Pouliquen, A. Rabain und P. da Silva, Mid-Atlantic Ridge-Azores hotspot interactions: Along-axis migration of a hotspot-derived event of enhanced magmatism 10 to 4 Ma ago, *Earth Planet. Sci. Lett.* **173**, 257–269 (1999).

Chopelas, A., Thermal expansion, heat capacity, and entropy of *MgO* at mantle pressures, *Phys. Chem. Minerals* **17**, 142–148 (1990).

Chopelas, A. und R. Böhler, Thermal expansion measurements at very high pressure, systematics, and a case for a chemically homogeneous mantle, *Geophys. Res. Lett.* **16**, 1347-1350 (1989).

Chopelas, A. und R. Böhler, Thermal expansivity in the lower mantle, *Geophys. Res. Lett.* **19**, 1983–1986 (1992).

Chopra, P.N. und M.S. Paterson, The experimental deformation of dunite, *Tectonophysics* **78**, 453–473 (1981).

Christensen, U.R., Instability of a hot boundary layer and initiation of thermo-chemical plumes, *Annales Geophysicae* **2**, 311–319 (1984a).

Christensen, U.R., Convection with pressure- and temperature-dependent non-Newtonian rheology, *Geophys. J. R. astr. Soc.* **77**, 343–384 (1984b).

Christensen, U.R., An Eulerian technique for thermomechanical modeling of lithospheric extension, *J. Geophys. Res.* **97**, 2015–2036 (1992).

Christensen, U.R. und H. Harder, 3-D convection with variable viscosity, *Geophys. J. Int.* **104**, 213–226 (1991).

Crough, S.T., Hotspots swells, *Annu. Rev. Earth Planet. Sci.* **11**, 165–193 (1983).

Davaille, A., Simultaneous generation of hotspots and superswells by convection in a heterogeneous planetary mantle, *Nature* **402**, 756–760 (1999).

Davies, G.F., Ocean bathymetry and mantle convection: 1. Large-scale flow and hotspots, *J. Geophys. Res.* **93**, 10467–10480 (1988).

Davies, G.F., Thermomechanical erosion of the lithosphere by mantle plumes, *J. Geophys. Res.* **99**, 15709–15722 (1994).

Davies, G.F., Penetration of plates and plumes through the mantle transition zone, *Earth Planet. Sci. Lett.* **133**, 507–516 (1995).

Dendy, J.E., Black box multigrid, *J. Comput. Phys.* **48**, 366–386 (1982).

Dendy, J.E., Two multigrid methods for three-dimensional problems with discontinous and anisotropic coefficients, *SIAM J. Sci. Statist. Comput.* **8**, 673–685 (1987).

Désidéri, J.-A. und P.W. Hemker, Convergence analysis of the defect-correction iteration for hyperbolic problems, *SIAM J. Sci. Comput.* **16**, 88–118 (1995).

Duncan, R.A. und M.A. Richards, Hotspots, mantle plumes, flood basalts, and true polar wander, *Rev. Geophys.* **29**, 31–50 (1991).

Feighner, M.A. und M.A. Richards, The fluid dynamics of plume-ridge and plume-plate interactions: An experimental investigation, *Earth Planet. Sci. Lett.* **129**, 171–182 (1995).

Feighner, M.A., L.H. Kellogg und B.J. Travis, Numerical modeling of chemically buoyant mantle plumes at spreading ridges, *Geophys. Res. Lett.* **22**, 715–718 (1995).

Forte, A.M. und J.X. Mitrovica, New inferences of mantle viscosity from joint inversion of long-wavelength mantle convection and post-glacial rebound data, *Geophys. Res. Lett.* **23**, 1147–1150 (1996).

Fowler, C.M.R., *The solid earth*, Cambridge University Press, Cambridge (1990).

Griffiths, R.W. und I.H. Campbell, Interaction of mantle plume heads with the Earth's surface and onset of small-scale convection, *J. Geophys. Res.* **96**, 18295–18310 (1991).

Hackbusch, W., *Multi-grid methods and applications*, Springer, Berlin (1985).

Harlow, F.H. und J.E. Welch, Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free-surface, *Phys. Fluids* **8**, 2182–2189 (1965).

Hauri, E.H., J.A. Whitehead und S.R. Hart, Fluid dynamic and geochemical aspects of entrainment in mantle plumes, *J. Geophys. Res.* **99**, 24275–24300 (1994).

Helfrich, K.R. und J.A. Whitehead, Solitary waves on conduits of buoyant fluid in a more viscous fluid, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **51**, 35–52 (1990).

Helmberger, D.V., L. Wen und X. Ding, Seismic evidence that the source of the Icelandhotspot lies at the core-mantle boundary, *Nature* **396**, 251–255 (1998).

Hemker, P.W., On the order of prolongations and restrictions in multigrid procedures, *J. Comput. Appl. Math.* **32**, 423–429 (1990).

Hirth, G. und D.L. Kohlstedt, Water in the oceanic upper mantle: Implications for rheology, melt extraction, and the evolution of the lithosphere, *Earth Planet. Sci. Lett.* **144**, 93–108 (1996).

Hofmann, A.W., Mantle geochemistry: The message from oceanic volcanism, *Nature* **385**, 219–229 (1997).

Hsui, A.T., W.S. Yang und J.R. Baumgardner, A preliminary study of the effects of some flow parameters in the generation of poloidal and toroidal energies within a 3–D spherical thermal convection system with variable viscosity, *Pure Appl. Geophys.* **145**, 487-503 (1995).

Ito, G., J. Lin und C.W. Gable, Dynamics of mantle flow and melting at a ridge-centered hotspot: Iceland and the Mid-Atlantic Ridge, *Earth Planet. Sci. Lett.* **144**, 53–74 (1996).

Ito, G., J. Lin und C.W. Gable, Interaction of mantle plumes and migrating mid-ocean ridges: Implication for the Galápagos plume-ridge system, *J. Geophys. Res.* **102**, 15403–15417 (1997).

Ito, G., Y. Shen, G. Hirth und C.J. Wolfe, Mantle flow, melting, and dehydration of the Iceland mantle plume, *Earth Planet. Sci. Lett.* **165**, 81–96 (1999).

Jarvis, G.T. und D.P. McKenzie, Convection in a compressible fluid with infinite Prandtl number, *J. Fluid Mech.* **96**, 515–583 (1980).

Karato, S.-I. und P. Li, Diffusion creep in perovskite: Implications for the rheology of the lower mantle, *Science* **255**, 1238–1240 (1992).

Karato, S.-I., M.S. Patterson und J.D. Fitzgerald, Rheology of synthetic olivin aggregates: Influence of grain size and water, *J. Geophys. Res.* **91**, 8151–8176 (1986).

Katsura, T., Thermal diffusivity of olivine under upper mantle conditions, *Geophys. J. Int.* **122**, 63–69 (1995).

Kellogg, L.H., B.H. Hager und R.D. van der Hilst, Compositional stratification in the deep mantle, *Science* **283**, 1881–1884 (1999).

Khalil, M. und P. Wesseling, Vertex-centered and cell-centered multigrid for interface problems, *J. Comput. Phys.* **98**, 1–10 (1992).

Kincaid, C., G. Ito und C. Gable, Laboratory investigation of the interaction of off-axis mantle plumes and spreading centres, *Nature* **376**, 758–761 (1995).

Kincaid, C., J.-G. Schilling und C. Gable, The dynamics of off-axis plume-ridge interaction in the uppermost mantle, *Earth Planet. Sci. Lett.* **137**, 29–43 (1996).

Kirby, S.H., Rheology of the lithosphere, *Rev. Geophys. Space Phys.* **21**, 1458–1487 (1983).

Kirby, S.H. und A.K. Kronenberg, Rheology of the lithosphere: Selected topics, *Rev. Geophys.* **25**, 1219–1244 (1987).

Kohlstedt, D.L. und C. Götze, Low-stress hight-temperature creep in olivine single crystals, *J. Geophys. Res.* **79**, 2045–2051 (1974).

Kohlstedt, D.L., H.P. Nichols und P. Hornack, The effect of pressure on the rate of dislocation recovery in olivine, *J. Geophys. Res.* **85**, 3122–3130 (1980).

Koren, B., Multigrid and defect correction for the steady Navier-Stokes equations, *J. Comput. Phys.* **87**, 25–46 (1990).

Lambeck, K., Glacial rebound of the British Isles - II. A high-resolution, high-precision model, *Geophys. J. Int.* **115**, 960–990 (1993).

Lambeck, K., P. Johnston und M. Nakada, Holocene glacial rebound and sea-level change in NW Europe, *Geophys. J. Int.* **103**, 451–468 (1990).

Lapidus, L. und G.F. Pinder, *Numerical solution of partial differential equations in science and engineering*, Wiley, New York (1982).

Loper, D.E. und F.D. Stacey, The dynamical and thermal structure of deep mantle plumes, *Phys. Earth Planet. Int.* **33**, 304–317 (1983).

Malamud, B.D. und D.L. Turcotte, How many plumes are there?, *Earth Planet. Sci. Lett.* **174**, 113–124 (1999).

Mao, H.K., R. Hemley. Y. Fei, J.F. Shu, L. Chen, A.P. Jephcoat, Y. Wu und W.A. Bassett, Effect of pressure, temperature, and composition on lattice parameters and density of (Fe,Mg)SiO_3 perovskite to 30 GPa, *J. Geophys. Res.* **96**, 8069–8079 (1991).

Mitrovica, J.X. und W.R. Peltier, The inference of mantle viscosity from an inversion of the Fennoscandian relaxation spectrum, *Geophys. J. Int.* **114**, 45–62 (1993).

Monnereau, M., M. Rabinowicz und E. Arquis, Mechanical erosion and reheating of the lithosphere: A numerical model for hotspots swells, *J. Geophys. Res.* **98**, 809–823 (1993).

Moore, W.B., G. Schubert und P. Tackley, Three-dimensional simulations of plume-lithosphere interaction at the Hawaiian swell, *Science* **279**, 1008–1011 (1998).

Moresi, L.N. und V.S. Solomatov, Numerical investigation of 2D convection with extremely large viscosity variations, *Phys. Fluids* **7**, 2154–2162 (1995).

Moresi, L.N. und M. Gurnis, Constraints on the lateral strength of slabs from 3-dimensional dynamic flow models, *Earth Planet. Sci. Lett.* **138**, 15–28 (1996).

Moresi, L.N. und A. Lenardic, 3-dimensional numerical simulations of crustal deformation and subcontinental mantle convection, *Earth Planet. Sci. Lett.* **150**, 233–243 (1997).

Morgan, W.J., Convection plumes in the lower mantle, *Nature* **230**, 42–43 (1971).

Morgan, W.J., Plate motions and deep mantle convection, *Mem. Geol. Soc. Am.* **132**, 7–22 (1972).

Nakakuki, T., H. Sato und H. Fujimoto, Interaction of the upwelling plume with the phase and chemical boundary at the 670 km discontinuity: Effects of temperature-dependent viscosity, *Earth Planet. Sci. Lett.* **121**, 369–384 (1994).

Nataf, H.-C., Seismic imaging of mantle plumes, *Annu. Rev. Earth Planet. Sci.* **28**, 391–418 (2000).

Ogawa, M., G. Schubert und A. Zebib, Numerical simulations of three-dimensional thermal convection in a fluid with strongly temperature-dependent viscosity, *J. Fluid Mech.* **233**, 299–328 (1991).

Olson, P., Hot spots, swells and mantle plumes, in: M.P. Ryan (Hrsg.), *Magma transport and storage*, Wiley, New York (1990), p. 33–51.

Olson, P. und U.R. Christensen, Solitary wave propagation in a fluid conduit within a viscous matrix, *J. Geophys. Res.* **91**, 6367–6374 (1986).

Olson, P., G. Schubert und C. Anderson, Plume formation in the D”-layer and the roughness of the core-mantle boundary, *Nature* **327**, 409–413 (1987).

Olson, P., G. Schubert und C. Anderson, Structure of axisymmetric mantle plumes, *J. Geophys. Res.* **98**, 6829–6844 (1993).

Olson, P., G. Schubert, C. Anderson und P. Goldman, Plume formation and lithosphere erosion: A comparison of laboratory and numerical experiments, *J. Geophys. Res.* **93**, 15065–15084 (1988).

Osako, M. und E. Ito, Thermal diffusivity of $MgSiO_3$ perovskite, *Geophys. Res. Lett.* **18**, 239–242 (1991).

Parmentier, E.M., C. Sotin und B.J. Travis, Turbulent 3-D thermal convection in an infinite Prandtl number volumetrically heated fluid: Implications for mantle dynamics, *Geophys. J. Int.* **116**, 241–251 (1994).

Patankar, S.V., *Numerical heat transfer and fluid flow*, McGraw-Hill, New York (1980).

Pollitz, F.F. und I.S. Sacks, Viscosity structure beneath northeast Iceland, *J. Geophys. Res.* **101**, 17771–17793 (1996).

Post, R.L., High-temperature creep of Mt. Burnet dunite, *Tectonophys.* **42**, 75–110 (1977).

Ranalli, G., *Rheology of the Earth*, Chapman and Hall, London (1995).

Ratcliff, J.T., P.J. Tackley, G. Schubert und A. Zebib, Transitions in thermal convection with strongly variable viscosity, *Phys. Earth Planet. Inter.* **102**, 201–212 (1997).

Reynard, B., und G.D. Price, Thermal expansion of mantle minerals at high pressures - a theoretical study, *Geophys. Res. Lett.* **17**, 689–692 (1990).

Ribe, N.M., The dynamics of plume-ridge interaction 2. Off-ridge plumes, *J. Geophys. Res.* **101**, 16195–16204 (1996).

Ribe, N.M. und U.R. Christensen, Three-dimensional modeling of plume-lithosphere interaction, *J. Geophys. Res.* **99**, 669–682 (1994).

Ribe, N.M. und W.L. Delattre, The dynamics of plume-ridge interaction–III. The effects of ridge migration, *Geophys. J. Int.* **133**, 511–518 (1998).

Ribe, N.M. und U.R. Christensen, The dynamical origin of Hawaiian volcanism, *Earth Planet. Sci. Lett.* **171**, 517–531 (1999).

Ribe, N.M., U.R. Christensen und J. Theißing, The dynamics of plume-ridge interaction, 1: Ridge-centered plumes, *Earth Planet. Sci. Lett.* **134**, 155–168 (1995).

Richards, M.A., B.H. Hager und N.H. Sleep, Dynamically supported geoid highs over hotspots: Observation and theory, *J. Geophys. Res.* **93**, 7690–7708 (1988).

Richter, F., Convection and the large-scale circulation of the mantle, *J. Geophys. Res.* **78**, 8735–8745 (1973).

Ross, J.V., H.G. Ave'Lallemant und N.L. Carter, Activation volume for creep in the upper mantle, *Science* **203**, 261–263 (1979).

Sandwell, D.T. und W.H.F. Smith, Marine gravity from satellite altimetry, Geological Data Center, Scripps Institution of Oceanography, La Jolla CA, USA (1995), anonymous ftp to baltica.ucsd.edu.

Schilling, J.-G., Iceland mantle plume: Geochemical study of Reykjanes Ridge, *Nature* **242**, 565–571 (1973).

Schilling, J.-G., Upper mantle heterogenities and dynamics, *Nature* **314**, 62–67 (1985).

Schilling, J.-G., Fluxes and excess temperatures of mantle plumes inferred from their interaction with migrating mid-ocean ridges, *Nature* **352**, 397–403 (1991).

Schilling, J.G., G. Thompson, R. Kingsley und S. Humphris, Hotspot-migrating ridge interaction in the South Atlantic, *Nature* **313**, 187–191 (1985).

Schubert, G., C. Anderson und P. Goldman, Mantle plume interaction with an endothermic phase change, *J. Geophys. Res.* **100**, 8245–8256 (1995).

Schubert, G., P. Olson, C. Anderson und P. Goldman, Solitary waves in mantle plumes, *J. Geophys. Res.* **94**, 9523–9532 (1989).

Shen, Y., S.C. Solomon, I.T. Bjarnason und C.J. Wolfe, Seismic evidence for a lower-mantle origin of the Iceland plume, *Nature* **395**, 62–65 (1998).

Sleep, N.H., Hotspots and mantle plumes: Some phenomenology, *J. Geophys. Res.* **95**, 6715–6736 (1990).

Sleep, N.H., Lithospheric thinning by midplate mantle plumes and the thermal history of hot plume material ponded at sublithospheric depths, *J. Geophys. Res.* **99**, 9327–9343 (1994).

Sleep, N.H., Lateral flow of hot plume material ponded at sublithospheric depths, *J. Geophys. Res.* **101**, 28065–28083 (1996).

Small, C., Observations of ridge-hotspot interactions in the Southern Ocean, *J. Geophys. Res.* **100**, 17931–17946 (1995).

Smallwood, J.R., R.S. White und T.A. Minshull, Sea-floor spreading in the presence of the Iceland plume: The structure of the Reykjanes Ridge at 61°40'N, *J. Geol. Soc. London* **152**, 1023–1029 (1995).

Spiegel, E.A. und G. Veronis, On the Boussinesq-approximation for a compressible fluid, *Astrophys. J.* **131**, 442–447 (1960).

Steinberger, B. und R.J. O'Connell, Advection of plumes in mantle flow: Implications for hotspot motion, mantle viscosity and plume distribution, *Geophys. J. Int.* **132**, 412–434 (1998).

Tackley, P.J., *Three-dimensional models of mantle convection: Influence of phase transitions and temperature-dependent viscosity*, Ph.D. thesis, California Institute of Technology, Pasadena (1994).

Tackley, P.J., Effects of strongly variable viscosity on three-dimensional compressible convection in planetary mantles, *J. Geophys. Res.* **101**, 3311–3332 (1996).

Tackley, P.J., Self-consistent generation of tectonic plates in three-dimensional mantle convection, *Earth Planet. Sci. Lett.* **157**, 9–22 (1998).

Trompert, R.A. und U. Hansen, The application of a finite volume multigrid method to 3D flow problems in a highly viscous fluid with variable viscosity, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **83**, 261–291 (1996).

Trompert, R.A. und U. Hansen, On the Rayleigh number dependence of convection with a strongly temperature-dependent viscosity, *Phys. Fluids* **10**, 351–360 (1998).

Turcotte, D.L. und G. Schubert, *Geodynamics*, Wiley, New York (1982).

Utsumi, W., N. Funamori, T. Yagi, E. Ito, T. Kikegawa und O. Shimomura, Thermal expansivity of $MgSiO_3$ perovskite under high pressures up to 20 GPa, *Geophys. Res. Lett.* **22**, 1005–1008 (1995).

Vanka, S.P., Block-implicit multigrid solution of the Navier-Stokes equations in primitive variables, *J. Comput. Phys.* **65**, 138–158 (1986).

van Keken, P.E. und C.W. Gable, The interaction of a plume with a rheological boundary: A comparison between two- and three-dimensional models, *J. Geophys. Res.* **100**, 20291–20302 (1995).

Vogt, P.R., Asthenosphere motion recorded by the ocean floor south of Iceland, *Earth Planet. Sci. Lett.* **13**, 153–160 (1971).

Vogt ,P.R., Plumes, subaxial pipe flow, and topography along the mid-ocean ridge, *Earth Planet. Sci. Lett.* **29**, 309–325 (1976).

Vreugdenhil, C.B. und B. Koren, *Numerical methods for advection-diffusion problems*, Notes on Numerical Fluid Mechanics **45**, Vieweg, Braunschweig (1993).

Watson, S. und D. McKenzie, Melt generation by plumes: A study of Hawaiian volcanism, *J. Petrol.* **32**, 501–537 (1991).

Weertman, J., The creep strength of the Earth's mantle, *Rev. Geophys. Space Phys.* **8**, 145–168 (1970).

Weertman J. und J.R. Weertman, High temperature creep of rock and mantle viscocity, *Ann. Rev. Earth Planet. Sci.* **3**, 293–315 (1975).

Wessel, P. und W.H.F. Smith, Free software helps map and display data, *Eos Trans. AGU* **72**, 441–446 (1991).

Wesseling, P., Cell-centered multigrid for interface problems, *J. Comput. Phys.* **79**, 85–91 (1988).

Wesseling, P., *An introduction to multigrid methods*, Wiley, New York (1992).

White, R.S., Melt production rates in mantle plumes, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* **342**, 137–153 (1993).

White, R.S., Rift-plume interaction in the North Atlantic, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* **355**, 319–339 (1997).

White, R.S., J.W. Brown und J.R. Smallwood, The temperature of the Iceland plume and origin of outward-propagating V-shaped ridges, *J. Geol. Soc. London* **152**, 1039–1045 (1995).

Whitehead, J.A. und K.R. Helfrich, Wave transport of deep mantle material, *Nature* **336**, 59–61 (1988).

Whitehead, J.A. und K.R. Helfrich, Magma waves and diapiric dynamics, in: M.P. Ryan (Hrsg.), *Magma transport and storage*, Wiley, New York (1990), p. 53–76.

Wilson, J.T., A possible origin of the Hawaiian islands, *Can. J. Phys.* **41**, 863–870 (1963).

Wittum, G., Multi-grid methods for Stokes and Navier-Stokes equations, *Num. Math.* **54**, 543–563 (1989).

Wolfe, C.J., I.T. Bjarnason, J.C. VanDecar und S.C. Solomon, Seismic structure of the Iceland mantle plume, *Nature* **385**, 245–247 (1997).

Wysession, M.E. T. Lay, J. Revenaugh, Q. Williams, E.J. Garnero, R. Jeanloz und L.H. Kellogg, The D´´ discontinuity and its implications, in: M. Gurnis, M.E. Wysession, E. Knittle und B.A. Buffett (Hrsg.), *The core-mantle boundary region*, Geodynamics Series **28**, American Geophysical Union, Washington (1998), p. 273–297.

Yale, M.M. und J. Phipps Morgan, Asthenosphere flow model of hotspot-ridge interaction: A comparison of Iceland and Kerguelen, *Earth Planet. Sci. Lett.* **161**, 45–56 (1998).

Yuen, D.A. und L. Fleitout, Thinning of the lithosphere by small-scale convective destabilization, *Nature* **313**, 125–128 (1985).

Zeng, S. und P. Wesseling, Multigrid solution of the incompressible Navier-Stokes equations in general coordinates, *SIAM J. Numer. Anal.* **31**, 1764–1784 (1994).

Zerr, A. und R. Böhler, Melting of (Mg,Fe)SiO_3-perovskite to 625 kilobars: Indication of a high melting temperature in the lower mantle, *Science* **262**, 553–555 (1993).

Zerr, A. und R. Böhler, Constraints on the melting temperature of the lower mantle from high-pressure experiments on MgO and magnesiowüstite, *Nature* **371**, 506–508 (1994).

Zindler, A. und S. Hart, Chemical geodynamics, *Ann. Rev. Earth Planet. Sci.* **14**, 493–571 (1986).

Danksagung

An erster Stelle möchte ich mich bei Herrn Prof. U. Christensen bedanken, der mir die Anfertigung dieser Arbeit im Rahmen einer Förderung durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft ermöglicht und durch sein Interesse und seine gute Betreuung die Durchführung der Arbeit unterstützt hat. Durch die Teilnahme an verschiedenen nationalen und internationalen Tagungen und Workshops gab er mir die Möglichkeit, Kontakte zu anderen Wissenschaftlern zu knüpfen, Gedanken auszutauschen und neue Informationen aufzunehmen, um so über den "Tellerrand" der eigenen Arbeit hinauszuschauen. Nicht zuletzt sorgte er für die gute Ausstattung des Instituts an Hard- und Software, ohne die die Durchführung dieser Arbeit nicht möglich gewesen wäre.

Bei Herrn Prof. H. Eckelmann, Institut für Nichtlineare Dynamik der Georg-August-Universität Göttingen, bedanke ich mich für die Übernahme des Korreferats.

Ein weiterer großer Dank geht an alle Mitarbeiterinnen und Mitarbeiter des Instituts für Geophysik für die freundliche Arbeitsatmosphäre (auch über die einzelnen Arbeitsgruppen hinaus), für die ständige Bereitschaft, bei Problemen zu helfen, und für die vielen Diskussionen (ob fachlich oder nicht). Insbesondere der Arbeitsgruppe Geodynamik bin ich für die vielen "kleinen" Zweifel an meinen Zwischenergebnissen dankbar, die für den Fortgang der Arbeit sehr wichtig waren. Ein besonderer Dank geht an Ursula Wüllner, Carsten Kutzner, Nils Laudenbach und Johannes Wicht für die sorgfältige Durchsicht der gesamten Arbeit bzw. von Auszügen. Ausdrücklich möchte ich mich auch bei Sebastian Rost und Ulrich Einecke für die Betreuung des UNIX/LINUX-Clusters und für das Verständnis über meine nicht immer kleinen Datenmengen bedanken.

Bei Herrn Prof. N. Ribe, IPGP Paris, bedanke ich mich für sein Interesse an der Arbeit. Außerdem hat er mir ein Programm zur Lösung der Gleichung aus der "lubrication theory" zur Verfügung gestellt.

Ein großer Dank gilt meinen Eltern, die mir das Studium ermöglicht haben, und ganz besonders Kerstin, die mir während der Durchführung der Arbeit und speziell während der Zeit des Zusammenschreibens ein großer Rückhalt war.

Lebenslauf:

Persönliche Daten

Name:	Michael Albers
Geburtsdatum:	18. Juni 1971
Geburtsort:	Osnabrück, Deutschland
Staatsangehörigkeit:	Deutscher

Schulbildung

07.1977–06.1981	Grundschule in Wallenhorst
07.1981–06.1983	Orientierungsstufe Domschule in Osnabrück
07.1983–05.1990	Gymnasium Carolinum in Osnabrück, Abschluß: Abitur

Studium

09.1990	Mathematisches Propädeutikum, Osnabrück
ab 10.1990	Studium der Physik an der Universität Osnabrück
09.1992	Vordiplom Physik
ab 10.1992	Studium der Physik an der Georg-August-Universität Göttingen, Spezialgebiet Geophysik
04.1994–10.1995	Anfertigung der Diplomarbeit am Institut für Geophysik der Georg-August-Universität Göttingen in der Arbeitsgruppe von Prof. Dr. U. Christensen. Thema der Arbeit: “Numerische Untersuchung stationärer Mantel-Plumes”.
02.1996	Diplomprüfung Physik
seit 05.1996	Anstellung als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Geophysik der Georg-August-Universität Göttingen. Die Finanzierung erfolgt aus Drittmitteln der Deutschen Forschungsgemeinschaft. Im Rahmen dieser Anstellung bestand Gelegenheit zur Promotion. Thema der Arbeit: “Numerische Untersuchungen zur Wechselwirkung von Mantelplumes mit Mittelozeanischen Rücken”

Auszeichnungen

03.2000	Vortragsauszeichnung durch die Deutsche Geophysikalische Gesellschaft anläßlich ihrer 60. Jahrestagung in München