L^2-Spektraltheorie für Markov-Operatoren

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultäten
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von

Achim Wübker
aus Hunteburg

Göttingen 2007

D7

Referent: Prof. Dr. Manfred Denker

Koreferent: Prof. Dr. Susanne Koch

Tag der mündlichen Prüfung: 07. 01. 2008

Danksagung

Ich möchte mich zuerst bei meinem Betreuer Prof. Dr. Manfred Denker bedanken, der mich während meiner ganzen Promotionszeit hilfreich und engagiert unterstützt hat, sodass ich jederzeit mit Fragen zu ihm kommen konnte.
Darüber hinaus danke ich Dr. Susanne Koch für die Übernahme des Korreferates.
Weiterhin möchte ich mich beim Graduiertenkolleg 1023 "Identifikation in mathematischen Modellen: Synergie stochastischer und numerischer Methoden" für die finanzielle Unterstützung bedanken, ohne die das Fertigstellen dieser Arbeit nicht möglich gewesen wäre. Krzysztof und Carsten möchte ich danken, da sie bei Problemen mit dem Computer immer zur Stelle waren. Für die gute Arbeitsatmosphäre im Institut und schönen Kaffeepausen gilt der Dank Mohammed, Andrea, Jörn, Manuel, Sachar, Nico, Michael, Matthias, Janis und allen anderen, die sich ab und zu von mir haben ablenken lassen. Bei fachlichen Fragen hatten Manuel und Sachar stets ein offenes Ohr für mich, wofür ich mich an dieser Stelle bedanken möchte. Meinen Geschwistern Ansgar und Martin möchte ich fürs Korrekturlesen danken, sodass einige formale Schnitzer noch beseitigt werden konnten.
Am Ende möchte ich mich bei meiner Familie bedanken, allen voran meiner Frau Silvia und unseren Kindern Jakob und Mathis, die mir insgesamt eine schöne Zeit bescheren und mir in Zeiten wie diesen den Rücken freihalten. Besonderer Dank gilt auch meinen Eltern Christa und Friedrich, die mich entlang meines Lebens und insbesondere während meines Promotionsstudiums unterstützt haben.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Markov-Ketten (MKen) und Markov-Prozesse spielen heute in vielen unterschiedlichen wissenschaftlichen Disziplinen eine bedeutende Rolle. In den Wirtschaftswissenschaften werden mit ihrer Hilfe Finanzmärkte modelliert, Biologen nutzen sie als Erklärung für Molekularbewegungen, von Physikern werden sie in der Thermodynamik und Quantenphysik verwendet und in der Informatik werden sie zum Kodieren von Daten benutzt. Theoretische Ergebnisse über das Verhalten von MKen können also in den unterschiedlichsten Bereichen genutzt werden, was nicht zuletzt die Motivation für diese Arbeit erklärt, dessen Ziel es ist, über den Begriff der Spektrallücke das Konvergenzverhalten von MKen zu analysieren.
Im Folgenden werden ausschließlich MKen $\xi_1, \xi_2, \ldots$ mit beliebigen Zustandsräumen in diskreter Zeit betrachtet. Die Lehrbücher [32], [54], [14] und [37] geben hierfür einen guten Einstieg, auch wenn in den drei erstgenannten Büchern nur MKen mit abzählbarem Zustandsraum thematisiert werden.
Uns interessieren hauptsächlich die Spektraleigenschaften des der MK assoziierten Markov-Operators (MO) P, der auf geeigneten Funktionenräumen wie folgt definiert ist:

$$Pf(x) := \int_\Omega f(y)p(x,dy).$$

Insbesondere gehen wir der Frage nach, unter welchen Bedingungen der Operator P auf einem geeigneten Raum eine Spektrallücke hat. Dabei sprechen wir von einer Spektrallücke, falls das Spektrum $\sigma(P)$ von P enthalten ist in der Vereinigung eines Kreises vom Radius kleiner als eins mit der Zahl eins, d.h.

$$\sigma(P) \subset K_r(0) \cup \{1\}, \tag{1}$$

wobei $K_r(0) := \{x \in \mathbb{C} : ||x||_2 \leq r\}$. Die Zahl $\mu := 1 - r$ wird in diesem Zusammenhang Spektrallücke genannt, falls r mit der Eigenschaft (1) minimal gewählt wird.
Es zeigt sich, dass das Konvergenzverhalten einer MK für viele unterschiedliche Konvergenzbegriffe maßgeblich von der Existenz einer Spektrallücke und deren Größe bestimmt wird (vgl. [19], [20], [21]). Da die Größe dieser Lücke in den meisten Fällen nicht exakt bestimmt werden kann, wird versucht, sie möglichst scharf abzuschätzen. Solche Abschätzungen werden heutzutage erfolgreich angewendet, um Konvergenzeigenschaften von Markov Chain Monte Carlo (MCMC)-Methoden zu analysieren. Die Idee von MCMC-Methoden ist, Stichproben einer Verteilung zu erzeugen, die in einem gewissen Sinn nahe einer vorgegebenen Verteilung π sind. Hierfür wird hinreichend lange eine MK mit invariantem Maß π simuliert. Mittlerweile ist es üblich, MCMC-Methoden zur Berechnung komplexer Wahrscheinlichkeitsmaße zugrundeliegender Integrale zu benutzen, wie sie unter anderem in der Statistischen Physik, Computerphysik, Computerbiologie und Bayes-Statistik vorkommen. Für genauere Informationen zu MCMC-Methoden verweisen wir auf die Bücher von Liu [49] und Roberts [57].

Die Theorie der MKen hat ihren Ursprung zu Beginn des 20. Jahrhunderts. Angefangen mit Arbeiten von Markov war es die von Doeblin (vgl. [22], [23]) verwendete und nach ihm benannte Bedingung, die sich für die weitere Entwicklung der Theorie als grundlegend zeigte und wegen ihrer großen Bedeutung im Folgenden kurz angegeben werden soll.
Die Doeblin-Bedingung ist erfüllt, wenn auf einem Messraum $(\Omega, \mathcal{F})$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß (Wmaß) ϕ existiert mit der Eigenschaft, dass $m \in \mathbb{N}$, $0 < \epsilon < 1$ und $\delta > 0$ existieren, sodass für alle $A \in \mathcal{F}$ mit $\phi(A) > \epsilon$ folgt:

$$p^m(x, A) \geq \delta \qquad \forall x \in \Omega.$$

Doeblin konnte zeigen, dass der Übergangskern $p(\cdot, \cdot)$ einer aperiodischen MK, die die Doeblin-Bedingung erfüllt, gleichgradig in Totalvariation gegen ein eindeutig bestimmtes Wmaß π konvergiert, d.h. $\exists C > 0, \delta < 1$ mit

$$\sup_{x \in \Omega} ||p^n(x, \cdot) - \pi||_V \leq C\delta^n,$$

(vgl. [22], [23]).
Doob [24] erhält die gleiche Aussage in einem allgemeineren Zusammenhang unter der Bedingung der Ergodizität zuzüglich einer weiteren Bedingung, die von ihm als "Hypothese D" bezeichnet wird. Tatsächlich zeigt sich, dass Ergodizität zusammen mit der "Hypothese D" äquivalent ist zur Doeblin-Bedingung (vgl. Kapitel 2).

Nagaev [53] zeigte, dass dies äquivalent ist zu

$$||P^n - P_1||_\infty \leq C\delta^n,$$

wobei $P_1 f := \int_\Omega f(y)\pi(dy)$ und P und P_1 auf dem Raum $\mathcal{B}(\Omega, \mathcal{F}, || \cdot ||_\infty)$ der beschränkten messbaren Funktionen mit Supremums-Norm definiert sind. Da P den Raum der konstanten Funktionen und den Raum der Funktionen f mit der Eigenschaft $P_1 f = 0$ invariant lässt, ist die obige Bedingung gleichbedeutend mit der Existenz einer Spektrallücke. Vermutlich war Nagaev der erste, der die für Operatoren mit Spektrallücke entwickelte Theorie (vgl. [25]) benutzte, um damit klassische Sätze in der Wahrscheinlichkeitstheorie zu beweisen. So zeigte er in mit ihrer Hilfe die Gültigkeit eines zentralen Grenzwertsatzes für Summen der Form

$$\frac{1}{B_n}\left(\sum_{i=1}^{n} \phi \circ \xi_i - A_n\right), \tag{2}$$

falls ϕ endliche zweite Momente hat und A_n und B_n richtig gewählt werden (vgl. [53]). Für den Fall, dass ϕ im Anziehungsbereich einer α-stabilen Verteilungsfunktion liegt ($\alpha \neq 2$), konnte Nagaev Bedingungen für den Übergangskern angeben, sodass die Grenzverteilung in (2) die gleiche ist wie für die assoziierten unabhängigen Zufallsvariablen (ZVen) bei gleicher Wahl der Konstanten A_n und B_n (siehe Kapitel 1). Während die auf Gordin [30] zurückgehende Methode der Martingalapproximation den Beweis eines zentralen Grenzwertsatzes unter wesentlich schwächeren Voraussetzungen ermöglichte (vgl. z.B. [50], [16], [60]), sind die Ergebnisse von Nagaev bezüglich der α-stabilen Grenzverteilungen ($\alpha \neq 2$) immer noch aktuell.
Die Verallgemeinerung dieses Satzes ist das zentrale Ergebnis des Kapitels 7. Dabei erscheint sowohl der Beweis als auch die verwendete Beweismethode neu. Wir zeigen, dass die Voraussetzung der Existenz einer $\mathcal{B}(\Omega, \mathcal{F}, || \cdot ||_\infty)$-Spektrallücke nicht notwendig ist und geben eine hinreichende Bedingung für die Gültigkeit des globalen Grenzwertsatzes an. Insbesondere zeigt sich, dass die von Nagaev [53] geforderte Spektrallücke die Gültigkeit unserer Forderung impliziert. Obwohl für den Beweis des Satzes ebenfalls die Methode der charakteristischen Funktionen verwendet wird,

ist die Vorgehensweise deutlich von der von Nagaev [53] zu unterscheiden und birgt den Vorteil, aufgrund der Stabilität der geschaffenen Struktur in gewisser Hinsicht sehr flexibel zu sein. Aufgrund dieser Flexibilität sind wir überzeugt, dass durch das Verwenden unterschiedlicher Normen und Räume auf die ähnliche Art und Weise weitere globale Grenzwertsätze für MKen bewiesen werden können.

Entsprechend den vorherigen Aussagen bedarf es für den Beweis von globalen Grenzwertsätzen nicht der Existenz einer Spektrallücke. Ob dies auch für den Beweis eines lokalen Grenzwertsatzes der Form

$$B_n P_\pi(S_n - k_n \in I) \to |I| g(\kappa),$$

wobei $S_n = \sum_{i=1}^n \phi \circ \xi_i$, $A_n, B_n \in \mathbb{R}$ mit $B_n \to \infty$, $\frac{k_n - A_n}{B_n} \to \kappa$ gilt, ist unklar. Als erstes bewies Kolmogorov lokale Grenzwertsätze für irreduzible und aperiodische MKen mit endlichem Zustandsraum (in diesem Fall ist der assoziierte MO sowohl auf $L^2(\pi)$ als auch auf $\mathcal{B}(\Omega, \mathcal{F}, ||\cdot||_\infty)$ kompakt und hat wegen der geforderten Aperiodizität auf beiden Räumen eine Spektrallücke). Verallgemeinert wurde dieses Resultat im normalen Fall ($\alpha = 2$) von Nagaev [53] für abzählbare Zustandsräume und im nicht normalen Fall ($\alpha \neq 2$) von Aleškjavičene [3] für beliebige Zustandsräume. Die beiden letztgenannten Autoren setzten dabei die folgende Bedingung voraus:

$$\sup_{\omega, \tilde{\omega}, A} |p(\omega, A) - p(\tilde{\omega}, A)| < 1.$$

Diese Bedingung impliziert insbesondere eine Spektrallücke von P auf dem Raum $\mathcal{B}(\Omega, \mathcal{F}, ||\cdot||_\infty)$ (vgl. Kapitel 2) und damit auch eine $L^2(\pi)$-Spektrallücke (vgl. Kapitel 3). Tatsächlich kann man zeigen, dass die Existenz einer $L^2(\pi)$-Spektrallücke zuzüglich einer technischen Bedingung hinreichend ist für die Gültigkeit des lokalen Grenzwertsatzes für MKen mit beliebigem Zustandsraum im nicht-normalen Fall. Für ZVen erzeugt durch dynamische Systeme, d.h. $X_n := f \circ T^n$ mit $T : \Omega \to \Omega$ eine maßtreue Abbildung des Wahrscheinlichkeitsraums (Wraums) Ω in sich und $f : \Omega \to \mathbb{R}$, wurden lokale Grenzwertsätze für solche Abbildungen T bewiesen, die in gewisser Hinsicht dem Markov-Shift ähneln. Hier sind die Arbeiten von Aaronson und Denker [2], Rousseau-Egele [64], Guivarc'h und Hardy [33] und Gouëzel [31] zu nennen, wobei die drei erstgenannten Arbeiten mit Hilfe des Satzes von Ionescu-Tulcea und Marinescu [39] für den assoziierten Transfer-Operator P_T die Existenz einer Spektrallücke auf einem geeigneten Raum beweisen und hierauf aufbauend die jeweiligen lokalen Grenzwertsätze. In der Arbeit von Gouëzel hat der Transfer-Operator P_T selbst keine Spektrallücke. Dennoch wird durch die Betrachtung eines induzierten Systems mit Hilfe einer Stoppzeit τ auch hier für den Beweis des lokalen Grenzwertsatzes ein Spektrallückenargument für den induzierten Transfer-Operator P_{T_τ} verwendet.

Die obigen Ausführungen zeigen, dass es in vielerlei Hinsicht wünschenswert ist, das Spektrum eines Markov-Operators näher zu untersuchen, um ausgehend von den Spektraleigenschaften andere Sätze der Wahrscheinlichkeitstheorie zu beweisen. Für MKen mit beliebigen Zustandsräumen erscheint die Methode von Ionescu-Tulcea und Marinescu [39] zur Bestimmung von Spektrallücken nicht optimal, da sie von dem zugrundeliegenden Wraum $(\Omega, \mathcal{F}, \pi)$ in gewissem Sinn mehr Struktur fordert. Zwar ist es für MKen mit abzählbarem Zustandsraum Ω immer noch möglich, mit Hilfe dieser Methode Bedingungen anzugeben, die eine Spektrallücke implizieren (vgl. [2]), es zeigt sich jedoch, dass unter diesen Bedingungen der assoziierte MO P kompakt auf $\mathcal{B}(\Omega, \mathcal{F}, ||\cdot||_\infty)$ ist und der zugehörige Übergangskern damit insbesondere die Doeblin-Bedingung erfüllt.

Auf dem Raum $L^2(\pi)$ hat sich für die Analyse der Spektraleigenschaften von P bisher der Weg über die Poincaré-Ungleichung durchgesetzt. Diese gilt, wenn eine

Konstante $0 < C < \infty$ existiert, sodass für alle $f \in L^2(\pi)$ gilt:

$$Var(f) \leq C\mathcal{E}(f,f), \tag{3}$$

wobei

$$Var(f) := \int_\Omega f^2(x)\pi(dx) - \left(\int_\Omega f(x)\pi(dx)\right)^2 =:< f,f >_\pi - < f,1 >_\pi^2$$

und

$$\mathcal{E}(f,f) :=< (Id - P)f, f >_\pi .$$

Die Konstante

$$\lambda := \inf_{f \in L^2(\pi)} \left\{ \frac{\mathcal{E}(f,f)}{Var(f)},\ Var(f) \neq 0 \right\} \tag{4}$$

wird in der Literatur auch als Spektrallücke bezeichnet (vgl. [20]). Diese Definition von Spektrallücke (wir wollen sie im Folgenden zur Unterscheidung Spektrallücke bei eins nennen) unterscheidet sich dabei von der in dieser Arbeit (siehe 1) benutzten. Falls die MK reversibel, d.h., falls

$$\pi(dx)p(x,dy) = \pi(dy)p(y,dx)$$

und damit der assoziierte Operator P selbstadjungiert ist, und P darüber hinaus positiv ist, kann man zeigen, dass die sich aus den beiden unterschiedlichen Definitionen ergebenen Werte für die Spektrallücke übereinstimmen (vgl. [38]). Ein guter Überblick für weitere Anwendungsmöglichkeiten von $L^2(\pi)$-Spektrallücken im Falle endlicher MKen wird in der Arbeit von Diaconis und Saloff-Coste [20] gegeben. Für reversible MKen mit endlichem Zustandsraum gelingt es Diaconis und Stroock [18], über die Poincaré-Ungleichung (3) mit Hilfe geometrischer Begriffe die Größe der Spektrallücke bei 1 nach unten zu beschränken. Die Abschätzungen erweisen sich dabei in einigen Fällen als in einem gewissen Sinne scharf. Resultate für nicht reversible MKen mit endlichem Zustandsraum können bei Fill [28] nachgelesen werden. Die in diesen Arbeiten verwendeten Methoden können im Allgemeinen jedoch nicht auf MKen mit beliebigen Zustandsräumen übertragen werden. Daher wird in dieser Arbeit ein anderer, auf Cheeger [6] zurückgehender und von Lawler und Sokal [48] auf MKen angewandter Ansatz gewählt. In ihrer Arbeit aus dem Jahre 1988 zeigen Lawler und Sokal für reversible MKen mit beliebigem Zustandsraum unter Verwendung der Poincaré-Ungleichung, dass die Spektrallücke bei eins in folgender Weise abgeschätzt werden kann:

$$k \geq \lambda \geq \frac{\kappa}{8} k^2, \tag{5}$$

wobei $\kappa \geq 1$ (siehe Kapitel 4) und

$$k := \inf_{A \in \mathcal{F}}\ k(A) := \frac{1}{\pi(A)\pi(A^c)} \int_A p(x, A^c)\pi(dx). \tag{6}$$

Für nicht reversible MKen erhält man immer noch für den Realteil der Spektrallücke bei eins die Abschätzung

$$\Re(\lambda) \geq \frac{\kappa}{8} k^2. \tag{7}$$

Das Resultat von Lawler und Sokal ist jedoch allgemeiner und liefert auch ein Resultat für MKen mit beschränkten Sprungraten in stetiger Zeit (vgl. [48]). Dieses Resultat wurde von Chen und Wang [12] für unbeschränkte Sprungprozesse verallgemeinert und die Abschätzung der Konstanten in (5) noch verbessert. Die in (6) definierte Konstante k wird isoperimetrische Konstante genannt und spielt in dieser Arbeit eine fundamentale Rolle, wie wir sehen werden.

Die nun folgenden Definitionen und Resultate werden in Kapitel 4 beschrieben und finden, soweit uns bekannt ist, in der Literatur keine Entsprechung. Wir definieren entspechend der Definition von k

$$k_n := \inf_{A\in\mathcal{F}} k_n(A), \quad k_n(A) := \frac{1}{\pi(A)\pi(A^c)} \int_A p^n(x, A^c)\pi(dx), \tag{8}$$

die dem n-ten Übergangskern zuzuordnende isoperimetrische Konstante. Mit Hilfe dieser Familie $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von isoperimetrischen Konstanten lässt sich eine hinreichende und notwendige Bedingung für die Existenz einer $L^2(\pi)$-Spektrallücke formulieren. Tatsächlich zeigen wir, dass P genau dann eine $L^2(\pi)$-Spektrallücke hat, wenn

$$\mathcal{M} := \left\{\epsilon > 0 : \quad k_n > \epsilon \,\forall n \leq \left[\frac{2\pi}{\arccos(1 - \frac{\kappa}{16}\epsilon^2)}\right] + 1\right\} \neq \emptyset. \tag{9}$$

Es zeigt sich, dass sich die Größe der Spektrallücke dann nach unten abschätzen lässt durch

$$1 - \inf_{\epsilon\in\mathcal{M}} (1 - \frac{\kappa}{16}\epsilon^2)^{1/([\frac{2\pi}{\arccos(1-\frac{\kappa}{16}\epsilon^2)}]+1)}. \tag{10}$$

Damit lässt sich der Nachweis für eine Spektrallücke durch das Prüfen von endlich vielen $k_n > \epsilon$ erbringen.
Als Folgerungen aus diesem Satz ergeben sich zum einen die bekannte Tatsache, dass die Doeblin-Bedingung für aperiodische MKen eine $L^2(\pi)$-Spektrallücke impliziert, zum anderen erhalten wir, dass

$$\exists \epsilon > 0 : \limsup_{n\to\infty} \sup_{A\in\mathcal{F}:\pi(A)\leq\frac{1}{2}} \frac{1}{\pi(A^c)} \int_A \left|\frac{p^n(x, A)}{\pi(A)} - 1\right| \pi(dx) \leq 1 - \epsilon \tag{11}$$

hinreichend für die Existenz einer $L^2(\pi)$-Spektrallücke ist.
Um detailliertere Aussagen über das Verhalten der k_n machen zu können, werden die isoperimetrischen Konstanten

$$k_{P^{*n}P^n} := \inf_{A\in\mathcal{F}} k_{P^{*n}P^n}(A),$$

wobei

$$k_{P^{*n}P^n}(A) := \frac{1}{\pi(A)\pi(A^c)} \int_A P^{*^n} P^n 1_{A^c}\pi(dx) = \int_\Omega p^n(x, A)p^n(x, A^c)\pi(dx)$$

ist, definiert. Die Folge $(k_{P^{*n}P^n})_{n\in\mathbb{N}}$ erweist sich als monoton wachsend in n und dies wird benutzt, um zu zeigen, dass die Existenz einer $L^2(\pi)$-Spektrallücke äquivalent ist zur Bedingung

$$\exists\, C \geq 0,\, \delta < 1 :\, 1 - k_{P^{*n}P^n} \leq C\delta^n.$$

Diese exponentielle Konvergenz der $k_{P^{*n}P^n}$ gegen eins lässt sich mit Hilfe einer Ungleichung, die in gewisser Hinsicht die Abhängigkeiten von k_n und $k_{P^{*n}P^n}$ beschreibt, auch für k_n zeigen (vgl. Abschnitt 4.3). Diese beiden Resultate erweisen sich als zentral, da sie für viele Beweise der noch folgenden Sätze benutzt werden.
In dem abschließenden Abschnitt 4.4 dieses Kapitels betrachten wir reversible MKen. Hierfür hatten wir in (5) eine Abschätzung der $L^2(\pi)$-Spektrallücke bei 1 gesehen. Lawler und Sokal [48] untersuchen nicht die Größe der Spektrallücke bei -1, was erforderlich ist, um eine Abschätzung nach unten für die Größe der Spektrallücke im Sinne dieser Arbeit zu bekommen. Tatsächlich reicht es, diese beiden Lücken zu betrachten, da der assoziierte MO selbstadjungiert ist und daher reellwertiges Spektrum hat. Um jedoch eine Spektrallücke bei -1 zu bekommen, müssen Periodizitäten der Kette ausgeschlossen werden. Zu diesem Zweck definieren wir die Konstante

$$K := \sup_{A\in\mathcal{F}} \frac{1}{\pi(A)\pi(A^c)} \int_A p(x, A^c)\pi(dx),$$

bzw. die Konstanten

$$K_n := \sup_{A\in\mathcal{F}} \frac{1}{\pi(A)\pi(A^c)} \int_A p^n(x, A^c)\pi(dx).$$

Für K (und genauso für K_n) kann man nun zeigen, dass allgemein (auch im nicht reversiblen Fall)

$$0 \leq K \leq 2$$

gilt. Tatsächlich zeigt sich nun, dass die Forderung

$$0 < k \leq K < 2 \tag{12}$$

für reversible MKen äquivalent ist zur Existenz einer $L^2(\pi)$-Spektrallücke. Darüber hinaus erhalten wir für die Größe der Spektrallücke folgende Abschätzung nach unten:

$$\mu \geq 1 - \sqrt{1 - \frac{\kappa}{8} k_2^2}, \tag{13}$$

wobei k_2 abgeschätzt werden kann durch

$$\begin{aligned} k_2 \quad \geq \quad & \sup_{\delta,\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon\in\mathbb{R}_+} \min \left[\frac{k^2}{16}\delta, \frac{k}{4}(\epsilon_1\epsilon_2(1-\delta)-\delta), \right. \\ & \left. \left(k \left(\frac{(2-\epsilon)(1-\epsilon_1)(1-\epsilon_2)(1-\delta)}{(1-\epsilon)K} - \frac{1}{1-\epsilon} \right) - \frac{\epsilon}{1-\epsilon} \right) \epsilon \right]. \end{aligned} \tag{14}$$

Es zeigt sich, dass (14) genau dann von Null weg beschränkt ist, wenn $K < 2$ gilt.

Haben sich die isoperimetrischen Konstanten in Kapitel 4 als nützlich für die Frage nach der Existenz von $L^2(\pi)$-Spektrallücken erwiesen, so liefern sie auch den Brückenschlag zwischen der Verbindung von dem, was wir additiven bzw. multiplikativen Entropiezuwachs nennen, und der Existenz von $L^2(\pi)$-Spektrallücken.
Der von uns definierte Begriff des additiven Entropiezuwachses scheint dabei erstmals für die Analyse von $L^2(\pi)$-Spektrallücken benutzt zu werden. Folglich haben alle von uns diesbezüglich erzielten Ergebnisse keine Entsprechung in der Literatur.
Der Begriff des multiplikativen Entropiezuwachses entspricht im Wesentlichen dem, was in den Arbeiten von [20], [52], [74] und [11] zur Analyse der Zusammenhänge von $L^2(\pi)$-Spektrallücken und dem Entropieverhalten verwendet wird. Die dort benutzten Methoden unterscheiden sich jedoch von unseren (alle oben genannten Arbeiten verwenden Log-Sobolev-Ungleichungen) und die erzielte Resultate lassen sich daher kaum miteinander vergleichen, zumal die Ausgangsstrukturen (keine der obigen Arbeiten betrachtet zeitdiskrete MKen mit beliebigen Zustandsräumen) differieren.
Die Gibbs-Entropie einer positiven Funktion g ($g \geq 0$) zum Wmaß π wird gegeben durch

$$H(g) := \int_\Omega \eta(g(x))\pi(dx),$$

wobei $\eta(x) := -x\log(x)$, $\eta(0) := 0$. Auf dem Raum $\mathcal{G} := \{g_A := \frac{1}{\pi(A)} 1_A : A \in \mathcal{F}, 0 < \pi(A) \leq \frac{1}{2}\}$ wird der additive Entropiezuwachs definiert als

$$L_n := \inf_{g\in\mathcal{G}} (H(P^n g) - H(g)). \tag{15}$$

Wir zeigen, dass die isoperimetrische Konstante $k_{P^{*n}P^n}$ durch L_n auf folgende Art und Weise nach oben abgeschätzt werden kann:

$$k_{P^{*n}P^n} \leq 2(1 - e^{-L_n}). \tag{16}$$

Dies liefert unmittelbar

$$\exists n : L_n > 0 \tag{17}$$

als notwendiges Kriterium für die Existenz einer $L^2(\pi)$-Spektrallücke. Dass dies jedoch nicht hinreichend ist, wird an einem Gegenbeispiel (vgl. Kapitel 6 Abschnitt 6.3.3) gezeigt. Stellt man jedoch die zusätzliche Bedingung, dass die betrachtete MK eine Sprunglücke hat, d.h. ein $\epsilon > 0$ existiert, sodass

$$p^n(x, A) = 0 \;\vee\; p^n(x, A) \geq \epsilon \quad \forall x \in \Omega, A \in \mathcal{F},$$

zeigt sich, dass (17) tatsächlich äquivalent zur Existenz einer $L^2(\pi)$-Spektrallücke ist. Die Behauptung dieser Aussage ergibt sich aus der folgenden Ungleichung:

$$k_n \geq \frac{4}{(-8 \log \epsilon)^{1+\delta}} L_n^{1+\delta}, \tag{18}$$

wobei

$$\delta = \frac{\log \log \frac{1}{\epsilon}}{\log \frac{1}{\epsilon} - \log \log \frac{1}{\epsilon}}. \tag{19}$$

Wir haben gesehen, dass die Existenz einer $L^2(\pi)$-Spektrallücke die Existenz eines $n \in \mathbb{N} : L_n > 0$ impliziert. Diese Aussage lässt sich noch verfeinern. Tatsächlich gelingt es, auf dem Raum $\mathcal{G}_\epsilon := \{g_A := \frac{1}{\pi(A)} 1_A : A \in \mathcal{F},\, \epsilon \leq \pi(A) \leq \frac{1}{2}\}$ gleichgradige exponentielle Konvergenz der Entropie $H(P^n \cdot)$ gegen Null zu zeigen, d.h.

$$\frac{-C}{\epsilon} \delta^n \leq \inf_{g_A \in \mathcal{G}_\epsilon} H(P^n g_A) \leq 0. \tag{20}$$

Damit sind die wesentlichen Zusammenhänge zwischen additivem Entropiezuwachs und der Existenz einer $L^2(\pi)$-Spektrallücke geklärt. Eine positiven additiven Entropiezuwachs ($\exists n \in \mathbb{N}$) implizierende Bedingung ist die des positiven multiplikativen Entropiezuwachses, der definiert ist als

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \epsilon > 0 : \sup_{g_A \in \mathcal{G}} \frac{H(P^{n_0} g_A)}{H(g_A)} \leq 1 - \epsilon. \tag{21}$$

Wir zeigen, dass die Bedingung (21) hinreichend, jedoch nicht notwendig für die Existenz einer $L^2(\pi)$-Spektrallücke ist. Auch hier beruht der Beweis darauf, dass k_n unter der Bedingung (21) von Null weg beschränkt werden kann. Auf diesem Weg erhalten wir wieder eine Abschätzung für die Größe der Spektrallücke.

Im letzten Abschnitt des Kapitels 5 werden die in dem vorherigen Kapitel 4 für reversible MKen erzielten Ergebnisse verallgemeinert. Zu diesem Zweck führen wir den Begriff der schwachen Reversibilität der Ordnung n_0 ein. Dieser verlangt die Existenz eines $n_0 \in \mathbb{N}$ und eines $C_{n_0} > 0$, sodass

$$\frac{1}{C_{n_0}} \leq \frac{\pi(dx) p^{n_0}(x, dy)}{\pi(dy) p^{n_0}(y, dx)} \leq C_{n_0}. \tag{22}$$

Unter diesen Voraussetzungen können wir zeigen, dass P genau dann eine Spektrallücke hat, wenn

$$k_{n_0} > 0,\; k_{2n_0} > 0.$$

Für schwach reversible Ketten der Ordnung 1 ist die Existenz einer Spektrallücke damit äquivalent zu

$$k > 0,\, k_2 > 0.$$

Es wird vermutet, dass für schwach reversible MKen der Ordnung eins auch die schwächere, aus dem reversiblen Fall bekannte Bedingung $0 < k \leq K < 2$ äquivalent zur Existenz einer $L^2(\pi)$-Spektrallücke ist. Beschränken wir uns allerdings auf MKen mit Sprunglücken der Größe ϵ, so kann tatsächlich die Äquivalenz gezeigt werden. Als untere Schranke für die Spektrallücke erhalten wir in dem Fall

$$1 - \sqrt{1 - \frac{\kappa}{2C}\left(\frac{k(1-\frac{K}{2})^2\eta(1-(1-\frac{K}{2})^2\frac{k}{6})}{-182C\log\epsilon}\right)^{1+\delta}}, \tag{23}$$

wobei δ wieder gegeben ist durch (19).
Die Schwierigkeit bei dem Beweis besteht darin, dass die für reversible MKen verwendete Methode nicht der neuen Situation angepasst werden kann und daher der Umweg über die Entropie gegangen werden muss. Die Beweisidee hierfür soll jetzt kurz erklärt werden.
Ziel ist es, k_{P^*P} durch eine positive Funktion $f \geq 0$ mit den Parametern k und K abzuschätzen, für die $f(k,K) > 0$ für alle $0 < k \leq K < 2$. Dies geschieht, indem die sich aus der Reversibilität ergebene Ungleichung

$$k_{P^*P} \geq q\,k_2,\ \ q > 0$$

weiter mit (18) (an dieser Stelle geht die Voraussetzung der Existenz der Sprunglücke ein) abgeschätzt wird. Mit der folgenden, von uns bewiesenen Ungleichung des additiven Entropiezuwachses L_n, nämlich

$$L_n = \inf_{g_A\in\mathcal{G}}(H(P^n g_A) - H(g_A)) \geq \frac{k_n(1-\frac{K_n}{2})^2\eta(1-(1-\frac{K_n}{2})^2\frac{k_n}{6})}{6C_n}, \tag{24}$$

folgt dann das Gewünschte.
In Kapitel 6 wird die Frage nach der Existenz einer $L^2(\pi)$-Spektrallücke nochmal von einer anderen Seite, nämlich der der geometrischen Ergodizität, betrachtet. Dabei heißt eine MK π-f.s. geometrisch ergodisch, falls gilt:

$$\exists \delta < 1, C_x > 0: \quad ||p^n(x,\cdot) - \pi(\cdot)||_V \leq C_x\delta^n\,\pi - f.s.,$$

wobei $C_x > 0$ und $\delta < 1$. Erste detaillierte Untersuchungen für π-f.s. geometrisch ergodische MK mit abzählbarem Zustandsraum wurden von Vere-Jones [69] durchgeführt. In den darauf folgenden Jahrzehnten entwickelte sich eine eigenständige Theorie für diese Klasse von MKen. Zahlreiche zur π-f.s. geometrischen Ergodizität äquivalente Bedingungen können in den Büchern von Meyn und Tweedie [51], Nummelin [55], bzw. in dem Artikel von Roberts und Rosenthal [59] nachgelesen werden. Roberts und Tweedie [58] konnten im Jahr 2001 für reversible MKen die Äquivalenz von π-f.s. geometrischer Ergodizität und der Existenz einer $L^2(\pi)$-Spektrallücke nachweisen und darüber hinaus zeigen, dass in diesem Fall der $L^2(\pi)$-Spektralradius von $P - P_1$ der geometrischen Ergodizitätsrate δ entspricht.
Für zeitdiskrete MKen mit abzählbarem Zustandsraum zeigte Chen [9], dass die Existenz einer $L^2(\pi)$-Spektrallücke die π-f.s. geometrische Ergodizität impliziert. Für nicht reversible MKen in diskreter Zeit mit allgemeinen Zustandsräumen scheinen keine weiteren Ergebnisse über die Beziehungen zwischen der Existenz von $L^2(\pi)$-Spektrallücken einerseits und der geometrischen Ergodizität andererseits in der Literatur vorzuliegen.
Wir zeigen für π-f.s. geometrisch ergodische MKen, die auf einem Wraum leben, dessen σ-Algebra abzählbar erzeugt wird, dass die folgende Bedingung hinreichend für die Existenz einer $L^2(\pi)$-Spektrallücke ist:

$$||P^{*n}P^n - (P^*P)^n||_2 \leq K\,q^n,\ \ K > 0,\, q < 1.$$

Diese Bedingung erscheint neu und ist wesentlich schwächer als die Forderung nach Selbstadjungiertheit von P. Die Bedingung verlangt einen gewissen Grad an Kommutativität der Operatoren P und P^* und ist für normale und damit insbesondere

für selbstadjungierte Operatoren trivialerweise erfüllt.
Hat umgekehrt die MK eine $L^2(\pi)$-Spektrallücke und ist die zugehörige σ-Algebra endlich erzeugt, dann ist die folgende Bedingung hinreichend für die π-f.s. geometrische Ergodizität:
Es existiert eine Funktion $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Zerlegung $(A_i^n)_{i\in\{1,\dots\phi(n)\}}$ von Ω mit $\bigcup_{i=1}^{\phi(n)} A_i^n = \Omega$ und $A_i^n \cap A_j^n = \emptyset\ \forall i \neq j$, sodass

$$\liminf_{n\to\infty} \left(\frac{\int_\Omega \sum_{i=1}^{\phi(n)} |p^n(x, A_i^n) - \pi(A_i^n)|\pi(dx)}{||\,||p^n(\cdot,\cdot) - \pi||_V||_1} \right)^{\frac{1}{n}} > \limsup_{n\to\infty} \left(\phi(n)(1 - k_{P^{*n}P^n})\right)^{\frac{1}{n}} . \tag{25}$$

Es ist nicht klar, ob die Bedingung (25) wirklich nötig ist oder ob die Existenz einer $L^2(\pi)$-Spektrallücke bereits die π-f.s. geometrische Ergodizität impliziert. Umgekehrt zeigen wir jedoch, dass geometrische Ergodizität nicht die Existenz einer $L^2(\pi)$-Spektrallücke impliziert. Hierfür wird in Abschnitt 6.3.2 ein Beispiel angegeben.
Das Kapitel schließt mit einigen Beispielen, an denen die Nützlichkeit der zuvor hergeleiteten hinreichenden und notwendigen Kriterien für die Existenz einer $L^2(\pi)$-Spektrallücke gezeigt wird.

Kapitel 1

Grundlagen

In diesem Kapitel sollen kurz die für die Arbeit relevanten Definitionen und Sätze dargestellt werden. Grundlegende Begriffe wie Markov-Kette (MK) werden kurz erklärt und einige in Hinblick auf diese Arbeit wesentliche Eigenschaften herausgestellt (Abschnitt 1.1). Darüberhinaus wird das notwendige funktionalanalytische Werkzeug bereitgestellt. Dabei wird insbesondere auf die Spektraltheorie selbstadjungierter Operatoren, analytischer Funktionen von Operatoren und gestörter Operatoren eingegangen (Abschnitte 1.2 und 1.3).

1.1 Markov-Ketten

Die hier vorgestellten Definitionen und Eigenschaften von MKen können z.B. in [51], [5], [37] oder [61] nachgelesen werden.
Eine Abbildung $p : \Omega \times \mathcal{F} \to [0,1]$ wird Markov-Kern oder Übergangskern genannt, falls gilt:

1. $p(\cdot, A)$ ist $\mathcal{F}$-messbar für alle $A \in \mathcal{F}$.
2. $p(x, \cdot)$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß (Wmaß) für alle $x \in \Omega$.

Gibt man nun ein Wmaß λ auf $(\Omega, \mathcal{F})$ vor, dann induziert dies zusammen mit dem Übergangskern $p(\cdot,\cdot)$ ein eindeutig bestimmtes Wmaß P_λ auf dem Raum $(\Omega^\infty, \mathcal{F}^\infty)$, wobei $\Omega^\infty := \Omega \times \Omega \times \ldots$. Die endlichdimensionalen Verteilungen sind dabei gegeben durch

$$P_\lambda(A_1, A_2, \ldots, A_k, \Omega, \Omega, \ldots) = \int_{A_1} \int_{A_2} \cdots \int_{A_{k-1}} \lambda(dx_1) p(x_1, dx_2) \ldots p(x_{k-1}, A_k). \tag{1.1}$$

Die Projektion $\xi_i(\omega) = \omega_i$, wobei $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots) \in \Omega^\infty$, definiert für alle $i \in \mathbb{N}$ eine messbare Abbildung von $(\Omega^\infty, \mathcal{F}^\infty, P_\lambda)$ nach $(\Omega, \mathcal{F}, \lambda)$. Man sagt, $\xi_1, \xi_2, \ldots$ ist die zum Startmaß λ und Übergangskern $p(\cdot,\cdot)$ assoziierte, kanonische MK mit Zustandsraum Ω. In gewisser Hinsicht ausgezeichnet unter den Startmaßen π sind jene, für die gilt:

$$\int_\Omega \pi(dx) p(x, A) = \pi(A). \tag{1.2}$$

Man schreibt dies auch kurz als $\pi P = \pi$. Gleichung 1.2 impliziert die Verteilungsgleichheit von $(\xi_1, \xi_2, \ldots)$ und $(\xi_k, \xi_{k+1}, \ldots)$ $\forall k \in \mathbb{N}$. MKen $\xi_1, \xi_2, \ldots$ mit der Eigenschaft 1.2 werden deshalb stationär genannt. Die Fragen nach Existenz und Eindeutigkeit solcher Wahrscheinlichkeitsmaße sind für viele Anwendungen von erheblichem Interesse. Eine umfassende Antwort auf diese und andere Probleme liefern

die Bücher von Meyn and Tweedie [51] und Nummelin [55], wobei sich die nun folgende Darstellung an Tierney [67] orientiert.
Die Totalvariation eines beschränkten signierten Maßes λ auf $(\Omega, \mathcal{F})$ ist definiert als

$$||\lambda||_V := \sup_{A\in\mathcal{F}} \lambda(A) - \inf_{A\in\mathcal{F}} \lambda(A).$$

Der Abstand zweier Maße λ_1, λ_2 in Totalvariation ist dann $||\lambda_1 - \lambda_2||_V$.
Sei Ω ein beliebiger Zustandsraum. Wir nennen eine MK ϕ-irreduzibel, falls ein σ-endliches Maß ϕ auf $(\Omega, \mathcal{F})$, $\phi(\Omega) > 0$ mit der Eigenschaft existiert, dass es für jedes $x \in \Omega$ und $A \in \mathcal{F}$ mit $\phi(A) > 0$ ein $n = n(x, A)$ gibt, sodass $p^n(x, A) > 0$. Auf diskreten Zustandsräumen entspricht dies dem üblichen Irreduzibilitätsbegriff, wenn man ϕ als Zählmaß wählt.
Eine ϕ-irreduzible MK heißt periodisch, falls eine natürliche Zahl $d \geq 2$ und nicht leere Mengen $E_0, E_1, E_2, \ldots, E_{d-1}$ existieren mit $E_i \in \mathcal{F}$, $E_i \cap E_j = \emptyset \; \forall i \neq j$, sodass $\forall\ x \in E_i$ gilt:

$$p(x, E_j) = 1 \quad \text{für } j = i + 1 \ (mod\ d).$$

Andernfalls wird die Kette aperiodisch genannt.
Wir nennen eine π-irreduzible MK $\xi_1, \xi_2, \ldots$ mit invariantem Startmaß π rekurrent, falls für alle $B \in \mathcal{F}$ mit $\pi(B) > 0$ gilt:

1. $$P_x(\xi_n \in B \text{ unendlich oft (u.o.)}) > 0.$$

2. $$P_x(\xi_n \in B \text{ u.o.}) = 1 \quad \pi\text{-f.s.},$$

wobei P_x das Maß aus (1.1) mit δ_x (Dirac-Maß) als Startmaß ist. Die Kette heißt Harris rekurrent, falls

$$P_x(\xi_n \in B \text{ u.o.}) = 1 \ \ \forall x \in \Omega.$$

Eine MK heißt positiv rekurrent, falls ein stationäres Maß π mit $\pi(\Omega) < \infty$ existiert. Falls $\pi(\Omega) = \infty$, dann heißt die Kette null-rekurrent.

Angenommen $\xi_1, \xi_2, \ldots$ ist eine π-irreduzible MK, wobei $\pi P = \pi$. Dann ist $\xi_1, \xi_2, \ldots$ positiv rekurrent und π das eindeutig bestimmte invariante Wmaß. Falls die MK darüberhinaus aperiodisch ist, dann gilt:

$$||p^n(x, \cdot) - \pi||_V \to 0 \ \ \pi - f.s.$$

Existiert umgekehrt ein Wmaß π, sodass

$$||p^n(x, \cdot) - \pi||_V \to 0 \ \ \forall x \in \Omega,$$

dann ist die MK π-irreduzibel, aperiodisch, positiv Harris rekurrent und π ist das eindeutig bestimmte invariante Wmaß.

1.2 Induzierte Markov-Operatoren und Spektraltheorie

Der Übergangskern $p(\cdot, \cdot)$ induziert einen Markov-Operator (MO) P, der auf den L^p-Räumen, $p \in [1, \infty]$ und auf dem Raum $\mathcal{B}(\Omega, \mathcal{F}, || \cdot ||_\infty)$ der beschränkten, $\mathcal{F}$-messbaren komplexwertigen Funktionen wie folgt operiert:

$$Pf(x) := \int_\Omega f(y)p(x, dy) \ \forall\, x \in \Omega. \tag{1.3}$$

Mit Hilfe dieses Operators lässt sich Harris-Rekurrenz einer MK wie folgt ausdrücken:

Sei $\xi_1, \xi_2, \ldots$ eine rekurrente MK. Sie ist genau dann Harris rekurrent, falls für $f \in \mathcal{B}(\Omega, \mathcal{F}, ||\cdot||_\infty)$ aus $Pf = f$ folgt, dass $f = c$ und c eine Konstante ist.
Im Folgenden sei $\xi_1, \xi_2, \ldots$ eine MK mit eindeutig bestimmtem stationären Wmaß π. Für den in 1.3 definierten Operator gilt dann sowohl auf $L^p(\pi)$, $p \in [1, \infty]$, als auch auf $\mathcal{B}(\Omega, \mathcal{F}, ||\cdot||_\infty)$:

1. $$||Pf|| \leq ||f||.$$

2. $$Pf \geq 0 \ \forall f \geq 0.$$

Die Gültigkeit von 1 ergibt sich dabei aus der Jensenschen Ungleichung.
Das stationäre Wmaß π induziert selbst auch einen Operator auf den oben genannten Räumen auf folgende Art und Weise:

$$P_1 f := \int_\Omega f(y)\pi(dy).$$

Dieser wird auch Erwartungswertoperator genannt. Das Spektrum $\sigma(P)$ des Operators P ist wegen Ungleichung 1 enthalten in $K_1(0) := \{x \in \mathbb{C} : ||x||_2 \leq 1\}$. Offensichtlich sind die konstanten Funktionen Eigenvektoren zum Eigenwert 1 und damit $1 \in \sigma(P)$. Man kann zeigen, dass für eine stationäre MK $\xi_1, \xi_2, \ldots$ die Zahl 1 genau dann ein einfacher Eigenwert ist, falls die MK π-irreduzibel ist. Falls $\sigma(P) \subset K_r(0) \cup \{1\}$, wobei $r < 1$ sei, sagen wir, dass P eine Spektrallücke (bei 1) hat. Dies ist äquivalent zur Existenz eines $C \geq 0$, $\delta < 1$, sodass

$$||P^n - P_1|| \leq C\delta^n.$$

Operatoren mit dieser Eigenschaft werden auch quasi-kompakt genannt (vgl. [36], [45]). Notwendig für die Quasi-Kompaktheit von P ist die Aperiodizität der assoziierten MK. Ob P eine Spektrallücke hat, ist dabei sowohl von π und $p(\cdot,\cdot)$ als auch von dem Raum, auf dem P operiert, abhängig. Für die für diese Arbeit relevanten Räume $\mathcal{B}(\Omega, \mathcal{F}, ||\cdot||_\infty)$ und $L^2(\pi)$ zeigt sich (siehe Kapitel 3), dass eine Spektrallücke von P auf $\mathcal{B}(\Omega, \mathcal{F}, ||\cdot||_\infty)$ eine Spektrallücke auf $L^2(\pi)$ impliziert. Anders ausgedrückt bedeutet dies, dass auf $L^2(\pi)$ schwächere Bedingungen an π und $p(\cdot,\cdot)$ als auf $\mathcal{B}(\Omega, \mathcal{F}, ||\cdot||_\infty)$ gestellt werden können, ohne dabei die Eigenschaft der Existenz einer Spektrallücke aufgeben zu müssen. Für die Frage nach der Existenz einer Spektrallücke erweist es sich als hilfreich, zunächst selbstadjungierte Operatoren P zu betrachten, da hierfür die in der Funktionalanalysis entwickelte Spektraltheorie selbstadjungierter Operatoren genutzt werden kann. P lässt sich dann darstellen als

$$P = \int_{-1}^{1} \lambda dE_\lambda, \tag{1.4}$$

wobei E_λ die zugehörigen orthogonalen Projektoren sind (vgl. [27]). Der adjungierte Operator P^* von P auf $L^2(\pi)$ repräsentiert den zeitlich umgekehrten Prozess der zu $p(\cdot,\cdot)$, π assoziierten MK. Im Falle der Selbstadjungiertheit von P bedeutet dies, dass der zeitlich vorwärts laufende Prozess in Verteilung die gleiche Dynamik wie der zeitlich rücklaufende Prozess hat. Folgende einfach zu überprüfende Bedingung ist äquivalent zur Selbstadjungiertheit von P:

$$\pi(dx)p(x, dy) = \pi(dy)p(y, dx). \tag{1.5}$$

Eine MK $\xi_1, \xi_2, \ldots$ wird reversibel genannt, falls 1.5 gilt. Reversiblen MKen zugeordnete MO P sind demnach selbstadjungiert.
Im nicht reversiblen Fall ist es in der Regel schwieriger, Aussagen über das Spektrum $\sigma(P)$ zu gewinnen. Weiß man allerdings etwas über das Spektrum von $f_i(P)$, wobei f_i, $i \in \mathbb{N}$ analytische Funktionen (in dieser Arbeit Polynome endlichen Grades) seien, dann kann man mit Hilfe des analytischen Funktionalkalküls häufig Rückschlüsse auf $\sigma(P)$ ziehen. Der hierfür entscheidende Satz lautet (vgl. [72]):

Satz 1.2.1 *Sei P ein linearer stetiger Operator auf einem Banach-Raum und es definiere $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $> \sigma(P)$. Dann gilt der Spektralabbildungssatz, d.h.*

$$\sigma(f(P)) = f(\sigma(P)).$$

Die hier angegebenen Hilfsmittel ermöglichen es uns im Laufe der Arbeit, einige Aussagen über die Existenz von Spektrallücken bei MOen zu machen. Hat man jedoch erst einmal die Existenz einer Spektrallücke von P sichergestellt, lassen sich in einigen Fällen damit klassische Sätze aus der Wahrscheinlichkeitstheorie beweisen. Dies soll im folgenden Abschnitt dargestellt werden.

1.3 Grenzwertsätze und gestörte Operatoren

In diesem Abschnitt werden die für das Kapitel 7 relevanten Grundlagen dargestellt. Gegeben sei eine Folge $\phi \circ \xi_1, \phi \circ \xi_2, \ldots$ von ZVen, generiert durch eine π-irreduzible, stationäre MK $\xi_1, \xi_2, \ldots$ mit invariantem Startmaß π, sodass ϕ im Anziehungsbereich einer stabilen Verteilung liegt, d.h. es existieren Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$, sodass

$$\frac{1}{B_n}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i - A_n\right) \stackrel{D}{\Longrightarrow} F, \tag{1.6}$$

wobei $Y_1, Y_2, \ldots$ eine Folge u.i.v. reellwertiger ZVen mit $Y_i \stackrel{D}{=} \phi \circ \xi_1$ und F eine stabile Verteilung ist. Dabei heißen Verteilungen F stabil, falls für alle $a_1, a_2 > 0$, $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ Konstanten $a > 0, b \in \mathbb{R}$ existieren, sodass gilt:

$$F(a_1 x + b_1) * F(a_2 x + b_2) = F(ax + b).$$

Es ist bekannt (vgl. [13], [41]), dass die linke Seite in (1.6) in Verteilung nur gegen stabile Verteilungen konvergieren kann und andererseits alle stabilen Verteilungen Grenzwerte von Summen der Form (1.6) sind. Für die B_n aus (1.6) gilt dann:

$$B_n = h(n) n^{1/\alpha}, \quad 0 < \alpha \leq 2, \tag{1.7}$$

wobei $h(n)$ eine langsam variierende Funktion im Sinne von Karamata ist (vgl. [41]). Man kann zeigen, dass eine Verteilung F genau dann stabil ist, falls sich der Logarithmus ihrer charakteristischen Funktion $f(\theta) := \int_{\mathbb{R}} e^{i\theta x} F(dx)$ schreiben lässt als (vgl. [41])

$$\log f(\theta) = i\gamma\theta - c|\theta|^{\alpha} \left(1 - i\beta \frac{\theta}{|\theta|} \omega(\theta, \alpha)\right), \tag{1.8}$$

wobei α, β, γ, c Konstanten sind, und zwar $\gamma \in \mathbb{R}$, $|\beta| \leq 1$, $0 < \alpha \leq 2$, $c \leq 0$ und

$$\omega(\theta, \alpha) = \begin{cases} \tan(\frac{\pi}{2}\alpha), & \alpha \neq 1, \\ \frac{2}{\pi} \log|\theta|, & \alpha = 1. \end{cases}$$

Bei bekanntem α spricht man daher auch von α-stabilen Verteilungen und schreibt statt F auch V_α, was hier ab jetzt auch gemacht wird. Linnik ([41]) konnte für $\alpha \neq 1$ zeigen, dass sich die charakteristische Funktion $\hat{\phi}$ einer sich im Anziehungsbereich einer α-stabilen Verteilung V_α befindenden Funktion ϕ in gewissem Sinne nur wenig von der charakteristischen Funktion v_α (von V_α) unterscheidet. Es gilt dann nämlich

$$\log \hat{\phi}(\theta) = i\tilde{\gamma}\theta - c|\theta|^\alpha \tilde{h}(\theta) \left(1 - i\beta \frac{\theta}{|\theta|} \tan(\frac{\pi}{2}\alpha)\right), \tag{1.9}$$

wobei α $(\neq 2)$, β, c die gleichen Konstanten sind wie in 1.8 und $\tilde{h}(\theta)$ eine langsam variierende Funktion für $\theta \to 0$ ist. Die Darstellung der charakteristischen Funktion wurde für den Fall $\alpha = 1$ erst 1998 im allgemeinsten Fall von Aaronson und Denker [1] angegeben. Da wir den Fall $\alpha = 1$ in dieser Arbeit nicht untersuchen, wird auf die Darstellung verzichtet. Wegen der Stetigkeit der charakteristischen Funktionen v_α α-stabiler Verteilungen impliziert der Stetigkeitssatz (vgl. [4]) die Äquivalenz von

$$\frac{1}{B_n}(\sum_{i=1}^n \phi \circ \xi_i - A_n) \stackrel{D}{\Longrightarrow} V_\alpha, \tag{1.10}$$

und

$$f_n(\frac{\theta}{B_n}) := E_\pi \left(e^{i\theta \frac{1}{B_n}(S_n - A_n)}\right) \to v_\alpha(\theta),\ n \to \infty, \tag{1.11}$$

wobei $S_n = \sum_{i=1}^n \phi \circ \xi_i$ und die Konvergenz in (1.11) gleichmäßig in θ auf kompakten Mengen ist.
Die entscheidende Beobachtung ist nun die, dass $f_n(\theta)$ sich schreiben lässt als (vgl. [53])

$$f_n(\theta) = e^{-i\theta A_n} P_1(\theta) P^{n-1}(\theta) 1, \tag{1.12}$$

wobei die Operatoren $P(\theta)$ und $P_1(\theta)$ jeweils auf den beiden Räumen $L^2(\pi)$ und $\mathcal{B}(\Omega, \mathcal{F}, ||\cdot||_\infty)$ operieren durch

$$P(\theta)f(x) := \int_\Omega e^{i\theta y} f(y) p(x, dy), \tag{1.13}$$

$$P_1(\theta)f(x) := \int_\Omega e^{i\theta y} f(y) \pi(dy). \tag{1.14}$$

Dies gibt uns die Möglichkeit, die Folge der charakteristischen Funktionen $f_n(\frac{\theta}{B_n})$ mit Hilfe der Operatoren $P(\frac{\theta}{B_n})$ zu studieren. Falls $P(\theta)$ stetig in θ (in der dem jeweiligen Raum zugeordneten starken Operatornorm) ist, kann man wegen $P(0) = P$ für kleine θ $P(\theta)$ als Störung von P auffassen. Auf diese Art und Weise kann für kleine θ aus der Existenz einer Spektrallücke von P auf die Existenz einer Spektrallücke bei $P(\theta)$ (die jedoch nicht bei 1, sondern in einer nahen Umgebung von 1 liegt) geschlossen werden (vgl. [25]), was nun formal ausgeführt werden soll. Die jetzt folgende Darstellung ist der Arbeit von Nagaev [53] entnommen.
Angenommen P besitze eine Spektrallücke bei 1 und $P(\theta)$ sei stetig in θ. Seien im Folgenden $R(z) := \frac{1}{z-1}P_1 + \sum_{i=0}^\infty (P^i - P_1) z^{-i-1}$ und $R(z, \theta) := \sum_{i=0}^\infty R(z)[(P(\theta) - P)R(z)]^i$ die Resolventen von P bzw. $P(\theta)$. Dann existiert ein $\epsilon > 0$, $\delta > 0$, sodass für alle θ mit $||P(\theta) - P|| \leq \epsilon$ gilt:

$$P^n(\theta) = \lambda^n(\theta) Q_1(\theta) + O(\delta^n). \tag{1.15}$$

$Q_1(\theta)$ ist dabei definiert als

$$Q_1(\theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{I_1} R(z, \theta) dz,$$

wobei I_1 ein hinreichend kleiner Kreis um 1 ist, sodass keine Werte des Spektrums von $P(\theta)$ in I_1 liegen.
$\lambda(\theta)$ ist hier der Eigenwert von $P(\theta)$ zum Eigenvektor, der den eindimensionalen Bildraum des Projektors $Q_1(\theta)$ erzeugt, und lässt sich darstellen als

$$\lambda(\theta) = \frac{P_1 P(\theta) Q_1(\theta) 1}{P_1 Q_1(\theta) 1}.$$

Explizites Ausrechnen der rechten Seite obiger Gleichung liefert:

$$\begin{aligned} \lambda(\theta) &= \int_\Omega e^{i\theta\phi(y)}\pi(dy) \qquad (1.16) \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_\Omega e^{i\theta\phi(y)}\pi(dy)\int_\Omega e^{i\theta\phi(y)}p^k(x,dy) - \left(\int_\Omega e^{i\theta\phi(y)}\pi(dy)\right)^2\right) + W(\theta). \end{aligned}$$

Die in 1.10 und 1.11 skizzierte Methode im Zusammenspiel mit den in (1.12) und (1.16) dargestellten Relationen bilden das Gerüst für den Beweis der beiden folgenden Sätze. Für diese wird die Gültigkeit der folgenden Bedingung, auf die in Kapitel 2 noch sehr detailliert eingegangen wird, vorausgesetzt.

$$\exists n \in \mathbb{N}, \alpha > 0 : \sup_{x\in\Omega, \tilde{x}\in\Omega, A\in\mathcal{F}} |p^n(x,A) - p^n(\tilde{x},A)| \leq 1-\alpha. \qquad (1.17)$$

Satz 1.3.1 *Sei $\xi_1, \xi_2, \dots$ eine stationäre MK mit Zustandsraum $(\Omega, \mathcal{F})$, invarianter Startverteilung π, Übergangskern $p(\cdot,\cdot)$ und ϕ eine reellwertige ZV auf $(\Omega, \mathcal{F})$ mit endlicher Varianz, d.h.*

$$\int_\Omega \phi(y)^2\pi(dy) < \infty.$$

Angenommen, es gilt die Bedingung 1.17 und darüber hinaus

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\left(\phi\circ\xi_k - \int_\Omega \phi(y)\pi(dy)\right)\right]^2 = \sigma^2 > 0.$$

Dann gilt unabhängig von der gewählten Startverteilung λ:

$$\lim_{n\to\infty} P_\lambda\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\left(\phi\circ\xi_k - \int_\Omega \phi(y)\pi(dy)\right) \leq x\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2\sigma^2}dy. \qquad (1.18)$$

Satz 1.3.2 *Sei $\xi_1, \xi_2, \dots$ eine MK mit Zustandsraum $(\Omega, \mathcal{F})$ und stationärem Startmaß π. Angenommen, ϕ sei eine reellwertige ZVe, sodass $\phi\circ\xi_1$ im Anziehungsbereich einer α-stabilen Verteilung liegt, d.h. es existieren eine Folge $Y_1, Y_2, \dots$ von u.i.v. reellwertigen ZVen mit $Y_1 \overset{D}{=} \phi\circ\xi_1$, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^\mathbb{N}$, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+^\mathbb{N}$, sodass*

$$\frac{1}{B_n}\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k - A_n\right) \overset{D}{\Longrightarrow} V_\alpha.$$

Angenommen, es gilt die Bedingung (1.17) und es existieren außerdem ν mit $0 < \nu \leq 1$, ϵ mit $0 < \epsilon < \alpha$ und $\tau > 0$, sodass

$$\lim_{n\to\infty} nB_n^{-\nu-\min(1,\alpha-\epsilon)}\sup_{x\in\Omega}\int_{|\phi|<B_n\tau}|\phi(y)|^\nu p(x,dy) = 0. \qquad (1.19)$$

Dann gilt für alle möglichen Startverteilungen λ:

$$\lim_{n\to\infty} P_\lambda\left(\frac{1}{B_n}\left(\sum_{i=1}^{n}\phi\circ\xi_i - A_n\right) < x\right) = V_\alpha(x). \qquad (1.20)$$

Bemerkung 1.3.3 *Satz 1.3.1 wurde nochmal in einem allgemeineren Zusammenhang im Jahr 1972 von Cogburn [15] über die Mixing-Eigenschaften von ZVen, generiert durch MKen, welche die Bedingung 1.17 erfüllen, bewiesen. Diese Bedingung ist natürlich nicht notwendig für die Gültigkeit eines zentralen Grenzwertsatzes. Schwächt man die Annahmen an* $p(\cdot,\cdot)$ *ab, dann müssen zusätzliche Bedingungen an* ϕ *gestellt werden. Ist z.B.* $p(\cdot,\cdot)$ *geometrisch ergodisch, dann benötigt man die Existenz der* $(2+\epsilon)$*-ten Momente von* ϕ *(vgl. [60], [35]). Für andere bezüglich der Gültigkeit eines zentralen Grenzwertsatzes hinreichende Bedingungen an* $p(\cdot,\cdot)$ *und* ϕ *verweisen wir an dieser Stelle auf die Arbeiten von Maxwell und Woodroofe [50], Derriennic und Lin [16], Tierney [67] und Roberts und Rosenthal [60], wobei die beiden letztgenannten Arbeiten einen kleinen Überblick über die schon bekannten Resultate geben.*
Globale Grenzwertsätze für ZVen generiert durch MKen im Falle stabiler Grenzverteilungen mit $\alpha \neq 2$ *sind in der Literatur wenig behandelt. Für einen abzählbaren Zustandsraum* Ω *zeigte Kimbleton [43] unter anderem im Falle einer positivrekurrenten MK* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *mit stationärem Startmaß* π *die Gültigkeit eines globalen Grenzwertsatzes für Summen der Form*

$$\sum_{i=1}^{n} \phi \circ \xi_i, \tag{1.21}$$

falls die in der Doeblin-Zerlegung von (1.21) auftretenden u.i.v.-en ZVen Y_i *im Anziehungsbereich einer* α*-stabilen Verteilung* V_α *liegen. Die Grenzverteilung* V_α *der normierten Summen der* Y_i *sind dann vom gleichen Typ wie die normierten Summen der* $\phi\circ\xi_i$*. Für MKen mit allgemeinen Zustandsräumen gibt es jedoch keine vergleichbaren Resultate. Unter diesem Gesichtspunkt ist der Satz 1.3.2 immer noch aktuell. Für globale Grenzwertsätze im Falle mischender Prozesse verweisen wir an dieser Stelle auf die Arbeiten von Denker und Jakubowski [17] und Jakubowski [40].*

Kapitel 2

Die Doeblin-Bedingung

Nachdem viele Theoreme in der Wahrscheinlichkeitstheorie (z.B. zentrale und lokale Grenzwertsätze) für unabhängige, identisch verteilte (u.i.v.) ZVen bewiesen worden waren, wurde die Annahme der Unabhängigkeit auf verschiedene Weisen abgeschwächt. Es entwickelten sich verschiedene Begriffe und Definitionen (allem voran die unterschiedlichen Mischungs-Begriffe, vgl. z.B. [41], [63]), mit deren Hilfe sich viele für u.i.v.-verteilte ZVen gültige Sätze auf schwach abhängige ZV übertragen ließen. Im Falle von ZVen generiert durch MKen, d.h. $X_i := \tilde{X} \circ \xi_i$, wobei $\xi_1, \xi_2, \ldots$ eine MK mit Zustandsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \pi)$ und $\tilde{X}$ eine reellwertige ZVe auf dem Zustandsraum ist, geschah dies wirkungsvoll durch eine auf Doeblin zurückgehende Bedingung ([22], [23]), die heute unter dem Namen Doeblin-Bedingung bekannt ist. Unter einer leichten Verschärfung dieser Bedingung gelang es schließlich, zentrale und lokale Grenzwertsätze im Fall α-stabiler Grenzverteilungen zu beweisen (vgl. [53], [3]). Da diese Bedingung und deren Abschwächung auch in dieser Arbeit eine wichtige Rolle spielen werden, sollen kurz die Wesentlichen auf dieser Bedingung beruhenden Eigenschaften dargestellt werden. Bedeutsam dabei sind die Spektraleigenschaften des durch die Kette induzierten Markov-Operators (MO) P. Einige der hier aufgeführten Resultate sind vermutlich bekannt. Dort, wo keine Literaturquellen gefunden wurden, werden die Beweise durchgeführt.

2.1 Doeblins Bedingung, Hypothese D und Konvergenz in Totalvariation

Im Folgenden werden drei grundlegende Definitionen gegeben.

Definition 2.1.1 *Wir sagen, der Kern $p(\cdot,\cdot)$ erfüllt die Doeblin-Bedingung, wenn ein Wahrscheinlichkeitsmaß ϕ existiert, sodass für irgendwelche $m \in \mathbb{N}, \epsilon < 1, \delta > 0$ gilt:*

$$\phi(A) > \epsilon \Longrightarrow P^m(x, A) \geq \delta \;\forall x \in \Omega,\; A \in \mathcal{F}. \tag{2.1}$$

Definition 2.1.2 *Eine MK $\xi_1, \xi_2, \ldots$ heißt gleichgradig konvergent in Totalvariation (gegen π), falls*

$$\sup_{x\in\Omega} ||p^n(x,\cdot) - \pi||_V \to 0 \text{ für } n \to \infty, \tag{2.2}$$

wobei π ein stationäres Startmaß der MK sei.

Bemerkung 2.1.3 *Das invariante Startmaß π ist unter obiger Bedingung eindeutig bestimmt, vgl. [24], [51].*

Definition 2.1.4 *Wir sagen, die MK $\xi_1, \xi_2, \ldots$ erfüllt die Hypothese D, wenn ein endliches Maß ϕ mit $\phi(\Omega) > 0$, ein $m \in \mathbb{N}$, und ein $\epsilon > 0$ existiert, sodass $\forall x \in \Omega$ gilt:*

$$p^m(x, A) \leq 1 - \epsilon, \text{ falls } \phi(A) \leq \epsilon. \tag{2.3}$$

Die Doeblin-Bedingung geht auf Doeblin (vgl. [22], [23]) zurück. Die Hypothese (D) ist eine auf Doob [24] zurückgehende Forderung und sie ist, wie wir nun sehen werden, eine weitere Abschwächung der Doeblin-Bedingung. Die Beziehung zwischen der Doeblin-Bedingung und der gleichgradigen Konvergenz in Totalvariation wird durch folgendes Theorem (vgl. Meyn and Tweedie [51]) dargestellt:

Satz 2.1.5 *Sei $\xi_1, \xi_2, \ldots$ eine stationäre MK und π ein invariantes Startmaß. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:*

1. *Die MK $\xi_1, \xi_2, \ldots$ ist gleichgradig konvergent in Totalvariation.*
2. *Die MK $\xi_1, \xi_2, \ldots$ ist aperiodisch und erfüllt die Doeblin-Bedingung.*

Wir sind noch an einer weiteren äquivalenten Formulierung der gleichgradigen Konvergenz in Totalvariation interessiert, welche uns durch die direkte Betrachtung der Übergangskerne ermöglichen soll zu entscheiden, ob eine MK gleichgradig konvergent in Totalvariation ist. Da uns hierfür kein Beweis bekannt ist, soll an dieser Stelle einer erbracht werden.

Satz 2.1.6 *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

1. *Die MK $\xi_1, \xi_2, \ldots$ ist gleichgradig konvergent in Totalvariation.*
2. *$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \alpha > 0$, so dass*

$$\sup_{\omega, \tilde{\omega}, A} |p^{n_0}(\omega, A) - p^{n_0}(\tilde{\omega}, A)| \leq 1 - \alpha, \tag{2.4}$$

wobei $\omega, \tilde{\omega} \in \Omega$, $A \in \mathcal{F}$.

Beweis: Es gelte $||p^n(x, \cdot) - \pi||_V \to 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} |p^{n_0}(\omega, A) - p^{n_0}(\tilde{\omega}, A)| &\leq |p^{n_0}(\omega, A) - \pi(A)| + |p^{n_0}(\tilde{\omega}, A) - \pi(A)| \\ &\leq ||p^{n_0}(\omega, \cdot) - \pi||_V + ||p^{n_0}(\tilde{\omega}, \cdot) - \pi||_V \to 0. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Nimmt man zunächst auf der rechten Seite das Supremum über alle ω, $\tilde{\omega}$ und dann auf der linken Seite das Supremum über alle ω, $\tilde{\omega}$, A, dann folgt 2.
Die andere Richtung ist ungleich schwieriger zu beweisen. Gelte nun 2. Hieraus folgt, dass für das Maß $\phi = p^{n_0}(\omega, \cdot)$, wobei $\omega \in \Omega$ beliebig ist, die Hypothese (D) für alle $\epsilon < \frac{\alpha}{2}$ erfüllt ist. In [73] wurde gezeigt, dass aus (2.4) die Ergodizität und Aperiodizität der MK folgt. Doob [24] konnte zeigen, dass die Potenzen der Übergangskerne ergodischer und gleichzeitig aperiodischer MKen, die zudem die Hypothese (D) erfüllen, gleichgradig in Totalvariation gegen ein eindeutig bestimmtes stationäres Wmaß π konvergieren. Damit folgt die Behauptung.

□

Korollar 2.1.7 *Die beiden folgenden Aussagen sind äquivalent:*

1. *Die Hypothese (D) ist erfüllt und die MK ist ergodisch.*
2. *Es gilt die Doeblin-Bedingung.*

Beweis: Doob [24] zeigte, dass Hypothese (D) + Aperiodizität + Ergodizität äquivalent ist zur gleichgradigen Konvergenz in Totalvariation. Die Behauptung folgt jetzt mit Satz 2.1.5.

□

2.2 Spektrallücke und Doeblin-Bedingung

Wie in der Einleitung beschrieben wurde, induzieren die Übergangskerne $p(\cdot,\cdot)$ MO auf den $L^p(\pi)$-Räumen, $p \in [1,\infty]$. Wir suchen nun nach einen Funktionenraum, auf dem die gleichgradige Konvergenz in Totalvariation äquivalent ist zur Existenz einer Spektrallücke, um dann im weiteren Verlauf der Arbeit in der Lage zu sein, funktionalanalytische Methoden zu benutzen. Seien nun P, P_1 die auf dem Banachraum $\mathcal{B}(\Omega,\mathcal{F},||\cdot||_\infty)$ der beschränkten messbaren Funktionen mit Supremums-Norm definierten Operatoren.

Proposition 1 *Es gilt:*

$$\sup_{x\in\Omega} ||p^{n+1}(x,\cdot)-\pi||_V \le ||(P-P_1)^n||_\infty \le \sup_{x\in\Omega} ||p^n(x,\cdot)-\pi||_V. \tag{2.6}$$

Beweis: Es ist bekannt, dass $\mathcal{B}(\Omega,\mathcal{F},||\cdot||_\infty)^* = (ba(\Omega,\mathcal{F}),||\cdot||_V)$, wobei $(ba(\Omega,\Sigma),||\cdot||_V)$ der Raum der beschränkten signierten Maße auf $(\Omega,\mathcal{F})$ ist. Daher wissen wir:

$$||(P-P_1)^n||_\infty = ||(P^n-P_1)^*||_V = \sup_{\mu:||\mu||_V=1} ||\mu(p^n(\cdot,\cdot)-\pi)||_V.$$

Für μ-integrierbare Funktionen f gilt allgemein (vgl. [72], S.470):

$$|\int f d\mu| \le \int |f| d||\mu||_V.$$

Dies liefert uns

$$\begin{aligned}
||\mu(p^n(\cdot,\cdot)-\pi)||_V &= \sup_{\phi:|\phi|\le 1} \int_\Omega \int_\Omega \mu(dx)(p^n(x,dy)-\pi(dy))\phi(y) \\
&\le \int_\Omega ||\mu||_V(dx) \sup_{\phi:|\phi|\le 1} \sup_{x\in\Omega} \int_\Omega (p^n(x,dy)-\pi(dy))\phi(y) \\
&= ||\mu||_V \sup_{x\in\Omega} ||p^n(x,\cdot)-\pi||_V.
\end{aligned}$$

Dividieren durch $||\mu||_V$ und Bilden des Supremums auf beiden Seiten ergibt dann

$$||(P-P_1)^n||_\infty \le \sup_{x\in\Omega} ||p^n(x,\cdot)-\pi||_V.$$

Dies liefert die eine Ungleichung. Die andere Ungleichung ergibt sich aus

$$||P^n-P_1||_\infty = ||(P^n-P_1)^*||_V \ge ||p(x,\cdot)(p^n(\cdot,\cdot)-\pi)||_V = ||p^{n+1}(x,\cdot)-\pi||_V$$

für alle $x \in \Omega$. Nimmt man nun wieder das Supremum, so folgt die Behauptung.

□

Aus der obigen Proposition folgt unmittelbar:

Korollar 2.2.1 *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

1. *Die MK ist gleichgradig konvergent in Totalvariation.*
2. *Es existieren $C > 0$, $0 < \delta < 1$, sodass*

$$||(P-P_1)^n||_\infty \le C\delta^n \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.7}$$

Korollar 2.2.2 *Die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := \sup_{x\in\Omega} ||p^n(x,\cdot)-\pi||_V$ und $b_n := ||(P-P_1)^n||_\infty$ sind monoton fallend.*

Seien nun

$$\mathcal{B}_0(\Omega) := \{f \in \mathcal{B}(\Omega) : P_1 f = 0\}, \quad \mathcal{K} := \{f \in \mathcal{B}(\Omega) : f = c, c \in \mathbb{R}\}.$$

Aufgrund der Stationarität von π sind die Unterräume $\mathcal{F}, \mathcal{K} \subset \mathcal{B}(\Omega)$ invariant unter P und P_1. Daher gilt:

$$\sigma(P) = \sigma(P_1) \cup \sigma(P - P_1).$$

Wegen des obigen Satzes sieht man daher, dass das Spektrum von P auf $\mathcal{B}(\Omega, ||\cdot||_\infty)$ enthalten ist in $\{1\} \cup K_\delta(0)$. Somit ist die gleichgradige Konvergenz in Totalvariation von $\xi_1, \xi_2, \ldots$ äquivalent zur Existenz einer Spektrallücke des assoziierten MO P auf $\mathcal{B}(\Omega, ||\cdot||_\infty)$. Diese Eigenschaft von P wird in der Literatur häufig auch quasi-kompakt genannt (vgl. z.B. [46], [36]).

Kapitel 3

L^2-Spektraltheorie für Markov-Ketten

Nachdem im letzten Kapitel die gleichgradige Konvergenz in Totalvariation im Zusammenhang mit den Spektraleigenschaften des Operators P auf dem Raum $\mathcal{B}(\Omega, \mathcal{F}, ||\cdot||_\infty)$ diskutiert worden ist, soll nun die Wirkung von P auf dem Raum $L^2(\pi)$ in den Vordergrund gerückt werden. Dieser Zusammenhang wird über den Interpolationssatz von Riesz-Thorin vermittelt. Mit Hilfe des nun folgenden Satzes lassen sich jedoch noch stärkere Aussagen ableiten. So ergibt sich, dass der Operator $\tilde{P}$, definiert auf dem nicht linearen Raum der $\sigma(\xi_i, \xi_j)$-messbaren $L^2(\tilde{P})$-Funktionen, wobei

$$\tilde{P} : \sigma(\xi_i, \xi_j) \ni f(\xi_i, \xi_j) \to E(f(\xi_i, \xi_j)|\xi_{i-1}, \xi_{j+1}),\ i \le j,\ \ i, j \in \mathbb{Z},$$

strikt kontrahierend ist (vgl. Satz 3.2.3).

3.1 Coupling und L^2-Spektrallücken

Proposition 2 *Sei $\xi_1, \xi_2, \ldots$ eine stationäre MK mit invariantem Wmaß π, die gleichgradig konvergent in Totalvariation ist. Dann besitzt der assoziierte MO P eine L^2-Spektrallücke.*

Beweis: Aus dem Interpolationssatz von Riesz-Thorin (vgl. [72]) folgt:

$$||(P - P_1)^n||_{2\to 2} \le ||(P - P_1)^n||_{1\to 1}^{\frac{1}{2}} ||(P - P_1)^n||_{\infty\to\infty}^{\frac{1}{2}}. \tag{3.1}$$

Die Behauptung folgt dann mit Korollar 2.2.1.

□

Wir kommen nun zum wichtigsten Satz dieses Kapitels:

Satz 3.1.1 *Sei ξ_1, ξ_2, ... eine stationäre MK mit beliebigem Zustandsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \pi)$. Angenommen, $\exists \alpha > 0$, sodass*

$$\sup_{\omega, \tilde{\omega}, A} |p(\omega, A) - p(\tilde{\omega}, A)| \le 1 - \alpha. \tag{3.2}$$

Sei zudem X eine $\sigma(\xi_2)$-messbare ZVe mit Werten in $\mathbb{C}$ und $V(|X|) < \infty$. Dann gilt:

$$E(V(X|\,\xi_1, \xi_3)) \ge \frac{1}{16 + 4\alpha} \alpha^2 \cdot V(X). \tag{3.3}$$

Dabei steht die linke Seite der Gleichung für den Erwartungswert der bedingten Varianz von X gegeben ξ_1 und ξ_3. Die bedingte Varianz von X ist dabei definiert als die Varianz von X bezüglich des bedingten Wmaßes $P(\cdot|\xi_1, \xi_3)$ (vgl. [5], S. 77).

Bemerkung : Die hier für die Abschätzung verwendete Technik geht im Wesentlichen auf Statulevičius [66] zurück, der diesen Satz für abzählbares Ω beweist. Für die Verallgemeinerung des Beweises auf beliebige Zustandsräume sind noch ein paar maßtheoretische Argumente nötig. Der ziemlich technische Beweis soll hier erbracht werden, da sich zum einen interessante Folgerungen aus diesem Satz ergeben. Zum anderen ist die Vorgehensweise in gewisser Hinsicht stabil, sodass sie für den Beweis eines weiteren Satzes benutzt werden kann, wie wir gleich sehen werden. Interessant dabei ist, dass die verwendete Methode des "maximal coupling" [68] bzw. "basic coupling" [10] in der Literatur häufig Wassertein [71] zugeschrieben wird.

Beweis: Der Beweis erfolgt im Wesentlichen in zwei Schritten. Wir zeigen für reellwertige ZVen die Gültigkeit der Ungleichungen

$$E(V(X|\,\xi_1, \xi_3)) \geq \frac{1}{4}\,\alpha\, E(V(X|\,\xi_1)) \tag{3.4}$$

und

$$E(V(X|\,\xi_1)) \geq \frac{1}{4+\alpha}\,\alpha\, V(X). \tag{3.5}$$

3.5 eingesetzt in 3.4 liefert dann die Behauptung des Satzes für reellwertige ZVen. Die Verallgemeinerung auf komplexwertige ZVen folgt dann aus der Gleichheit

$$V(X) = V(Re(X)) + V(Im(X)).$$

Nach den Voraussetzungen ist X $\sigma(\xi_2)$-messbar. Nach dem Faktorisierungssatz (vgl. [34]) gilt:

$$X = \tilde{X} \circ \xi_2,$$

wobei $\tilde{X}$ eine $(\Omega, \mathcal{F}) - (\mathbb{R}, \mathcal{B})$-messbare Funktion ist.
Seien im folgenden m^1 ein Median der ZVe $\tilde{X}$ bezüglich des Maßes $p(\omega_1, \cdot)$, d.h.

$$p(\omega_1, \{\tilde{X} \leq m^1\}) \geq \frac{1}{2} \leq p(\omega_1, \{\tilde{X} \geq m^1\}),$$

$$A_1 := \{\xi_1 = \omega_1\}, \quad M^{13} := E(X|\, A_1 \cap A_3),$$

$$H^1 \subseteq \{\omega \in \Omega : \tilde{X}(\omega) \leq m^1\}, \tag{3.6}$$

wobei H^1 ohne Einschränkung der Allgemeinheit so gewählt werden kann, dass $p(\omega_1, H^1) = \frac{1}{2}$ (ansonsten erweitert man den zugrundeliegenden Wraum). Sei π die auf $(\Omega, \mathcal{F})$ definierte stationäre Startverteilung und p_{ω_1} das auf dem Maßraum $(\Omega^\infty, \mathcal{F}^\infty, \tilde{P})$ eindeutig bestimmte Wmaß mit $p_{\omega_1}(A) = \tilde{P}(A|\, \xi_1 = \omega_1)$. Dann ist

$$\xi_2(p_{\omega_1}) = p(\omega_1, \,\cdot) \tag{3.7}$$

das Bildmaß von p_{ω_1} unter ξ_2. Es gilt:

$$E((V(X|\,\xi_1, \xi_3)) \overset{Fubini}{=} E_\pi(E_{p_{\omega_1}}(V(X|\,A_1, \xi_3))). \tag{3.8}$$

Um den letzten Ausdruck abzuschätzen, betrachten wir zunächst folgenden Term:

$$
\begin{aligned}
V(X|\,A_1) &\overset{Trafo}{=} \int\limits_{\Omega} \left(\tilde{X}(\omega_2) - \int\limits_{\Omega} \tilde{X}(\omega_2) p(\omega_1, d\omega_2) \right)^2 p(\omega_1, d\omega_2) \\
&= E_{p(\omega_1,\,\cdot)} \left(\left(\tilde{X} - E_{p(\omega_1,\,\cdot)}(\tilde{X}) \right)^2 \right) \leq E_{p(\omega_1,\,\cdot)} \left((\tilde{X} - m^1)^2 \right) \\
&= E_{p(\omega_1,\,\cdot)} \left(1_{H^1} \cdot (\tilde{X} - m^1)^2 \right) + E_{p(\omega_1,\,\cdot)} \left(1_{(H^1)^c} \cdot (\tilde{X} - m^1)^2 \right).
\end{aligned} \tag{3.9}
$$

Wir zerlegen nun Ω_3 in $\Omega_3 = \underbrace{\{\omega_3 :\, M^{13} \geq m^1\}}_{L_{\omega_1}} \cup \underbrace{\{\omega_3 :\, M^{13} < m^1\}}_{(L_{\omega_1})^c}$ Wegen 3.8 gilt:

$$
\begin{aligned}
&2E_{p_{\omega_1}}(V(X|\,A_1, \xi_3)) \\
&\geq \int\limits_{H^1} \int\limits_{L_{\omega_1}} (M^{13} - m^1)^2 p(\omega_1, d\omega_2) p(\omega_2, d\omega_3) \\
&+ \int\limits_{H^1} \int\limits_{L_{\omega_1}} (\tilde{X}(\omega_2) - m^1)^2 p(\omega_1, d\omega_2) p(\omega_2, d\omega_3) \\
&+ 2 \int\limits_{H^{1\,c}} \int\limits_{L_{\omega_1}} (\tilde{X}(\omega_2) - M^{13})^2 p(\omega_1, d\omega_2) p(\omega_2, d\omega_3) \\
&+ 2 \int\limits_{H^1} \int\limits_{L_{\omega_1}{}^c} (\tilde{X}(\omega_2) - M^{13})^2 p(\omega_1, d\omega_2) p(\omega_2, d\omega_3) \\
&+ \int\limits_{H^{1\,c}} \int\limits_{L_{\omega_1}{}^c} (m^1 - M^{13})^2 p(\omega_1, d\omega_2) p(\omega_2, d\omega_3) \\
&+ \int\limits_{H^{1\,c}} \int\limits_{L_{\omega_1}{}^c} (\tilde{X}(\omega_2) - m^1)^2 p(\omega_1, d\omega_2) p(\omega_2, d\omega_3) \\
&\geq \int\limits_{L_{\omega_1}} (M^{13} - m^1)^2 \underbrace{\int\limits_{H^1} \frac{p(\omega_1, d\omega_2) p(\omega_2, d\omega_3)}{p(\omega_1, H^1)}}_{Q_{H^1}(\omega_1, d\omega_3)} p(\omega_1, H^{1\,c}) \\
&+ \int\limits_{H^{1\,c}} \int\limits_{L_{\omega_1}} (\tilde{X}(\omega_2) - M^{13})^2 p(\omega_1, d\omega_2) p(\omega_2, d\omega_3) \\
&+ \int\limits_{H^{1\,c}} \int\limits_{L_{\omega_1}{}^c} (\tilde{X}(\omega_2) - m^1)^2 p(\omega_1, d\omega_2) p(\omega_2, d\omega_3) \\
&+ \int\limits_{L_{\omega_1}{}^c} (m^1 - M^{13})^2 \underbrace{\int\limits_{H^{1\,c}} \frac{p(\omega_1, d\omega_2) p(\omega_2, d\omega_3)}{p(\omega_1, H^{1\,c})}}_{Q_{H^{1\,c}}(\omega_1, d\omega_3)} p(\omega_1, H^1) \\
&+ \int\limits_{H^1} \int\limits_{L_{\omega_1}{}^c} (\tilde{X}(\omega_2) - M^{13})^2 p(\omega_1, d\omega_2) p(\omega_2, d\omega_3) \\
&+ \int\limits_{H^1} \int\limits_{L_{\omega_1}} (\tilde{X}(\omega_2) - m^1)^2 p(\omega_1, d\omega_2) p(\omega_2, d\omega_3).
\end{aligned} \tag{3.10}
$$

Im Folgenden soll der Ausdruck 3.10 geeignet abgeschätzt werden. Hierzu wird der Hahnsche Zerlegungssatz benötigt, der in fast jedem Standardwerk über Maßtheorie nachgelesen werden kann (vgl. z.B. Elstrodt [26]). Die letzte Zeile von 3.10 ist vom Typ

$$\int_\Omega f\,d\mu + \int_\Omega g\,d\vartheta,$$

mit Wmaßen μ und ϑ auf dem Maßraum $(\Omega, \mathcal{F})$ und integrierbaren Funktionen f und g mit $f \geq 0$, $g \geq 0$. Für solche Integrale soll nun gezeigt werden, dass gilt:

$$\int_\Omega f\,d\mu + \int_\Omega g\,d\vartheta \geq \int_\Omega (f+g)\,d\mu \wedge \vartheta, \tag{3.11}$$

wobei jetzt noch zu klären ist, wie $\mu \wedge \vartheta$ definiert ist.
Sei $\eta = \mu - \vartheta$. Dann ist η ein signiertes Maß, worauf der Hahnsche Zerlegungssatz anwendbar ist, d.h. Ω läßt sich bezüglich η in eine messbare positive Menge A und eine negative Menge A^c zerlegen, sodass gilt:

$$\eta(B) = \underbrace{\eta(A \cap B)}_{\geq 0} + \underbrace{\eta(A^c \cap B)}_{\leq 0} \quad \text{für alle } B \in \mathcal{F}.$$

Damit ist $\mu|_A \geq \vartheta|_A$ und $\mu|_{A^c} \leq \vartheta|_{A^c}$. Wir definieren daher:

$$\mu \wedge \vartheta(B) := \vartheta(A \cap B) + \mu(A^c \cap B).$$

Man rechnet leicht nach, dass das so definierte $\mu\wedge\vartheta$ tatsächlich ein Maß ist und dass dieses Maß die Ungleichung 3.11 erfüllt (man zerlege Ω in A und A^c und benutze die Definition von $\mu\wedge\vartheta$). Wenden wir uns mit der Bezeichnung $Z_{H^1}(\omega_1, \omega_2) = p(\omega_2, \cdot) \wedge Q_{H^1}(\omega_1, \cdot)$ wieder der letzten Zeile aus 3.10 zu und benutzen die Ungleichung

$$a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}(a+b)^2, \tag{3.12}$$

dann folgt:

$$\begin{aligned}
&2E_{p_{\omega_1}}(V(X|\, A_1, \xi_3)) \\
&\geq \int_{H^{1c}} \int_{L_{\omega_1}} \frac{1}{2}(\tilde{X}(\omega_2) - m^1)^2 dZ_{H^1}(\omega_1, \omega_2) p(\omega_1, d\omega_2) \\
&+ \int_{H^{1c}} \int_{L^c_{\omega_1}} (\tilde{X}(\omega_2) - m^1)^2 p(\omega_1, d\omega_2) p(\omega_2, d\omega_3) \\
&+ \int_{H^1} \int_{L^c_{\omega_1}} \frac{1}{2}(\tilde{X}(\omega_2) - m^1)^2 dZ_{H^{1c}}(\omega_1, \omega_2) p(\omega_1, d\omega_2) \\
&+ \int_{H^1} \int_{L_{\omega_1}} (\tilde{X}(\omega_2) - m^1)^2 p(\omega_1, d\omega_2) p(\omega_2, d\omega_3).
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Von hier ausgehend bekommen wir

$$\begin{aligned}
&2E_{p_{\omega_1}}(V(X|\, A_1, \xi_3)) \\
&\geq \int_{H^{1c}} \int_{\Omega_3} \frac{1}{2}(\tilde{X}(\omega_2) - m^1)^2 dZ_{H^1}(\omega_1, \omega_2) p(\omega_1, d\omega_2) \\
&+ \int_{H^1} \int_{\Omega_3} \frac{1}{2}(\tilde{X}(\omega_2) - m^1)^2 dZ_{H^{1c}}(\omega_1, \omega_2) p(\omega_1, d\omega_2).
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Mit Hilfe des Hahnschen Zerlegungssatzes bekommen wir jedoch

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_3} Z_{H^1}(\omega_1,\omega_2)(d\omega_3) &= \int_{\Omega_3} p(\omega_2,d\omega_3)\wedge Q_{H^1}(\omega_1,d\omega_3) \\
&= \int_{A^{\omega_2}_{\omega_1}} Q_{H^1}(\omega_1,d\omega_3) + \int_{(A^{\omega_2}_{\omega_1})^c} p(\omega_2,d\omega_3) = Q_{H^1}(\omega_1,A^{\omega_2}_{\omega_1}) + p(\omega_2,(A^{\omega_2}_{\omega_1})^c) \\
&\overset{3.10}{=} \frac{1}{p(\omega_1,H^1)}\int_{H^1} p(\omega_1,d\omega)p(\omega,A^{\omega_2}_{\omega_1}) + p(\omega_2,(A^{\omega_2}_{\omega_1})^c) \\
&\geq \frac{1}{p(\omega_1,H^1)}\cdot\inf_{\tilde\omega}\int_{H^1} p(\omega_1,d\omega)p(\tilde\omega,A^{\omega_2}_{\omega_1}) + p(\omega_2,(A^{\omega_2}_{\omega_1})^c) \\
&= \inf_{\tilde\omega} p(\tilde\omega,A^{\omega_2}_{\omega_1}) + p(\omega_2,(A^{\omega_2}_{\omega_1})^c) \geq \inf_{\tilde\omega,\omega,A}(p(\tilde\omega,A)+p(\omega,A^c)) \\
&= 1-\sup_{\tilde\omega,\omega,A}|\,(p(\tilde\omega,A)-p(\omega,A))\,| = \alpha. \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

Die Rechnung für $\int_{\Omega_3} Z_{H^{1c}}(\omega_1,\omega_2)(d\omega_3)$ ist die gleiche und damit erhalten wir unter Berücksichtigung von 3.9, dass

$$E_{p_{\omega_1}}(V(X|\,A_1,\xi_3)) \geq \frac{1}{4}\alpha EV(X|A_1). \qquad (3.16)$$

Da die Rechnung für beliebige ω_1 gilt, folgt:

$$EV(X|\xi_1,\xi_3) \geq \frac{1}{4}\alpha EV(X|\xi_1). \qquad (3.17)$$

Damit ist 3.4 bewiesen. Der nun folgende Beweis für 3.5 benutzt im Wesentlichen die gleiche Technik wie der obige Beweis. Er soll hier jedoch der Vollständigkeit halber erbracht werden. Sei im Folgenden m ein Median der Zufallsvariablen $E(X|\,\xi_1)$, also gelte

$$p(\{\omega\in\Omega_1:\ E(X|\,\xi_1=\omega)\leq m\}) \geq \frac{1}{2} \leq p(\{\omega\in\Omega_1:\ E(X|\,\xi_1=\omega)\geq m\}) \qquad (3.18)$$

und sei

$$M^\omega := E(X|\,\xi_1=\omega), \qquad H\subseteq\{\omega\in\Omega:\ M^\omega\leq m,\}\text{ sodass }\pi(H)=\frac{1}{2}. \qquad (3.19)$$

Hier setzen wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit einen nicht-atomaren Wraum voraus (andernfalls kann der Wraum zu einem solchen erweitert werden). Es gilt:

$$\begin{aligned}
V(E(X|\,\xi_1)) &= E((E(X|\,\xi_1)-E(X))^2) \\
&\leq E((E(X|\,\xi_1)-m)^2) = \int_\Omega (M^\omega-m)^2\,\pi(d\omega).
\end{aligned}$$

Um 3.5 zu zeigen, muss

$$\begin{aligned}
E(V(X|\,\xi_1)) &= \int_{\Omega_1} V(X|\,\xi_1=\omega_1)\,\pi(d\omega_1) \\
&\overset{vgl.\ 3.9}{=} \int_{\Omega_2}\int_{\Omega_1}(\tilde X(\omega_2)-M^{\omega_1})^2\pi(d\omega_1)p(\omega_1,d\omega_2) \qquad (3.20)
\end{aligned}$$

noch geeignet abgeschätzt werden. Dafür spalten wir die Integration über Ω_2 in eine Integration über $\{\tilde{X} \geq m\}$ und eine über $\{\tilde{X} < m\}$ auf. Dies ergibt:

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{\{\tilde{X}\geq m\}} \int\limits_{\Omega_1} (M^{\omega_1} - \tilde{X}(\omega_2))^2 \pi(d\omega_1) p(\omega_1, d\omega_2) \\
&\overset{3.19}{\geq} \int\limits_{\{\tilde{X}\geq m\}} \int\limits_{H^c} (M^{\omega_1} - \tilde{X}(\omega_2))^2 \pi(d\omega_1) p(\omega_1, d\omega_2) \\
&\qquad + \int\limits_{\{\tilde{X}\geq m\}} (\tilde{X}(\omega_2) - m)^2 \cdot \underbrace{\frac{1}{\pi(H)} \int\limits_H \pi(d\omega_1) p(\omega_1, d\omega_2)}_{K(d\omega_2)} \cdot \underbrace{\pi(H)}_{=\pi(H^c)} \\
&\overset{3.12\,u.\,3.11}{\geq} \frac{1}{2} \int\limits_{H^c} (M^{\omega_1} - m)^2 \pi(d\omega_1) \cdot \int_{\{\tilde{X}\geq m\}} Z_{\omega_1}(d\omega_2).
\end{aligned} \tag{3.21}
$$

Dabei ist $Z_{\omega_1}(A) := (K \wedge p(\omega_1, \cdot))(A)$. Die Integration über $\{\tilde{X} < m\}$ liefert unmittelbar:

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{\{\tilde{X}< m\}} \int\limits_{\Omega_1} (M^{\omega_1} - \tilde{X}(\omega_2))^2 \pi(d\omega_1) p(\omega_1, d\omega_2) \\
&\geq \frac{1}{2} \int\limits_{H^c} (M^{\omega_1} - m)^2 \pi(d\omega_1) \cdot \int_{\{\tilde{X}< m\}} Z_{\omega_1}(d\omega_2).
\end{aligned} \tag{3.22}
$$

Damit folgt jedoch wie schon beim ersten Teil der Abschätzung:

$$
EV(X|\xi_1) \geq \frac{1}{2}\alpha \int\limits_{H^c} (M^{\omega_1} - m)^2 \pi(d\omega_1). \tag{3.23}
$$

Andererseits liefert uns die Abschätzung

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{\{\tilde{X}< m\}} \int\limits_{\Omega_1} (M^{\omega_1} - \tilde{X}(\omega_2))^2 \pi(d\omega_1) p(\omega_1, d\omega_2) \\
&\geq \int\limits_{\{\tilde{X}< m\}} \int\limits_{H} (M^{\omega_1} - \tilde{X}(\omega_2))^2 \pi(d\omega_1) p(\omega_1, d\omega_2) \\
&\qquad + \int\limits_{\{\tilde{X}< m\}} (\tilde{X}(\omega_2) - m)^2 \underbrace{\int\limits_{H^c} \frac{p(\omega_1, d\omega_2)}{\pi(H^c)} \pi(d\omega_1)}_{\tilde{K}(d\omega_2)} \pi(H) \\
&\overset{3.12\,u.\,3.11}{\geq} \frac{1}{2} \int\limits_{H} (M^{\omega_1} - m)^2 \pi(d\omega_1) \cdot \int_{\{\tilde{X}< m\}} \tilde{Z}_{\omega_1}(d\omega_2),
\end{aligned} \tag{3.24}
$$

wobei $\tilde{Z}_{\omega_1}(A) := (\tilde{K} \wedge p(\omega_1, \cdot))(A)$, zusammen mit der Abschätzung

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{\{\tilde{X}\geq m\}} \int\limits_{\Omega_1} (M^{\omega_1} - \tilde{X}(\omega_2))^2 \pi(d\omega_1) p(\omega_1, d\omega_2) \\
&\overset{3.19}{\geq} \int\limits_{\{\tilde{X}\geq m\}} \int\limits_{H} (M^{\omega_1} - m)^2 \pi(d\omega_1) p(\omega_1, d\omega_2) \\
&\geq \frac{1}{2} \int\limits_{H} (M^{\omega_1} - m)^2 \pi(d\omega_1) \cdot \int_{\{\tilde{X}\geq m\}} \tilde{Z}_{\omega_1}(d\omega_2),
\end{aligned} \tag{3.25}
$$

dass

$$EV(X|\xi_1) \geq \frac{1}{2}\alpha \int_H (M^{\omega_1} - m)^2 \pi(d\omega_1).$$

Dies zusammen mit 3.23 liefert dann:

$$EV(X|\xi_1) \geq \frac{1}{4}\alpha \int_\Omega (M^{\omega_1} - m)^2 \pi(d\omega_1) \overset{3.20}{\geq} \frac{1}{4}\alpha V E(X|\xi_1). \tag{3.26}$$

Mit Hilfe einer kurzen Rechnung erhält man:

$$V(E(X|\,\xi_1,)) = V(X) - E(V(X|\,\xi_1)).$$

Dies eingesetzt in 3.26 und aufgelöst nach $V(E(X|\,\xi_1))$ liefert 3.5 und damit die Behauptung des Theorems.

□

3.2 Folgerungen

Korollar 3.2.1 *Unter den Voraussetzungen des Satzes 3.1.1 gilt:*

$$V(E(X|\xi_1, \xi_3)) \leq (1 - \frac{\alpha^2}{16 + 4\alpha})V(X). \tag{3.27}$$

Beweis: Addiert man in der Ungleichung 3.3 auf beiden Seiten $V(E(X|\xi_1, \xi_3))$ und benutzt wieder

$$V(E(X|\,\xi_1, \xi_3)) = V(X) - E(V(X|\,\xi_1, \xi_3)),$$

so erhält man:

$$V(X) \geq \frac{\alpha^2}{16 + 4\alpha} V(X) + V(E(X|\xi_1, \xi_3)).$$

Umformen nach $V(X)$ gibt das Gewünschte.

□

Das nächste Lemma hilft uns, weitere Schlussfolgerungen zu ziehen:

Lemma 3.2.2

$$V(E(X|\,\xi_j)) \leq V(E(X|\,\xi_1, \xi_3)),\ j \in \{1, 3\}.$$

Beweis: Mit den Rechenregeln für bedingte Erwartungen und Benutzen der Jensenschen Ungleichung für bedingte Erwartungen bekommen wir:

$$\begin{aligned} V(E(X|\,\xi_j)) &= E(E(E(X|\xi_1, \xi_3)|\xi_j)^2) - (EX)^2 \\ &\leq E(E(E(X|\xi_1, \xi_3)^2|\xi_j)) - (EX)^2 \\ &= V(E(X|\,\xi_1, \xi_3)). \end{aligned} \tag{3.28}$$

□

Dies zusammen mit 3.27 liefert dann:

$$V(E(X|\,\xi_j)) \leq (1 - \frac{\alpha^2}{16 + 4\alpha})V(X).$$

Benutzt man nun die Operatorschreibweise aus dem vorherigen Kapitel, so folgt

$$||Pf - P_1 f||_2^2 \leq (1 - \frac{{\alpha^*}^2}{16 + 4\alpha})||f - P_1 f||_2^2,$$

bzw.

$$||P^* f - P_1 f||_2^2 \leq (1 - \frac{\alpha^2}{16 + 4\alpha})||f - P_1 f||_2^2.$$

Dies ist äquivalent zu

$$||P|_{L_0^2}||_2 \leq \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{16 + 4\alpha}},$$

bzw.

$$||P^*|_{L_0^2}||_2 \leq \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{16 + 4\alpha}},$$

wobei $L_0^2 := \{f \in L^2 : P_1 f = 0\}$. Dies wiederum bedeutet, dass sowohl P als auch P^* echte Kontraktionen auf L_0^2 sind. Diese Aussage ist stärker als die bekannte Aussage, dass mit P quasi-kompakt automatisch P^* quasi-kompakt folgt, was aus den bekannten Sätzen über die Spektren adjungierter Operatoren folgt (vgl. z.B. [72]).

Um den Satz, welcher dieses Kapitel abschließen soll, zu formulieren, werden nun die dafür notwendigen Definitionen eingeführt.

Sei $\mathcal{L} := \bigcup_{i,j \in \mathbb{Z}} \sigma(\xi_i, \xi_j)$ der Raum aller $\sigma(\xi_i, \xi_j)$-messbaren Funktionen, $i, j \in \mathbb{Z}$. Sei P_π das schon zu Beginn dieses Kapitels erwähnte eindeutig bestimmte Wmaß auf $(\Omega^\infty, \mathcal{F}^\infty)$ mit

$$P_\pi(A_1 \times A_2 \times A_3 \times \Omega \times \cdots) = \int_{A_1} \pi(dx_1) \int_{A_2} p(x_1, dx_2) p(x_2, A_3).$$

Der auf $\mathcal{L}$ lebende Operator $\tilde{P}$ sei nun wie folgt definiert:

$$\tilde{P} : \sigma(\xi_i, \xi_j) \ni f(\xi_i, \xi_j) \to E(f(\xi_i, \xi_j) | \xi_{i-1}, \xi_{j+1}), \;\; i \leq j, \;\; i, j \in \mathbb{Z}.$$

Sei $\mathcal{L}_0^2(P_\pi) := \{f \in \mathcal{L}^2(P_\pi) : E_{P_\pi} f = 0\}$. Dann gilt folgender Satz:

Satz 3.2.3 *Es gelten die obigen Bezeichnungen. Für $\tilde{P}$ eingeschränkt auf $\mathcal{L}_0^2(P_\pi)$ gilt dann:*

$$||\tilde{P}||_2 \leq \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{16 + 4\alpha}}.$$

Beweis: Der Beweis von Satz 3.1.1 ist stabil unter den hier gemachten Bedingungen und kann daher bei Anpassung der Notation übernommen werden.

□

Kapitel 4

Isoperimetrische Konstanten und Spektrallücken

In diesem Kapitel wird der Zusammenhang zwischen L^2-Spektrallücken und der im Folgenden definierten isoperimetrischen Konstanten k_n dargestellt. Die isoperimetrische Konstante k (Definition siehe Abschnitt 4.1) wurde von Lawler und Sokal [48] im Fall reversibler MKen verwendet, um die Größe von L^2-Spektrallücken abzuschätzen. In Abschnitt 4.1 werden einige Eigenschaften der den iterierten MOen P^n zugeordneten k_n beschrieben und eine weitere Konstante K eingeführt, um periodisches Verhalten sachgemäß beschreiben zu können. Aufbauend auf den grundlegenden Eigenschaften der isoperimetrischen Konstanten und der Arbeit von Lawler und Sokal [48] wird dann eine Bedingung hergeleitet, deren wesentliche Aussage es ist, dass P genau dann eine $L^2(\pi)$-Spektrallücke hat, wenn die den iterierten Operatoren P^n zugeordneten Konstanten k_n von Null weg beschränkt bleiben. In Abhängigkeit der Größe dieser Lücke bei 0 kann dann die Größe der Spektrallücke abgeschätzt werden (siehe Abschnitt 4.2). Als Anwendungsbeispiel für diesen Satz wird gezeigt, dass aus gleichgradiger Konvergenz in Totalvariation die Existenz einer L^2-Spektrallücke folgt. Darüber hinaus lässt sich mit seiner Hilfe eine neue hinreichende Bedingung für die Existenz einer L^2-Spektrallücke herleiten, die in Kapitel 6 im Zusammenhang mit der geometrischen Ergodizität noch näher diskutiert wird. In einigen Fällen ist es jedoch einfacher, mit einer anderen Folge isoperimetrischer Konstanten, nämlich $k_{P^{*n}P^n}$, zu arbeiten, da diese Folge sich als monoton in n erweist, die assoziierten Operatoren $P^{*^n}P^n$ selbstadjungiert sind und damit die von Lawler und Sokal entwickelte Theorie anwendbar ist. Auf diese Weise zeigt sich, dass die Existenz einer L^2-Spektrallücke äquivalent ist zur exponentiellen Konvergenz der isoperimetrischen Konstanten k_n und $k_{P^{*n}P^n}$ gegen 1 (vgl. 4.3). Das Kapitel schließt ab mit der Betrachtung reversibler MKen. Es zeigt sich, dass in diesem Fall die Existenz einer Spektrallücke äquivalent ist zu der Bedingung $0 < k \leq K < 2$ (vgl. Abschnitt 4.4), wobei die Bedingung $K < 2$ periodisches Verhalten der Kette verbietet.

4.1 Definition und Eigenschaften isoperimetrischer Konstanten

Sei im Folgenden $\xi_1, \xi_2, \dots$ eine MK mit stationärem Wmaß π und zugehörigem Übergangskern $p(\cdot, \cdot)$. Soweit nichts anderes angegeben ist, sind dies die Voraussetzungen für die nächsten Lemmata und Sätze. Wir definieren nun eine für unsere

Zwecke wichtige Konstante (vgl. Lawler und Sokal [48]):

$$k(A) := \frac{1}{\pi(A)\pi(A^c)} \int_A p(x, A^c)\pi(dx).$$

Diese Größe wird auch isoperimetrische Konstante genannt [48]. Für diese Konstante werden nun mehrere Lemmata bewiesen:

Lemma 4.1.1 *Unter den oben gemachten Voraussetzungen gilt:*

$$k(A) = k(A^c).$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\int_A p(x, A^c)\pi(dx) &= \int_\Omega p(x, A^c)\pi(dx) - \int_{A^c} p(x, A^c)\pi(dx) \\
&= \pi(A^c) - (\pi(A^c) - \int_{A^c} p(x, A)\pi(dx)) \\
&= \int_{A^c} p(x, A)\pi(dx).
\end{aligned}$$

□

Lemma 4.1.2 *Unter den obigen Voraussetzungen gilt:*

$$0 \leq k(A) \leq 2. \tag{4.1}$$

Beweis: Die linke Seite dieser Ungleichung ist klar. Nun zur rechten Seite: Angenommen, die Ungleichung ist nicht wahr. Dann existiert ein $A \in \mathcal{F}$ mit $k(A) > 2$ und damit

$$\int_A p(x, A^c)\pi(dx) > 2\pi(A)\pi(A^c).$$

Da $p(x, A^c)$ nur Werte zwischen 0 und 1 annimmt, existiert ein α mit $0 \leq \alpha \leq 1$, sodass

$$\int_A p(x, A^c)\pi(dx) = \alpha\pi(A). \tag{4.2}$$

Zusammen mit der obigen Ungleichung folgt daraus sofort:

$$\alpha > 2\pi(A^c). \tag{4.3}$$

Aus dem vorherigen Lemma folgt genauso:

$$\int_{A^c} p(x, A)\pi(dx) > 2\pi(A)\pi(A^c).$$

Wie schon zuvor existiert auch hier ein β mit $0 \leq \beta \leq 1$, sodass

$$\int_{A^c} p(x, A)\pi(dx) = \beta\pi(A^c)$$

und damit

$$\beta > 2\pi(A). \tag{4.4}$$

Zusammen mit dem Vorherigen folgt dann:

$$2 \geq \alpha + \beta > 2\pi(A) + 2\pi(A^c) = 2. \tag{4.5}$$

Daher ist die Annahme falsch und somit die Behauptung bewiesen.

□

Korollar 4.1.3 *Falls $K := \sup_{A\in\mathcal{F}} k(A) = 2$, dann gilt für jede Folge A_n mit der Eigenschaft $k(A_n) \to 2$, dass $\pi(A_n) \to \frac{1}{2}$.*

Beweis: Den Mengen A_n und A_n^c können entsprechend (4.2) α_n und β_n zugeordnet werden. Wegen (4.5) folgt dann aus $k(A_n) \to 2$ sowohl $\alpha_n \to 1$ als auch $\beta_n \to 1$. Hieraus lässt sich dann mit Hilfe von (4.3) und (4.4) $\pi(A_n) \to \frac{1}{2}$ schließen.

□

Lemma 4.1.4 *Falls*

$$k := \inf_{A\in\mathcal{F}} k(A) = 0,$$

dann folgt:

$$k_n := \inf_{A\in\mathcal{F}} k_n(A) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N},$$

wobei $k_n(A) := \frac{1}{\pi(A)\pi(A^c)} \int_A p^n(x, A^c)\pi(dx)$.

Beweis:

$$\begin{aligned}
\pi(A)\pi(A^c)k_n(A) &= \int_A p^n(x, A^c)\pi(dx) = \int_A \int_A p(x, dy)p^{n-1}(y, A^c)\pi(dx) \\
&+ \int_A \pi(dx) \int_{A^c} p(x, dy)p^{n-1}(y, A^c) \\
&\le (k_{n-1}(A) + k(A))\pi(A)\pi(A^c) \le \ldots \le n\, k(A)\pi(A)\pi(A^c).
\end{aligned}$$

□

Lemma 4.1.5 *Angenommen, es existiert $n_0 \in \mathbb{N}, \epsilon > 0$, sodass $k_n \ge \epsilon \forall n \ge n_0$. Dann gilt:*

$$k_i \ge \frac{\epsilon}{n_0} \ \forall i \in \mathbb{N}.$$

Beweis: Für k_1 folgt die Abschätzung direkt aus dem Beweis des vorherigen Lemmas. Für die übrigen k_i, $i \in \{2, \ldots, n_0 - 1\}$ kann man das so sehen:

$$\int_A p^i(x, A^c) \ge \frac{1}{2} \int_A p^{2i}(x, A^c) \ge \ldots \ge \frac{1}{2^{[\log_2 n_0]}} \int_A p^{i2^{[\log_2 n_0]}}(x, A^c).$$

Da

$$i2^{[\log_2 n_0]} \ge n_0 \ \forall i \in \{2, \ldots, n_0 - 1\}$$

und

$$2^{[\log_2 n_0]} \le n_0,$$

folgt die Behauptung.

□

Lemma 4.1.6 *Es gelten wieder die zu Beginn des Abschnitts 4.1 gemachten Bedingungen. Es gelte zudem $K = 2$. Dann folgt: $k_2 = 0$.*

Beweis: Wähle eine Folge A_n mit $k(A_n) \to 2$. Wegen Korollar 4.1.3 wissen wir, dass dann $\pi(A_n) \to \frac{1}{2}$ folgt. Dies liefert:

$$\begin{aligned}
\pi(A_n)\pi(A_n^c)k_2(A_n) &= \int_{A_n}\int_{A_n} \pi(dx)p(x,dy)p(y,A_n^c) \\
&+ \int_{A_n}\int_{A_n^c} \pi(dx)p(x,dy)p(y,A_n^c) \\
&\leq \int_{A_n} \pi(dx)p(x,A_n) + \int_{A_n^c} \pi(dx)p(x,A_n^c) \\
&= \pi(A_n) - \int_{A_n^c} \pi(dx)p(x,A_n) + \pi(A_n^c) \\
&\quad - \int_{A_n} \pi(dx)p(x,A_n^c) \\
&= 1 - 2\int_{A_n} \pi(dx)p(x,A_n^c).
\end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich sofort mit dem zuvor Gezeigten:

$$k_2(A_n) \leq \frac{1}{\pi(A_n)\pi(A_n^c)} - 2k(A_n) \to 0.$$

□

Lemma 4.1.7 *Es gelten wieder die zu Beginn des Abschnitts 4.1 gemachten Bedingungen. Sei darüber hinaus $(\Omega, \mathcal{F}, \pi)$ ein Maßraum, sodass $\inf_{A\in\mathcal{F}:\pi(A)>0} \pi(A) = 0$. Dann gilt:*

$$k \leq 1.$$

Beweis: *Nach Voraussetzung existiert eine Folge $A_n \in \mathcal{F}$ mit $\pi(A_n) \to 0$. Dann gilt offensichtlich:*

$$k(A_n) = \frac{1}{\pi(A_n^c)} \int_{A_n} p(x, A_n^c) \frac{\pi(dx)}{\pi(A_n)} \leq \frac{1}{\pi(A_n^c)}.$$

Limesbildung liefert die Behauptung.

□

4.2 Existenz von L^2-Spektrallücken im allgemeinen Fall

Es soll zunächst eine notwendige Bedingung für eine $L^2(\pi)$-Spektrallücke für Markov-Operatoren P induziert durch obige MKen hergeleitet werden.

Lemma 4.2.1 *Sei $\xi_1, \xi_2, \ldots$ eine stationäre MK mit stationärem Wmaß π, Übergangskern $p(\cdot,\cdot)$ und Zustandsraum $(\Omega, \mathcal{F})$. Dann ist dafür, dass der durch diese Kette induzierte Markov-Operator P eine Spektrallücke in dem Sinne besitzt, dass*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : ||(P - P_1)^{n_0}||_2 < 1,$$

folgende Bedingung notwendig:

$$0 < \inf_{n\in\mathbb{N}} k_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \inf_{A\in\mathcal{F}} k_n(A). \tag{4.6}$$

Beweis: Wir betrachten die folgende Funktion:

$$f = \sqrt{\pi(A)\pi(A^c)}(\frac{1}{\pi(A)}1_A - \frac{1}{\pi(A^c)}1_{A^c}),\ A \in \mathcal{F}. \tag{4.7}$$

Man rechnet sofort nach, dass gilt:

$$E_\pi f = 0,\ \ ||f||_2 = 1.$$

$$\begin{aligned} ||Pf||_2^2 &= \pi(A)\pi(A^c)\int_\Omega \left(\frac{p(x,A)}{\pi(A)} - \frac{p(x,A^c)}{\pi(A^c)}\right)^2 \pi(dx) \\ &= \pi(A)\pi(A^c)\left(\frac{1}{\pi(A)^2}\int_\Omega p(x,A)^2\pi(dx) + \frac{1}{\pi(A^c)^2}\int_\Omega p(x,A^c)^2\pi(dx)\right. \\ &\quad \left. -2\frac{1}{\pi(A)\pi(A^c)}\int_\Omega p(x,A)p(x,A^c)\pi(dx)\right). \end{aligned} \tag{4.8}$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi(A)^2}\int_\Omega p(x,A)^2\pi(dx) &= \frac{1}{\pi(A)^2}\left(\int_A p(x,A)^2\pi(dx) + \int_{A^c} p(x,A)^2\pi(dx)\right) \\ &= \frac{1}{\pi(A)^2}\left(\int_A (1-p(x,A^c))^2\pi(dx) + \int_{A^c} p(x,A)^2\pi(dx)\right) \\ &\geq \frac{1}{\pi(A)^2}\left(\pi(A) - 2\pi(A)\pi(A^c)k(A)\right) \\ &= \frac{1}{\pi(A)}(1-2\pi(A^c)k(A)). \end{aligned} \tag{4.9}$$

Aus Symmetriegründen gilt dann wegen $k(A) = k(A^c)$:

$$\frac{1}{\pi(A^c)^2}\int_\Omega p(x,A^c)^2\pi(dx) \geq \frac{1}{\pi(A^c)}(1-2\pi(A)k(A)). \tag{4.10}$$

Zudem gilt:

$$\frac{1}{\pi(A)\pi(A^c)}\int_\Omega p(x,A)p(x,A^c)\pi(dx) \leq 2k(A). \tag{4.11}$$

Setzt man die letzten drei Ungleichungen in 4.8 ein, dann erhält man:

$$\begin{aligned} ||Pf||_2^2 &\geq \pi(A)\pi(A^c)\left(\frac{1-2\pi(A^c)k(A)}{\pi(A)} + \frac{1-2\pi(A)k(A)}{\pi(A^c)} - 4k(A)\right) \\ &= \pi(A^c) - 2\pi(A^c)^2k(A) + \pi(A) - 2\pi(A)^2k(A) - 4\pi(A)\pi(A^c)k(A) \\ &\geq 1 - k(A)\left(2\pi(A^c)^2 + 2\pi(A)^2 + 4\pi(A)\pi(A^c)\right) \\ &= 1 - 2k(A)(\pi(A)+\pi(A^c))^2 = 1-2k(A). \end{aligned} \tag{4.12}$$

Damit folgt dann

$$||P - P_1||_2 \geq \sqrt{1-2k}.$$

Genauso folgt auch

$$||P^n - P_1||_2 \geq \sqrt{1-2k_n}.$$

Dies liefert die Behauptung.

$\square$

Wir haben soeben eine notwendige Bedingung dafür gesehen, dass P auf $L^2(\pi)$ eine Spektrallücke besitzt. Damit stellt sich natürlich die Frage, ob die Bedingung auch hinreichend ist und tatsächlich zeigt sich, dass sie es ist. Um dies zu zeigen, greifen wir auf ein Resultat von Lawler und Sokal [48] zurück. Dabei lautet die für uns wesentliche Aussage für den Fall eines diskreten Markov-Prozesses (vgl. [48], Theorem 2.3):

$$\Re(\sigma(Id - (P - P_1))) \geq \frac{\kappa}{8}k^2, \tag{4.13}$$

wobei κ gegeben ist durch

$$\kappa = \inf_{\mathcal{D}} \sup_{c \in \mathbb{R}} \frac{E\left(|(X+c)^2 - (Y+c)^2|\right)}{E((X+c)^2)} \tag{4.14}$$

und $\mathcal{D}$ die Menge aller möglichen Verteilungen von u.i.v. ZVen (X, Y), welche die Varianz 1 haben, ist. In der gleichen Arbeit wurde gezeigt, dass $\kappa \geq 1$ gilt. Wendet man auf 4.13 den Spektralabbildungssatz (siehe Kapitel 1, Satz 1.2.1) mit der Funktion $f = 1 - z$ an, dann folgt hieraus unmittelbar:

$$\Re(\sigma(P - P_1)) \leq 1 - \frac{\kappa}{8}k^2.$$

Damit folgt dann auch:

$$\Re(\sigma(P^n - P_1)) \leq 1 - \frac{\kappa}{8}k_n^2.$$

Nach dieser Vorbereitung kommen wir zum zentralen Satz dieses Abschnittes:

Satz 4.2.2 *Sei $\xi_1, \xi_2, \ldots$ eine MK mit Zustandsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \pi)$, wobei π ein stationäres Startmaß der Kette sei. Sei P der assoziierte MO auf $L^2(\pi)$. Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *P hat eine Spektrallücke.*

2. $$\mathcal{M} := \left\{\epsilon > 0 : \;\; k_n > \epsilon \, \forall n \leq \left[\frac{2\pi}{\arccos(1 - \frac{\kappa}{16}\epsilon^2)}\right] + 1\right\} \neq \emptyset.$$

Ist Bedingung 2 erfüllt, so gilt:

$$\sigma(P - P_1) \subset K_{r_0}(0), \; r_0 := \inf_{\epsilon \in \mathcal{M}} (1 - \frac{\kappa}{16}\epsilon^2)^{1/([\frac{2\pi}{\arccos(1 - \frac{\kappa}{16}\epsilon^2)}]+1)}, \tag{4.15}$$

wobei $K_r(0)$ den Kreis mit Radius r und Mittelpunkt 0 bezeichne und wir den Bildbereich des arccos *auf $[0, \pi]$ einschränken.*

Beweis: In Lemma 4.2.1 wurde die Notwendigkeit einer Bedingung gezeigt, die die Bedingung 2 impliziert. Bleibt also nur noch zu zeigen, dass die zweite Bedingung auch hinreichend ist.
Nach Voraussetzung existiert $\epsilon > 0$, sodass

$$\Re(\sigma(P^n - P_1)) \leq 1 - \frac{\kappa}{8}\epsilon^2 \;\; \forall n \leq \left[\frac{2\pi}{\arccos(1 - \frac{\kappa}{16}\epsilon^2)}\right] + 1. \tag{4.16}$$

Andererseits gilt wegen des Spektralabbildungssatzes

$$\sigma(P^n - P_1) = (\sigma(P - P_1))^n. \tag{4.17}$$

Sei nun $z \in \sigma(P - P_1)$. Schreibe z in Polarkoordinaten:

$$z = re^{i\phi} = r\cos(\phi) + ir\sin(\phi),\ r \in [0,1],\ \phi \in [-\pi, \pi).$$

Schreibe im Folgenden auch $z = (r, \phi)$. Dann folgt aus 4.16 und 4.17:

$$r^n \cos n\phi \leq 1 - \frac{\kappa}{8}\epsilon^2.$$

Dann wähle $\phi_1 = \arccos(1 - \frac{\kappa}{16}\epsilon^2) \cap (0, \pi)$, sodass für alle $\phi \in (-\phi_1, \phi_1)$ und $(r, \phi) \in \sigma(P - P_1)$ gilt: $r \leq 1 - \frac{\kappa}{16}\epsilon^2$. Für die anderen $z = (r, \phi) \in \sigma(P - P_1)$ mit $\phi \notin (-\phi_1, \phi_1)$ existiert jedoch $n = n(\phi) \leq n_0(\phi_1) := \left[\frac{2\pi}{\phi_1}\right] + 1$, sodass $n\phi[mod 2\pi] \in (-\phi_1, \phi_1)$. Zusammen mit 4.17 folgt dann:

$$r \leq (1 - \frac{\kappa}{16}\epsilon^2)^{1/([\frac{2\pi}{\arccos(1-\frac{\kappa}{16}\epsilon^2)}]+1)}.$$

Damit ist der Satz bewiesen.

□

Die Nützlichkeit dieses Satzes soll kurz am Beispiel der Doeblin-Bedingung (zuzüglich Aperiodizität) gezeigt werden. Diese Bedingung wurde schon in den vorangehenden Kapiteln ausführlich diskutiert und wir haben gesehen, wie anspruchsvoll es war zu zeigen, dass sie hinreichend für die Existenz einer $L^2(\pi)$-Spektrallücke des assoziierten MO ist.

Korollar 4.2.3 *Es gelte die Bedingung 2.2. Dann besitzt P eine $L^2(\pi)$-Spektrallücke.*

Beweis:

$$\begin{aligned} k_n(A) &= \frac{1}{\pi(A)\pi(A^c)} \int_A (p^n(x, A^c) - \pi(A^c))\pi(dx) + 1 \\ &\geq 1 - \frac{2}{\pi(A)} \int_A |p^n(x, A^c) - \pi(A^c)|\pi(dx) \\ &\geq 1 - 2C\delta^n \geq \frac{1}{2},\ n \geq n_0,\ n_0 \text{ hinreichend groß.} \end{aligned} \tag{4.18}$$

Mit Lemma 4.1.5 folgt dann

$$k_n \geq \frac{1}{2n_0}\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Die Behauptung folgt jetzt mit Satz 4.2.2.

□

Es lässt sich jedoch aus dem vorherigen Satz leicht ein neues Kriterium für die Existenz einer $L^2(\pi)$-Spektrallücke herleiten:

Korollar 4.2.4 *Es gelten die Voraussetzungen des Satzes 4.2.2. Angenommen, es existiert ein $\epsilon > 0$, sodass*

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{A\in\mathcal{F}:\pi(A)\leq\frac{1}{2}} \frac{1}{\pi(A^c)} \int_A |\frac{p^n(x, A)}{\pi(A)} - 1|\pi(dx) \leq 1 - \epsilon. \tag{4.19}$$

Dann hat P eine $L^2(\pi)$-Spektrallücke.

Beweis: Genau wie in Korollar 4.2.3 zeigt man

$$\begin{aligned} k_n(A) &\geq 1 - \frac{1}{\pi(A)\pi(A^c)} \int_A |p^n(x, A^c) - \pi(A^c)|\pi(dx) \\ &= 1 - \frac{1}{\pi(A^c)} \int_A |\frac{p^n(x, A)}{\pi(A)} - 1|\pi(dx) \\ &\geq \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Die Behauptung folgt wieder mit Satz 4.2.2 und Lemma 4.1.5.

□

4.3 Konvergenzraten von k_n und $k_{P^{*n}P^n}$

Wir wollen nun eine weitere Konstante einführen, die sich im Laufe der Arbeit als sehr nützlich erweisen wird. Sei im Folgenden

$$k_{P^{*n}P^n} := \inf_{A \in \mathcal{F}} k_{P^{*n}P^n}(A) := \inf_{A \in \mathcal{F}} \frac{1}{\pi(A)\pi(A^c)} \int_A P^{*^n} P^n 1_{A^c} \pi(dx).$$

Lemma 4.3.1 *Die Folge $a_n(A) := k_{P^{*n}P^n}(A)$ ist monoton wachsend in n (d.h. $a_n(A) \leq a_{n+1}(A)$) und es gilt: $a_n(A) \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{F}$.*

Beweis: Zuerst beweisen wir die zweite Aussage:

$$\begin{aligned} k_{P^{*n}P^n}(A) &= \frac{1}{\pi(A)\pi(A^c)} \int_A P^{*^n} P^n 1_{A^c} \pi(dx) \\ &= \frac{1}{\pi(A)\pi(A^c)} \int_\Omega p^n(x, A) p^n(x, A^c) \pi(dx) \\ &= \frac{1}{\pi(A)} - \frac{1}{\pi(A)\pi(A^c)} \int_\Omega (p^n(x, A^c))^2 \pi(dx) \\ &\overset{Jensen}{\leq} \frac{1}{\pi(A)} - \frac{\pi(A^c)}{\pi(A)} = 1. \end{aligned}$$

Die erste Behauptung ergibt sich aus

$$\begin{aligned} k_{P^{*n+1}P^{n+1}}(A) &= \frac{1}{\pi(A)} - \frac{1}{\pi(A)\pi(A^c)} \int_\Omega (p^{n+1}(x, A^c))^2 \pi(dx) \\ &\overset{P\ MO}{\geq} \frac{1}{\pi(A)} - \frac{1}{\pi(A)\pi(A^c)} \int_\Omega P(p^n(x, A^c))^2 \pi(dx) = k_{P^{*n}P^n}(A). \end{aligned}$$

□

Proposition 3 *Sei $\xi_1, \xi_2, \ldots$ eine MK mit Zustandsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \pi)$, wobei π ein stationäres Startmaß der Kette sei. Sei P der assoziierte MO auf $L^2(\pi)$ und P^* sein adjungierter Operator. Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *P besitzt eine $L^2(\pi)$-Spektrallücke.*
2. $$\exists n_0 \in \mathbb{N} : k_{P^{*n_0}P^{n_0}} > 0.$$

Gilt 2, dann haben wir folgende Abschätzung für das Spektrum:

$$\sigma(P - P_1) \subset K_r(0),\ r = \left(\sqrt{1 - \frac{\kappa}{8} k^2_{P^{*n_0}P^{n_0}}}\right)^{\frac{1}{n_0}}. \tag{4.21}$$

Beweis: Sei $L^2_{0,1}(\pi) := \{f \in L^2(\pi) : E_\pi(f) = 0, E_\pi(f^2) = 1\}$. Da $P^{*^n}P^n$ positiv und selbstadjungiert ist, folgt für alle $f \in L^2_{0,1}(\pi)$ aus dem Theorem 2.1 von Lawler und Sokal [48], dass

$$\frac{\kappa}{8}k^2_{P^{*n}P^n} \leq \inf_{f\in L^2_{0,1}(\pi)} < f, f - P^{*^n}P^n f >_2 \leq k_{P^{*n}P^n}.$$

Dies ist jedoch äquivalent zu

$$\sqrt{1-\frac{\kappa}{8}k^2_{P^{*n}P^n}} \geq ||P^n f||_2 \geq \sqrt{1-k_{P^{*n}P^n}}, \tag{4.22}$$

wobei wir wegen Lemma 4.3.1 wissen, dass die rechte Seite dieser Ungleichung immer definiert ist. Die Notwendigkeit von 2 für die Existenz einer Spektrallücke folgt direkt aus der rechten Seite der obigen Ungleichung. Dass die Bedingung hinreichend ist, folgt aus

$$||P^{n_0 n}||_2 \leq ||P^{n_0}||_2^n \leq \left(\sqrt{1-\frac{\kappa}{8}k^2_{P^{*n_0}P^{n_0}}}\right)^n,$$

wobei hier wieder P eingeschränkt auf $L^2_{0,1}(\pi)$ betrachtet wird. Die Abschätzung für das Spektrum bekommt man mit Hilfe der obigen Ungleichung, indem man auf beiden Seiten die $n_0 n$-te Wurzel zieht. Damit ist der Satz bewiesen.

□

Die Ungleichung 4.22 liefert jedoch auch Aussagen über das asymptotische Verhalten der $k_{P^{*n}P^n}$, was nun gezeigt werden soll:

Lemma 4.3.2 *Für alle $n_0 \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$1-k_{P^{*n}P^n} \leq \frac{(1-\frac{\kappa}{8}k^2_{P^{*n_0}P^{n_0}})^{\frac{n}{n_0}}}{(1-\frac{\kappa}{8}k^2_{P^{*n_0}P^{n_0}})}. \tag{4.23}$$

Beweis: Für P eingeschränkt auf $L^2_{0,1}(\pi)$ folgt wegen Ungleichung 4.22 für alle $l \in \mathbb{N}$:

$$1-k_{P^{*n_0 l}P^{n_0 l}} \leq ||P^{l n_0}||^2 \leq ||P^{n_0}||^{2l} \leq \left(1-\frac{\kappa}{8}k^2_{P^{*n_0}P^{n_0}}\right)^l. \tag{4.24}$$

Wegen der Monotonie von $k_{P^{*n}P^n}$ folgt daraus:

$$1-k_{P^{*n}P^n} \leq (1-\frac{\kappa}{8}k^2_{P^{*n_0}P^{n_0}})^{\left[\frac{n}{n_0}\right]} \leq \frac{(1-\frac{\kappa}{8}k^2_{P^{*n_0}P^{n_0}})^{\frac{n}{n_0}}}{(1-\frac{\kappa}{8}k^2_{P^{*n_0}P^{n_0}})}. \tag{4.25}$$

□

Satz 4.3.3 *Es sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *P besitzt eine $L^2(\pi)$-Spektrallücke.*
2. *Es existieren $C > 0$, $\delta < 1$, sodass*

$$1-k_{P^{*n}P^n} \leq C\delta^n. \tag{4.26}$$

Beweis: Dass Bedingung 2 hinreichend ist, folgt direkt aus Proposition 3.
Gelte nun 1. Nach Proposition 3 existiert $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $k_{P^{*n_0}P^{n_0}} > 0$. Die Behauptung folgt jetzt mit Lemma 4.3.2, wobei $C = \frac{1}{(1-\frac{\kappa}{8}k^2_{P^{*n_0}P^{n_0}})}$ und $\delta = (1-\frac{\kappa}{8}k^2_{P^{*n_0}P^{n_0}})^{\frac{1}{n_0}}$.

□

Der soeben für $1-k_{P^{*n}P^n}$ gewonnene exponentielle Abfall im Falle der Existenz einer $L^2(\pi)$-Spektrallücke lässt sich auch für $1-k_n$ zeigen. Hierfür benötigen wir die folgende Ungleichung:

Lemma 4.3.4 *Es gilt:*

$$1-k_n \leq \sqrt{2}\sqrt{1-k_{P^{*n}P^n}}. \tag{4.27}$$

Beweis: Wie schon zuvor können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit $\pi(A) \leq \frac{1}{2}$ annehmen. Einerseits haben wir dann:

$$\begin{aligned}
1-k_n(A) &= 1-\frac{1}{\pi(A)\pi(A^c)}\int_A p^n(x,A^c)\pi(dx) \\
&= \int_A (\pi(A^c)-p^n(x,A))\frac{\pi(dx)}{\pi(A)\pi(A^c)} \\
&\overset{C.S.}{\leq} \left(\int_A (\pi(A^c)-p^n(x,A^c))^2\frac{\pi(dx)}{\pi(A)\pi(A^c)}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{\pi(A^c)}} \\
&\leq \sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{\pi(A)\pi(A^c)}\int_\Omega (\pi(A^c)-p^n(x,A^c))^2\pi(dx)}.
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Andererseits gilt:

$$\begin{aligned}
1-k_{P^{*n}P^n}(A) &= 1-\frac{1}{\pi(A)\pi(A^c)}\int_\Omega p^n(x,A)p^n(x,A^c)\pi(dx) \\
&= 1-\frac{1}{\pi(A)}+\frac{1}{\pi(A)\pi(A^c)}\int_\Omega p^n(x,A^c)^2\pi(dx) \\
&= \frac{1}{\pi(A)\pi(A^c)}\int_\Omega (p^n(x,A^c)^2-\pi(A^c)^2)\pi(dx) \\
&= \frac{1}{\pi(A)\pi(A^c)}\int_\Omega (p^n(x,A^c)-\pi(A^c))^2\pi(dx).
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Setzt man nun 4.29 in 4.28 ein, so erhält man

$$1-k_n(A) \leq \sqrt{2}\sqrt{1-k_{P^{*n}P^n}(A)}. \tag{4.30}$$

Nimmt man zuerst auf der rechten und anschließend auf der linken Seite das Supremum, so folgt die Behauptung.

□

Satz 4.3.5 *Es sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *P besitzt eine $L^2(\pi)$-Spektrallücke.*
2. *Es existieren $C>0$, $\delta<1$, sodass*

$$1-k_n \leq C\delta^n. \tag{4.31}$$

Unter der Bedingung, dass $\inf_{A\in\mathcal{F}:\pi(A)>0}\pi(A)=0$, gilt dann wegen Lemma 4.1.7:

$$0 \leq 1-k_n \leq C\delta^n. \tag{4.32}$$

Beweis: Dass die Bedingung 2 hinreichend ist, folgt direkt aus Lemma 4.1.5 und Satz 4.2.2.
Gelte also Bedingung 1. Satz 4.3.3 und Lemma 4.3.4 ergeben dann:

$$1 - k_n \leq \sqrt{2} \frac{(1 - \frac{\kappa}{8} k^2_{P^{*n_0} P^{n_0}})^{\frac{n}{2n_0}}}{(1 - \frac{\kappa}{8} k^2_{P^{*n_0} P^{n_0}})}, \tag{4.33}$$

wobei n_0 so gewählt ist, dass $k_{P^{*n_0} P^{n_0}} > 0$. Die Behauptung gilt also für $C = \frac{\sqrt{2}}{1 - \frac{\kappa}{8} k^2_{P^{*n_0} P^{n_0}}}$ und $\delta = (1 - \frac{\kappa}{8} k^2_{P^{*n_0} P^{n_0}})^{\frac{1}{2n_0}}$.

□

4.4 L^2-Spektrallücken für reversible Markov-Ketten

Wir haben im letzten Abschnitt eine hinreichende und notwendige Bedingung dafür gesehen, dass P auf $L^2(\pi)$ eine Spektrallücke besitzt. Da es in der Regel unmöglich ist, alle k_n zu berechnen, muss der nächste Schritt sein, ein Kriterium anzugeben, aus dem die Existenz eines ϵ mit $k_n > \epsilon$ hergeleitet werden kann bzw. eine Bedingung, die es nicht erfordert, alle k_n auszuwerten bzw. abzuschätzen. Man fragt sich zunächst, ob es nicht möglich ist, für größere n k_n durch die vorherigen k_i, $i < n$ abzuschätzen. Dass dies ohne weitere Voraussetzungen nicht möglich ist, kann man sich leicht am folgenden Beispiel klar machen, wo der Übergangskern $p(\cdot, \cdot)$ gegeben wird durch die folgende Matrix:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.34}$$

Um größere k_n vernachlässigen zu können, muss man Bedingungen stellen, welche größere Perioden verbieten. Eine solche Bedingung ist die der Reversibilität. Daher betrachten wir in diesem Abschnitt ausschließlich reversible MK. Wir hatten schon in Lemma 4.1.6 gesehen, dass $K := \sup_{A \in \mathcal{F}} k(A) < 2$ eine notwendige Bedingung für die Existenz einer $L^2(\pi)$-Spektrallücke ist. Dass dies zusammen mit $k > 0$ dann auch tatsächlich hinreichend ist, soll in diesem Abschnitt gezeigt werden.

Satz 4.4.1 *Sei $\xi_1, \xi_2, \ldots$ eine reversible MK mit stationärem Wmaß π, Übergangskern $p(\cdot, \cdot)$ und P der assoziierte Markov-Operator auf $L_2(\pi)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- $$0 < k = \inf_{A \in \mathcal{F}} k(A) \leq \sup_{A \in \mathcal{F}} k(A) < 2.$$
- $$\exists C > 0,\ q < 1,\ \textit{sodass}\ ||(P - P_1)^n||_2 \leq C\, q^n \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Bevor dieser Satz bewiesen wird, benötigen wir noch ein technisches Lemma:

Lemma 4.4.2 *Sei $\xi_1, \xi_2, \ldots$ eine reversible stationäre MK mit beliebigem Zustandsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \pi)$, wobei π das stationäre Wmaß bezeichne. Sei*

$$k_2 := \inf_{A \in \mathcal{F}} k_2(A) := \inf_{A \in \mathcal{F}} \frac{1}{\pi(A)\pi(A^c)} \int_A p^2(x, A^c)\pi(dx).$$

Dann gilt die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} k_2 \quad \geq \quad & \sup_{\delta,\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon\in\mathbb{R}_+} \min\Bigg[\frac{k^2}{16}\delta, \frac{k}{4}(\epsilon_1\epsilon_2(1-\delta)-\delta), \\ & \left(k\left(\frac{(2-\epsilon)(1-\epsilon_1)(1-\epsilon_2)(1-\delta)}{(1-\epsilon)K} - \frac{1}{1-\epsilon}\right) - \frac{\epsilon}{1-\epsilon}\right)\epsilon\Bigg]. \end{aligned}$$

Beweis: Im Verlauf des Beweises werden wir sehr häufig die Reversibilitätsbedingung $\pi(dx)p(x,dy) = \pi(dy)p(y,dx)$ benutzen, ohne dies dann explizit zu erwähnen. Es gilt:

$$\begin{aligned} k_2(A) &= \frac{1}{\pi(A)\pi(A^c)}\int_A \pi(dx)p^2(x,A^c) \\ &= \frac{1}{\pi(A)\pi(A^c)}\left(\int_A \pi(dx)\int_A p(x,dy)p(y,A^c) + \int_A \pi(dx)\int_{A^c} p(x,dy)p(y,A^c)\right) \\ &= \frac{1}{\pi(A)\pi(A^c)}\left(\int_A \pi(dx)\int_A p(x,dy)p(y,A^c) + \int_{A^c} \pi(dx)\int_{A^c} p(x,dy)p(y,A)\right) \\ &\geq \inf_{A\in\mathcal{F}:\pi(A)\leq\frac{1}{2}} \frac{1}{\pi(A)\pi(A^c)}\int_A \pi(dx)\int_A p(x,dy)p(y,A^c) \end{aligned}$$

und damit auch

$$k_2 \geq \inf_{A\in\mathcal{F}:\pi(A)\leq\frac{1}{2}} \frac{1}{\pi(A)\pi(A^c)}\int_A \pi(dx)\int_A p(x,dy)p(y,A^c). \tag{4.35}$$

Daher kann im Folgenden immer $\pi(A) \leq \frac{1}{2}$ angenommen werden. Definiere nun

$$A_{\frac{k}{4}} := \{y \in A : p(y,A^c) \geq \frac{k}{4}\}.$$

Man kann zeigen, dass $\pi(A_{\frac{k}{4}}) \geq \frac{k}{4}\pi(A)$. Offensichtlich gilt:

$$\int_A \pi(dx)\int_A p(x,dy)p(y,A^c) \geq \int_A \pi(dx)\int_{A_{\frac{k}{4}}} p(x,dy)p(y,A^c) \geq \frac{k}{4}\int_A \pi(dx)p(x,A_{\frac{k}{4}}). \tag{4.36}$$

Jetzt soll $\int_A \pi(dx)p(x,A_{\frac{k}{4}})$ abgeschätzt werden. Dafür definiere

$$C := A^c_{\frac{k}{4}} \cap A,$$

$$\tilde{A}_\epsilon := \{x \in C : p(x,A_{\frac{k}{4}}) \geq \epsilon\}.$$

Angenommen, es existiert ein $\delta > 0$, s. d. $\pi(C) \geq \delta\pi(A)$ und sei δ maximal mit dieser Eigenschaft. Dann gilt:

$$\begin{aligned} k &\leq \frac{1}{\pi(C)\pi(C^c)}\int_C p(x,C^c)\pi(dx) \\ &= \frac{1}{\pi(C)\pi(C^c)}\int_C p(x,A_{\frac{k}{4}})\pi(dx) + \int_C p(x,A^c)\pi(dx) \\ &\leq \frac{1}{\pi(C)\pi(C^c)}\left(\int_{\tilde{A}_\epsilon} p(x,A_{\frac{k}{4}})\pi(dx) + \epsilon\pi(C\cap\tilde{A}^c_\epsilon) + \frac{k}{4}\pi(C)\right) \\ &\leq \frac{1}{\pi(C)\pi(C^c)}\int_{\tilde{A}_\epsilon} p(x,A_{\frac{k}{4}})\pi(dx) + 2\epsilon + \frac{k}{2}. \end{aligned}$$

Mit der Wahl von $\epsilon = \frac{k}{8}$ folgt dann

$$\frac{1}{\pi(C)\pi(C^c)} \int_{\tilde{A}_{\frac{k}{8}}} p(x, A_{\frac{k}{4}})\pi(dx) \geq \frac{k}{4}$$

und damit

$$\int_{\tilde{A}_{\frac{k}{8}}} p(x, A_{\frac{k}{4}})\pi(dx) \geq \frac{k}{4}\pi(C)\pi(C^c) \geq \frac{k}{4}\delta\pi(A)\pi(A^c).$$

Dies eingesetzt in 4.36 und 4.36 eingesetzt in 4.35 liefert dann

$$k_2 \geq \frac{k^2}{16}\delta. \tag{4.37}$$

Bis jetzt haben wir noch das Problem, dass δ von A abhängt und es durchaus möglich ist, dass für alle Folgen A_n mit $k_2(A_n) \to k_2$ die zugehörigen δ_n (δ_n wie in dem Beweis) gegen Null konvergieren.
Wir betrachten daher jetzt den Fall, dass $\pi(C) < \delta\pi(A)$ und $\delta > 0$ minimal mit dieser Eigenschaft ist (wir lassen jetzt also den Fall $\pi(C) = 0$ zu). Definiere

$$B_{\epsilon_1} := \{x \in A_{\frac{k}{4}} : p(x, A^c) < 1 - \epsilon_1\}.$$

Sei $\epsilon_2 \geq 0$ maximal mit der Eigenschaft

$$\pi(B_{\epsilon_1}) \geq \epsilon_2\pi(A_{\frac{k}{4}}).$$

Dann folgt:

$$\begin{aligned}
k_2(A) &= \frac{1}{\pi(A)\pi(A^c)} \int_A \pi(dx)p^2(x, A^c) \geq \frac{1}{\pi(A)\pi(A^c)} \int_{A_{\frac{k}{4}}} \pi(dx)p^2(x, A^c) \\
&= \frac{1}{\pi(A)\pi(A^c)} \left(\int_{A_{\frac{k}{4}}} \pi(dx) \int_{B_{\epsilon_1}} p(x, dy)p(y, A^c) + \int_{A_{\frac{k}{4}}} \pi(dx) \int_{B_{\epsilon_1}^c} p(x, dy)p(y, A^c) \right) \\
&\geq \frac{k}{4}\frac{1}{\pi(A)\pi(A^c)} \int_{A_{\frac{k}{4}}} \pi(dx)p(x, B_{\epsilon_1}) = \frac{k}{4}\frac{1}{\pi(A)\pi(A^c)} \int_{B_{\epsilon_1}} \pi(dx)p(x, A_{\frac{k}{4}}).
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Darüber hinaus gilt:

1.
$$\int_{B_{\epsilon_1}} \pi(dx)p(x, A_{\frac{k}{4}}^c \cap A) = \int_{A_{\frac{k}{4}}^c \cap A} \pi(dx)p(x, B_{\epsilon_1}) \leq \pi(A_{\frac{k}{4}}^c \cap A) \leq \delta\pi(A). \tag{4.39}$$

2.
$$\int_{B_{\epsilon_1}} \pi(dx)p(x, A) \geq \epsilon_1\pi(B_{\epsilon_1}) \geq \epsilon_1\epsilon_2\pi(A_{\frac{k}{4}}) \geq \epsilon_1\epsilon_2(1 - \delta)\pi(A). \tag{4.40}$$

Subtrahiert man die erste von der zweiten Ungleichung, so erhält man

$$\int_{B_{\epsilon_1}} \pi(dx)p(x, A_{\frac{k}{4}}) \geq (\epsilon_2\epsilon_1(1 - \delta) - \delta)\pi(A).$$

Dies wiederum eingesetzt in 4.38 ergibt dann

$$k_2(A) \geq \frac{k}{4}(\epsilon_2\epsilon_1(1 - \delta) - \delta). \tag{4.41}$$

Diese Abschätzung genügt dann für den Beweis der Aussage des Lemmas, wenn eine Folge A_n existiert mit $k_2(A_n) \to k_2$ und wir eine von Null weg beschränkte Folge $\epsilon_1^{(n)}$ finden können, sodass die zugehörige Folge $\epsilon_2^{(n)}$ auch von Null weg beschränkt bleibt.
Als Letztes wollen wir den Fall untersuchen, bei dem gilt:

$$\pi(C) \leq \delta\pi(A); \quad \pi(B_{\epsilon_1}) \leq \epsilon_2\pi(A_{\frac{k}{4}}).$$

Als erstes beobachten wir, dass für sehr kleine $\epsilon_1, \epsilon_2, \delta$ das zugehörige $\pi(A)$ von $\frac{1}{2}$ weg beschränkt ist. Dies sieht man z.B. so:

$$\begin{aligned}
\int_A \pi(dx)p(x,A^c) &\geq \int_{A_{\frac{k}{4}}} \pi(dx)p(x,A^c) \geq \int_{A_{\frac{k}{4}} \cap B^c_{\epsilon_1}} \pi(dx)p(x,A^c) \\
&\geq (1-\epsilon_1)\pi(A_{\frac{k}{4}} \cap B^c_{\epsilon_1}) \geq (1-\epsilon_1)(1-\epsilon_2)\pi(A_{\frac{k}{4}}) \\
&\geq (1-\epsilon_1)(1-\epsilon_2)(1-\delta)\pi(A).
\end{aligned}$$

Damit folgt:

$$k(A) \geq \frac{(1-\epsilon_1)(1-\epsilon_2)(1-\delta)}{\pi(A^c)}.$$

Andererseits gilt nach Definition von K:

$$k(A) \leq K,$$

unabhängig vom gewählten A. Aus den letzten beiden Ungleichungen folgt dann

$$\pi(A^c) \geq \frac{(1-\epsilon_1)(1-\epsilon_2)(1-\delta)}{K}. \tag{4.42}$$

Mit Hilfe dieser Ungleichung soll nun $k_2(A)$ weiter abgeschätzt werden. Definiere dazu

$$H_\epsilon := \{y \in A^c : p(y,A^c) \geq \epsilon\}.$$

Offensichtlich gilt dann:

$$\begin{aligned}
k_2(A) &\geq \frac{1}{\pi(A)\pi(A^c)} \int_A \pi(dx) \int_{A^c} p(x,dy)p(y,A^c) \\
&\geq \frac{1}{\pi(A)\pi(A^c)} \int_A \pi(dx) \int_{H_\epsilon} p(x,dy)p(y,A^c) \\
&\geq \epsilon \underbrace{\frac{1}{\pi(A)\pi(A^c)} \int_A \pi(dx)p(x,H_\epsilon)}_{L}.
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Um L geeignet abzuschätzen, betrachte den Fluss aus der Menge $A \cup H^c_\epsilon$:

$$\begin{aligned}
k &\leq \frac{1}{\pi(A \cup H^c_\epsilon)\pi(H_\epsilon)} \int_{A \cup H^c_\epsilon} \pi(dx)p(x,H_\epsilon) \\
&= \frac{1}{\pi(A \cup H^c_\epsilon)\pi(H_\epsilon)} \left(\int_A \pi(dx)p(x,H_\epsilon) + \int_{H^c_\epsilon \cap A^c} \pi(dx)p(x,H_\epsilon) \right) \\
&\leq \frac{\pi(A)\pi(A^c)}{\pi(A \cup H^c_\epsilon)\pi(H_\epsilon)} L + \frac{\pi(H^c_\epsilon \cap A^c)}{\pi(A \cup H^c_\epsilon)\pi(H_\epsilon)} \epsilon \\
&\leq \frac{1}{\pi(H_\epsilon)} \left(L + \frac{\pi(H^c_\epsilon \cap A^c)}{\pi(A)} \epsilon \right).
\end{aligned} \tag{4.44}$$

Hieraus ergibt sich dann:

$$L \geq \pi(H_\epsilon)k - \frac{\pi(H_\epsilon^c \cap A^c)}{\pi(A)}\epsilon. \tag{4.45}$$

Jetzt schätze die Terme $\pi(H_\epsilon)$ und $\frac{\pi(H_\epsilon^c \cap A^c)}{\pi(A)}$ weiter ab. Es gilt:

$$\pi(A) \geq \int_A \pi(dx)p(x, H_\epsilon^c \cap A^c) = \int_{H_\epsilon^c \cap A^c} \pi(dx)p(x, A) \geq (1-\epsilon)\pi(H_\epsilon^c \cap A^c).$$

Hieraus ergibt sich zum einen:

$$\frac{\pi(H_\epsilon^c \cap A^c)}{\pi(A)} \leq \frac{1}{1-\epsilon}. \tag{4.46}$$

Zum anderen folgt aus $\pi(H_\epsilon^c \cap A^c) \leq \frac{1}{1-\epsilon}\pi(A)$ durch Addition von $\pi(H_\epsilon)$ auf beiden Seiten

$$\pi(A^c) \leq \frac{1}{1-\epsilon}\pi(A) + \pi(H_\epsilon)$$

und damit

$$\pi(H_\epsilon) \geq \pi(A^c)\frac{2-\epsilon}{1-\epsilon} - \frac{1}{1-\epsilon}.$$

Setzen wir nun die für $\pi(A^c)$ in 4.42 erhaltene Abschätzung ein, dann folgt:

$$\pi(H_\epsilon \geq \frac{(1-\epsilon_1)(1-\epsilon_2)(1-\delta)}{K}\frac{2-\epsilon}{1-\epsilon} - \frac{1}{1-\epsilon}.$$

Setzt man dies und 4.46 in 4.45 ein, so erhält man:

$$L \geq k\left(\frac{(2-\epsilon)(1-\epsilon_1)(1-\epsilon_2)(1-\delta)}{(1-\epsilon)(K)} - \frac{1}{1-\epsilon}\right) - \frac{\epsilon}{1-\epsilon}. \tag{4.47}$$

Setzt man dies wiederum in 4.43 ein, so bekommt man schließlich:

$$k_2(A) \geq \epsilon\left(k\left(\frac{(2-\epsilon)(1-\epsilon_1)(1-\epsilon_2)(1-\delta)}{(1-\epsilon)(K)} - \frac{1}{1-\epsilon}\right) - \frac{\epsilon}{1-\epsilon}\right). \tag{4.48}$$

Wir haben somit insgesamt 3 unterschiedliche Ungleichungen für $k_2(A)$ hergeleitet. Sie sollen der Übersichtlichkeit halber hier noch einmal aufgeführt werden:

1. $$k_2(A) \geq \frac{k^2}{16}\delta \text{ für } \pi(C) \geq \delta\pi(A).$$

2. $$k_2(A) \geq \frac{k}{4}\left(\epsilon_1\epsilon_2(1-\delta) - \delta\right) \text{ für } \pi(C) \leq \delta\pi(A), \quad \pi(B_{\epsilon_1}) \geq \epsilon_2\pi(A_{\frac{k}{4}}).$$

3. $$\begin{aligned} k_2(A) \quad &\geq \quad \epsilon\left(k\left(\frac{(2-\epsilon)(1-\epsilon_1)(1-\epsilon_2)(1-\delta)}{(1-\epsilon)(K)} - \frac{1}{1-\epsilon}\right) - \frac{\epsilon}{1-\epsilon}\right) \\ &\text{für } \pi(C) \leq \delta\pi(A), \quad \pi(B_{\epsilon_1}) \leq \epsilon_2\pi(A_{\frac{k}{4}}). \end{aligned} \tag{4.49}$$

Als unmittelbare Folgerung hieraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} k_2 \quad \geq \quad & \sup_{\delta,\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon\in\mathbb{R}_+} \min\left[\frac{k^2}{16}\delta, \frac{k}{4}(\epsilon_1\epsilon_2(1-\delta)-\delta),\right. \\ & \left.\left(k\left(\frac{(2-\epsilon)(1-\epsilon_1)(1-\epsilon_2)(1-\delta)}{(1-\epsilon)(K)} - \frac{1}{1-\epsilon}\right) - \frac{\epsilon}{1-\epsilon}\right)\epsilon\right]. \end{aligned} \tag{4.50}$$

Damit ist das Lemma bewiesen.

□

Lemma 4.4.3 *Sei $\xi_1, \xi_2, \ldots$ eine reversible stationäre MK, für die gilt:*

$$0 < k = \inf_{A\in\mathcal{F}} k(A) \leq \sup_{A\in\mathcal{F}} k(A) := K < 2.$$

Dann folgt:

$$k_2 > 0.$$

Beweis: Wähle ϵ_1 und ϵ_2 so, dass $\epsilon_1\epsilon_2(1-\delta) = 2\delta$ ist (wähle z.B. $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \sqrt{\frac{2\delta}{1-\delta}}$). Wählt man nun ϵ und δ hinreichend klein, dann sind der zweite und dritte Term größer Null und somit 4.35 von Null weg beschränkt. Damit ist das Lemma bewiesen.

□

Nun zum Beweis des Satzes 4.4.1:
Beweis: Lawler und Sokal [48] konnten zeigen, dass

$$\sigma(P - P_1) \subset [-1, 1 - \frac{\kappa}{8}k^2].$$

Da mit $P - P_1$ auch $(P - P_1)^2$ selbstadjungiert und zudem positiv ist, gilt:

$$\sigma((P - P_1)^2) \subset [0, 1 - \frac{\kappa}{8}k_2^2].$$

Nach dem Spektralabbildungssatz (vgl. [72], S. 350) haben wir

$$\sigma((P - P_1)^2) = (\sigma(P - P_1))^2.$$

Dies zusammen ergibt:

$$\sigma(P - P_1) \subset \left[-\sqrt{1 - \frac{\kappa}{8}k_2^2}, \sqrt{1 - \frac{\kappa}{8}k_2^2}\right].$$

Damit ist der Satz bewiesen.

□

Da viele Modelle mit nicht reversiblen MK arbeiten, sollte man als nächstes versuchen, die Annahme der Reversibilität abzuschwächen. Reversibilität der Kette hat zur Folge, dass sich das betrachtete System im Zeitablauf durchmischt. Eine Unterbindung der Determiniertheit ist zweifellos notwendig, vermutlich jedoch nicht in so starker Form. Vielmehr könnte sich die Forderung nach einer strikten Zunahme der Entropie, d.h.

$$\begin{aligned} H(P^n f)) := -\int_\Omega P^n f(x)\log(P^n f)\pi(dx) > -\int_\Omega P^{n-1} f(x)\log(P^{n-1} f)\pi(dx) \\ = H(P^{n-1} f) \;\; \forall f \geq 0 : P_1 f = 1 \end{aligned}$$

auf einen noch näher zu bestimmenden Funktionenraum als sinnvoll erweisen. Dass dies tatsächlich in einigen Fällen so ist, soll im folgenden Abschnitt gezeigt werden.

Kapitel 5

Spektrallücken und Entropie

Dieses Kapitel führt zunächst die Definition der Gibbs-Entropie ein (vgl. Abschnitt 5.1). Der sich hieraus entwickelte Begriff des additiven, gleichmäßigen Entropiezuwachses ($L_n > 0$) auf einer vorgegebenen Funktionenklasse $\mathcal{G}$ wird als notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung für die Existenz einer $L^2(\pi)$-Spektrallücke erkannt, da sich die isoperimetrischen Konstanten $k_{P^{*n}P^n}$ nach oben durch L_n abschätzen lassen. Umgekehrt liefert die Existenz einer Spektrallücke die gleichmäßige exponentielle Konvergenz des Entropiezuwachses, wobei die Gleichmäßigkeit sich hier nur noch auf die Teilklasse $\mathcal{G}_\epsilon \subset \mathcal{G}$ bezieht (vgl. Abschnitt 5.2). Hat die betrachtete MK eine Sprunglücke, dann impliziert $L_n > 0$ bereits eine Spektrallücke des assoziierten Operators P (vgl. Abschnitt 5.3). Im Fall eines gleichmäßigen, multiplikativen Entropiezuwachses lassen sich die isoperimetrischen Konstanten k_n von Null weg beschränken (vgl. Abschnitt 5.2). Dies stellt somit eine hinreichende Bedingung für die Existenz einer $L^2(\pi)$-Spektrallücke dar. Schließlich wird im letzten Abschnitt unter der Annahme der schwachen Reversibilität der additive Entropiezuwachs L_n mittels der isoperimetrischen Konstanten K_n und k_n nach unten abgeschätzt. Fordert man darüber hinaus die Existenz einer Sprunglücke, dann zeigt sich, dass die schon aus dem reversiblen Fall bekannte Bedingung $0 < k \leq K < 2$ äquivalent zur Existenz einer $L^2(\pi)$-Spektrallücke ist.

5.1 Gibbs-Entropie

Die hier gegebene Definition der Gibbs-Entropie und die folgenden Eigenschaften derselben sind dem Buch von Lasota, Mackey [47] entnommen.

Definition 5.1.1 *Sei für $x > 0$ $\eta(x) := -x\log(x)$, $\eta(0) = 0$ und $\mathcal{M} := \{f : f \geq 0, \eta(f) \in L_1(\pi)\}$. Dann bezeichnen wir für $f \in \mathcal{M}$*

$$H(f) = \int_\Omega \eta(f(x))\pi(dx) \tag{5.1}$$

als Entropie von f.

Eine wichtige Eigenschaft von η ist die Konvexität ihres Graphen ($\eta'' \leq 0$). Die Bedeutung dieser Eigenschaft wird durch folgenden Satz unterstrichen (vgl. [47]):

Satz 5.1.2 (Jensens Ungleichung) *Sei $\eta(u), u \geq 0$ eine Funktion mit der Eigenschaft $\eta'' \leq 0$, $P : L^p \to L^p$, $1 \leq p \leq \infty$ ein linearer Operator mit der Eigenschaft $P1 = 1$, $Pf \geq 0$ für alle $f \geq 0$, dann gilt für alle $f \in L^p$, $f \geq 0$:*

$$\eta(Pf) \geq P\eta(f), \quad \textit{falls } P\eta(f) \textit{ existiert.} \tag{5.2}$$

Aus dieser Eigenschaft folgt unmittelbar (vgl. [47]):

Satz 5.1.3 *Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \pi)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $p(\cdot,\cdot)$ der Übergangskern und π ein invariantes Wmaß einer MK $\xi_1, \xi_2, \ldots$ und P der assoziierte MO. Dann gilt*

$$H(Pf) \geq H(f) \ \forall f \geq 0, f \in L^1. \tag{5.3}$$

Zuzüglich dieser Sätze benötigen wir noch folgendes Lemma:

Lemma 5.1.4

$$\eta(x) \geq \eta(1-x) \ \forall x \in [0, \frac{1}{2}]. \tag{5.4}$$

Beweis: Nachrechnen.

□

Sei im Folgenden $\mathcal{G} := \{g_A := \frac{1}{\pi(A)} 1_A : A \in \mathcal{F}, 0 < \pi(A) \leq \frac{1}{2}\}$. Offensichtlich gilt $\mathcal{G} \subset \mathcal{M}$.

5.2 Entropiezuwachs und isoperimetrische Konstanten

Nach diesen Vorbereitungen soll nun ein Satz formuliert werden, aus dem eine notwendige Bedingung für die Existenz einer Spektrallücke gefolgert wird.

Satz 5.2.1 *Sei $\xi_1, \xi_2, \ldots$ eine stationäre MK mit Zustandsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \pi)$, P der assoziierte MO und π ein invariantes Startmaß der MK. Dann gilt:*

$$k_{P^{*n} P^n}(A) \leq \frac{1}{\pi(A^c)}(1 - e^{-L_n(A)}), \tag{5.5}$$

und damit insbesondere

$$k_{P^{*n} P^n} \leq 2(1 - e^{-L_n}), \tag{5.6}$$

wobei

$$L_n := \inf_{A: 0 < \pi(A) < \frac{1}{2}} L_n(A) := \inf_{g_A \in \mathcal{G}} (H(P^n g_A) - H(g_A))$$

den (additiven) Entropiezuwachs bezeichne.

Beweis: Sei $\pi_A(B) := \frac{\pi(A \cap B)}{\pi(A)}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
L_n(A) &= -\frac{1}{\pi(A)} \int_\Omega p^n(x, A) \log p^n(x, A) \pi(dx) \\
&= -\int_\Omega 1_A(x) P^{*^n} \log p^n(x, A^c) \pi_A(dx) \\
&\overset{Jensen}{\geq} -\int_A \log(P^{*^n} P^n 1_A(x)) \pi_A(dx) \\
&\overset{Jensen}{\geq} \log(\int_A (1 - P^{*^n} P^n 1_{A^c}(x)) \pi_A(dx)) \\
&= -\log(1 - \pi(A^c) k_{P^{*n} P^n}(A)).
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Umstellen nach $k_{P^{*n} P^n}$ liefert dann die Behauptung der ersten Aussage. Die zweite Behauptung folgt, wenn man in (5.5) eine Folge $A_k \in \mathcal{F}$ mit $L_n(A_k) \to L_n$ für $k \to \infty$ wählt, da $\liminf_{k \to \infty} k_{P^{*n} P^n}(A_k) \geq k_{P^{*n} P^n}$.

□

Bemerkung 5.2.2 *Eine vergleichbare Abschätzung wie 5.5 ist für k_n nicht unmittelbar zu erwarten. Dies kann man sich leicht am folgenden Beispiel klar machen:*

$$\Omega = \{1,2,3,4\}, A = \{2,3\},\ P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \pi = (\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3})$$

Man sieht nun schnell, dass in diesem Fall gilt:

$$L_1 = 0,\ k > 0.$$

Korollar 5.2.3 *Eine notwendige Bedingung für P, eine Spektrallücke zu haben, ist gegeben durch*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}:\ L_{n_0} = \inf_{A\in\mathcal{F}:0<\pi(A)\le\frac{1}{2}} -\frac{1}{\pi(A)} \int_\Omega p^{n_0}(x,A) \log p^{n_0}(x,A)\pi(dx) > 0. \quad (5.8)$$

Beweis: Dies folgt direkt aus dem obigen Satz 5.2.1 zusammen mit der Proposition 3.

□

Sei $\mathcal{G}_\epsilon := \{g_A := \frac{1}{\pi(A)} 1_A : A \in \mathcal{F},\ \epsilon \le \pi(A) \le \frac{1}{2}\}$. Der folgende Satz beschreibt das Verhalten der Entropie von $H(P^n\cdot)$ angewandt auf die Funktionen des Raums $\mathcal{G}_\epsilon$.

Satz 5.2.4 *Sei $\xi_1, \xi_2, \ldots$ eine MK mit Zustandsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \pi)$, stationärem Wmaß π, Übergangskern $p(\cdot,\cdot)$ und zugehörigem MO P. Angenommen, P habe eine $L^2(\pi)$-Spektrallücke. Dann existiert ein $C > 0$, $\delta < 1$, sodass*

$$\frac{-C}{\epsilon}\delta^n \le \inf_{g_A\in\mathcal{G}_\epsilon} H(P^n g_A) \le 0. \quad (5.9)$$

Beweis: Aus Satz 4.3.3 und (5.5) folgt die Existenz eines $C > 0$, $\delta < 1$ mit der Eigenschaft

$$1 - C\delta^n \le \frac{1}{\pi(A^c)} \left(1 - e^{-L_n(A)}\right).$$

Umformen ergibt dann:

$$e^{-L_n(A)} \le \pi(A) + C\delta^n.$$

Logarithmieren liefert nun:

$$\begin{aligned} -L_n(A) &\le \frac{\log(\pi(A) + C\delta^n) - \log(\pi(A))}{C\delta^n} C\delta^n + \log(\pi(A)) \\ &= \log'(x)\big|_\eta C\delta^n + \log(\pi(A)), \quad \text{wobei } \eta \in [\pi(A), \pi(A) + C\delta^n] \\ &\le \frac{1}{\pi(A)} C\delta^n + \log(\pi(A)) \le \frac{1}{\epsilon} C\delta^n + \log(\pi(A)). \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$L_n(A) \ge -\log(\pi(A)) - \frac{C}{\epsilon}\delta^n.$$

Hiermit bekommen wir schließlich

$$H(P^n g_A) = \log(\pi(A)) + L_n(A) \ge -\frac{C}{\epsilon}\delta^n.$$

Die rechte Seite hängt nicht mehr von A ab, sodass die Ungleichung gilt, wenn wir zum Infimum übergehen. Hiermit folgt die Behauptung.

□

Hier stellt sich die Frage, ob die Bedingung in (5.8) auch hinreichend für die Existenz einer Spektrallücke ist. Die Antwort auf diese Frage ist nein. Wir werden in Kapitel 6 ein Gegenbeispiel angeben (siehe Beispiel 3). Ohne weitere Annahmen an die MK ist es unmöglich, eine Ungleichung der Form

$$k_n \geq c_n\ L_n,\ \ c_n \geq c > 0, n \in \mathbb{N} \tag{5.10}$$

herzuleiten. Das Problem dabei ist, dass man eine solche Ungleichung nicht über

$$k_n(A) \geq c_n\ L_n(A),\ \ c_n \geq c > 0, n \in \mathbb{N} \tag{5.11}$$

erreichen kann. Dies sieht man leicht am Beispiel einer MK mit Übergangskern $p(x,\cdot) = \pi$, d.h. eine MK induziert durch u.i.v. ZVen. Für diese gilt nämlich $L_n(A) = -\ln(\pi(A))$. Dies konvergiert gegen unendlich für $\pi(A) \to 0$; die linke Seite der Ungleichung 5.11 ist jedoch beschränkt durch 2 (vgl. Lemma 4.1.2). Betrachtet man dagegen $\frac{L_n(A)}{-\ln(\pi(A))}$, so kann man dies tatsächlich gegen $k_n(A)$ abschätzen, wie nun gezeigt werden soll:

Satz 5.2.5 *Sei $\xi_1, \xi_2, \ldots$ eine stationäre MK mit Zustandsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \pi)$, P der assoziierte MO und π ein invariantes Startmaß der Kette. Dann ist die folgende Bedingung (im Folgenden auch multiplikativer Entropiezuwachs genannt) hinreichend für die Existenz einer Spektrallücke:*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \epsilon > 0 :\ \sup_{g_A \in \mathcal{G}} \frac{H(P^{n_0} g_A)}{H(g_A)} \leq 1 - \epsilon. \tag{5.12}$$

In diesem Fall bekommen wir die Abschätzung

$$k_n \geq \min(\frac{1}{2n_0}, \frac{x_\epsilon}{n_0}), \tag{5.13}$$

wobei x_ϵ die kleinste positive Nullstelle der Funktion

$$g_\epsilon(x) := \frac{3}{2 \log 2} \eta(x) + x - \epsilon$$

bezeichne.

Beweis:
Wegen

$$\frac{H(P^n g_A)}{H(g_A)} \geq \frac{H(P^{n+1} g_A)}{H(g_A)} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

gilt für alle $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned}
1-\epsilon \quad &\geq \quad \frac{H(P^n g_A)}{H(g_A)} = 1 - \frac{1}{\eta(\pi(A))}\int_\Omega \eta(p^n(x,A))\pi(dx) \\
&= \quad 1 + \frac{1}{\log(\pi(A))}\frac{1}{\pi(A)}\int_A \eta(p^n(x,A))\pi(dx) \\
&\quad\;\; + \frac{1}{\log(\pi(A))}\frac{1}{\pi(A)}\int_{A^c} \eta(p^n(x,A))\pi(dx) \\
&\overset{Jensen}{\geq} \quad 1 + \frac{1}{\log(\pi(A))}\eta\left(\frac{1}{\pi(A)}\int_A p^n(x,A)\pi(dx)\right) \\
&\quad\;\; + \frac{1}{\log(\pi(A))}\frac{\pi(A^c)}{\pi(A)}\eta\left(\frac{1}{\pi(A^c)}\int_{A^c} p^n(x,A)\pi(dx)\right) \\
&= \quad 1 + \frac{1}{\log(\pi(A))}\left(\eta(1-\pi(A^c)k_n(A)) + \frac{\pi(A^c)}{\pi(A)}\eta(\pi(A)k_n(A))\right) \\
&\geq \quad 1 - \frac{1}{\log 2}\eta(1-\pi(A^c)k_n(A)) - \frac{\pi(A^c)k_n(A)\log(k_n(A)\pi(A))}{\log(\pi(A))} \\
&\geq \quad 1 - \frac{1}{\log 2}\eta(1-\pi(A^c)k_n(A)) - \frac{1}{2\log 2}\eta(k_n(A)) - k_n(A).
\end{aligned}$$

Somit erhält man:

$$\frac{1}{\log 2}\left(\eta(1-\pi(A^c)k_n(A)) + \frac{\eta(k_n(A))}{2}\right) + k_n(A) \geq \epsilon.$$

Für $k_n(A) \leq \frac{1}{2}$ (für $k_n(A) \geq \frac{1}{2}$ ist 5.13 trivialerweise erfüllt) erhält man hieraus insbesondere:

$$\frac{3}{2\log 2}\eta(k_n(A)) + k_n(A) - \epsilon \geq 0.$$

Die Funktion $g(x) := \frac{3}{2\log 2}\eta(x) + x$ ist im Intervall $[0, \frac{1}{2}]$ monoton wachsend. Sei x_ϵ die Nullstelle von $g_\epsilon(x) := g(x) - \epsilon$ in $[0, \frac{1}{2}]$. Dann folgt:

$$k_n \geq x_\epsilon.$$

Wegen Lemma 4.1.5 gilt dann:

$$k_n \geq \frac{x_\epsilon}{n_0} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Die Behauptung folgt jetzt mit Satz 4.2.2.

Korollar 5.2.6 *Unter den Voraussetzungen des Satzes 5.2.5 gilt:*

$$\sigma(P-P_1) \subset K_{r_0}(0),\; r_0 = (1 - \frac{\kappa}{16}\min(\frac{1}{2n_0}, \frac{x_\epsilon}{n_0})^2)^{1/([\frac{2\pi}{\arccos(1-\frac{\kappa}{16}(\min(\frac{1}{2n_0},\frac{x_\epsilon}{n_0})^2)}]+1)}, \tag{5.14}$$

wobei $K_r(0)$ den Kreis mit Radius r und Mittelpunkt 0 *bezeichne und wir den Bildbereich des* arccos *auf* $[0, \pi]$ *einschränken.*

Beweis: Folgt direkt aus Satz 5.2.5 zusammen mit Satz 4.2.2.

□

Bemerkung 5.2.7 *Die Bedingung (5.12) aus Satz 5.2.5 ist nicht notwendig für die Existenz einer $L^2(\pi)$-Spektrallücke. Dies kann man leicht an folgendem Beispiel*

nachprüfen:
Der Zustandsraum Ω *sei* $\Omega := \mathbb{N} \bigcup \{0\}$, *der Übergangskern* $p(\cdot, \cdot)$ *gegeben durch*

$$p(i,j) := \alpha\delta_{0,j} + (1-\alpha)\delta_{1,j-i}, \ \ 0 < \alpha < 1.$$

Das eindeutig bestimmte invariante Wmaß π *berechnet sich zu*

$$\pi(i) = \alpha(1-\alpha)^i, \ \ i \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}.$$

Die MK ist offensichtlich gleichgradig konvergent in Totalvariation (sie erfüllt die Bedingung (2.4)) und hat somit eine $L^2(\pi)$*-Spektrallücke. Andererseits kann man nachprüfen, dass für alle* $n_0 \in \mathbb{N}$ *gilt:*

$$\sup_{g_A \in \mathcal{G}} \frac{H(P^{n_0} g_A)}{H(g_A)} = 1.$$

5.3 Markov-Ketten mit Sprunglücken

Es wurde von uns schon festgestellt, dass $L_n > 0$ nicht hinreichend ist für die Existenz einer $L^2(\pi)$-Spektrallücke. Stellt man an die MK jedoch zusätzliche Bedingungen, so zeigt sich, dass es tatsächlich möglich ist, eine ähnliche Ungleichung wie 5.10 herzuleiten. Hierfür benötigen wir zunächst folgende Definition:

Definition 5.3.1 *Wir sagen, der* n*-te Übergangskern* $p^n(\cdot, \cdot)$ *einer MK* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *besitzt eine Sprunglücke der Größe* ϵ *bei* 0, *wenn*

$$p^n(x, A) = 0 \ \ \vee \ \ p^n(x, A) \geq \epsilon \ \forall x \in \Omega, A \in \mathcal{F}. \tag{5.15}$$

Lemma 5.3.2 *Angenommen, der Übergangskern* $p(\cdot, \cdot)$ *der MK* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *besitzt eine Sprunglücke der Größe* ϵ. *Dann besitzt der* n*-te Übergangskern* $p^n(\cdot, \cdot)$ *mindestens eine Sprunglücke der Größe* ϵ^n.

Beweis: Einfache Induktion.

□

Satz 5.3.3 *Sei* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *eine stationäre MK mit invariantem Startmaß* π, *deren* n*-ter Übergangskern eine Sprunglücke der Größe* ϵ *besitze. Sei* $\epsilon < \frac{1}{e^2}$. *Dann gilt:*

$$k_n(A) \geq \frac{4}{(-8 \log \epsilon)^{1+\delta}} L_n(A)^{1+\delta}, \tag{5.16}$$

und damit

$$k_n \geq \frac{4}{(-8 \log \epsilon)^{1+\delta}} L_n^{1+\delta}. \tag{5.17}$$

Hier ist δ *die eindeutig bestimmte Lösung von*

$$\epsilon^\delta (-\log \epsilon)^{1+\delta} = 1, \tag{5.18}$$

und damit

$$\delta = \frac{\log \log \frac{1}{\epsilon}}{\log \frac{1}{\epsilon} - \log \log \frac{1}{\epsilon}}. \tag{5.19}$$

Beweis: Seien $B_\epsilon = B_\epsilon(A) := \{x \in \Omega : \epsilon \leq p(x,A) \leq 1-\epsilon\}$ und $H = H(A) := \{x \in \Omega : p(x,A) \leq \frac{1}{2}\}$. Offensichtlich gilt dann nach Voraussetzung: $H \cap B_\epsilon^c = \emptyset$. Sei $q_n(A) := 2\pi(A)\pi(A^c)k_n(A)$. Mit diesen Definitionen folgt:

$$
\begin{aligned}
q_n(A) &= \int_A p^n(x,A^c)\pi(dx) + \int_{A^c} p^n(x,A)\pi(dx) \\
&\geq \int_\Omega \min(p^n(x,A^c), p^n(x,A))\pi(dx) \\
&= \int_{B_\epsilon\cap H} p^n(x,A)\pi(dx) + \int_{B_\epsilon\cap H^c} p^n(x,A^c)\pi(dx) + \int_{B_\epsilon^c\cap H^c} p^n(x,A^c)\pi(dx) \\
&\geq \frac{1}{-\log\epsilon}\int_{B_\epsilon\cap H} \eta(p^n(x,A))\pi(dx) + \frac{1}{-\log\epsilon}\int_{B_\epsilon\cap H^c} \eta(p^n(x,A^c))\pi(dx) \\
&\qquad + \int_{B_\epsilon^c\cap H^c} \eta(p^n(x,A^c))^{1+\delta}\pi(dx) \\
&\geq \frac{1}{-\log\epsilon}\int_{B_\epsilon} \eta(p^n(x,A))\pi(dx) \\
&\quad + \pi(B_\epsilon^c\cap H^c)\left(\int_{B_\epsilon^c\cap H^c} \eta(p^n(x,A))\frac{\pi(dx)}{\pi(B_\epsilon^c\cap H^c)}\right)^{1+\delta}.
\end{aligned}
$$

Hieraus folgt:

$$
\begin{aligned}
\frac{k_n(A)}{2} &\geq \frac{1}{-4\log\epsilon}\frac{1}{\pi(A)}\int_{B_\epsilon} \eta(p^n(x,A))\pi(dx) \\
&\quad + \frac{\pi(B_\epsilon^c\cap H^c)}{4\pi(A)}\left(\int_{B_\epsilon^c\cap H^c} \eta(p^n(x,A))\frac{\pi(dx)}{\pi(B_\epsilon^c\cap H^c)}\right)^{1+\delta}.
\end{aligned}
$$

Man kann zeigen, dass $\pi(B_\epsilon^c\cap H^c) \leq \frac{\pi(A)}{1-\epsilon}$. Da die linke Seite der obigen Ungleichung nicht größer als eins ist (vgl. Lemma 4.1.2), und die Terme auf der rechten Seite positiv sind, wird der Ausdruck kleiner, wenn der erste Summand auf der rechten Seite mit $1+\delta$ potenziert wird. Somit erhält man:

$$
\begin{aligned}
\frac{k_n(A)}{2} &\geq \frac{1}{(-4\log\epsilon)^{1+\delta}}\left(\frac{1}{\pi(A)}\int_{B_\epsilon} \eta(p^n(x,A))\pi(dx)\right)^{1+\delta} \\
&\quad + \frac{(1-\epsilon)^\delta}{4}\left(\frac{1}{\pi(A)}\int_{B_\epsilon\cap H^c} \eta(p^n(x,A))\pi(dx)\right)^{1+\delta} \\
&\geq \frac{2}{(-4\log\epsilon)^{1+\delta}}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi(A)}\int_{B_\epsilon} \eta(p^n(x,A))\pi(dx)\right)^{1+\delta}\right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi(A)}\int_{B_\epsilon\cap H^c} \eta(p^n(x,A))\pi(dx)\right)^{1+\delta}\right) \\
&\overset{Jensen}{\geq} \frac{2}{(-4\log\epsilon)^{1+\delta}}\frac{1}{2^{1+\delta}}L_n(A)^{1+\delta}.
\end{aligned}
$$

Hiermit erhält man schließlich:

$$
k_n(A) \geq \frac{4}{(-8\log\epsilon)^{1+\delta}}L_n(A)^{1+\delta}. \tag{5.20}
$$

Bilden des Infimums auf beiden Seiten liefert die Behauptung.

□

Korollar 5.3.4 *Sei $\xi_1, \xi_2, \dots$ eine stationäre MK mit invariantem Startmaß π, deren n-ter Übergangskern $p(\cdot,\cdot)$ eine Sprunglücke besitze. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *P hat eine Spektrallücke.*
2. *$\exists n_0 \in \mathbb{N}: \ L_{n_0} > 0$.*

Beweis: Die Notwendigkeit von Bedingung 2 folgt aus Korollar 5.2.3. Wegen Satz 5.3.3 und Satz 4.2.2 zusammen mit Lemma 4.1.5 ist die Bedingung jedoch auch hinreichend.

□

5.4 Schwache Reversibilität

Wir sind also in der Lage, im Fall der Existenz einer Sprunglücke des Übergangskerns die Größe der Spektrallücke über den Entropiezuwachs abzuschätzen. Wir wollen jetzt versuchen, die Größe der Spektrallücke mit Hilfe der Konstanten k und K abzuschätzen, wie dies schon für reversible MKen gelungen ist. Dafür werden wir wieder die Existenz einer Sprunglücke voraussetzen und benutzen, dass der Entropiezuwachs L_n monoton wachsend in n ist. Haben wir also $L_{n_0} > 0$ für irgendein $n_0 \in \mathbb{N}$, dann folgt automatisch $L_n \geq L_{n_0} > 0$ für alle $n \geq n_0$. Wir haben jedoch das Problem, dass die Größe der Sprunglücke ϵ von n abhängt und für nicht endliche Zustandsräume Ω nicht für alle $n \in \mathbb{N}$ von Null weg beschränkt werden kann. Es gibt jedoch einen Ausweg für dieses Problem. Wir haben in Proposition 3 ein hinreichendes und notwendiges Kriterium für die Existenz einer $L^2(\pi)$-Spektrallücke kennen gelernt, das wir nun benutzen wollen. Um Proposition 3 direkt anzuwenden, müssen Operatoren der Form ${P^*}^n P^n$ berechnet werden. Da es in der Regel sehr schwierig, oft auch unmöglich ist, diese Operatoren explizit auszurechnen, umgehen wir dieses Problem, indem wir folgende Abschwächung des Reversibilitätsbegriffs einführen:

Definition 5.4.1 *Sei $\xi_1, \xi_2, \dots$ eine stationäre MK mit Zustandsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \pi)$, $p(\cdot,\cdot)$ der zugehörige Übergangskern und π ein invariantes Startmaß. Wir nennen diese Kette schwach reversibel, falls $C \in (1,\infty)$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ existieren, sodass*

$$\frac{1}{C} \leq \frac{\pi(dx)p^{n_0}(x,dy)}{\pi(dy)p^{n_0}(y,dx)} \leq C. \tag{5.21}$$

.

Ist n_0 minimal mit dieser Eigenschaft, dann nennen wir die Kette schwach reversibel von der Ordnung n_0. Die zugehörige Konstante $C = C_{n_0}$ nennen wir Reversibilitätskonstante zur Ordnung n_0.

Die Einführung der obigen Definition bietet noch einen weiteren Vorteil: Unter der Bedingung schwacher Reversibilität lässt sich ein einfach zu prüfendes Kriterium für die Abschätzung der Entropie angeben.

Satz 5.4.2 *Sei $\xi_1, \xi_2, \dots$ eine stationäre, schwach reversible MK der Ordnung n mit zugehörigem Reversibilitätskoeffizienten C_n, Zustandsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \pi)$ und invariantem Startmaß π. Dann gilt:*

$$L_n = \inf_{g_A \in \mathcal{G}} (H(P^n g_A) - H(g_A)) \geq \frac{k_n(1-\frac{K_n}{2})^2 \eta(1-(1-\frac{K_n}{2})^2 \frac{k_n}{6})}{6C_n}. \tag{5.22}$$

Beweis: Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir $n = 1$ annehmen. Für $k = 0$ und $K = 2$ ist die Abschätzung trivialerweise erfüllt. Daher kann im Folgenden $k \neq 0$ und $K \neq 2$ angenommen werden. Seien

$$B_\epsilon := \{x \in A^c : \epsilon < p(x, A) \leq 1 - \epsilon\},\ A^c_{>1-\epsilon} := \{x \in A^c : p(x, A) \geq 1 - \epsilon\},$$

und

$$A^c_{\leq\epsilon} := \{x \in A^c : p(x, A^c) \leq \epsilon\},\ A^c_{\leq 1-\epsilon} := \{x \in A^c : p(x, A) \leq 1 - \epsilon\},$$

wobei $0 \leq \epsilon \leq \frac{1}{2}$.
Es sollen nun zwei Ungleichungen bewiesen werden:

$$\begin{aligned} L(A) &= -\frac{1}{\pi(A)} \int_\Omega p(x, A) \log p(x, A) \pi(dx) \geq -\frac{1}{\pi(A)} \int_{B_\epsilon} p(x, A) \log p(x, A) \pi(dx) \\ &\geq -\frac{1}{\pi(A)} (1 - \epsilon) \log(1 - \epsilon) \pi(B_\epsilon). \end{aligned}$$

Dies liefert die erste Ungleichung:

$$\frac{\pi(B_\epsilon)}{\pi(A)} \leq \frac{1}{(1 - \epsilon) \log \frac{1}{1-\epsilon}} L(A) = \frac{1}{\eta(1 - \epsilon)} L(A). \tag{5.23}$$

Die andere Ungleichung erhalten wir aus

$$\begin{aligned} L(A) &\geq -\frac{1}{\pi(A)} \int_{A^c_{\leq\epsilon}} p(x, A) \log p(x, A) \pi(dx) \\ &\geq -\frac{1}{\pi(A)} \int_{A^c_{\leq\epsilon}} p(x, A^c) \log p(x, A^c) \pi(dx) \\ &\geq -\frac{1}{\pi(A)} (1 - \epsilon) \int_{A^c_{\leq\epsilon}} \log(1 - p(x, A)) \pi(dx) \\ &\geq -\frac{1}{\pi(A)} (1 - \epsilon) \int_{A^c_{\leq\epsilon}} -(p(x, A) + \frac{1}{2} p(x, A)^2 + \frac{1}{3} p(x, A)^3 + \ldots) \pi(dx) \\ &\geq \frac{1}{\pi(A)} (1 - \epsilon) \int_{A^c_{\leq\epsilon}} p(x, A) \pi(dx). \end{aligned}$$

Dies liefert

$$\frac{1}{\pi(A)} \int_{A^c_{\leq\epsilon}} p(x, A) \pi(dx) \leq \frac{1}{1 - \epsilon} L(A). \tag{5.24}$$

Wir brauchen im Folgenden noch eine untere Schranke von $\pi(A^c_{\leq 1-\epsilon})$, die nun bestimmt werden soll:

$$K \geq \frac{1}{\pi(A)\pi(A^c)} \int_{A^c_{>1-\epsilon}} p(x, A) \pi(dx) \geq \frac{(1 - \epsilon)\pi(A^c_{>1-\epsilon})}{\pi(A)\pi(A^c)}.$$

Damit ergibt sich

$$\frac{\pi(A^c_{>1-\epsilon})}{\pi(A^c)} \leq \frac{K}{2(1 - \epsilon)}$$

und somit

$$\pi(A^c_{\leq 1-\epsilon}) = \pi(A^c) - \pi(A^c_{>1-\epsilon}) \geq \pi(A^c)(1 - \frac{K}{2(1 - \epsilon)}) \geq \frac{1}{2}(1 - \frac{K}{2(1 - \epsilon)}).$$

Sei im Folgenden $\epsilon \leq \frac{1-\frac{K}{2}}{1-\frac{K}{2}+1}$. Dann gilt:

$$\pi(\leq A^c_{1-\epsilon}) \geq \frac{1}{2}(1-\frac{K}{2})^2. \tag{5.25}$$

Hiermit folgt:

$$\begin{aligned}
k &\leq \frac{1}{\pi(A\cup A^c_{>1-\epsilon})\pi(A^c_{\leq 1-\epsilon})}\int_{A\cup A^c_{>1-\epsilon}} p(x,A^c_{\leq 1-\epsilon})\pi(dx) \\
&= \frac{1}{\pi(A)\pi(A^c_{\leq 1-\epsilon})}\left(\int_{A\cup A^c_{>1-\epsilon}} p(x,B_\epsilon)\pi(dx)\right. \\
&\qquad \left. + \int_{A\cup A^c_{>1-\epsilon}} p(x,A^c_{\leq\epsilon})\pi(dx)\right) \\
&\leq \frac{1}{\pi(A)\pi(A^c_{\leq 1-\epsilon})}\left(C\pi(B_\epsilon) + C\int_{A^c_{\leq\epsilon}} p(x,A)\pi(dx)\right. \\
&\qquad \left. + \int_{A^c_{>1-\epsilon}} p(x,A^c_{\leq\epsilon})\pi(dx)\right) \\
&\overset{5.23,5.24,5.25}{\leq} C\frac{2}{(1-\frac{K}{2})^2}L(A)(\frac{1}{\eta(1-\epsilon)}+\frac{1}{1-\epsilon}) + \frac{2}{(1-\frac{K}{2})^2}\frac{\epsilon}{1-\epsilon} \\
&\leq \frac{3C}{(1-\frac{K}{2})^2\eta(1-\epsilon)}L(A) + \frac{3}{(1-\frac{K}{2})^2}\epsilon.
\end{aligned} \tag{5.26}$$

Wählt man nun $\epsilon = (1-\frac{K}{2})^2\frac{k}{6}$ (offensichtlich ist mit dieser Wahl von ϵ auch die obige Bedingung $\epsilon \leq \frac{1-\frac{K}{2}}{1-\frac{K}{2}+1}$ erfüllt), so folgt:

$$k \leq \frac{6C}{(1-\frac{K}{2})^2\eta(1-(1-\frac{K}{2})^2\frac{k}{6})}L(A). \tag{5.27}$$

Umstellen nach $L(A)$ liefert dann die Behauptung.

□

Der nun folgende Satz, der mit Hilfe der zuvor entwickelten Theorie bewiesen wird, ist für die Anwendungen von besonderer Bedeutung, da er zum einen eine in vielen Fällen leicht nachzuprüfende hinreichende Bedingung für die Existenz einer $L^2(\pi)$-Spektrallücke darstellt, zum anderen sich mit ihm die Größe der Spektrallücke abschätzen läßt.

Satz 5.4.3 *Sei $\xi_1, \xi_2, \ldots$ eine schwach reversible MK der Ordnung n_0 und C_{n_0} der zugehörige Reversibilitätskoeffizient. Wir nehmen an, der n_1-te Übergangskern $p^{n_1}(\cdot,\cdot)$ habe eine Sprunglücke der Größe ϵ. Dann gilt:*

$$k_{P^{*n_0n_1}P^{n_0n_1}} \geq \frac{1}{C_{n_0}^{n_1-1}}\frac{4}{(-16n_0\log\epsilon)^{1+\delta}}\left(\frac{k_{n_0}(1-\frac{K_{n_0}}{2})^2\eta(1-(1-\frac{K}{2})^2\frac{k}{6})}{6C_{n_0}}\right)^{1+\delta}, \tag{5.28}$$

wobei δ wiederum die eindeutig bestimmte Lösung von $(\epsilon^{2n_0})^\delta(-2n_0\log(\epsilon))^{1+\delta} = 1$ sei und sich damit ergibt zu

$$\delta = \frac{\log\log\frac{1}{\epsilon^{2n_0}}}{2n_0\log\frac{1}{\epsilon} - \log\log\frac{1}{\epsilon^{2n_0}}}.$$

Um diesen Satz zu beweisen, benötigen wir folgendes Lemma:

Lemma 5.4.4 *Sei $\xi_1, \xi_2, \dots$ eine schwach reversible MK der Ordnung n_0 mit zugehörigem Reversibilitätskoeffizient C_{n_0}. Dann gilt für alle $l \in \mathbb{N}$:*

$$C_{n_0}^l k_{2n_0l} \geq k_{P^{*n_0l}P^{n_0l}} \geq \frac{1}{C_{n_0}^l} k_{2n_0l}. \tag{5.29}$$

Beweis: Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann $n_0 = 1$ angenommen werden. Wir zeigen nur die eine Ungleichung, da die andere genauso bewiesen wird.

$$\begin{aligned}
\pi(A)\pi(A^c)k_{P^{*l}P^l}(A) &= \int_A P^{*^l} P^l 1_{A^c}(x)\pi(dx) \\
&= \int_\Omega p^l(x_1, A)p^l(x_1, A^c) \\
&= \int_\Omega \left(\int_\Omega \dots \int_A p(x_1, dx_2) \cdot \ldots \cdot p(x_l, x_{l+1}) \right) \cdot \\
&\qquad\qquad p^l(x_1, A^c)\pi(dx_1) \\
&\geq \frac{1}{C_1} \int_\Omega \int_\Omega \pi(dx_2)p(x_2, dx_1) \\
&\quad \cdot \left(\left(\int_\Omega \dots \int_A p(x_2, dx_3) \cdot \ldots \cdot p(x_{l-1}, dx_l) \right) p^l(x_1, A^c) \right) \\
&\geq \dots \\
&\geq \frac{1}{C_1^l} \int_A \pi(dx_{l+1}) \int_\Omega \dots \int_\Omega p(x_{l+1}, x_l) \cdot \ldots \cdot p(x_2, dx_1) \cdot \\
&\qquad\qquad p^l(x_1, A^c) \\
&= \frac{\pi(A)\pi(A^c)}{C_1^l} k_{2l}(A).
\end{aligned} \tag{5.30}$$

Nimmt man nun das Infimum auf beiden Seiten, dann folgt die Behauptung.

□

Wir kommen nun zu dem Beweis des Satzes 5.4.3.
Beweis: Es gilt:

$$\begin{aligned}
k_{P^{*n_0n_1}P^{n_0n_1}} &\overset{\textit{Lemma } 5.4.4}{\geq} \frac{1}{C_{n_0}^{n_1}} k_{P^{2n_0n_1}} \\
&\overset{\textit{Satz } 5.3.3, \textit{Lemma } 5.3.2}{\geq} \frac{1}{C_{n_0}^{n_1}} \frac{4}{(-8 \log \epsilon^{2n_0})^{1+\delta}} L_{2n_0n_1}^{1+\delta} \\
&\overset{\textit{Satz } 5.4.2}{\geq} \frac{1}{C_{n_0}^{n_1}} \frac{4}{(-16n_0 \log \epsilon)^{1+\delta}} \cdot \\
&\qquad \left(\frac{k_{n_0}(1 - \frac{K_{n_0}}{2})^2 \eta(1 - (1 - \frac{K}{2})^2 \frac{k}{6})}{6C_{n_0}} \right)^{1+\delta}.
\end{aligned}$$

□

Korollar 5.4.5 *Sei $\xi_1, \xi_2, \dots$ eine stationäre schwach reversible MK der Ordnung 1 mit Zustandsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \pi)$, wobei π ein invariantes Maß der Kette sei. Angenommen, der Übergangskern $p(\cdot, \cdot)$ habe eine Sprunglücke der Größe ϵ. Es gelte zudem*

$$0 < k \leq K < 2. \tag{5.31}$$

Dann hat P eine $L^2(\pi)$-Spektrallücke und es gilt:

$$\sigma(P - P_1) \subset K_r(0),\ r = \sqrt{1 - \frac{\kappa}{2C}\left(\frac{k(1-\frac{K}{2})^2\eta(1-(1-\frac{K}{2})^2\frac{k}{6})}{-182C\log\epsilon}\right)^{1+\delta}},$$

wobei C der zugehörige Reversibilitätskoeffizient ist.

Beweis: Die Behauptung folgt direkt aus Satz 5.4.3 und Proposition 3.

□

Korollar 5.4.6 *Sei $\xi_1, \xi_2, \ldots$ eine stationäre schwach reversible MK der Ordnung 1 mit Zustandsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \pi)$, wobei π ein invariantes Maß der Kette sei. Angenommen, es gelte:*

$$0 < k,\ 0 < k_2.$$

Dann hat P eine $L^2(\pi)$-Spektrallücke.

Beweis: Die Notwendigkeit der Bedingung folgt aus Satz 4.2.2. Dass die Bedingung auch hinreichend ist, ergibt sich unmittelbar aus Lemma 5.4.4 und Proposition 3.

□

Bemerkung 5.4.7 *Es ist nicht klar, ob in Satz 5.4.3 die Existenz einer Sprunglücke notwendig für die Existenz einer Spektrallücke ist. Das Korollar 5.4.6 lässt jedoch vermuten, dass die Existenz einer Sprunglücke nicht notwendig ist. Wegen Lemma 4.1.6 wissen wir, dass $k_2 > 0$ auch $K < 2$ impliziert. Es ist bis jetzt jedoch noch nicht gelungen zu zeigen, dass schwach reversibel + $k > 0$ + $K < 2$ auch $k_2 > 0$ impliziert. Dies ist jedoch genau das, was wir zeigen müssen, um obige Vermutung zu bestätigen.*

Kapitel 6

Spektrallücken und geometrische Ergodizität

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit dem Zusammenhang von geometrischer Ergodizität und der Existenz einer $L^2(\pi)$-Spektrallücke des Markov-Operators P. Die Eigenschaft der geometrischen Ergodizität einer MK wird unter anderem wegen ihrer Bedeutung für Markov Chain Monte Carlo (MCMC) Methoden (siehe z.B. [29], [65]) in der Literatur umfassend diskutiert (siehe z.B. [69], [67], [51]). Mehrere zur geometrischen Ergodizität äquivalente Bedingungen werden in dem Buch von Meyn und Tweedie [51] angegeben. Die Frage, wann geometrische Ergodizität die Existenz einer $L^2(\pi)$-Spektrallücke des assoziierten Markov-Operators P impliziert und ob die Umkehrung gilt, ist in der Literatur noch nicht abschließend geklärt. Roberts und Tweedie zeigten die Äquivalenz der beiden Bedingungen für reversible MK (siehe [58]). Chen [8], [9] erzielt in einigen Spezialfällen für nicht reversible MKen hinreichende Bedingungen für die Existenz einer Spektrallücke und zeigt darüber hinaus, dass für MKen mit abzählbarem Zustandsraum aus der Existenz einer $L^2(\pi)$-Spektrallücke die geometrische Ergodizität folgt.
Für den allgemeinen Fall (beliebiger Zustandsraum) ist jedoch keine der beiden Implikationen bewiesen. In Abschnitt 6.1 wird zunächst eine hinreichende Bedingung für die Existenz einer $L^2(\pi)$-Spektrallücke bewiesen. Für den Beweis werden L^p-L^q-Ungleichungen und der Spektralsatz für normale Operatoren verwendet. In Abschnitt 6.2 gelingt die Implikation 'L^2-Spektrallücke $\Rightarrow$ geometrische Ergodizität' im allgemeinen Fall unter der Hinzunahme einer technischen Bedingung. Dabei wird der exponentielle Abfall von $1 - k_{P^{*n}P^n}$ gegen Null genutzt. In Abschnitt 6.3 werden drei Beispiele gegeben, in denen einige der in den Kapiteln 4 und 5 entwickelten Werkzeuge benutzt werden. In dem ersten Beispiel wird mit Hilfe der in Kapitel 4 hergeleiteten Theorie die Existenz einer $L^2(\pi)$-Spektrallücke nachgewiesen. Das zweite Beispiel zeigt eine geometrisch-ergodische MK, die jedoch keine $L^2(\pi)$-Spektrallücke besitzt, da eine in Kapitel 4 bewiesene notwendige Bedingung verletzt ist. Das letzte Beispiel zeigt, dass auf die in Korollar 5.3.4 geforderte Existenz einer Sprunglücke nicht verzichtet werden kann, wenn sonst keine weiteren Bedingungen an die MK gestellt werden.

6.1 Eine hinreichende Bedingung für eine Spektrallücke

Wir sind in unserer Arbeit schon intensiv auf die Doeblin-Bedingung eingegangen und haben gesehen, dass diese zusammen mit der Forderung nach Aperiodizität der Kette $\xi_1, \xi_2, \ldots$ äquivalent ist zur gleichgradigen Konvergenz in Totalvariation. Diese hat sich als hinreichend für die Existenz einer $L^2(\pi)$-Spektrallücke von P erwiesen (vgl. Proposition 2). Wir wollen nun von der gleichgradigen Konvergenz in Totalvariation abrücken, sodass P immer noch eine $L^2(\pi)$-Spektrallücke besitzt. Dies kann in folgender Art und Weise geschehen:

Satz 6.1.1 *Sei $\xi_1, \xi_2, \ldots$ eine stationäre MK mit beliebigem Zustandsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \pi)$, $\mathcal{F}$ eine abzählbar erzeugte σ-Algebra, π das invariante Startmaß der MK, $p(\cdot,\cdot)$ der Übergangskern und P der assoziierte Markov-Operator auf $L^2(\pi)$. Dann ist folgende Bedingung hinreichend für die Existenz einer Spektrallücke von P:*

$$\exists \delta < 1, C_x > 0 : \quad ||p^n(x,\cdot) - \pi(\cdot)||_V \leq C_x \delta^n \quad \pi - f.s.,$$

und

$$||P^{*n} P^n - (P^* P)^n||_2 \leq K\, q^n, \;\; K > 0,\, q < 1, \tag{6.1}$$

Bemerkung 6.1.2 *Die erste Bedingung wird auch fast sichere geometrische Ergodizität genannt. Die zweite Eigenschaft könnte man als exponentiell asymptotische Normalität des Operators P bezeichnen. Der nun folgende Beweis ähnelt dem von Chen [10], der die Aussage unter den zusätzlichen Bedingungen der Reversibilität der MK und der absoluten Stetigkeit der Maße $p(x,\cdot)$ bezüglich π beweist.*

Um den Satz zu beweisen, benötigen wir einen Satz, welcher zuerst von E. Nummelin und P. Tuominen (vgl. [56] [55], Theorem 6.14 (iii)) bewiesen wurde.

Satz 6.1.3 *Sei $\xi_1, \xi_2, \ldots$ eine ergodische MK. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1.
$$\exists \delta_x < 1, C_x > 0 : \quad ||p^n(x,\cdot) - \pi(\cdot)||_V \leq C_x \delta^n \, \pi - f.s. \tag{6.2}$$

2.
$$\exists \delta < 1, C > 0, \;\; \textit{sodass} \; || \, ||p^n(\cdot,\cdot) - \pi||_V||_1 \leq C\delta^n. \tag{6.3}$$

Für den Beweis des Satzes 6.1.1 brauchen wir noch die folgenden beiden Lemmata:

Lemma 6.1.4 *Es gilt folgende Ungleichung:*

$$|| \, ||p^n(\cdot,\cdot) - \pi||_V||_1 \geq ||P^n - P_1||_{\infty\to 1}. \tag{6.4}$$

Beweis: Nun gilt für f mit $||f||_\infty = 1$:

$$\begin{aligned}
||(P^n - P_1)f||_1 &= \int_\Omega |(P^n - P_1)f|\pi(dx) \leq \sup_{g:||g||_\infty \leq 1} \int_\Omega |(P^n - P_1)g|\pi(dx) \\
&= \sup_{g:|g|\leq 1} \int_\Omega |(P^n - P_1)g|\pi(dx) \\
&\leq \int_\Omega \sup_{g:|g|\leq 1} |(P^n - P_1)g|\pi(dx) \\
&= || \, ||p^n(\cdot,\cdot) - \pi||_V||_1.
\end{aligned} \tag{6.5}$$

Bei der vorletzten Gleichheit wurde $\pi(dx)p^n(x,dy) << \pi(dy)\ \pi - f.s.$ ausgenutzt, wobei diese Beziehung unmittelbar aus der Stationarität von π folgt und $\pi(dy)$ als Maß auf $\Omega \times \Omega$ aufgefasst wird, sodass $\pi(A \times B) = \pi(B)$.

□

Lemma 6.1.5

$$||P^n - P_1||_{\infty\to 1} \geq \frac{1}{2}||P^n - P_1||_{\infty\to 2}.$$

Beweis: Für $f \in L^\infty(\pi)$ gilt:

$$\begin{aligned} ||(P^n - P_1)f||_2^2 &= \int_\Omega |((P^n - P_1)f)(x)|^2 \pi(dx) \leq 2||f||_\infty \int_\Omega |((P^n - P_1)f)(x)|\pi(dx) \\ &\leq 2||f||_\infty^2 ||P^n - P_1||_{\infty\to 1}. \end{aligned}$$

□

Aus Lemma 6.1.4 und Lemma 6.1.5 folgt dann

$$||P^n - P_1||_{\infty\to 2} \leq 2||\ ||p^n(\cdot,\cdot) - \pi||_V||_1. \tag{6.6}$$

Nach Voraussetzung folgt hieraus jedoch für alle $f \in L^\infty(\pi)$:

$$||(P^n - P_1)f||_{\infty\to 2} \leq 2C||f||_\infty q^n. \tag{6.7}$$

Wir kommen jetzt zum Beweis des Satzes 6.1.1
Beweis:
Sei im Folgenden zunächst $f \in L_0^\infty(\pi) := \{f \in L^\infty(\pi) : P_1 f = 0\}$. Dann gilt:

$$||P^n f||_2^2 = < P^{*^n} P^n f, f >=< (P^{*^n} P^n - (P^*P)^n)f, f > + < (P^*P)^n f, f > \tag{6.8}$$

(6.9)

Umformen der obigen Gleichung liefert:

$$\begin{aligned} < (P^*P)^n f, f > &= ||P^n f||_2^2 - < (P^{*^n} P^n - (P^*P)^n)f, f > \\ &\overset{6.6,2}{\leq} (2C||f||_\infty \delta^n)^2 + K||f||_\infty q^n \\ &\leq \max((2C||f||_\infty)^2, K||f||_\infty) \max(\delta^2, q)^n. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Um die störende $||f||_\infty$-Abhängigkeit der rechten Seite zu eliminieren, benutzen wir nun eine auf Röckner und Wang (vgl. [62], [70]) zurückgehende Methode, welche den Spektralsatz für stetige, symmetrische lineare Operatoren benutzt (vgl. [27], S. 600). Sei im Folgenden $n \in k\mathbb{N}$ für irgendein $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} < (P^*P)^n f, f > &= \int_0^1 \lambda^{k\frac{n}{k}} < dE_\lambda f, f > \\ &\overset{Jensen}{\geq} \left(\int_0^1 \lambda^k < dE_\lambda f, f > \right)^{\frac{n}{k}} \\ &= < (P^*P)^k f, f >^{\frac{n}{k}}\ . \end{aligned}$$

Dies zusammen mit 6.10 liefert dann:

$$< (P^*P)^k f, f > \leq < (P^*P)^n f, f >^{\frac{k}{n}} \leq \max((2C||f||_\infty)^2, K||f||_\infty)^{\frac{k}{n}} \max(\delta^2, q)^k.$$

Bilden des Grenzwertes für $n \to \infty$ ergibt:

$$< (P^*P)^k f, f > \leq \max(\delta^2, q)^k. \tag{6.11}$$

Da dies für alle $f \in L_0^\infty(\pi)$ gilt und $L_0^\infty(\pi)$ dicht in $L_0^2(\pi)$ liegt, gilt diese Behauptung auch für alle $f \in L_0^2(\pi)$. Setzt man daher 6.11 in 6.8 ein, so ergibt dies auf $L^2(\pi)$:

$$||P^k - P_1||_{2\to 2}^2 \leq Kq^k + \max(\delta^2, q)^k \leq 2K\max(\delta^2, q)^k. \tag{6.12}$$

Damit folgt die Behauptung.

□

Bemerkung 6.1.6 *Der soeben bewiesene Satz ist in einer Richtung eine Verallgemeinerung des von Roberts and Tweedie 2001 bewiesenen Satzes über die Äquivalenz von geometrischer Ergodizität und die Existenz einer $L^2(\pi)$-Spektrallücke im Falle reversibler MKen (vgl. [58]). Die Bedingung 6.1 ist z.B. trivialerweise für normale Operatoren P erfüllt und wir vermuten, dass sich die Bedingung 6.1 nicht wesentlich verbessern lässt.*

6.2 Eine hinreichende Bedingung für geometrische Ergodizität

Wir wollen nun die in den vorherigen Kapiteln hergeleiteten Formalismen benutzen, um den Zusammenhang zwischen $L^2(\pi)$-Spektrallücken und geometrischer Ergodizität näher zu erklären.

Satz 6.2.1 *Sei $\xi_1, \xi_2, \ldots$ eine stationäre MK mit Zustandsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \pi)$, invariantem Startmaß π, Übergangskern $p(\cdot,\cdot)$ und $\mathcal{F}$ eine abzählbar erzeugte σ-Algebra. Angenommen, P besitze eine $L^2(\pi)$-Spektrallücke. Existiert darüber hinaus eine Funktion $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Zerlegung $(A_i^n)_{i\in\{1,\ldots\phi(n)\}}$ von Ω mit $\bigcup_{i=1}^{\phi(n)} A_i^n = \Omega$ und $A_i^n \cap A_j^n = \emptyset\ \forall i \neq j$, sodass*

$$\liminf_{n\to\infty} \left(\frac{\int_\Omega \sum_{i=1}^{\phi(n)} |p^n(x, A_i^n) - \pi(A_i^n)|\pi(dx)}{||\,||p^n(\cdot,\cdot) - \pi||_V||_1} \right)^{\frac{1}{n}} > \limsup_{n\to\infty} \left(\phi(n)(1 - k_{P^{*n}P^n})\right)^{\frac{1}{n}}. \tag{6.13}$$

Dann ist die MK π-f.s. geometrisch ergodisch. Die Ergodizitätsrate wird dann beschränkt durch

$$\inf_{\phi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}} \frac{\limsup_{n\to\infty} \left(\phi(n)(1 - k_{P^{*n}P^n})\right)^{\frac{1}{n}}}{\liminf_{n\to\infty} \left(\frac{\int_\Omega \sum_{i=1}^{\phi(n)} |p^n(x,A_i^n) - \pi(A_i^n)|\pi(dx)}{||\,||p^n(\cdot,\cdot)-\pi||_V||_1} \right)^{\frac{1}{n}}}. \tag{6.14}$$

Beweis: Wir setzen nun die Rechnung von Gleichung 4.29 fort und erhalten so

$$\begin{aligned} 1 - k_{P^{*n}P^n}(A) &= \frac{1}{\pi(A)\pi(A^c)} \int_\Omega (p^n(x, A^c) - \pi(A^c))^2 \pi(dx) \\ &= \frac{1}{\pi(A)\pi(A^c)} \int_\Omega (p^n(x, A) - \pi(A))^2 \pi(dx) \\ &\geq \pi(A) \int_\Omega \left(\frac{p^n(x, A)}{\pi(A)} - 1 \right)^2 \pi(dx). \end{aligned} \tag{6.15}$$

Wegen der nach Voraussetzung existierenden Zerlegung $(A_i^n)_{i\in\{1,\dots\phi(n)\}}$, ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\phi(n)(1-k_{P^{*n}P^n}) &\geq \sum_{i=1}^{\phi(n)} \pi(A_i^n) \int_\Omega \left(\frac{p^n(x,A_i^n)}{\pi(A_i^n)}-1\right)^2 \pi(dx) \\
&= \int_\Omega \sum_{i=1}^{\phi(n)} \pi(A_i^n) \left(\frac{p^n(x,A_i^n)}{\pi(A_i^n)}-1\right)^2 \pi(dx) \\
&\overset{Jensen}{\geq} \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{\phi(n)} |p^n(x,A_i^n)-\pi(A_i^n)|\right)^2 \pi(dx) \\
&\overset{Jensen}{\geq} \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^{\phi(n)} |p^n(x,A_i^n)-\pi(A_i^n)|\pi(dx)\right)^2 \\
&= \frac{\left(\int_\Omega \sum_{i=1}^{\phi(n)} |p^n(x,A_i^n)-\pi(A_i^n)|\pi(dx)\right)^2}{||\,||p^n(\cdot,\cdot)-\pi||_V||_1^2} ||\,||p^n(\cdot,\cdot)-\pi||_V||_1^2
\end{aligned}$$

Hiermit folgt:

$$||\,||p^n(\cdot,\cdot)-\pi||_V||_1^{\frac{1}{n}} \leq \left((\phi(n)(1-k_{P^{*n}P^n}))^{\frac{1}{2}} \frac{||\,||p^n(\cdot,\cdot)-\pi||_V||_1}{\int_\Omega \sum_{i=1}^{\phi(n)} |p^n(x,A_i^n)-\pi(A_i^n)|\pi(dx)}\right)^{\frac{1}{n}} \tag{6.16}$$

Aus Satz 6.1.3 folgt, dass die Kette geometrisch ergodisch ist, wenn die rechte Seite der obigen Gleichung schließlich kleiner ist als eins und von eins weg beschränkt bleibt. Dies wiederum ist genau dann erfüllt, wenn (6.13) gilt. Damit folgt der erste Teil des Satzes. Die zweite Aussage des Satzes ist offensichtlich. Somit ist die Behauptung bewiesen.

□

Bemerkung 6.2.2 *Hat P keine Spektrallücke, dann existiert keine Folge $\phi(n)$ mit Werten in den natürlichen Zahlen, die der Bedingung in (6.13) genügt, da in diesem Fall ein $\epsilon > 0$ existiert mit der Eigenschaft, dass $1-k_{P^{*n}P^n} \geq \epsilon > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (ansonsten ergäbe sich ein Widerspruch zu der in Kapitel 4 hergeleiteten Monotonität und Konvergenz gegen eins von $k_{P^{*n}P^n}$).*

6.3 Beispiele

Es sollen nun einige Beispiele angegeben werden, die die Nützlichkeit der zuvor entwickelten Begriffe und Resultate verdeutlichen.

6.3.1 Beispiel 1

Sei $\Omega = \mathbb{N}\cup\{0\}$ und $\pi = (\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\dots)$ das stationäre Wmaß zum Übergangskern P gegeben durch

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{32} & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{6.17}$$

Wir zeigen nun:

1. Die Kette ist geometrisch ergodisch.
2. Die Kette besitzt eine $L^2(\pi)$-Spektrallücke.

Da nach Satz 6.2.1 die zweite Aussage die erste impliziert, genügt es, 2. zu zeigen. Dies machen wir, indem wir folgende, in Korollar 4.2.4 hergeleitete, hinreichende Bedingung verifizieren:

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{A\in\mathcal{F}:\pi(A)\le\frac{1}{2}} \frac{1}{\pi(A^c)}\int_A |\frac{p^n(x,A)}{\pi(A)}-1|\pi(dx) \le 1-\epsilon,\ \epsilon>0. \tag{6.18}$$

Zunächst beobachten wir Folgendes:

$$p^n(i,A) = \begin{cases} 1_A(i-n) & : \ i\ge n \\ \pi(A) & : \ i<n \end{cases}. \tag{6.19}$$

Seien im Folgenden $A_n := A\cap\{n,n+1,n+2,\ldots\}$, $B_n := \{x\in A : |\frac{p^n(x,A)}{\pi(A)}-1|\le 1\}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi(A^c)}\int_A |\frac{p^n(x,A)}{\pi(A)}-1|\pi(dx) &= \frac{1}{\pi(A^c)}\int_{A_n} |\frac{p^n(x,A)}{\pi(A)}-1|\pi(dx) \\ &\le \pi(A_n\cap B_n) + \int_{A_n\cap B_n^c}\left(\frac{1_A(x-n)}{\pi(A)}-1\right)\pi(dx) \\ &\le 2^{-n} + \frac{1}{\pi(A)}\int_{A_n\cap B_n^c} 1_A(x-n)\pi(dx). \end{aligned} \tag{6.20}$$

Sei nun $x_0\in A_n\cap B_n^c$ minimal mit der Eigenschaft, dass $1_A(x_0-n)=1$, dann folgt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi(A^c)}\int_A |\frac{p^n(x,A)}{\pi(A)}-1|\pi(dx) &\le 2^{-n} + \frac{1}{2^{-(x_0-n)}}2\cdot 2^{-x_0} \\ &= 3\cdot 2^{-n}. \end{aligned} \tag{6.21}$$

Damit ist die hinreichende Bedingung aus Korollar 4.2.4 gezeigt und die Behauptung bewiesen. Aus dem zuvor Dargestellten ergibt sich zudem:

$$k(A) \ge \frac{1}{2}.$$

Zusammen mit Satz 4.2.2 folgt dann jedoch, dass das $L^2(\pi)$-Spektrum von $P-P_1$ enthalten ist in $K_r(0)$ mit $r=(1-\frac{1}{64})^{1/(1+[\frac{2\pi}{\arccos(1-1/64)}])} < 0,9997$. Diese Abschätzung ist dann schlecht (d.h. es wird viel verschenkt), wenn $\kappa >> 1$, wobei κ gegeben ist durch (4.14). Da der exakte Wert für κ bis heute völlig unbekannt ist, kann auf diesem Weg keine Verbesserung der Abschätzung erwartet werden.

6.3.2 Beispiel 2

Wir wollen nun zeigen, dass aus der geometrischen Ergodizität einer MK im Allgemeinen nicht die Existenz einer $L^2(\pi)$-Spektrallücke des assoziierten Operators P gefolgert werden kann. Dafür betrachten wir das Folgende von Häggström [35] vorgeschlagene Beispiel, der dieses benutzt, um zu zeigen, dass geometrische - im Gegensatz zur gleichgradigen Ergodizität einer stationären MK $\xi_1,\xi_2,\ldots$ zuzüglich der Endlichkeit der Varianz von ϕ bezüglich des stationären Maßes π nicht hinreichend ist für die Gültigkeit des Zentralen Grenzwertsatzes für die Summe

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \phi \circ \xi_i.$$

Der Zustandsraum Ω der MK $\xi_1, \xi_2, \dots$ sei gegeben durch

$$\Omega = \{0\} \cup \{(a,b) : a \geq 1, b \in \{1,2,\dots,a\}\}.$$

Die Dynamik der Kette sei gegeben durch den folgenden Übergangskern:

$$p((a,b),(a,b-1)) = 1, \quad \text{für } b \geq 2, \; p((a,1),0) = 1,$$

$p(0,0) = \frac{1}{2}$ und

$$p(0,(a,b)) = \begin{cases} 2^{-(a+1)} & : \; a = b \\ 0 & : \; \text{sonst} \end{cases}.$$

Das invariante Startmaß dieser Kette berechnet sich zu $\pi(0) = \frac{1}{2}$ und $\pi((a,b)) = 2^{-a+2}$ für $b \in \{1,2,\dots,a\}$. Anschaulich beschreibt diese Kette das folgende Verhalten. Ausgehend vom Punkt Null (Boden) springt man mit Wahrscheinlichkeit $2^{-(a+1)}$ auf eine Leiter der Höhe a, geht diese Leiter dann Stufe für Stufe herunter bis der Boden erreicht ist und wiederholt dann den Prozess. Häggström [35] zeigte mit Hilfe eines raffinierten Coupling-Arguments, dass diese MK geometrisch ergodisch mit der Konvergenzrate $\delta = \frac{1}{2}$ ist. Wir wollen nun zeigen, dass diese MK keine $L^2(\pi)$-Spektrallücke haben kann. Wegen Lemma 4.2.1 reicht es zu zeigen, dass $k = 0$ gilt. Dies sieht man jedoch so:
Sei $A_{n,n} := \{(n,n),(n,n-1),\dots,(n,1)\}$ und $A_{n,1} := \{(n,1)\}$. Dann gilt nach dem zuvor Gesagten:

$$\begin{aligned} k \quad &\leq \quad k(A_{n,n}) = \frac{1}{n \cdot 2^{-(n+2)}} \frac{1}{1 - n \cdot 2^{-(n+2)}} \int_{A_{n,n}} p^l(x, A_{n,n}^c)\pi(dx) \\ &\leq \quad \frac{2}{n \cdot 2^{-(n+2)}} \int_{A_{n,1}} 1\pi(dx) = \frac{2}{n}. \end{aligned} \tag{6.22}$$

Mit dem Bilden des Limes für $n \to \infty$ folgt die Behauptung.

Um zu sehen, dass die obige Kette keine $L^2(\pi)$-Spektrallücke hat, kann auch Satz 5.2.1 benutzt werden. Nach diesem Satz ist es hinreichend zu zeigen, dass $L_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dies sieht man jedoch mit der Wahl von $A_n := \{(3n, 2n-1)\}$, da offensichtlich $L_n(A_n) = 0$ gilt.

6.3.3 Beispiel 3

Wir wollen nun ein Beispiel dafür geben, dass für eine MK mit einem endlichen invarianten Startmaß π die Bedingung

$$\exists n \in \mathbb{N} : L_n > 0$$

(siehe Kapitel 5) nicht hinreichend für die Existenz einer $L^2(\pi)$-Spektrallücke ist. Folglich kann die in Korollar 5.3.4 geforderte Existenz einer Sprunglücke nicht weggelassen werden.
Wir haben wieder den gleichen Zustandsraum wie im vorherigen Beispiel, d.h.

$$\Omega = \{0\} \cup \{(a,b) : a \geq 1, b \in \{1,2,\dots,a\}\}.$$

Der Übergangskern $p(\cdot,\cdot)$ sei jetzt gegeben durch

$$p(0,0)=\frac{1}{2},\; p(0,(n,i))=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\frac{1}{n},\; p((n,i),(n,j))=p((n,i),0)=\frac{1}{n+1},$$

für alle $i,j\in\{1,\ldots,n\}$. Hieraus errechnet sich das invariante Startmaß π zu

$$\pi(0)=\frac{2}{5},\; \pi((n,i))=\frac{n+1}{n}2^{-(n+1)}\frac{2}{5}\;\forall i\le n.$$

Um zu sehen, dass die Kette keine Spektrallücke hat, betrachte $A_n:=\{(n,n),\ldots,(n,1)\}$. Nachrechnen liefert

$$k(A_n)\le\frac{2}{n}\to 0 \text{ für } n\to\infty.$$

Damit folgt: $k=0$.
Sei $A_0=\{0\}$. Dann ergibt sich für den Entropiezuwachs $L_1(A)$ einer beliebigen Teilmenge $A\subset\Omega$:

$$\begin{aligned}
L_1(A) &= -\frac{1}{\pi(A)}\int_\Omega p(x,A)\log(p(x,A))\pi(dx)\ge-\frac{1}{\pi(A)}p(0,A)\log(p(0,A))\pi(0)\\
&\ge \frac{2}{5}\frac{\sum_{n=0}^\infty\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\frac{|A_n\cap A|}{|A_n|}(-\log(\sum_{n=0}^\infty\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\frac{|A_n\cap A|}{|A_n|}))}{2\frac{2}{5}\sum_{n=0}^\infty(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\frac{|A_n\cap A|}{|A_n|}}\\
&\ge \frac{\log 2\sum_{n=0}^\infty n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\frac{|A_n\cap A|}{|A_n|}}{2\sum_{n=0}^\infty(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\frac{|A_n\cap A|}{|A_n|}}\\
&\ge \frac{\log 2}{4}. \qquad (6.23)
\end{aligned}$$

Da dies für alle $A\subset\Omega$ gilt, folgt $L_1>0$.

Kapitel 7

Anwendungen

In diesem Kapitel werden zwei Anwendungen für die in den vorherigen Kapiteln hergeleitete Theorie gegeben. In Abschnitt 7.1 wird das zentrale Ergebnis dieses Kapitels, nämlich eine Verallgemeinerung eines von Nagaev im Jahre 1957 bewiesenen globalen Grenzwertsatzes (siehe Kapitel 1), bewiesen. Dafür wird die Methode der charakteristischen Funktionen verwendet. Wir betrachten eine Folge von ZVen $\phi \circ \xi_i, i \in \mathbb{N}$, generiert durch die MK $\xi_1, \xi_2, \ldots$. Es zeigt sich, dass insbesondere die von uns geforderten Bedingungen erfüllt sind, falls der assoziierte MO P eine Spektrallücke auf $\mathcal{B}(\Omega, \mathcal{F}, ||\cdot||_\infty)$ (siehe Abschnitt 7.1) hat. In Abschnitt 7.2 werden kurz die Anwendungen von Spektrallücken von P im Hinblick auf die Gültigkeit von zentralen Grenzwertsätzen im Fall der Existenz der zweiten Momente diskutiert.

7.1 Ein globaler Grenzwertsatz

Wir hatten Abschnitt 1.3 von Kapitel 1 gesehen, dass sich die charakteristische Funktion f_n der Zufallsvariablen $\tilde{S_n} = S_n - A_n$, wobei $S_n = \sum_{i=1}^n \phi \circ \xi_i$, darstellen lässt als

$$f_n(\theta) = e^{-i\theta A_n} P_1(\theta) P^{n-1}(\theta) 1. \tag{7.1}$$

Dieser Zusammenhang legt nahe, den Operator $P(\frac{\theta}{B_n})^n$ näher zu betrachten. Schreibe dafür

$$\begin{aligned} P(\frac{\theta}{B_n})^n &= (P_1(\frac{\theta}{B_n}) + (P(\frac{\theta}{B_n}) - P_1(\frac{\theta}{B_n})))^n \\ &= P_1(\frac{\theta}{B_n})^n + \sum_{l=0}^{n-1} P_1(\frac{\theta}{B_n})^l (P(\frac{\theta}{B_n}) - P_1(\frac{\theta}{B_n})) P_1(\frac{\theta}{B_n})^{n-l-1} + \ldots . \end{aligned}$$

Es folgt:

$$P(\frac{\theta}{B_n})^n - P_1(\frac{\theta}{B_n})^n = \sum_{l=0}^{n-1} P_1(\frac{\theta}{B_n})^l (P(\frac{\theta}{B_n}) - P_1(\frac{\theta}{B_n})) P_1(\frac{\theta}{B_n})^{n-l-1} + \ldots . \tag{7.2}$$

Es soll gezeigt werden, dass unter noch zu spezifizierenden Bedingungen

$$P_1(\frac{\theta}{B_n})(P(\frac{\theta}{B_n})^n - P_1(\frac{\theta}{B_n})^n) \tag{7.3}$$

gegen Null konvergiert. Für die Erreichung des Ziels ist die folgende Beobachtung entscheidend:

$$P_1(\frac{\theta}{B_n})(P(\frac{\theta}{B_n}) - P_1(\frac{\theta}{B_n})) = (P_1(\frac{\theta}{B_n}) - P_1)(P(\frac{\theta}{B_n}) - P_1(\frac{\theta}{B_n})). \tag{7.4}$$

Dies folgt unmittelbar aus der wegen der Stationarität gültigen Beziehung $P_1 P = P_1$. Es folgen einige Lemmata, die den Beweis von Proposition 4 vorbereiten. Mit Hilfe dieser Proposition kann die Bedeutung der in (7.4) gemachten Beobachtung verstanden werden. Für den Beweis der nun folgenden Lemmata wiederholen wir folgenden zuerst von Karamata [42] bewiesenen Satz (vgl. [41]):

Satz 7.1.1 *(Karamata) Eine über endliche Intervalle integrierbare, langsam variierend Funktion $h(x)$ kann dargestellt werden als*

$$h(x) = c(x) exp \left(\int_b^x \frac{\epsilon(u)}{1+u} du \right), \tag{7.5}$$

wobei $\lim_{x\to\infty} c(x) = c \neq 0$, $\lim_{x\to\infty} \epsilon(x) = 0$ *und* $b > 0$.

Lemma 7.1.2 *Sei f eine periodische, punktsymmetrische (d.h. $f(-x) = -f(x)$), beschränkte und Lebesgue-integrierbare Funktion, $h(x)$ eine langsam variierende Funktion für $x \to \infty$ und $\alpha \in (0,1)$. Dann gilt:*

$$\int_0^\infty f(x) \frac{h(\frac{x}{\theta})}{x^\alpha} = O(h(\frac{1}{\theta})). \tag{7.6}$$

Beweis:

$$\int_0^\infty f(x) \frac{h(\frac{x}{\theta})}{x^\alpha} dx = \underbrace{\int_0^{a\theta} (\cdot) dx}_{A_1} + \underbrace{\int_{a\theta}^{\delta} (\cdot) dx}_{A_2} + \underbrace{\int_\delta^C (\cdot) dx}_{A_3} + \underbrace{\int_C^\infty (\cdot) dx}_{A_4}, \tag{7.7}$$

wobei a, δ und C Konstanten in $\mathbb{R}_+$ sind, die im Folgenden sorgfältig gewählt werden. Da $h(\frac{x}{\theta})$ auf $[0, a\theta]$ durch eine Konstante K_a beschränkt werden kann, bekommen wir:

$$A_1 \leq ||f||_\infty K_a \int_0^{a\theta} \frac{1}{x^\alpha} dx = O(\theta^{1-\alpha}). \tag{7.8}$$

Aus Karamatas Satz folgt, dass auf dem Intervall $[a\theta, \delta]$ für große a (wir verlangen, dass $a\theta \leq \delta$, d.h. groß gewählte a implizieren kleine θ) gilt:

$$\frac{h(\frac{x}{\theta})}{h(\frac{1}{\theta})} \leq (1+\epsilon_1(a)) \exp(\epsilon(a) \log \frac{1+\frac{1}{\theta}}{1+\frac{x}{\theta}}) = (1+\epsilon_1(a))(\frac{\theta+1}{\theta+x})^{\epsilon(a)} \leq 2(1+\epsilon_1(a))x^{-\epsilon(a)}, \tag{7.9}$$

wobei wir durch Vergrößerung von a $\epsilon_1(a)$ und $\epsilon(a)$ beliebig klein (insbesondere kleiner als $1-\alpha$) wählen können. Dies liefert:

$$A_2 \leq ||f||_\infty h(\frac{1}{\theta}) \int_{a\theta}^{\delta} \frac{1}{x^{\alpha+\epsilon}} dx = O(h(\frac{1}{\theta})). \tag{7.10}$$

Aus Karamatas Satz folgt wiederum auf $[\delta, C]$ gleichmäßig in x:

$$\frac{h(\frac{x}{\theta})}{h(\frac{1}{\theta})} \to 1 \text{ for } \theta \to 0.$$

Hieraus folgt:

$$A_3 = O(h(\frac{1}{\theta})). \tag{7.11}$$

Wählen wir nun C hinreichend groß, so folgt aus Karamatas Satz für alle $\theta \leq 1$ und $x \in [C, \infty)$ die Gültigkeit der folgenden Ungleichung:

$$\frac{h(\frac{x}{\theta})}{h(\frac{1}{\theta})} \leq x^\epsilon. \tag{7.12}$$

Hiermit bekommen wir:

$$A_4 \leq h(\frac{1}{\theta}) \int_C^\infty f(x) \frac{1}{x^{\alpha-\epsilon}} dx. \tag{7.13}$$

Da f periodisch und punktsymmetrisch ist, ist das Integral über eine ganze Periode Null. Daher kann das Integral auf der rechten Seite abgeschätzt werden durch eine alternierende Summe, wobei der Betrag der Koeffizienten gegen Null konvergiert. Folglich ist das Integral endlich und das Lemma bewiesen.

□

Lemma 7.1.3 *Sei f eine beschränkte Funktion mit der Eigenschaft $f(x) = O(x^2)$ für $x \to 0$. Sei $h(x)$ eine langsam variierende Funktion für $x \to \infty$. Dann gilt für $\alpha \in (1, 2]$:*

$$\int_0^\infty f(x) \frac{h(\frac{x}{\theta})}{x^\alpha} dx = O(\tilde{h}(\frac{1}{\theta})) \text{ für } \theta \to 0, \tag{7.14}$$

wobei $\tilde{h}$ ebenfalls eine langsam variierende Funktion ist.

Beweis: Der Beweis ähnelt sehr stark dem des Lemmas 7.1.2 und soll daher nur skizziert werden.

$$\int_0^\infty f(x) \frac{h(\frac{x}{\theta})}{x^\alpha} dx = \underbrace{\int_0^{a\theta} (\cdot) dx}_{A_1} + \underbrace{\int_{a\theta}^{\delta} (\cdot) dx}_{A_2} + \underbrace{\int_\delta^C (\cdot) dx}_{A_3} + \underbrace{\int_C^\infty (\cdot) dx}_{A_4}. \tag{7.15}$$

Sei $||f||_\infty = Q$ und $\limsup_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = L$. Da h auf $[0, a]$ durch eine Konstante K_a beschränkt werden kann, gilt für $a\theta$ hinreichend klein:

$$A_1 \leq Q \cdot K_a (L + \epsilon_1) \int_0^{a\theta} x^{2-\alpha} dx \leq Q \cdot K_a (L + \epsilon_1) \theta a. \tag{7.16}$$

Um die anderen Integrale abzuschätzen, benutzte die gleichen Rechnungen wie für den Beweis von Lemma 7.1.2. Dies liefert dann:

$$A_2 \leq Q(L + \epsilon_1) h(\frac{1}{\theta}) \int_{a\theta}^{\delta} x^{2-\alpha-\epsilon} dx = O(h(\frac{1}{\theta})). \tag{7.17}$$

$$A_3 \leq Q(1 + \epsilon_2) h(\frac{1}{\theta}) \int_\delta^C \frac{1}{x^\alpha} dx = O(h(\frac{1}{\theta})). \tag{7.18}$$

$$A_4 \leq Q h(\frac{1}{\theta}) \int_C^\infty x^{\alpha-\epsilon} dx = O(h(\frac{1}{\theta})). \tag{7.19}$$

Mit $\tilde{h} = \max(h, Q \cdot K_a (L + \epsilon_1) \theta a)$ folgt dann die Behauptung des Lemmas.

□

Lemma 7.1.4 *Es gilt:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin(x)}{(1-\cos(x))^{\frac{1}{2}}} - \sqrt{2}}{x^2} = -\frac{\sqrt{2}}{8}. \tag{7.20}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\sin(x)}{(1-\cos(x))^{\frac{1}{2}}}-\sqrt{2}\right)\frac{1}{x^2} &= \frac{\sin(x)-\sqrt{2}(1-\cos(x))^{\frac{1}{2}}}{(1-\cos(x))^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{x^2} \\
&= \frac{\frac{\sin(x)}{x}-(\frac{2}{x^2}(1-\cos(x)))^{\frac{1}{2}}}{(\frac{1-\cos(x)}{x^2})^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{x^2} \\
&= \frac{1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\cdots-\left(1-\frac{2x^2}{4!}+\frac{2x^4}{6!}-\cdots\right)^{\frac{1}{2}}}{x^2\left(\frac{1}{2}-\frac{x^2}{4!}+\cdots\right)^{\frac{1}{2}}} \\
&\overset{Taylor}{=} \frac{-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^2}{4!}+O(x^4)}{x^2\left(\frac{1}{2}-\frac{x^2}{4!}+\cdots\right)^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}$$

Bildet man nun den Grenzwert für $x \to 0$, dann folgt die Behauptung.

□

Proposition 4 *Sei ϕ im Anziehungsbereich einer α-stabilen Verteilung und $\alpha \in (0,2] \setminus \{1\}$. Dann haben wir für $\theta \to 0$ das folgende asymptotische Verhalten:*

$$E_\pi(|e^{i\theta\phi}-1|) = \begin{cases} O(\theta^\alpha h(\frac{1}{\theta})) & : \alpha \in (0,1) \\ O(\theta) & : \alpha \in (1,2] \end{cases} . \tag{7.21}$$

Beweis: Definiere $G_1(x) := 1 - F(x)$, $G_2(x) = F(-x)$, wobei F die Verteilungsfunktion zum Bildmaß π_ϕ sei. Zuerst betrachten wir den Fall $0 < \alpha < 1$. Dann liefert partielle Integration:

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |e^{i\theta\phi(x)}-1|\pi(dx) = \sqrt{2}\int_{-\infty}^{\infty}(1-\cos(\theta x))^{\frac{1}{2}}\pi_\phi(dx) \\
=\;& -\sqrt{2}\left(\int_0^\infty (1-\cos(\theta x))^{\frac{1}{2}}G_1(dx)+\int_0^\infty(1-\cos(\theta x))^{\frac{1}{2}}G_2(dx)\right) \\
=\;& \frac{1}{\sqrt{2}}\theta\left(\int_0^\infty \frac{\sin(\theta x)}{(1-\cos(\theta x))^{\frac{1}{2}}}G_1(x)dx+\int_0^\infty\frac{\sin(\theta x)}{(1-\cos(\theta x))^{\frac{1}{2}}}G_2(x)dx\right) \\
=\;& \theta^\alpha\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{(1-\cos(x))^{\frac{1}{2}}}\frac{h_1(\frac{x}{\theta})}{x^\alpha}dx+\int_0^\infty\frac{\sin(x)}{(1-\cos(x))^{\frac{1}{2}}}\frac{h_2(\frac{x}{\theta})}{x^\alpha}dx\right).
\end{aligned} \tag{7.22}$$

Mit Lemma 7.1.2 folgt die Behauptung des ersten Teils. Sei jetzt $1 < \alpha \leq 2$.

Für $\alpha \in (1,2]$ kann nicht unmittelbar in gleicher Weise vorgegangen werden. Da jedoch für $\alpha > 1$ der Erwartungswert von ϕ existiert, können zusätzliche Terme in das Integral hinzugefügt werden, die es dann ermöglichen, wieder den Trick mit der partiellen Integration zu benutzen. Es gilt:

$$\begin{aligned}
E_\pi(|e^{i\theta\phi}-1|) &= -\sqrt{2}\left(\int_0^\infty (1-\cos(\theta x))^{\frac{1}{2}} G_1(dx) + \int_0^\infty (1-\cos(\theta x))^{\frac{1}{2}} G_2(dx)\right) \\
&= -\sqrt{2}\int_0^\infty ((1-\cos(\theta x))^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\theta x) G_1(dx) - \theta \int_0^\infty x G_1(dx) \\
&- \sqrt{2}\int_0^\infty ((1-\cos(-\theta x))^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\theta x) G_2(dx) - \theta \int_0^\infty x G_2(dx) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\theta \int_0^\infty \left(\frac{\sin(\theta x)}{(1-\cos(\theta x))^{\frac{1}{2}}} - \sqrt{2}\right) G_1(x)dx + O(\theta) \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2}}\theta \int_0^\infty \left(\frac{\sin(\theta x)}{(1-\cos(\theta x))^{\frac{1}{2}}} - \sqrt{2}\right) G_2(x)dx + O(\theta). \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\theta^\alpha \int_0^\infty \left(\frac{\sin(x)}{(1-\cos(x))^{\frac{1}{2}}} - \sqrt{2}\right) \frac{h_1(\frac{x}{\theta})}{x^\alpha} dx + O(\theta) \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2}}\theta^\alpha \int_0^\infty \left(\frac{\sin(x)}{(1-\cos(x))^{\frac{1}{2}}} - \sqrt{2}\right) \frac{h_2(\frac{x}{\theta})}{x^\alpha} dx + O(\theta) \\
&= O(\theta^\alpha \tilde{h}(\frac{1}{\theta})) + O(\theta).
\end{aligned} \tag{7.23}$$

Dabei wurde in der letzten Zeile Korollar 7.1.4 und Lemma 7.1.3 benutzt. Damit ist die Proposition bewiesen.

□

Bemerkung 7.1.5 *Wir vermuten sehr, dass sich dieser Zusammenhang in $\alpha = 1$ in der Weise fortsetzen lässt, dass dann immer noch gilt:*

$$E_\pi(|e^{i\theta\phi}-1|) = O(\theta h(\frac{1}{\theta})). \tag{7.24}$$

Der Beweis hierfür ist aber noch nicht gelungen. Die Proposition 4 zeigt uns, dass die Konvergenzgeschwindigkeit von $E_\pi(|e^{i\theta\phi}-1|)$ für $\theta \to 0$ bis $\alpha = 1$ zunimmt und ab $\alpha = 1$ in gewisser Hinsicht stagniert. Diese Tatsache ist für den Beweis des globalen Grenzwertsatzes von entscheidender Bedeutung.

Aus der soeben bewiesenen Proposition ergibt sich:

Korollar 7.1.6 *Sei ϕ im Anziehungsbereich einer α-stabilen Verteilung und $\alpha \in (0,2] \setminus \{1\}$. Dann gilt für festes θ:*

$$||P_1(\frac{\theta}{B_n})(P(\frac{\theta}{B_n}) - P_1(\frac{\theta}{B_n}))||_{\infty\to\infty} = \left\{ \begin{array}{ccc} O(\frac{\theta}{n\cdot\tilde{h}(n)}) & : & \alpha \in (0,1) \\ O(\frac{\theta}{n^{1/\alpha}\tilde{\tilde{h}}(n)}) & : & \alpha \in (1,2] \end{array} \right. , \tag{7.25}$$

wobei $\tilde{\tilde{h}}(n)$ die dem B_n zugeordnete langsam variierende Funktion ist (vgl. (1.7)) und $\tilde{h}(n)$ sich aus dem folgenden Beweis ergibt:

Beweis:

$$
\begin{aligned}
& ||P_1(\frac{\theta}{B_n})(P(\frac{\theta}{B_n}) - P_1(\frac{\theta}{B_n}))||_{\infty\to\infty} \\
= \quad & ||(P_1(\frac{\theta}{B_n}) - P_1)(P(\frac{\theta}{B_n}) - P_1(\frac{\theta}{B_n}))||_{\infty\to\infty} \\
\leq \quad & ||(P(\frac{\theta}{B_n}) - P_1(\frac{\theta}{B_n}))||_{\infty\to\infty}||(P_1(\frac{\theta}{B_n}) - P_1)||_{\infty\to\infty} \\
\overset{Proposition\ 4}{=} \quad & \begin{cases} O(\frac{\theta}{n\tilde{\tilde{h}}(n)}h(\frac{n^{1/\alpha}\tilde{\tilde{h}}(n)}{\theta})) & : \quad \alpha \in (0,1) \\ O(\frac{\theta}{n^{1/\alpha}\tilde{\tilde{h}}(n)}) & : \quad \alpha \in (1,2] \end{cases} .
\end{aligned}
\tag{7.26}
$$

Man kann nun zeigen, dass

$$
\tilde{h}(n) := \frac{h(\frac{n^{1/\alpha}\tilde{\tilde{h}}(n)}{\theta})}{\tilde{\tilde{h}}(n)}
$$

eine langsam variierende Funktion bei unendlich ist, falls h und $\tilde{\tilde{h}}$ diese Eigenschaft haben. Damit ist das Korollar bewiesen.

□

Wir wollen jetzt auf (7.2) zurückkommen. Dort hatten wir gesehen, dass

$$
P(\frac{\theta}{B_n})^n - P_1(\frac{\theta}{B_n})^n = \sum_{l=0}^{n-1} P_1(\frac{\theta}{B_n})^l (P(\frac{\theta}{B_n}) - P_1(\frac{\theta}{B_n}))P_1(\frac{\theta}{B_n})^{n-l-1} + \dots, \tag{7.27}
$$

wobei durch "..." die weiteren Summen angekündigt sind. In den nun folgenden Lemmata werden die Summanden auf der rechten Seite von (7.2) in solche Gruppen zusammengefasst, deren Elemente die gleiche Asymptotik haben. Die Angabe der Mächtigkeit dieser Gruppen ermöglicht dann, die Asymptotik der ganzen Gruppe abzuschätzen. Wegen Korollar 7.1.6 scheint es sinnvoll, solche Elemente zu einer Gruppe zusammenzufassen, für die gleich häufig Terme der Form

$$
P_1(\frac{\theta}{B_n})(P(\frac{\theta}{B_n}) - P_1(\frac{\theta}{B_n}))
$$

vorkommen. Dies soll nun präzisiert werden. Wir zählen die Anzahl der Lücken, wobei wir immer dann von einer Lücke sprechen, wenn zwischen zwei aufeinanderfolgenden Operatoren der Form $(P(\frac{\theta}{B_n}) - P_1(\frac{\theta}{B_n}))$ mindestens ein Operator $P_1(\frac{\theta}{B_n})$ liegt. Im Folgenden definiere $a(n,l,i) := |G_{n,l,i}|$, wobei $G_{n,l,i}$ die Gruppe der Operatoren der Länge n (d.h. wir betrachten die Komposition von n-Operatoren der beiden obigen Formen) mit l Lücken und gesamter Lückengröße i. Die gesamte Lückengröße sei dabei die Anzahl der Terme $(P(\frac{\theta}{B_n}) - P_1(\frac{\theta}{B_n}))$ in einem String minus $(l+1)$. Um das soeben Formulierte zu verdeutlichen, soll nun ein kleines Beispiel gegeben werden: Sei $A := P_1(\frac{\theta}{B_n})$ und $B := (P(\frac{\theta}{B_n}) - P_1(\frac{\theta}{B_n}))$. Wir betrachten jetzt den String

$$
AABABBAAABBABBBBAAABBAB.
$$

Die Länge n des Strings ist 23, $l = 5$ und $i = 6$. Zu Gegebenem (n,l,i) soll im folgenden Lemma die Mächtigkeit der zugehörigen Gruppe, also $a(n,l,i)$ bestimmt werden.

Lemma 7.1.7 *Es gilt:*

$$
a(n,l,i) = \binom{n-l-i}{l+1}\binom{l+i}{l}. \tag{7.28}
$$

Beweis: Seien eine feste Struktur (d.h. die Länge der Intervalle aufeineinderfolgender $A's$ und $B's$) mit l-Lücken und gesamter Lückengröße i vorgegeben. Dann haben wir auf $l+1$ $(P(\frac{\theta}{B_n}) - P_1(\frac{\theta}{B_n}))$'s i weitere $(P(\frac{\theta}{B_n}) - P_1(\frac{\theta}{B_n}))$'s zu verteilen. Die Anzahl der Möglichkeiten ist gleich der Anzahl, i Bälle auf $l+1$ Urnen zu verteilen. Die Lösung hierfür ist $\binom{l+i}{l}$ (vgl. [45]). Dies erklärt den zweiten Term in 7.28. Jetzt muss noch die Anzahl dieser festen Strukturen bestimmt werden. Sind n, l und i gegeben, dann zählen wir in einem String $(l+1+i)$-mal den Operator $(P(\frac{\theta}{B_n}) - P_1(\frac{\theta}{B_n}))$ und $(n-l-1-i)$-mal den Operator $P_1(\frac{\theta}{B_n})$. Die $(l+1+i)$-mal auftretenden Operatoren separieren den n-String in $l+2$ Gebiete, in die die übrigen $(n-l-1-i)$- Operatoren hineingelegt werden, sodass in allen bis auf den Randgebieten mindestens ein Operator $P_1(\frac{\theta}{B_n})$ vorhanden ist (sonst hätten wir keine Lücken). In der Sprache der Urnen bedeutet dies, dass man $n-l-1-i-l$ Murmeln auf $l+2$ Urnen zu verteilen hat. Dies ist jedoch genau auf $\binom{n-l-i}{l+1}$- Art und Weisen möglich. Damit ist das Lemma bewiesen.

□

Sei $g_\theta(x) = (P(\theta) - P_1(\theta))1(x)$.
Wir sind jetzt in der Lage, das zentrale Ergebnis dieses Abschnitts zu formulieren:

Satz 7.1.8 *Sei $\xi_1, \xi_2, \ldots$ eine stationäre MK mit Zustandsraum $(\Omega, \mathcal{F})$ und eindeutig bestimmtem invarianten Wmaß π. Sei ϕ eine reellwertige ZV auf $(\Omega, \mathcal{F}, \pi)$, welche im Anziehungsbereich einer α-stabilen Verteilung V_α liegt, d.h. es existieren u.i.v. ZVen $Y_1, Y_2, \ldots$ mit $Y_1 \overset{D}{=} \phi \circ \xi_1$, Konstanten A_n und B_n, sodass*

$$\frac{1}{B_n}(\sum_{i=1}^{n} Y_i - A_n) \Longrightarrow V_\alpha. \tag{7.29}$$

Darüber hinaus seien die beiden folgenden Bedingungen erfüllt:

1.
$$\exists \epsilon > 0 : ||(P(\frac{\theta}{B_n}) - P_1(\frac{\theta}{B_n}))1||_\infty = O(n^{-\max(\frac{\alpha-1}{\alpha},0)-\epsilon}). \tag{7.30}$$

2.
$$\exists C > 0, \delta < 1, \text{ sodass } ||(P(\frac{\theta}{B_n}) - P_1(\frac{\theta}{B_n}))^k g_{\frac{\theta}{B_n}}||_{\infty\to\infty} \leq C\delta^k. \tag{7.31}$$

Dann gilt für $\phi \circ \xi_i$ der globale Grenzwertsatz mit den gleichen Konstanten A_n und B_n wie in (7.29), d.h. es gilt

$$\frac{1}{B_n}(\sum_{i=1}^{n} \phi \circ \xi_i - A_n) \Longrightarrow V_\alpha. \tag{7.32}$$

Beweis: Aus (7.30), (7.31) und Korollar 7.1.6 folgt, dass jedes Element aus der Gruppe $G_{n,l,i}$, vor dem wir den Operator $P_1(\frac{\theta}{B_n})$ vorschalten, abgeschätzt werden kann durch

$$\left(\frac{C}{n^{1+\epsilon}}\right)^{l+1} \delta^i. \tag{7.33}$$

Summiert man nun über alle Elemente aus der Gruppe $G_{n,l,i}$ und dann über alle möglichen (l,i), so bekommt man

$$\begin{aligned} & |P_1(\frac{\theta}{B_n})(P(\frac{\theta}{B_n})^n - P_1(\frac{\theta}{B_n})^n)1(x)| \\ \leq \quad & \sum_{l=0}^{[\frac{n-1}{2}]} \sum_{i=0}^{n-2l-1} \binom{n-l-i}{l+1}\binom{l+i}{l}\left(\frac{C}{n^{1+\epsilon}}\right)^{l+1}\delta^i. \end{aligned} \tag{7.34}$$

Um zu zeigen, dass hier die rechte Seite gegen Null konvergiert, betrachten wir die einzelnen Summanden näher. Dafür wird im Folgenden die Stirling-Approximation der Binomialkoeffizienten verwendet. Seien jetzt $l > 0, i > 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
b_{n,l,i} &:= \binom{n-l-i}{l+1}\binom{l+i}{l}\left(\frac{C}{n^{1+\epsilon}}\right)^{l+1}\delta^i \\
= \quad & \frac{(n-l-i)^{n-l-i}}{(n-1-2l-i)^{(n-1-2l-i)}(l+1)^{l+1}}\frac{(l+i)^{(l+i)}}{l^l i^i}\left(\frac{C}{n^{1+\epsilon}}\right)^{l+1}\delta^i \cdot \\
& \frac{\sqrt{(n-l-i)(l+i)}(1+\epsilon_{l,i})}{\sqrt{(n-1-2l-i)(l+1)l\, i 2\pi}} \\
\leq \quad & \left(1+\frac{l+1}{n-1-2l-i}\right)^{n-1-2l-i}\left(1-\frac{l+i}{n}\right)^{l+1}\left(\frac{C}{n^{\epsilon}}\right)^{l+1}\left(1+\frac{i}{l}\right)^{l}\left(1+\frac{l}{i}\right)^{i}\delta^i \\
\leq \quad & e^{l+1}\left(\frac{C}{n^{\epsilon}}\right)^{l+1} e^l\left(1+\frac{i}{l}\right)^{l}\delta^i \\
\leq \quad & \left(\frac{C\, e^2}{n^{\epsilon}}\right)^{l+1}\left(1+\frac{i}{l}\right)^{l}\delta^i. \qquad (7.35)
\end{aligned}$$

Wir unterscheiden jetzt zwei Fälle:
1. Fall: $i \leq 2l$
In diesem Fall erhalten wir die Abschätzung:

$$b_{n,l,i} \leq \left(\frac{3C\, e^2}{n^{\epsilon}}\right)^{l+1}\delta^i. \qquad (7.36)$$

2. Fall: $i > 2l$
In diesem Fall bekommen wir:

$$\begin{aligned}
b_{n,l,i} \quad &\leq \quad \left(\frac{C\, e^2}{n^{\epsilon}}\right)^{l+1} 2^l\left(\frac{i}{l}\right)^{l}\delta^i \\
&\leq \quad \frac{1}{l^l}\left(\frac{2C\, e^2}{n^{\epsilon}}\right)^{l+1}(i+1)(i+2)\dots(i+l)\delta^i. \qquad (7.37)
\end{aligned}$$

Setzen wir (7.36) und (7.37) in (7.34) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
& |P_1(\frac{\theta}{B_n})(P(\frac{\theta}{B_n})^n - P_1(\frac{\theta}{B_n})^n)1(x)| \\
\leq \quad & O(n^{-\epsilon}) + \sum_{l=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\sum_{i=0}^{n-2l-1}\left(\frac{3C\, e^2}{n^{\epsilon}}\right)^{l+1}\delta^i \\
+ \quad & \sum_{l=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\sum_{i=0}^{n-2l-1}\frac{1}{l^l}\left(\frac{2C\, e^2}{n^{\epsilon}}\right)^{l+1}(i+1)(i+2)\dots(i+l)\delta^i \\
\leq \quad & O(n^{-\epsilon}) + O(n^{-\epsilon}) + \sum_{l=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\frac{1}{l^l}\left(\frac{2C\, e^2}{n^{\epsilon}}\right)^{l+1}\left.\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(l)}\right|_{\delta} \\
\leq \quad & O(n^{-\epsilon}) + \sum_{l=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\left(\frac{2C\, e^2}{n^{\epsilon}}\right)^{l+1}\left(\frac{1}{1-\delta}\right)^{l} = O(n^{-\epsilon}). \qquad (7.38)
\end{aligned}$$

Damit ist Konvergenz von (7.34) gegen Null gezeigt und der Satz bewiesen.

□

Bemerkung 7.1.9 *Der soeben durchgeführte Beweis liefert noch ein wenig mehr, nämlich die Rate $O(n^{-\epsilon})$, mit der sich die Konvergenz der MK von der der assoziierten unabhängigen ZVen gegen die stabile Grenzverteilung unterscheidet. Aus dem Beweis wird ersichtlich, dass sich diese Rate bei den gegebenen Voraussetzungen auch nicht verbessern lässt.*

Es soll nun auf die Bedingungen 1 und 2 eingegangen werden. Dafür betrachten wir zunächst Bedingung 1. Offensichtlich gilt:

$$\begin{aligned} ||(P(\frac{\theta}{B_n}) - P_1(\frac{\theta}{B_n}))1||_\infty &= ||\int_\Omega (e^{i\frac{\theta}{B_n}\phi(y)} - 1)p(x,dy) + 1 - E_\pi(e^{i\frac{\theta}{B_n}\phi})||_\infty \\ &\leq ||\int_\Omega (e^{i\frac{\theta}{B_n}\phi(y)} - 1)p(x,dy)||_\infty + ||1 - E_\pi(e^{i\frac{\theta}{B_n}\phi})||_\infty \end{aligned}$$

Andererseits gilt jedoch auch

$$||(P(\frac{\theta}{B_n}) - P_1(\frac{\theta}{B_n}))1||_\infty \geq \left| ||\int_\Omega (e^{i\frac{\theta}{B_n}\phi(y)} - 1)p(x,dy)||_\infty - ||1 - E_\pi(e^{i\frac{\theta}{B_n}\phi})||_\infty \right|$$

Hieraus folgt, dass die Bedingung 1 genau dann erfüllt ist, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- $$\exists\epsilon > 0 : ||1 - E_\pi(e^{i\frac{\theta}{B_n}\phi})||_\infty = O(n^{-\max(\frac{\alpha-1}{\alpha},0)-\epsilon}). \tag{7.39}$$

- $$||\int_\Omega (e^{i\frac{\theta}{B_n}\phi(y)} - 1)p(x,dy)||_\infty = O(n^{-\max(\frac{\alpha-1}{\alpha},0)-\epsilon}). \tag{7.40}$$

Aus (1.9) folgt jedoch, dass

$$||1 - E_\pi(e^{i\frac{\theta}{B_n}\phi})||_\infty = \begin{cases} O(\frac{\theta}{n\tilde{h}(n)}) & : \quad \alpha \in (0,1] \\ O(\frac{\theta}{n^{1/\alpha}\tilde{h}(n)}) & : \quad \alpha \in (1,2] \end{cases}. \tag{7.41}$$

Somit ist (7.39) genau dann erfüllt, wenn $\alpha < 2$ ist. Die Gleichheit in (7.40) bedeutet die gleichmäßige Konvergenz der Familie von charakteristischen Funktionen $E_{p(x,\cdot)}(e^{i\frac{\theta}{B_n}\phi})$ gegen eins mit der Rate $O(n^{-\max(\frac{\alpha-1}{\alpha},0)+\epsilon})$. Dabei ist interessant, dass die Rate als Funktion von α bis $\alpha = 1$ konstant bleibt und im Intervall $(1,2)$ monoton wächst.
Die Bedingung in (7.40) kann jedoch auch über die Tails der durch $p(x,\cdot)$ induzierten Bildmaße $\phi(p(x,\cdot))$ verstanden werden, da gilt:

$$\begin{aligned} \left|\int_\Omega (e^{i\frac{\theta}{B_n}\phi(y)} - 1)p(x,dy)\right| &\leq \left|\int_{-M_n}^{M_n} (e^{i\frac{\theta}{B_n}M_n} - 1)\phi_{p_x}(dz)\right| \\ &+ \left|\int_{-\infty}^{-M_n} (e^{i\frac{\theta}{B_n}z} - 1)\phi_{p_x}(dz)\right| \\ &+ \left|\int_{M_n}^{\infty} (e^{i\frac{\theta}{B_n}z} - 1)\phi_{p_x}(dz)\right| \\ &\leq |e^{i\frac{\theta}{B_n}M_n} - 1| + 2\,p(x, |\phi| > M_n). \end{aligned} \tag{7.42}$$

Wählt man hier $M_n = n^{\frac{1}{\alpha}-\epsilon-\max(0,\frac{\alpha-1}{\alpha})}$, wobei $\epsilon > 0$, dann folgt:

$$\left|\int_\Omega (e^{i\frac{\theta}{B_n}\phi(y)} - 1)p(x,dy)\right| \leq O(n^{-\max(0,\frac{\alpha-1}{\alpha})-\frac{\epsilon}{2}}) + p(x, \phi > n^{\frac{1}{\alpha}-\epsilon-\max(0,\frac{\alpha-1}{\alpha})}). \tag{7.43}$$

Für $\alpha < 2$ ist damit folgende Bedingung hinreichend für die Gültigkeit von (7.30):

$$\exists \epsilon > 0 : ||p(x, \phi > n^{\frac{1}{\alpha}-\epsilon-\max(0,\frac{\alpha-1}{\alpha})})||_\infty = O(n^{-\max(0,\frac{\alpha-1}{\alpha})-\epsilon}). \tag{7.44}$$

Es soll nun noch kurz auf die Bedingung 2 eingegangen werden. Sie ist offensichtlich erfüllt, wenn

$$||P - P_1||_{\infty\to\infty} \le \delta < 1 \tag{7.45}$$

erfüllt ist, da mit der Bezeichnung $S_\theta : \ f \mapsto e^{i\theta\phi} f$ Folgendes gilt:

$$||(P(\frac{\theta}{B_n}) - P_1(\frac{\theta}{B_n}))^k g_{\frac{\theta}{B_n}}||_{\infty\to\infty} \quad \le \quad ||(P - P_1)S_{\frac{\theta}{B_n}}||^k_{\infty\to\infty} \le ||P - P_1||^k_{\infty\to\infty}.$$

Die Forderung nach der Gültigkeit von (7.45) ist jedoch viel stärker als die Bedingung 2, da Letztere nur den gleichmäßigen geometrischen Abfall der Supremums-Norm einer ganz bestimmten Folge von Funktionen verlangt.
Es soll nun gezeigt werden, dass aus der gleichgradigen Konvergenz in Totalvariation von $p^n(x, \cdot)$ gegen π, welche gemäß Korollar 2.2.1 äquivalent ist zu

$$\exists C > 0, \delta < 1 : ||P^n - P_1||_\infty \le C\delta^n,$$

ebenfalls die Bedingung 2 unter der Voraussetzung der Gültigkeit der Bedingung 1 impliziert.

$$\begin{aligned} ||(P(\frac{\theta}{B_n}) - P_1(\frac{\theta}{B_n}))^n g_{\frac{\theta}{B_n}}||_\infty &\le ||((P - P_1)S_{\frac{\theta}{B_n}})^n||_\infty \\ &\le ||((P - P_1)(S_{\frac{\theta}{B_n}} - Id) + (P - P_1))^n||_\infty. \end{aligned} \tag{7.46}$$

Aus Bedingung 1 folgt nun, dass für $\alpha \ne 2$ ein $\epsilon > 0$ existiert, sodass

$$||(P - P_1)(S_{\frac{\theta}{B_n}} - Id)||_\infty \le O(n^{-\max(\frac{\alpha-1}{2},0)-\epsilon}). \tag{7.47}$$

Damit folgt dann jedoch für hinreichend große n:

$$\begin{aligned} ||(P(\frac{\theta}{B_n}) - P_1(\frac{\theta}{B_n}))^n g_{\frac{\theta}{B_n}}||_\infty &\le \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\frac{C}{n^\epsilon})^k \delta^{n-2k} \\ &\le \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\frac{C}{\delta n^\epsilon})^k \delta^{n-k} = (\frac{C}{\delta n^\epsilon} + \delta)^n \le \tilde{\delta}^n. \end{aligned}$$

Damit folgt die Gültigkeit der Bedingung 2.
Wir erhalten damit die beiden folgenden Korollare:

Korollar 7.1.10 *Sei $\xi_1, \xi_2, \ldots$ eine stationäre MK mit Zustandsraum $(\Omega, \mathcal{F})$ und eindeutig bestimmtem invarianten Wmaß π. Sei ϕ eine reellwertige ZV auf $(\Omega, \mathcal{F}, \pi)$, welche im Anziehungsbereich einer α-stabilen Verteilung V_α ($\alpha \ne 2$) liegt, d.h. es existieren u.i.v. ZVen $Y_1, Y_2, \ldots$ mit $Y_1 \stackrel{D}{=} \phi \circ \xi_1$, Konstanten A_n und B_n, sodass*

$$\frac{1}{B_n}(\sum_{i=1}^{n} Y_i - A_n) \Longrightarrow V_\alpha. \tag{7.48}$$

Angenommen, P habe auf $\mathcal{B}(\Omega, \mathcal{F}, ||\cdot||_\infty)$ eine Spektrallücke und es gelte (7.40). Dann gilt:

$$\frac{1}{B_n}(\sum_{i=1}^{n} \phi \circ \xi_i - A_n) \Longrightarrow V_\alpha. \tag{7.49}$$

Korollar 7.1.11 *Sei $\xi_1, \xi_2, \ldots$ eine stationäre MK mit Zustandsraum $(\Omega, \mathcal{F})$ und eindeutig bestimmtem invarianten Wmaß π. Sei ϕ eine reellwertige ZV auf $(\Omega, \mathcal{F}, \pi)$, welche im Anziehungsbereich einer α-stabilen Verteilung V_α ($\alpha \neq 2$) liegt, d.h. es existieren u.i.v. ZVen $Y_1, Y_2, \ldots$ mit $Y_1 \stackrel{D}{=} \phi \circ \xi_1$, Konstanten A_n und B_n, sodass*

$$\frac{1}{B_n}(\sum_{i=1}^{n} Y_i - A_n) \Longrightarrow V_\alpha. \tag{7.50}$$

Angenommen P habe auf $\mathcal{B}(\Omega, \mathcal{F}, ||\cdot||_\infty)$ eine Spektrallücke und es gelte (7.44) Dann gilt:

$$\frac{1}{B_n}(\sum_{i=1}^{n} \phi \circ \xi_i - A_n) \Longrightarrow V_\alpha. \tag{7.51}$$

Es bleibt die Frage, inwiefern die Bedingung 2 nötig ist, d.h. ob hier tatsächlich der geometrischen Abfall (δ^k) benötigt wird oder ob man vielleicht auch mit polynomialer Konvergenz ($k^{-\beta}$) für irgendein β auskommt. Allgemein kann die Frage hier nicht beantwortet werden. Für den von uns durchgeführten Beweis reicht die polynomiale Konvergenz allerdings nicht aus, da die in (7.35) definierten Terme $b_{n,l,i}$ dann für $i \approx \frac{n}{2}$ und $l \approx \frac{n}{4}$ für jedes vorgegebene β gegen unendlich konvergieren. Da die von uns benutzte Abschätzung jedoch zunächst recht grob erscheint (es ist nicht klar, ob sie es tatsächlich ist), bedeutet dies jedoch nicht, dass polynomiale Konvergenz in (7.35) nicht hinreichend sein kann.
Wir wollen nun zeigen, dass die Bedingung 1 keine notwendige Bedingung für die Gültigkeit eines globalen Grenzwertsatzes für ZVen, generiert durch MKen, ist. Dafür betrachten wir folgendes Beispiel:

Sei $\xi_1, \xi_2, \ldots$ eine MK mit Zustandsraum $\Omega := \{0\} \bigcup \mathbb{N}$, deren Übergangswahrscheinlichkeiten gegeben sind durch

$$p(i,j) = (1-\alpha)\delta_{1,j-i} + \alpha\delta_{j,0}. \tag{7.52}$$

Das zugehörige stationäre Wmaß π ergibt sich zu

$$\pi(i) = \alpha(1-\alpha)^i, \ i \in \{0\} \cup \mathbb{N}. \tag{7.53}$$

Definiere nun auf dem Zustandsraum Ω die Funktion ϕ durch

$$\phi(n) = \delta^n, \tag{7.54}$$

wobei

$$\delta = (1-\alpha)^{-(1+\epsilon)}. \tag{7.55}$$

Für die Tails von ϕ bekommt man

$$\begin{aligned} \pi(\{\phi > n\}) &= \pi(\{i : \delta^i > n\}) = \pi(\{i : (1-\alpha)^{-(1+\epsilon)i} > n\}) \\ &= \pi(\{i : i > -\frac{\ln n}{(1+\epsilon)\ln(1-\alpha)}\}) = \sum_{i > -\frac{\ln n}{(1+\epsilon)\ln(1-\alpha)}} \alpha(1-\alpha)^i \\ &\approx (1-\alpha)^{-\frac{\ln n}{(1+\epsilon)\ln(1-\alpha)}} = n^{-\frac{1}{1+\epsilon}}. \end{aligned} \tag{7.56}$$

Hieraus folgt (vgl. [41]), dass für $\epsilon \in (-\frac{1}{2}, \infty)$ ϕ bezüglich π im Anziehungsbereich einer α-stabilen Verteilung ($\alpha \neq 2$) liegt. Wir wählen nun $\epsilon > 0$ beliebig, sodass ϕ im Anziehungsbereich einer α-stabilen Verteilung mit $0 < \alpha < 1$ liegt. Wir wollen jetzt zeigen, dass Konstanten A_n, B_n existieren, sodass für

$$\frac{1}{B_n}(\sum_{i=1}^{n} \phi \circ \xi_i - A_n)$$

ein globaler Grenzwertsatz gilt. Definiere $\tau_r(i) := \inf\{n : \sum_{j=1}^n 1_r \circ \xi_j = i\}$ die i-te Rückkehrzeit in den Zustand r und definiere

$$X_r(i) := \sum_{j=\tau_r(i)}^{\tau_r(i+1)-1} \phi \circ \xi_j.$$

Aus der starken Markov-Eigenschaft folgt die Unabhängigkeit der $X_r(i)$. Wir fixieren nun $r = 0$. Damit der globale Grenzwertsatz gilt, genügt es zu zeigen, dass $X_0(1)$ im Anziehungsbereich einer α-stabilen Verteilung liegt (vgl. [43]). Dafür wird nun das Tailverhalten von $X_0(1)$ bestimmt. Bezeichne P_0 das Maß der MK auf dem Produktraum zum Startmaß δ_0, das heißt das Maß für die in 0 startende MK und sei $\tau_0 = \tau_0(1)$.

$$\begin{aligned} P_0(X_0(1) > n) &= P_0(\sum_{i=1}^{\tau_0} \phi \circ \xi_i > n) = P_0(\sum_{i=1}^{\tau_0} \delta^i > n) \\ &= P_0(\delta^{\tau_0+1} > n(\delta-1)+1) = P_0(\tau_0 > \frac{\ln(n(\delta-1)+1)}{\ln \delta} - 1). \end{aligned}$$

Andererseits gilt:

$$P_0(\tau_0 > n)) = (1-\alpha)^n.$$

Hiermit folgt:

$$\begin{aligned} P_0(X_0(1) > n) &= (1-\alpha)^{\frac{\ln(n(\delta-1)+1)}{\ln \delta}-1} = \frac{1}{1-\alpha} \exp\left(\frac{\ln(n(\delta-1)+1)}{\ln \delta} \ln(1-\alpha)\right) \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \exp\left(\frac{\ln(n(\delta-1)+1)}{-(1+\epsilon)}\right) = \frac{1}{1-\alpha}(n(\delta-1)+1)^{-\frac{1}{1+\epsilon}} \\ &\approx \frac{1}{1-\alpha}(\delta-1)^{-\frac{1}{1+\epsilon}} n^{-\frac{1}{1+\epsilon}} \\ &= \frac{1+\epsilon}{\epsilon}\left((1-\frac{1}{1+\epsilon})^{-(1+\epsilon)} - 1\right)^{-\frac{1}{1+\epsilon}} n^{-\frac{1}{1+\epsilon}}. \end{aligned} \tag{7.57}$$

Mit Theorem 2.6.1 Ibragimov-Linnik [41] folgt, dass die Voraussetzungen des Theorems 3 von Kimbleton [43] erfüllt sind. Damit ist die Gültigkeit des globalen Grenzwertsatzes gezeigt. Andererseits ist Bedingung 1 nicht erfüllt, da Bedingung (7.40) offensichtlich verletzt ist.
Wir sehen jedoch in diesem Beispiel, dass wegen der unterschiedlichen Tails in 7.56 und 7.57 die stabilen Grenzverteilungen bei gleicher Normierung im unabhängigen (Y_i) und im abhängigen Fall ($\phi \circ \xi_i$) zwar vom gleichen Typ (die gleichen α), jedoch nicht identisch sind. Dies war aber in Satz 7.1.8 der Fall und es ist ein offenes Problem, ob Bedingung 1 notwendig ist, wenn bei gleicher Normierung die Grenzverteilungen übereinstimmen sollen.

Bemerkung 7.1.12 *Der oben zitierte Satz von Kimbleton gilt nur für MKen mit abzählbarem Zustandsraum, da sonst die Technik mit der Doeblin-Zerlegung der Summanden zunächst nicht möglich ist. Es wäre dennoch interessant zu versuchen, dieses Argument auf beliebige Zustandsräume auszuweiten. Dabei geht jedoch zwingend die Unabhängigkeit für die in der Doeblin-Zerlegung vorkommenden $X_A(i)$ verloren, da man nicht auf einzelne Zustände bedingen kann (diese haben in der Regel die Wahrscheinlichkeit 0 und werden somit nicht in endlicher Zeit erreicht), sondern nur auf Mengen A mit $\pi(A) \geq 0$. Das auf A induzierte System ist dann unter zu spezifizierenden Annahmen schwach abhängig und möglicherweise somit auf den unabhängigen Fall zurückzuführen.*
In unserem obigen Beispiel war es tatsächlich möglich, die Tails von $X_0(1)$ explizit auszurechnen. Dies ist jedoch in den meisten Fällen nicht der Fall. Somit ist es oft unmöglich, die Voraussetzungen aus Kimbletons Satz zu überprüfen.

7.2 Zentrale Grenzwertsätze und Spektrallücken

Es soll hervorgehoben werden, dass alle die in dieser Arbeit formulierten hinreichenden Bedingungen für $L^2(\pi)$-Spektrallücken unmittelbar die Gültigkeit des Zentralen Grenzwertsatzes der Form

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (\phi \circ \xi_i - E_\pi \phi) \Longrightarrow N(0, \sigma^2) \tag{7.58}$$

implizieren, falls ϕ endliche zweite Momente hat. Dabei ist $\sigma^2 < \infty$ und gegeben durch

$$\sigma^2 = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \left[\left(\sum_{i=1}^{n} [\phi \circ \xi_i) - E_\pi \phi] \right) \right].$$

Diese Aussage ist bekannt und kann z.B. in [60] nachgelesen werden.

Literaturverzeichnis

[1] Aaronson, J. / Denker, M.: *Characteristic functions of random variables attracted to 1-stable laws*. Ann. Probab., 26:399-415, 1998.

[2] Aaronson, J. / Denker, M.: *Local limit theorems for partial sums of stationary sequences generated by Gibbs-Markov maps*. Stoch. Dyn., 1:193-237, 2001.

[3] Aleškjavičene, A.: *A local limit theorem for sums of random variables related to a homogeneous Markov chain, in the case of a stable limiting distribution*. Litovski mathematiceskii sbornik, 1:5-12, 1961.

[4] Bauer, H.: *Wahrscheinlichkeitstheorie*. 4. Aufl. Berlin: Walter de Gruyter, 1991.

[5] Breiman, L.: *Probability*. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 1968.

[6] Cheeger, J.: *A lower bound for the smallest eigenvalue of the Laplacian*. Problems in Analysis, a Symposium in Honor of S. Bochner, Princeton: Princeton Univ. Press, 195-199, 1970.

[7] Chen, M. F.: *Estimation of spectral gap for Markov chains*. Acta Math. Sin. New Ser., 12:337-360, 1996.

[8] Chen, M. F.: *Equivalence of exponential ergodicity and L^2-exponential convergence for Markov chains*. Stoch. Proc. Appl., 87:281-297, 2000.

[9] Chen, M. F.: *From Markov Chains to Non-Equilibrium Particle Systems*. 2. Aufl. Singapore: World Scientific, 2004.

[10] Chen, M. F.: *Eigenvalues, Inequalities, and Ergodic Theory*. London: Springer Verlag, 2005.

[11] Chen, M. F.: *Exponential convergence rate in entropy*. Front. Math. China, 2:329-358, 2007.

[12] Chen, M. F. / Wang, F. Y.: *Cheerger's inequalities for general symmetric forms and existence criteria for spectral gap*. Ann. Prob., 28:235-257, 2000.

[13] Chintschin, A. J. / Levy, P.: *Sur les lois stable*. C.R. Ac. Sc. Paris, 202, 1936.

[14] Chung, K. L.: *Markov Chains with stationary transition probabilities*. Berlin: Springer Verlag, 1960.

[15] Cogburn, R.: *The central limit theorem for Markov processes*. In Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Statist. Probab., 2:485-512, 1972.

[16] Derriennic, Y. / Lin, M.: *The central limit theorem for Markov chains started at a point*. Probab. Theory Related Fields, 125:73-76, 2003.

[17] Denker, M. / Jakubowski, A.: *Stable limit distributions for strongly mixing sequences*. Statist. Probab. Lett., 8:477-483, 1989.

[18] Diaconis, P. / Stroock, D.: *Geometric bounds for eigenvalue of Markov chains*. Ann. Appl. Probab., 1:36-61, 1991.

[19] Diaconis, P. / Saloff-Coste, L.: *Comparison theorems for reversible Markov chains*. Ann. Appl. Probab., 3:696-730, 1993.

[20] Diaconis, P. / Saloff-Coste, L.: *Logarithmic Sobolev inequalities for finite Markov chains*. Ann. Appl. Probab., 6:695-750, 1996.

[21] Diaconis, P. / Saloff-Coste, L.: *Nash inequalities for finite Markov chains*. J. Theoret. Probab., 9:459-510, 1996.

[22] Doeblin, W.: *Sur les propriété asyptotiques de mouvement régis par certain types de chaînes simples*. Bull. Math. Soc. Roum. Sci., 39(1):57-115;(2):3-61, 1937.

[23] Doeblin, W.: *Eléments d'une théorie générale des chaînes simples constantes de Markov*. Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, 57:61-111, 1940.

[24] Doob, J. L.: *Stochastic Processes*. New York: John Wiley & Sons, 1953.

[25] Dunford, N. / Schwartz, J. T.: *Dunford and Schwartz, PartI*. New York: John Wiley & Sons, 1988.

[26] Elstrodt, J.: *Maß- und Integrationstheorie*. 2.Aufl. Berlin: Springer Verlag, 1999.

[27] Fischer, H. / Kaul, H.: *Mathematik für Physiker*. Stuttgart: Teubner Verlag, 1998.

[28] Fill, J.: *Eigenvalue bounds on convergence to stationarity for nonreversible Markov chains, with applications to the exclusion process*. Ann. Appl. Probab., 1:62-87, 1991.

[29] Gelfand, A. E. / Smith, A. F. M.: *Sampling based approaches to calculating marginal densities*. J. Amer. Stat. Assoc., 85:398-409, 1990.

[30] Gordin, M. I.: *The central limit theorem for stationary processes*. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 188:739-741, 1969.

[31] Gouëzel, S.: *Berry-Esseen theorem and local limit theorem for non uniformly expanding maps*. Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist., 41:997-1024, 2005.

[32] Grimmett, G. / Stirzacker, D.: *Probability and Random Processes*. 3. Aufl. Oxford: Oxford Univ. Press, 2001.

[33] Guivarc'h, Y. / Hardy, J.: *Théorèmes limites pour une classe de chaînes de Markov et applications aux difféomorphismes d'Anosov*. Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist., 24:73-98, 1988.

[34] Hackenbroch, W. / Thalmaier, A.: *Stochastische Analysis*. Stuttgart: Teubner Verlag, 1994.

[35] Häggström, O.: *On the central limit theorem for geometrically ergodic Markov chains*. Probab. Th. Relat. Fields, 132:74-82, 2005.

[36] Hennion, H. / Hervé, L.: *Limit theorems for Markov Chains and Stochastic Properties of Dynamical Systems by Quasi-Compactness*. Berlin: Springer Verlag, 2001.

[37] Hernández-Lerma, O. / Lasserre, J. B.: *Markov Chains and Invariant Probabilities*. Basel: Birkhäuser Verlag, 2003.

[38] Horn, P. / Johnson, C.: *Topics in Matrix Analysis*. Cambridge Univ. Press, 1990.

[39] Ionescu-Tulcea, C. T. / Marinescu, G.: *Théorie ergodique pour des classes d'opérations non complètement continues*. Ann. Math., 47:140-147, 1950.

[40] Jakubowski, A.: *Minimal conditions in p-stable limit theorems*. Stochastic Process. Appl., 44:291-327, 1993.

[41] Ibragimov, I. A. / Linnik, Y. V.: *Independent and Stationary Sequences of Random Variables*. Groningen: Wolters-Noordhoff Publishing, 1971.

[42] Karamata, J.: *Sur une mode de croissance regulière; théorèmes fondamentaux*. Bull. Soc. Math. de France, 61:55-62, 1933.

[43] Kimbleton, S. R.: *A stable limit theorem for Markov chains*. Ann. Math. Statist., 40:1467-1473, 1969.

[44] Kolmogorov, A. N.: *Markov chains with a countable number of possible states*. Bull. Math. Univ. Moscow,1 No.3:1-16, 1937.

[45] Krengel, U.: *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*. 3. Aufl. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg Verlag, 1991.

[46] Krengel, U.: *Ergodic Theorems*. Berlin: Walter de Gruyter, 1985.

[47] Lasota, A. / Mackey, M. C.: *Chaos, Fractals, and Noise*. 2. Aufl. New York: Springer Verlag, 1994.

[48] Lawler, G. F. / Sokal, A. D.: *Bounds on the L^2 spectrum for Markov chains and Markov processes: a generalization of Cheeger's inequality*. Trans. Amer. Math. Soc., 309:557-580, 1988.

[49] Liu, J. S.: *Monte Carlo strategies in scientific computing*. New York: Springer Verlag, 2001.

[50] Maxwell, M. / Woodroofe, M.: *Central limit theorems for additive functionals of Markov chains*. Ann. Probab., 28:713-724, 2000.

[51] Meyn, S. P. / Tweedie, R. L.: *Markov Chains and Stochastic Stability*. London: Springer Verlag, 1993.

[52] Miclo, L.: *Sur les problèmes de sortie discrets inhomogènes*. Ann. Appl. Probab., 6:1112-1156, 1996.

[53] Nagaev, S. V.: *Some limit theorems for stationary Markov chains*. Teor.Verojatnost. i Primenen., 2:389-416, 1957.

[54] Norris, J. R.: *Markov Chains*. Cambridge Univ. Press, 1997.

[55] Nummelin, E.: *General irreducible Markov chains and non-negative operators*. Cambridge Univ. Press, 1984.

[56] Nummelin, E. / Tuominen, P.: *Geometric ergodicity of Harris recurrent chains with applications to renewal theory.* Stoch. Proc. Appl., 12:187-202, 1982.

[57] Roberts, C. P. / Casella, G.: *Monte Carlo statistical methods.* 2. Aufl. New York: Springer Verlag, 2004.

[58] Roberts, G. O. / Tweedie, R. L.: *Geometric L^2 and L^1 convergence are equivalent for reversibel Markov chains.* J. Appl. Probab., 38(A):37-41, 2001.

[59] Roberts, G. O. / Rosenthal, J. S.: *Geometric ergodicity and hybrid Markov chains.* Electron. Comm. Probab., 2:13-25, 1997.

[60] Roberts, G. O. / Rosenthal, J. S.: *General state space Markov chains and MCMC algorithms.* Probab. Surv., 1:20-71, 2004.

[61] Revuz, D.: *Markov chains.* Amsterdam: North Holland, 1975.

[62] Röckner, M. / Wang, F. Y.: *Weak Poincaré inequalities and L^c-convergence rates of Markov semigroups.* J. Funct. Anal., 185(2):564-603, 2001.

[63] Rosenblatt, M.: *Stationary Sequences and Random Fields.* Basel: Birkhäuser Verlag, 1985.

[64] Rousseau-Egele, J.:*Un théorème de la limite locale pour une classe de transformation dilatantes et monotones par morceaux.* Ann. Probab., 11:772-788, 1983.

[65] Smith. A. F. M. / Roberts, G. O.: *Bayesian computation via the Gibbs sampler and related Markov chain Monte Carlo methods.* J. Roy. Stat. Soc. Ser., B 55:3-24, 1993.

[66] Statulevičius, V. A.: *Local limit theorems and asymptotic expansions for non-stationary Markov chains.* Litovski mathematiceskii sborn ik 1, Nummer 1-2:231-314, 1961.

[67] Tierney, L.: *Markov chains for exploring posterior distributions.* Ann. Stat. 22:1701-1762, 1994.

[68] Thorisson, H.: *Coupling, Stationarity, and Regeneration.* Berlin: Springer Verlag, 2000.

[69] Vere-Jones, D.: *Geometric ergodicity in denumerable Markov chains.* Quart. J. Math. Oxford (2nd Ser.), 13:7-28,1962.

[70] Wang, F. Y.: *Sobolev type inequalities for general symmetric forms.* Proc. Amer. Math. Soc., 128(12):3675-3682, 2001.

[71] Wasserstein, L. N.: *Markov processes on a countable product space, describing large systems of automata.* Problem Peredachi Informastii, 5:64-73, 1969.

[72] Werner, D.: *Funkionalanalysis.* 4. Aufl. Berlin: Springer Verlag, 2002.

[73] Wübker, A.: *Ein stabiler lokaler Genzwertsatz für Markowsche Ketten.* Diplomarbeit, Universität Göttingen, 2004.

[74] Zhang, S. Y. / Mao, Y. H.: *Exponential convergence rate in Boltzman-Shannon entropy.* Sci. China, Ser. A 44: 280-285, 2001.

Curriculum Vitae

Achim Wübker

geboren am 10. August 1976 in Ostercappeln
verheiratet, zwei Kinder, deutsch

September 1983 – Juli 1996	Schule *Abitur* am *Gymnasium Damme*
August 1996 – Juli 1998	Ausbildung zum Bankkaufmann
Oktober 1998 – Juli 2004	Studium der Mathematik *Mathematische Fakultät Göttingen* Thema der Diplomarbeit: *Ein stabiler lokaler Grenzwertsatz für Markowsche Ketten* betreut von *Prof. Dr. Manfred Denker*
April 2002 – April 2004	Studentische Hilfskraft *Institut für Mathematische Stochastik, Universität Göttingen*
Oktober 2004 – April 2005	Wissenschaftliche Hilfskraft *Institut für Mathematische Stochastik, Universität Göttingen*
Seit November 2004	Promotionsstudent in Mathematik *Institut für Mathematische Stochastik, Universität Göttingen* betreut von *Prof. Dr. Manfred Denker* Mitglied des *DFG-Graduiertenkollegs 1023*