Poincarédualitätsalgebren, Koinvarianten und Wu-Klassen

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades

der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultäten

der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von

Kathrin Kuhnigk

aus Kassel

Göttingen 2003

D 7
Referent: Prof. L. Smith PHD
Korreferentin: Prof. Dr. I. Kersten
Tag der mündlichen Prüfung: 22.05.2003

Vorwort

Diese Arbeit beschäftigt sich im Wesentlichen mit Poincarédualitätsalgebren. Das sind Algebren über einem Körper $\mathbb{F}$, die eine endliche $\mathbb{F}$-Vektorraum-Dimension haben und deren Basiselemente (als graduierter Vektorraum über $\mathbb{F}$) bei einer geeigneten Darstellung ein symmetrisches Rautenmuster ergeben. Diese Gebilde traten zunächst als Kohomologiegruppen geschlossener Mannigfaltigkeiten in der Topologie auf und gehen zurück auf H. Poincaré (siehe zum Beispiel [21], Abschnitt 69). Dort haben auch die Steenrod-Operationen ihren Ursprung, die auf Poincarédualitätsalgebren durch gewisse charakteristische Klassen, die Wu-Klassen (vergleiche [1]), dargestellt werden können. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich jedoch nicht mit Topologie sondern mit den Poincarédualitätsalgebren, die im Zusammenhang mit der Invariantentheorie, also in der Algebra, auftreten.

Invariantenringe sind Unteralgebren (in dieser Arbeit von Polynomringen), die aus allen Polynomen bestehen, die invariant unter der Operation einer endlichen Gruppe auf dem Polynomring sind. Wird das Ideal, das die nichttrivialen Elemente des Invariantenrings im Polynomring erzeugen, aus ebendiesem herausgeteilt, erhalten wir die Koinvarianten, die unter bestimmten Voraussetzungen eine Poincarédualitätsalgebra sind. Haben wir erst einmal Poincarédualitätsalgebren, können wir in ihnen die Wu-Klassen untersuchen, unabhängig von ihrer topologischen Herkunft.

Diese Arbeit ist wie folgt gegliedert:

Im ersten Kapitel werden die allgemeinen Grundlagen eingeführt. Hier wird im Wesentlichen auf Beweise verzichtet und nur verwiesen. Lediglich einige Aussagen im Abschnitt über die Dickson-Algebra sind neu und werden bewiesen, und Sätze, bei denen der Beweis auch noch Informationen liefert, die dem Verständnis der Grundlagen dienlich sind.

Das zweite Kapitel beschäftigt sich mit den Wu-Klassen und vor allem der Frage, wann sie trivial sind. Als Anwendung werden die Wu-Klassen einiger Koinvarianten untersucht.

Im dritten Kapitel kommt eine neue Methode hinzu: Um die Wu-Klassen untersuchen zu können, muss die Struktur der betrachteten Poincarédualitätsalgebren gut bekannt sein. Macaulay beschrieb in [14] (in moderne Sprache übersetzt in [15], Teil II) eine Möglichkeit, eine Poincarédualitätsalgebra über ein einziges Element, die sogenannte Macaulay-Inverse eines Ideals, zu charakterisieren. Diese Macaulay-Inverse wird hier für mehrere Poincarédualitätsalgebren berechnet und es werden einige allgemeine Berechnungsmethoden entwickelt.

Das vierte Kapitel beschäftigt sich mit einem anderen Aspekt der Koinvarianten. Die Gruppe, durch die die Koinvarianten entstanden sind, operiert wiederum auf ihnen, und in bestimmten Fällen ist diese Operation nicht fixpunktfrei. Es wird versucht, die Gruppenoperation auf den Koinvarianten näher zu beleuchten.

Im fünften Kapitel schließlich wird eine Arbeit von J.F. Adams ([1]) ergänzt. In dieser Arbeit untersucht und entwickelt Adams Beziehungen zwischen Wu-Klassen und Steenrod-Operationen, die in allen Poincarédualitätsalgebren gelten und deshalb auch in einem von ihm eingeführten universellen Objekt. Dessen Struktur wird hier genauer untersucht.

Ich möchte mich sehr herzlich bei L. Smith von der Universität Göttingen für die gute und geduldige Betreuung bedanken. Er hat es verstanden, mich immer wieder zu motivieren und die richtigen Fragestellungen aufzuwerfen, auch wenn ich mich irgendwo festgefahren hatte. Ferner stand er jederzeit für meine Fragen zur Verfügung. Auch für die Bereitstellung von $\mathcal{LS}$TEX möchte ich mich bedanken.

Weiterhin schulde ich unserem Oberseminar (L. Smith, D.M. Meyer, T.-Z. Lin, J. Uliczka, C. Albrecht, C. Schulte) großen Dank. Seine Mitglieder haben geduldig meine Vorträge angehört und auseinandergenommen mit Fragen, die mich weitergebracht und gezwungen haben, sauber und korrekt zu arbeiten.

Kathrin Kuhnigk
Göttingen, April 2003

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1
Einführung

In diesem einleitenden Kapitel werden die Grundlagen zusammen getragen, die im Weiteren benötigt werden. Beweise werden nur vorgestellt, wenn sie entweder neu sind oder wichtig für den Inhalt dieser Arbeit.

1.1 Kommutative Algebra

Zunächst möchte ich an einige Begriffe erinnern und die durchgängig verwendeten Grundlagen und Konventionen einführen.

In dieser Arbeit werden im Wesentlichen kommutative Objekte untersucht. Lediglich Gruppen dürfen nicht-kommutativ sein.

Ferner werden wir diese kommutativen Objekte **graduiert** über $\mathbb{Z}$ betrachten, das heißt zum Beispiel für eine Algebra A, dass sie nur homogene Elemente beinhaltet und daher eine Familie ihrer **homogenen Komponenten** ist:

$$A = \left\{A_i = \{a \in A : \deg(a) = i\} : i \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Indem wir jedem Element den Grad 0 geben, können wir aus jeder Algebra eine graduierte Algebra machen. Die inhomogenen Elemente erhalten wir wieder, indem wir zur **Totalisierung** von A übergehen:

$$\mathrm{Tot}(A) := \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A_i .$$

In der Literatur ist oft dieses Objekt gemeint, wenn von einem graduierten Objekt geredet wird. Für eine Einführung in die kommtutative Algebra sei hier auf [4] oder auf [6] verwiesen. Die hier verwendete Graduierung und darüber hinausgehende Aspekte der graduierten Algebra untersucht C. Albrecht in [2].

Falls bei einer $\mathbb{F}$-Algebra $A_0 = \mathbb{F}$ ist, so sprechen wir von einer **zusammenhängenden** Algebra.

Seien $B \subset A$ kommutative graduierte zusammenhängende $\mathbb{F}$-Algebren. Dann bezeichnet $\overline{B} := (b \in B : \deg(b) > 0) \subset B$ das **Augmentierungsideal** von B in B und $(\overline{B}) \subset A$ dessen Erweiterung in A. Wenn A wie beschrieben graduiert und zusammenhängend ist, ist $\bigoplus A$ ein lokaler Ring und $\overline{A} \subset A$ das eindeutige maximale Ideal.

Eine Algebra über einem Körper $\mathbb{F}$, die als $\mathbb{F}$-Vektorraum endliche Dimension hat, nennen wir **total endlich**. Wir benötigen aber noch einen weiteren Dimensionsbegriff.

DEFINITION: *Die* **Krulldimension** *einer kommutativen graduierten zusammenhängenden Algebra über einem Körper $\mathbb{F}$ ist die maximale Länge k eine Kette von Primidealen in A,*

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneqq \mathfrak{p}_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq \mathfrak{p}_k \subsetneqq A,$$

oder ∞, falls es unendlich lange solche Ketten gibt. Schreibe

$$\dim(A) = k\,.$$

Emmy Noether bewies zur Krulldimension:

THEOREM 1.1.1 (Noether-Normalisierung): *Sei A eine endlich erzeugte kommutative graduierte zusammenhängende Algebra über $\mathbb{F}$. Dann sind folgende Bedingungen an die Zahl $r \in \mathbb{N}$ äquivalent:*

(i) $r = \dim(A)$,

(ii) $r = \min\{j \in \mathbb{N} : \exists$ *Folge* $a_1, \ldots, a_j \in A$ *so dass* $A/(a_1, \ldots, a_j)$ *total endlich ist*$\}$,

(iii) $r = \max\{j \in \mathbb{N} : \exists$ *Folge* $a_1, \ldots, a_j \in A$ *so dass* $a_1, \ldots, a_j$ *algebraisch unabhängig in* A *sind*$\}$.

BEWEIS: Siehe Theorem 5.3.3 in [27]. □

Nun macht die folgende Definition Sinn.

DEFINITION: *Sei A eine endlich erzeugte kommutative graduierte zusammenhängende Algebra über $\mathbb{F}$ der Krulldimension r. Ein* **graduiertes** (*oder* **homogenes**) **Parametersystem** *für A ist jede Menge von r Elementen $a_1, \ldots, a_r \in \overline{A}$, so dass $A/(a_1, \ldots, a_r)$ total endlich ist.*

Noch spezieller sind Regulärfolgen:

DEFINITION: *Sei A eine kommutative graduierte zusammenhängende Algebra über $\mathbb{F}$. Eine Folge $a_1, \ldots, a_r \in \overline{A}$ heißt* **Regulärfolge**, *falls a_1 kein Nullteiler in A ist und a_i kein Nullteiler in $A/(a_1, \ldots, a_{i-1})$ ist, für $i = 2, \ldots, r$. Ein Ideal, das von einer Regulärfolge erzeugt wird, nennen wir* **reguläres Ideal**.

SATZ 1.1.2: *Sei A eine kommutative graduierte zusammenhängende Algebra über $\mathbb{F}$ und $a_1, \ldots, a_r$ eine Regulärfolge in A. Dann gilt:*

(i) $a_1, \ldots, a_r$ sind algebraisch unabhängig.

(ii) Auch $a_1^{k_1}, \ldots, a_n^{k_n}$ sind (für $k_i \in \mathbb{N}$) eine Regulärfolge in A.

1.2 Invariantentheorie

In diesem Abschnitt werden die Grundzüge der Invariantentheorie endlicher Gruppen vorgestellt. Für eine ausführliche Einführung (und darüber hinaus) in die Invariantentheorie sei hier auf das Buch "Polynomial Invariants of Finite Groups" ([27]), aus dem auch die Beispiele stammen, und den Überblicksartikel [28], beides von L. Smith, verwiesen.

Sei $\mathbb{F}$ ein Körper und $V \cong \mathbb{F}^n$ ein n-dimensionaler $\mathbb{F}$-Vektorraum, $n \in \mathbb{N}$. Sei $\{z_1, \ldots, z_n\}$ eine Basis von V^*, dem Dualraum von V. Dann bezeichnen wir mit

$$\mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n]$$

die **Algebra der Polynomfunktionen** über dem Körper $\mathbb{F}$, definiert als die symmetrische Algebra auf V^*, das heißt,

$$\mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n] = \mathbb{F}[V] = \{\mathbb{F}, V^*, S^2(V^*), S^3(V^*), \cdots\}$$

als Familie. Dabei bezeichnet $S^m(V^*)$ die m-te symmetrische Potenz von V^*, die aus den homogenen Polynomen vom Grad m in $z_1, \ldots, z_n$ besteht. Indem wir jedem z_i den Grad 1 geben, betrachten wir $\mathbb{F}[V]$ als graduierten Ring oder graduierte $\mathbb{F}$-Algebra.

Da in dem Fall, dass $\mathrm{Char}(\mathbb{F}) = p > 0$ (p prim) ist, Probleme auftreten können, zum Beispiel bei der Unterscheidung der Funktion z_i von z_i^p, erlauben wir, dass Polynomfunktionen auf n-Tupeln aus dem algebraischen Abschluß $\overline{\mathbb{F}}$ von $\mathbb{F}$ ausgewertet werden, so dass sie auch Werte in $\overline{\mathbb{F}}$ annehmen können.

Sei G (im Folgenden immer) eine endliche Gruppe und $\varrho : G \hookrightarrow \mathrm{GL}(V)$ eine treue Darstellung . Vermöge

$$(gf)(v) = (g(f(v)) := f(\varrho(g^{-1})v),$$

wobei wir der Einfachheit halber normalerweise die Darstellung weglassen, operiert G auf $\mathbb{F}[V]$, und die Fixpunktmenge unter der Operation von G ist der **Invariantenring**

$$\mathbb{F}[V]^G := \{f \in \mathbb{F}[V] : \ gf = f \ \ \forall \ \ g \in G\}.$$

BEISPIEL 1: Sei V der n-dimensionale Permutationsdarstellungsmodul für die symmetrische Gruppe Σ_n, und seien $z_1, \ldots, z_n \in V^*$ die Dualen der Permutationsbasis. Dann ist

$$\mathbb{F}[V]^{\Sigma_n} = \mathbb{F}[e_1, \ldots, e_n],$$

wobei $e_i = e_i(z_1, \ldots, z_n)$ das i-te elementarsymmetrische Polynom in $z_1, \ldots, z_n$ ist,

$$e_i(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{\{j_1,\ldots,j_i\}\in\{1,\ldots,n\}} z_{j_1} \cdots z_{j_i}.$$

Auch für eine gewisse Art von "annähernd invarianten" Elementen gibt es eine Beschreibung: Wir bezeichnen mit $\mathbb{F}^\times$ die multiplikative Gruppe des Körpers $\mathbb{F}$, und diese kann mit $\mathrm{GL}(1;\mathbb{F})$ identifiziert werden. Wenn $\chi: G \longrightarrow \mathbb{F}^\times$ eine eindimensionale Darstellung von G ist, dann ist der Modul der **χ-relativen Invarianten** durch

$$\mathbb{F}[V]^G_\chi := \{f \in \mathbb{F}[V] : \; g(f) = \chi(g)f \quad \forall\, g \in G\}$$

definiert.

Emmy Noether zeigte 1916 in [18] für $\mathrm{Char}(\mathbb{F}) = 0$, später (1926, [19]) auch allgemein, dass die Invarianten immer eine endlich erzeugte $\mathbb{F}$-Algebra sind und konnte für den Fall, dass $\mathrm{Char}(\mathbb{F}) = 0$ ist, auch eine obere Grenze für den Grad der Erzeuger angeben (siehe Abschnitt 2.4 in [27]). Folgendes Theorem bewies sie in größerer Allgemeinheit, uns reicht diese Version.

THEOREM 1.2.1 (Noether): *Sei $\mathbb{F}$ ein Körper, $V \cong \mathbb{F}^n$ und G eine endliche Gruppe, die durch Automorphismen auf $\mathbb{F}[V]$ operiert. Dann ist $\mathbb{F}[V]^G$ auch eine endlich erzeugte kommutative $\mathbb{F}$-Algebra, und $\mathbb{F}[V]$ ist endlich erzeugt als Modul über $\mathbb{F}[V]^G$.*

BEWEIS: Siehe zum Beispiel Theorem 2.3.1 in [27]. □

Es lässt sich dann auch recht leicht zeigen, dass mindestens n Elemente nötig sind, um $\mathbb{F}[V]^G$ als $\mathbb{F}$-Algebra zu erzeugen (folgt aus Proposition 1.2.4 in [27]). Die nächste Frage ist, wenn n Algebra-Erzeuger gefunden wurden, wie sich feststellen lässt, ob sie bereits den Invariantenring erzeugen. Ein wichtiges Hilfsmittel dazu ist die Poincaréreihe, eine formale Potenzreihe, die in jedem Grad i die Dimension der i-ten Komponente der betrachteten $\mathbb{F}$-Algebra als $\mathbb{F}$-Vektorraum angibt.

DEFINITION: *Für einen* **positiv graduierten** *(das heißt $M_i < 0$ falls $i < 0$) Modul M von* **endlichem Typ** *(das heißt, alle Komponenten sind endlichdimensional) heißt die formale Potenzreihe*

$$\mathbf{P}(M, t) := \sum_{i=0}^{\infty} \dim_{\mathbb{F}}(M_i)t^i$$

die **Poincaréreihe** *von M. Analog ist sie für positiv graduierte $\mathbb{F}$-Algebren definiert.*

EIGENSCHAFTEN:

Seien M, N, N' graduierte $\mathbb{F}$-Moduln.

(1) Ist $0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow N' \longrightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz, so gilt

$$\mathbf{P}(M,t) = \mathbf{P}(N,t) + \mathbf{P}(N',t).$$

(2) Ist $M = N \otimes N'$, wobei $M_i = \bigoplus_{j+k=i} N_j \otimes N'_k$ ein Tensorprodukt über $\mathbb{F}$ ist, so gilt

$$\mathbf{P}(M,t) = \mathbf{P}(N,t) \cdot \mathbf{P}(N',t).$$

(3) Falls $A \subseteq M$ ein Ring ist und M frei als A-Modul ist, folgt

$$\mathbf{P}(M,t) = \mathbf{P}(A,t) \cdot \mathbf{P}(\mathbb{F} \otimes_A M, t).$$

Die Beweise sind einfach und finden sich zum Beispiel in [27] oder in [11].

BEMERKUNG: Falls $\mathbf{P}(M,1) < \infty$, so ist M total endlich.

BEISPIEL 2: Die Poincaréreihe einer Algebra, die die Struktur eines Polynomrings trägt, $A := \mathbb{F}[f_1, \dots, f_n]$, wobei $\deg(f_i) = d_i$ sei, lässt sich leicht bestimmen. Mit

$$A = \mathbb{F}[f_1, \dots, f_n] \cong \mathbb{F}[f_1] \otimes \cdots \otimes \mathbb{F}[f_n]$$

folgt aus Eigenschaft (2) der Poincaréreihen, dass

$$\mathbf{P}(A,t) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}(\mathbb{F}[f_i], t) = \prod_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{\infty} t^{jd_i} = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1-t^{d_i}}$$

ist.

Was für Strukturen lassen sich noch mit Hilfe von Invariantenringen erzeugen?

Das Augmentierungsideal $(\overline{\mathbb{F}[V]^G}) \subset \mathbb{F}[V]$ eines Invariantenrings wird **Hilbertideal** von G genannt und

$$\mathfrak{h}(G) := (\overline{\mathbb{F}[V]^G}) \subset \mathbb{F}[V]$$

geschrieben. Dann sind die **Koinvarianten** folgendermaßen definiert:

$$\mathbb{F}[V]_G := \mathbb{F}[V]/\mathfrak{h}(G) = \mathbb{F} \otimes_{\mathbb{F}[V]^G} \mathbb{F}[V],$$

wobei $\mathbb{F}[V]^G$ auf $\mathbb{F}[V]$ durch Multiplikation von Polynomen operiert, und auf $\mathbb{F}$ durch den Augmentierungshomomorphismus $\varepsilon : \mathbb{F}[V]^G \longrightarrow \mathbb{F}$, der jedes Element aus $\overline{\mathbb{F}[V]^G}$ auf 0 abbildet und die Elemente aus $\mathbb{F}$ fest lässt. Diese Arbeit wird sich hauptsächlich mit Koinvarianten und ähnlichen Strukturen beschäftigen.

BEISPIEL 3: Betrachten wir Beispiel 1 für $n = 3$. Es ist

$$\mathbb{F}[x, y, z]^{\Sigma_3} = \mathbb{F}[x + y + z, xy + xz + yz, xyz],$$

das heißt, der Ring der Koinvarianten ist

$$\mathbb{F}[x, y, z]_{\Sigma_3} = \frac{\mathbb{F}[x, y, z]}{(x + y + z, xy + xz + yz, xyz)}.$$

Aus der Relation $x + y + z = 0 \in \mathbb{F}[x, y, z]_{\Sigma_3}$ erhalten wir

$$\mathbb{F}[x, y, z]_{\Sigma_3} \cong \frac{\mathbb{F}[x, y]}{(x^2 + xy + y^2, x^2y + xy^2)}.$$

Diese Koinvarianten sind also ein endlichdimensionaler $\mathbb{F}$-Vektorraum und lassen sich auf folgende Weise (bildlich) darstellen:

$$\begin{array}{ccc} & x^2y = -xy^2 & \\ & \bullet & \\ x^2\ \bullet & & \bullet\ y^2 \\ x\ \bullet & & \bullet\ y \\ & \bullet & \\ & 1 & \end{array}.$$

Hier entspricht die Höhe des Knotens dem Grad des dazugehörigen Basiselements. Das heißt, der Knoten mit der 1 liegt auf der Höhe Null, die 1 ist das Basiselement im Grad 0. Die Knoten mit x und y liegen auf der Höhe Eins, was dafür steht, dass x und y die Basiselemente im Grad 1 sind. Dabei fällt eine Symmetrie zum Einen zur senkrechten Achse durch den oberen und den unteren Knoten auf, aber auch zu einer horizontalen Achse in der Mitte zwischen den Graden. Koinvarianten haben nicht immer diese schöne Struktur. Algebren von dieser schönen, symmetrischen Struktur heißen Poincarédualitätsalgebren und werden in dieser Arbeit genauer untersucht.

BEISPIEL 4: Mit Hilfe der 3. Eigenschaft der Poincaréreihen lässt sich die des Koinvariantenrings ausrechnen für den Fall, dass

$$\mathbb{F}[V]^G = \mathbb{F}[f_1, \ldots, f_n] \subset \mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n] = \mathbb{F}[V]$$

ist. Dann ist $\mathbb{F}[V]$ frei als Modul über $\mathbb{F}[V]^G$ (siehe [27], Korollar 6.7.13). Nach Definition ist

$$\mathbb{F}[V]_G = \mathbb{F} \otimes_{\mathbb{F}[V]^G} \mathbb{F}[V].$$

Wenden wir Eigenschaft (3) der Poincaréreihen an, erhalten wir:

$$\mathbf{P}(\mathbb{F}[V]_G, t) = \frac{\mathbf{P}(\mathbb{F}[V], t)}{\mathbf{P}(\mathbb{F}[V]^G, t)}.$$

Die beiden rechten Poincaréreihen sind durch Beispiel 1.2.2 berechnet, deshalb ist

$$\mathbf{P}(\mathbb{F}[V]_G, t) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1 - t^{d_i}}{1 - t} = \prod_{i=1}^{n} (1 + t + \cdots + t^{d_i - 1}) = 1 + \cdots + t^{\sum_{i=1}^{n}(d_i - 1)}.$$

Hieran ist erkennbar, dass diese Koinvarianten einen endlichdimensionalen $\mathbb{F}$-Vektorraum bilden, dass der höchste Grad, in dem ein Basiselement liegt, $\sum_{i=1}^{n}(d_i - 1)$ ist, und dass die Basis in diesem höchsten Grad eindimensional ist. All dies sind charakteristische Eigenschaften von Poincarédualitätsalgebren, die in Abschnitt 1.4 vorgestellt werden.

Wir haben bisher nur Beispiele gesehen, in denen der Invariantenring eine Polynomalgebra ist. Das muss aber nicht immer der Fall sein.

BEISPIEL 5: Betrachte $\mathbb{Z}/2 < \mathrm{GL}(2;\mathbb{F})$ erzeugt von der Matrix

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

wobei $\mathrm{Char}(\mathbb{F}) \neq 2$. Dann gibt es im Grad 1 keine und im Grad 2 genau 3 invariante Monome, nämlich

$$x^2, xy, y^2.$$

Diese erzeugen $\mathbb{F}[x,y]^{\mathbb{Z}/2}$ und sind nicht assoziiert, erfüllen aber die Beziehung

$$x^2 \cdot y^2 = (xy)\cdot(xy).$$

Daher ist $\mathbb{F}[x,y]^{\mathbb{Z}/2}$ keine Polynomalgebra sondern isomorph zu einer Algebra der Form

$$\mathbb{F}[x,y]^{\mathbb{Z}/2} \cong \frac{\mathbb{F}[X,Y,Z]}{(Z^2 - XY)}.$$

Das folgende Theorem liefert für bestimmte Fälle ein Kriterium, wann der Invariantenring eine Polynomalgebra ist. Dazu benötigen wir den folgenden Begriff. Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{F}$-Vektorraum und G eine endliche Gruppe, die auf V operiert. Ein Element $g \in G$ heißt **Pseudospiegelung**, falls

(1) $g \neq \mathrm{id} \in G$,
(2) $\dim_{\mathbb{F}}(V^g) = n-1$.
(3) g hat endliche Ordnung.

Eine Pseudospiegelung hat also den mindestens $(n-1)$-fachen Eigenwert 1. Eine Gruppe, die von Pseudospiegelungen erzeugt wird, heißt **Pseudospiegelungsgruppe**. Zum Beispiel ist $\mathrm{GL}(n;\mathbb{F})$ eine Pseudospiegelungsgruppe, falls $\mathbb{F}$ endlich ist.

THEOREM 1.2.2 (Shephard-Todd, Chevalley): *Sei $\mathbb{F}$ ein Körper, V ein endlichdimensionaler $\mathbb{F}$-Vektorraum und $\varrho : G \hookrightarrow \mathrm{GL}(V)$ eine treue Darstellung einer endlichen Gruppe G. Sei $(|G|, \mathrm{Char}(\mathbb{F})) = 1$. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:*

(i) G wird von Pseudospiegelungen erzeugt.
(ii) $\mathbb{F}[V]^G$ ist eine Polynomalgebra.

BEWEIS: Siehe [27], Theorem 7.4.1. □

Falls $(|G|, \mathrm{Char}(\mathbb{F})) > 1$ folgt, wenn $\mathbb{F}[V]^G$ eine Polynomalgebra ist, dass G eine Pseudospiegelungsgruppe ist (siehe [22], in Verbindung mit [5]). Die Umkehrung ist jedoch nicht allgemein richtig, wie Beispiele in Abschnitt 7.4 in [27] zeigen. Bedingungen, unter denen sie richtig ist, untersucht T.-C. Lin in [12].

Wir haben hier ein erstes Beispiel gesehen, in dem die Charakteristik des Grundkörpers eine Rolle spielt. Mit dem sogenannten **modularen** Fall, in dem $|G| = 0 \in \mathbb{F}$ ist, wollen wir uns jetzt beschäftigen. Dass die Invarianten eine endlich erzeugte $\mathbb{F}$-Algebra sind, gilt, wie E. Noether (Theorem 1.2.1) gezeigt hat, unabhängig von der Charakteristik des Grundkörpers. Falls $\mathrm{Char}(\mathbb{F}) = 0$ ist, konnte sie sogar eine obere Grenze, nämlich $|G|$, für den Grad der Erzeuger von $\mathbb{F}[V]^G$ angeben, zusammen mit einem Algorithmus zur Berechnung (siehe Abschnitt 2.4 in [27]). Dieses Ergebnis wurde von L. Smith und R.E. Stong auf den Fall, dass $|G|! \in \mathbb{F}^\times$ ist, verallgemeinert [29]. Obwohl inzwischen auch für einige andere Spezialfälle Grenzen gefunden wurden (siehe zum Beispiel [10] oder [24]), funktioniert der von E. Noether angegebene Algorithmus zur Erzeugung von genügend Invarianten nicht im modularen Fall. Daher ist in der modularen Invariantentheorie auch heute noch viel zu tun!

Neue Aspekte kommen aber hinzu, zum Beispiel ist für einen endlichen Körper $\mathbb{F}$ mit $q = p^s$ Elementen (p prim) die Gruppe $\mathrm{GL}(n;\mathbb{F})$ endlich und hat die Ordnung

$$|\mathrm{GL}(n;\mathbb{F})| = (q^n - 1)(q^n - q)\cdots(q^n - q^{n-1}),$$

und einen Invariantenring, der ein Polynomring ist. Und da wir die endlichen Gruppen G immer mit Darstellungen $\varrho : G \hookrightarrow \mathrm{GL}(n;\mathbb{F})$ betrachten, so dass sie (eigentlich $\varrho(G)$) sich als Untergruppen von $\mathrm{GL}(n;\mathbb{F})$ auffassen lassen, gilt für alle endlichen Gruppen

$$\mathbb{F}[V]^{\mathrm{GL}(n;\mathbb{F})} \subset \mathbb{F}[V]^G,$$

und $\mathbb{F}[V]^G$ ist eine endliche Erweiterung von $\mathbb{F}[V]^{\mathrm{GL}(n;\mathbb{F})}$. Wir haben also universelle Invarianten, die in jedem Invariantenring enthalten sind. Da L.E. Dickson sie 1911 in [9] als erster berechnete, wird

$$\mathbf{D}^*(n) := \mathbb{F}[V]^{\mathrm{GL}(n;\mathbb{F})}$$

die **Dickson-Algebra** genannt und die Erzeuger $\mathbf{d}_{n,0}, \ldots, \mathbf{d}_{n,n-1}$ heißen **Dickson-Invarianten**. Da sie in dieser Arbeit eine wichtige Rolle spielen, ist ihnen ein eigener Abschnitt, 1.3, gewidmet.

1.3 Die Dickson-Algebra und die Eulerklasse

In diesem Abschnitt wird die Dickson-Algebra $\mathbf{D}^*(n) = \mathbb{F}[V]^{\mathrm{GL}(n;\mathbb{F})}$ vorgestellt und einige (im Allgemeinen bekannte) Eigenschaften gezeigt, die später für einige Berechnungen nötig sind. Eine vollständige (soweit Vollständigkeit bei einem mathematischen Thema überhaupt möglich ist) Einführung der Dickson-Algebra findet sich in [27], Kapitel 8, worauf ich hiermit verweise. Fehlende Beweise finden Interessierte dort.

Im ganzen Abschnitt sei nun V ein n-dimensionaler Vektorraum über dem Körper $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$ mit $q = p^\nu$ Elementen.

SATZ 1.3.1: *Die Algebra $\mathbb{F}[V]^{\mathrm{GL}(n;\mathbb{F})}$ der Invarianten der Operation der $\mathrm{GL}(n;\mathbb{F})$ auf dem Ring der Polynomfunktionen $\mathbb{F}[V]$ wird mit $\mathbf{D}^*(n)$ bezeichnet und* **Dickson-Algebra** *genannt. Sie ist eine Polynomalgebra,*

$$\mathbf{D}^*(n) = \mathbb{F}[\mathbf{d}_{n,0}, \ldots, \mathbf{d}_{n,n-1}],$$

mit Erzeugern

$$\mathbf{d}_{n,i} = e_{q^n - q^i}(v_1, \ldots, v_{q^n-1}), \quad i = 0, \ldots, n-1,$$

vom Grad

$$\deg(\mathbf{d}_{n,i}) = q^n - q^i.$$

Dabei sind $v_1, \ldots, v_{q^n-1}$ die $q^n - 1$ verschiedenen Linearformen aus $V^* \setminus \{0\}$ und $e_j(X_1, \ldots, X_r)$ bezeichnet das j-te elementarsymmetrische Polynom in $X_1, \ldots, X_r$.

Es gibt noch einige andere Beschreibungen der Dickson-Polynome, zum Beispiel als Determinante einer Matrix (siehe Dicksons Original-Beweis [9]) oder als Summe über gewisse Unterräume von V von Produkten über die Linearformen aus diesen Unterräumen (siehe [27], Kapitel 8). Die oben angegebene Beschreibung ist die, die ich benutzen werde.

BEISPIEL 1 (Konkrete Dickson-Polynome):

(1) Sei $n = 2$ und $\{x, y\}$ eine Basis für V^*, also $\mathbb{F}[V] = \mathbb{F}[x, y]$.

(a) $p = 3$:

$$\mathbf{d}_{2,0} = x^6y^2 + x^4y^4 + x^2y^6,$$
$$\mathbf{d}_{2,1} = x^6 + x^4y^2 + x^2y^4 + y^6.$$

(b) p beliebig:

$$\mathbf{d}_{2,0} = \sum_{j=0}^{p-1} (x^{p-1})^{j+1}(y^{p-1})^{p-j},$$

$$\mathbf{d}_{2,1} = \sum_{j=0}^{p} (x^{p-1})^{j}(y^{p-1})^{p-j}.$$

Für $n = 2$ lassen sich diese Polynome leicht mit Hilfe der in Satz 1.3.1 angegebenen Formel ausrechnen.

(2) Sei nun n beliebig und $p = 2$, $\{z_1, \dots, z_n\}$ eine Basis für V^*. D. Arnon hat in [3] eine Formel bewiesen, mit der sich die Dickson-Polynome ausrechnen lassen:

$$\mathbf{d}_{n,i} = \sum_{\substack{s_1+\dots+s_n = 2^n - 2^i \\ \text{mit } s_j \in \{0,2,2^2,\dots,2^{r_j} :\ 2^{r_j} \le 2^n - 2^i\}}} z_1^{s_1} \cdots z_n^{s_n}.$$

Im Allgemeinen scheint es quasi unmöglich zu sein, eine geschlossene Form als Polynom in Basiselementen für $\mathbf{d}_{n,i}$ anzugeben. In [8] werden einige Formeln angegeben, wie zum Beispiel $\mathbf{d}_{n,i}$ und $\mathbf{d}_{n-1,i-1}$ zusammenhängen. Einige davon werden in späteren Kapiteln benötigt und dann an Ort und Stelle vorgestellt. Auf einem recht einfachen Weg lässt sich jedoch immerhin eine Aussage über Leitglieder dieser Polynome machen, wozu der folgende eher zahlentheoretische Hilfsatz benötigt wird.

HILFSSATZ 1.3.2: *Das Produkt über die Einheiten eines endlichen Körpers $\mathbb{F}_q$ mit q Elementen (dabei ist $q = p^\nu$ und p prim) ist 1 oder -1, und zwar*

$$\prod_{\lambda \in \mathbb{F}_q^\times} \lambda = \begin{cases} 1 & \text{falls } q \text{ gerade,} \\ -1 & \text{falls } q \text{ ungerade.} \end{cases}$$

BEWEIS: Sei ω eine $(q-1)$-te primitive Einheitswurzel, das heißt,

$$\mathbb{F}_q^\times = \{\omega, \omega^2, \dots, \omega^{q-1}\}$$

und $\omega^{q-1} = 1$. Dann ist

$$\prod_{\lambda \in \mathbb{F}_q^\times} \lambda = \prod_{i=1}^{q-1} \omega^i = \omega^{\sum_{i=1}^{q-1}} = \omega^{\frac{(q-1)(q-2)}{2}}.$$

Ist q ungerade, muss, da $(\omega^{\frac{q-1}{2}})^2 = \omega^{q-1} = 1$ ist, $\omega^{\frac{q-1}{2}} = -1$ sein (da ω eine primitive Einheitswurzel ist). Da mit q auch $q-2$ ungerade ist folgt daher, dass $\omega^{\frac{(q-1)(q-2)}{2}} = (\omega^{\frac{q-1}{2}})^{q-2} = -1$ ist.

Ist $q = 2$, ist die Behauptung klar.

Ist $q > 2$ und gerade, so schreiben wir, da in diesem Fall $\frac{q-2}{2}$ eine ganze Zahl, und daher $\omega^{\frac{q-2}{2}} \in \mathbb{F}_q^\times$ ist,

$$\omega^{\frac{(q-1)(q-2)}{2}} = (\omega^{\frac{q-2}{2}})^{q-1} = 1,$$

und die Behauptung ist vollständig bewiesen. □

Sei $V^* = \mathrm{Span}_{\mathbb{F}}\{z_1, \ldots, z_n\}$ und nach lexikographischer Ordnung sei

$$z_1 \succ_{lex} \cdots \succ_{lex} z_n.$$

Die lexikographische Ordnung lässt sich von Monomen unkompliziert auf Terme erweitern:

$$a z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n} \succ_{lex} b z_1^{l_1} \cdots z_n^{l_n}$$

genau dann, wenn entweder

$$(i)\; z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n} \succ_{lex} z_1^{l_1} \cdots z_n^{l_n} \;\text{ oder }\; (ii)\; z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n} = z_1^{l_1} \cdots z_n^{l_n} \text{ und } a > b.$$

Folgende Aussage über Leitglieder der Dickson-Polynome kann nun bewiesen werden:

LEMMA 1.3.3: *V^* habe eine Basis, die wie eben angegeben nach lexikographischer Ordnung sortiert sei. Dann ist, falls q ungerade ist,*

$$\mathrm{LT}(\mathbf{d}_{n,i}) = (-1)^{n-i} z_1^{q^n - q^{n-1}} z_2^{q^{n-1} - q^{n-2}} \cdots z_{n-i}^{q^{i+1} - q^i}.$$

Falls q gerade ist, ändert sich nur das Vorzeichen auf $+1$.

BEWEIS: Sortieren und nummerieren wir alle $v \in V^*$ nach der gegebenen lexikographischen Ordnung, lassen sie sich geschickt aufzählen:

Es gibt $(q-1)q^{n-1} = q^n - q^{n-1}$ Linearformen der Gestalt

$$\lambda_1 z_1 + \cdots + \lambda_n z_n, \quad \lambda_1 \neq 0.$$

Diese werden $v_1, \ldots, v_{q^n - q^{n-1}}$ genannt.

Dann gibt es $(q-1)q^{n-2} = q^{n-1} - q^{n-2}$ Linearformen der Gestalt

$$\lambda_2 z_2 + \cdots + \lambda_n z_n, \quad \lambda_2 \neq 0.$$

Diese sollen $v_{q^n - q^{n-1} + 1}, \ldots, v_{q^n - q^{n-2}}$ heißen.

So wird fortgefahren, das heißt es gibt $(q-1)q^{n-k}$ Linearformen der Gestalt

$$\lambda_k z_k + \cdots + \lambda_n z_n, \quad \lambda_k \neq 0,$$

die dann $v_{q^n - q^{n-(k-1)} + 1}, \ldots, v_{q^n - q^{n-k}}$ genannt werden, für $k = 0, \ldots, n-1$.

Es ist offensichtlich, dass auf diese Art alle $q^n - 1$ Linearformen aus $V^* \backslash \{0\}$ aufgezählt werden und wir können annehmen, dass für $i < j$ gilt, dass $v_i \succ_{lex} v_j$ ist. Setzen wir diese Linearformen nun definitionsgemäß in die Formel für $\mathbf{d}_{n,i}$ ein, erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathbf{d}_{n,i} &= e_{q^n-q^i}(v_1, \dots, v_{q^n-1}) \\ &= \sum_{j_1<\dots<j_{q^n-q^i} \in \{1,\dots,q^n-1\}} v_{j_1} \cdots v_{j_{q^n-q^i}} \\ &= v_1 v_2 \cdots v_{q^n-q^i} + \sum_{\substack{j_1<\dots<j_{q^n-q^i} \in \{1,\dots,q^n-1\} \\ (j_1,\dots,j_{q^n-q^i}) \neq (1,\dots,q^n-q^i)}} v_{j_1} \cdots v_{j_{q^n-q^i}} .\end{aligned}$$

Dabei wurde für die dritte Gleichheit der lexikographisch größte Summand vor die Summe gezogen. Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned}\mathrm{LT}(\mathbf{d}_{n,i}) &= \mathrm{LT}(v_1 v_2 \cdots v_{q^n-q^i}) \\ &= \mathrm{LT}(v_1 v_2 \cdots v_{q^n-q^{n-1}} v_{q^n-q^{n-1}+1} \cdots v_{q^n-q^{n-(n-i-1)}} \cdots v_{q^n-q^{n-(n-i)}}) \\ &= \Big(\prod_{\lambda_1 \in \mathbb{F}_q^\times} \lambda_1\Big)^{q^{n-1}} z_1^{q^n-q^{n-1}} \Big(\prod_{\lambda_2 \in \mathbb{F}_q^\times} \lambda_2\Big)^{q^{n-2}} z_1^{q^{n-1}-q^{n-2}} \cdots \\ &\qquad \cdots \Big(\prod_{\lambda_{n-i} \in \mathbb{F}_q^\times} \lambda_{n-i}\Big)^{q^{n-(n-i)}} z_{n-i}^{q^{n-(n-i+1)}-q^{n-i}} .\end{aligned}$$

Wenden wir nun den Hilfssatz an, erhalten wir für q ungerade

$$\mathrm{LT}(\mathbf{d}_{n,i}) = (-1)^{n-i} z_1^{q^n-q^{n-1}} z_2^{q^{n-1}-q^{n-2}} \cdots z_{n-i}^{q^{i+1}-q^i} ,$$

und für gerades q bleibt das Vorzeichen positiv. □

Analog funktioniert dieses Lemma natürlich für alle anderen möglichen lexikographischen Ordnungen auf $z_1, \dots, z_n$, wovon es $|\Sigma_n| = n!$ gibt. Es macht daher Sinn, folgende Schreibweise zu verwenden:

BEMERKUNG: Die Notation

$$\sum_{\sigma \in \Sigma_n} \mathrm{sgn}(\sigma) z_1^{\sigma(\lambda_1)} \cdots z_n^{\sigma(\lambda_n)}$$

taucht in dieser Arbeit sehr häufig auf. Gemeint ist, dass Σ_n durch ihre Elemente σ auf der Menge $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ der Exponenten des "Ausgangsmonoms" $z_1^{\lambda_1} \cdots z_n^{\lambda_n}$ operiert. Alternativ kann Σ_n auch auf der Menge $\{1, \dots, n\}$ der Indizes der z_i operieren. Die Summe oben wird dann

$$\sum_{\sigma \in \Sigma_n} \mathrm{sgn}(\sigma) z_{\sigma(1)}^{\lambda_1} \cdots z_{\sigma(n)}^{\lambda_n}$$

geschrieben.

Als Folgerungen ergeben sich:

KOROLLAR 1.3.4: *Mit den Voraussetzungen wie in Lemma* 1.3.3 *gilt:*

$$\mathbf{d}_{n,i} = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} z_{\sigma(1)}^{q^n-q^{n-1}} \cdots z_{\sigma(n-i)}^{q^{i+1}-q^i} + \text{Terme, die unter keiner der lexikographischen Ordnungen Leitglied sind.}$$

KOROLLAR 1.3.5: *Mit den Voraussetzungen wie in Lemma* 1.3.3 *gilt ferner:*

(i) $\mathbf{d}_{n,1},\ldots,\mathbf{d}_{n,n-1}$ *werden nicht von* $z_1,\ldots,z_n$ *geteilt.*

(ii) $\mathbf{d}_{n,1},\ldots,\mathbf{d}_{n,n-1}$ *werden nicht von* $\prod_{j=1}^{k} z_{i_j}$ *geteilt, wobei* $k \le n$ *und* $\{i_1,\ldots,i_k\} \subseteq \{1,\ldots,n\}$ *ist.*

(iii) $\mathbf{d}_{n,0}$ *wird von* $\prod_{i=1}^{n} z_i$ *geteilt.*

Welche Tatsachen über die Dickson-Algebra werden außerdem noch benötigt? Steinberg in [30] und Campbell, Hughes, Shank und Wehlau in [8] haben die Struktur von $\mathbb{F}[V]$ als Modul über $\mathbf{D}^*(n)$ (sogar über einer etwas allgemeineren Algebra) mit Hilfe einer Monombasis beschrieben.

Zunächst wird eine verallgemeinerte Dickson-Algebra eingeführt. Sei für $l \ge 0$

$$\mathbf{D}^*(n,l) := \mathbb{F}[\mathbf{d}_{n,0}^{q^l},\ldots,\mathbf{d}_{n,n-1}^{q^l}]$$

und

$$\Omega(n,l) := \{z_1^{i_1}\cdots z_n^{i_n} \,:\, 0 \le i_k < q^l(q^n - q^{n-k}),\ k = 1,\ldots,k\}.$$

Bei der Definition von $\Omega(n,l)$ fällt auf, dass sie insofern nicht "symmetrisch" ist, als sie für z_i größere Exponenten als für z_j erlaubt sofern $i > j$ ist. Das liegt daran, dass hier die lexikographische Monomordnung mit $z_1 \succ_{lex} \cdots \succ_{lex} z_n$ gewählt wurde. Bei einer anderen Auswahl der Monomordnung würde $\Omega(n,l)$ entsprechend anders aussehen. Da verschiedene Basen für einen Modul ja durchaus möglich sind, ist das hier kein Problem. Wir benötigen den folgenden Satz zum Beweis des Theorems über eine Basis für $\mathbb{F}[z_1,\ldots,z_n]$ als Modul über $\mathbf{D}^*(n)$.

SATZ 1.3.6: *Seien* $f_1,\ldots,f_n \in \mathbb{F}[z_1,\ldots,z_n]$ *eine Regulärfolge. Dann hat* $\mathbb{F}[z_1,\ldots,z_n]$ *als freier* $\mathbb{F}[f_1,\ldots,f_n]$*-Modul den Rang*

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{F}[f_1,\ldots,f_n]}(\mathbb{F}[z_1,\ldots,z_n]) = \prod_{i=1}^{n} \deg(f_i).$$

BEWEIS: Wir werden den Beweis mit Hilfe von Poincaréreihen führen. Nach Eigenschaft (3) gilt:

$$\mathbf{P}(\mathbb{F}[z_1,\ldots,z_n],t) = \mathbf{P}(\mathbb{F}[f_1,\ldots,f_n]),t) \cdot \mathbf{P}(\mathbb{F} \otimes_{\mathbb{F}[f_1,\ldots,f_n]} \mathbb{F}[z_1,\ldots,z_n],t).$$

Da

$$\mathbf{P}(\mathbb{F}[z_1,\ldots,z_n],t) = \frac{1}{(1-t)^n}$$

und

$$\mathbf{P}(\mathbb{F}[f_1,\ldots,f_n],t) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1-t^{\deg(f_i)}}$$

ist, erhalten wir für die Poincaréreihe von $\mathbb{F} \otimes_{\mathbb{F}[f_1,\dots,f_n]} \mathbb{F}[z_1,\dots,z_n]$:

$$\mathbf{P}(\mathbb{F} \otimes_{\mathbb{F}[f_1,\dots,f_n]} \mathbb{F}[z_1,\dots,z_n], t) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1-t^{\deg(f_i)}}{1-t} = \prod_{i=1}^{n} (\underbrace{1+t+\cdots+t^{\deg(f_i)-1}}_{\deg(f_i)\text{ Summanden}}).$$

Beim Ausmultiplizieren ergeben sich also (vor dem Zusammenfassen gleicher Summanden) genau $\deg(f_1)\cdots\deg(f_n)$ Summanden, alle mit dem Koeffizienten 1, was bedeutet, dass

$$\mathbf{P}(\mathbb{F} \otimes_{\mathbb{F}[f_1,\dots,f_n]} \mathbb{F}[z_1,\dots,z_n], t)\big|_{t=1} = \deg(f_1)\cdots\deg(f_n),$$

was die Anzahl der Basiselemente des freien Moduls $\mathbb{F}[z_1,\dots,z_n]$ über $\mathbb{F}[f_1,\dots,f_n]$ ist. Also folgt die Behauptung. □

Kommen wir nun zu dem Theorem, für dessen Beweis dieser Satz nötig ist.

SATZ 1.3.7 (H.E.A. Campbell, I.P. Hughes, R.J. Shank, D.L. Wehlau): *$\Omega(n,l)$ ist eine Basis für $\mathbb{F}[z_1,\dots,z_n]$ als freier Modul über $\mathbf{D}^*(n,l)$, das heißt,*

$$\mathbb{F}[z_1,\dots,z_n] = \bigoplus_{m\in\Omega(n,l)} \mathbf{D}^*(n,l)\cdot m\,.$$

BEWEIS: Der Beweis soll hier nur skizziert werden, damit seine Abhängigkeit von der gewählten Monomordnung, die wir noch ausnutzen wollen, deutlich wird. Der vollständige Beweis befindet sich in [8], Theorem 3.2.

Zunächst wird gezeigt, dass für ein Monom $m \in \Omega(n,l)$

$$z_n \cdot m \in \mathrm{Span}_{\mathbf{D}^*(n,l)}\{\Omega(n,l)\}$$

ist. Dann wird per Induktion über n gezeigt, dass $\Omega(n,l)$ ein Erzeugendensystem für $\mathbb{F}[z_1,\dots,z_n]$ als Modul über $\mathbf{D}^*(n,l)$ ist. Dabei wird auch wieder die "Sonderrolle" von z_n deutlich, da von der Induktionsvoraussetzung, dass $\mathbb{F}[z_1,\dots,z_{n-1}]$ als $\mathbf{D}^*(n-1,l)$-Modul von $\Omega(n-1,l)$ erzeugt wird, durch den Algebrahomomorphismus

$$\begin{aligned} \Phi_l \;:\; \mathbf{D}^*(n-1,l+1) &\longrightarrow \mathbf{D}^*(n,l) \\ \mathbf{d}_{n-1,n-i}^{q^{l+1}} &\longmapsto \mathbf{d}_{n,n-i}^{q^l} \end{aligned}$$

auf die Aussage in n geschlossen werden kann. Dabei wird sozusagen z_n "angehängt". Mit Hilfe von Satz 1.3.6 lässt sich dann noch zeigen, dass $\Omega(n,l)$ die richtige Größe hat, also sogar eine Basis ist und $\mathbb{F}[z_1,\dots,z_n]$ ist frei über $\Omega(n,l)$. □

Wenden wir uns nun noch den Invarianten der speziellen linearen Gruppe

$$\mathrm{SL}(n;\mathbb{F}) = \{g \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{F}) : \det(g) = 1\} < \mathrm{GL}(n;\mathbb{F})$$

zu. Hier spielt die im Titel dieses Abschnitts genannte **Eulerklasse** L_n eine wichtige Rolle.

Sei $V \cong \mathbb{F}^n$. Für jeden Untervektorraum $W \subset V$ mit $\dim_{\mathbb{F}}(W) = n-1$ können wir eine lineare Abbildung $\ell_W : V \longrightarrow \mathbb{F}$ wählen, so dass $\ker(\ell_W) = W$ ist. Dann definieren wir

$$\mathsf{L}_n := \prod_{W \subset V:\ \dim_{\mathbb{F}}(W)=n-1} \ell_W .$$

Die Eulerklasse ist offenbar eindeutig bis auf skalare Vielfache. Da jedes ℓ_W den Grad 1 und die Gestalt

$$\ell_W = \lambda_1(W)z_1 + \cdots + \lambda_n(W)z_n$$

hat, für eine Basis $\{z_1, \ldots, z_n\}$ von V^*, nicht alle $\lambda_i(W) = 0$, hat [1] L_n den Grad $\frac{q^n-1}{q-1}$.

BEMERKUNG: Wir wollen folgende Notation verwenden: Um Klammern zu sparen und der Übersichtlichkeit zu dienen, schreiben wir für $A \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{F})$

$$\det{}^k(A) := \big(\det(A)\big)^k ,$$

in Anlehnung an Schreibweisen wie $\big(\sin(x)\big)^2 = \sin^2(x)$.

LEMMA 1.3.8: *Die Eulerklasse L_n ist, bis auf skalare Vielfache, die Determinante der folgenden Matrix:*

$$Z_{q,n} := \begin{bmatrix} z_1 & z_1^q & \cdots & z_1^{q^{n-1}} \\ z_2 & z_2^q & \cdots & z_2^{q^{n-1}} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ z_n & z_n^q & \cdots & z_n^{q^{n-1}} \end{bmatrix} .$$

Deshalb macht es Sinn, $\det(Z_{q,n})$ als Vertreter für die Eulerklasse L_n zu wählen und im Folgenden $\mathsf{L}_n = \det(Z_{q,n})$ zu benutzen.

BEWEIS: Da alle $\det^{-1}$-relativen Invarianten invariant unter der Operation von $\mathrm{SL}(n;\mathbb{F})$ auf $\mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n]$ sind, sind sie Elemente von $\mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n]^{\mathrm{SL}(n;\mathbb{F})} = \mathbb{F}[\mathsf{L}_n, \mathsf{d}_{n,1}, \ldots, \mathsf{d}_{n,n-1}]$ (Theorem 8.1.8 in [27]). Aus Gradgründen ist also L_n die einzige (bis auf skalare Vielfache) $\mathrm{SL}(n;\mathbb{F})$-Invariante vom Grad $q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q + 1$. Wir werden jetzt zeigen, dass $\deg\big(\det(Z_{q,n})\big) = \deg(\mathsf{L}_n)$ ist und dass $\det(Z_{q,n})$ $\det^{-1}$-relativ invariant, also ein Element von $\mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n]^{\mathrm{SL}(n;\mathbb{F})}$ ist. Aufgrund der eben beschriebenen

[1] Es gibt $q^n - 1$ verschiedene Linearformen $\neq 0$, dabei sind immer $q-1$ skalare Vielfache voneinander, haben also den gleichen Kern.

Eindeutigkeit (bis auf skalare Vielfache) der $\mathrm{SL}(n;\mathbb{F})$-Invarianten in dem Grad, in dem L_n sitzt, muss dann $\det(Z_{q,n})$ ein Vertreter von L_n sein.

(1) Zeige: $\det(Z_{q,n}) \neq 0$.

Entwickeln wir $\det(Z_{q,n})$ nach Leibniz, erhalten wir

$$\det(Z_{q,n}) = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \operatorname{sgn}(\sigma) z_1^{\sigma(1)} z_2^{\sigma(q)} \cdots z_n^{\sigma(q^n-1)}.$$

In dieser Summe stehen $n!$ verschiedene Monome (mit Koeffizienten 1 oder -1) als Summanden, somit können sie sich nicht gegenseitig wegheben und $\det(Z_{q,n}) \neq 0$.

(2) Zeige: $\deg\bigl(\det(Z_{q,n})\bigr) = \deg(\mathsf{L}_n)$.

Wenn wir uns die Form, die $\det(Z_{q,n})$ in (1) hat, ansehen, wird offensichtlich, dass der Grad

$$\deg\bigl(\det(Z_{q,n})\bigr) = 1 + q + \cdots + q^{n-2} + q^{n-1}$$

ist.

(3) Zeige: $\det(Z_{q,n})$ ist $\det^{-1}$-relativ invariant.

Wir müssen also ausrechnen, ob für alle $g \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{F})$ gilt, dass

$$g(\det^{-1}(Z_{q,n})) = \det^{-1}(g)\det(Z_{q,n})$$

ist. Da $\mathrm{GL}(n;\mathbb{F})$ von Pseudospiegelungen erzeugt wird und die Determinantenfunktion multiplikativ ist reicht es, dieses für die verschiedenen Typen von Pseudospiegelungen zu zeigen, als da wären

$$s_1 := \begin{bmatrix} \zeta & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}, \quad s_1^{-1} = \begin{bmatrix} \zeta^{-1} & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix},$$

so dass

$$s_1^{-1} z_i = \begin{cases} \zeta^{-1} z_1 & \text{falls } i = 1 \\ z_i & \text{falls } i > 1 \end{cases}$$

ist, und

$$s_2 := \begin{bmatrix} 1 & 1 & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}, \quad s_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & q-1 & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix},$$

so dass

$$s_2^{-1} z_i = \begin{cases} z_1 + (q-1) z_2 & \text{falls } i = 1 \\ z_i & \text{falls } i > 1 \end{cases}$$

ist. Dabei steht s_2 stellvertretend für die sogenannten Überschiebungen. s_2 ist die Jordanform einer Überschiebung, und durch Basiswechsel lässt sich jede Überschiebung in dieser Form darstellen. Daher reicht es, s_1 und s_2 zu betrachten. Es ist

$$\begin{aligned} s_1(\det(Z_{q,n})) &= \sum_{\sigma\in\Sigma_n} \operatorname{sgn}(\sigma)(s_1^{-1}z_1)^{\sigma(1)}(s_1^{-1}z_2)^{\sigma(q)}\cdots(s_1^{-1}z_n)^{\sigma(q^{n-1})} \\ &= \sum_{\sigma\in\Sigma_n} \operatorname{sgn}(\sigma)(\zeta^{-1}z_1)^{\sigma(1)}z_2^{\sigma(q)}\cdots z_n^{\sigma(q^{n-1})}, \end{aligned}$$

wobei wir die vorher berechnete Operation von s_1^{-1} auf den Basiselementen eingesetzt haben. Da $(\zeta^{-1})^{q^i} = \zeta^{-1}$ ist, für alle i, steht in jedem Summanden ζ^{-1}, was daher ausgeklammert werden kann:

$$s_1(\det(Z_{q,n})) = \zeta^{-1}\sum_{\sigma\in\Sigma_n} \operatorname{sgn}(\sigma)z_1^{\sigma(1)}z_2^{\sigma(q)}\cdots z_n^{\sigma(q^n-1)}.$$

Da $\zeta^{-1} = \det^{-1}(s_1)$ folgt die Behauptung für s_1.

Entsprechend ist, wiederum unter der Verwendung der oben berechneten Operation,

$$\begin{aligned} s_2(\det(Z_{q,n})) &= \sum_{\sigma\in\Sigma_n} \operatorname{sgn}(\sigma)(s_2^{-1}z_1)^{\sigma(1)}(s_2^{-1}z_2)^{\sigma(q)}\cdots(s_2^{-1}z_n)^{\sigma(q^{n-1})} \\ &= \sum_{\sigma\in\Sigma_n} \operatorname{sgn}(\sigma)(z_1+(q-1)z_2)^{\sigma(1)}z_2^{\sigma(q)}\cdots z_n^{\sigma(q^{n-1})}. \end{aligned}$$

Diese Summe können wir auseinanderziehen und mit der gleichen Argumentation wie für ζ^{-1} auch $q-1$ ausklammern.

$$\begin{aligned} s_2(\det(Z_{q,n})) = &\sum_{\sigma\in\Sigma_n} \operatorname{sgn}(\sigma)z_1^{\sigma(1)}z_2^{\sigma(q)}\cdots z_n^{\sigma(q^n-1)} \\ &+(q-1)\sum_{\sigma\in\Sigma_n} z_2^{\sigma(1)+\sigma(q)}\cdots z_n^{\sigma(q^{n-1})}. \end{aligned}$$

Die zweite Summe ist 0, denn zu jedem $\sigma\in\Sigma_n$ mit $\sigma(1)=q^k$ und $\sigma(q)=q^t$ gibt es genau ein $\tau\in\Sigma_n$ mit $\tau(1)=q^t$, $\tau(q)=q^k$ und $\tau(q^i)=q^i$ für alle $i\geq 2$. Da für solche σ, τ gilt, dass $\operatorname{sgn}(\sigma) = -\operatorname{sgn}(\tau)$, heben sich die dazu gehörenden Summanden gegenseitig weg, und daher wird die Summe zu 0.

Da ferner $\det^{-1}(s_2) = 1$, sehen wir auch für s_2 die $\det^{-1}$-relative Invarianz von $\det(Z_{q,n})$.

Damit ist das Lemma bewiesen. □

Aus dem Beweis folgt noch:

KOROLLAR 1.3.9: $\mathsf{L}_n = Z_{q,n}$ *ist* $\det^{-1}$*-relativ invariant unter der Operation von* $\mathrm{GL}(n;\mathbb{F})$ *auf* $\mathbb{F}[z_1,\ldots,z_n]$.

Damit ist L_n invariant unter der Operation von $\mathrm{SL}(n;\mathbb{F})$ und es gilt mit den Bezeichnungen wie bisher:

THEOREM 1.3.10 (L.E. Dickson):

$$\mathbb{F}[V]^{\mathrm{SL}(n;\mathbb{F})} \cong \mathbb{F}[\mathbf{L}_n, \mathbf{d}_{n,1}, \ldots, \mathbf{d}_{n,n-1}].$$

BEWEIS: Siehe Theorem 8.1.8 in [27]. □

BEMERKUNG: Da $\deg(\mathbf{L}_n^{q-1}) = \deg(\mathbf{d}_{n,0})$ und $\mathbf{L}_n^{q-1}$ invariant ist unter der Operation von $\mathrm{GL}(n;\mathbb{F})$ (da $(\det^{-1}(g))^{q-1} = 1$), folgt:

$$\mathbf{L}_n^{q-1} = \mathbf{d}_{n,0}.$$

1.4 Poincarédualitätsalgebren

Kommen wir nun zu den Objekten, die in dieser Arbeit eine Hauptrolle spielen.

DEFINITION: *Sei H eine kommutative graduierte zusammenhängende $\mathbb{F}$-Algebra. Dann heißt H eine* **Poincarédualitätsalgebra** *der* **formalen Dimension** $\text{f–dim}(H) = d$*, falls*

(i) $H_i = 0$*, für alle* $i > d$*,*

(ii) $\dim_{\mathbb{F}}(H_d) = 1$*,*

(iii) die Paarung

$$\begin{aligned} H_i \otimes H_{d-i} &\longrightarrow H_d \\ a \otimes b &\longmapsto a \cdot b \end{aligned}$$

ist nicht-singulär, das heißt, eine Klasse $a \in H_i$ ist nur Null genau dann, wenn $ab = 0 \;\; \forall \;\; b \in H_{d-i}$ ist.

Für die Multiplikation in einer Poincarédualitätsalgebra H wird oft das Zeichen "$\cup$" verwendet, in Anlehnung an die Schreibweise in der Topologie.

Zu $a \in H_i$ heißt jedes $b \in H_{d-i}$ mit $0 \neq a \cup b \in H_d$ eine **Poincaréduale** *zu a. Eine Klasse $0 \neq [H] \in H_d$ heißt* **Fundamentalklasse** *für H.*

BEOBACHTUNG : Diese Definition für eine Poincarédualitätsalgebra H ist äquivalent dazu zu fordern, dass

(1) $H_i = 0$, für alle $i > d$,

(2) $\mathrm{Ann}_H([H]) = \overline{H}$,

(3) $\mathrm{Ann}_H(\overline{H}) = \mathbb{F} \cdot [H]$.

Wir werden einige Sätze und Formeln über Poincarédualitätsalgebren und gebrochene Ideale brauchen. Für eine ausführliche Einführung sei hier auf [15], Abschnitte I.1 und I.2 verwiesen.

In Poincarédualitätsalgebren H definieren wir folgende Bilinearform:

$$< \mid >: \; H \times H \longrightarrow \mathbb{F}, \; (a, b) \longmapsto \; < a \mid b >,$$

wobei

$$< a \mid b > := \begin{cases} \lambda, & \text{falls } a \cdot b = \lambda[H], \\ 0, & \text{falls } a \cdot b \notin H_d. \end{cases}$$

Aus der Definition der Poincarédualitätsalgebra folgt, dass $< \mid >$

- symmetrisch ($< a \mid b >=< b \mid a > \forall \; a, b \in H$),
- mittel – assoziativ ($< ac \mid b >=< a \mid cb > \forall \; a, b, c \in H$),
- nicht – ausgeartet ($< a \mid b >= 0 \;\; \forall \;\; b \in H \iff a = 0$)

ist. Sehr häufig wird statt $< a \mid b >$ die Schreibweise $< ab \mid [H] >$ mit der gleichen Bedeutung benutzt, damit die Abhängigkeit von H und $[H]$ deutlich wird.

Das folgende Lemma beschreibt eines der grundlegenden Doppel-Dualitäts-Resultate des Studiums von Poincarédualitätsalgebren.

LEMMA 1.4.1: *Sei H eine Poincarédualitätsalgebra über dem Körper $\mathbb{F}$ und $I \subset H$ ein Ideal. Dann ist*

$$\mathrm{Ann}_H\big(\mathrm{Ann}_H(I)\big) = I\,.$$

BEWEIS: Siehe Lemma I.1.1 in [15]. □

Ein **Poincarédualitätsquotient** von $\mathbb{F}[V]$ ist eine Quotientalgebra H von $\mathbb{F}[V]$, die eine Poincarédualitätsalgebra ist. Welche Quotienten einer kommutativen graduierten zusammenhängenden Algebra über $\mathbb{F}$ sind Poincarédualitätsquotienten ?

SATZ 1.4.2: *Sei A eine kommutative graduierte zusammenhängende $\mathbb{F}$-Algebra. Dann liefert jedes $\overline{A}$-primäre,* **irreduzible** *(das heißt, falls $I = I' \cap I''$ folgt $I = I'$ oder $I = I''$) Ideal $I \subset A$ einen Poincarédualitätsquotienten*

$$H = A/I\,.$$

BEWEIS: Siehe Proposition I.1.4 in [15]. □

Eine weitere Konstruktionsmöglichkeit für Poincarédualitätsalgebren liefert das folgende Lemma, ebenfalls bewiesen in [15].

LEMMA 1.4.3: *Sei H eine Poincarédualitätsalgebra über dem Körper $\mathbb{F}$ und $h \in H$.*

(i) Dann ist $H/(0:h)$ auch eine Poincarédualitätsalgebra über $\mathbb{F}$ und hat die Formaldimension

$$\text{f–dim}\,(H/(0:h)) = \text{f–dim}\,(H) - \deg(h).$$

(ii) *Sei $h^\vee \in H$ eine Poincaréduale zu h, dann ist das Bild von $h^\vee$ in $H/(0:h)$ eine Fundamentalklasse für $H/(0:h)$, das heißt, wenn π_h die kanonische Projektion von H nach $H/(0:h)$ beschreibt, gilt:*

$$\pi_h : H \longrightarrow \frac{H}{(0:h)}$$
$$h^\vee \longmapsto [H/(0:h)].$$

(iii) *Ist umgekehrt $\widetilde{H} = H/J$ eine Poincarédualitätsalgebra deren Fundamentalklasse ein Urbild $w^\vee \in H$ mit einer Poincarédualen $w \in H$ hat, dann ist*

$$J = (0:w).$$

Kennen wir also umgekehrt die Formaldimensionen von H und $H/(0:h)$, können wir daraus den Grad des Erzeugers w aus dem Lemma bestimmen.

Wie wir eben gesehen haben, spielen gebrochene Ideale eine nicht unwesentliche Rolle bei der Untersuchung von Poincarédualitätsalgebren. Der Umgang damit lässt sich etwas formalisieren. Sei A eine kommutative graduierte zusammenhängende Noethersche Algebra über dem Körper $\mathbb{F}$ und $I \subseteq A$ ein Ideal. Dann bezeichnet over(I) die Menge aller Oberideale von I, das heißt,

$$\operatorname{over}(I) = \{J \subseteq A \text{ Ideal} : J \supseteq I\}.$$

Dann ist ein echtes Ideal I irreduzibel genau dann, wenn es ein eindeutiges minimales, echtes Oberideal besitzt. Sei nun I ein $\overline{A}$-primäres, irreduzibles Ideal, also eines, für das A/I eine Poincarédualitätsalgebra ist. Zariski und Samuel führen in “Commutative Algebra” ([33]), Kapitel 4 eine Korrespondenz Θ_I ein, die einem Ideal ein gebrochenes Ideal zuordnet:

$$\Theta_I(J) := (I:J) \in \operatorname{over}(I).$$

Diese Korrespondenz induziert eine Involution

$$\Theta_I : \operatorname{over}(I) \longrightarrow \operatorname{over}(I)$$

mit den Eigenschaften (für $J', J'' \in \operatorname{over}(I)$):

(i) $\Theta_I(J' \cap J'') = \Theta_I(J') + \Theta_I(J'')$,
(ii) $\Theta_I(J' + J'') = \Theta_I(J') \cap \Theta_I(J'')$,
(iii) $\big(\Theta_I(J') : \Theta_I(J'')\big) = \Theta_I(J' \cdot J'') = \big(\Theta_I(J'') : \Theta_I(J')\big)$,
(iv) $\Theta_I(J' : J'') = J'' \cdot \Theta_I(J')$.

Aus diesen Eigenschaften lässt sich ein wichtiger Satz über gebrochenene Ideale herleiten, der sich bei Zariski und Samuel findet. Nachforschungen ergeben jedoch, dass er auf Emmy Noether zurückzuführen ist.

THEOREM 1.4.4 (E. Noether): *Seien $K \subseteq \mathbb{F}[V]$ ein $(\overline{\mathbb{F}[V]})$-primäres, irreduzibles Ideal und $L \in \mathrm{over}(K)$. Dann ist L genau dann $(\overline{\mathbb{F}[V]})$-primär und irreduzibel, wenn es ein $h \in \mathbb{F}[V]$ gibt, für dass gilt:*

(i) $(K : L) = (h) + K$,

(ii) $(K : h) = L$.

h heißt dann eine **Übergangsinvariante** *für L über K.*

BEWEIS: Der Beweis findet sich in [15] in den Erklärungen am Anfang des Abschnitts über Eigenschaften von irreduziblen Idealen (Abschnitt I.2) oder in [33], Abschnitt 16, Theorem 35. □

Also haben alle $(\overline{\mathbb{F}[V]})$-primären, irreduziblen Ideale die Form $(Q : a)$, für ein **Parameterideal** (d.h. ein Ideal, dass von einem Parametersystem erzeugt wird) $Q \subseteq A$ und ein geeignetes Element $a \in A$.

Als Folgerung erhalten wir, wenn wir das Theorem und das Lemma zusammen packen:

KOROLLAR 1.4.5: *Seien K und L wie in Theorem 1.4.4 und h eine Übergangsinvariante für L über K. Dann hat h folgenden Grad:*

$$\deg(h) = \text{f–dim}\,(\mathbb{F}[V]/K) - \text{f–dim}\,(\mathbb{F}[V]/L).$$

BEWEIS: Sei $H = \mathbb{F}[V]/K$ die Poincarédualitätsalgebra , für die Lemma 1.4.3 gilt. Dann müssen wir zeigen, dass $\mathbb{F}[V]/L = H/(0 : h)$ ist, damit die Gleichung (i) aus dem Lemma zu

$$\text{f–dim}\,(\mathbb{F}[V]/L) = \text{f–dim}\,(\mathbb{F}[V]/K) - \deg(h)$$

wird und anwendbar ist. Wir müssen $(0 : h)$ als Ideal in H betrachten. Hier ist

$$f \in (0 : h) \subseteq H$$

genau dann, wenn

$$fh = 0 \in H = \mathbb{F}[V]/K$$

ist. Das gilt aber genau dann, wenn $fh \in K$ ist, also

$$f \in (K : h).$$

Also sind in $\mathbb{F}[V]/L = \mathbb{F}[V]/(K : h)$ (die Gleichheit gilt wegen Theorem 1.4.4 (ii)) die gleichen Elemente 0 wie in $H/(0 : h) = (\mathbb{F}[V]/K)/(0 : h)$ und deshalb sind sie gleich. □

Wie sieht es mit der Struktur der Koinvarianten aus? Aus I.1 in [15] folgt dieses Lemma:

LEMMA 1.4.6: *Die Quotientenalgebra*

$$\mathcal{H} := \frac{\mathbb{F}[V]}{\natural(G)}$$

ist eine Poincarédualitätsalgebra genau dann, wenn $\natural(G) := (\overline{\mathbb{F}[V]^G})$ *irreduzibel und* $\overline{\mathbb{F}[V]}$*-primär ist.*

1.5 Steenrod-Operationen und Wu-Klassen

Die ursprünglich aus der algebraischen Topologie stammenden Steenrod-Operationen sind ein wichtiges Hilfsmittel in der modularen Invariantentheorie, da sich mit ihrer Hilfe zum Beispiel aus bekannten Invarianten Neue gewinnen lassen (ausführlich in [27], Abschnitte 10.3 und 10.4). Ferner ist es eine notwendige Eigenschaft eines Invariantenrings, eine Algebra über der Steenrod-Algebra zu sein. Doch dazu später.

Sei $\mathbb{F}$ in diesem Abschnitt ein endlicher Körper mit $q = p^s$ Elementen (p prim). Die **Steenrod-Operationen** $\mathcal{P}^i$ können durch eine erzeugende Funktion

$$\mathcal{P}(\xi) : \mathbb{F}[V] \longrightarrow \mathbb{F}[V][[\xi]]$$

definiert werden, für die die Eigenschaften

(1) $\mathcal{P}(\xi)$ ist $\mathbb{F}$-linear,
(2) $\mathcal{P}(\xi)(v) = v + v^q\xi \quad \forall \ v \in V^*$,
(3) $\mathcal{P}(\xi)(uw) = \mathcal{P}(\xi)(u)\mathcal{P}(\xi)(w) \quad \forall \ u, w \in \mathbb{F}[V]$,
(4) $\mathcal{P}(\xi)(1) = 1$.

gefordert werden. ξ erhält den Grad $-(q-1)$, so dass $\mathcal{P}(\xi)(f)$ für $f \in \mathbb{F}[V]$ in homogene Komponenten aufgeteilt werden kann,

$$\mathcal{P}(\xi)(f) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{P}^i(f)\xi^i,$$

und $\deg(\mathcal{P}^i) = i(q-1)$ ist. Die Steenrod-Operationen $\mathcal{P}^i$ sind $\mathbb{F}$-linear und genügen den

(i) **Instabilitätsbedingungen**: $\mathcal{P}^i(u) = \begin{cases} u^q & : i = \deg(u) \\ 0 & : i > \deg(u), \end{cases}$
(ii) **Cartan-Formeln**: $\mathcal{P}^k(uv) = \sum_{i+j=k} \mathcal{P}^i(u)\mathcal{P}^j(v)$.

Die MOD p**-Steenrod-Algebra** $\mathscr{P}^*$ ist die graduierte freie assoziative $\mathbb{F}$-Algebra mit 1, die von den $\mathcal{P}^i$ erzeugt wird, modulo dem Ideal, das von den Beziehungen zwischen den $\mathcal{P}^i$, die in jeder Polynomalgebra $\mathbb{F}[z_1, \dots, z_n]$, $n \in \mathbb{N}$, gelten. Das inhomogene Element

$$\mathcal{P} = 1 + \mathcal{P}^1 + \mathcal{P}^2 + \cdots \in \mathrm{Tot}(\mathscr{P}^*)$$

wird **totale Steenrod-Operation** genannt.

Das folgende Lemma lässt sich durch einfaches Nachrechnen beweisen, oder in [27], Abschnitt 10.4 nachschlagen.

LEMMA 1.5.1: *Sei $A \subset \mathbb{F}[V]$ eine $\mathscr{P}^*$-Unteralgebra auf der eine endliche Gruppe $G < \mathrm{GL}(n;\mathbb{F})$ (linear) operiert und $f \in A$. Dann kommutieren die Steenrod-Operationen mit der Gruppenoperation, das heißt für alle $g \in G$ gilt:*

$$g(\mathcal{P}(f)) = \mathcal{P}(gf).$$

Insbesondere ist, falls f invariant unter der Operation von G auf A ist, auch $\mathcal{P}(f)$ invariant, und falls f eine $\det^k$-relative Invariante unter der Operation von G ist, dann ist auch $\mathcal{P}(f)$ eine $\det^k$-relative Invariante. □

An diesem Lemma sehen wir, dass sich mit Hilfe der Steenrod-Operationen aus bekannten Invarianten Neue produzieren lassen. Wir kommen deshalb zu folgender Definition:

DEFINITION: *Eine Algebra A, die ein Modul über $\mathscr{P}^*$ ist und der Instabilitätsbedingung und den Cartan-Formeln genügt, heißt* **instabile Algebra über der Steenrod-Algebra** *oder auch abkürzend instabile $\mathscr{P}^*$-Algebra.*

$\mathbb{F}[V]$ ist offensichtlich eine instabile $\mathscr{P}^*$-Algebra und auch für Invariantenringe ergibt sich als Folgerung aus Lemma 1.5.1:

SATZ 1.5.2: *Sei $\varrho: G \hookrightarrow \mathrm{GL}(n;\mathbb{F})$ eine treue Darstellung einer endlichen Gruppe G über dem endlichen Körper $\mathbb{F}$. Dann ist $\mathbb{F}[V]^G$ eine instabile Algebra über der* MOD *p-Steenrod-Algebra.*

Ein Ideal $I \subset \mathbb{F}[V]$ heißt $\mathscr{P}^*$-**stabil**, falls für alle $f \in I$ gilt, dass $\mathcal{P}^i(f) \in I$ ist, für alle $i \in \mathbb{N}$ (oder, wegen der Instabilität, für alle $i \leq \deg(f)$). Unter bestimmten Bedingungen gilt Lemma 1.5.1 auch für Quotienten von $\mathbb{F}[V]$.

LEMMA 1.5.3: *Sei $I \subset \mathbb{F}[V]$ ein $\mathscr{P}^*$-stabiles Ideal, das auch unter der Operation einer Gruppe $G < \mathrm{GL}(n;\mathbb{F})$ stabil bleibt, so dass G wiederum auf $\mathbb{F}[V]/I$ operiert. Dann ist $\mathbb{F}[V]/I$ auch eine $\mathscr{P}^*$-Algebra, auf der die Steenrod-Operation mit der Gruppenoperation kommutiert.*

Insbesondere ist der Koinvariantenring eine $\mathscr{P}^*$-Algebra, auf der die Gruppenoperation mit der Steenrod-Operation kommutiert.

Des Weiteren gilt folgendes Lemma, das als Beispiel für einen typischen Beweis mit Steenrod-Operationen auch hier bewiesen wird.

LEMMA 1.5.4: *Seien $K \subseteq \mathbb{F}[V]$ und $L \in \mathrm{over}(K)$ $\mathscr{P}^*$-stabile Ideale. Dann ist auch $(K : L)$ $\mathscr{P}^*$-stabil.*

BEWEIS: Sei $f \in (K : L)$, also gibt es für alle $\ell \in L$ ein $k \in K$ so dass $f\ell = k$. Sei $\mathcal{P}^i \in \mathscr{P}^*$ ein Erzeuger. Wir führen eine Induktion über i, wobei der Anfang für $i = 0$ trivial ist, da $\mathcal{P}^0 = \mathrm{id}$ ist. Sei nun $\mathcal{P}^j(f) \in (K : L)$ für

$j < i$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^i(k) &= \mathcal{P}^i(f\,\ell)\\ &= \sum_{r+s=i} \mathcal{P}^r(f)\mathcal{P}^s(\ell).\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung sind $\mathcal{P}^i(k) =: k_i \in K$ und $\mathcal{P}^s(\ell) =: \ell_s \in L$, daher können wir schreiben:

$$k_i = \sum_{r+s=i} \mathcal{P}^r(f)\ell_s,$$

was nach Umstellen auf (mit $\ell_0 = \ell$)

$$\mathcal{P}^i(f)\ell = k_i - \sum_{j=0}^{i-1} \mathcal{P}^j(f)\ell_{i-j}$$

führt. Hier ist nach Induktionsvoraussetzung $\mathcal{P}^j(f)\ell_{i-j} \in K$, also die rechte Seite in K, und damit ist $\mathcal{P}^i(f)\ell \in K$, was genau dann gilt, wenn $\mathcal{P}^i(f) \in (K : L)$ ist. □

Die Steenrod-Operationen auf Poincarédualitätsalgebren liefern durch deren totale Endlichkeit und die Eindimensionalität im höchsten Grad gewisse ausgezeichnete Elemente in den Poincarédualitätsalgebren, die sogenannten Wu-Klassen:

Sei H eine Poincarédualitätsalgebra der Formaldimension f–dim$(H) = d$, die auch $\mathscr{P}^*$-Algebra ist, $f \in H$ und $\mathcal{P}^k \in \mathscr{P}^*$ so, dass $\deg(f) + k(q-1) = d$. Dann wird die Steenrod-Operation $\mathcal{P}^k$ auf $H_{d-k(q-1)}$ aufgrund des Satzes von Riesz [2] eindeutig durch Multiplikation mit einer Klasse aus $H_{k(q-1)}$ dargestellt, die nach ihrem Entdecker k-te **Wu-Klasse** heisst, und für alle $f \in H_{d-k(q-1)}$ gilt:

$$< \mathcal{P}^k(f) \mid [H] >=< f\mathrm{Wu}_k \mid [H] > .$$

Dann ist die **totale Wu-Klasse** von H die Summe der k-ten Wu-Klassen für $k = 0, \dots, \lfloor \frac{d}{q} \rfloor$ (vergleiche [15], III.4):

$$\mathrm{Wu}(H) = 1 + \mathrm{Wu}_1 + \cdots + \mathrm{Wu}_{\lfloor \frac{d}{q} \rfloor}.$$

Trivial wird die totale Wu-Klasse dann genannt, wenn für $k > 0$ alle $\mathrm{Wu}_k = 0$, also trivial sind, und damit $\mathrm{Wu}(H) = 1$ ist.

Zur Steenrod-Operation $\mathcal{P}^k$ gibt es den konjugierten Antiautomorphis-

---

[2] Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{F}$-Vektorraum mit einem festen inneren Produkt $< - \mid - >$ und $T : V \longrightarrow \mathbb{F}$ eine lineare Abbildung. Dann existiert genau ein Vektor $A_T \in V$ (abhängig von T), so dass $T(B) =< B \mid A_T >$ ist, für alle $B \in V$. Siehe [26].

mus $\chi(\mathcal{P}^k)$, der rekursiv durch die Gleichung

$$0 = \sum_{j=0}^{k} \mathcal{P}^{k-j}\chi(\mathcal{P}^j)$$

definiert wird. Und so, wie

$$\mathcal{P} = 1 + \mathcal{P}^1 + \cdots + \mathcal{P}^k + \cdots$$

die totale Steenrod-Operation ist, ist analog

$$\chi(\mathcal{P}) = 1 + \chi(\mathcal{P}^1) + \cdots + \chi(\mathcal{P}^k) + \cdots$$

die totale konjugierte Steenrod-Operation. Wir erhalten dann analog zur Wu-Klasse die **konjugierte Wu-Klasse** $\chi\mathrm{Wu}_k$ durch

$$< \chi(\mathcal{P}^k)(f) \mid [H] >=< f\chi\mathrm{Wu}_k \mid [H] >$$

und die totale konjugierte Wu-Klasse ist dann wieder die Summe $\chi\mathrm{Wu}(H)$. Es ist leicht einzusehen, dass $\mathrm{Wu}(H)$ trivial ist genau dann, wenn $\chi\mathrm{Wu}(H)$ trivial ist (vergleiche auch Lemma III.4.1 in [15]). Wir werden hier von einigen Poincarédualitätsalgebren zeigen, dass ihre konjugierten Wu-Klassen trivial sind, wobei folgendes Resultat benötigt wird.

LEMMA 1.5.5: *Sei H, H', H'' Poincarédualitätsalgebren so dass $H = H' \otimes H''$ ist. Dann ist*

$$\mathrm{Wu}(H) = \mathrm{Wu}(H') \cdot \mathrm{Wu}(H''),$$

und das Gleiche gilt natürlich auch für $\chi\mathrm{Wu}(H' \otimes H'')$.

BEWEIS: Auf $H = H' \otimes H''$ (mit den Formaldimensionen d, d' bzw. d'') erhalten wir eine Linearform $< \mid >$ durch $< \mid >_{H'} \cdot < \mid >_{H''}$. Das heißt, für

$$\begin{aligned} h'_i \in H'_i, &\quad h'_{d'-i} \in H'_{d'-i} \\ h''_j \in H''_j, &\quad h''_{d''-j} \in H''_{d''-j} \end{aligned}$$

gilt:

$$(*) \qquad < h'_i \otimes h''_j \mid h'_{d'-i} \otimes h''_{d''-j} >=< h'_i \mid h'_{d'-i} > \cdot < h''_j \mid h''_{d''-j} > .$$

Für die Wu-Klassen auf H gilt (für $\deg(h) + i(q-1) = d$):

$$< \mathcal{P}^i(h) \mid [H] >=< h \cdot \mathrm{Wu}_i(H) \mid [H] > .$$

Ein typisches Element in H hat die Form $h = \sum h' \otimes h''$, es reicht wegen der Additivität der Linearform also aus, $h = h' \otimes h''$ zu prüfen. Ferner ist die Fundamentalklasse von H das (Tensor-)Produkt der Fundamentalklassen von H' und H'' (denn nur so ergibt sich ein Element im Grad $d = d' \cdot d'' = \text{f-dim}(H)$). Also gilt:

$$\begin{aligned} < \mathcal{P}^i(h) \mid [H] > &=< \mathcal{P}^i(h' \otimes h'') \mid [H] > \\ &= \sum_{i'+i''=i} < \mathcal{P}^{i'}(h') \otimes \mathcal{P}^{i''}(h'') \mid [H'] \otimes [H''] > . \end{aligned}$$

In dieser Summe liefern nur die Summanden einen Beitrag, in denen

$$i' + \deg(h') = d' \quad \text{und} \quad i'' + \deg(h'') = d''$$

gilt. Wegen $(*)$ lassen sich die Linearformen jetzt auseinander ziehen und wir erhalten

$$\begin{aligned}
&\sum_{i'+i''=i} < \mathcal{P}^{i'}(h') \otimes \mathcal{P}^{i''}(h'') \mid [H'] \otimes [H''] > \\
&\qquad\qquad = \sum_{i'+i''} < \mathcal{P}^{i'}(h') \mid [H'] > \cdot < \mathcal{P}^{i''}(h'') \mid [H''] > \\
&\qquad\qquad = < h' \cdot \mathrm{Wu}_{i'}(H') \mid [H'] > \cdot < h'' \cdot \mathrm{Wu}_{i''}(H'') \mid [H''] >,
\end{aligned}$$

was sich dann wieder zusammensetzen lässt und somit die Behauptung liefert. □

Kapitel 2
Triviale Wu-Klassen

In diesem Kapitel wird für einige endliche Gruppen der Satz von Mitchell (2.1.2), der besagt, dass die Wu-Klassen in vielen Poincarédualitätsalgebren trivial sind, wiederum anders und außerdem für einige weitergehende Fälle bewiesen.

Die Frage nach trivialen Wu-Klassen kommt aus der Topologie, wo beim Versuch, das sogenannte "Hit-Problem" (untersucht vor allem von R. Wood, z.B. in [32] oder in [31]) zu lösen, nach Fundamentalklassen in Poincarédualitätsalgebren (also in Kohomologiegruppen geschlossener Mannigfaltigkeiten) gesucht wird, die nicht dadurch entstehen können, dass eine Steenrod-Operation auf ein Element von niedrigerem Grad wirkt. Die Antwort auf diese Fragen wiederum hilft bei der Lösung des sogenannten "Immersions-Problems" (siehe [20]). Doch auch als Algebraikerin finde ich die Frage interessant. Die algebraische Herangehensweise liefert vielversprechende neue Ansätze, die das Problem weniger kombinatorisch zu machen scheinen. Für die Anwendung zur Lösung des "Hit-Problems" lassen sich in [15] Beispiele finden.

2.1 Bedingungen für triviale Wu-Klassen

In diesem Abschnitt soll untersucht werden, welche Voraussetzungen erfüllt sein müssen, damit

$$\mathcal{H} := \frac{\mathbb{F}[V]}{(\overline{\mathbb{F}[V]^G})}$$

eine Poincarédualitätsalgebra mit trivialen Wu-Klassen ist. Als Beispiel vorweg wird eine Poincarédualitätsalgebra vorgestellt, die triviale Wu-Klassen hat.

SATZ 2.1.1: *Die Wu-Klassen* $\mathrm{Wu}\big((z_1^{q^{k_1}}, \ldots, z_n^{q^{k_n}})\big)$ *der Poincarédualitätsalgebra*

$$\frac{\mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n]}{(z_1^{q^{k_1}}, \ldots, z_n^{q^{k_n}})}$$

sind trivial.

BEWEIS: Der Beweis soll hier nur skizziert werden. Da

$$\frac{\mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n]}{(z_1^{q^{k_1}}, \ldots, z_n^{q^{k_n}})} \cong \frac{\mathbb{F}[z_1]}{(z_1^{q^{k_1}})} \otimes \cdots \otimes \frac{\mathbb{F}[z_n]}{(z_n^{q^{k_n}})}$$

ist, und da die Faktoren in dem Tensorprodukt auch alle Poincarédualitätsalgebren sind, können wir Lemma 1.5.5 anwenden und die einzelnen Faktoren ansehen. Nun ist aber $z_i^{q^{k_i}-1} \in \frac{\mathbb{F}[z_i]}{(z_i^{q^{k_i}})}$ ein Vertreter der Fundamentalklasse, der "untouchable" ist, ein sogenannter "Spike". Das bedeutet, dass es keine Steenrod-Operation $\Theta \in \mathscr{P}^*$, $\deg(\Theta) > 0$, und kein $f \in \mathbb{F}[z_i]$ gibt, so dass $\Theta(f) = z_i^{q^{k_i}-1}$ ist. Da $\frac{\mathbb{F}[z_i]}{(z_i^{q^{k_i}})}$ und $\mathbb{F}[z_i]$ aber bis zum Grad $q^{k_i} - 1$ übereinstimmen, ist $z_i^{q^{k_i}-1}$ natürlich auch in $\frac{\mathbb{F}[z_i]}{(z_i^{q^{k_i}})}$ unberührbar. Da jedes $\Theta \in \mathscr{P}^*$ eine Hintereinanderausführung von $\mathcal{P}^k$s ist, muss für $\deg(f) + k(q-1) = q^{k_i} - 1$ gelten:

$$0 =< \mathcal{P}^k(f) \mid z_i^{q^n-1} >=< \mathrm{Wu}_k f \mid z_i^{q^n-1} >,$$

und das gilt genau dann, wenn $\mathcal{P}^k(f) = \mathrm{Wu}_k f = 0$ ist für alle f vom Grad $q^{k_i} - 1 - k(q-1)$. Das kann aber nur dann der Fall sein, wenn $\mathrm{Wu}_k = 0$ ist. □

BEMERKUNG: Die Ausdrücke "untouchable" und "spike" stammen von W.M. Singer, [23].

In [16] beweist S.A. Mitchell, dass die Wu-Klassen der Algebra der Koinvarianten trivial sind, falls G eine endliche Gruppe ist, so dass $\mathbb{F}[V]^G$ eine Polynomalgebra ist. Dank der Erklärungen von R.E. Stong (vielen Dank an ihn) gibt es für diesen Satz inzwischen einen in unserem Zusammenhang leichter verständlichen Beweis. Dieser findet sich in aller Ausführlichkeit in [15], Abschnitt IV.2. Der Satz ist etwas allgemeiner formuliert und lautet wie folgt:

SATZ 2.1.2 (S.A. Mitchell): *Sei* $q = p^s$, *wobei* $p \in \mathbb{N}$ *eine Primzahl und* $s \in \mathbb{N}$ *ist. Sei* $\mathbb{F}[f_1, \ldots, f_n] \subseteq \mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n]$ *eine* $\mathscr{P}^*$*-invariante Unteralgebra und* $f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n]$ *eine Regulärfolge.Dann ist*

$$\mathrm{Wu}\Big(\frac{\mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n]}{(f_1, \ldots, f_n)}\Big) = 1.$$

Bei der Untersuchung der Voraussetzungen für triviale Wu-Klassen werden mehr hinreichende als notwendige Bedingungen auftreten. Eine notwendige Bedingung ist jedenfalls klar, denn zunächst muss $\mathbb{F}[V]/L$ überhaupt eine Poincarédualitätsalgebra sein, daher wird im Folgenden immer L ein irreduzibles, $(\overline{\mathbb{F}[V]})$-primäres Ideal sein (vergleiche 1.4.2 und 1.4.6) [1] . Sei $K \subsetneq L \subseteq \mathbb{F}[V]$ ein Ideal, für das $\mathrm{Wu}(K) = 1$ gilt. Ein wunderschönes Theorem aus [15] verrät uns etwas über die Beziehungen zwischen den Wu-Klassen von K und L.

THEOREM 2.1.3: *Seien $K \subsetneq L \subset \mathbb{F}[V]$ irreduzible, $\overline{\mathbb{F}[V]}$-primäre, $\mathscr{P}^*$-stabile Ideale. Sei $h \in \mathbb{F}[V]$ eine Übergangsinvariante für L über K, also $(K : L) = (h) + K$. Dann ist (h) auch $\mathscr{P}^*$-stabil, also gibt es w und $\widetilde{w} \in \mathbb{F}[V]$, so dass $\mathcal{P}(h) = w \cdot h$ MOD K und $\chi(\mathcal{P})(h) = \widetilde{w} \cdot h$ MOD K ist. Dann gilt*

$$\mathrm{Wu}(L) \equiv \widetilde{w} \cdot \mathrm{Wu}(K) \ \mathrm{MOD}\ L$$

und

$$\chi\mathrm{Wu}(L) \equiv w \cdot \chi\mathrm{Wu}(K) \ \mathrm{MOD}\ L\,.$$

FOLGERUNG 2.1.4:
(i) Falls $\mathrm{Wu}(K) = 1$ ist, sind $\mathrm{Wu}(L) = \widetilde{w}$ und $\chi\mathrm{Wu}(L) = w$.
(ii) Falls K triviale Wu-Klassen hat, dann hat L genau dann auch triviale Wu-Klassen, wenn $w \equiv \widetilde{w} \equiv 1$ MOD L ist.

Nun wird sich zu jedem wie oben konstruierten Ideal L ein Monomideal $K = (z_1^{q^{j_1}}, \ldots, z_n^{q^{j_n}})$ finden lassen, so dass $K \subsetneq L$ ist. Doch wie finden wir ein passende Übergangsinvariante? Das nächste Lemma liefert eine Möglichkeit. Damit der Beweis nicht zu unangenehm und technisch wird, mache ich einige Voraussetzungen, die bei allen Beispielen, die später gerechnet werden, erfüllt sind. Es zeigt sich auch, dass diese Voraussetzungen nicht notwendig sind (siehe Theorem 2.1.6).

LEMMA 2.1.5: *Seien $K = (z_1^{q^{j_1}}, \ldots, z_n^{q^{j_n}}) \subsetneq L = (f_1, \ldots, f_n) \subset \mathbb{F}[V]$ reguläre, $\overline{\mathbb{F}[V]}$-primäre Ideale. Vorausgesetzt, es gibt $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn} \in \mathbb{F}[V]$, so dass für $i = 1, \ldots, n$ gilt,*

$$z_i^{q^{j_i}} = a_{i1}f_1 + \cdots + a_{in}f_n\,,$$

also

$$\begin{bmatrix} z_1^{q^{j_1}} \\ z_2^{q^{j_2}} \\ \vdots \\ z_n^{q^{j_n}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix},$$

[1] Das ist eine etwas weichere Anforderung an das Ideal, nach dem der Poincarédualitätsquotient gebildet wird, als im Satz von Mitchell (2.1.2). Ferner muss in Mitchells Satz die Unteralgebra $\mathbb{F}[f_1, \ldots, f_n]$ $\mathscr{P}^*$-stabil sein, im Folgenden nur das Ideal (nach dem der Poincarédualitätsquotient gebildet wird).

und

(i) $\deg\bigl(\det(A_{LK})\bigr) = \text{f–dim}\,(\mathbb{F}[V]/K) - \text{f–dim}\,(\mathbb{F}[V]/L)$*, wobei* $A_{LK} = (a_{ik})$ *ist,*

(ii) $\det(A_{LK}) \notin K$*,*

dann ist $\det(A_{LK}) \in (K:L)$ *und eine Übergangsinvariante für* L *über* K*.*

BEWEIS: Es muss gezeigt werden, dass unter den angegebenen Bedingungen

$$(K:L) = (\det(A_{LK})) + K$$

ist. Nach Korollar 1.4.5 hat $\det(A_{LK})$ nach Voraussetzung den richtigen Grad. Multiplizieren wir die Matrixgleichung aus der Voraussetzung nach Cramers Regel [2] mit A_{LK}^{cof}, so erhalten wir:

$$A^{cof}\begin{bmatrix} z_1^{q^{j_1}} \\ z_2^{q^{j_2}} \\ \vdots \\ z_n^{q^{j_n}} \end{bmatrix} = \det(A_{LK})\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix},$$

was bedeutet, dass $\det(A_{LK})(f_1, \ldots, f_n) \subseteq (z_1^{q^{j_1}}, \ldots, z_n^{q^{j_n}})$ ist, also

$$\det(A_{LK}) \in (K:L).$$

Gemäß Theorem 1.4.4 ist

$$\frac{(K:L)}{K} = (h) \subset \mathbb{F}[V]/K$$

ein Hauptideal, dessen Erzeuger h nach Korollar 1.4.5 den Grad $\deg(h) = \text{f–dim}\,(\mathbb{F}[V]/K) - \text{f–dim}\,(\mathbb{F}[V]/L)$ hat und der nicht in K liegt (sonst wäre ja $(K:L) = K$). Nach Voraussetzung (ii) liegt $\det(A_{LK})$ nicht in K also folgt, dass $\det(A_{LK}) \in (h)$, und da nach Voraussetzung (i) der Grad von $\det(A_{LK})$ gleich $\deg(h)$ ist, kann sich $\det(A_{LK})$ von h in $\mathbb{F}[V]/K$ höchstens durch Multiplikation mit einem Skalar unterscheiden, womit die Behauptung bewiesen ist. □

Dieses Lemma ist nur ein Spezialfall des folgenden Theorems, welches in [15] bewiesen wird.

THEOREM 2.1.6: *Sei* R *eine kommutative, graduierte, zusammenhängende Algebra über* $\mathbb{F}$ *und* $h_1, \ldots, h_n$ *und* $f_1, \ldots, f_n$ *Regulärfolgen in* R*, so dass* $K = (h_1, \ldots, h_n) \subset (f_1, \ldots, f_n) = L$*. Dann gibt es eine Matrix* $A_{LK} = (a_{ij}) \in \mathrm{GL}(n; R)$*, so dass*

$$\bigl((h_1, \ldots, h_n) : (f_1, \ldots, f_n)\bigr) = \bigl(\det(A_{LK})\bigr) + (h_1, \ldots, h_n)$$

[2] Cramers Regel hilft entweder die Determinante oder die Inverse auszurechnen. Sie lautet: $A_{LK} \cdot A_{LK}^{cof} = \det(A_{LK}) \cdot Id$. Das genaue Aussehen der Kofaktormatrix lässt sich z.B. im "Linear Algebra"-Buch von L. Smith, [26], nachschlagen.

ist. Daher ist $\det(A_{LK})$ *eine Übergangsinvariante für* $(f_1, \ldots, f_n)$ *über* $(h_1, \ldots, h_n)$.

Diese Matrix A_{LK} lässt sich jetzt genauso erklären wie die im vorhergehenden Lemma. Da $(h_1, \ldots, h_n) \subset (f_1, \ldots, f_n)$, gibt es $a_{ij} \in R$, so dass für alle $i = 1, \ldots, n$

$$h_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j$$

ist, was als Matrix geschrieben gerade zu

$$\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

führt. Spannend ist, dass $\det(A_{LK})$ tatsächlich ohne weitere Voraussetzungen (wie in Lemma 2.1.5 gemacht) eine Übergangsinvariante ist. Die Matrix A_{LK} wollen wir als **Übergangsmatrix** für L über K bezeichnen.

LEMMA 2.1.7: *Mit den Voraussetzungen und Bezeichnungen von Lemma* 2.1.5 *oder Theorem* 2.1.6, *wobei im zweiten Fall* $K = (z_1^{q^{k_1}}, \ldots, z_n^{q^{k_n}})$ *und* $L = (f_1, \ldots, f_n)$ *ist, gilt:*

$$\chi \mathrm{Wu}(L) = \frac{\mathcal{P}(\det(A_{LK}))}{\det(A_{LK})} \in \mathrm{Tot}(\frac{\mathbb{F}[V]}{L}).$$

Insbesondere bedeutet das, falls

$$\frac{\mathcal{P}(\det(A_{LK}))}{\det(A_{LK})} \equiv 1 \text{ MOD } L$$

ist, dann ist $\mathrm{Wu}(L)$ *trivial.*

BEWEIS: Da K und L beide $\mathscr{P}^*$-stabil sind, ist nach Lemma 1.5.4 auch $(K : L)$ $\mathscr{P}^*$-stabil. Daher gibt es ein $w \in \mathrm{Tot}(\mathbb{F}[V])$, so dass

$$\mathcal{P}(\det(A_{LK})) = w \cdot \det(A_{LK}) + K \qquad (*)$$

ist. Damit ist $\det(A_{LK})$ eine Übergangsinvariante für L über K und erfüllt die Voraussetzung für Theorem 2.1.3, weshalb

$$\chi \mathrm{Wu}(L) \equiv w \cdot \chi \mathrm{Wu}(K) \text{ MOD } L$$

ist. Da nach 2.1.1 die Wu-Klassen von K trivial sind, sind auch die konjugierten Wu-Klassen trivial. Deshalb ist

$$\chi \mathrm{Wu}(L) \equiv w \text{ MOD } L\,.$$

Ferner gibt es in $\mathrm{Tot}(\mathbb{F}[V])$ keine Nullteiler, daher dürfen wir in $(*)$ teilen und es gilt in $\mathrm{Tot}(\mathbb{F}[V])$:

$$\frac{\mathcal{P}(\det(A_{LK}))}{\det(A_{LK})} = w + K\,,$$

und da $K \subseteq L$, ist dann

$$\frac{\mathcal{P}(\det(A_{LK}))}{\det(A_{LK})} \equiv w \ \mathbf{MOD}\, L\,.$$

und wir erhalten durch Gleichsetzen die Behauptung. $\square$

Wenden wir uns nun wieder dem Fall zu, den wir aus der Invariantentheorie erhalten. Aus dem vorhergehenden Lemma lässt sich eine hinreichende Bedingung für triviale Wu-Klassen in den Koinvarianten folgern.

SATZ 2.1.8: *Sei* $(\overline{\mathbb{F}[V]^G}) = \mathfrak{h}(G) \subseteq \mathbb{F}[V]$ *das Augmentierungsideal des Invariantenrings unter der Operation einer endlichen Gruppe* G, *also ihr Hilbertideal, und* $(\overline{\mathbb{F}[V]^G})$ *werde von einer Regulärfolge* $f_1, \dots, f_n$ *erzeugt. Falls es ein irreduzibles,* $(\overline{\mathbb{F}[V]})$*-primäres Ideal*

$$K = (z_1^{q^{k_1}}, \dots, z_n^{q^{k_n}}) \subseteq \mathfrak{h}(G)$$

gibt und ein $k \in \mathbb{N}$, *so dass die Übergangsinvariante* $h_{\mathfrak{h}(G),K}$ *für* $\mathfrak{h}(G)$ *über* K $\det^k$*-relativ invariant unter der Operation von* G *ist, dann sind die Wu-Klassen von* $\mathbb{F}[V]/(\overline{\mathbb{F}[V]^G})$ *trivial, das heißt,*

$$\mathrm{Wu}\big((\overline{\mathbb{F}[V]^G})\big) = 1 \in \frac{\mathbb{F}[V]}{(\overline{\mathbb{F}[V]^G})}\,.$$

BEWEIS: Da $(\overline{\mathbb{F}[V]^G}) = (f_1, \dots, f_n)$ von einer Regulärfolge erzeugt wird, ist $\mathbb{F}[V]/(\overline{\mathbb{F}[V]^G})$ eine Poincarédualitätsalgebra, also total endlich. Es gibt also $k_1, \dots, k_n$, so dass

$$K := (z_1^{q^{k_1}}, \dots, z_n^{q^{k_n}}) \subseteq (f_1, \dots, f_n) = \mathfrak{h}(G)$$

und eine Übergangsmatrix $A_{\mathfrak{h}(G),K}$, so dass mit $h_{\mathfrak{h}(G),K} = \det(A_{\mathfrak{h}(G),K})$

$$(K : \mathfrak{h}(G)) = (h_{\mathfrak{h}(G),K}) + K\,.$$

Da die Wu-Klassen von K nach Satz 2.1.1 trivial sind, gilt laut dem vorangehenden Lemma 2.1.7 dann für die Wu-Klassen von $\mathfrak{h}(G)$:

$$\chi\mathrm{Wu}(\mathfrak{h}(G)) = \frac{\mathcal{P}(h_{\mathfrak{h}(G),K})}{h_{\mathfrak{h}(G),K}} \in \mathrm{Tot}\Big(\frac{\mathbb{F}[V]}{\mathfrak{h}(G)}\Big)\,.$$

Falls nun $h_{\mathfrak{h}(G),K}$ eine $\det^k$-relative Invariante in $\mathbb{F}[V]/\mathfrak{h}(G)$ ist, ist nach Lemma 1.5.1 auch $\mathcal{P}(h_{\mathfrak{h}(G),K})$ eine $\det^k$-relative Invariante, deshalb gilt für alle $g \in G$:

$$g\Big(\frac{\mathcal{P}(h_{\mathfrak{h}(G),K})}{h_{\mathfrak{h}(G),K}}\Big) = \frac{\det^k(g)\mathcal{P}(h_{\mathfrak{h}(G),K})}{\det^k(g)h_{\mathfrak{h}(G),K}} = \frac{\mathcal{P}(h_{\mathfrak{h}(G),K})}{h_{\mathfrak{h}(G),K}}\,.$$

Das bedeutet, dass $\frac{\mathcal{P}(h_{\mathfrak{h}(G),K})}{h_{\mathfrak{h}(G),K}} \in \mathrm{Tot}(\mathbb{F}[V]^G)$ ist. Da $\mathcal{P} = \mathcal{P}^0 + \mathcal{P}^1 + \cdots$ ist, und

$\mathscr{P}^0$ die Identität, ist (wie im vorangehenden Beweis)

$$\frac{\mathscr{P}(h_{\natural(G),K})}{h_{\natural(G),K}} = 1 + \frac{\mathscr{P}_1(h_{\natural(G),K})}{h_{\natural(G),K}} + \cdots \in \mathrm{Tot}(\mathbb{F}[V]^G),$$

was bedeutet, dass die einzelnen Komponenten in $\mathbb{F}[V]^G$ liegen, also kongruent 0 sind in $\mathbb{F}[V]/\natural(G)$. Dort bleibt nur die 1 übrig, der nichts passiert, und somit ist

$$\chi\mathrm{Wu}(\natural(G)) \equiv 1 \ \mathbf{MOD}\, \natural(G).$$

Also ist nach Abschnitt 1.5 auch $\mathrm{Wu}(\natural(G)$ trivial, und das ist die Aussage des Satzes. □

2.2 Die Wu-Klassen der Dickson-Koinvarianten

In diesem Abschnitt soll als Beispiel und als Anwendung des vorangehenden Abschnitts die Trivialität der Wu-Klassen von $\mathbb{F}[V]_{\mathrm{GL}(n;\mathbb{F})}$ gezeigt werden.

SATZ 2.2.1: *Seien* $K := (z_1^{q^n}, \ldots, z_n^{q^n})$ *und*

$$L := (\mathbf{d}_{n,0}, \ldots, \mathbf{d}_{n,n-1}) = \natural(\mathrm{GL}(n;\mathbb{F}))$$

Ideale in $\mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n]$. *Dann ist* $K \subset \natural(\mathrm{GL}(n;\mathbb{F}))$ *und*

$$\Big(K : \natural\big(\mathrm{GL}(n;\mathbb{F})\big)\Big) = (\mathbf{L}_n) + K.$$

Das heißt, $\mathbf{L}_n$ *ist eine Übergangsinvariante für* $\natural(\mathrm{GL}(n;\mathbb{F}))$ *über* K.

BEWEIS: Es soll Lemma 2.1.5 angewendet werden. Wir betrachten $\varphi(X) \in \mathbb{F}[V]^{\mathrm{GL}(n;\mathbb{F})}[X]$, die erzeugende Funktion der Dickson-Polynome (vgl. dazu Abschnitt 8.1, Poly).

$$\begin{aligned}\varphi(X) &= \prod_{v \in V^*} (v + X) \\ &= \sum_{i=0}^{n} \mathbf{d}_{n,i} X^{q^i},\end{aligned}$$

wobei $\mathbf{d}_{n,n} = 1$ ist. Dann gilt für alle $v \in V^*$, dass $(v + X) \mid \varphi(X)$, also ist $\varphi(-v) = 0$, das heißt [3] :

$$\varphi(-v) = \mathbf{d}_{n,0} v + \mathbf{d}_{n,1} v^q + \cdots + \mathbf{d}_{n,n-1} v^{q^{n-1}} + v^{q^n} = 0.$$

Insbesondere gilt das für Basiselemente $z_1, \ldots, z_n$ von V^*, so dass wir n Gleichungen erhalten. Für $i = 1, \ldots, n$ ist dann $\varphi(z_i) = 0$, also

$$-z_i^{q^n} = \mathbf{d}_{n,0} z_i + \mathbf{d}_{n,1} z_i^q + \cdots + \mathbf{d}_{n,n-1} z_i^{q^{n-1}},$$

[3] Falls q ungerade ist, ist $(-v)^{q^i} = -v^{q^i}$, und die Gleichung kann mit -1 multipliziert werden, um die angegebene Form zu erhalten, falls q gerade ist, ist $(-v)^{q^i} = v^{q^i}$ und wir haben gleich die angegebene Form stehen.

woran wir sehen, dass $K \subseteq \natural(\mathrm{GL}(n;\mathbb{F}))$ ist. Das Gleichungssystem lässt sich in folgender Form schreiben:

$$-\begin{bmatrix} z_1^{q^n} \\ z_2^{q^n} \\ \vdots \\ z_n^{q^n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 & z_1^q & \cdots & z_1^{q^{n-1}} \\ z_2 & z_2^q & \cdots & z_2^{q^{n-1}} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ z_n & z_n^q & \cdots & z_n^{q^{n-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{n,0} \\ \mathbf{d}_{n,1} \\ \vdots \\ \mathbf{d}_{n,n-1} \end{bmatrix}.$$

Nach Lemma 1.3.8 ist $\det(Z_{q,n}) = \mathbf{L}_n$ und

$$\deg(\mathbf{L}_n) = q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q + 1.$$

Nach Korollar 1.4.5 hat eine Übergangsinvariante $h_{\natural(\mathrm{GL}(n;\mathbb{F})),K}$ für $\natural(\mathrm{GL}(n;\mathbb{F}))$ über $K = (z_1^{q^n}, z_2^{q^n}, \ldots, z_n^{q^n})$ den Grad

$$\begin{aligned}
\deg(h_{\natural(\mathrm{GL}(n;\mathbb{F})),K}) &= \text{f–dim}\,(\mathbb{F}[V]/K) - \text{f–dim}\left(\mathbb{F}[V]/\natural\left(\mathrm{GL}(n;\mathbb{F})\right)\right) \\
&= n(q^n - 1) - \sum_{i=0}^{n-1}(q^n - q^i - 1) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} q^n - q^n + q^i + 1 - 1 \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} q^i,
\end{aligned}$$

was der Grad von $\mathbf{L}_n$ ist. Weiterhin ist $\mathbf{L}_n \notin K = (z_1^{q^n}, \ldots, z_n^{q^n})$, da in jedem Summanden die maximale Potenz eines z_i der Wert q^{n-1} ist. Also erfüllt $\mathbf{L}_n$ die Bedingungen von Lemma 2.1.8 und ist daher eine Übergangsinvariante für $\natural(\mathrm{GL}(n;\mathbb{F}))$ über $(z_1^{q^n}, \ldots, z_n^{q^n})$. □

Dank Satz 2.1.8 ist nun der Satz über die Wu-Klassen der Dickson-Koinvarianten bewiesen:

THEOREM 2.2.2: *Die Wu-Klassen der Dickson-Koinvarianten*

$$\mathbb{F}[V]_{\mathrm{GL}(n;\mathbb{F})} = \frac{\mathbb{F}[V]}{\natural(\mathrm{GL}(n;\mathbb{F}))}$$

sind trivial, also

$$\mathrm{Wu}(\mathbb{F}[V]_{\mathrm{GL}(n;\mathbb{F})}) = \mathrm{Wu}(\natural(\mathrm{GL}(n;\mathbb{F}))) = 1.$$

BEWEIS: Die Voraussetzungen für die Anwendung von Satz 2.1.8 gelten, wie Lemma 2.2.1 und Korollar 1.3.9 zeigen, das heißt, $\mathbf{L}_n$ ist eine $\det^{-1}$-relativ invariante Übergangsinvariante für $\natural(\mathrm{GL}(n;\mathbb{F}))$ über ein Monomideal K. Dann liefert der besagte Satz genau die Aussage dieses Theorems. □

2.3 Weitere Beispiele für triviale Wu-Klassen

Auch zu den Koinvarianten bezüglich der Operation einiger anderer Gruppen lässt sich konkret ausrechnen, dass ihre Wu-Klassen trivial sind. Für die symmetrische Gruppe wurde das in [15] bereits vorgerechnet, was ich der Vollständigkeit wegen hier aber nochmal aufnehmen möchte (auch für die Dickson-Koinvarianten steht es bereits dort). Für die Koinvarianten der unipotenten Gruppe findet sich dort aber noch nichts.

SATZ 2.3.1: *Die Wu-Klassen der Koinvarianten der symmetrischen Gruppe Σ_n sind trivial, das heißt,*

$$\mathrm{Wu}\big(\natural(\Sigma_n)\big) = 1 \in \frac{\mathbb{F}[V]}{\natural(\Sigma_n)}.$$

BEWEIS: Wir werden zeigen, dass es eine Übergangsinvariante für $\natural(\Sigma_n)$ über das Monomideal $K = (z_1^{q^n}, \ldots, z_n^{q^n})$ gibt, die invariant unter der Operation von Σ_n ist. Damit wären die Voraussetzungen für die Anwendung von Satz 2.1.8 erfüllt und die Behauptung bewiesen.

Folgende Funktion ist eine erzeugende Funktion für die elementarsymmetrischen Polynome (siehe dazu Abschnitt 1.1 in [27]):

$$\psi(X) = \prod_{i=1}^{n}(X + z_i) = \sum_{i=1}^{n} e_i(z_1, \ldots, z_n)X^{n-i}.$$

Aufgrund der Konstruktion ist zu sehen, dass für $j = 1, \ldots, n$

$$\psi(z_j) = 0$$

ist, also ist

$$-z_j^n = e_1(z_1, \ldots, z_n)z_j^{n-1} + e_2(z_1, \ldots, z_n)z_j^{n-2} + \cdots + e_n(z_1, \ldots, z_n),$$

und das wieder für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$, so dass wir folgende Matrixgleichung erhalten:

$$-\begin{bmatrix} z_1^n \\ z_2^n \\ \vdots \\ z_n^n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & z_1 & \cdots & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & \cdots & z_2^{n-1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & z_n & \cdots & z_n^{n-1} \end{bmatrix}}_{=:Z_n} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}.$$

Das Ideal $(z_1^n, \ldots, z_n^n)$ ist aber noch "zu groß", jedenfalls wissen wir nichts über seine Wu-Klassen. Sei aber

$$K := (z_1^{q^n}, \ldots, z_n^{q^n}) \subset (z_1^n, \ldots, z_n^n).$$

Dann ist

$$\begin{bmatrix} z_1^{q^n} \\ z_2^{q^n} \\ \vdots \\ z_n^{q^n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1^{q^n-n} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z_n^{q^n-n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1^n \\ z_2^n \\ \vdots \\ z_n^n \end{bmatrix}.$$

Wir können also in der zweiten Matrixgleichung den Vektor $[z_1^n, \dots, z_n^n]^{tr}$ durch die erste Gleichung ersetzen und erhalten als Übergangsmatrix das Produkt der Matrizen $\operatorname{diag}(z_1^{q^n-n}, \dots, z_n^{q^n-n}) \cdot Z_n$ und als Übergangsinvariante für $\natural(\Sigma_n)$ über K das Produkt der Determinanten dieser Matrizen, also

$$\begin{aligned} h_{\natural(\Sigma_n),K} &:= z_1^{q^n-n} \cdots z_n^{q^n-n} \cdot \det(Z_n) \\ &= \left(e_n(z_1, \dots, z_n)\right)^{q^n-n} \cdot \det(Z_n). \end{aligned}$$

Dass $\left(e_n(z_1, \dots, z_n)\right)^{q^n-n}$ invariant unter der Operation von Σ_n ist, ist klar. Wie sieht es mit $\det(Z_n)$ aus? $\det(Z_n)$ ist die Van-der-Monde-Determinante (siehe zum Beispiel [13], S. 155):

$$\det(Z_n) = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \operatorname{sgn}(\sigma) z_1^{\sigma(0)} \cdots z_{n-1}^{\sigma(n-2)} z_n^{\sigma(n-1)}.$$

Dieses Polynom liegt im Bild des Transferhomomorphismus (siehe [8], Theorem 9.16)

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr}^{\Sigma_n} : \mathbb{F}[V] &\longrightarrow \mathbb{F}[V]^{\Sigma_n} \\ f &\longmapsto \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \sigma(f), \end{aligned}$$

ist also auch unter der Operation von Σ_n invariant [4]. Damit ist die Übergangsinvariante $h_{\natural(\Sigma_n),K}$ invariant unter der Operation von Σ_n und genügt den Bedingungen von Satz 2.1.8, also sind die Wu-Klassen der Koinvarianten der symmetrischen Gruppe trivial. □

Nun werden einige Bezeichnungen eingeführt. Da wir im nächsten Beweis eine Induktion über n, die Dimension von V in $\mathbb{F}[V]$ führen wollen, setzen wir

$$\begin{aligned} V_n &:= V^* = \operatorname{Span}_{\mathbb{F}}\{z_1, \dots, z_n\}, \\ V_i &:= \operatorname{Span}_{\mathbb{F}}\{z_1, \dots, z_i\}, \\ V_0 &:= \{0\} \end{aligned}$$

wobei i natürlich $\in \{1, \dots, n-1\}$ ist. Dann haben die Dickson-Polynome

[4] Es ist leicht einzusehen, dass $\operatorname{Tr}^G(f) \in \mathbb{F}[V]^G$ ist, denn die Anwendung eines $g' \in G$ auf $\sum_{g \in G} g(f)$ liefert nur eine andere Reihenfolge der Summanden. Vergleiche z.B. [11].

die folgende Erzeugendenfunktion:

$$\begin{aligned}\varphi_i(X) &= \prod_{v\in V_i}(X+v)\\ &= \sum_{j=0}^{i} \mathbf{d}_{i,j}X^{q^j},\end{aligned}$$

und wie bisher ist $\mathbf{d}_{i,i} = 1$. In [27], Abschnitt 8.3, werden die Invarianten unter der Operation der unipotenten Gruppe $\mathrm{Uni}(n;\mathbb{F}) < \mathrm{GL}(n;\mathbb{F})$ berechnet. Es ist

$$\mathbb{F}[z_1,\ldots,z_n]^{\mathrm{Uni}(n;\mathbb{F})} \cong \mathbb{F}[\mathbf{h}_{n,0},\ldots,\mathbf{h}_{n,n-1}],$$

wobei, für $i = 1,\ldots,n$,

$$\begin{aligned}\mathbf{h}_{n,n-i} = \prod_{z\in[z_i]_{\mathrm{Uni}(n;\mathbb{F})}} z &= \prod_{v\in V_{i-1}}(v+z_i)\\ &= \sum_{j=0}^{i-1}\mathbf{d}_{i-1,j}z_i^{q^j} = \varphi_{i-1}(z_i)\end{aligned}$$

ist. Wir setzen jetzt also

$$L = (\mathbf{h}_{n,0},\ldots,\mathbf{h}_{n,n-1}) = \mathfrak{h}(\mathrm{Uni}(n;\mathbb{F})).$$

In [8] finden sich Formeln zu weiteren Beziehungen zwischen den Dickson-Polynomen und den Invarianten der unipotenten Gruppe. Für die unipotente Gruppe lässt sich im Gegensatz zur $\mathrm{GL}(n;\mathbb{F})$ zeigen, dass es ein Monomideal $K = (z_1, z_2^q,\ldots,z_n^{q^{n-1}})$ gibt, so dass $K = \mathfrak{h}(\mathrm{Uni}(n;\mathbb{F}))$ gilt. Da die Wu-Klassen von $\mathbb{F}[V]/K$ trivial sind, sind die Wu-Klassen von $\mathbb{F}[V]/\mathfrak{h}(\mathrm{Uni}(n;\mathbb{F}))$ es dann auch. Wir werden ausnutzen, dass das Hilbert-Ideal $\mathfrak{h}(\mathrm{GL}(n;\mathbb{F})) = (\mathbf{d}_{n,0},\ldots,\mathbf{d}_{n,n-1})$ in unserem jetzigen $\mathfrak{h}(\mathrm{Uni}(n;\mathbb{F}))$ enthalten ist, das heißt, für alle i ist

$$(\mathbf{d}_{i,0},\ldots,\mathbf{d}_{i,i-1}) \subset (\mathbf{h}_{i,0},\ldots,\mathbf{h}_{i,i-1}). \tag{$\spadesuit$}$$

LEMMA 2.3.2: *Folgende Beziehungen zwischen den Dickson-Polynomen und den Invarianten der unipotenten Gruppe gelten für $i \geq 2$:*
(i) $\mathbf{d}_{i,j} = \mathbf{d}_{i-1,j-1}^q - \mathbf{d}_{i-1,j}\mathbf{h}_{i,0}^{q-1}$.
(ii) $\mathbf{d}_{i,0} = (-1)^n(\mathbf{h}_{n,n-1}\cdots\mathbf{h}_{n,0})^{q-1}$.

BEWEIS: Siehe [8], Propositionen 1.1.(ii) und 1.2. □

LEMMA 2.3.3: *Für die Invarianten der unipotenten Gruppe gilt für $i \geq 1$ und $j \geq 0$:*

$$\mathbf{h}_{i,j} = \mathbf{h}_{i+1,j+1}.$$

BEWEIS: Diese Behauptung lässt sich durch Nachrechnen oder scharfes Hingucken beweisen. □

LEMMA 2.3.4: *Sei* $K := (z_1, z_2^q, \ldots, z_n^{q^{n-1}})$ *und* $L := (\mathbf{h}_{n,0}, \ldots, \mathbf{h}_{n,n-1}) = \mathfrak{h}(\mathrm{Uni}(n;\mathbb{F}))$ *Ideal in* $\mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n]$. *Dann ist*

$$K = \mathfrak{h}(\mathrm{Uni}(n;\mathbb{F})) = L.$$

BEWEIS: Wir zeigen, dass $z_1, z_2^q, \ldots, z_n^{q^{n-1}}$ in $\mathfrak{h}(\mathrm{Uni}(n;\mathbb{F}))$ liegen, und zwar mit Induktion über n. Dazu zeigen wir, dass es $a_{11}, \ldots, a_{nn} \in \mathbb{F}[V]$ gibt, so dass

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2^q \\ \vdots \\ z_n^{q^{n-1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{n,n-1} \\ \mathbf{h}_{n,n-2} \\ \vdots \\ \mathbf{h}_{n,0} \end{bmatrix},$$

ist.

Induktionsanfang: Sei $n = 1$. Dann ist $\mathbf{h}_{1,0} = z_1 \in K = (z_1)$ und die Behauptung ist klar.

Induktionsvoraussetzung: Für $k < n$ gebe es $a_{kj} \in \mathbb{F}[z_1, \ldots, z_k]$, so dass für $i = 1, \ldots, k$

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_k^{q^{k-1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{k,k-1} \\ \vdots \\ \mathbf{h}_{k,0} \end{bmatrix},$$

gilt.

Induktionsschritt: Wegen Lemma 2.3.3 ergibt die Induktionsvoraussetzung

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{n-1}^{q^{n-2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{n,n-1} \\ \vdots \\ \mathbf{h}_{n,1} \end{bmatrix}.$$

Daher sind noch $a_{n,1}, \ldots, a_{nn} \in \mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n]$ zu finden, so dass

$$z_n^{q^{n-1}} = a_{n1}\mathbf{h}_{n,n-1} + \cdots + a_{nn}\mathbf{h}_{n,0}$$

ist. Da

$$\mathbf{h}_{n,0} = \varphi_{n-1}(z_n) = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{d}_{n-1,j} z_n^{q^j}$$

ist, erhalten wir unter Verwendung von Lemma 2.3.2

$$\mathbf{h}_{n,0} = z_n^{q^{n-1}} + \sum_{j=1}^{n-2} (\mathbf{d}_{n-2,j-1}^q - \mathbf{d}_{n-2,j}\mathbf{h}_{n-1,0}^{q-1}) z_n^{q^j} + (-1)^n (\mathbf{h}_{n-1,n-2} \cdots \mathbf{h}_{n-1,0})^{q-1} z_n .$$

was genau dann gilt, wenn (wir stellen um, wenden Lemma 2.3.3 an und klammern $\mathbf{h}_{n-1,0} = \mathbf{h}_{n,1}$ aus)

$$z_n^{q^{n-1}} = -\underbrace{\Big(\sum_{j=1}^{n-2} \mathbf{d}_{n-2,j-1}^q z_n^{q^j}\Big)}_{=:\alpha\in(\mathbf{d}_{n-2,0},\dots,\,\mathbf{d}_{n-2,n-3})} + a_{n,n-1}\mathbf{h}_{n,1} + \mathbf{h}_{n,0}\,.$$

Und da gemäß (♠) $(\mathbf{d}_{n-2,0},\dots,\,\mathbf{d}_{n-2,n-3}) \subset (\mathbf{h}_{n-2,0},\dots,\,\mathbf{h}_{n-2,n-3})$, gibt es $a_{n1},\dots,\,a_{n,n-2} \in \mathbb{F}[z_1,\dots,\,z_n]$ so dass

$$\alpha = \sum_{j=1}^{n-2} a_{nj}\mathbf{h}_{n-2,n-2-j}\,,$$

was mit Lemma 2.3.3 zu

$$\alpha = \sum_{j=1}^{n-2} a_{nj}\mathbf{h}_{n,n-j}$$

wird, womit die obige Gleichung für $z_n^{q^{n-1}}$ die gesuchte Form

$$z_n^{q^{n-1}} = \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}\mathbf{h}_{n,n-j} + \mathbf{h}_{n,0}$$

annimmt. Wir haben also gezeigt, dass $K \subseteq L$.

Nun wird die Gleichheit folgendermaßen gezeigt: Da für $i = 1,\dots,\,n$ die Grade $\deg(z_i^{q^{i-1}}) = \deg(\mathbf{h}_{n,n-i})$ übereinstimmen müssen wir noch zeigen, dass $\mathbf{h}_{n,n-i} \in K$ ist für alle i. Das gilt aber genau dann, wenn sich die Matrix $A_n := (a_{ij})$ invertieren lässt, also wenn ihre Determinante ungleich 0 ist, und zwar für alle $(b_1,\dots,\,b_n) \in \mathbb{F}^n$, an denen die $a_{ij} \in \mathbb{F}[z_1,\dots,\,z_n]$ ausgewertet werden könnten. Mit Hilfe der eben geführte Induktion können wir die Determinate von A_n ausrechnen. Am Induktionsanfang sehen wir, dass $\det(A_1) = 1$ ist, und nach Induktionsvoraussetzung ist $\det(A_k) = 1$, für alle $k < n$. Schreiben wir nun die aus dem Induktionsschritt erhaltene Matrix A_n auf, erhalten wir

$$\begin{aligned}\det(A_n) &= \det\left(\begin{bmatrix} & & & 0\\ & A_{n-1} & & \vdots\\ & & & 0\\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & 1\end{bmatrix}\right)\\ &= \det(A_{n-1})\cdot 1,\end{aligned}$$

so dass nach Induktionsvoraussetzung $\det(A_n) = 1$ ist. Dank Cramers Regel ist die Inverse durch $A_n^{-1} = \det(A_n)^{-1} \cdot A_n^{cof} = A_n^{cof}$ berechenbar, also ist dadurch, dass die Determinante ein Körperelement$\neq 0$ ist, auch

$A_n^{-1} \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{F}[V])$. Und durch

$$A_n^{-1} \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n^{q^{n-1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{n,n-1} \\ \vdots \\ \mathbf{h}_{n,0} \end{bmatrix}$$

schließlich entstehen die Gleichungen die zeigen, dass $L \subseteq K$ ist. □

Da wir nun eine Monombasis für L gefunden haben, ist als Folgerung die Trivialität der Wu-Klassen klar:

KOROLLAR 2.3.5: *Die Wu-Klassen der Koinvarianten unter der Operation der unipotenten Gruppe* $\mathrm{Uni}(n; \mathbb{F})$ *sind trivial, also*

$$\mathrm{Wu}(\mathbb{F}[V]_{\mathrm{Uni}(n;\mathbb{F})}) = 1\,.$$

Kapitel 3
Macaulay-Inverse von Idealen

In diesem Kapitel werden wir Macaulay-Inverse (bzw. inverse Systeme) zu einigen Idealen berechnen. Dabei handelt es sich um Elemente aus der dualen Algebra zu $\mathbb{F}[V]$ mit dem Vorteil, dass ein einziges Element das ganze Ideal in $\mathbb{F}[V]$ charakterisiert.

3.1 Was sind Macaulay-Inverse?

Bei der Einführung von Macaulay-Inversen lehne ich mich eng an die in [15], Teil II, an, versuche aber, mich auf die für diese Arbeit wesentlichen Aspekte zu konzentrieren.

Die Polynomalgebra $\mathbb{F}[V]$ trägt eine Hopf-Algebrastruktur, wobei das Koprodukt $\nabla : \mathbb{F}[V] \longrightarrow \mathbb{F}[V] \otimes \mathbb{F}[V]$ durch $\nabla(z) = z \otimes 1 + 1 \otimes z$ für alle Linearformen $z \in V^*$ definiert ist. Die duale Hopfalgebra wird mit $\Gamma(V)$ bezeichnet. Ähnliche Konstruktionen lassen sich mit $\mathbb{F}[z_1^{-1}, \dots, z_n^{-1}]$ beschreiben, wenn $z_1, \dots, z_n$ eine Basis von V^* ist. $\Gamma(V)$ ist eine Dividierte-Potenzen-Algebra (siehe dazu [15], II.1) und $\mathbb{F}[z_1^{-1}, \dots, z_n^{-1}]$ eine Algebra von inversen Polynomen (siehe dazu [7]). Dabei interessiert uns hauptsächlich, dass sie auch ein Modul über $\mathbb{F}[z_1, \dots, z_n]$ durch die folgende Operation ist: Sei

$$\{z^E = z_1^{e_1} \cdots z_n^{e_n} : E = (e_1, \dots, e_n) \in \mathbb{N}_0^n\}$$

die sich aus der vorliegenden Basis von V^* ergebende Monombasis für $\mathbb{F}[z_1, \dots, z_n]$. Dann ist

$$\{z^{-F} = z_1^{-f_1} \cdots z_n^{-f_n} : F = (f_1, \dots, f_n) \in \mathbb{N}_0^n\}$$

die duale Basis für $\mathbb{F}[z_1^{-1}, \ldots, z_n^{-1}]$, so dass die kanonische Paarung

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{F}[z_1^{-1}, \ldots, z_n^{-1}]_i \times \mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n]_{-i} & \longrightarrow & \mathbb{F} \\ (H, F) & \longmapsto & < H \mid F > \end{array}$$

hier auf

$$< z^{-F} \mid z^E >= \delta_{F,E}$$

führt (für $|F| = |E|$) und allgemeiner gilt:

$$z^E \cap z^{-F} = \begin{cases} z^{-(F-E)} & \text{falls } F - E \in \mathbb{N}_0^n \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Operation "$\cap$", die das Produkt eines Elements aus $\mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n]$ mit einem aus $\mathbb{F}[z_1^{-1}, \ldots, z_n^{-1}]$ bezeichnet, wird auch als **Stripping-Operation** bezeichnet.

Wir definieren nun zu einem Element $\gamma \in \mathbb{F}[z_1^{-1}, \ldots, z_n^{-1}]$ ein Ideal $\mathbf{I}(\gamma) \subset \mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n]$ durch

$$\begin{aligned} \mathbf{I}(\gamma) : &= \{f \in \mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n] : < \gamma \mid fh >= 0 \ \ \forall\, h \in \mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n]\} \\ &= \mathrm{Ann}_{\mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n]}(< \gamma >_{\mathbb{F}[z_1^{-1}, \ldots, z_n^{-1}]}) \\ &= \{f \in \mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n] : \ f \cap \gamma = 0\}. \end{aligned}$$

Das Ideal $\mathbf{I}(\gamma)$ in $\mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n]$ wird also allein durch das Element γ aus $\mathbb{F}[z_1^{-1}, \ldots, z_n^{-1}]$ bestimmt. γ wird die **Macaulay-Inverse** zu $\mathbf{I}(\gamma)$ genannt, auch kurz MCI($\mathbf{I}(\gamma)$).

γ erzeugt in $\mathbb{F}[z_1^{-1}, \ldots, z_n^{-1}]$ einen zyklischen (=monogenen) $\mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n]$-Modul

$$M(\gamma) =< \gamma >_{\mathbb{F}[z_1^{-1}, \ldots, z_n^{-1}]} \subset \mathbb{F}[z_1^{-1}, \ldots, z_n^{-1}],$$

der genau der Annulator von $\mathbf{I}(\gamma)$ in $\mathbb{F}[z_1^{-1}, \ldots, z_n^{-1}]$ ist und daher auch mit $\mathbf{I}(\gamma)^{-1}$ bezeichnet wird:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}(\gamma)^{-1} &= \mathrm{Ann}_{\mathbb{F}[z_1^{-1}, \ldots, z_n^{-1}]}\big(\mathbf{I}(\gamma)\big) \\ &=< \gamma >_{\mathbb{F}[z_1^{-1}, \ldots, z_n^{-1}]} = M(\gamma). \end{aligned}$$

Diese Dualität wird beschrieben in dem Satz von Macaulay (siehe auch [15], Theorem II.3.2):

THEOREM 3.1.1 (Macaulay): *Zwischen den nicht-trivialen zyklischen $\mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n]$-Untermoduln von $\mathbb{F}[z_1^{-1}, \ldots, z_n^{-1}]$ und den echten irreduziblen, $\overline{\mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n]}$-primären Idealen in $\mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n]$, gibt es eine bijektive Korrespondenz: Einem zyklischen Untermodul*

$$M(\gamma) \subset \mathbb{F}[z_1^{-1}, \ldots, z_n^{-1}]$$

wird sein Annulator-Ideal

$$\mathbf{I}(\gamma) = \mathrm{Ann}_{\mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n]}\big(M(\gamma)\big) \subset \mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n]$$

zugeordnet, und einem echten $\overline{\mathbb{F}[z_1,\ldots,z_n]}$*-primären, irreduziblen Ideal*

$$I \subset \mathbb{F}[z_1,\ldots,z_n]$$

wird der zyklische Untermodul $\mathrm{Ann}_{\mathbb{F}[z_1^{-1},\ldots,z_n^{-1}]}(I) \subset \mathbb{F}[z_1^{-1},\ldots,z_n^{-1}]$ *von Elementen, die von* I *annuliert werden, zugeordnet.*

Ist das Ideal I vorgegeben, so wird die Macaulay-Inverse, ein Erzeuger von $\mathrm{Ann}_{\mathbb{F}[z_1^{-1},\ldots,z_n^{-1}]}(I) = I^{-1}$, mit θ_I bezeichnet. I^{-1} wird auch das **inverse System** zu I genannt.

Was ist nun der Vorteil daran, ein ($\overline{\mathbb{F}[V]}$)-primäres irreduzibles Ideal I über seine Macaulay-Inverse θ_I zu beschreiben? Aus θ_I erhalten wir die möglichen Vertreter der Fundamentalklasse von $\mathbb{F}[V]/I$, und da sich aus der Kenntnis der Fundamentalklasse einer Poincarédualitätsalgebra ihre Struktur erklärt, ist die Kenntnis der Fundamentalklasse von größtem Interesse. Und diese direkt von I, welches von mindestens n Elementen erzeugt wird, zu erhalten, ist allein aufgrund der Anzahl der I erzeugenden Elemente schwierig!

BEMERKUNG: Eine $\mathscr{P}^*$-Poincarédualitätsalgebra $\mathbb{F}[V]/I$ hat triviale Wu-Klassen genau dann, wenn θ_I $\mathscr{P}^*$-invariant ist. Diese Tatsache wird bei der Suche nach der Lösung des "Hit-Problems" in [15], III.4, ausgenutzt.

Wie erhalten wir nun Vertreter der Fundamentalklasse von $\mathbb{F}[V]/I$, vorausgesetzt, wir kennen $\theta_I \in \mathbb{F}[z_1^{-1},\ldots,z_n^{-1}]_{-d}$?

$$\mathbf{I}(\theta_I) = \{f \in \mathbb{F}[V] : f \cap \theta_I = 0\},$$

das sind genau die Polynome $f \in \mathbb{F}[V]$, deren Multiplikation mit θ_I ein Element

$$f \cdot \theta_I \in \mathbb{F}[z_1, z_1^{-1},\ldots,z_n, z_n^{-1}] \backslash \mathbb{F}[z_1^{-1},\ldots,z_n^{-1}]$$

ergibt, also eines, bei dem in jedem Summanden mindestens ein positiver Exponent auftritt. Daher liegt jedes Polynom $f \in \mathbb{F}[V]$, dessen Grad größer als $d = -\deg(\theta_I)$ ist, in $I = \mathbf{I}(\theta_I)$ (diese Gleichheit gilt nach Theorem 3.1.1 (von Macaulay)), ferner die Monome z^F mit $|F| = d$, deren Exponententupel mit keinem eines Summanden von θ_I (bis auf Vorzeichen) übereinstimmen. Das heißt,

$$z^F \notin I = \mathbf{I}(\theta_I)$$

genau dann, wenn

$$< \theta_I \mid z^F > \neq 0 .$$

Das bedeutet aber, dass diese $z^F \neq 0$ in $\mathbb{F}[V]/I$ sind. Da, wie vorher erklärt, alle Polynome von Graden größer als d in I liegen und somit 0 sind in $\mathbb{F}[V]/I$, ist

$$\text{f-dim}\,(\mathbb{F}[V]/I) = \deg([\mathbb{F}[V]/I]) = d.$$

Daher sind alle z^F mit $< \theta_I \mid z^F > \neq 0$ Vertreter der Fundamentalklasse von $\mathbb{F}[V]/I$ (und alle Summen solcher Vertreter, die sich nicht gegenseitig aufheben). Kurz gesagt (und mit dem bisher Erklärten bewiesen):

LEMMA 3.1.2: *Sei $I \subset \mathbb{F}[V]$ ein irreduzibles $(\overline{\mathbb{F}[V]})$-primäres Ideal und $\theta_I \in \mathbb{F}[z_1^{-1}, \ldots, z_n^{-1}]_{-d}$ eine Macaulay-Inverse zu I. Dann gilt:*
- *(i)* f–dim$(\mathbb{F}[V]/I) = d$,
- *(ii)* $f \in \mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n]_d$ *ist Vertreter von* $[\mathbb{F}[V]/I]$ *genau dann, wenn* $< \theta_I \mid f > \neq 0$.

Als Beispiel schauen wir uns ein $\overline{\mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n]}$-primäres Monomideal I an. Für solche Ideale wird in [15] kurz nach Theorem II.3.2. die Macaulay-Inverse ausgerechnet. Sei

$$\mathcal{F}(I) = \{F \in \mathbb{N}_0^n \;:\; z^F \notin I\}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} I^{-1} &= \mathrm{Ann}_{\mathbb{F}[z_1^{-1}, \ldots, z_n^{-1}]}(I) \\ &= \mathrm{Span}_{\mathbb{F}}\{z^{-F} \;:\; F \in \mathcal{F}(I)\}. \end{aligned}$$

Falls I irreduzibel ist, hat $\mathcal{F}(I)$ ein eindeutiges maximales Element M und $\theta_I = z^{-M}$.

LEMMA 3.1.3: *Sei $I = (z_1^{a_1}, \ldots, z_n^{a_n}) \subset \mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n]$, wobei alle $a_i \geq 1$ sind. Dann ist*

$$\theta_I = z_1^{-(a_1-1)} \cdots z_n^{-(a_n-1)}.$$

BEWEIS: I ist $\overline{\mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n]}$-primär und irreduzibel, und

$$\mathcal{F}(I) = \{(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{N}_0^n \;:\; 0 \leq b_i \leq a_i - 1\}.$$

Damit ist das eindeutige maximale Element von $\mathcal{F}(I)$ klar. □

KOROLLAR 3.1.4: *Die Fundamentalklasse von $\mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n]/I$, dabei sei I wie im Lemma, ist*

$$[\mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n]/I] = z_1^{a_1-1} \cdots z_n^{a_n-1}.$$

In [15] findet sich als Theorem II.6.1 das folgende, welches die Beziehung zwischen den Macaulay-Inversen zweier sich enthaltender Ideale beschreibt:

THEOREM 3.1.5 ($K - L$-Paradigma): *Seien $K \subsetneq L \subset \mathbb{F}[V]$ irreduzible $\overline{\mathbb{F}[V]}$-primäre Ideale. Wenn h eine Übergangsinvariante für L über K ist, also*

$$\frac{(K : L)}{K} = (h) \subset \frac{\mathbb{F}[V]}{K},$$

und θ_K eine Macaulay-Inverse zu K, dann berechnet sich die Macaulay-Inverse zu L wie folgt:

$$\theta_L = h \cap \theta_K .$$

Dieses Theorem ist besonders nützlich in dem Fall, in dem θ_K eine einfache Form hat, also zum Beispiel, falls K ein Ideal wie in Lemma 3.1.3 ist.

3.2 Zwei Macaulay-Inverse

In diesem Abschnitt berechnen wir die Macaulay-Inversen für das Dickson-Ideal und für das Augmentierungsideal der Invarianten der unipotenten Gruppe.

Das **Dickson-Ideal** ist das von $\mathbf{d}_{n,0}, \ldots, \mathbf{d}_{n,n-1}$ in $\mathbb{F}[V]$ erzeugte Ideal, also das Hilbertideal von $\mathrm{GL}(n;\mathbb{F})$. In unserem Fall mit $K = (z_1^{q^n}, \ldots, z_n^{q^n})$, $\natural(\mathrm{GL}(n;\mathbb{F})) := (\mathbf{d}_{n,0}, \ldots, \mathbf{d}_{n,n-1})$ und $h = \mathbf{L}_n$ (vergleiche 2.2) können wir also, da θ_K aus Lemma 3.1.3 bekannt ist, versuchen $\theta_{\natural(\mathrm{GL}(n;\mathbb{F}))}$ auszurechnen.

In Lemma 1.3.8 haben wir $\mathbf{L}_n$ genauer untersucht und im Beweis festgestellt, dass

$$\mathbf{L}_n = \sum_{\sigma\in\Sigma_n} \mathrm{sgn}(\sigma) z_{\sigma(1)}^{q^{n-1}} \cdots z_{\sigma(n-1)}^{q} z_{\sigma(n)},$$

oder auch

$$\mathbf{L}_n = \sum_{\sigma\in\Sigma_n} \mathrm{sgn}(\sigma) z_1^{\sigma(q^{n-1})} \cdots z_{n-1}^{\sigma(q^1)} z_n^{\sigma(q^0)}.$$

Also ergibt sich die Macaulay-Inverse als

$$\begin{aligned}
\theta_{\natural(\mathrm{GL}(n;\mathbb{F}))} &= \sum_{\sigma\in\Sigma_n} \mathrm{sgn}(\sigma) z_1^{\sigma(q^{n-1})} \cdots z_{n-1}^{\sigma(q)} z_n^{\sigma(1)} \cap z_1^{-(q^n-1)} \cdots z_n^{-(q^n-1)} \\
&= \sum_{\sigma\in\Sigma_n} \mathrm{sgn}(\sigma) z_1^{\sigma(-(q^n-q^{n-1}-1))} \cdots z_{n-1}^{\sigma(-(q^n-q^1-1))} z_n^{\sigma(-(q^n-q^0-1))} \\
&= \sum_{\sigma\in\Sigma_n} \mathrm{sgn}(\sigma) z_1^{\sigma(-(\deg(\mathbf{d}_{n,n-1})-1))} \cdots z_{n-1}^{\sigma(-(\deg(\mathbf{d}_{n,1})-1))} z_n^{\sigma(-(\deg(\mathbf{d}_{n,0})-1))}
\end{aligned}$$

womit folgendes Theorem bewiesen ist:

THEOREM 3.2.1: *Der Erzeuger von $\natural(\mathrm{GL}(n;\mathbb{F}))^{-1} \subset \mathbb{F}[z_1^{-1}, \ldots, z_n^{-1}]$, also des inversen Systems von $\natural(\mathrm{GL}(n;\mathbb{F})) = (\mathbf{d}_{n,o}, \ldots, \mathbf{d}_{n,n-1})$ ist die Macaulay-Inverse*

$$\theta_{\natural(\mathrm{GL}(n;\mathbb{F}))} = \sum_{\sigma\in\Sigma_n} \mathrm{sgn}(\sigma) z_1^{\sigma(-(\deg(\mathbf{d}_{n,n-1})-1))} \cdots z_{n-1}^{\sigma(-(\deg(\mathbf{d}_{n,1})-1))} z_n^{\sigma(-(\deg(\mathbf{d}_{n,0})-1))}.$$

Aus diesem Theorem lassen sich mit Lemma 3.1.2 die Fundamentalklassenvertreter von $\mathbb{F}[V]/\natural(\mathrm{GL}(n;\mathbb{F}))$ herleiten. Jedes Polynom, das einen größeren Grad als f–dim $(\mathbb{F}[V]_{\mathrm{GL}(n;\mathbb{F})}) = \sum_{i=0}^{n-1}\big(\deg(\mathbf{d}_{n,i})-1\big)$ hat, wird in $\mathbf{I}(\theta_{\natural(\mathrm{GL}(n;\mathbb{F}))})$ sein. Jedes Polynom vom Grad= f–dim $(\mathbb{F}[V]_{\mathrm{GL}(n;\mathbb{F})})$, das nur aus Summanden besteht, die Exponententupel der Form $\sigma\big((\deg(\mathbf{d}_{n,n-1}) - 1, \dots, \deg(\mathbf{d}_{n,0}) - 1\big)$ haben, die sich mit einem von $\theta_{\natural(\mathrm{GL}(n;\mathbb{F}))}$ zu $(0, \dots, 0)$ aufheben, liegt auch in $\mathbf{I}(\theta_{\natural(\mathrm{GL}(n;\mathbb{F}))})$. Damit kommt jeder Summand dieser Art als Fundamentalklassenvertreter in Frage, und auch Summen solcher Summanden, sofern sie keine "ungünstigen" Vorzeichen mitbringen (dann könnten die Vorzeichen in $\theta_{\natural(\mathrm{GL}(n;\mathbb{F}))}$ dafür sorgen, dass das Produkt 0 und nicht in $\mathbb{F}^\times$ ist). Damit ist als Folgerung aus dem Theorem dieses Korollar bewiesen:

KOROLLAR 3.2.2: *Für die Fundamentalklasse von*

$$\mathbb{F}[V]/(\mathbf{d}_{n,0}, \dots, \mathbf{d}_{n,n-1}) = \mathbb{F}[V]/\natural(\mathrm{GL}(n;\mathbb{F}))$$

gibt es folgende Vertreter:

Sei $S \subseteq \Sigma_n$ eine Teilmenge, für die gilt, dass $p \nmid |S|$. Dann ist

$$\sum_{\sigma\in S} \mathrm{sgn}(\sigma) z_1^{\sigma(\deg(\mathbf{d}_{n,n-1})-1)} \cdots z_{n-1}^{\sigma(\deg(\mathbf{d}_{n,1})-1)} z_n^{\sigma(\deg(\mathbf{d}_{n,0})-1)}$$

ein Vertreter der Fundamentalklasse von $\mathbb{F}[V]/\natural(\mathrm{GL}(n;\mathbb{F}))$. Falls

$$\alpha_S := \big|\{\sigma \in S : \mathrm{sgn}(\sigma) = 1\}\big| - \big|\{\sigma \in S : \mathrm{sgn}(\sigma) = -1\}\big| \not\equiv 0 \,\mathbf{MOD}\, p$$

ist, so ist auch

$$\sum_{\sigma\in S} z_1^{\sigma(\deg(\mathbf{d}_{n,n-1})-1)} \cdots z_{n-1}^{\sigma(\deg(\mathbf{d}_{n,1})-1)} z_n^{\sigma(\deg(\mathbf{d}_{n,0})-1)}$$

ein Fundamentalklassenvertreter. Allgemein ist jede Summe

$$\sum_{\sigma\in\Sigma_n} \varepsilon_\sigma z_1^{\sigma(\deg(\mathbf{d}_{n,n-1})-1)} \cdots z_{n-1}^{\sigma(\deg(\mathbf{d}_{n,1})-1)} z_n^{\sigma(\deg(\mathbf{d}_{n,0})-1)}$$

mit $\varepsilon_\sigma \in \{-1, 0, 1\}$ ein Fundamentalklassenvertreter, falls

$$\sum_{\sigma\in\Sigma_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\varepsilon_\sigma \not\equiv 0 \,\mathbf{MOD}\, p$$

ist.

BEMERKUNG: Aus diesem Korollar folgt, dass ein einziges Monom als Fundamentalklassenvertreter von $\mathbb{F}[V]_{\mathrm{GL}(n;\mathbb{F})}$ ausreicht, zum Beispiel

$$[\mathbb{F}[V]_{\mathrm{GL}(n;\mathbb{F})}] = z_1^{q^n-q^{n-1}-1} \cdots z_{n-1}^{q^n-q-1} z_n^{q^n-2}.$$

Also ist

$$\begin{aligned}\mathbb{F}[V]_{\mathrm{GL}(n;\mathbb{F})} &\cong \mathrm{Span}_{\mathbb{F}}\{z_1^{\lambda_1}\cdots z_n^{\lambda_n} : 0 \le \lambda_i \le q^n - q^{n-i} - 1,\ i = 1, \dots, n\} \\ &\cong \frac{\mathbb{F}[z_1, \dots, z_n]}{(z_1^{q^n-q^{n-1}}, \dots, z_{n-1}^{q^n-q-1}, z_n^{q^n-2})}.\end{aligned}$$

Diese Isomorphie ist eine $\mathbb{F}$-Vektorraum-Isomorphie.

BEMERKUNG: Dieses Ergebnis bestätigt (oder wird bestätigt durch) Satz 1.3.7.

Eine weitere interessante Beobachtung lässt sich machen.

LEMMA 3.2.3: *Die kleinste Potenz k, so dass*

$$z_i^k \in (\mathbf{d}_{n,0}, \dots, \mathbf{d}_{n,n-1}) = \mathfrak{h}\big(\mathrm{GL}(n;\mathbb{F})\big)$$

liegt, ist $k = q^n - 1$.

BEWEIS: Im Beweis von Satz 2.2.1 wurde die Gleichung

$$-z_i^{q^n} = \mathbf{d}_{n,0} z_i + \mathbf{d}_{n,1} z_i^q + \cdots + \mathbf{d}_{n,n-1} z_i^{q^{n-1}}$$

benutzt, die zeigt (wir teilen auf beiden Seiten durch z_i), dass

$$z_i^{q^n-1} \in (\mathbf{d}_{n,0}, \dots, \mathbf{d}_{n,n-1}) = \mathfrak{h}\big(\mathrm{GL}(n;\mathbb{F})\big)$$

ist. Nach der vorangegangenen Bemerkung ist

$$z_1^{q^n-q^{n-1}-1} \cdots z_{n-1}^{q^n-q-1} z_n^{q^n-2} = z_n^{q^n-1-1} \cdot (z_{n-1}^{q^n-q-1} \cdots z_1^{q^n-q^{n-1}-1}) \neq 0$$

eine Fundamentalklasse für $\mathbb{F}[V]_{\mathrm{GL}(n;\mathbb{F})}$ und deshalb nicht Null. Daher ist $z_{n-1}^{q^n-q-1} \cdots z_1^{q^n-q^{n-1}-1}$ eine Poincaréduale zu $z_n^{q^n-2}$, und das Produkt der beiden ist nicht Null, weshalb auch die Faktoren nicht Null sind in $\mathbb{F}[V]_{\mathrm{GL}(n;\mathbb{F})}$. Daher kann

$$z_n^{q^n-2} \notin (\mathbf{d}_{n,0}, \dots, \mathbf{d}_{n,n-1}) = \mathfrak{h}\big(\mathrm{GL}(n;\mathbb{F})\big)$$

sein. Das gleiche Argument funktioniert für alle $z_i^{q^n-2}$ $(i = 1, \dots, n-1)$, wenn jeweils ein geeigneter Fundamentalklassenvertreter gewählt wird (was nach Korollar 3.2.2 möglich ist). □

Gehen wir nun zur Bestimmung der Macaulay-Inversen des Ideals

$$\mathfrak{h}(\mathrm{Uni}(n;\mathbb{F})) = (\overline{\mathbb{F}[V]^{\mathrm{Uni}(n;\mathbb{F})}}) = (\mathbf{h}_{n,0}, \dots, \mathbf{h}_{n,n-1})$$

über. Wie in 2.3 gezeigt, ist

$$\mathfrak{h}(\mathrm{Uni}(n;\mathbb{F})) = K = (z_1, z_2^q, \dots, z_n^{q^{n-1}}).$$

Daher ist natürlich auch die Macaulay-Inverse zu $\mathfrak{h}(\mathrm{Uni}(n;\mathbb{F}))$ die gleiche wie zu K und wir erhalten:

SATZ 3.2.4: *Die Macaulay-Inverse zu*

$$\mathfrak{h}(\mathrm{Uni}(n;\mathbb{F})) = (\overline{\mathbb{F}[V]^{\mathrm{Uni}(n;\mathbb{F})}}) \subset \mathbb{F}[V]$$

ist

$$\theta_{\mathfrak{h}}(\mathrm{Uni}(n;\mathbb{F})) = z_2^{-(q-1)} z_3^{-(q^2-1)} \cdots z_n^{-(q^{n-1}-1)} \in \mathbb{F}[z_1^{-1}, \dots, z_n^{-1}].$$

Und als mögliche Fundamentalklassenvertreter gibt es in diesem Fall nur einen.

FOLGERUNG 3.2.5: *Die Fundamentalklasse von $\mathbb{F}[V]_{\mathrm{Uni}(n;\mathbb{F})}$ wird eindeutig (bis auf skalare Vielfache ungleich 0) vertreten von*

$$[\mathbb{F}[V]_{\mathrm{Uni}(n;\mathbb{F})}] = z_2^{q-1} z_3^{q^2-1} \cdots z_n^{q^{n-1}-1}.$$

Die Macaulay-Inverse des von den elementarsymmetrischen Polynomen erzeugten Ideals wird in Abschnitt 3.4 berechnet.

3.3 Macaulay-Inverse für Frobenius-Potenzen

In diesem Abschnitt wollen wir weitere Macaulay-Inverse ausrechnen, und zwar zu Frobenius-Potenzen von Idealen. Frobenius-Potenzen von Idealen und auch ihre Macaulay-Inversen werden in [15], Abschnitt II.6, vorgestellt, betrachtet und teilweise ausgerechnet, ich steige hier aber etwas tiefer in die genaue Berechnung ein.

Sei im Weiteren immer p die Charakteristik von $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$, dem Körper mit q Elementen, wobei $q = p^\nu$ ist.

DEFINITION: *Sei $I \subseteq \mathbb{F}[V]$ ein Ideal. Dann ist die q^s-te* **Frobenius-Potenz** *von I das Ideal aller q^s-ten Potenzen von Elementen aus I und wird mit $I^{[q^s]}$ bezeichnet.*

LEMMA 3.3.1: *Sei wieder $I \subseteq \mathbb{F}[V]$ ein Ideal und $h_1, \ldots, h_r \in \mathbb{F}[V]$ ein Erzeugersystem für I. Dann ist*

$$I^{[q^s]} = (h_1^{q^s}, \ldots, h_r^{q^s}).$$

BEWEIS: Sei $f \in I^{[q^s]}$. Nach Definition der Frobenius-Potenz eines Ideals gibt es dann ein $F \in \mathbf{I}$ so dass

$$f = F^{q^s}.$$

Da $F \in I$ gibt es $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{F}[V]$, so dass

$$F = \sum_{i=1}^{n} a_i h_i$$

ist. Dann gilt für f:

$$f = F^{q^s} = (\sum_{i=1}^{n} a_i h_i)^{q^s} = \sum_{i=1}^{n} a_i^{q^s} h_i^{q^s}.$$

Also erzeugen $h_1^{q^s}, \ldots, h_n^{q^s}$ die Frobenius-Potenz $I^{[q^s]}$. □

Wir können nun leicht folgern:

KOROLLAR 3.3.2: *Sei $I = (z_1^{k_1}, \dots, z_n^{k_n}) \subseteq \mathbb{F}[V]$ ein Ideal. Dann ist*

$$\theta_{I^{[q^s]}} = z_1^{-(k_1 q^s - 1)} \cdots z_n^{-(k_n q^s - 1)}.$$

BEWEIS: Nach Lemma 3.3.1 folgt die Behauptung nach Anwendung von Lemma 3.1.3. □

Seien nun $h_1, \dots, h_n$ und $f_1, \dots, f_n$ Regulärfolgen in $\mathbb{F}[z_1, \dots, z_n]$ und

$$K = (h_1, \dots, h_n) \subset L = (f_1, \dots, f_n).$$

Dann gibt es also $a_{ij} \in \mathbb{F}[z_1, \dots, z_n]$ so dass

$$\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

ist. Sei $A := (a_{ij})$. Gemäß Theorem 2.1.6 ist dann

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

eine Übergangsinvariante für L über K. Kennen wir also die Macaulay-Inverse zu K, dann liefert uns das $K-L$-Paradigma 3.1.5:

$$\begin{aligned} \theta_L &= \theta_K \cap \det(A) \\ &= \theta_K \cap \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \theta_K \cap a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}. \end{aligned}$$

Betrachten wir nun die Frobenius-Potenzen von K und L. Aufgrund des Lemmas und weil es sich um q-Potenzen handelt sehen wir, dass

$$K^{[q^s]} \subset L^{[q^s]} \tag{$\clubsuit$}$$

und

$$\begin{bmatrix} h_1^{q^s} \\ h_2^{q^s} \\ \vdots \\ h_n^{q^s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^{q^s} & a_{12}^{q^s} & \cdots & a_{1n}^{q^s} \\ a_{21}^{q^s} & a_{22}^{q^s} & \cdots & a_{2n}^{q^s} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^{q^s} & a_{n2}^{q^s} & \cdots & a_{nn}^{q^s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1^{q^s} \\ f_2^{q^s} \\ \vdots \\ f_n^{q^s} \end{bmatrix} \tag{$\spadesuit$}$$

ist. Das nun folgende Lemma liefert eine nützliche Beziehung zwischen der Determinante von $A = (a_{ij})$ und der von $(a_{ij}^{q^s})$.

LEMMA 3.3.3: *Für die Determinante von quadratischen Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{F}$ gilt:*

$$\det\left(\begin{bmatrix} a_{11}^{q^s} & \cdots & a_{1n}^{q^s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^{q^s} & \cdots & a_{nn}^{q^s} \end{bmatrix}\right) = \det^{q^s}\left(\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\right).$$

BEWEIS: Der Beweis wird einfach durchgerechnet:

$$\begin{aligned} \det\left(\begin{bmatrix} a_{11}^{q^s} & \cdots & a_{1n}^{q^s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^{q^s} & \cdots & a_{nn}^{q^s} \end{bmatrix}\right) &= \sum_{\sigma\in\Sigma_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)}^{q^s} \cdots a_{n\sigma(n)}^{q^s} \\ &= \sum_{\sigma\in\Sigma_n} (\operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)})^{q^s}, \end{aligned}$$

wobei sich die Klammer auch um das $\operatorname{sgn}(\sigma)$ klammern lässt, denn falls q gerade ist, verschwindet das Vorzeichen, und falls q ungerade ist, ist $(-1)^{q^s} = -1$. Weil es sich um q-Potenzen handelt, dürfen wir sie auch ganz nach außerhalb der Summe ziehen und erhalten damit die Behauptung. □

Damit erhalten wir $\det^{q^s}(A)$ aufgrund der Gleichung (♠) als Übergangsinvariante für $L^{[q^s]}$ über $K^{[q^s]}$ und es gilt wegen des $K-L$-Paradigmas 3.1.5:

SATZ 3.3.4: *Mit den bisherigen Bezeichnungen ergibt sich für die Macaulay-Inverse $\theta_{L^{[q^s]}}$ der Frobenius-Potenz $L^{[q^s]}$ eines Ideals $L \subset \mathbb{F}[V]$ bei bekanntem θ_K:*

$$\theta_{L^{[q^s]}} = \theta_{K^{[q^s]}} \cap \det^{q^s}(A).$$

Damit haben wir eine allgemeine Information über die Macaulay-Inverse einer Frobenius-Potenz. Ist über die Ideale mehr bekannt, lässt sich auch Genaueres über die Macaulay-Inversen sagen. Dafür benötigen wir aber zunächst das folgende vorbereitende Lemma das zeigt, dass sich das $\cap$-Produkt gegenüber q-Potenzen genauso verhält wie das "normale" Produkt.

LEMMA 3.3.5: *Seien $b_1, \dots, b_r \in \mathbb{F}[z_1, \dots, z_n]$ Polynome in $z_1, \dots, z_n$ und $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{F}[z_1^{-1}, \dots, z_n^{-1}]$ Polynome in $z_1^{-1}, \dots, z_n^{-1}$. Dann ist*

$$\sum_{i=1}^{r} b_i^{q^s} \cap \sum_{j=1}^{k} c_j^{q^s} = (\sum_{i=1}^{r} b_i \cap \sum_{j=1}^{k} c_j)^{q^s}.$$

BEWEIS: Da

$$\sum_{i=1}^{r} b_i^{q^s} \cap \sum_{j=1}^{k} c_j^{q^s} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{k} b_i^{q^s} \cap c_j^{q^s}$$

ist, reicht es, $b_i^{q^s} \cap c_j^{q^s}$ zu betrachten. b_i und c_j sind Summen von Monomen aus den jeweiligen Ringen, also

$$b_i = \sum_{\alpha=1}^{\gamma_b} b_{i\alpha} \text{ und } c_j = \sum_{\beta=1}^{\gamma_c} c_{j\beta}\,.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} b_i^{q^s} \cap c_j^{q^s} &= \sum_{\alpha=1}^{\gamma_b} b_{i\alpha}^{q^s} \cap \sum_{\beta=1}^{\gamma_c} c_{j\beta}^{q^s} \\ &= \sum_{\alpha=1}^{\gamma_b}\sum_{\beta=1}^{\gamma_c} b_{i\alpha}^{q^s} \cap c_{j\beta}^{q^s}\,. \end{aligned}$$

$b_{i\alpha}$ und $c_{j\beta}$ sind Monome, es ist $b_{i\alpha} = z_1^{\alpha_{i1}} \cdots z_n^{\alpha_{in}}$ und $c_{j\beta} = z_1^{-\beta_{j1}} \cdots z_n^{-\beta_{jn}}$, mit $\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{in}, \beta_{j1}, \dots, \beta_{jn} \in \mathbb{N}_0$. Wenden wir nun die Definition des $\cap$-Produkts an:

$$\begin{aligned} &b_{i\alpha}^{q^s} \cap c_{j\beta}^{q^s} = \\ &= \begin{cases} z_1^{q^s\alpha_{i1}-q^s\beta_{j1}} \cdots z_n^{q^s\alpha_{in}-q^s\beta_{jn}} & \text{falls } q^s\alpha_{i1}-q^s\beta_{j1}, \dots, q^s\alpha_{in}-q^s\beta_{jn} \le 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \begin{cases} (z_1^{\alpha_{i1}-\beta_{j1}} \cdots z_n^{\alpha_{in}-\beta jn})^{q^s} & \text{falls } \alpha_{i1}-\beta_{j1}, \dots, \alpha_{in}-\beta_{jn} \le 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ &= (b_{i\alpha} \cap c_{j\beta})^{q^s}\,. \end{aligned}$$

Setzen wir das zurück ein, erhalten wir dank der q-Potenzen die Behauptung. □

Falls nun K ein Ideal aus "ungemischten" Monomen ist, lässt sich die Macaulay-Inverse von $L^{[q^s]}$ noch expliziter angeben. Da L von einer Regulärfolge erzeugt wird, wird $L^{[q^s]}$ das auch, somit ist $\mathbb{F}[V]/L^{[q^s]}$ total endlich und daher muss es ein Ideal $K = (z_1^{k_1}, \dots, z_n^{k_n})$ geben, das in L enthalten ist, so dass nach (♣) auch

$$K^{[q^s]} = (z_1^{k_1 q^s}, \dots, z_n^{k_n q^s}) \subseteq L^{[q^s]}$$

ist.

SATZ 3.3.6: *Falls $K^{[q^s]} = (z_1^{k_1 q^s}, \dots, z_n^{k_n q^s}) \subset L^{[q^s]}$ ist, dann ist*

$$\theta_{L^{[q^s]}} = (z_1 \cdots z_n) \cap \left(\det(A) \cap z_1^{-k_1} \cdots z_n^{-k_n}\right)^{q^s}$$

wobei $\det(A)$ *die aus der Determinante der Übergangsmatrix für L über K gewonnene Übergangsinvariante für L über K ist.*

BEWEIS: Zunächst ist

$$\theta_K = z_1^{-k_1+1} \cdots z_n^{-k_n+1}$$

und

$$\begin{aligned}\theta_{K^{[q^s]}} &= z_1^{-q^s k_1+1} \cdots z_n^{-q^s k_n+1}\\ &= z_1^{-q^s k_1+q^s-q^s+1} \cdots z_n^{-q^s k_n+q^s-q^s+1}\\ &= z_1 \cdots z_n \cap (z_1 \cdots z_n)^{-q^s} \cdot (z_1^{-k_1+1} \cdots z_n^{-k_n+1})^{q^s}\\ &= z_1 \cdots z_n \cap (z_1^{-1} \cdots z_n^{-1} \cdot z_1^{-k_1+1} \cdots z_n^{-k_n+1})^{q^s}\\ &= z_1 \cdots z_n \cap (z_1^{-1} \cdots z_n^{-1} \cdot \theta_K)^{q^s}.\end{aligned}$$

Damit ergibt sich nach Satz 3.3.4:

$$\begin{aligned}\theta_{L^{[q^s]}} &= \theta_{K^{[q^s]}} \cap \det^{q^s}(A)\\ &= (z_1 \cdots z_n \cap (z_1^{-1} \cdots z_n^{-1} \cdot \theta_K)^{q^s}) \cap \det^{q^s}(A).\end{aligned}$$

Die $\mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n]$-Moduleigenschaft von $\mathbb{F}[z_1^{-1}, \ldots, z_n^{-1}]$ und Lemma 3.3.5 erlauben uns nun, umzuklammern und dann das q^s nach außen zu ziehen:

$$\theta_{L^{[q^s]}} = z_1 \cdots z_n \cap \left(z_1^{-1} \cdots z_n^{-1} \cap \theta_K \cap \det(A)\right)^{q^s},$$

was nach Einsetzen von θ_K auf die Behauptung führt. □

In dem Beweis wird deutlich, dass $\det(A) \cap z_1^{-k_1} \cdots z_n^{-k_n}$ eine wichtige Rolle spielt, daher soll der Ausdruck eine eigene Bezeichnung erhalten:

DEFINITION: *Sei* $K = (z_1^{k_1}, \ldots, z_n^{k_n}) \subset L = (f_1, \ldots, f_n) \subset \mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n]$ *und* $A \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n])$ *so, dass*

$$[z_1^{k_1}, \ldots, z_n^{k_n}]^{tr} = A \cdot [f_1, \ldots, f_n]^{tr}$$

ist (wobei $[\ldots]^{tr}$ *den transponierten Vektor beschreibt). Dann bezeichne*

$$\theta_{LK} := \det(A) \cap z_1^{-k_1} \cdots z_n^{-k_n}$$

die **Übergangsklasse** *für* L *über* K.

Damit kann der vorangehende Satz umformuliert werden.

KOROLLAR 3.3.7: *Mit den Bezeichnungen aus der Definition gilt:*

(i) $\theta_L = z_1 \cdots z_n \cap \theta_{LK}$.

(ii) $\theta_{L^{[q^s]}} = z_1 \cdots z_n \cap \theta_{LK}^{q^s}$.

(iii) $\theta_{L^{[q^s]}K^{[q^s]}} = \theta_{LK}^{q^s}$.

(iv) $\theta_{L^{[q^s]}} = (z_1 \cdots z_n)^{-q+1} \cdot \theta^q_{L^{[q^{s-1}]}}$.

BEWEIS: (i) und (ii) sind nach dem Vorhergehenden klar. (iii) folgt direkt aus (ii). Somit muss nur zu (iv) etwas gesagt werden. Nach (ii) ist

$$\theta_{L^{[q^{s-1}]}} = z_1 \cdots z_n \cap \theta_{LK}^{q^{s-1}},$$

und daher

$$\theta_{L^{[q^{s-1}]}}^q = (z_1 \cdots z_n)^q \cap \theta_{LK}^{q^s},$$

woraus sich nach Multiplikation mit $(z_1 \cdots z_n)^{-q+1}$ die Behauptung ergibt.

□

Wenden wir uns nun einem spezielleren Fall der Übergangsmatrix für L über K zu, nämlich dem, in dem $a_{ij} = z_i^{\lambda_j}$ ist. Dabei muss für alle i und j gelten, dass $\lambda_j < k_i$ ist, denn sonst könnte $K = (z_1^{k_1}, \ldots, z_n^{k_n})$ nicht in $L = (f_1, \ldots, f_n)$ enthalten sein. In diesem Fall erhalten wir die Determinante der Übergangsmatrix:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \operatorname{sgn}(\sigma) z_1^{\sigma(\lambda_1)} \cdots z_n^{\sigma(\lambda_n)}.$$

Wir erhalten dann als weitere Folgerung aus Satz 3.3.6:

KOROLLAR 3.3.8: *Sei $K = (z_1^{k_1}, \ldots, z_n^{k_n}) \subset L = (f_1, \ldots, f_n)$ und es gebe eine Übergangsmatrix A für L über K der Form $A = (a_{ij}) = (z_i^{\lambda_j})$. Dann ist*

(i) $\theta_{LK} = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \operatorname{sgn}(\sigma) z_1^{-k_1+\sigma(\lambda_1)} \cdots z_n^{-k_n+\sigma(\lambda_n)}$.

(ii) $\theta_L = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \operatorname{sgn}(\sigma) z_1^{-k_1+\sigma(\lambda_1)+1} \cdots z_n^{-k_n+\sigma(\lambda_n)+1}$.

(iii) $\theta_{L^{[q^s]}} = z_1 \cdots z_n \cap \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \left(\operatorname{sgn}(\sigma) z_1^{-k_1+\sigma(\lambda_1)} \cdots z_n^{-k_n+\sigma(\lambda_n)}\right)^{q^s}$.

BEMERKUNG: Das ist natürlich das gleiche Ergebnis wie in [15], II.7.5:

$$\begin{aligned}
\theta_{L^{[q^s]}} &= z_1 \cdots z_n \cap \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \left(\operatorname{sgn}(\sigma) z_1^{-k_1+\sigma(\lambda_1)} \cdots z_n^{-k_n+\sigma(\lambda_n)}\right)^{q^s} \\
&= z_1 \cdots z_n \cap \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \operatorname{sgn}(\sigma) z_1^{(-k_1+\sigma(\lambda_1))q^s} \cdots z_n^{(-k_n+\sigma(\lambda_n))q^s} \\
&= z_1 \cdots z_n \cap \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \operatorname{sgn}(\sigma) (z_1 \cdots z_n)^{-q^s} z_1^{(-k_1+\sigma(\lambda_1)+1)q^s} \cdots z_n^{(-k_n+\sigma(\lambda_n)+1)q^s} \\
&= (z_1 \cdots z_n)^{-q^s+1} \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \left(z_1^{k_1-\sigma(\lambda_1)-1} \cdots z_n^{k_n-\sigma(\lambda_n)-1}\right)^{-q^s}.
\end{aligned}$$

Die letzte Zeile ist die, die in [15] steht.

3.4 Rechenbeispiele und konkrete Macaulay-Inverse

In diesem Abschnitt werden wir mit Hilfe der Sätze aus dem vorigen Abschnitt die Macaulay-Inversen von Frobenius-Potenzen einiger bekannter Ideale berechnen. Für einige Spezialfälle lässt sich daraus sogar die Macaulay-Inverse eines Ideals, das keine “volle” Frobenius-Potenz ist (das heißt, es werden nicht alle Erzeuger mit q^s potenziert), herleiten.

Frobenius-Potenzen des Dickson-Ideals

In 3.2 wurde die Macaulay-Inverse zu

$$\mathfrak{h}(\mathrm{GL}(n;\mathbb{F})) = (\mathbf{d}_{n,o}, \ldots, \mathbf{d}_{n,n-1})$$

mit

$$K = (z_1^{q^n}, \ldots, z_n^{q^n})$$

berechnet Dabei war die Übergangsmatrix für $\mathfrak{h}(\mathrm{GL}(n;\mathbb{F}))$ über K die Matrix

$$A = (a_{ij}) = (z_i^{q^{n-j}}).$$

Gemäß Definition (oder nach Korollar 3.3.8) erhalten wir dann die Übergangsklasse von $\mathfrak{h}(\mathrm{GL}(n;\mathbb{F}))$ nach K:

$$\theta_{\mathfrak{h}(\mathrm{GL}(n;\mathbb{F}))K} = \sum_{\sigma\in\Sigma_n} \mathrm{sgn}(\sigma) z_1^{\sigma(-(q^n-q^{n-1}))} \cdots z_n^{\sigma(-(q^n-1))},$$

und können weiterhin mit 3.3.8 die Macaulay-Inverse von $\mathfrak{h}(\mathrm{GL}(n;\mathbb{F}))^{[q^s]}$ ausrechnen:

$$\begin{aligned}
\theta_{\mathfrak{h}(\mathrm{GL}(n;\mathbb{F}))^{[q^s]}} &= z_1 \cdots z_n \cap \theta^{q^s}_{\mathfrak{h}(\mathrm{GL}(n;\mathbb{F}))K} \\
&= z_1 \cdots z_n \cap \sum_{\sigma\in\Sigma_n} \left(\mathrm{sgn}(\sigma) z_1^{\sigma(-(q^n-q^{n-1}))} \cdots z_n^{\sigma(-(q^n-1))}\right)^{q^s} \\
&= \sum_{\sigma\in\Sigma_n} \mathrm{sgn}(\sigma) z_1^{\sigma(-(q^{n+s}-q^{n+s-1}-1))} \cdots z_n^{\sigma(-(q^{n+s}-2))}
\end{aligned}$$

was in der Schreibweise von [15] auch als

$$\theta_{\mathfrak{h}(\mathrm{GL}(n;\mathbb{F}))^{[q^s]}} = (z_1 \cdots z_n)^{-(q^s-1)} \cap \sum_{\sigma\in\Sigma_n} \left(\mathrm{sgn}(\sigma) z_1^{\sigma(q^n-q^{n-1}-1)} \cdots z_n^{\sigma(q^n-2))}\right)^{-q^s}$$

geschrieben werden kann.

Frobenius-Potenzen der elementarsymmetrischen Polynome

Zu $\mathfrak{h}(\Sigma_n) = (e_1, \ldots, e_n)$ haben wir die Macaulay-Inverse noch nicht berechnet. Dank der Sätze aus Abschnitt 3.3 geht das jetzt aber ganz leicht (auch, wenn es ohne die vorbereitenden Sätze eher einfacher als die Berechnung der Macaulay-Inversen des Dickson-Ideals ist, ist es eine schöne Anwendung von Abschnitt 3.3).

Wie finden wir das passende Ideal $K \subset \mathfrak{h}(\Sigma_n)$ und die Übergangsmatrix zwischen den beiden? Das ist in diesem Fall recht leicht und ähnlich wie beim Dickson-Ideal. Wir betrachten die erzeugende Funktion der elementarsymmetrischen Polynome:

$$\varphi(X) := \prod_{i=1}^{n}(X + z_i) = \sum_{i=0}^{n} e_i X^{n-i} = X^n + e_1 X^{n-1} + \cdots + e_n .$$

Dann sind $-z_1, \ldots, -z_n$ Nullstellen von φ, also ist für $i = 1, \ldots, n$

$$-z_i^n = e_1 z_i^{n-1} + \cdots + e_n .$$

Dann ist $K = (z_1^n, \ldots, z_n^n) \subset \mathfrak{h}(\Sigma_n)$ und wir erhalten als Übergangsmatrix für $\mathfrak{h}(\Sigma_n)$ über K die Matrix $A = (a_{ij}) = (z_i^{n-j})$, so dass

$$-[z_1^n, \ldots, z_n^n]^{tr} = A[e_1, \ldots, e_n]^{tr}$$

ist. Das ergibt nach Korollar 3.3.8 die Übergangsklasse

$$\theta_{\mathfrak{h}(\Sigma_n)K} = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \operatorname{sgn}(\sigma) z_1^{\sigma(-1)} \cdots z_n^{\sigma(-n)}$$

und weiterhin

$$\theta_{\mathfrak{h}}(\Sigma_n) = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \operatorname{sgn}(\sigma) z_1^{\sigma(0)} \cdots z_n^{\sigma(-(n-1))},$$

die Frobenius-Potenzen ergeben sich zu

$$\begin{aligned}
\theta_{\mathfrak{h}(\Sigma_n)^{[q^s]}} &= z_1 \cdots z_n \cap \theta^{q^s}_{\mathfrak{h}(\Sigma_n)K} \\
&= z_1 \cdots z_n \cap \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\big(z_1^{\sigma(-1)} \cdots z_n^{\sigma(-n)}\big)^{q^s} \\
&= \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \operatorname{sgn}(\sigma) z_1^{\sigma(-(q^s-1))} z_2^{\sigma(-(2q^s-1))} \cdots z_n^{\sigma(-(nq^s-1))} \\
&= (z_1 \cdots z_n)^{-(q^s-1)} \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\big(z_1^{\sigma(0)} \cdots z_n^{\sigma(n-1)}\big)^{-q^s} .
\end{aligned}$$

Dabei wurde $\theta_{\mathfrak{h}(\Sigma_n)^{[q^s]}}$ in verschiedenen Formen dargestellt, es erweist sich oft, je nach Situation, eine als besser handzuhaben als andere.

Da $e_n = z_1 \cdots z_n$ ein Monom ist, lässt sich hier noch die Macaulay-Inverse zu einem Ideal berechnen, das keine "volle" Frobenius-Potenz ist: Sei

$$\mathfrak{h}(\Sigma_n) = (e_1^{q^s}, \ldots, e_{n-1}^{q^s}, e_n^{q^s-a}),$$

wobei $0 \le a \le q^s$ ist und das kleine Ideal

$$K = (e_1^{q^s}, \ldots, e_n^{q^s}) \subset \mathfrak{h}(\Sigma_n)$$

ist. Die Übergangsmatrix hat dann die einfache Form, dass auf der Diagonale nur Einsen stehen bis auf an der letzten Stelle, dort steht e_n^a, und sonst überall Nullen.

Damit ist die Übergangsinvariante für $\natural(\Sigma_n)$ über $\mathbb{F}[V]/K$

$$\det(A) = e_n^a = (z_1 \cdots z_n)^a$$

und nach dem $K - L$-Paradigma 3.1.5 ist

$$\begin{aligned}\theta_{\natural}(\Sigma_n) &= e_n^a \cap \theta_K \\ &= (z_1 \cdots z_n)^a \cap (z_1 \cdots z_n)^{-q^s+1} \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \left(\operatorname{sgn}(\sigma) z_1^{\sigma(0)} \cdots z_n^{\sigma(n-1)}\right)^{-q^s} \\ &= (z_1 \cdots z_n)^{-(q^s-a-1)} \cap \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \left(\operatorname{sgn}(\sigma) z_1^{\sigma(0)} \cdots z_n^{\sigma(n-1)}\right)^{-q^s} \\ &= \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \left(\operatorname{sgn}(\sigma) z_1^{\sigma(-(q^s-a-1))} z_2^{\sigma(-(2q^s-a-1))} \cdots z_n^{\sigma(-(nq^s-a-1))}\right)^{-q^s}.\end{aligned}$$

Damit steht die Macaulay-Inverse hier auch wieder in verschiedenen Formen, so dass bei weiterer Anwendung die gerade am besten passende benutzt werden kann.

Das von den Invarianten der unipotenten Gruppe erzeugte Ideal

Bereits in Abschnitt 3.2 haben wir die Macaulay-Inverse zu

$$\natural(\mathrm{Uni}(n;\mathbb{F})) = (\overline{\mathbb{F}[V]^{\mathrm{Uni}(n;\mathbb{F})}}) = (\mathbf{h}_{n,0}, \ldots, \mathbf{h}_{n,n-1})$$

berechnet. Da nach Lemma 2.3.4 $\natural(\mathrm{Uni}(n;\mathbb{F})) = K = (z_1, z_2^q, \ldots, z_n^{q^{n-1}})$ sich als Monomideal schreiben lässt, folgt mit Korollar 3.3.2:

$$\theta_{\natural(\mathrm{Uni}(n;\mathbb{F}))^{[q^s]}} = z_1^{-(q^s-1)} z_2^{-(q^{s+1}-1)} \cdots z_n^{-(q^{s+n-1}-1)}.$$

3.5 Beispiele zu den Stiefel-Whitney-Klassen

Wir wenden uns nun einem ganz speziellen Beispiel zu. In diesem Abschnitt sei $n = 3$ und $q = 2$. Die Stiefel-Whitney-Klassen w_2, w_3, w_4 entstehen indem aus $\mathbb{F}[w, x, y, z]^{\Sigma_4} = \mathbb{F}[e_1, \ldots, e_4]$, was eine Algebra der Krulldimension 4 ist, das von e_1 erzeugte Ideal herausgeteilt. Übrig bleibt eine Algebra der Krulldimension 3:

$$\mathbb{F}[w_2, w_3, w_4] \subset \mathbb{F}[x, y, z],$$

in dem die Basispolynome nach Einsetzen von $e_1 = 0$, das heißt von $w = x + y + z$, in e_2, e_3, e_4 folgende Gestalt haben:

$$\begin{aligned} w_2 &= x^2 + xy + xz + y^2 + yz + z^2, \\ w_3 &= x^2y + x^2z + xy^2 + xz^2 + y^2z + yz^2, \\ w_4 &= x^2yz + xy^2z + xyz^2. \end{aligned}$$

Dann ist

$$L = (w_2, w_3, w_4) \subset \mathbb{F}[x, y, z]$$

ein irreduzibles, $\overline{\mathbb{F}[V]}$-primäres Ideal (diese Eigenschaften erbt es von $(e_1,\dots, e_4)$, dessen Quotient es ja ist), so dass $\mathbb{F}[V]/L$ eine Poincarédualitätsalgebra ist. Aus den Beziehungen für $(w^4, x^4, y^4, z^4) \subset (e_1,\dots, e_4)$ lassen sich die Beziehungen für

$$K = (x^4, y^4, z^4) \subset L$$

herleiten:

$$\begin{bmatrix} x^4 \\ y^4 \\ z^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 & x & 1 \\ y^2 & y & 1 \\ z^2 & z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix}.$$

Also ist

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in\Sigma_3} x^{\sigma(2)} y^{\sigma(1)} z^{\sigma(0)}.$$

Nach Korollar 3.3.8. (i) erhalten wir die Übergangsklasse

$$\theta_{LK} = \sum_{\sigma\in\Sigma_3} x^{\sigma(-2)} y^{\sigma(-3)} z^{\sigma(-4)}, \tag{1}$$

was mit (iii) auf die Macaulay-Inverse von L,

$$\theta_L = \sum_{\sigma\in\Sigma_3} x^{\sigma(-1)} y^{\sigma(-2)} z^{\sigma(-3)}, \tag{2}$$

führt, und auf die Macaulay-Inverse der Frobenius-Potenzen von L:

$$\begin{aligned} \theta_{L^{[2^s]}} &= xyz \cap \theta_{LK}^{2^s} \\ &= \sum_{\sigma\in\Sigma_3} x^{\sigma(-(2\cdot 2^s-1))} y^{\sigma(-(3\cdot 2^s-1))} z^{\sigma(-(4\cdot 2^s-1))}. \end{aligned} \tag{3}$$

Wir wollen nun Macaulay-Inverse zu “Derivaten” von L berechnen, bei denen nur ein oder zwei der w_i mit 2^s potenziert werden. Dabei helfen uns die Sätze aus Abschnitt 3.3 nur soweit sie keine Frobenius-Potenzen betreffen.

Potenzierung eines Erzeugers

Wir betrachten zunächst den Fall

$$L_{s2} = (w_2^{2^s}, w_3, w_4).$$

Dann erhalten wir durch Potenzieren der Gleichungen

$$u^4 = u^2 w_2 + u w_3 + w_4 \qquad (u \in \{x, y, z\})$$

mit 2^s die Beziehung

$$\begin{bmatrix} x^{4\cdot 2^s} \\ y^{4\cdot 2^s} \\ z^{4\cdot 2^s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^{2\cdot 2^s} & x^2 w_3^{2^s-1} & w_4^{2^s-1} \\ y^{2\cdot 2^s} & y^2 w_3^{2^s-1} & w_4^{2^s-1} \\ z^{2\cdot 2^s} & z^2 w_3^{2^s-1} & w_4^{2^s-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_2^{2^s} \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix}.$$

Damit ist

$$(x^{4\cdot 2^s}, y^{4\cdot 2^s}, z^{4\cdot 2^s}) = K^{[2^s]} \subset L_{s2} \tag{4}$$

das kleine Ideal und die oben angegebene Übergangsmatrix wird mit A_{s2} bezeichnet. Ihre Determinante, also die Übergangsinvariante für L_{s2} über $K^{[2^s]}$ ist

$$\begin{aligned}\det(A_{s2}) &= (w_3w_4)^{2^s-1}\sum_{\sigma\in\Sigma_3} x^{\sigma(2\cdot 2^s)}y^{\sigma(2^s)}z^{\sigma(0)}\\ &= (w_3w_4)^{2^s-1}\sum_{\sigma\in\Sigma_3}(x^{\sigma(2)}y^{\sigma(1)}z^{\sigma(0)})^{2^s}\\ &= (w_3w_4)^{2^s-1}\cdot \det{}^{2^s}(A_{s2}).\end{aligned}$$

Wir erhalten also die Übergangsklasse für L_{s2} über $K^{[2^s]}$ gemäß Definition:

$$\theta_{L_{s2}K^{[2^s]}} = (w_3w_4)^{2^s-1}\cdot \det(A)^{2^s} \cap x^{-4\cdot 2^s}y^{-4\cdot 2^s}z^{-4\cdot 2^s},$$

was nach Umklammern und mit Lemma 3.3.5 zu

$$\theta_{L_{s2}K^{[2^s]}} = (w_3w_4)^{2^s-1}\cdot \left(\det(A)\cap x^{-4}y^{-4}z^{-4}\right)^{2^s}$$

wird. Hier finden wir jetzt in der zweiten Klammer genau θ_{LK}, das bedeutet nach Korollar 3.3.7.(iii):

$$\begin{aligned}\theta_{L_{s2}K^{[2^s]}} &= (w_3w_4)^{2^s-1}\cap\theta_{LK}^{2^s}\\ &= (w_3w_4)^{2^s-1}\cap\theta_{L^{[2^s]}K^{[2^s]}}.\end{aligned} \tag{5}$$

Nun berechnen wir mit Korollar 3.3.7.(i) die Macaulay-Inverse von L_{s2}:

$$\begin{aligned}\theta_{L_{s2}} &= xyz\cap\theta_{L_{s2}K^{[2^s]}}\\ &= xyz\cdot(w_3w_4)^{2^s-1}\cap\theta_{L^{[2^s]}K^{[2^s]}}\\ &= (w_3w_4)^{2^s-1}\cdot(xyz\cap\theta_{L^{[2^s]}K^{[2^s]}}).\end{aligned}$$

Wenden wir das gleiche Korollar nochmal auf die Klammer rechts in dem Ausdruck an, erhalten wir, dass

$$\theta_{L_{s2}} = (w_3w_4)^{2^s-1}\cap\theta_{L^{[2^s]}}, \tag{6}$$

wobei $\theta_{L^{[2^s]}} = \sum_{\sigma\in\Sigma_3} x^{\sigma(-(2\cdot 2^s-1))}y^{\sigma(-(3\cdot 2^s-1))}z^{\sigma(-(4\cdot 2^s-1))}$ ist.

BEMERKUNG: Es ist leicht einzusehen, dass diese Rechnung auch für "die anderen" Ideale dieser Art funktioniert:

(i)

$$\begin{aligned}L_{3s} &:= (w_2, w_3^{2^s}, w_4),\\ \theta_{L_{3s}} &= (w_2w_4)^{2^s-1}\cap\theta_{L^{[2^s]}}.\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}L_{4s} &:= (w_2, w_3, w_4^{2^s}),\\ \theta_{L_{4s}} &= (w_2w_3)^{2^s-1}\cap\theta_{L^{[2^s]}}.\end{aligned}$$

(iii)

$$L_{2,3,s} := (w_2^{2^s}, w_3^{2^s}, w_4),$$
$$\theta_{L_{2,3,s}} = w_4^{2^s-1} \cap \theta_{L^{[2^s]}}.$$

(iv)

$$L_{2,4,s} := (w_2^{2^s}, w_3, w_4^{2^s}),$$
$$\theta_{L_{2,4,s}} = w_3^{2^s-1} \cap \theta_{L^{[2^s]}}.$$

(v)

$$L_{3,4,s} := (w_2, w_3^{2^s}, w_4^{2^s}),$$
$$\theta_{L_{3,4,s}} = w_2^{2^s-1} \cap \theta_{L^{[2^s]}}.$$

BEMERKUNG: Der Übergang von s nach $s+1$ lässt sich als Operator beschreiben. Ich zeige das hier exemplarisch wieder an L_{2s}, für die anderen Ideale führen analoge Überlegungen zum Ziel. Nach 3.3.7.(i) und (iii) ist

$$\begin{aligned}\theta_{L_{2,s+1}} &= xyz \cap \theta_{L_{2,s+1}K_{[2^{s+1}]}}\\ &= xyz \cdot (w_3w_4)^{2^{s+1}-1} \cap \theta_{LK}^{2^{s+1}}.\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck kann im vorderen Teil umsortiert und umgeklammert werden und führt zu

$$\theta_{L_{2,s+1}} = xyzw_3w_4 \cap \left((w_3w_4)^{2(2^s-1)} \cap \theta_{LK}^{2\cdot 2^s}\right).$$

Nun darf nach Lemma 3.3.5 die 2 nach außen gezogen werden. Dann bleibt in der Klammer $(w_3w_4)^{2^s-1} \cap \theta_{LK}^{2^s} = \theta_{L_{2s}K^{[2^s]}}$ stehen und wir erhalten:

$$\theta_{L_{2,s+1}} = xyzw_3w_4 \cap \theta_{L_{2s}K^{[2^s]}}^2.$$

Wir sehen, dass die Operationen, die nötig sind, um von $\theta_{L_{2s}K^{[2^s]}}$ zu $\theta_{L_{2,s+1}}$ zu kommen, unabhängig von s sind. Daher ist diese Zerlegung der Macaulay-Inversen die Grundlage ihrer Berechnung mit Hilfe eines Operators, die im folgenden Lemma beschrieben wird.

LEMMA 3.5.1: *Der Operator, der $\theta_{L_{2s}}$ auf $\theta_{L_{2,s+1}}$ abbildet, wird wie folgt erklärt:*

$$\begin{aligned}\ell_{2+}:\ \mathbb{F}[x^{-1}, y^{-1}, z^{-1}]_{(-(2^{s+1}+4))} &\longrightarrow \mathbb{F}[x^{-1}, y^{-1}, z^{-1}]_{(-(2^{s+2}+4))}\\ \theta_{L_{2s}} &\longmapsto xyzw_3w_4 \cap \theta_{L_{2s}K^{[2^s]}}^2 = \theta_{L_{2,s+1}}.\end{aligned}$$

Die entsprechenden Operatoren für die anderen Ideale lassen sich genauso erklären.

Mit Hilfe dieses Operators lässt sich auch noch eine sehr konkrete Formel für $\theta_{L_{2s}}$ angeben.

LEMMA 3.5.2: *Die Macaulay-Inverse des Ideals*

$$L_{s2} = (w_2^{2^s}, w_3, w_4) \subset \mathbb{F}[x,y,z]$$

hat folgendes Aussehen:

$$\theta_{L_{2s}} = \sum_{\sigma\in\Sigma_3}\sum_{i=2}^{2^s+1} x^{\sigma(-1)}y^{\sigma(-i)}z^{\sigma(-2^{s+1}-3+i)}.$$

BEWEIS: Der Beweis wird per Induktion über s geführt.

Induktionsanfang: Sei $s = 1$. Nach (5) ist

$$\theta_{L_{2,1}} = w_3w_4 \cap \theta_{L^{[2]}}.$$

Für $\theta_{L^{[2]}}$ setzen wir nach Lemma 3.3.7.(ii) $xyz \cap \theta_{LK}^2$ ein. Nach Ausmultiplizieren ist

$$xyzw_3w_4 = \sum_{\sigma\in\Sigma_3} x^{\sigma(5)}y^{\sigma(3)}z^{\sigma(2)}$$

und θ_{LK} wurde in (1) berechnet. Setzen wir das ein, erhalten wir:

$$\theta_{L_{2,1}} = \sum_{\sigma\in\Sigma_3} x^{\sigma(5)}y^{\sigma(3)}z^{\sigma(2)} \cap \sum_{\sigma\in\Sigma_3} x^{\sigma(-4)}y^{\sigma(-6)}z^{\sigma(-8)}.$$

Hier handelt es sich um ein Produkt von Summen mit jeweils 6 Summanden. Das lässt sich ausmultiplizieren und ergibt

$$\theta_{L_{2,1}} = \sum_{\sigma\in\Sigma_3}\sum_{i=2}^{3} x^{\sigma(-1)}y^{\sigma(-i)}z^{\sigma(-7+i)}.$$

Das ist genau die Behauptung und damit haben wir den Induktionsanfang bewiesen.

Induktionsvoraussetzung: Sei

$$\theta_{L_{2s}} = \sum_{\sigma\in\Sigma_3}\sum_{i=2}^{2^s+1} x^{\sigma(-1)}y^{\sigma(-i)}z^{\sigma(-2^{s+1}-3+i)}.$$

Induktionsschritt: Nach (4) ist $K^{[2^s]} \subset L_{2s}$ und deshalb ist nach Lemma 3.3.7.(i) $\theta_{L_{2s}} = xyz \cap \theta_{L_{2s}K^{[2^s]}}$. Wegen der Induktionsvoraussetzung muss also

$$\theta_{L_{2s}K^{[2^s]}} = \sum_{\sigma\in\Sigma_3}\sum_{i=2}^{2^s+1} x^{\sigma(-2)}y^{\sigma(-(i+1))}z^{\sigma(-(2^{s+1}+4-i))}$$

sein. Laut Lemma 3.5.1 ist $\theta_{L_{2,s+1}} = \ell_{2+}(\theta_{L_{2s}})$, das heißt,

$$\theta_{L_{2,s+1}} = xyzw_3w_4 \cap \theta^2_{L_{2s}K^{[2^s]}}.$$

Hier setzen wir nun $xyzw_3w_4 = \sum_{\sigma\in\Sigma_3} x^{\sigma(5)}y^{\sigma(3)}z^{\sigma(2)}$ und das eben berechnete $\theta_{L_{2s}}$ und erhalten

$$\theta_{L_{2,s+1}} = \sum_{\sigma\in\Sigma_3} x^{\sigma(5)}y^{\sigma(3)}z^{\sigma(2)} \cap \sum_{\sigma\in\Sigma_3}\sum_{i=2}^{2^s+1} x^{\sigma(-4)}y^{\sigma(-2i-2)}z^{\sigma(-2^{s+2}-8+2i)}.$$

Wenn nun die linke Summe ausgeschrieben wird, kann jeder Summand mit der rechten (Doppel-) Summe gestrippt werden und es ergibt sich

$$\begin{aligned}\theta_{L_{2,s+1}} = \sum_{\sigma\in\Sigma_3}\sum_{i=2}^{2^s+1}\big(&x^{\sigma(-1)}y^{\sigma(-2i+3)}z^{\sigma(-2^{s+2}-6+2i)}\\ &+x^{\sigma(-1)}y^{\sigma(-2i)}z^{\sigma(-2^{s+2}-3+2i)}\\ &+x^{\sigma(-2)}y^{\sigma(-2i+3)}z^{\sigma(-2^{s+2}-5+2i)}\\ &+x^{\sigma(-2)}y^{\sigma(-2i+1)}z^{\sigma(-2^{s+2}-3+2i)}\big),\end{aligned}$$

was zugegebenermaßen ein furchtbarer Ausdruck ist. Er wird sich auch innerhalb der nächsten Schritte eher verschlimmern, um zum Schluß doch endlich auf die gesuchte Form gebracht worden zu sein und damit die Behauptung zu beweisen.

Im nächsten Schritt wird im dritten Summand umgeklammert bei den i, um eine Indexverschiebung vorzubereiten, und der dritte und vierte Summand werden getauscht.

$$\begin{aligned}\theta_{L_{2,s+1}} = \sum_{\sigma\in\Sigma_3}\sum_{i=2}^{2^s+1}\big(&x^{\sigma(-1)}y^{\sigma(-2i+3)}z^{\sigma(-2^{s+2}-6+2i)}\\ &+x^{\sigma(-1)}y^{\sigma(-2i)}z^{\sigma(-2^{s+2}-3+2i)}\\ &+x^{\sigma(-2)}y^{\sigma(-2i+1)}z^{\sigma(-2^{s+2}-3+2i)}\\ &+x^{\sigma(-2)}y^{\sigma(-2(i-1)+1)}z^{\sigma(-2^{s+2}-3+2(i-1))}\big).\end{aligned}$$

Nun ziehen wir die Summe über i nach innen und verschieben den Index im vierten Summanden. Dann ist schon zu sehen, dass sich fast alle Summanden der beiden letzten Summen gegenseitig wegheben.

$$\begin{aligned}\theta_{L_{2,s+1}} = \sum_{\sigma\in\Sigma_3}\Big(&\sum_{i=2}^{2^s+1}\big(x^{\sigma(-1)}y^{\sigma(-2i+3)}z^{\sigma(-2^{s+2}-6+2i)}+x^{\sigma(-1)}y^{\sigma(-2i)}z^{\sigma(-2^{s+2}-3+2i)}\big)\\ &+\sum_{i=2}^{2^s+1}x^{\sigma(-2)}y^{\sigma(-2i+1)}z^{\sigma(-2^{s+2}-3+2i)}\\ &+\sum_{i=1}^{2^s}x^{\sigma(-2)}y^{\sigma(-2i+1)}z^{\sigma(-2^{s+2}-3+2i)}\Big).\end{aligned}$$

Von der dritten und vierten Summe bleiben dann nur die beiden Summanden $x^{\sigma(-1)}y^{\sigma(-2)}z^{\sigma(-2^{s+2}-1)}$ ($i = 1$ in der vierten Summe) und

$x^{\sigma(-2)}y^{\sigma(-2^{s+1}-1)}z^{\sigma(-2^{s+1}-1)}$ ($i = 2^s + 1$ in der dritten Summe) übrig. Summiere ich den zweiten dieser beiden Terme aber über alle $\sigma \in \Sigma_3$ auf, taucht jeder Summand in dieser Summe genau zweimal auf, so dass der Term in der Charakteristik 2 am Ende wegfällt und deshalb auch hier gleich weggelassen werden kann.

$$\begin{aligned}\theta_{L_{2,s+1}} = \sum_{\sigma\in\Sigma_3}\Big(&\sum_{i=2}^{2^s+1}\big(x^{\sigma(-1)}y^{\sigma(-2i+3)}z^{\sigma(-2^{s+2}-6+2i)} + x^{\sigma(-1)}y^{\sigma(-2i)}z^{\sigma(-2^{s+2}-3+2i)}\big)\\ &+ x^{\sigma(-1)}y^{\sigma(-2)}z^{\sigma(-2^{s+2}-1)}\Big)\,.\end{aligned}$$

Wenn wir die innere Summe (über i) jetzt einmal ausschreiben werden wir sehen, dass sich das Ganze dann zu dem gesuchten Ausdruck zusammenfassen lässt.

$$\begin{aligned}\theta_{L_{2,s+1}} = \sum_{\sigma\in\Sigma_3}\Big(&x^{\sigma(-1)}y^{\sigma(-1)}z^{\sigma(-2^{s+2}-2)} + x^{\sigma(-1)}y^{\sigma(-4)}z^{\sigma(-2^{s+2}+1)}\\ &+ x^{\sigma(-1)}y^{\sigma(-3)}z^{\sigma(-2^{s+2})} + x^{\sigma(-1)}y^{\sigma(-6)}z^{\sigma(-2^{s+2}+3)}\\ &+ x^{\sigma(-1)}y^{\sigma(-5)}z^{\sigma(-2^{s+2}+2)} + x^{\sigma(-1)}y^{\sigma(-8)}z^{\sigma(-2^{s+2}+5)}\\ &+ \cdots\\ &+ x^{\sigma(-1)}y^{\sigma(-2^{s+1}+5)}z^{\sigma(-2^{s+1}-8)} + x^{\sigma(-1)}y^{\sigma(-2^{s+1}+2)}z^{\sigma(-2^{s+1}-5)}\\ &+ x^{\sigma(-1)}y^{\sigma(-2^{s+1}+3)}z^{\sigma(-2^{s+1}-6)} + x^{\sigma(-1)}y^{\sigma(-2^{s+1})}z^{\sigma(-2^{s+1}-3)}\\ &+ x^{\sigma(-1)}y^{\sigma(-2^{s+1}+1)}z^{\sigma(-2^{s+1}-4)} + x^{\sigma(-1)}y^{\sigma(-2^{s+1}-2)}z^{\sigma(-2^{s+1}-1)}\\ &+ x^{\sigma(-1)}y^{\sigma(-2)}z^{\sigma(-2^{s+2}-1)}\Big)\,.\end{aligned}$$

Der erste Summand in der Klammer kann weggelassen werden: Wird über alle $\sigma \in \Sigma_3$ aufsummiert, tritt jedes Exponententupel genau zweimal auf und hebt sich deshalb, da die Koeffienten aus $\mathbb{F}_2$ kommen, weg. Da wir über alle $\sigma \in \Sigma_3$ aufsummieren, ist die Reihenfolge egal und wir können den letzten Term auch als $x^{\sigma(-1)}y^{\sigma(-2^{s+1}-1)}z^{\sigma(-2^{s+1}-2)}$ schreiben, so dass er "in die Reihe passt". Dann ergibt sich die Summe, wenn wir sie wieder zusammen fassen, zu dem gesuchten Ausdruck:

$$\theta_{L_{2,s+1}} = \sum_{\sigma\in\Sigma_3}\sum_{i=2}^{2^{s+1}+1} x^{\sigma(-1)}y^{\sigma(-i)}z^{\sigma(-2^{s+2}-3+i)}\,.$$

□

BEMERKUNG: Analog lässt sich bei Interesse dieser Beweis auch für die anderen Ideale der Art führen.

Kapitel 4
Stabile $\mathrm{GL}(n;\mathbb{F})$-Invarianten

Wir haben uns bisher hauptsächlich mit Poincarédualitätsalgebren im Allgemeinen beschäftigt. In diesem Kapitel wenden wir uns den speziellen Poincarédualitätsalgebren zu die entstehen, wenn das Augmentierungsideal eines Invariantenrings $\mathbb{F}[V]^G$ aus dem Polynomring $\mathbb{F}[V]$ herausgeteilt wird, und wir lassen die Gruppe G auf diesem Gebilde wieder operieren. Die Anregung zu dieser Untersuchung entstammt der Arbeit [17] von F. Neumann, M.D. Neusel und L. Smith.

4.1 Stabile Invarianten

Zunächst müssen wir uns mit dem in [17] vorgestellten Konzept der stabilen Invarianten vertraut machen.

Sei A eine positiv graduierte zusammenhängende Algebra über einem Körper $\mathbb{F}$ und G eine Gruppe von Algebraautomorphismen. Dann bezeichnet $A^G \subseteq A$ die Unteralgebra der G-invarianten Elemente, und

$$Q_{A^G}(A) = A/\overline{A^G}A \cong \mathbb{F} \otimes_{A^G} A =: A_G$$

sind die unzerlegbaren Elemente von A als A^G-Modul (wobei A durch die Inklusion zum A^G-Modul wird). Da wir hier den Aspekt der Gruppenoperation betonen wollen, benutzen wir in diesem Kontext die Bezeichnung A_G, auch die **Algebra der Koinvarianten** genannt. Da der Kern der Quotient-Abbildung $A \longrightarrow A_G$ G-stabil ist, operiert G auf A_G und es macht Sinn, nach den Invarianten unter dieser Operation auf A_G zu fragen. Wir können also die Konstruktion der Koinvarianten iterieren und definieren induktiv für $m \in \mathbb{N}$:

$$A_{G^m} := (A_{G^{m-1}})_G = A_{G^{m-1}}/\overline{(A_{G^{m-1}})^G}A_{G^{m-1}}\,.$$

(Dabei ist $A_{G^0} = A$ und $A_{G^1} = A_G$.) Wenn wir mit $\natural_m(G) \subset A$ den Kern der natürlichen Abbildung $A \longrightarrow A_{G^m}$ bezeichnen, so formen die Ideale $\mathfrak{h}_m(G)$, $m \in \mathbb{N}$ eine aufsteigende Kette

$$(0) = \mathfrak{h}_0(G) \subseteq \mathfrak{h}_1(G) \subseteq \mathfrak{h}_2(G) \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{h}_m(G) \subseteq \cdots \subset A\,.$$

Dann wird

$$\mathfrak{h}_\infty(G) := \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \mathfrak{h}_m(G)$$

das **Ideal der stabilen Invarianten** genannt und $\mathfrak{h}_1(G) = \mathfrak{h}(G)$, das Hilbert-Ideal, in dem Sinn, in dem es bisher in dieser Arbeit benutzt wurde. Alternativ lässt sich $\mathfrak{h}_m(G)$ auch wie folgt induktiv definieren:

$$\mathfrak{h}_m(G) = \begin{cases} (0) & \text{falls } m = 0 \\ (\{a \in A : \ ga - a \in \mathfrak{h}_{m-1}(G)\}) & \text{falls } m > 0. \end{cases}$$

Falls die Algebra A Noethersch ist, wie zum Beispiel die Polynomalgebra $\mathbb{F}[V]$, wird die Kette der Ideale $\mathfrak{h}_m(G)$ stationär. Die obere Grenze für die Länge der Kette ist der Wert der Poincaréreihe an der Stelle $t = 1$, denn $\mathbf{P}(\mathbb{F}[V]_G; 1) = \dim_{\mathbb{F}}\bigl(\mathrm{Tot}(\mathbb{F}[V]_G)\bigr)$. Im "längsten" Fall verringert sich die Dimension bei jeder Invariantenbildung um 1.

Eine kleine Hilfe bei der Bestimmung der stabilen Invarianten kann der folgende Satz (Proposition 1.3 in [17]) sein, vor allem erleichtert er die Berechnung für den Fall, dass $|G| \in \mathbb{F}^\times$ beträchtlich.

SATZ 4.1.1: *Sei $\varrho : G \hookrightarrow \mathrm{GL}(n;\mathbb{F})$ eine treue Darstellung einer endlichen Gruppe G. Sei $H < G$ eine Untergruppe mit $|H| \in \mathbb{F}^\times$. Dann wird $\mathfrak{h}_m(G)$ für alle $m \in \mathbb{N} \cup \infty$ erzeugt von Elementen von $\overline{\mathbb{F}[V]^H}$. Insbesondere gilt, falls $|G| \in \mathbb{F}^\times$, ist*

$$\mathfrak{h}_1(G) = \mathfrak{h}_2(G) = \cdots = \mathfrak{h}_\infty(G).$$

Auch für p-Gruppen sind die stabilen Invarianten uninteressant, wie der folgende Satz (Proposition 1.8 in [17]) zeigt.

SATZ 4.1.2: *Sei A eine zusammenhängende, positiv graduierte, kommutative Algebra von endlichem Typ über einem Körper der Charakteristik $p \neq 0$. Falls P eine endliche p-Gruppe von Automorphismen von A ist, dann ist*

$$\mathfrak{h}_\infty(P) = (\overline{A}) \subset A\,,$$

beziehungsweise $A_{P^\infty} = \mathbb{F}$.

Sind die Wu-Klassen nicht trivial, haben sie eine interessante Eigenschaft, sie liegen dann nämlich in $(\mathbb{F}[V]_G)^G$, also in $\mathfrak{h}_2(G)$:

SATZ 4.1.3 (R.E. Stong): *Sei G eine endliche Gruppe, $\mathbb{F}$ ein Körper der Charakteristik p und $\mathfrak{h}(G)$ irreduzibel und $(\overline{\mathbb{F}[V]})$-primär. Dann sind die Wu-Klassen von $\mathbb{F}[V]_G$ invariant unter der Operation von G auf $\mathbb{F}[V]_G$,* *das heißt, für alle $g \in G$ ist*

$$g\mathrm{Wu}_i(\mathbb{F}[V]_G) = \mathrm{Wu}_i(\mathbb{F}[V]_G) + \mathfrak{h}(G).$$

BEWEIS: Nach Lemma 1.4.6 ist wegen der vorausgesetzten Eigenschaften von $\mathfrak{h}(G)$ der Koinvariantenring $\mathbb{F}[V]_G$ eine Poincarédualitätsalgebra . Daher sind die Wu-Klassen definiert und es gilt in $\mathbb{F}[V]_G$, falls $i(q-1) + \deg(f) = \text{f–dim}\,(\mathbb{F}[V]_G)$:

$$< \mathcal{P}^i(f) \,|\, [\mathbb{F}[V]_G] > = < f \cdot \mathrm{Wu}_i \,|\, [\mathbb{F}[V]_G] > .$$

Da die Steenrod-Operationen mit der Gruppenoperation kommutieren, gilt für alle $g \in G$:

$$gf \cdot \mathrm{Wu}_i = \mathcal{P}^i(gf) = g\mathcal{P}^i(f) = g(f \cdot \mathrm{Wu}_i) = gf \cdot g\mathrm{Wu}_i\,.$$

Da die Wu_i eindeutig sind je i folgt, dass

$$\mathrm{Wu}_i = g\mathrm{Wu}_i$$

in $\mathbb{F}[V]_G$ sein muss. □

Dieser Satz ist durchaus interessant. Zwar liefert der Satz von Mitchell (2.1.2) die Trivialität der Wu-Klassen einer großen Klasse von Koinvarianten, doch es gibt Invariantenringe, die keine Polynomalgebren sind (wie im Satz von Mitchell gefordert), deren Koinvarianten aber eine Poincarédualitätsalgebra sind. Es könnte also sein, dass solche Koinvarianten nichttriviale Wu-Klassen enthalten. Bisher ist diesbezüglich nichts bekannt.

BEISPIEL 1: Wir betrachten die Vektorinvarianten

$$\mathbb{F}_2\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix}^{\mathbb{Z}/2}.$$

Dabei operiert $\mathbb{Z}/2$ durch die simultane Vertauschung von x_i mit y_i. Es ist leicht zu sehen, dass folgende Polynome invariant sind,

$$x_1 + y_1,\ x_1y_1,\ x_2 + y_2,\ x_2y_2,\ x_1y_2 + x_2y_1$$

und auch keines überflüssig ist zur Erzeugung des Invariantenrings. Aber aufgrund der Beziehung

$$x_2(x_1 + y_1) + x_1(x_2 + y_2) = x_1y_2 + x_2y_1$$

sehen wir, dass nur die ersten vier Polynome nötig sind, um das Hilbertideal zu diesem Invariantenring zu erzeugen. Daher ist

$$\mathbb{F}_2\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} \Big/ \left(\overline{\mathbb{F}_2\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix}^{\mathbb{Z}/2}}\right)$$

eine Poincarédualitätsalgebra , obwohl der Invariantenring nicht die Voraussetzungen des Satzes von Mitchell erfüllt.

In Abschnitt 2.2 wurde bereits gezeigt, dass die Wu-Klassen der Koinvarianten von $\mathrm{GL}(n;\mathbb{F})$ trivial sind. Aber die Gruppe $\mathrm{GL}(n;\mathbb{F})$ wird von keinem der beiden Fälle der Sätze 4.1.1 und 4.1.2 abgedeckt und verspricht deshalb interessante stabile Invarianten. Den Versuch, sich diesen zu nähern, enthalten die nächsten Abschnitte.

4.2 Relative Invarianten in den Koinvarianten

Für den Rest dieses Kapitels sei

$$\mathcal{H} := \mathbb{F}[V]_{\mathrm{GL}(n;\mathbb{F})}.$$

Wir wollen uns dem Thema vorsichtig nähern und einige relative Invarianten in $\mathbb{F}[V]_{\mathrm{GL}(n;\mathbb{F})}$ bestimmen, die Elemente in $(\mathbb{F}[V]_{\mathrm{GL}(n;\mathbb{F})})^{\mathrm{SL}(n;\mathbb{F})}$ sind. Das eine ist die Fundamentalklasse, wie L. Smith in [25] gezeigt hat, denn $\det^{-1}$-relative Invarianz bedeutet natürlich Invarianz unter der Operation von Elementen, deren Determinante 1 ist.

SATZ 4.2.1 (L. Smith): *Sei $G \subseteq \mathrm{GL}(n;\mathbb{F})$ eine endliche Gruppe so dass $\mathbb{F}[V]^G$ eine Polynomalgebra ist. Dann ist die Fundamentalklasse $[\mathbb{F}[V]_G]$ eine $\det^{-1}$-relative Invariante in $\mathbb{F}[V]_G$, das heißt, dass für alle $g \in G$*

$$g\,[\mathbb{F}[V]_G] = \det^{-1}(g) \cdot [\mathbb{F}[V]_G]$$

ist.

BEWEIS: Siehe [25], Theorem 2.1. □

Das nächste Element ist $\det^{-1}$-invariant in $\mathbb{F}[V]$ und bleibt es in den Koinvarianten $\mathbb{F}[V]_{\mathrm{GL}(n;\mathbb{F})}$, da es nicht im Augmentierungsideal des Invariantenrings liegt (sein Grad ist auf alle Fälle zu klein falls $q > 2$ ist). Invariant unter der Operation von $\mathrm{SL}(n;\mathbb{F})$ wird es aus dem gleichen Grund wie die Fundamentalklasse. Die Aussage ist nur eine Umformulierung von Lemma 1.3.8, hier im Hinblick auf das formuliert, was uns in diesem Abschnitt interessiert.

LEMMA 4.2.2: *Sei $q \geq 3$. Die Eulerklasse L_n, vertreten von*

$$\det(Z_{q,n}) := \det\left(\begin{bmatrix} z_1 & z_1^q & \cdots & z_1^{q^{n-1}} \\ z_2 & z_2^q & \cdots & z_2^{q^{n-1}} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ z_n & z_n^q & \cdots & z_n^{q^{n-1}} \end{bmatrix}\right),$$

ist in $\mathbb{F}[V]$ $\det^{-1}$-relativ invariant und bleibt es deshalb auch in $\mathcal{H}$. Sie ist die einzige $\det^{-1}$-relative Invariante in $\mathbb{F}[V]$, die nicht auf $0 \in \mathcal{H}$ abgebildet wird und die einzige $\det$-relative Invariante in $\mathcal{H}_{<\deg(\mathbf{d}_{n,n-1})}$.

BEWEIS: Die Darstellung von L_n haben wir bereits in Lemma 1.3.8 kennengelernt. Dort wurde auch gezeigt, dass $\det(Z_{q,n})$ in $\mathbb{F}[V]$ eine

$\det^{-1}$-relative Invariante ist und dass es das einzige Element der Art ist. Aus Gradgründen wird sie nicht auf $0 \in \mathcal{H}$ abgebildet. □

Die Potenzen der Eulerklasse sind dann $\det^{-k}$-relativ invariante Elemente:

KOROLLAR 4.2.3: *Für $k = 1, \ldots, q-2$ ist $\mathbf{L}_n^k$ eine $\det^{-k}$-relative Invariante, liegt also auch in $(\mathbb{F}[V]_{\mathrm{GL}(n;\mathbb{F})})^{\mathrm{SL}(n;\mathbb{F})}$. Insbesondere ist $\mathbf{L}_n^{q-2}$ det-invariant.*

BEWEIS: Der Beweis ist unter Beachtung des Beweises von Lemma 4.2.2 klar. □

4.3 Invarianten der Koinvarianten von $\mathrm{GL}(n;\mathbb{F})$

Wir wollen uns zunächst mit dem ersten Iterationsschritt, das heißt, mit der Suche nach Invarianten in $\mathcal{H} = \mathbb{F}[V]_{\mathrm{GL}(n;\mathbb{F})}$ beschäftigen. Nach Definition der stabilen Invarianten ist $f \in \mathcal{H}^{\mathrm{GL}(n;\mathbb{F})}$ genau dann, wenn es sich im Kern der Abbildung von $\mathbb{F}[V] \longrightarrow \mathbb{F}[V]_{\mathrm{GL}(n;\mathbb{F})^2}$ befindet. Dieser Kern ist das Ideal $\natural_2(\mathrm{GL}(n;\mathbb{F}))$ und wiederum nach Definition ist $f \in \natural_2(\mathrm{GL}(n;\mathbb{F}))$ genau dann, wenn für alle $g \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{F})$ gilt, dass

$$(g-1)f \in \natural_1(\mathrm{GL}(n;\mathbb{F})) = (\mathbf{d}_{n,0}, \ldots, \mathbf{d}_{n,n-1})$$

ist. Leider werden wir sehr schnell an die Grenzen dessen kommen, was bisher bekannt ist! Wir werden keine Invariante der Koinvarianten ausrechnen und nur für einige Grade feststellen können, dass es in ihnen keine geben kann.

Zunächst lässt sich zeigen, dass es in den kleinen Graden keine Invarianten in $\mathcal{H}$ geben kann.

LEMMA 4.3.1: *Da für alle Grade $k \leq \deg(\mathbf{d}_{n,n-1}) - 1 = q^n - q^{n-1} - 1$ gilt, dass $\mathcal{H}_k = \mathbb{F}[V]_k$, können wir in diesen Graden auch in $\mathcal{H}$ keine $\mathrm{GL}(n;\mathbb{F})$-Invarianten finden, das heißt,*

$$(\mathcal{H}_{\leq q^n - q^{n-1}-1})^{\mathrm{GL}(n;\mathbb{F})} = \mathbb{F}.$$

LEMMA 4.3.2: *In $\mathcal{H}$ gibt es unter der Operation von $\mathrm{GL}(n;\mathbb{F})$ keine Invarianten vom Grad kleiner als dem von $\mathbf{d}_{n,n-2}$, das heißt*

$$\mathcal{H}^{\mathrm{GL}(n;\mathbb{F})}_{<\deg(\mathbf{d}_{n,n-2})} = 0.$$

BEWEIS: Wir wissen schon, dass $\mathcal{H}^{\mathrm{GL}(n;\mathbb{F})}_{\leq q^n - q^{n-1}-1} = \mathbb{F}$ ist. Nehmen wir also an, dass es ein $h \in \mathcal{H}^{\mathrm{GL}(n;\mathbb{F})}$ gibt, $h \not\equiv 0 \in \mathcal{H}$, und $q^n - q^{n-1} \leq \deg(h) = k < q^n - q^{n-2}$. Aus Gradgründen muss dann für alle $g \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{F})$

$$gh = h + f \cdot \mathbf{d}_{n,n-1}$$

sein, mit geeignetem $f \in \mathbb{F}[V]$. Das gilt genau dann, wenn für alle $g \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{F})$:

$$(*) \qquad (g-1)h = f \cdot \mathbf{d}_{n,n-1}.$$

Wir wählen jetzt ein geeignetes $g \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{F})$ aus, für das $(*)$ nicht gilt. Wenn wir ein solches g finden können, muss die Annahme falsch gewesen sein.

Wenn $1_{i,j} \in \mathrm{Mat}(n \times n;\mathbb{F})$ die $(n \times n)$-Matrix bezeichnet, deren Einträge nur Nullen sind bis auf eine 1 an der Stelle (i,j), dann sei für $j = 2,\dots,n$

$$g = g_j := \mathrm{id} + 1_{1,j} \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{F})$$

die Einheitsmatrix mit einer zusätzlichen 1 in der ersten Zeile in der j-ten Spalte. Dann ist $(g_j - 1) = 1_{1,j}$ und daher

$$(g_j - 1)z_i = \begin{cases} 0 & : i \neq 1 \\ z_j & : i = 1 \end{cases},$$

also ist $(g_j - 1)h = \lambda z_j^k$ (mit $\lambda \in \mathbb{F}$) und daher müsste es für alle $j = 2,\dots,n$ ein $f_j \in \mathbb{F}[V]$ geben, so dass

$$\lambda z_j^k = f_j \cdot \mathbf{d}_{n,n-1}$$

ist. Korollar 1.3.4 besagt, dass

$$\mathbf{d}_{n,n-1} = z_1^{q^n - q^{n-1}} + \dots + z_n^{q^n - q^{n-1}} + Rest$$

ist, wobei *Rest* "gemischte" Terme sind (das heißt, Produkte aus mindestens zwei verschiedenen z_j). Es wird nun gezeigt, dass $z_j^k \notin (\mathbf{d}_{n,n-1})$ ist.

Falls $z_j^k \in (\mathbf{d}_{n,n-1})$ wäre, müsste es ein $f \in \mathbb{F}[z_1,\dots,z_n]$ vom Grad $\deg(f) = k - (q^n - q^{n-1})$ geben, so dass $z_j^k = f \cdot \mathbf{d}_{n,n-1}$ ist. Da $\mathbf{d}_{n,n-1}$ nicht von z_j geteilt wird, muss $z_j \mid f$ gelten, also sogar $z_j^k \mid f$. Dann ist aber

$$\deg(f) \geq k \geq q^n - q^{n-1}.$$

Da der Grad von f aber $k - (q^n - q^{n-1})$ ist, ist das ein Widerspruch, also ist $z_j^k \notin (\mathbf{d}_{n,n-1})$ und das Lemma ist bewiesen. □

Damit brauchen die kleinsten Grade nicht auf Invarianten hin untersucht zu werden. Im Folgenden wird ein Kriterium entwickelt das hilft festzustellen, ob es in bestimmten Graden in $\mathbb{F}[V]_{\mathrm{GL}(n;\mathbb{F})}$ überhaupt Invarianten unter der $\mathrm{GL}(n;\mathbb{F})$-Operation geben kann.

LEMMA 4.3.3: *Sei $G \leq \mathrm{GL}(n;\mathbb{F})$ eine endliche Gruppe, $n = \dim_{\mathbb{F}}(V)$ und $(f_1,\dots,f_m) \subset \mathbb{F}[V]$ ein G-stabiles Ideal. G operiere auf*

$$H = \frac{\mathbb{F}[V]}{(f_1,\dots,f_m)}.$$

Dann gilt:

In jedem Grad k, für den es ein $\lambda \neq 1 \in \mathbb{F}^\times$ gibt, für das $\lambda^k \neq 1$ ist, und G enthält das Element

$$g = \begin{bmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{bmatrix},$$

ist $H_k^G = 0$.

BEWEIS: Der Beweis wird durch Widerspruch geführt. Nehmen wir an, dass es ein nichttriviales $h \in H_k^G$ gibt (also $h \neq 0 \in H$). Dann muss für alle $g \in G$

$$gh = h + F, \quad F \in (f_1, \dots, f_m)_k$$

sein, also gilt für

$$g = \begin{bmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{bmatrix}, \text{ mit } \lambda \neq 1 \in \mathbb{F}^\times,$$

also $gh = \lambda^k h$, dass

$$(g-1)h = (\lambda^k - 1)h = a_1 f_1 + \cdots + a_m f_m,$$

für geeignete $a_i \in \mathbb{F}[V]$. Da nach Voraussetzung $\lambda^k \neq 1 \in \mathbb{F}$ ist, darf durch $(\lambda^k - 1)$ geteilt werden und wir erhalten

$$h = \frac{1}{(\lambda^k - 1)}(a_1 f_1 + \cdots + a_m f_m) \in (f_1, \dots, f_m)_k,$$

was bedeutet, dass $h = 0 \in H_k$ ist. Das ist aber ein Widerspruch zur Annahme, da h als nichttrivial vorausgesetzt war. □

KOROLLAR 4.3.4: *Aufgrund des Lemmas (die Notationen werden beibehalten) können mögliche Invarianten nur in folgenden Graden liegen:*

(i) In Graden k, für die gilt, dass es kein $\lambda \in \mathbb{F}^\times$ gibt, so dass $\lambda^k \neq 1$ ist. Da in endlichen Körpern mit $q = p^s$ Elementen jedes Element "hoch $q-1$" die 1 ergibt, es aber für alle Zahlen j, die kleiner als $q-1$ sind, mindestens ein Element λ gibt, für das $\lambda^j \neq 1$ ist (zum Beispiel eine primitive Einheitswurzel der zyklischen Gruppe $\mathbb{F}^\times$), sind auf alle Fälle alle Grade, die von $q-1$ geteilt werden, zu untersuchen.

(ii) Es kann Grade k geben, die nicht von $q-1$ geteilt werden, und für die es somit mindestens ein $\lambda \in \mathbb{F}^\times$ gibt, für das $\lambda^k \neq 1$ gilt, aber das Element

$$g = \begin{bmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{bmatrix}$$

liegt nicht in G. In diesen Graden kann es also Invarianten unter der Operation von G auf $H = \mathbb{F}[V]/(f_1, \dots, f_m)$ geben.

Daraus ergeben sich nun in unserem Fall schon deutlich weniger Grade zu untersuchen, da es in GL(n;$\mathbb{F}$) (falls $q > 2$ ist) Elemente der Form

$$\begin{bmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{bmatrix}, \ \lambda \neq 1,$$

gibt und der Fall (ii) aus dem Korollar nicht greift, da GL(n;$\mathbb{F}$) "groß" genug ist:

SATZ 4.3.5: *Für $\mathcal{H} = \mathbb{F}[V]_{\mathrm{GL}(n;\mathbb{F})}$ gilt: In $\mathcal{H}^{\mathrm{GL}(n;\mathbb{F})}$ ist $\mathcal{H}_k^{\mathrm{GL}(n;\mathbb{F})} = 0$ für alle k, die nicht von $q-1$ geteilt werden. Das bedeutet, dass die Grade $k = a(q-1)$ mit*

$$q^{n-1} + q^{n-2} \leq a \leq \left\lfloor \frac{\text{f–dim}(\mathcal{H}) - 1}{q-1} \right\rfloor, \ a \in \mathbb{N},$$

auf Invarianten untersucht werden müssen.

BEWEIS: Weil $\mathcal{H} = \frac{\mathbb{F}[V]}{(\mathbf{d}_{n,0},\ldots,\mathbf{d}_{n,n-1})}$ sind die Voraussetzungen von Lemma 4.3.3 erfüllt. Da für alle $\lambda \in \mathbb{F}_q^\times$ gilt, dass $\lambda^{q-1} = 1$ ist, müssen die Grade, die von $q-1$ geteilt werden noch untersucht werden. Sei $d :=$ f–dim$(\mathcal{H})$. Nach Lemma 4.3.1 und 4.3.2 reicht es, folgende Grade $k = a(q-1)$ zu untersuchen:

$$q^n - q^{n-2} \leq a(q-1) \leq d-1.$$

Dabei reicht es aus, bis zum Grad $d-1$ zu untersuchen, weil im Grad d nur die Fundamentalklasse sitzt (und ihre skalaren Vielfachen), von der wir bereits wissen, dass sie $\det^{-1}$-relativ invariant (bzw. invariant, falls $q=2$) ist. Teilen wir nun durch $q-1$, erhalten wir die angegebenen Werte für a. □

BEMERKUNG: Hatten wir am Anfang dieses Abschnitts noch $d =$ f–dim$(\mathbb{F}[V]_{\mathrm{GL}(n;\mathbb{F})})$ Grade zu untersuchen, wobei

$$\begin{aligned} d &= \sum_{i=0}^{n-1} \big(\deg(\mathbf{d}_{n-i}) - 1\big) \\ &= (q^n - 1)(n - \frac{1}{q-1}), \end{aligned}$$

also von der Größenordnung her nq^n Grade, so sind es jetzt noch höchstens $\frac{d-1}{q-1} - q^{n-1} - q^{n-2} + 1$, was sich nicht lohnt auszurechnen, aber der dominierende Term ist jetzt $(n-1)q^{n-1}$. Wir haben also etwas gewonnen, aber trotzdem noch nicht viel erreicht, weil immer noch sehr viele Grade übrig bleiben, die untersucht werden müssen, wofür uns noch eine nützliche Handhabe fehlt.

BEMERKUNG: Die folgende, eigentlich naheliegende Rechnung darf nicht gemacht werden: Sei $h \in \mathcal{H}^{\mathrm{GL}(n;\mathbb{F})}$ eine Invariante und $h^\vee$ eine Poincaréduale zu h. Dann bietet sich folgende Rechnung an, die zeigt, dass $h^\vee$ $\det^{-1}$-invariant ist:

$$h \cdot h^\vee = \lambda[\mathcal{H}] \iff h^\vee = \frac{\lambda[\mathcal{H}]}{h},$$

und für alle $g \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{F})$ ergibt sich

$$\begin{aligned} g h^\vee &= \frac{\lambda g[\mathcal{H}]}{gh} \\ &= \frac{(\det(g))^{-1} \cdot \lambda[\mathcal{H}]}{h} \\ &= (\det(g))^{-1} \cdot h^\vee \quad . \end{aligned}$$

Diese Rechnung ist a priori FALSCH, weil es in $\mathcal{H}$ natürlich viele Nullteiler gibt und daher die Kürzungsregeln nicht gelten! Es lasse sich also niemand verführen, auf diese Art und Weise aus bekannten $\det^{-1}$-Invarianten richtige Invarianten ausrechnen zu wollen!

Mit der gleichen Methode wie zum Beweis von Lemma 4.3.3 lässt sich berechnen, in welchen Graden sich $\det^{-1}$-relative Invarianten finden könnten.

LEMMA 4.3.6: *In $\mathcal{H} = \mathbb{F}[V]_{\mathrm{GL}(n;\mathbb{F})}$ gilt für die $\det^r$-relativen Invarianten der Koinvarianten: In jedem Grad k, für den $q-1 \nmid k - nr$ gilt (für $r \in \{1, \ldots, q-2\}$), ist*

$$(\mathcal{H}^{\mathrm{GL}(n;\mathbb{F})}_{\det^r})_k = 0.$$

Falls speziell n von $q-1$ geteilt wird, dann ist in jedem Grad k, für den $q-1 \nmid k$ gilt,

$$(\mathcal{H}^{\mathrm{GL}(n;\mathbb{F})}_{\det^r})_k = 0.$$

BEWEIS: Sei $h \in \mathcal{H}^{\mathrm{GL}(n;\mathbb{F})}_{\det^r}$, $h \not\equiv 0$. Dann muss, analog zum Beweis von Lemma 4.3.3, für alle $g \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{F})$ und $r \in \{1, \ldots, q-2\}$ gelten:

$$gh = (\det(g))^r h + F, \quad F \in \natural(\mathrm{GL}(n;\mathbb{F})),$$

also

$$(g - (\det(g))^r \,\mathrm{id})h \in \natural(\mathrm{GL}(n;\mathbb{F})).$$

Das ergibt mit $g = \begin{bmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{bmatrix}$ für geeignete $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{F}[V]$:

$$(\lambda^k - \lambda^{nr})h = a_0 \mathbf{d}_{n,0} + \cdots + a_{n-1} \mathbf{d}_{n,n-1}.$$

Falls nun $\lambda^k - \lambda^{nr} \neq 0$ ist, können wir teilen und erhalten

$$h = \frac{1}{\lambda^k - \lambda^{nr}}(a_0\mathbf{d}_{n,0} + \cdots + a_{n-1}\mathbf{d}_{n,n-1}) \in \natural(\mathrm{GL}(n;\mathbb{F})),$$

also ist $h \equiv 0 \in \mathcal{H}$, also keine nichttriviale $\det^r$-relative Invariante in $\mathcal{H}$. Das heißt, nur wenn $\lambda^k - \lambda^{nr} = 0$ ist, kann es in $\mathcal{H}_k$ überhaupt $\det^r$-relative Invarianten geben. Wann ist nun $\lambda^k - \lambda^{nr} = 0$? Umstellen ergibt, dass das genau dann der Fall ist, wenn

$$\lambda^{k-nr} \equiv 1 \ \mathbf{MOD}\, q$$

ist, also wenn $k - nr$ von $q - 1$ geteilt wird, und die allgemeine Behauptung ist bewiesen.

Falls speziell $q - 1 \mid n$, dann teilt $q - 1$ auch nr und wir sehen, dass $q - 1 \mid k$ gelten muss, damit $k - nr \equiv 0 \ \mathbf{MOD}(q-1)$ sein kann. □

Schauen wir uns ein Beispiel an:

BEISPIEL 1: Wenn $n = 2$ und $q = 3$ ist, sind nur noch 2 Grade auf Invarianten hin zu untersuchen: Da $\deg(\mathbf{d}_{2,0}) = 8$ und $\deg(\mathbf{d}_{2,1}) = 6$ ist, ist

$$d = \text{f–dim}\left(\frac{\mathbb{F}_3[x,y]}{(\mathbf{d}_{2,0}, \mathbf{d}_{2,1})}\right) = 12.$$

Nach Lemma 4.3.5 sind also für folgende a die Grade $k = a(q-1)$ zu untersuchen:

$$q^{n-1} + q^{n-2} \leq a \leq \left\lfloor \frac{d-1}{q-1} \right\rfloor,$$

was in diesem Beispiel zu

$$4 \leq a \leq 5$$

führt, es sind also nur die Grade 8 und 10 auf Invarianten zu untersuchen. Dabei versagen jedoch sogar diverse Computeralgebra-Programme.

Im folgenden kleinen Beispiel lassen sich die Invarianten der Koinvarianten ausrechnen (siehe auch [17], Beispiel 1.10):

BEISPIEL 2: Sei nun $n = 2$ und $q = 2$. Dann ist

$$d = \text{f–dim}\left(\frac{\mathbb{F}_2[x,y]}{(\mathbf{d}_{2,0}, \mathbf{d}_{2,1})}\right) = 3,$$

und Lemma 4.3.5 liefert, da hier $q - 1 = 1$ ist, direkt die folgenden zu untersuchenden Grade k:

$$3 \leq k \leq 2.$$

Wir müssen also gar nicht mehr suchen. Eine Invariante kennen wir allerdings schon, denn die Fundamentalklasse

$$\left[\frac{\mathbb{F}_2[x,y]}{(\mathbf{d}_{2,0}, \mathbf{d}_{2,1})}\right] \equiv xy^2$$

ist hier invariant, da $\det^{-1}$-relative Invarianz beim Körper mit 2 Elementen zu Invarianz führen muss. Folglich ist

$$\mathfrak{h}_2(\mathrm{GL}(2;\mathbb{F}_2)) = (\mathbf{d}_{2,0}, \mathbf{d}_{2,1}, xy^2) \subset \mathbb{F}_2[x, y],$$

und die Invarianten der Koinvarianten sind

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_2[x, y]_{\mathrm{GL}(2;\mathbb{F}_2)^2} &= \frac{\mathbb{F}_2[x, y]}{\mathfrak{h}_2(\mathrm{GL}(2;\mathbb{F}_2))} \\ &\cong \mathrm{Span}_{\mathbb{F}_2}\{1, x, y, xy, y^2\}. \end{aligned}$$

Wir sehen, dass $\mathbb{F}_2[x, y]_{\mathrm{GL}(2;\mathbb{F}_2)^2}$ keine Poincarédualitätsalgebra ist, aber auch, dass es bis auf den Grad 3 mit $\mathbb{F}_2[x, y]_{\mathrm{GL}(2;\mathbb{F}_2)}$ übereinstimmt. Da es in zweiterem schon in den Graden 1 und 2 keine Invarianten gab, kann es sie in $\mathbb{F}_2[x, y]_{\mathrm{GL}(2;\mathbb{F}_2)^2}$ auch nicht geben. Die Operation von $\mathrm{GL}(2;\mathbb{F}_2)$ darauf hat also nur triviale Fixpunkte. Wir haben also die stabilen Invarianten gefunden:

$$\mathfrak{h}_\infty(\mathrm{GL}(2;\mathbb{F}_2)) = \mathfrak{h}_2(\mathrm{GL}(2;\mathbb{F}_2)) = (\mathbf{d}_{2,0}, \mathbf{d}_{2,1}, xy^2).$$

Kapitel 5
Exkurs: Eine Ergänzung zu J.F. Adams

In diesem Kapitel wird ein unendliches Objekt untersucht, das nach Herausteilen eines geeigneten unendlichen Ideals endlich wird und sogar isomorph zu einem polynomialen Invariantenring ist. Dieses Objekt führt J.F. Adams in [1] ein, um etwas zu haben, worin er Steenrod-Operationen auf Elementen verschiedener Poincarédualitätsalgebren in einem ihnen gemeinsamen Rahmen untersuchen kann. Das Objekt ist ein Polynomring $\mathbf{U}$ in unendlich vielen Variablen, die den Grad $i(q-1)$ haben. Wir werden zunächst ein unendliches Ideal aus ihm herausteilen, so dass ein Polynomring in endlich vielen Unbestimmten zu untersuchen bleibt. Für diesen können wir eine Strukturaussage machen. Gehen wir dann mit Hilfe eines Grenzwertprozesses wieder zum Ausgangsring über, erhalten wir diese Strukturaussage auch für ihn und ergänzen damit die Aussagen des Papers.

Im Gegensatz zu den bisherigen Kapiteln sei mit dem Körper $\mathbb{F}$ in diesem Kapitel der endliche Körper $\mathbb{F}_p$ mit p Elementen (p prim) gemeint. Das liegt daran, dass Adams in seinem Artikel, auf den ich mich beziehe, die Einschränkung macht. Ich habe zwar nicht den Eindruck, dass seine Aussagen schief gehen, wenn sie auf $\mathbb{F}_q$ erweitert werden, habe das jedoch nicht explizit geprüft. Deshalb bleibe ich hier auch bei $\mathbb{F} = \mathbb{F}_p$.

5.1 Wichtige Notationen und Operationen

In diesem Abschnitt werden die notwendigen Begriffe, die Adams in seiner Arbeit [1] verwendet, eingeführt und eine Steenrod-Operation von rechts definiert. Ferner werden die Sätze zitiert, die aus der Arbeit benötigt werden. Da wir hier Algebra betreiben, werde ich statt der Kohomologiegruppen, über die Adams redet, die für mich als Algebraikerin interessanteren dazu isomorphen Polynom- und Poincarédualitätsalgebren betrachten. Es ist

$$H^*(\mathbb{CP}^\infty, \mathbb{Z}/p) = \mathbb{F}_p[z]$$
$$H^*(\mathbb{CP}^k, \mathbb{Z}/p) = \frac{\mathbb{F}_p[z]}{(z^{k+1})}$$
$$H^*(\mathbb{RP}^\infty, \mathbb{Z}/2) = \mathbb{F}_2[z]$$
$$H^*(\mathbb{RP}^k, \mathbb{Z}/2) = \frac{\mathbb{F}_2[z]}{(z^{k+1})}$$
$$H^*(\mathbb{CP}^{k_1} \times \cdots \times \mathbb{CP}^{k_m}, \mathbb{Z}/p) = \frac{\mathbb{F}_p[z_1, \ldots, z_m]}{(z_1^{k_1+1}, \ldots, z_m^{k_m+1})}.$$

Beginnen wir mit der benötigten Rechts-Operation der Steenrod-Algebra. Sei H eine instabile Poincarédualitätsalgebra über der Steenrod-Algebra der Formaldimension $\text{f–dim}(H) = d$. Dann ist H auch ein graduierter Rechts-$\mathscr{P}^*$-Modul: Sei $h \in H_k$ und $\mathcal{P}^i \in \mathscr{P}^*$, dann ist $h \circ \mathcal{P}^i$ für alle $x \in H_{d-k-i(p-1)}$ durch die Gleichung

$$< (h \circ \mathcal{P}^i) \cdot x \,|\, [H] > = < h \cdot \mathcal{P}^i(x) \,|\, [H] >$$

definiert (siehe [1], S. 742)). Dass H durch diese Definition tatsächlich zu einem Rechts-$\mathscr{P}^*$-Modul wird, lässt sich leicht nachrechnen.

Das Objekt $\mathbf{U}$ wird folgendermaßen eingeführt. Zunächst sollen Wörter in einem Objekt $\mathbf{U}_{Wort}$ folgende Regeln erfüllen:

(i) $1_{\mathbf{U}} \in \mathbf{U}_{Wort}$.
(ii) Ist $u \in \mathbf{U}_{Wort}$ und $\mathcal{P}^j \in \mathscr{P}^*$, so sind $\mathcal{P}^j(u)$ und $u \circ \mathcal{P}^j \in \mathbf{U}_{Wort}$, das heißt, $\mathbf{U}_{Wort}$ ist von links und von rechts $\mathscr{P}^*$-abgeschlossen.
(iii) Sind $u, u' \in \mathbf{U}_{Wort}$, so ist $uu' \in \mathbf{U}_{Wort}$.
(iv) Sind $u, u' \in \mathbf{U}_{Wort}$, so ist $\lambda u + \mu u' \in \mathbf{U}_{Wort}$, für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$.

Für eine Poincarédualitätsalgebra H, die eine instabile Links-$\mathscr{P}^*$-Algebra und ein Rechts-$\mathscr{P}^*$-Modul ist wird eine Abbildung Θ_H definiert, die einem Wort $u \in \mathbf{U}_{Wort}$ ein Element $h \in H$ zuordnet:

$$\Theta_H : \mathbf{U}_{Wort} \longrightarrow H$$

via

(i) $\Theta_H(1_{\mathbf{U}}) = 1_H$.
(ii) $\Theta_H(\mathcal{P}^i(u)) = \mathcal{P}^i(\Theta_H(u)),\ \Theta_H(u \circ \mathcal{P}^i) = (\Theta_H(u)) \circ \mathcal{P}^i$.
(iii) $\Theta_H(uu') = \Theta_H(u)\Theta_H(u')$.
(iv) $\Theta_H(\lambda u + \mu u') = \lambda \Theta_H(u) + \mu \Theta_H(u')$.

Teilen wir nun die Wörter in Äquivalenzklassen, wobei 2 Wörter genau dann äquivalent sind, wenn in jeder Poincarédualitätsalgebra H ihre Bilder unter Θ_H gleich sind:

$$u \sim u' \iff \Theta_H(u) = \Theta_H(u').$$

$\mathbf{U}$ ist der von diesen Äquivalenzklassen erzeugte Ring und nach Konstruktion gelten Formeln, die in $\mathbf{U}$ gelten auch in allen instabilen $\mathscr{P}^*$-Poincarédualitätsalgebren H. $\mathbf{U}$ wurde also konstruiert, um ein universelles Objekt zu haben, in dem für beliebige (instabile $\mathscr{P}^*$-) Poincarédualitätsalgebren allgemeingültige Rechenformeln aufgestellt werden können. Adams zeigt dann, dass $\mathbf{U}$ ein Polynomring in unendlichen vielen Erzeugern ist,

$$\mathbf{U} := \mathbb{F}[u_1, u_2, \ldots],$$

wobei

$$u_i = 1_{\mathbf{U}} \circ \chi(\mathcal{P}^i)$$

also den Grad

$$\deg(u_i) = i(p-1)$$

hat.

Das Ziel dieses Kapitels ist es zu zeigen, dass das Objekt, das übrig bleibt, wenn das $\mathscr{P}^*$-invariante (was auch zu zeigen ist) Ideal

$$\mathcal{U}_n := (u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots) \subset \mathbf{U}$$

aus $\mathbf{U}$ herausgeteilt wird, der Invariantenring unter der Operation des Kranzprodukts $\Sigma_n \wr \mathbb{Z}/(p-1)$ ist, folglich muss dann $\mathbf{U}$ in gewissem Sinn der Invariantenring der Gruppe $\Sigma_\infty \wr \mathbb{Z}/(p-1)$ sein.

Nach Korollar 3 in [1] gilt: Falls $\Theta_H(u) = 0$ ist für alle Poincarédualitätsalgebren der Form

$$H = \frac{\mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n]}{(z_1^{k_1}, \ldots, z_n^{k_n})},$$

dann ist es für alle Poincarédualitätsalgebren 0.

LEMMA 5.1.1: *Sei H eine Poincarédualitätsalgebra der Form*

$$H = \frac{\mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n]}{(z_1^{p^s-1}, \ldots, z_n^{p^s-1})}$$

und $p^s - 2 \geq n$. Dann ist

$$\Theta_H(u_j) = \begin{cases} e_j(z_1^{p-1}, \ldots, z_n^{p-1}) & \text{für } j \leq n, \\ 0 & \text{für } j > n. \end{cases}$$

die j-te elementarsymmetrische Funktion in $z_1^{p-1}, \ldots, z_n^{p-1}$. Dabei bezeichnet Θ_H jetzt die Abbildung von $\mathbf{U} \longrightarrow H$, die durch die Bildung der Äquivalenzklassen in $\mathbf{U}_{Wort}$ induziert wird. Da wir $\mathbf{U}_{Wort}$ nicht mehr benötigen, ist keine Verwirrung zu befürchten.

BEWEIS: Dieses ist Lemma 7 in [1], welches Theorem 2 beweist. Adams weist darauf auch am Anfang des Beweises von Theorem 13 hin. Allerdings hat er den zweiten Teil, nämlich, dass $\Theta_H(u_j) = 0$ ist für $j > n$, nicht erwähnt. Ich möchte das daher hier nachtragen.

Wir benutzen, wie vorhin eingeführt, die Darstellung $u_j = 1_{\mathbf{U}} \circ \chi(\mathcal{P}^j)$ und führen nur den Beweis von Lemma 6 in [1] weiter aus:

$$\Theta_H(u_j) = \Theta_H(1_{\mathbf{U}} \circ \chi(\mathcal{P}^j)) = 1_H \circ \chi(\mathcal{P}^j).$$

Da $H \cong H_1 \otimes \cdots \otimes H_n$, mit $H_i = \mathbb{F}[z_i]/(z_i^{p^s-1})$, lässt sich dieser Ausdruck (wieder wie in dem zitierten Beweis von Lemma 6) aufspalten:

$$1_H \circ \chi(\mathcal{P}^i) = \sum_{j_1+\cdots+j_n=j} (1_{H_1} \circ \chi(\mathcal{P}^{j_1})) \otimes \cdots \otimes (1_{H_n} \circ \chi(\mathcal{P}^{j_n})).$$

Mit Lemma 5 aus [1] lässt sich diese Summe auswerten, denn es gilt

$$1_{H_i} \circ \chi(\mathcal{P}^{j_i}) = \begin{cases} z_i^{p-1} & : j_i = 1, \\ 0 & : j_i > 1, \\ 1 & : j_i = 0. \end{cases}$$

Um aus n Summanden, $j_1, \ldots, j_n$, eine Summe, die größer als n ist, herauszubekommen, muss immer mindestens ein Summand größer als eins sein. Daher wird immer mindestens ein Faktor in dem Tensorprodukt 0 sein, und es ist

$$\sum_{j_1+\cdots+j_n=j>n} (1_{H_1} \circ \chi(\mathcal{P}^{j_1})) \otimes \cdots \otimes (1_{H_n} \circ \chi(\mathcal{P}^{j_n})) = 0,$$

und die Behauptung ist bewiesen. □

Folgende Rechenregel in $\mathbf{U}$ werden wir benötigen:

LEMMA 5.1.2: *Sei $\mathcal{P}^I := \mathcal{P}^{i_1} \cdots \mathcal{P}^{i_l}$. Dann gilt für $|I| > 0$ und $u \in \mathbf{U}$:*

$$(1_{\mathbf{U}} \circ \mathcal{P}^I)u = \mathcal{P}^I(u) + \sum_{\substack{I'+I''=I,\\ I',I''\neq I}} \mathcal{P}^{I'}(u) \circ \mathcal{P}^{I''} + u \circ \mathcal{P}^I.$$

Das Lemma ist ein Teil von Lemma 8 in der Arbeit [1] von Adams.

5.2 Abgeschlossenheit unter Steenrod-Operationen

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass das Ideal

$$\mathcal{U}_n \subset \mathbf{U},$$

abgeschlossen unter der Operation der Steenrod-Algebra $\mathscr{P}^*$, also $\mathscr{P}^*$-invariant ist. Da die Steenrod-Operationen $\{\mathcal{P}^i,\ i \in \mathbb{N}_0\}$, ein Erzeugendensystem für $\mathscr{P}^*$ bilden, müssen wir also für alle $u \in \mathcal{U}_n$ zeigen, dass $u \circ \mathcal{P}^i$ und $\mathcal{P}^i(u)$ in $\mathcal{U}_n$ liegen.

BEOBACHTUNG : Es reicht, für Basiselemente $u_j,\ j \geq n+1$ zu zeigen, dass $u_j \circ \mathcal{P}^i$ und $\mathcal{P}^i(u_j)$ in $\mathcal{U}_n$ liegen:

(1) Da jedes $u \in \mathbf{U}$ ein Polynom in endlich vielen der $u_1, \ldots, u_k, \ldots$ ist, kann u in Monome aufgeteilt werden, das heißt

$$u = \sum a_{\underline{\lambda}} \underline{u}^{\underline{\lambda}},$$

wobei $\underline{u}^{\underline{\lambda}} = u_{j_1}^{\lambda_{j_1}} \cdots u_{j_k}^{\lambda_{j_k}}$ ist.

(2) Da die Monome $\mathbb{F}$-linear unabhängig sind (schließlich ist $\mathbf{U}$ eine Polynomalgebra), muss mit $u \in \mathcal{U}_n$ auch jedes Monom $\underline{u}^{\underline{\lambda}} \in \mathcal{U}_n$ sein (da $\mathcal{U}_n$ ein Monomideal ist), was genau dann gilt, wenn es für jedes Monom $\underline{u}^{\underline{\lambda}}$ ein $u_{j(\underline{\lambda})}$ gibt, so dass $u_{j(\underline{\lambda})} | \underline{u}^{\underline{\lambda}}$, also

$$\underline{u}^{\underline{\lambda}} = u_{j(\underline{\lambda})} \cdot \underline{u'}^{\underline{\lambda}'} .$$

(3) Da die erzeugende Funktion $\mathcal{P}(\xi)$ der Steenrod-Operationen ein Algebrahomomorphismus ist, ist

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(\xi)(u_{j(\underline{\lambda})} \cdot \underline{u'}^{\underline{\lambda}'}) &= \mathcal{P}(\xi)(u_{j(\underline{\lambda})})\mathcal{P}(\xi)(\underline{u'}^{\underline{\lambda}'}) \\
&= \sum_{i\geq 0} \mathcal{P}^i(u_{j(\underline{\lambda})})\xi^i \sum_{k\geq 0} \mathcal{P}^k(\underline{u'}^{\underline{\lambda}'})\xi^k \\
&= \sum_{i\geq 0} \Big(\sum_{k=0}^{i} \mathcal{P}^k(u_{j(\underline{\lambda})})\mathcal{P}^{i-k}(\underline{u'}^{\underline{\lambda}'})\Big)\xi^i .
\end{aligned}$$

Falls also $\mathcal{P}^k(u_{j(\underline{\lambda})}) \in \mathcal{U}_n$ für alle k, dann ist auch $\mathcal{P}^k(u) \in \mathcal{U}_n$ für alle $u \in \mathcal{U}_n$.

LEMMA 5.2.1: *Für alle $u_j \in \mathcal{U}_n$, also mit $j \geq n+1$, und $\mathcal{P}^i \in \mathscr{P}^*$, $i \in \mathbb{N}_0$, ist*

$$u_j \circ \mathcal{P}^i \in \mathcal{U}_n .$$

BEWEIS: Für den Beweis bedienen wir uns der Vorgehensweise im Beweis von Theorem 13 in [1]. Wir ziehen uns zum Rechnen in ein geeignetes endliches Objekt zurück und wählen dazu die Poincarédualitätsalgebra

$$H := \frac{\mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n]}{(z_1^{p^s-1}, \ldots, z_n^{p^s-1})},$$

wobei $n \geq i + \deg(u_j) = i + j(p-1)$ sein soll. Da nach Lemma 5.1.1 ja $\Theta_H(u_j) = e_j(z_1^{p-1}, \ldots, z_n^{p-1}) =: \sigma_j$, rechnen wir jetzt in H und leiten daraus die Aussagen für die Urbilder in $\mathbf{U}$ ab. Da Θ_H jedenfalls in den untersuchten Graden injektiv ist, wiederum gemäß 5.1.1, sind diese Urbilder sogar eindeutig.

Die zweite Formel in [1], Theorem 13 besagt, dass in H gilt:

$$\chi(\mathcal{P}^i)(z_1 \cdots z_n \cdot \sigma_j) = (\sigma_j \circ \mathcal{P}^i)z_1 \cdots z_n = z_1 \cdots z_n \cdot r(\sigma_1, \ldots, \sigma_n).$$

Hier kann jetzt das Polynom r ausgerechnet werden.

Da wir H (also n) passend gewählt haben, ist die Rechtsoperation von $\mathcal{P}^i$ hier definiert, und es gilt:

$$(\sigma_j \circ \mathcal{P}^i) z_1 \cdots z_n = \sigma_j \cdot \mathcal{P}^i(z_1 \cdots z_n).$$

σ_j kennen wir, also berechnen wir noch $\mathcal{P}^i(z_1 \cdots z_n)$ über die totale Steenrod-Operation $\mathcal{P}(\xi)$.

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\xi)(z_1 \cdots z_n) &= \mathcal{P}(\xi)(z_1) \cdots \mathcal{P}(\xi)(z_n) \\ &= (z_1 + z_1^p \xi) \cdots (z_n + z_n^p \xi). \end{aligned}$$

Wenn dieser Ausdruck ausmultipliziert und nach Potenzen von ξ sortiert wird, ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\xi)(z_1 \cdots z_n) = & z_1 \cdots z_n \\ & + \Big(\sum_{i=1}^{n} z_1 \cdots z_i^p \cdots z_n\Big)\xi \\ & + \Big(\sum_{1 \le k_1 < k_2 \le n} z_1 \cdots z_{k_1}^p \cdots z_{k_2}^p \cdots z_n\Big)\xi^2 \\ & + \cdots \\ & + \Big(\sum_{1 \le k_1 < \cdots < k_i \le n} z_1 \cdots z_{k_1}^p \cdots z_{k_2}^p \cdots z_{k_i}^p \cdots z_n\Big)\xi^i \\ & + \cdots + (z_1 \cdots z_n)^p \xi^n. \end{aligned}$$

Also ist für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$\mathcal{P}^i(z_1 \cdots z_n) = \sum_{1 \le k_1 < \cdots < k_i \le n} z_1 \cdots z_{k_1}^p \cdots z_{k_2}^p \cdots z_{k_i}^p \cdots z_n.$$

Hier lässt sich $z_1 \cdots z_n$ ausklammern und wir erhalten

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^i(z_1 \cdots z_n) &= z_1 \cdots z_n \sum_{1 \le k_1 < \cdots < k_i \le n} z_{k_1}^{p-1} \cdots z_{k_i}^{p-1} \\ &= z_1 \cdots z_n \cdot e_i(z_1^{p-1}, \ldots, z_n^{p-1}) \\ &= z_1 \cdots z_n \sigma_i. \end{aligned}$$

In H ergibt sich also die Formel

$$(\sigma_j \circ \mathcal{P}^i) \cdot z_1 \cdots z_n = \sigma_j \sigma_i \cdot z_1 \cdots z_n,$$

daher erhalten wir für die Urbilder in **U**:

$$u_j \circ \mathcal{P}^i = u_j \cdot u_i \in \mathcal{U}_n,$$

da ja nach Voraussetzung $u_j \in \mathcal{U}_n$ ist. □

LEMMA 5.2.2: *Für alle $u_j \in \mathcal{U}_n$, also mit $j \geq n+1$, und $\mathcal{P}^i \in \mathscr{P}^*$, $i \in \mathbb{N}_0$, ist*

$$\mathcal{P}^i(u_j) \in \mathcal{U}_n\,.$$

BEWEIS: Der Beweis läuft als Induktion über i.

Induktionsanfang: Es ist $\mathcal{P}^0(u_j) = u_j \in \mathcal{U}_n$.

Induktionsvoraussetzung: Für $k < i$ sei $\mathcal{P}^k(u_j) \in \mathcal{U}_n$.

Induktionsschritt: Wegen der Induktionsvoraussetzung ist für $k < i$, da $\mathcal{U}_n$ ein Ideal ist, nach Lemma 5.2.1 auch

$$\mathcal{P}^k(u_j) \circ \mathcal{P}^{i-k} \in \mathcal{U}_n.$$

Damit ist

$$\sum_{k=1}^{i-1} \mathcal{P}^k(u_j) \circ \mathcal{P}^{i-k} \in \mathcal{U}_n\,.$$

Wir wenden nun Lemma 5.1.2 an für $I = i$ und $u = u_j$. Daher gilt:

$$(1_{\mathbf{U}} \circ \mathcal{P}^i)u_j = \mathcal{P}^i(u_j) + \sum_{k=1}^{i-1} \mathcal{P}^k(u_j) \circ \mathcal{P}^{i-k} + u_j \circ \mathcal{P}^i\,.$$

Vom letzten Summanden wissen wir dank Lemma 5.2.1, dass er in $\mathcal{U}_n$ liegt. Die linke Seite liegt in $\mathcal{U}_n$, da $1_{\mathbf{U}} \circ \mathcal{P}^i \in \mathbf{U}$, nach Definition von $\mathbf{U}$, und $u_j \in \mathcal{U}_n$. Dieses ist ein Ideal in $\mathbf{U}$, daher muss $(1_{\mathbf{U}} \circ \mathcal{P}^i)u_j \in \mathcal{U}_n$ sein. Das heißt, dass wir von allen Summanden dieser Gleichung, außer von $\mathcal{P}^i(u_j)$, und der Summe selbst wissen, dass sie in $\mathcal{U}_n$ liegen. Dann muss aber auch

$$\mathcal{P}^i(u_j) \in \mathcal{U}_n$$

sein. □

Da sich alle Elemente aus Kombinationen von Steenrod-Operationen als Rechts- oder Linksoperation zusammensetzen, können wir also als Theorem formulieren:

THEOREM 5.2.3: *Sei $\mathbf{U} = \mathbb{F}[u_1, u_2, \ldots]$ die in 5.1 eingeführte instabile $\mathscr{P}^*$-Polynomalgebra in unendlich vielen Veränderlichen u_j vom Grad $\deg(u_j) = j(p-1)$. Dann ist das Ideal*

$$\mathcal{U}_n = (u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots) \subset \mathbf{U}$$

abgeschlossen unter den Operationen der Steenrod-Algebra $\mathscr{P}^*$.

BEWEIS: Lemma 5.2.1 und Lemma 5.2.2. □

5.3 Ein Invariantenring

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass der Quotientring $\mathbf{U}/\mathcal{U}_n$ ein Invariantenring ist. Wir können sogar die Gruppe angeben, unter deren Operationen seine Elemente invariant sind.

LEMMA 5.3.1: *Der Quotientring $\mathbf{U}/\mathcal{U}_n$ ist isomorph zu einer Polynomalgebra in n Unbestimmten vom Grad $i(p-1)$ für $i = 1, \ldots, n$, das heißt,*

$$\mathbf{U}/\mathcal{U}_n \cong \mathbb{F}[u_1, \ldots, u_n].$$

BEWEIS: In Abschnitt 5.1 wurde gesagt, dass $\mathbf{U}$ eine Polynomalgebra in unendlich vielen Veränderlichen u_i vom Grad $\deg(u_i) = i(p-1)$ ist,

$$\mathbf{U} \cong \mathbb{F}[u_1, u_2, \ldots].$$

Adams beweist es in [1] als Theorem 1. Teilen wir aus einer solchen unendlichen Polynomalgebra das Ideal heraus, das aus allen Variablen ab einem bestimmten Index aufwärts besteht, bleibt eine Polynomalgebra in endlich vielen Veränderlichen übrig, hier also

$$\mathbf{U}/\mathcal{U}_n \cong \frac{\mathbb{F}[u_1, u_2, , \ldots, u_n, u_{n+1}, \ldots]}{(u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots)} \cong \mathbb{F}[u_1, \ldots, u_n].$$

□

Damit $\mathbf{U}/\mathcal{U}_n$ ein Invariantenring sein kann, muss es eine instabile Algebra über der Steenrod-Algebra sein. Das haben wir im Grunde im vorigen Abschnitt gezeigt.

LEMMA 5.3.2: *Der Polynomring*

$$\mathbf{U}/\mathcal{U}_n \cong \mathbb{F}[u_1, \ldots, u_n],$$

$\deg(u_i) = i(p-1)$, *ist eine instabile Algebra über der Steenrod-Algebra.*

BEWEIS: Der Polynomring $\mathbf{U}$ ist als instabile $\mathscr{P}^*$-Algebra konstruiert, das Ideal $\mathcal{U}_n$ ist nach Theorem 5.2.3 $\mathscr{P}^*$-abgeschlossen. Wird also $\mathcal{U}_n$ aus $\mathbf{U}$ herausgeteilt, so bleibt der Quotient eine instabile Algebra über der Steenrod-Algebra. □

Nun soll die Hauptaussage dieses Kapitels formuliert werden.

THEOREM 5.3.3: *Der Quotientring $\mathbf{U}/\mathcal{U}_n$ ist isomorph zu den Invarianten unter der Operation des Kranzprodukts von Σ_n mit $\mathbb{Z}/(p-1)$, das heißt,*

$$\mathbf{U}/\mathcal{U}_n \cong \mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n]^{\Sigma_n \wr \mathbb{Z}/(p-1)}.$$

Um dieses Theorem zu beweisen, soll zunächst in einem eigenen Lemma gezeigt werden, wie der Invariantenring von $\Sigma_n \wr \mathbb{Z}/(p-1)$ aussieht.

LEMMA 5.3.4: *Es ist*

$$\mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n]^{\Sigma_n \wr \mathbb{Z}/(p-1)} \cong \mathbb{F}[e_1(z_1^{p-1}, \ldots, z_n^{p-1}), \ldots, e_n(z_1^{p-1}, \ldots, z_n^{p-1})],$$

wobei $e_i(z_1^{p-1}, \ldots, z_n^{p-1})$ *das* i*-te elementarsymmetrische Polynom in* $z_1^{p-1}, \ldots, z_n^{p-1}$ *bezeichnet.*

BEWEIS: Das Kranzprodukt $\Sigma_n \wr \mathbb{Z}/(p-1)$ ist eine Abkürzung für das semidirekte Produkt $\Sigma_n \ltimes (\mathbb{Z}/(p-1))^n$. Daher gilt:

$$\begin{aligned}\mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n]^{\Sigma_n \wr \mathbb{Z}/(p-1)} &= \mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n]^{\Sigma_n \ltimes (\mathbb{Z}/(p-1))^n} \\ &= (\mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n]^{(\mathbb{Z}/(p-1))^n})^{\Sigma_n} \\ &= (\mathbb{F}[z_1]^{\mathbb{Z}/(p-1)} \otimes \cdots \otimes \mathbb{F}[z_n]^{\mathbb{Z}/(p-1)})^{\Sigma_n},\end{aligned}$$

wobei der zweite Schritt direkt aus der Definition des semidirekten Produkts kommt und die letzte Gleichheit nach [27], Proposition 1.5.2, gilt. Da z_i^{p-1} invariant unter der Operation der zyklischen Gruppe mit $p-1$ Elementen ist, ergibt sich, wenn wir das Tensorprodukt wieder zusammenfassen,

$$\begin{aligned}\mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n]^{\Sigma_n \wr \mathbb{Z}/(p-1)} &= \mathbb{F}[z_1^{p-1}, \ldots, z_n^{p-1}]^{\Sigma_n} \\ &= \mathbb{F}[e_1(z_1^{p-1}, \ldots, z_n^{p-1}), \ldots, e_n(z_1^{p-1}, \ldots, z_n^{p-1})],\end{aligned}$$

womit die Behauptung bewiesen ist. □

Nun kann das Theorem bewiesen werden.

BEWEIS VON THEOREM 5.3.3: Sei

$$H(s) := \frac{\mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n]}{(z_1^{p^s-1}, \ldots, z_n^{p^s-1})}.$$

Wir bedienen uns der Abbildung $\Theta_{H(s)} : \mathbf{U} \longrightarrow H(s)$, die in 5.1 eingeführt wurde und zeigen, dass sie über $\mathbf{U}/\mathcal{U}_n$ faktorisiert, dass also das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{U} \arrow[r, "\Theta_{H(s)}"] \arrow[d] & H(s) \\ \mathbf{U}/\mathcal{U}_n \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Da es sich bei den beteiligten Abbildungen um Algebra-Homomorphismen handelt brauchen wir nur zu prüfen, was auf den Erzeugern von $\mathbf{U}$, also auf $u_1, u_2, \ldots$ passiert. Der senkrechte Pfeil ist lediglich eine Projektion, nennen wir sie π_n, die u_j für $j > n$ auf 0 abbildet, und bei $j \leq n$ nichts ändert. Nach Lemma 5.1.1 bildet aber auch $\Theta_{H(s)}$ die u_j für $j > n$ auf 0 ab, weshalb die induzierte Abbildung $\overline{\Theta}_{H(s)} : \mathbf{U}/\mathcal{U}_n \longrightarrow H(s)$ auf $u_1, \ldots, u_n$ einfach nur das Gleiche tut wie $\Theta_{H(s)}$. Das ist auch der Grund dafür, dass $\overline{\Theta}_{H(s)}$ mit den Steenrod-Operationen kommutiert, denn $\Theta_{H(s)}$ ist in 5.1 mit dieser Eigenschaft definiert worden. Also kommutiert das oben angegebene Diagram und $\Theta_{H(s)}$ faktorisiert über $\mathbf{U}/\mathcal{U}_n$.

Welche Eigenschaften hat also die induzierte Abbildung $\overline{\Theta}_{H(s)}$?

(1) $\overline{\Theta}_{H(s)}(u_j) = e_j(z_1^{p-1}, \dots, z_n^{p-1})$.

(2) $\overline{\Theta}_{H(s)} = \overline{\Theta}_{H(s+1)}$ in den kleinen Graden bis $q^s - 1$.

(3) $\overline{\Theta}_{H(s)}$ kommutiert mit den Steenrod-Operationen.

Das heißt, dass wir einen $\mathscr{P}^*$-Algebra-Homomorphismus

$$\Theta : \mathbb{F}[u_1, \dots, u_n] \longrightarrow \mathbb{F}[z_1, \dots, z_n] \tag{$\spadesuit$}$$

definieren können, durch

$$\Theta(u) = \overline{\Theta}_{H(s)}(u) : \ s >> 0$$

so, dass $q^s - 1 > \deg(u)$, und diese Abbildung ist dank Eigenschaft (2) eindeutig, und da jedes $u \in \mathbb{F}[u_1, \dots, u_n]$ endlichen Grad hat, gibt es für jedes solche u ein $s >> 0$ so, dass $\overline{\Theta}_{H(s)}(u)$ definiert ist und $\Theta(u)$ damit eindeutig festgelegt ist. Dabei wird

$$\Theta(u_j) = e_j(z_1^{p-1}, \dots, z_n^{p-1}) \in \mathbb{F}[z_1, \dots, z_n]^{\Sigma_n \wr \mathbb{Z}/(p-1)},$$

das heißt,

$$\mathrm{Im}(\Theta) = \mathbb{F}[e_1(z_1^{p-1}, \dots, z_n^{p-1}), \dots, e_n(z_1^{p-1}, \dots, z_n^{p-1})] = \mathbb{F}[z_1, \dots, z_n]^{\Sigma_n \wr \mathbb{Z}/(p-1)}.$$

$e_1(X_1, \dots, X_n), \dots, e_n(X_1, \dots, X_n)$, die elementarsymmetrischen Polynome, sind algebraisch unabhängig (siehe dazu zum Beispiel [27], Theorem 1.1.2). Dann sind

$$e_1(z_1^{p-1}, \dots, z_n^{p-1}), \dots, e_n(z_1^{p-1}, \dots, z_n^{p-1})$$

auch algebraisch unabhängig. Daher ist die Abbildung Θ injektiv.

Insgesamt erhalten wir also, dass die Abbildung

$$\Theta : \mathbb{F}[u_1, \dots, u_n] \longrightarrow \mathrm{Im}(\Theta) = \mathbb{F}[z_1, \dots, z_n]^{\Sigma_n \wr \mathbb{Z}/(p-1)}$$

ein Isomorphismus von Algebren ist und das Theorem ist bewiesen. □

Diese Aussage kann noch auf das Objekt **U** übertragen werden. Dazu erinnern wir uns zunächst daran, wie (inverse) Limites und das notwendige Beiwerk dazu definiert sind.

Sei $\mathscr{A}$ eine kleine Kategorie, das heißt, $\mathrm{Obj}(\mathscr{A})$ ist eine Menge. Sei $\{B_i\} \subseteq \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$ eine Teilmenge, die wir ohne Notationsänderung als Unterkategorie von $\mathscr{A}$ betrachten wollen, indem $\mathrm{Obj}(\{B_i\}) = \{B_i\}$ ist und $\mathrm{Mor}(\{B_i\}) = \{\varphi \in \mathrm{Mor}(\mathscr{A}) : \ \varphi$ bildet zwischen 2 Objekten aus $\mathrm{Obj}(\{B_i\})$ ab$\}$.

Sei nun $C \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$. Ein **Morphismus** $\Psi : C \longrightarrow \{B_i\}$ ist eine Sammlung $\{\Psi_i : C \longrightarrow B_i, \ \forall \ B_i \in \mathrm{Obj}(\{B_i\})\}$, für die gilt, dass für alle $\varphi \in \mathrm{Mor}(\{B_i\})$,

$B_k, B_s \in \mathrm{Obj}(\{B_i\})$, das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "\Psi_k"'] \arrow[dr, "\Psi_s"] & \\ B_k \arrow[rr, "\varphi"] & & B_s \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Der **(inverse) Limes** von $\{B_i\}$, geschrieben $\varprojlim\{B_i\}$, ist ein $A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$ zusammen mit einem Morphismus $\Psi : A \longrightarrow \{B_i\}$, der folgende universelle Eigenschaft besitzt: Für jeden Morphismus $\Psi' : A' \longrightarrow \{B_i\}$ gibt es genau einen Morphismus $\beta : A' \longrightarrow A$, so dass

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, "\Psi_s"'] & & A' \arrow[ll, "\beta"'] \arrow[dl, "\Psi'_s"] \\ & B_s & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

In unserem Fall betrachten wir $\mathscr{P}^* - \mathcal{Alg}_{\mathbb{F}}$, die Kategorie der $\mathscr{P}^*$-Algebren über $\mathbb{F}$, in der $\mathbf{U}$ und alle $\mathbf{U}_n := \mathbf{U}/\mathcal{U}_n,\ n \in \mathbb{N}_0$, liegen, wie wir ja bereits gesehen haben. Dann ist, wie eben allgemein konstruiert, $\{\mathbf{U}_n\}$ mit den entsprechenden Morphismen eine volle Unterkategorie von $\mathscr{P}^* - \mathcal{Alg}_{\mathbb{F}}$.

Sei $\pi := \{\pi_k : k \in \mathbb{N}_0\}$ die Familie folgender Projektionen:

$$\begin{aligned} \pi_{n-1} : \mathbb{F}[z_1, \dots, z_n]^{\Sigma_n \wr \mathbb{Z}/(p-1)} &\longrightarrow \mathbb{F}[z_1, \dots, z_{n-1}]^{\Sigma_{n-1} \wr \mathbb{Z}/(p-1)} \\ e_i(z_1^{p-1}, \dots, z_n^{p-1}) &\longmapsto \begin{cases} e_i(z_1^{p-1}, \dots, z_{n-1}^{p-1}) & : i \le n-1 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

der $\mathscr{P}^*$-Algebra-Homomorphismus, der von der gewöhnlichen Projektion $\mathbb{F}[z_1, \dots, z_n] \longrightarrow \mathbb{F}[z_1, \dots, z_{n-1}],\ z_n \longmapsto 0$, induziert wird.

Wir definieren nun eine geeignete Abbildung

$$\Theta^{\mathbf{U}} : \mathbf{U} \longrightarrow \mathbb{F}[z_1, \dots, z_n]^{\Sigma_n \wr \mathbb{Z}/(p-1)},$$

die Sammlung $\{\Theta_n^{\mathbf{U}} : \mathbf{U} \longrightarrow \mathbb{F}[z_1, \dots, z_n]^{\Sigma_n \wr \mathbb{Z}/(p-1)},\ \forall\, n \in \mathbb{N}_0\}$ (die uns dann zum (inversen) Limes verhilft), indem $\Theta_n^{\mathbf{U}} : \mathbf{U} \longrightarrow \mathbb{F}[z_1, \dots, z_n]^{\Sigma_n \wr \mathbb{Z}/(p-1)}$ auf den Erzeugern u_i wie folgt definiert wird:

$$\begin{aligned} \Theta_n^{\mathbf{U}} : \mathbf{U} &\longrightarrow \mathbb{F}[z_1, \dots, z_n]^{\Sigma_n \wr \mathbb{Z}/(p-1)} \\ u_i &\longmapsto \begin{cases} \Theta(u_i) & : i \le n \\ 0 & : i > n \end{cases}. \end{aligned}$$

Θ ist der $\mathscr{P}^*$-Algebra-Homomorphismus, der im Beweis von Theorem 5.3.3 unter (♠) definiert wurde. Folgende Eigenschaften ergeben sich aus der Definition und den Eigenschaften von Θ und π und sind leicht einzusehen:

Eigenschaften von $\Theta^{\mathbf{U}}$

(1) $\Theta_n^{\mathbf{U}}$ ist surjektiv für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(2) $(\Theta_n^{\mathbf{U}})_{k(p-1)}$ ist injektiv für alle $k \leq n$ (weil $\deg(u_{n+1}) = (n+1)(p-1)$ und u_{n+1} das “kleinste” Element in $\ker(\Theta_n^{\mathbf{U}})$ ist).

(3) $\Theta_n^{\mathbf{U}}$ kommutiert mit den Steenrod-Operationen, das heißt, $\Theta_n^{\mathbf{U}}$ ist ein $\mathscr{P}^*$-Algebra-Homorphismus.

(4) $\Theta_n^{\mathbf{U}}$ kommutiert mit π_{n-1}, das heißt, $\pi_{n-1} \circ \Theta_n^{\mathbf{U}} = \Theta_{n-1}^{\mathbf{U}}$, für alle $n \in \mathbb{N}$.

Diese Eigenschaften benötigen wir zum Beweis des folgenden Satzes.

SATZ 5.3.5: *Die Algebra* $\mathbf{U} \in \mathrm{Obj}(\mathscr{P}^* - \mathcal{A}lg_{\mathbb{F}})$ *ist mit*

$$\Theta^{\mathbf{U}} : \mathbf{U} \longrightarrow \mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n]^{\Sigma_n \wr \mathbb{Z}/(p-1)}$$

der (inverse) Limes von $\{\mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n]^{\Sigma_n \wr \mathbb{Z}/(p-1)}\}$*, das heißt,*

$$\mathbf{U} = \varprojlim \{\mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n]^{\Sigma_n \wr \mathbb{Z}/(p-1)}\}.$$

BEWEIS: Es muss gezeigt werden, dass es für alle $T \in \mathrm{Obj}(\mathscr{P}^* - \mathcal{A}lg_{\mathbb{F}})$, zusammen mit einem Morphismus $\Psi : T \longrightarrow \{\mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n]^{\Sigma_n \wr \mathbb{Z}/(p-1)}\}$, der mit π kommutiert, genau einen $\mathscr{P}^*$-Algebra-Homomorphismus $\beta : T \longrightarrow U$ gibt, so dass für alle n das Diagramm

$$\begin{tikzcd} T \arrow[rr, "\exists!\beta"] \arrow[dr, "\Psi_n"'] & & U \arrow[dl, "\Theta_n^{\mathbf{U}}"] \\ & \mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n]^{\Sigma_n \wr \mathbb{Z}/(p-1)} & \end{tikzcd}$$

kommutiert. Im Folgenden sei zur besseren Übersichtlichkeit für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$F_n := \mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n]^{\Sigma_n \wr \mathbb{Z}/(p-1)},$$

und

$$s := k(p-1).$$

Wir betrachten das Ganze zunächst gradweise und für $n \geq k$. Dann ist, wie Eigenschaften (1) und (2) zeigen,

$$(\Theta_n^{\mathbf{U}})_s : (U)_s \xrightarrow{\cong} (F_n)_s$$

ein Isomorphismus. Also lässt sich

$$(\beta)_s := (\Theta_n^{\mathbf{U}})_s^{-1} \circ (\Psi_n)_s$$

definieren und bringt das Diagramm

$$\begin{tikzcd} (T)_s \arrow[rr, "\beta_s"] \arrow[dr, "(\Psi_n)_s"'] & & (\mathsf{U})_s \arrow[dl, "(\Theta_n^{\mathsf{U}})_s"] \\ & (F_n)_s & \end{tikzcd}$$

zum kommutieren. Nach Konstruktion ist β_s für alle $n \geq k$ eindeutig und ein $\mathscr{P}^*$-Algebra-Homomorphismus. Um festzustellen, ob β damit eindeutig auf ganz T definiert ist, müssen wir prüfen, ob das Diagramm mit dieser Definition von β auch kommutiert, wenn $n < k$ ist. Dazu betrachten wir folgendes Diagramm, in dem $n = k$ ist:

$$\begin{tikzcd} (T)_s \arrow[r, "(\Psi_n)_s"] \arrow[rr, bend left, "\beta_s"] \arrow[dr, "(\Psi_{n-1})_s"'] & (F_n)_s \arrow[d, "(\pi_{n-1})_s"] & (\mathsf{U})_s \arrow[l, "(\Theta_n^{\mathsf{U}})_s"'] \arrow[dl, "(\Theta_{n-1}^{\mathsf{U}})_s"] \\ & (F_{n-1})_s & \end{tikzcd}$$

Es ist zu überprüfen, ob auch $(\Theta_{n-1}^{\mathsf{U}})_s \circ \beta_s = (\Psi_{n-1})_s$ ist. In diesem Diagramm kommutieren aber die Einzeldreiecke:

Das obere Dreieck (das mehr wie ein Viereck aussieht wegen des geknickten Pfeils) kommutiert, weil hier $n \geq k$ ist und wir das für den Fall eben gezeigt haben.

Das linke Dreieck kommutiert, weil das eine der Eigenschaften ist, die Ψ haben muss.

Das rechte Dreieck kommutiert nach Eigenschaft (4) von Θ^{U}.

Damit muss dann auch das äußere Dreieck

$$\begin{tikzcd} (T)_s \arrow[rr, "\beta_s"] \arrow[dr, "(\Psi_{n-1})_s"'] & & (\mathsf{U})_s \arrow[dl, "(\Theta_{n-1}^{\mathsf{U}})_s"] \\ & (F_{n-1})_s & \end{tikzcd}$$

kommutieren, und das war zu zeigen. Analog können wir daraus, wieder mit einem großen Diagramm wie oben, folgern, dass das Diagramm mit $n-2$ kommutiert und so weiter bis zu $n = 0$. Daher ist

$$\beta : T \longrightarrow \mathsf{U}$$

durch

$$\beta_{k(p-1)} = \left((\Theta_n^{\mathsf{U}})^{-1} \circ \Psi_n\right)_{k(p-1)}$$

mit $n \geq k$ eindeutig bestimmt und ist nach Konstruktion ein $\mathscr{P}^*$-Algebra-Homomorphismus. Das zeigt, dass U die universelle Eigenschaft des (inversen) Limes vom $\{(\mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n]^{\Sigma_n \wr \mathbb{Z}/(p-1)})_{k(p-1)}\}$ hat und es folgt

$$\mathsf{U} = \varprojlim \{(\mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n]^{\Sigma_n \wr \mathbb{Z}/(p-1)})_{k(p-1)}\}. \qquad \square$$

Literaturverzeichnis

[1] J.F. Adams, *On Formulae of Thom and Wu,* Proc. London Math. Soc. (3) 11 (1961), 741-752.

[2] C. Albrecht, *Elemente der kommutativen graduierten Algebra,* Diplomarbeit, Universität Göttingen, 2000.

[3] D. Arnon, *Generalized Dickson Invariants,* Israel J. Math. 118 (2000), 183-205.

[4] M.F. Atiyah und I.G. Macdonald, *Introduction to Commutative Algebra,* Addison-Wesley, Reading, Mass., 1969.

[5] M. Auslander, *On the Purity of the Branch Locus,* Amer. J. of Math. 84 (1962), 116-125.

[6] S. Balzerczyk und T. Jozefiak, *Commutative Rings, Dimension, Multiplicity an Homological Methods,* PWN Polish Scientific Publishes, Warszawa, 1989.

[7] M.P. Brodmann und R.Y. Sharpe, *Local Cohomology,* Cambridge Studies in Pure Math. 60, Cambridge 1998.

[8] H.E.A. Campbell, I.P. Hughes, R.J. Shank, D.L. Wehlau, *Bases for Rings of Coinvariants,* Transformation Groups 1 (1996), 307-336.

[9] L.E. Dickson, *A Fundamental System of Invariants of the General Modular Linear Group with a Solution of the Form Problem,* Trans. of the Amer. Math. Soc. 12 (1911), 75-98.

[10] P. Fleischmann, *The Noether Bound in Invariant Theory of Finite Groups,* Adv. in Math. 156 Nr.1 (2000), 23-32.

[11] K. Kuhnigk, *Der Transfer in der modularen Invariantentheorie,* Diplomarbeit, Universität Göttingen, 1998.

[12] T.-C. Lin, *Über Poincarédualitätsalgebra in der Invariantentheorie,* Dissertation, Cuvillier Verlag Göttingen, 2003.

[13] F. Lorenz, *Lineare Algebra, Band 1,* BI-Wissenschaftsverlag Mannheim/Wien/Zürich, 1988.

[14] F.S. Macaulay, *The Algebraic Theory of Modular Systems,* Camb. Math. Lib., Camb. Univ. Press, Cambridge 1916 (reissued with an introduction by P.Roberts 1994).

[15] D.M. Meyer und L. Smith, *Poincaré Duality Algebras, Macaulay's Dual Systems, and Steenrod Operations,* Veröffentlichung in Vorbereitung.

[16] S.A. Mitchell, *Finite Complexes with $\mathcal{A}(n)$ Free Cohomology,* Topology 24 (1985), 227-248.

[17] F. Neumann, M.D. Neusel, L. Smith, *Rings of generalized and stable invariants of pseudoreflections an pseudoreflection groups,* J. of Algebra 182 Nr.1 (1996), 85-122.

[18] E. Noether, *Der Endlichkeitssatz der Invarianten endlicher Gruppen,* Math. Ann. 77 (1916), 89-92.

[19] E. Noether, *Der Endlichkeitssatz der Invarianten endlicher linearer Gruppen der Charakteristik p,* Nachr. v.d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen (1926), 28-35.

[20] F.P. Peterson, *$\mathcal{A}$-Generators for Certain Poynomial Algebras,* Proc. Camb. Phil. Soc 105 (1989), 311-312.

[21] H. Seifert und W. Threlfall, *Lehrbuch der Topologie,* Chelsea Publ. Co, New York NY 1947.

[22] J.-P. Serre, *Groupes finis d'automorphismes d'anneaux locaux réguliers,* Colloq. d'Algèbre ENSJF, Paris 1967, 8,01-8,11.

[23] W.M. Singer, *On the Action of Steenrod Squares on Polynomial Algebras,* Proc. of the Amer. Math. Soc. 111 (1991), 577-583.

[24] L. Smith, *E. Noether's bound in the invariant theory of finite groups,* Arch. Math., Vol. 66 (1996), 89-92.

[25] L. Smith, *Invariants and Coinvariants of Finite Pseudoreflection Groups, Jacobian Determinants and Steenrod Operations,* Proc. Edinb. Math. Soc. (2) 44 (2001), Nr. 3, 597-611.

[26] L. Smith, *Linear Algebra,* dritte Auflage, Springer-Verlag, Heidelberg, Berlin 1998.

[27] L. Smith, *Polynomial Invariants of Finite Groups,* A.K. Peters, Ltd., Wellesley, MA, 1995.

[28] L. Smith, *Polynomial Invariants of Finite Groups, A Survey of Recent Developments,* Bull. of the Amer. math. Soc. 34 (1997), 211-250.

[29] L. Smith, R.E. Stong, *On the Invariant Theory of Finite Groups: Orbit Polynomials, Chern Classes an Splitting Principals,* J. of Algebra 110 (1987), 134-157.

[30] R. Steinberg, *On Dickson's Theorem on Invariants,* J. of Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. 1A Math. 34 (1987), 699-707.

[31] R. Wood, *Differential Operators and the Steenrod-Algebra,* Proc. of London Math. Soc. 75 (1997), 194-220.

[32] R. Wood, *Problems in the Steenrod Algebra,* Bull. London Math. Soc. 30 (1998), 449-517.

[33] O. Zariski und P. Samuel, *Commutative Algebra, Volumes I,II,* Graduate Texts in Math. 28, 29, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1975.

Lebenslauf

Geburtstag und -ort:	08.08.1970 in Kassel
Familienstand:	ledig
Nationalität:	deutsch
1976-1980:	Grundschule Kassel
1980-1989:	Engelsburg-Gymnasium Kassel, Abschluss Abitur
09/1989-06/1991:	Ausbildung zur Bankkauffrau: Deutsche Bank AG Kassel
10/1991-02/1998:	Mathematik-Studium: Universität Göttingen
10/1993:	Vordiplom Mathematik mit Nebenfach Betriebswirtschaftslehre
29.04.-03.05.1996:	Teilnahme am Workshop ,,Computational Invariant Theory" in Dagstuhl
12.10.-18.10.1997:	Teilnahme am DMV-Seminar ,,Algorithmische Ideal- und Invariantentheorie" in Oberwolfach
02/1998:	Diplom Mathematik an der Universität Göttingen, Hauptfach ,,Reine Mathematik, Invariantentheorie" bei Prof. Smith Titel der Arbeit: Der Transfer in der modularen Invariantentheorie.
Seit 02/1998:	Promotion an der Universität Göttingen bei Prof. Smith über Invariantentheorie
seit 09/2000:	Assistentin an der Universität Göttingen Unterstützung von Lehre und Forschung in der reinen Mathematik

Göttingen, 17.04.2003

Kathrin Kuhnigk