

Direktes und inverses Randwertproblem
für einen Crack mit
Impedanzrandbedingung

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultäten
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von
Kuo-Ming Lee
aus Taipeh/Taiwan

Göttingen 2003

D7

Referent :

Prof. Dr. Rainer Kreß

Korreferent :

PD. Dr. Roland Potthast

Tag der mündlichen Prüfung :

22. Oktober 2003

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Direktes Impedanzrandwertproblem	7
2.1	Das direkte Randwertproblem	7
2.2	Eindeutigkeit der Lösung des Randwertproblems	9
2.3	Aufstellung des Integralgleichungssystems	12
2.4	Die Parametrisierung	17
2.5	Ein Existenzbeweis	22
3	Numerische Behandlung	25
3.1	Das Numerische Verfahren	25
3.2	Konvergenzuntersuchung	31
4	Numerische Ergebnisse	36
4.1	Das Fernfeld	36
4.2	Numerische Beispiele	37
5	Ein inverses Randwertproblem	45
5.1	Beschreibung des inversen Problems	45
5.2	Das Regularisierungsverfahren	48
5.3	Numerisches Verfahren zum inversen Problem	50
5.4	Numerische Ergebnisse	53
5.5	Ausblicke	63
	Literaturverzeichnis	66

Kapitel 1

Einleitung

Die mathematischen Modellierungen physikalischer Ereignisse führen oft auf partielle Differentialgleichungen, deren Lösung gewisse Bedingungen auf dem Rand des untersuchten Gegenstandes erfüllen muss. Zum Beispiel führt die Modellierung der Streuung von zeitharmonischen akustischen Wellen an Hindernissen zu äußeren Randwertproblemen für die Helmholtzgleichung.

Wenn der Druck der Welle auf dem Rand des Hindernisses verschwindet, sprechen wir von einem schallweichen Hindernis. Dadurch entsteht ein äußeres Dirichlet Problem. Falls die Normalgeschwindigkeit der Welle auf dem Rand des Hindernisses verschwindet, haben wir es mit einem äußeren Neumann Problem zu tun. Ein solches Hindernis nennen wir schallhart.

Am Anfang interessiert man sich nur für die Berechnung der durch das (bekannte) Hindernis gestreuten Welle, was wir heute als direktes Problem bezeichnen. Für hinreichend glatte geschlossene Flächen (3-D) hat z.B. Weyl [31] die Eindeutigkeit und Existenz der Lösung zum Dirichlet Problem mit einem Doppelschichtpotential Ansatz bewiesen. Leis [21] hat die eindeutige Lösbarkeit des Neumann Problems mit Hilfe eines Einfachschichtpotential Ansatzes geklärt. Der Eindeutigkeitsbeweis basiert dabei auf der Arbeit von Rellich [29]. In beiden Fällen führt der Lösungsansatz zu Integralgleichungen zweiter Art, deren Lösungstheorie schon in der Potentialtheorie bekannt ist (s. Kellogg [13]). Die Methode läßt sich nach leichterer Modifikation auch auf hinreichend glatte geschlossene Kurven in \mathbb{R}^2 übertragen (s. [6]).

Die Behandlung von offenen Kurven in \mathbb{R}^2 wurde erstmals von Hayashi [12] vorgenommen. Im Gegensatz zu dem Fall geschlossener Kurven entsteht dort eine Integralgleichung erster Art. In diesem Fall ist die Riesz-Fredholm Theorie nicht mehr unmittelbar anwendbar. Die von Wickham in [32] entwickelte Methode mit der sogenannten „Crack Green Funktion“ kann dabei helfen, das Streuproblem in eine Integralgleichung zweiter Art zu überführen. Danach kann die Riesz-Fredholm Theorie auf die daraus resultierende Gleichung

chung angewendet werden. Die zusätzliche Schwierigkeit des Randwertproblems für den offenen Bogen besteht darin, daß die Lösung nicht mehr glatt ist. Die Lösung der Integralgleichung besitzt eine Wurzelsingularität (s. Martin [24]). Diesem Verhalten muss man bei dem numerischen Lösungsverfahren besondere Aufmerksamkeit schenken. In unserer Arbeit kümmert sich die in [33] vorgestellte Cosinus-Substitution um die Wurzelsingularität der Lösung. Wir werden später noch einmal zu diesem Punkt zurückkehren. Weitere Behandlungen der (direkten) Streuprobleme für den schallweichen bzw. schallharten Bogen findet man z.B. in [25], [30], [22] und [2].

Während das direkte Problem aus der Kenntnis des Hindernisses als Auskunft die gestreute Welle gibt, nimmt das inverse Problem diese als Eingabe für die Bestimmung des Hindernisses. Allgemein gesprochen lassen sich die inversen akustischen Streuprobleme in zwei Kategorien teilen, inverse Objekte Probleme und inverse Medien Probleme. Bei den inversen Objekte Probleme wird anhand der vorgegebenen Randbedingungen und des Kenntnisses des Fernfeldes das homogene Hindernis erforscht. In der einfachsten Fassung sind die Hindernisse bei den inversen Medien Probleme inhomogen, d.h. die konstitutiven Parameter des Objektes ändern sich stetig. Die Aufgabe der inversen Medien Probleme ist dann die Bestimmung eines Parameters oder mehrerer Parameter.

Für die Behandlung der inversen Randwertprobleme im Fall geschlossener Kurve wollen wir auf die Artikel [14], [15], [19] und die Monographien [5] (inverse Objekte Probleme), [6] verweisen.

Das inverse akustische Streuproblem für einen offenen Bogen wurde erstmals von Kress in der Arbeit [16] behandelt. Dort wurde der Fall eines schallweichen Bogens untersucht (Dirichlet Problem). Für den Fall eines schallharten Bogens (Neumann Problem) sei auf die Dissertation von Mönch [26] verwiesen.

Die Idee dieser Arbeit ist eine Lösungstheorie wie in [16] und [26] für inversen Medien Probleme zu entwickeln. Diesem Gedanke zufolge untersuchen wir in dieser Arbeit ein Impedanz Randwertproblem für einen offenen Bogen in \mathbb{R}^2 . Da eine vernünftige Untersuchung von inversem Problem ohne solides Wissen über das direkte Problem nicht stattfinden kann, werden wir diese Arbeit in zwei Teile unterteilen. In dem ersten Teil untersuchen wir das direkte Impedanzproblem. Der zweite Teil dieser Arbeit wird sich dann dem inversen Problem widmen.

Im Kapitel 2 wird zunächst das direkte Impedanz Randwertproblem für einen C^3 -glatten Bogen $\Gamma \in \mathbb{R}^2$ erklärt. Hierbei handelt es sich um die Bestimmung einer ausstrahlenden Lösung u der Helmholtzgleichung, die auf

den beiden Ufern des Bogens eine Impedanz Randbedingung der Form

$$\frac{\partial u_{\pm}}{\partial \nu} \pm ik\lambda u_{\pm} = f_{\pm} \quad \text{auf } \Gamma$$

erfüllt. Dabei wird von der Impedanzfunktion vorausgesetzt

$$\operatorname{Re} \lambda \geq 0 \quad \text{auf } \Gamma.$$

Wir heben hervor, daß in der Problemformulierung keine expliziten Vorgaben über die Art der Singularität von u in den Endpunkten von Γ gemacht wird. Der Nachweis für die Eindeutigkeit der Lösung erfolgt mit dem Greenschen Satz und dem Rellich Lemma. Dabei wird aufbauend auf dem Beweis von Mönch für das Neumannsche Problem, d.h. den Fall $\lambda = 0$, eine Idee von Heinz zur Berücksichtigung der Endpunktsingularitäten im Greenschen Satz benutzt. Während der Existenzbeweis für das Dirichlet oder das Neumann Problem mit einem Einfachschichtpotential oder einem Doppelschichtpotential gelingt, ist beim Impedanz Randwertproblem eine Kombination aus Einfachschichtpotential und Doppelschichtpotential erforderlich. Dieser führt auf ein System von zwei Integralgleichungen für die beiden unbekanntenen Dichten, welches wegen des Auftretens der Normalableitung des Doppelschichtpotentials hypersingulär ist. Zum Existenzbeweis (und zur späteren numerischen Lösung) wird das Integralgleichungssystem durch eine Parametrisierung des Bogens und die Cosinus Substitution auf ein Integralgleichungssystem auf dem Intervall $[0, \pi]$ zurückgeführt. Genauer haben wir das folgende System

$$\begin{cases} 2 \left(\int_0^{\pi} \left\{ \frac{1}{2\pi} \frac{\sin \sigma}{\cos \tau - \cos \sigma} \psi_1'(\tau) - \tilde{K}_1(\sigma, \tau) \psi_1(\tau) - \tilde{K}_2(\sigma, \tau) \psi_2(\tau) \right\} d\tau \right) \\ - ik\lambda(z(\cos(\sigma))) \psi_1(\sigma) \sin \sigma |z'(\cos \sigma)| = g_1(\sigma) \\ \psi_2(\sigma) - 2ik\lambda(z(\cos(\sigma))) \int_0^{\pi} \left\{ \tilde{K}_3(\sigma, \tau) \psi_1(\tau) + \tilde{K}_4(\sigma, \tau) \psi_2(\tau) \right\} d\tau \\ = g_2(\sigma), \quad \sigma \in [0, \pi], \end{cases}$$

wobei die Kerne $\tilde{K}_i, i = 1, \dots, 4$ logarithmische Singularität besitzen. Anders als beim Dirichlet bzw. Neumann Problem kann das System weder gerade noch ungerade und periodisch auf $[0, 2\pi]$ fortgesetzt werden, sondern muss durch Regularisierung des hypersingulären Operators auf $[0, \pi]$ mittels Riesz Theorie gelöst werden. Die Ursache für die obigen Erschwernisse liegt in dem Umstand, daß die Cosinus Substitution die Endpunktsingularitäten nicht völlig beseitigt, sondern nur abmildert. Grob gesprochen verhält sich die Lösung des Dirichlet und des Neumann Problems in einer Umgebung der

Endpunkte wie $u(s) = \sqrt{s}w(s)$, wobei s der Abstand zu den Endpunkten angibt und w so glatt ist wie der Bogen und die Randwerte. Dies ändert sich beim Impedanzproblem. Die Lösung verhält sich in der Nähe der Endpunkte zwar noch wie $u(s) = \sqrt{s}w(s)$, aber die Funktion w besitzt nun eine logarithmische Singularität.

Im Kapitel 3 wird ein numerisches Verfahren zum Lösen des in dem letzten Kapitel gewonnenen Integralgleichungssystems beschrieben. Dieses numerische Verfahren ist im Wesentlichen eine Kombination von Quadraturformelverfahren und Kollokationsverfahren. Zunächst werden Quadraturformelverfahren eingesetzt, wobei die Integrale in dem Gleichungssystem durch interpolatorische Quadraturformeln ersetzt werden. Die hier benötigten Quadraturformeln, die die Integrale für verschiedene Kerne über $[0, \pi]$ approximieren, werden in dem ersten Abschnitt entwickelt. Um ein voll diskretes System zu erhalten, wird noch das Kollokationsverfahren verwendet. Das ursprüngliche Integralgleichungssystem wird dadurch approximativ auf ein lineares Gleichungssystem reduziert. Das resultierende lineare Gleichungssystem können wir dann z.B. mit dem Gauß Eliminationsverfahren lösen. Wegen der Endpunktsingularitäten der Lösung muss das Gitter in der Nähe der beiden Endpunkte noch verfeinert werden. Während die Cosinus Substitution bei Dirichlet und auch Neumann Probleme sehr erfolgreich ist, führt sie nur zum Teilerfolg im Fall des Impedanz Problems. Das liegt daran, daß die Lösung eine zusätzliche logarithmische Singularität hat. Die Fehleranalyse des numerischen Verfahrens wird nach klassischem Vorgehen in Hölderräume durchgeführt. Das Konvergenzverhalten beim Impedanzproblem ist anders als beim Dirichlet oder Neumann Problem. Wegen der Singularität der Lösung kann bei dem Impedanzproblem keine exponentielle Konvergenz erwartet werden.

In dem vierten Kapitel werden wir anhand einiger Beispiele das numerische Verfahren testen. Wir berechnen jeweils das Fernfeld des gestreuten Feldes. Ziemlich unterschiedliches Konvergenzverhalten für verschiedene Gruppen von Impedanzen werden wir hier beobachten können. Auf den Vergleich zu dem Neumann Problem wird Bedeutung gelegt. Dadurch werden wir den Einfluss der Endpunktsingularität auf die Konvergenzgeschwindigkeit deutlicher erkennen können.

In dem letzten Kapitel werden wir uns mit einem inversen Problem befassen. Das Ziel dieses inversen Problems ist die Impedanzfunktion λ unter der Voraussetzung des bekannten Bogens zu bestimmen. Als Eingabe des inversen Problems haben wir das gemessene Fernfeld u_∞ . Als erstes beweisen wir ein Eindeutigkeitsresultat. Numerisch lösen wir diese Aufgabe in zwei Schritten. Zunächst wird der Fernfeldoperator

$$F : \Psi \mapsto u_\infty$$

definiert, wobei $\Psi = (\psi_1, \psi_2)$ die Dichte in der Potentialdarstellung des gestreuten Feldes u^s ist. Nach dem Rellich Lemma ist F wohl definiert. In dem ersten Schritt wird die Gleichung $F(\Psi) = u_\infty$ gelöst. Da der Fernfeldoperator kompakt ist, ist das Lösen nach Ψ schlecht gestellt. Diesem zufolge muß hier ein Regularisierungsverfahren verwendet werden. Zur Formulierung der Tikhonov Regularisierung beweisen wir, daß F injektiv ist und dichten Wertebereich besitzt. Den Regularisierungsparameter in der Tikhonov Regularisierung

$$(\alpha I + F^*F)\Psi_\alpha = F^*u_\infty, \quad \alpha > 0.$$

bestimmen wir nach dem Diskrepanzprinzip. Im zweiten Schritt werden wir die Impedanzfunktion anhand der Randbedingungen bestimmen. Die Impedanzfunktion läßt sich nach den Randbedingungen und den Sprungbeziehungen der Potentiale in einer einfachen Form darstellen :

$$\lambda = \frac{\psi_2}{2iku},$$

wobei $u := u^i + u^s$ das Gesamtfeld ist. Aus dieser Darstellung ist es ersichtlich, daß die Lösung in der Nähe der Nullstellen von dem Gesamtfeld u unstabil sein könnte. Um eine stabilere Lösung zu erhalten, wird hier noch die Methode der kleinsten Quadrate eingesetzt. Am Ende dieses Abschnittes zeigen wir einige Beispiele sowohl für exakte Daten als auch für fehlerhafte Daten.

Herrn Prof. Dr. R. Kreß möchte ich für die Anregung zur Beschäftigung mit dieser interessanten Thematik und für seine wertvollen Ratschläge bei der Anfertigung dieser Arbeit recht herzlich danken. Herrn Dr. R. Potthast danke ich für die Übernahme des Korreferates. Diese Arbeit wurde finanziell zum größten Teil unterstützt von der Nachwuchsforschergruppe „Neue numerische Verfahren zur Lösung inverser Probleme“, dafür bedanke ich mich.

Kapitel 2

Das direkte Impedanzrandwertproblem für einen Kurvenbogen in \mathbb{R}^2

In diesem Kapitel werden wir das direkte Problem für unsere Aufgabe definieren. Anschließend wird die Eindeutigkeit des direkten Problems unter Verwendung eines speziellen Greenschen Satzes und des Rellich Lemmas bewiesen. Durch Parametrisierung des Bogens und die Impedanzrandbedingungen wird ein hypersinguläres Integralgleichungssystem entstehen. Die Technik der Cosinus-Substitution ermöglicht uns, dieses Gleichungssystem in eine leichter behandelbare Form zu bringen. Nachdem die Eindeutigkeit des Problems festgestellt worden ist, können wir die Lösbarkeit des Problems mit Hilfe der Riesz Theorie beweisen.

2.1 Das direkte Randwertproblem

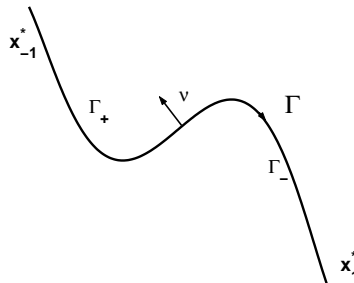


Abbildung 2.1: Offener Bogen

Es sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ ein Kurvenbogen der Klasse C^3 , d.h. $\Gamma = \{z(s) : s \in [-1, 1]\}$ mit injektivem und dreimal stetig differenzierbarem $z : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$. Ferner seien die Endpunkte des Bogens mit $x_{-1}^* := z(-1)$ und $x_1^* := z(1)$ bezeichnet. Mit Γ_0 bezeichnen wir die Menge $\Gamma \setminus \{x_{-1}^*, x_1^*\}$. Die Richtung des Kurvenbogens sei von x_{-1}^* nach x_1^* . Darüber hinaus bezeichnen wir mit Γ_+ bzw. Γ_- die linke bzw. rechte Seite von Γ . ν sei die in Richtung Γ_+ orientierte Einheitsnormale.

Wir betrachten das Streuproblem für zeitharmonische Wellen mit Impedanzrandbedingungen.

Definition 2.1. (Das direkte Impedanzproblem)

Gesucht wird eine Funktion $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma)$, welche sich nach Γ_+ und nach Γ_- stetig fortsetzen läßt in dem Sinne, daß

$$u_{\pm}(x) := \lim_{h \rightarrow 0} u(x \pm h\nu(x))$$

gleichmäßig für alle $x \in \Gamma$ existiert. Ferner genügt u den folgenden Bedingungen :

1. u ist stetig in den beiden Endpunkten x_{-1}^*, x_1^* .
2. $\Delta u + k^2 u = 0$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$, $k > 0$.
3. Die Normalableitungen

$$\frac{\partial u_{\pm}(x)}{\partial \nu} := \lim_{h \rightarrow +0} \langle \nu(x), \text{grad } u(x \pm h\nu(x)) \rangle \quad (2.1)$$

existieren für alle $x \in \Gamma_0$ lokal gleichmäßig.

4. Für $\lambda \in C^{0,\alpha}(\Gamma)$ mit $\text{Re}(\lambda) \geq 0$ sollen die Impedanzrandbedingungen

$$\frac{\partial u_{\pm}}{\partial \nu} \pm ik\lambda u_{\pm} = f_{\pm} \quad \text{auf } \Gamma_0 \quad (2.2)$$

erfüllt werden, wobei $f_{\pm} \in C^{0,\alpha}(\Gamma)$.

5. u erfüllt die *Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung*, d.h.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} - iku \right) = 0, \quad r := |x|,$$

gleichmäßig für alle Richtungen $\hat{x} := \frac{x}{|x|}$.

2.2 Eindeutigkeit der Lösung des Randwertproblems

In diesem Abschnitt wollen wir die Eindeutigkeit des eben definierten Randwertproblems feststellen. Wie beim Randwertproblem für geschlossene Kurven spielt die Gültigkeit des Greenschen Satzes eine wichtige Rolle. In dem nächsten Lemma formulieren wir einen Greenschen Satz, der für das Impedanzproblem geeignet ist. Für $R > 0$ definieren wir das offene Kreisgebiet

$$B_R := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < R\}$$

Lemma 2.1. *Sei u eine Lösung des homogenen Impedanzrandwertproblems für den offenen Bogen. Dann gelten für genügend großes R*

1. $\text{grad } u \in L^2(B_R)$ und
2. der Greensche Satz

$$\begin{aligned} & \int_{B_R} |\text{grad} u(y)|^2 dy - k^2 \int_{B_R} |u(y)|^2 dy \\ &= \int_{\partial B_R} u(y) \frac{\partial \bar{u}(y)}{\partial \nu} ds(y) - ik \int_{\Gamma} \bar{\lambda}(y) (|u_+(y)|^2 + |u_-(y)|^2) ds(y). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Beweis: 1. Wir nehmen zuerst an, daß die Lösung u des homogenen Randwertproblems reellwertig ist. Nun definieren wir eine Funktion

$$v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad v \in C^2(\mathbb{R}^2), \quad v(x_i^*) = u(x_i^*), \quad i = -1, 1.$$

Jetzt betrachten wir die Funktion

$$w := u - v$$

Aus den Definitionen von v, w folgt $w(x_{-1}^*) = w(x_1^*) = 0$. Nun wählen wir eine monoton wachsende ungerade Funktion $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ mit der Eigenschaft

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 1 \\ x, & 2 \leq x \end{cases}$$

Wir betrachten die Folge

$$w_n := \frac{\varphi(nw)}{n}$$

Es ist nach dieser Definition klar, daß die Folge w_n gleichmäßig gegen w konvergiert. Außerdem ist noch zu beobachten, daß die Funktionen w_n in einer Umgebung der beiden Endpunkte wegen der Definition von w verschwinden. Eine Anwendung des ersten Greenschen Satzes auf w_n, w in B_R ergibt

$$\begin{aligned} \int_{B_R} \{ \langle \text{grad} w_n, \text{grad} w \rangle + w_n \Delta w \} dy \\ = \int_{\partial B_R} w_n \frac{\partial w}{\partial \nu} ds - \int_{\Gamma} (w_{n,+} \frac{\partial w_+}{\partial \nu} - w_{n,-} \frac{\partial w_-}{\partial \nu}) ds, \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach der Definition ist es klar, daß die rechte Seite und der zweite Term der linken Seite beschränkt sind für alle $n \in \mathbb{N}$. Es folgt unmittelbar

$$\int_{B_R} \langle \text{grad} w_n(y), \text{grad} w(y) \rangle dy < \infty, \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Es gilt außerdem

$$\langle \text{grad} w_n(y), \text{grad} w(y) \rangle = \varphi'(nw(y)) |\text{grad} w(y)|^2 \geq 0$$

nach der Definition von φ . Ferner haben wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \text{grad} w_n(y), \text{grad} w(y) \rangle = |\text{grad} w(y)|^2$$

für alle $y \notin S := \{y \in B_R \mid w(y) = 0 \wedge \text{grad} w(y) \neq 0\}$, welche eine Nullmenge ist. Daher können wir das *Lemma von Fatou* auf die Folge

$$\langle \text{grad} w_n, \text{grad} w \rangle_n$$

anwenden und erhalten

$$\text{grad} w \in L^2(B_R).$$

Daraus folgt

$$\text{grad} u = \text{grad} w + \text{grad} v \in L^2(B_R).$$

Sei nun u eine komplexwertige Lösung des homogenen Randwertproblems. Dann erfüllen $\text{Re}(u)$ und $\text{Im}(u)$ die Voraussetzung des Lemmas. Es gilt dann

$$\text{grad}(\text{Re}(u)) \in L^2(B_R), \quad \text{grad}(\text{Im}(u)) \in L^2(B_R).$$

Daraus folgt

$$\text{grad} u = \text{grad}(\text{Re}(u)) + i \text{grad}(\text{Im}(u)) \in L^2(B_R).$$

2. Um die Aussage über den Greenschen Satz zu beweisen, wenden wir den (klassischen) Greenschen Satz auf das Gebiet $B_R \setminus (B_\varepsilon(x_{-1}^*) \cup B_\varepsilon(x_1^*))$ an. Wir erhalten nämlich

$$\begin{aligned} & \int_{B_R \setminus (B_\varepsilon(x_{-1}^*) \cup B_\varepsilon(x_1^*))} |\text{grad } u|^2 dy - k^2 \int_{B_R \setminus (B_\varepsilon(x_{-1}^*) \cup B_\varepsilon(x_1^*))} |u|^2 dy \\ &= \int_{\partial B_R} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} ds - \int_{\Gamma \setminus \{(B_\varepsilon(x_{-1}^*) \cup B_\varepsilon(x_1^*)) \cap \Gamma\}} ik\bar{\lambda}(|u_+|^2 + |u_-|^2) ds \\ & \quad - \int_{\partial B_\varepsilon(x_{-1}^*)} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} ds - \int_{\partial B_\varepsilon(x_1^*)} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} ds \end{aligned}$$

Das Lemma ist dann bewiesen, wenn wir zeigen können, daß

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon(x_i^*)} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} ds = 0, \quad i = -1, 1. \quad (2.4)$$

Denn wir können dann den Konvergenzsatz von Lebesgue auf die Funktion $\chi_{B_R \setminus (B_\varepsilon(x_{-1}^*) \cup B_\varepsilon(x_1^*))} (|\text{grad } u|^2 - k^2|u|^2)$ anwenden. Der Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ liefert dann die Behauptung. Um (2.4) zu zeigen, definieren wir

$$I_i(\varepsilon) := \int_{\partial B_\varepsilon(x_i^*)} u(y) \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} ds, \quad i = -1, 1.$$

Mit Hilfe von Cauchy-Schwarz Ungleichung schätzen wir $I_i(\varepsilon)$ ab :

$$|I_i(\varepsilon)| \leq \|u\|_\infty \int_{\partial B_\varepsilon(x_i^*)} \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} \right| ds \leq \|u\|_\infty \sqrt{2\pi\varepsilon} \left(\int_{\partial B_\varepsilon(x_i^*)} \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} \right|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \int_0^r \frac{|I_i(\varepsilon)|^2}{\varepsilon} d\varepsilon &\leq 2\pi \|u\|_\infty^2 \int_0^r \int_{\partial B_\varepsilon(x_i^*)} \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} \right|^2 ds d\varepsilon \\ &\leq 2\pi \|u\|_\infty^2 \|\text{grad } u\|_{L^2(B_R)}^2 < \infty. \end{aligned}$$

Der letzten Ungleichung zufolge existieren Teilfolgen $\{\varepsilon_{i,k}\}_k$ von $\{\varepsilon\}$ mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} I_i(\varepsilon_{i,k}) = 0, \quad i = -1, 1.$$

Dies impliziert $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} I_i(\varepsilon) = 0, i = -1, 1$. Also ist das Lemma bewiesen. □

Nachdem wir den Greenschen Satz auf der Hand haben, können wir den folgenden Eindeigkeitssatz beweisen.

Satz 2.2. *Das direkte Impedanzproblem 2.1 hat höchstens eine Lösung.*

Beweis: Sei u eine Lösung des homogenen Impedanzrandwertproblems 2.1. Aus der Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung folgt unmittelbar

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial B_R} \left\{ \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 + k^2 |u|^2 + 2k \operatorname{Im} \left(u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} \right) \right\} ds = 0$$

Der Greensche Satz (2.3) zusammen mit den Tatsachen, daß $k > 0$, $\operatorname{Re}(\lambda) \geq 0$, ergibt

$$\operatorname{Im} \int_{\partial B_R} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} \geq 0$$

Die beiden Gleichungen liefern dann

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial B_R} \left\{ \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 + k^2 |u|^2 \right\} ds = 0$$

Nach dem Rellich Lemma folgt nun $u \equiv 0$. □

2.3 Aufstellung des Integralgleichungssystems

In diesem Abschnitt werden wir mit Hilfe des Potentialansatzes ein Integralgleichungssystem aufbauen, dessen Lösung der Lösung des Randwertproblems entspricht. Wie beim Impedanzproblem für geschlossene Kurve wird ein Lösungsansatz durch einen gemischten Potentialansatz gegeben. Bevor wir einen Lösungsansatz überhaupt angeben können, müssen wir zuerst erklären, was man unter dem Begriff „Potential für offene Kurven“ versteht. Zuerst wird der folgende Funktionenraum für $0 < \alpha < 1$ definiert:

$$C_{0,lok}^{1,\alpha}(\Gamma) := C_{lok}^{1,\alpha}(\Gamma) \cap \{ \varphi \in C(\Gamma) \mid \varphi(x_{-1}^*) = \varphi(x_1^*) = 0, \varphi' \in L^1(\Gamma) \}$$

Für $\varphi \in C_{lok}^{1,\alpha}(\Gamma)$ ist φ lokal gleichmäßig hölderstetig differenzierbar auf Γ_0 .

Definition 2.2. (Einfachschichtpotential für offene Kurve)

Sei $\varphi \in C(\Gamma)$. Dann heißt

$$u(x) := \int_{\Gamma} \Phi(x, y) \varphi(y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$$

das *Einfachschichtpotential mit Dichte* φ .

Definition 2.3. (Doppelschichtpotential für offene Kurve)

Sei $\varphi \in C_{0,lok}^{1,\alpha}(\Gamma)$. Dann heißt

$$v(x) := \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \varphi(y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$$

das *Doppelschichtpotential mit Dichte φ* .

Heuristisch gesehen sichert die Wahl des Funktionenraumes $C_{0,lok}^{1,\alpha}(\Gamma)$ die obige Definition des Doppelschichtpotentials. Später werden wir sehen, daß die Funktionen aus diesem Raum noch andere interessante Eigenschaften haben.

Zunächst wollen wir aber einige Eigenschaften der Potentiale untersuchen, die für unseren Zweck nötig sind. Grob gesagt haben die Potentiale für einen offenen Bogen die gleichen Eigenschaften wie die für eine geschlossene Kurve.

Die Idee besteht darin, daß wir die offene Kurve zu einer geschlossenen Kurve ergänzen und die Dichten durch Null fortsetzen. Wir fassen einige Ergebnisse in dem folgenden Satz zusammen.

Satz 2.3.

1. Das *Einfachschichtpotential u und das Doppelschichtpotential v sind ausstrahlende Lösungen der Helmholtzgleichung in $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$.*
2. Das *Einfachschichtpotential u mit Dichte $\varphi \in C(\Gamma)$ ist hölderstetig in \mathbb{R}^2 .*
3. *Für die Normalableitung des Einfachschichtpotentials u mit Dichte $\varphi \in C(\Gamma)$ gilt die folgende Sprungbeziehung:*

$$\frac{\partial u_{\pm}(x)}{\partial \nu(x)} = \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} \varphi(y) ds(y) \mp \frac{1}{2} \varphi(x), \quad x \in \Gamma_0. \quad (2.5)$$

4. *Das Doppelschichtpotential v mit Dichte $\varphi \in C_{0,lok}^{1,\alpha}(\Gamma)$ ist hölderstetig fortsetzbar nach Γ . Es gilt ferner die folgende Sprungbeziehung:*

$$v_{\pm}(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \varphi(y) ds(y) \pm \frac{1}{2} \varphi(x), \quad x \in \Gamma. \quad (2.6)$$

5. *Der Gradient des Doppelschichtpotentials mit der Dichte $\varphi \in C_{0,lok}^{1,\alpha}$ ist hölderstetig fortsetzbar von $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ nach Γ_0 . Die Normalableitung von v ist gegeben durch*

$$\frac{\partial v_{\pm}(x)}{\partial \nu(x)} = \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \varphi(y) ds(y), \quad x \in \Gamma_0. \quad (2.7)$$

Beweis: Wir geben hier nur den Beweis für 3 an. Die Beweise der anderen Behauptungen sind analog. Um Behauptung 3 zu beweisen, betrachten wir zunächst einen beliebigen, festen Punkt $x_0 \in \Gamma_0$. Seien die Teilbögen Γ_1, Γ_2 so gewählt, daß $x_0 \in \Gamma_2 \subset \Gamma_1 \subset \Gamma_0$ gilt. Nun ergänzen wir den Teilbogen Γ_1 zu einer geschlossenen Kurve γ der Klasse C^2 . Dann können wir eine Funktion $\eta \in C^1(\Gamma)$ so wählen, daß sie die Eigenschaften $\eta|_{\Gamma_2} \equiv 1$ und $\eta|_{\Gamma \setminus \Gamma_1} \equiv 0$ besitzt. Nun zerlegen wir das Einfachschichtpotential u in zwei Termen

$$u(x_0) = u_1(x_0) + u_2(x_0)$$

mit

$$u_1(x_0) := \int_{\Gamma} \Phi(x_0, y) \eta(y) \varphi(y) ds(y), \quad u_2(x_0) := \int_{\Gamma} \Phi(x_0, y) (1 - \eta(y)) \varphi(y) ds(y)$$

Es gilt offenbar

$$u_1(x_0) = \int_{\gamma} \Phi(x_0, y) \eta(y) \chi_{\Gamma_1} \varphi(y) ds(y)$$

und

$$u_2(x_0) = \int_{\Gamma \setminus \Gamma_2} \Phi(x_0, y) (1 - \eta(y)) \varphi(y) ds(y)$$

Da die Dichte $\eta \chi_{\Gamma_1} \varphi \in C(\gamma)$, können die Sprungbeziehungen für die Normalableitung eines Einfachschichtpotentials mit stetiger Dichte über eine geschlossene Kurve auf u_1 angewandt werden. Für $x_0 \in \Gamma_2$ ist u_2 stetig differenzierbar. Zusammen ergeben sie die Behauptung 3. \square

Als Lösungsansatz für das Impedanz Randwertproblem wählen wir einen gemischten Potentialansatz :

$$u(x) := \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \varphi_1(y) ds(y) + \int_{\Gamma} \Phi(x, y) \varphi_2(y) ds(y), \quad (2.8)$$

wobei $\varphi_1 \in C_{0,lok}^{1,\alpha}(\Gamma)$, $\varphi_2 \in C(\Gamma) \cap C_{lok}^{0,\alpha}(\Gamma)$. Die zusätzliche Forderung der lokalen Hölderstetigkeit von φ_2 auf Γ_0 dient nur dazu, daß der Ansatz den Randbedingungen (2.2) genügt.

Nun wollen wir ein Integralgleichungssystem herleiten, welches die Dichten des Ansatzes erfüllen müssen, um das Randwertproblem zu lösen. Aus den Impedanzrandbedingungen (2.2) und den Sprungbeziehungen von dem

Satz 2.3 erhalten wir

$$\begin{aligned}
f_+(x) &= \frac{\partial u_+(x)}{\partial \nu(x)} + ik\lambda(x)u_+(x) \\
&= \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \varphi_1(y) ds(y) + \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} \varphi_2(y) - \frac{1}{2} \varphi_2(x) \\
&\quad + ik\lambda(x) \left(\int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \varphi_1(y) ds(y) + \int_{\Gamma} \Phi(x, y) \varphi_2(y) ds(y) + \frac{1}{2} \varphi_1(x) \right)
\end{aligned} \tag{2.9}$$

und

$$\begin{aligned}
f_-(x) &= \frac{\partial u_-(x)}{\partial \nu(x)} - ik\lambda(x)u_-(x) \\
&= \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \varphi_1(y) ds(y) + \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} \varphi_2(y) + \frac{1}{2} \varphi_2(x) \\
&\quad - ik\lambda(x) \left(\int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \varphi_1(y) ds(y) + \int_{\Gamma} \Phi(x, y) \varphi_2(y) ds(y) - \frac{1}{2} \varphi_1(x) \right)
\end{aligned} \tag{2.10}$$

für $x \in \Gamma_0$. Wir addieren die beiden letzten Gleichungen und subtrahieren (2.9) von (2.10). Wir erhalten dann das folgende Gleichungssystem, das äquivalent zu den Randbedingungen (2.2) ist.

$$\begin{cases}
2 \left(\frac{\partial}{\partial \nu(x)} \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \varphi_1(y) ds(y) + \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} \varphi_2(y) \right) + ik\lambda(x) \varphi_1(x) \\
= f_-(x) + f_+(x) \\
\varphi_2(x) - 2ik\lambda(x) \left(\int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \varphi_1(y) ds(y) + \int_{\Gamma} \Phi(x, y) \varphi_2(y) ds(y) \right) \\
= f_-(x) - f_+(x)
\end{cases} \tag{2.11}$$

für $x \in \Gamma_0$.

Bemerkung. Da Einfach- und Doppelschichtpotential nach Satz 2.3 (Teil 2 und 4) bis in den Endpunkten stetig sind, gilt die zweite Gleichung von (2.11) auch in den beiden Endpunkten.

Nach diesen Überlegungen gilt also der folgende Satz.

Satz 2.4. *Der Lösungsansatz (2.8) löst das Impedanzrandwertproblem, wenn die Dichten $\varphi_1 \in C_{0,lok}^{1,\alpha}(\Gamma)$, $\varphi_2 \in C(\Gamma) \cap C_{lok}^{0,\alpha}(\Gamma)$ Lösung des Gleichungssystems (2.11) sind.*

Beweis: Aus dem Satz 2.3 wissen wir, daß der Lösungsansatz u ausstrahlende Lösung der Helmholtzgleichung ist und die Regularitätsanforderungen aus Definition 2.1 erfüllt. Insbesondere folgt die Stetigkeit von u in den beiden Endpunkten aus den Sprungbeziehungen (2.6) unter Verwendung von $\varphi_1(x_j^*) = 0, j = 1, 2$ und der Tatsache, daß das Einfachschichtpotential in \mathbb{R}^2 stetig ist. Nach den obigen Überlegungen erfüllt der Lösungsansatz die Randbedingungen (2.2). \square

Bemerkung. Aus den beiden Sätzen 2.2, 2.4 wissen wir nun, daß das Gleichungssystem (2.11) höchstens eine Lösung hat.

Ehe wir das Gleichungssystem (2.11) lösen, überlegen wir uns, ob es Möglichkeiten gibt, das System zu vereinfachen. Eine grundlegende Technik erlaubt uns, den Grad der Singularität des ersten Terms der ersten Gleichung zu reduzieren. Dies wird im nächsten Satz beschrieben. Mit ϑ bezeichnen wir die Einheitstangente.

Satz 2.5. Für $\varphi \in C_{0,lok}^{1,\alpha}(\Gamma)$ gilt für $x \in \Gamma_0$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \varphi(y) ds(y) \\ &= \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \vartheta(x)} \frac{\partial \varphi(y)}{\partial \vartheta(y)} ds(y) + k^2 \left\langle \nu(x), \int_{\Gamma} \Phi(x, y) \varphi(y) \nu(y) ds(y) \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Beweis: Für den Gradienten des Doppelschichtpotentials v mit Dichte $\varphi \in C_{0,lok}^{1,\alpha}(\Gamma)$ gilt für $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$:

$$\operatorname{grad} v(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_2} w(x) + w_1(x), -\frac{\partial}{\partial x_1} w(x) + w_2(x) \right),$$

wobei

$$\begin{aligned} w(x) &:= - \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \vartheta(y)} \varphi(y) ds(y), \\ w_1(x) &:= k^2 \int_{\Gamma} \Phi(x, y) \nu_1(y) \varphi(y) ds(y) \\ w_2(x) &:= k^2 \int_{\Gamma} \Phi(x, y) \nu_2(y) \varphi(y) ds(y). \end{aligned}$$

Dies folgt leicht aus der Tatsache, daß die Grundlösung $\Phi(x, y)$ die Helmholtzgleichung für $x \notin \Gamma$ erfüllt. Da $\varphi \in C_{0,lok}^{1,\alpha}(\Gamma)$ ist, können wir die partielle Integration ohne weiteres durchführen. Wir erhalten

$$w(x) = \int_{\Gamma} \Phi(x, y) \frac{\partial \varphi(y)}{\partial \vartheta(y)} ds(y)$$

Nun brauchen wir nur noch die Sprungbeziehungen für den Gradienten eines Einfachschichtpotentials über geschlossene Kurve auf unseren Fall zu übertragen. Dies wird erledigt wie in dem Beweis von Satz 2.3. \square

Mit Hilfe des letzten Satzes sehen wir, daß das Gleichungssystem (2.11) zu dem folgenden Gleichungssystem äquivalent ist

$$\begin{cases} 2 \left\{ \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \vartheta(x)} \frac{\partial \varphi_1(y)}{\partial \vartheta(y)} ds(y) + k^2 \left\langle \nu(x), \int_{\Gamma} \Phi(x, y) \varphi_1(y) \nu(y) ds(y) \right\rangle \right. \\ \left. + \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} \varphi_2(y) ds(y) \right\} + ik\lambda(x) \varphi_1(x) \\ = f_-(x) + f_+(x) \\ \varphi_2(x) - 2ik\lambda(x) \left(\int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \varphi_1(y) ds(y) + \int_{\Gamma} \Phi(x, y) \varphi_2(y) ds(y) \right) \\ = f_-(x) - f_+(x) \end{cases} \quad (2.13)$$

für $x \in \Gamma_0$.

2.4 Die Parametrisierung

Die C^3 -glatte Kurve Γ wird wie im Abschnitt 2.1 parametrisiert. Nach der Parametrisierung mit $x = z(s)$, $y = z(t)$ erhalten wir das folgende parametrisierte Integralgleichungssystem:

$$\begin{cases} 2 \left(\int_{-1}^1 \left\{ K_{11}(s, t) \frac{d\varphi_1(z(t))}{dt} + K_{12}(s, t) \varphi_1(z(t)) + K_2(s, t) \varphi_2(z(t)) \right\} dt \right) \\ + ik\lambda(z(s)) \varphi_1(z(s)) |z'(s)| \\ = (f_- + f_+)(z(s)) |z'(s)| \\ \varphi_2(z(s)) - 2ik\lambda(z(s)) \left(\int_{-1}^1 \left\{ K_3(s, t) \varphi_1(z(t)) + K_4(s, t) \varphi_2(z(t)) \right\} dt \right) \\ = (f_- - f_+)(z(s)) \end{cases} \quad (2.14)$$

für $s \in (-1, 1)$ mit

$$\begin{aligned}
 K_{11}(s, t) &:= \frac{ik}{4} H_0^{(1)'}(k|z(s) - z(t)|) \frac{\langle z(s) - z(t), z'(s) \rangle}{|z(s) - z(t)|} \\
 K_{12}(s, t) &:= \frac{ik^2}{4} \langle z'(s), z'(t) \rangle H_0^{(1)}(k|z(s) - z(t)|) \\
 K_2(s, t) &:= \frac{ik}{4} H_0^{(1)'}(k|z(s) - z(t)|) \frac{\langle z(s) - z(t), n(s) \rangle}{|z(s) - z(t)|} |z'(s)| |z'(t)| \\
 K_3(s, t) &:= -\frac{ik}{4} H_0^{(1)'}(k|z(s) - z(t)|) \frac{\langle z(s) - z(t), n(t) \rangle}{|z(s) - z(t)|} |z'(t)| \\
 K_4(s, t) &:= \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|z(s) - z(t)|) |z'(t)|
 \end{aligned}$$

wobei $n(s) := \nu(z(s))$.

Um das Gleichungssystem zu lösen, spalten wir die Singularitäten von den Kernen ab. Der Kern K_{11} enthält sowohl eine logarithmische Singularität als auch eine Singularität vom Cauchy Typ. Wir spalten sie jedoch gleichzeitig ab. Wir machen es unter Berücksichtigung des Integrals, in dem K_{11} vorkommt. Mit Hilfe von partieller Integration und Ausnutzung der Voraussetzungen von $z \in C^3([-1, 1])$ und $\varphi_1 \in C_{0,lok}^{1,\alpha}(\Gamma)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 K_{11}(s, t) \frac{d\varphi_1(z(t))}{dt} dt \\
 = \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{2\pi} \frac{1}{t-s} \frac{d\varphi_1(z(t))}{dt} + \tilde{K}_{11}(s, t) \varphi_1(z(t)) \right\} dt \quad (2.15)
 \end{aligned}$$

wobei

$$\tilde{K}_{11}(s, t) = -\frac{d}{dt} \left\{ K_{11}(s, t) + \frac{1}{2\pi} \frac{1}{s-t} \right\}$$

Ein direktes Rechnen liefert

$$\begin{aligned}
 \tilde{K}_{11}(s, t) = \frac{i}{4} \left\{ \frac{k^2 \langle z(t) - z(s), z'(t) \rangle \langle z(s) - z(t), z'(s) \rangle}{|z(s) - z(t)|^2} H_0^{(1)}(k|z(s) - z(t)|) \right. \\
 + \frac{2k \langle z(s) - z(t), z'(t) \rangle \langle z(s) - z(t), z'(s) \rangle}{|z(s) - z(t)|^3} H_1^{(1)}(k|z(s) - z(t)|) \\
 \left. - \frac{k \langle z'(t), z'(s) \rangle}{|z(s) - z(t)|} H_1^{(1)}(k|z(s) - z(t)|) \right\} - \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(s-t)^2}
 \end{aligned}$$

Der Kern $\tilde{K}_{11}(s, t)$ besitzt also wie die anderen Kerne nur noch eine logarithmische Singularität. Wir fassen die Kerne \tilde{K}_{11} und K_{12} zusammen als den neuen Kern K_1 , genauer:

$$K_1(s, t) := \tilde{K}_{11}(s, t) + K_{12}(s, t), \quad s, t \in (-1, 1).$$

Nun spalten wir die logarithmische Singularität von den Kernen $K_i, i = 1, \dots, 4$, in der folgenden Form auf:

$$K_i(s, t) = M_i(s, t) \log 4(s - t)^2 + N_i(s, t), \quad i = 1, \dots, 4 \quad (2.16)$$

wobei

$$\begin{aligned} M_1(s, t) &= \frac{-1}{4\pi} \left\{ \frac{k^2 \langle z(t) - z(s), z'(t) \rangle \langle z(s) - z(t), z'(s) \rangle}{|z(s) - z(t)|^2} J_0(k|z(s) - z(t)|) \right. \\ &\quad + \frac{2k \langle z(s) - z(t), z'(t) \rangle \langle z(s) - z(t), z'(s) \rangle}{|z(s) - z(t)|^3} J_1(k|z(s) - z(t)|) \\ &\quad \left. - \frac{k \langle z'(t), z'(s) \rangle}{|z(s) - z(t)|} J_1(k|z(s) - z(t)|) + k^2 J_0(k|z(s) - z(t)|) \langle z'(s), z'(t) \rangle \right\} \\ M_2(s, t) &= \frac{k}{4\pi} J_1(k|z(s) - z(t)|) \frac{\langle z(s) - z(t), n(s) \rangle}{|z(s) - z(t)|} |z'(s)| |z'(t)| \\ M_3(s, t) &= -\frac{k}{4\pi} J_1(k|z(s) - z(t)|) \frac{\langle z(s) - z(t), n(t) \rangle}{|z(s) - z(t)|} |z'(t)| \\ M_4(s, t) &= -\frac{1}{4\pi} J_0(k|z(s) - z(t)|) |z'(t)| \end{aligned}$$

für $t \neq s$.

Nach dem Grenzübergang $t \rightarrow s$ erhalten wir

$$\begin{aligned} M_1(s, s) &= -\frac{k^2}{8\pi} |z'(s)|^2 \\ N_1(s, s) &= \frac{1}{4\pi} \left\{ (\pi i + 1 - 2C - 2 \log \frac{k|z'(s)|}{4}) \frac{k^2 |z'(s)|^2}{2} - \right. \\ &\quad \left. \frac{\langle z'(s), z''(s) \rangle^2}{|z'(s)|^4} + \frac{|z''(s)|^2}{2|z'(s)|^2} + \frac{\langle z'(s), z'''(s) \rangle}{3|z'(s)|^2} \right\} \\ M_2(s, s) &= 0 \\ N_2(s, s) &= \frac{1}{4\pi} \frac{z_1''(s) z_2'(s) - z_1'(s) z_2''(s)}{|z'(s)|} \\ M_3(s, s) &= 0 \\ N_3(s, s) &= \frac{1}{4\pi} \frac{z_1''(s) z_2'(s) - z_1'(s) z_2''(s)}{|z'(s)|^2} \\ M_4(s, s) &= -\frac{1}{4\pi} |z'(s)| \\ N_4(s, s) &= \left\{ \frac{i}{4} - \frac{1}{2\pi} (\log \frac{k|z'(s)|}{4} + C) \right\} |z'(s)| \end{aligned}$$

Nun kann das Integralgleichungssystem (2.14) in die folgende Form umgeschrieben werden:

$$\begin{cases} 2 \left(\int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{2\pi} \frac{1}{t-s} \frac{d\varphi_1(z(t))}{dt} + K_1(s,t)\varphi_1(z(t)) + K_2(s,t)\varphi_2(z(t)) \right\} dt \right) \\ \quad + ik\lambda(z(s))\varphi_1(z(s))|z'(s)| \\ = (f_- + f_+)(z(s))|z'(s)| \\ \varphi_2(z(s)) - 2ik\lambda(z(s)) \left(\int_{-1}^1 \left\{ K_3(s,t)\varphi_1(z(t)) + K_4(s,t)\varphi_2(z(t)) \right\} dt \right) \\ = (f_- - f_+)(z(s)) \end{cases} \quad (2.17)$$

für $s \in (-1, 1)$. Statt eine Lösungstheorie für dieses Gleichungssystem zu entwickeln, möchten wir die in [33] vorgestellte Cosinus-Substitution einführen. Die Cosinus-Substitution erlaubt uns eine einfachere Analyse und ergibt auch bessere numerische Ergebnisse. Nun wird das Gleichungssystem (2.17) mittels der Cosinus-Substitution $s = \cos \sigma$, $t = \cos \tau$ und durch Multiplikation der ersten Gleichung mit $\sin \sigma$ zu dem folgenden Gleichungssystem gebracht:

$$\begin{cases} 2 \left(\int_0^\pi \left\{ \frac{1}{2\pi} \frac{\sin \sigma}{\cos \tau - \cos \sigma} \psi_1'(\tau) - \tilde{K}_1(\sigma, \tau)\psi_1(\tau) - \tilde{K}_2(\sigma, \tau)\psi_2(\tau) \right\} d\tau \right) \\ \quad - ik\lambda(z(\cos(\sigma)))\psi_1(\sigma) \sin \sigma |z'(\cos \sigma)| = g_1(\sigma) \\ \psi_2(\sigma) - 2ik\lambda(z(\cos(\sigma))) \int_0^\pi \left\{ \tilde{K}_3(\sigma, \tau)\psi_1(\tau) + \tilde{K}_4(\sigma, \tau)\psi_2(\tau) \right\} d\tau \\ = g_2(\sigma), \end{cases} \quad (2.18)$$

für $\sigma \in [0, \pi]$, wobei

$$\begin{aligned} \psi_1(\sigma) &= \varphi_1(z(\cos \sigma)), & \psi_2(\sigma) &= \varphi_2(z(\cos \sigma)), \\ \tilde{K}_j(\sigma, \tau) &= \sin \sigma \sin \tau K_j(\cos \sigma, \cos \tau), & j &= 1, 2 \\ \tilde{K}_j(\sigma, \tau) &= \sin \tau K_j(\cos \sigma, \cos \tau), & j &= 3, 4 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} g_1(\sigma) &:= -(f_- + f_+)(z(\cos \sigma))|z'(\cos \sigma)| \sin \sigma \\ g_2(\sigma) &:= (f_- - f_+)(z(\cos \sigma)) \end{aligned}$$

Die Kerne \tilde{K}_i , $i = 1, \dots, 4$ werden entsprechend zu der folgenden Form transformiert:

$$\tilde{K}_i(\sigma, \tau) = \tilde{M}_i(\sigma, \tau) \log 4(\cos \tau - \cos \sigma)^2 + \tilde{N}_i(\sigma, \tau), \quad i = 1, \dots, 4 \quad (2.19)$$

Es sei bemerkt, daß durch Multiplikation mit $\sin \sigma$ die erste Gleichung des Gleichungssystems (2.17) auf $[0, \pi]$ fortgesetzt wurde. Für $0 < \alpha < 1$ definieren wir den folgenden Funktionenraum $C_0^{k,\alpha}[0, \pi]$ durch

$$C_0^{k,\alpha}[0, \pi] := \{\varphi \in C^{k,\alpha}[0, \pi], \quad \varphi(0) = \varphi(\pi) = 0\}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Für die beiden Gleichungssysteme (2.13),(2.18) gilt die folgende Beziehung:

Satz 2.6. Falls $\psi_1 \in C_0^{1,\alpha}[0, \pi]$, $\psi_2 \in C^{0,\alpha}[0, \pi]$ Lösung des Systems (2.18) sind, dann sind $\varphi_i(z(s)) := \psi_i(\arccos s)$, $i = 1, 2$ Lösung des Systems (2.13) mit $\varphi_1 \in C_{0,lok}^{1,\alpha}(\Gamma)$, $\varphi_2 \in C(\Gamma) \cap C_{lok}^{0,\alpha}(\Gamma)$

Beweis: Sei $(\psi_1, \psi_2) \in C_0^{1,\alpha}[0, \pi] \times C^{0,\alpha}[0, \pi]$ eine Lösung des Systems (2.18). Wir zeigen zunächst, daß $(\varphi_1, \varphi_2) \in C_0^{1,\alpha}(\Gamma) \times C(\Gamma)$ ist. Nach den Definitionen und der Tatsache $\psi_1(0) = \psi_1(\pi) = 0$ ist es klar, daß $(\varphi_1, \varphi_2) \in C_0^{0,\alpha}(\Gamma) \times C(\Gamma)$ ist. Die lokale Hölderstetigkeit von φ_2 auf Γ_0 folgt direkt aus der gleichmäßigen Hölderstetigkeit von ψ_2 . Also gilt $\varphi_2 \in C(\Gamma) \cap C_{lok}^{0,\alpha}(\Gamma)$. Durch Differentiation erhalten wir

$$\varphi_1'(z(s)) = -\frac{\psi_1'(\arccos s)}{|z'(s)|\sqrt{1-s^2}}$$

Daraus folgt $\varphi_1 \in C_{0,lok}^{1,\alpha}(\Gamma)$. Wir können jetzt die Normalableitungen des Einfachschicht- und Doppelschichtpotentials wie in den Satz 2.3 behandeln. Wir erhalten also, daß die eben definierten Dichten eine Lösung des Gleichungssystems (2.13) sind. Damit ist der Beweis erbracht. \square

Bemerkung. Aus dem Beweis von Satz 2.6 sehen wir, daß die erste Ableitung von φ_1 eine Wurzelsingularität in den Endpunkten besitzt.

Um die Darstellung des Gleichungssystems übersichtlicher zu machen, definieren wir an dieser Stelle die folgenden Operatoren

$$I_1, T_0, A_1, A_3, B_1, B_3 : C_0^{1,\alpha}[0, \pi] \rightarrow C_0^{0,\alpha}[0, \pi]$$

und

$$I_2, A_2, A_4, B_2, B_4 : C^{0,\alpha}[0, \pi] \rightarrow C^{0,\alpha}[0, \pi]$$

durch

$$\begin{aligned} (I_1\psi)(\sigma) &:= ik\lambda(z(\cos(\sigma))) \sin \sigma |z'(\cos \sigma)|\psi(\sigma), \\ (I_2\psi)(\sigma) &:= \psi(\sigma), \\ (T_0\psi)(\sigma) &:= -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin \sigma}{\cos \sigma - \cos \tau} \psi'(\tau) d\tau, \\ (A_i\psi)(\sigma) &:= 2 \int_0^\pi \tilde{M}_i(\sigma, \tau) \log 4(\cos \sigma - \cos \tau)^2 \psi(\tau) d\tau, \\ (B_i\psi)(\sigma) &:= 2 \int_0^\pi \tilde{N}_i(\sigma, \tau) \psi(\tau) d\tau \end{aligned} \tag{2.20}$$

für $i = 1, \dots, 4$.

Nun kann das Gleichungssystem (2.18) in die folgende Matrixform umgeschrieben werden :

$$(L - A) \Psi = g \quad (2.21)$$

wobei

$$L := \begin{pmatrix} T_0 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}, \quad A := \begin{pmatrix} (A_1 + B_1) + I_1 & (A_2 + B_2) \\ ik\lambda(A_3 + B_3) & ik\lambda(A_4 + B_4) \end{pmatrix}$$

$$\Psi := \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad g := \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$$

Bemerkung. Wir werden die behaupteten Abbildungseigenschaften des Operators T_0 in dem nächsten Abschnitt zeigen. Die Abbildungseigenschaften der übrigen Operatoren sind eine einfache Folgerung der entsprechenden Glätteheit der zugehörigen Kerne.

Wir fassen unsere bisherigen Ergebnisse in dem folgenden Satz zusammen.

Satz 2.7. *Der Operator $L - A : C_0^{1,\alpha}[0, \pi] \times C^{0,\alpha}[0, \pi] \rightarrow C_0^{0,\alpha}[0, \pi] \times C^{0,\alpha}[0, \pi]$ ist injektiv. Wenn Ψ die Lösung der Gleichung (2.21) ist, dann löst der Lösungsansatz (2.8) mit den im Satz 2.6 definierten Dichten das direkte Impedanzproblem 2.1*

Beweis: Folgerung von den Sätzen 2.6, 2.4 und 2.2 □

2.5 Ein Existenzbeweis

Wir wollen anhand der Riesz-Theorie die Existenz einer Lösung zu (2.21) beweisen. Wir müssen also die beschränkte Invertierbarkeit des Operators L und Kompaktheit des Operators A zeigen.

Zunächst betrachten wir den Operator $\tilde{T} : C_{odd}^{1,\alpha}[0, 2\pi] \rightarrow C_{odd}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$

$$(\tilde{T}\psi)(\sigma) := -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \sigma}{\cos \sigma - \cos \tau} \psi'(\tau) d\tau, \quad (2.22)$$

wobei

$$C_{odd}^{k,\alpha}[0, 2\pi] := \left\{ \psi \in C^{k,\alpha}[0, 2\pi], \quad \psi \text{ ungerade} \right\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Auf Grund der Identität

$$\frac{\sin \sigma}{\cos \sigma - \cos \tau} = \frac{1}{2} \left\{ \cot \frac{\tau - \sigma}{2} - \cot \frac{\sigma + \tau}{2} \right\}$$

gilt

$$\left(\tilde{T}\psi\right)(\sigma) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cot \frac{\tau - \sigma}{2} \psi'(\tau) d\tau. \quad (2.23)$$

Dieser Operator ist bekanntlich beschränkt invertierbar. Die beschränkte Invertierbarkeit des Operators T_0 ergibt sich aus dem folgenden Lemma.

Lemma 2.8. *Für $\psi \in C_0^{1,\alpha}[0, \pi]$ gilt: $T_0\psi = \tilde{T}\tilde{\psi}$, wobei $\tilde{\psi}$ ungerade Fortsetzung von ψ auf $[0, 2\pi]$ ist.*

Beweis: Nach der Definition von \tilde{T} (2.22) ist es klar, daß für eine 2π -periodische ungerade Funktion $\tilde{\psi}$ der Integrand in (2.22) bezüglich der Integralvariable gerade ist. Wegen der Beschränktheit des Operators \tilde{T} gilt

$$\left(\tilde{T}\tilde{\psi}\right)(\sigma) := -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \sigma}{\cos \sigma - \cos \tau} \tilde{\psi}'(\tau) d\tau = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin \sigma}{\cos \sigma - \cos \tau} \psi'(\tau) d\tau$$

Daher haben wir

$$T_0\psi = \tilde{T}\tilde{\psi}.$$

□

Die beschränkte Invertierbarkeit von T_0 folgt nun aus der von \tilde{T} . Also ist der Operator $T_0 : C_0^{1,\alpha}[0, \pi] \rightarrow C_0^{0,\alpha}[0, \pi]$ beschränkt invertierbar. Der Operator I_2 ist als Identität beschränkt invertierbar. Nach diesen Überlegungen gilt der folgende Satz

Satz 2.9. *Der Operator $L : C_0^{1,\alpha}[0, \pi] \rightarrow C_0^{0,\alpha}[0, \pi]$ ist beschränkt und besitzt ein beschränktes Inverse.*

Da die Funktionen $\tilde{N}_i, i = 1, \dots, 4$ stetig bzgl. der beiden Variablen sind, ist es klar, daß die Operatoren $B_1, B_3 : C_0^{1,\alpha}[0, \pi] \rightarrow C_0^{0,\alpha}[0, \pi]$ und $B_2, B_4 : C_0^{0,\alpha}[0, \pi] \rightarrow C_0^{0,\alpha}[0, \pi]$ kompakt sind.

Aus der trigonometrischen Identität

$$(\cos \sigma - \cos \tau)^2 = 4 \sin^2 \frac{\tau - \sigma}{2} \sin^2 \frac{\tau + \sigma}{2}$$

folgt

$$(A_i\psi) = 4 \int_0^\pi \tilde{M}_i(\sigma, \tau) \log 4 \sin^2 \frac{\tau - \sigma}{2} \psi(\tau) d\tau \quad (2.24)$$

Da die Funktionen $\tilde{M}_i, i = 1, \dots, 4$ stetig bzgl. der beiden Variablen und stetig differenzierbar bzgl. der ersten Variablen sind, sind die Operatoren $A_i, i = 1, \dots, 4$ kompakt. (Siehe dazu [17], Lemma 4.1.)

Der Operator I_1 ist kompakt, da er die Zusammensetzung eines beschränkten Operators und einer Einbettung $i : C_0^{1,\alpha}[0, \pi] \subset C_0^{0,\alpha}[0, \pi]$ ist.

Zusammengefasst haben wir den folgenden Satz

Satz 2.10. *Der Operator $A : C_0^{1,\alpha}[0, \pi] \times C^{0,\alpha}[0, \pi] \rightarrow C_0^{0,\alpha}[0, \pi] \times C^{0,\alpha}[0, \pi]$ ist kompakt*

Als Folgerung der Sätze 2.7, 2.9 und 2.10 haben wir also den folgenden Satz, der die eindeutige Lösbarkeit der Gleichung (2.21) behauptet :

Satz 2.11. *Zu jeder rechten Seite $g \in C_0^{0,\alpha}[0, \pi] \times C^{0,\alpha}[0, \pi]$ existiert genau eine Lösung $\Psi \in C_0^{1,\alpha}[0, \pi] \times C^{0,\alpha}[0, \pi]$ der Integralgleichung*

$$(L - A)\Psi = g$$

Beweis: Die Behauptung folgt direkt aus der Riesz-Theorie. □

Bemerkung. An dieser Stelle wollen wir darauf hinweisen, daß sich die Lösungstheorie der Gleichung (2.21) auf die Hilberträume übertragen lassen kann. Man hat zum Beispiel für $g \in L^2[0, \pi] \times L^2[0, \pi]$ die Lösung $\Psi \in H^1[0, \pi] \times L^2[0, \pi]$.

Aus den Sätzen 2.6, 2.11 folgt nun die eindeutige Lösbarkeit des Randwertproblems.

Satz 2.12. (Eindeutige Lösbarkeit des Randwertproblems)

Das direkte Impedanzrandwertproblem 2.1 ist eindeutig lösbar.

Wie bei den Behandlungen des Dirichletschen Problems oder des Neumannschen Problems hätten wir gerne das Gleichungssystem (2.18) auch auf $[0, 2\pi]$ fortgesetzt. Dann würden wir uns nur noch mit 2π -periodischen Operatoren beschäftigen zu müssen, deren Eigenschaften bzw. Lösungstheorien schon vorhanden sind. Es ist uns aber nicht gelungen, das Gleichungssystem fortzusetzen, ohne die Strukturen des Systems zu zerstören. Irgendwie ist das Gleichungssystem (2.18) nicht einheitlich. Wenn wir zum Beispiel die Dichte ψ_1 wie beim Neumann Problem (s. [26], [27]) ungerade auf $[0, 2\pi]$ fortsetzen möchten, dann bildet der Operator I_1 ungerade Funktionen auf gerade Funktionen ab. Deswegen können wir ψ_1 nicht ungerade fortsetzen. Wenn wir aber die Dichte ψ_1 gerade fortgesetzt hätten, dann würde der Operator T_0 keine Inverse besitzen. Wir sind daher gezwungen, das Gleichungssystem auf dem Intervall $[0, \pi]$ zu lösen. Wie wir später sehen werden, wird dies die numerischen Behandlungen noch erschweren.

Kapitel 3

Die numerische Behandlung des direkten Impedanzproblems

In diesem Kapitel soll ein numerisches Verfahren zum Lösen des direkten Impedanzproblems für einen Kurvenbogen in \mathbb{R}^2 entwickelt werden. Hier werden zunächst Quadraturformeln genutzt. Das resultierende Gleichungssystem lösen wir dann an den Kollokationspunkten. Anschließend werden wir eine Fehleranalyse durchführen.

3.1 Das Numerische Verfahren

In diesem Abschnitt werden wir ein numerisches Verfahren zum Lösen der Gleichung (2.21) beschreiben. Dieses Verfahren basiert im Wesentlichen auf Interpolation. Wir definieren zunächst die folgenden Räume der trigonometrischen Polynome auf dem Intervall $[0, \pi]$:

$$T_{1,n} := \left\{ \phi \in C_0[0, \pi] \mid \phi(\sigma) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k \sin k\sigma, \quad a_k \in \mathbb{C} \right\}$$
$$T_{2,n} := \left\{ \phi \in C[0, \pi] \mid \phi(\sigma) = \sum_{k=0}^n b_k \cos k\sigma, \quad b_k \in \mathbb{C} \right\}$$

Sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Wir wählen nun die $n + 1$ äquidistanten Stützstellen:

$$\sigma_j^{(n)} := \frac{j\pi}{n}, \quad j = 0, \dots, n$$

Jetzt wollen wir die Interpolationsaufgabe bezüglich der Stützstellen auf dem Raum

$$\mathcal{T}_n := T_{1,n} \times T_{2,n}$$

lösen. Der zugehörige Interpolationsoperator

$$\mathcal{P}_n : C_0[0, \pi] \times C[0, \pi] \rightarrow \mathcal{T}_n$$

wird dann komponentenweise definiert. Für $\Psi = (\psi_1, \psi_2)$ definieren wir

$$(\mathcal{P}_n \Psi)(\sigma) := (P_{1,n}\psi_1(\sigma), P_{2,n}\psi_2(\sigma)), \quad \sigma \in [0, \pi] \quad (3.1)$$

Für $\psi_1 \in C_0[0, \pi]$ haben wir

$$P_{1,n}\psi_1(\sigma) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k^{(n)} \sin k\sigma$$

mit Koeffizienten

$$a_k^{(n)} = \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \psi_1(\sigma_j^{(n)}) \sin k\sigma_j^{(n)}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Für $\psi_2 \in C[0, \pi]$ erhalten wir

$$P_{2,n}\psi_2(\sigma) = \frac{b_0^{(n)}}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} b_k^{(n)} \cos k\sigma + \frac{b_n^{(n)}}{2} \cos n\sigma$$

mit

$$b_k^{(n)} = \frac{1}{n} \psi_2(\sigma_0^{(n)}) + \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \psi_2(\sigma_j^{(n)}) \cos k\sigma_j^{(n)} + \frac{1}{n} \psi_2(\sigma_n^{(n)}) \cos k\sigma_n^{(n)}, \quad k = 0, \dots, n.$$

Die beiden Interpolationsoperatoren $P_{1,n}, P_{2,n}$ lassen sich in der folgenden Lagrangeschen Form darstellen: $(P_{i,n}\psi_i)(\sigma) = \sum_{j=0}^n \psi_i(\sigma_j^{(n)}) \mathcal{L}_{i,j}^{(n)}(\sigma)$, $i = 1, 2$ wobei $\mathcal{L}_{i,j}^{(n)}$, $j = 0, \dots, n$ die Lagrange Basis bezüglich der Stützstellen sind, welche durch

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{1,j}^{(n)}(\sigma) &:= \frac{1}{n} \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} \cos k(\sigma - \sigma_j^{(n)}) - \cos k(\sigma + \sigma_j^{(n)}) \right\} \\ &= \frac{1}{n} \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} 2 \sin k\sigma \sin k\sigma_j^{(n)} \right\} \end{aligned} \quad (3.2)$$

und

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{2,j}^{(n)}(\sigma) &:= \frac{1}{n} \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} \left[\cos k(\sigma + \sigma_j^{(n)}) + \cos k(\sigma - \sigma_j^{(n)}) \right] + 1 + (-1)^j \cos n\sigma \right\} \\ &= \frac{1}{n} \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} 2 \cos k\sigma \cos k\sigma_j^{(n)} + 1 + (-1)^j \cos n\sigma \right\} \end{aligned} \quad (3.3)$$

für $j = 1, \dots, n-1$ sowie

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{2,j}^{(n)}(\sigma) &:= \frac{1}{2n} \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} \left[\cos k(\sigma + \sigma_j^{(n)}) + \cos k(\sigma - \sigma_j^{(n)}) \right] + 1 + (-1)^j \cos n\sigma \right\} \\ &= \frac{1}{2n} \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} 2 \cos k\sigma \cos k\sigma_j^{(n)} + 1 + (-1)^j \cos n\sigma \right\} \end{aligned} \quad (3.4)$$

für $j = 0, n$ gegeben sind.

Sofern es kein Mißverständnis geben kann, werden wir in der Zukunft $\sigma_j^{(n)}$ einfach mit σ_j bezeichnen.

Um das numerische Verfahren zu beschreiben, benötigen wir noch konvergente Quadraturformeln für die Integraloperatoren. Während die Quadraturformeln für die Integrale (2.20) auf dem Intervalle $[0, 2\pi]$ schon seit lange benutzt worden sind ([11], [20], [23]), sind die Quadraturen auf $[0, \pi]$ noch nicht bekannt. Das folgende Lemma wird zur Beschreibung der Quadraturformeln gebraucht.

Lemma 3.1. *Es gilt*

$$1. \quad -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin \sigma}{\cos \sigma - \cos \tau} (\sin k\tau)' d\tau = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ k \sin k\sigma, & k > 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

$$2. \quad \int_0^\pi \log 4(\cos \tau - \cos \sigma)^2 \cos k\tau d\tau = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ \frac{-2\pi}{k} \cos k\sigma & k \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} 3. \quad & \int_0^\pi \log 4(\cos \tau - \cos \sigma)^2 \sin k\tau d\tau \\ &= \frac{2}{k} \left\{ (\cos k\sigma - (-1)^k) \log 4 \cos^2 \frac{\sigma}{2} + (1 - \cos k\sigma) \log 4 \sin^2 \frac{\sigma}{2} \right. \\ & \left. - \frac{1}{k} (1 - (-1)^k) - 2 \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{l} (1 - (-1)^l) \cos(k-l)\sigma \right\}, \quad k \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Beweis: Die erste Behauptung (3.5) folgt aus (2.23) und dem Integral

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cot \frac{\tau - \sigma}{2} \cos k\tau d\tau = -\sin k\sigma, \quad \sigma \in [0, 2\pi]$$

Aus der trigonometrischen Identität

$$(\cos \sigma - \cos \tau)^2 = 4 \sin^2 \frac{\tau - \sigma}{2} \sin^2 \frac{\tau + \sigma}{2}$$

folgt

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \log 4(\cos \tau - \cos \sigma)^2 e^{ik\tau} d\tau \\ &= \int_0^\pi \log \left(4 \sin^2 \frac{\tau - \sigma}{2} \right) e^{ik\tau} d\tau + \int_0^\pi \log \left(4 \sin^2 \frac{\tau + \sigma}{2} \right) e^{ik\tau} d\tau \\ &= e^{ik\sigma} \int_{-\sigma}^{\pi-\sigma} \log \left(4 \sin^2 \frac{\tau}{2} \right) e^{ik\tau} d\tau + e^{-ik\sigma} \int_\sigma^{\pi+\sigma} \log \left(4 \sin^2 \frac{\tau}{2} \right) e^{ik\tau} d\tau \end{aligned}$$

Für $k \in \mathbb{N}$ ergeben sich die Behauptungen (3.6), (3.7) durch Ausrechnen der beiden Integrale auf der rechten Seite, indem wir die folgenden Identitäten ausnutzen

$$\frac{d}{d\tau} \left\{ (e^{ik\tau} - 1) \log 4 \sin^2 \frac{\tau}{2} \right\} = ik e^{ik\tau} \log 4 \sin^2 \frac{\tau}{2} + (e^{ik\tau} - 1) \cot \frac{\tau}{2}$$

und

$$1 + 2 \sum_{l=1}^{k-1} e^{il\tau} + e^{ik\tau} = i(1 - e^{ik\tau}) \cot \frac{\tau}{2}$$

Für $k = 0$ gilt

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \log 4(\cos \tau - \cos \sigma)^2 d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \log 4(\cos \tau - \cos \sigma)^2 d\tau = \int_0^{2\pi} \log 4 \sin^2 \frac{\tau}{2} d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \log 4 \sin^2 \frac{\tau}{2} d\tau + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \log 4 \cos^2 \frac{\tau}{2} d\tau = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \log 4 \sin^2 \tau d\tau \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{4\pi} \log 4 \sin^2 \frac{\tau}{2} d\tau = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \log 4 \sin^2 \frac{\tau}{2} d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \log 4(\cos \tau - \cos \sigma)^2 d\tau \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\int_0^\pi \log 4(\cos \tau - \cos \sigma)^2 d\tau = 0.$$

□

Bevor wir das Quadraturformelverfahren beschreiben wollen, möchten wir noch einen Blick auf das Gleichungssystem (2.18) werfen. Wegen der Cosinus-Substitution besitzen alle Kerne der Integrale (außer dem ersten Integral der ersten Gleichung) den Faktor $\sin \tau$, den wir zuvor in die Kerne \tilde{K}_i (und auch in \tilde{M}_i, \tilde{N}_i) integriert haben. Das ist zwar für die Darstellung übersichtlicher, aber für die numerische Behandlung nicht geeignet. Der Grund dafür ist die Definition der Operatoren $P_{i,n}$. Der Operator $P_{i,n}$ bildet die Funktion ψ_i in den Raum $T_{i,n}$ ab, aber nicht $\sin \cdot \psi_i$. Deswegen werden wir den Faktor $\sin \tau$ aus den Kernen separieren müssen. Wir definieren daher die neuen Kerne \hat{M}_i, \hat{N}_i durch Abspalten des Faktors $\sin \tau$ aus den Kernen \tilde{M}_i, \tilde{N}_i . Genauer

$$\tilde{M}_i(\sigma, \tau) = \hat{M}_i(\sigma, \tau) \sin \tau, \quad \tilde{N}_i(\sigma, \tau) = \hat{N}_i(\sigma, \tau) \sin \tau, \quad i = 1, \dots, 4.$$

Nun führen wir die folgenden Quadraturformeln ein :

$$\int_0^\pi \frac{\sin \sigma}{\cos \sigma - \cos \tau} \psi_1'(\tau) d\tau \approx \int_0^\pi \frac{\sin \sigma}{\cos \sigma - \cos \tau} (P_{1,n} \psi_1')(\tau) d\tau, \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \tilde{M}_i(\sigma, \tau) \log 4(\cos \sigma - \cos \tau)^2 \psi_j(\tau) d\tau, \\ & \approx \int_0^\pi \log 4(\cos \sigma - \cos \tau)^2 P_{j,n}(\hat{M}_i(\sigma, \cdot) \psi_j)(\tau) \sin \tau d\tau, \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\int_0^\pi \tilde{N}_i(\sigma, \tau) \psi_j(\tau) d\tau \approx \int_0^\pi P_{j,n}(\hat{N}_i(\sigma, \cdot) \psi_j)(\tau) \sin \tau d\tau \quad (3.10)$$

Bemerkung. Da \mathcal{T}_n dicht in $C_0[0, \pi] \times C[0, \pi]$ ist, sind die oben eingeführten Formeln nach dem Lemma 3.1 und dem Satz von Szegö (siehe z.B. Theorem 12.4 in [18]) konvergent.

An dieser Stelle können wir die Quadraturoperatoren zu den einzelnen Komponenten in der Gleichung (2.21) definieren:

$$\begin{aligned} (T_0^{(n)} \psi_1)(\sigma) &:= -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin \sigma}{\cos \sigma - \cos \tau} (P_{1,n} \psi_1')(\tau) d\tau, \\ (A_i^{(n)} \psi_j)(\sigma) &:= 2 \int_0^\pi \log 4(\cos \sigma - \cos \tau)^2 P_{j,n}(\hat{M}_i(\sigma, \cdot) \psi_j)(\tau) \sin \tau d\tau, \\ (B_i^{(n)} \psi_j)(\sigma) &:= 2 \int_0^\pi P_{j,n}(\hat{N}_i(\sigma, \cdot) \psi_j)(\tau) \sin \tau d\tau \end{aligned} \quad (3.11)$$

für $j = 1, 2, i = j, j + 2$.

Eine Anwendung des Quadraturformelverfahrens auf (2.21) führt zu der folgenden semidiskretisierten Gleichung:

$$(L_n - A_n) \Psi = g \quad (3.12)$$

wobei

$$L_n := \begin{pmatrix} T_0^{(n)} & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}, \quad A_n := \begin{pmatrix} (A_1^{(n)} + B_1^{(n)}) + I_1 & (A_2^{(n)} + B_2^{(n)}) \\ ik\lambda(A_3^{(n)} + B_3^{(n)}) & ik\lambda(A_4^{(n)} + B_4^{(n)}) \end{pmatrix}$$

Um eine voll diskretisierte Gleichung zu gewinnen, wenden wir den (trigonometrischen) Interpolationsoperator \mathcal{P}_n auf die Gleichung (3.12) an. Wir erhalten

$$\mathcal{P}_n L_n \tilde{\Psi} - \mathcal{P}_n A_n \tilde{\Psi} = \mathcal{P}_n g$$

Wegen

$$\mathcal{P}_n L_n \tilde{\Psi} = L_n \tilde{\Psi} = L \tilde{\Psi}$$

für $\tilde{\Psi} \in \mathcal{T}_n$ läßt sich diese Gleichung noch vereinfachen. Wir erhalten also die Kollokationsgleichung

$$L \tilde{\Psi} - \mathcal{P}_n A_n \tilde{\Psi} = \mathcal{P}_n g \quad (3.13)$$

für $\tilde{\Psi} \in \mathcal{T}_n$. Dies bedeutet, daß wir die Gleichung (3.12) an den Stützstellen (Kollokationspunkten) lösen sollen.

Zweckmäßig geben wir auch das diskretisierte Gleichungssystem zu (2.18) an. Um das Gleichungssystem übersichtlicher zu schreiben, führen wir die folgenden Notationen ein:

$$\mathcal{C}_j^{(n)}(\sigma) := \frac{-1}{\pi} \int_0^\pi \cot \frac{\tau - \sigma}{2} \mathcal{L}'_{1,j}(\tau) d\tau \quad (3.14a)$$

$$\mathcal{D}_{i,j}^{(n)}(\sigma) := \int_0^\pi \log 4(\cos \tau - \cos \sigma)^2 \mathcal{L}_{i,j}^{(n)}(\tau) \sin \tau d\tau \quad (3.14b)$$

$$\mathcal{E}_{i,j}^{(n)} := \int_0^\pi \mathcal{L}_{i,j}^{(n)}(\tau) \sin \tau d\tau \quad (3.14c)$$

Nun haben wir ein lineares Gleichungssystem, das wir numerisch lösen können :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ \mathcal{C}_j^{(n)}(\sigma_i) - 2\mathcal{D}_{1,j}^{(n)}(\sigma_i) \hat{M}_1(\sigma_i, \sigma_j) - 2\mathcal{E}_{1,j}^{(n)} \hat{N}_1(\sigma_i, \sigma_j) \right\} \psi_1(\sigma_j) \\ - \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ 2\mathcal{D}_{2,j}^{(n)}(\sigma_i) \hat{M}_2(\sigma_i, \sigma_j) + 2\mathcal{E}_{2,j}^{(n)} \hat{N}_2(\sigma_i, \sigma_j) \right\} \psi_2(\sigma_j) \\ - ik\lambda \psi_1(\sigma_i) |z'(\cos \sigma_i)| \sin \sigma_i \\ = g_1(\sigma_i), \quad i = 1, \dots, n-1 \\ \psi_2(\sigma_i) - 2ik\lambda \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ \mathcal{D}_{1,j}^{(n)}(\sigma_i) \hat{M}_3(\sigma_i, \sigma_j) + \mathcal{E}_{1,j}^{(n)} \hat{N}_3(\sigma_i, \sigma_j) \right\} \psi_1(\sigma_j) \\ - 2ik\lambda \sum_{j=0}^n \left\{ \mathcal{D}_{2,j}^{(n)}(\sigma_i) \hat{M}_4(\sigma_i, \sigma_j) + \mathcal{E}_{2,j}^{(n)} \hat{N}_4(\sigma_i, \sigma_j) \right\} \psi_2(\sigma_j) \\ = g_2(\sigma_i), \quad i = 0, \dots, n. \end{cases} \quad (3.15)$$

3.2 Konvergenzuntersuchung

In diesem Abschnitt werden wir das Konvergenzverhalten des numerischen Verfahrens untersuchen. Wir werden zeigen, daß für hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$, die Kollokationsgleichung (3.13) eine eindeutige Lösung hat, welche gegen die wahre Lösung der Gleichung (2.21) konvergiert. Um dieses Ergebnis zu erhalten, werden wir zeigen, daß für $n \in \mathbb{N}$ groß genug, die Operatoren $L - \mathcal{P}_n A_n$ beschränkt sind und gegen $L - A$ gleichmäßig konvergieren. Aus dem folgenden Satz folgt dann die eindeutige Lösbarkeit der Kollokationsgleichung (3.13) und die Güte der Approximation.

Satz 3.2. *Seien X, Y Banachräume und sei $A : X \rightarrow Y$ ein beschränkter linearer Operator. Ferner sei $A_n : X \rightarrow Y$ eine in der Operatornorm gegen A konvergente Folge beschränkter linearer Operatoren, d.h. $\|A_n - A\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. Dann gilt folgendes:*

Besitzt A eine beschränkte Inverse, dann existiert für alle hinreichend großen n , genauer für alle n mit

$$\|A^{-1}(A_n - A)\| < 1,$$

der inverse Operator $A_n^{-1} : Y \rightarrow X$ und ist beschränkt durch

$$\|A_n^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}(A_n - A)\|}.$$

Für die Lösungen der Gleichungen

$$A\psi = f \quad \text{und} \quad A_n\psi_n = f_n$$

gilt die Fehlerabschätzung

$$\|\psi_n - \psi\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}(A_n - A)\|} \{ \|(A_n - A)\psi\| + \|f_n - f\| \}.$$

Beweis: Siehe [18], Theorem 10.1. □

Als erstes wollen wir deshalb die Beschränktheit des Operators $L - \mathcal{P}_n A_n$ für großes n bestätigen. Die Begründung dafür ist dieselbe wie für die des Operators $L - A$. Als nächstes wird der Interpolationsfehler der trigonometrischen Interpolation in Hölderräumen beschrieben.

Satz 3.3. *Es seien $0 \leq p \leq q, 0 < \alpha \leq \beta < 1$. Für $f \in C^{q,\beta}$ gilt die Fehlerabschätzung*

$$\|P_n f - f\|_{p,\alpha} \leq C \frac{\log n}{n^{q-p+\beta-\alpha}} \|f\|_{q,\beta}$$

Beweis: Siehe [28] Seite 40. \square

Nun wird die Operatornorm von A bzw. A_n abgeschätzt. Dazu wird wieder auf die Arbeit [17] verwiesen. Der dortige für 2π -periodische Funktionen ausgeführte Beweis ist auch in unserem Fall verwendbar. Es gilt nämlich

Satz 3.4. *Sei $K : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ p -mal stetig differenzierbar bezüglich der beiden Variablen und $(p+1)$ -mal stetig differenzierbar bezüglich der ersten Variable. Dann gilt für*

$$u(\sigma) := \int_0^\pi \log 4(\cos \sigma - \cos \tau)^2 K(\sigma, \tau) d\tau, \quad \sigma \in [0, \pi]$$

die Abschätzung

$$\|u\|_{p,\alpha} \leq C \left(\|K\|_{p,\infty} + \left\| \frac{\partial K}{\partial \sigma} \right\|_{p,\infty} \right), \quad \text{für alle } \alpha \in (0, 1)$$

mit einer Konstanten C , die nur von α und der nicht negativen ganzen Zahl p abhängt.

Nach dem letzten Satz können wir nun die Norm $\|A - A_n\|$ abschätzen. Laut der Definitionen reicht es aber, die Normen $\|A_i - A_i^{(n)}\|$ und $\|B_i - B_i^{(n)}\|$ abzuschätzen. Wir haben dann den folgenden Satz :

Satz 3.5. *Die Operatorfolge $A_i^{(n)} : C_0^{1,\gamma}[0, \pi] \rightarrow C_0^{0,\alpha}[0, \pi]$ konvergiert in der Operatornorm gegen $A_i : C_0^{1,\gamma}[0, \pi] \rightarrow C_0^{0,\alpha}[0, \pi]$ für alle $\alpha, \gamma \in (0, 1)$, wobei $i = 1, 3$. Für $i = 2, 4$ konvergiert die Operatorfolge $A_i^{(n)} : C^{0,\gamma}[0, \pi] \rightarrow C^{0,\alpha}[0, \pi]$ in der Operatornorm gegen $A_i : C^{0,\gamma}[0, \pi] \rightarrow C^{0,\alpha}[0, \pi]$ für alle $\alpha, \gamma \in (0, 1)$.*

Beweis: Um die Behauptungen zu beweisen, wenden wir den Satz 3.4 an mit

$$K(\sigma, \tau) := \left(P_{j,n}(\hat{M}_i(\sigma, \cdot)\psi_j)(\tau) - \hat{M}_i(\sigma, \tau)\psi_j(\tau) \right) \sin \tau$$

Für $j = 1, i = 1, 3$ gilt

$$\begin{aligned} \|(A_i^{(n)} - A_i)\psi_1\|_{0,\alpha} &\leq C_1 \left(\|K\|_{0,\infty} + \left\| \frac{\partial K}{\partial \sigma} \right\|_{0,\infty} \right) \\ &\leq C_2 \max_{p=0,1} \max_{\sigma \in [0,\pi]} \left\| \frac{\partial^p}{\partial \sigma^p} P_{1,n}(\hat{M}_i(\sigma, \cdot)\psi_1) - \frac{\partial^p}{\partial \sigma^p} \hat{M}_i(\sigma, \cdot)\psi_1 \right\|_{0,\beta} \\ &\leq C_3 \frac{\log n}{n^{1+\gamma-\beta}} \|\psi_1\|_{1,\gamma}, \quad \text{mit } 0 < \beta < \gamma < 1. \end{aligned}$$

Für $j = 2, i = 2, 4$ gilt

$$\begin{aligned} \|(A_i^{(n)} - A_i)\psi_2\|_{0,\alpha} &\leq C_1 \left(\|K\|_{0,\infty} + \left\| \frac{\partial K}{\partial \sigma} \right\|_{0,\infty} \right) \\ &\leq C_2 \max_{p=0,1} \max_{\sigma \in [0,\pi]} \left\| \frac{\partial^p}{\partial \sigma^p} P_{2,n}(\hat{M}_i(\sigma, \cdot)\psi_2) - \frac{\partial^p}{\partial \sigma^p} \hat{M}_i(\sigma, \cdot)\psi_2 \right\|_{0,\beta} \\ &\leq C_3 \frac{\log n}{n^{\gamma-\beta}} \|\psi_2\|_{0,\gamma}, \quad \text{mit } 0 < \beta < \gamma < 1. \end{aligned}$$

Alle Konstanten sind nur von α, γ abhängig. \square

Bemerkung. Aus dem Beweis des letzten Satzes und dem Prinzip der gleichmäßigen Normbeschränktheit folgt unmittelbar die gleichmäßige Beschränktheit der Folge $(A_i^{(n)})$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Nun können wir die Konvergenz der Operatorfolge $(P_n A_n)$ gegen A zeigen. In dem nächsten Satz zeigen wir wie vorher die Konvergenz der Komponenten.

Satz 3.6. Die Operatorfolge $P_{1,n} A_i^{(n)} : C_0^{1,\gamma}[0, \pi] \rightarrow C_0^{0,\alpha}[0, \pi]$ konvergiert in der Operatornorm gegen $A_i : C_0^{1,\gamma}[0, \pi] \rightarrow C_0^{0,\alpha}[0, \pi]$ für alle $\alpha, \gamma \in (0, 1)$, wobei $i = 1, 3$. Für $i = 2, 4$ konvergiert die Operatorfolge $P_{2,n} A_i^{(n)} : C^{0,\gamma}[0, \pi] \rightarrow C^{0,\alpha}[0, \pi]$ in der Operatornorm gegen $A_i : C^{0,\gamma}[0, \pi] \rightarrow C^{0,\alpha}[0, \pi]$ für alle $\alpha, \gamma \in (0, 1)$.

Beweis: Nach der Dreiecksungleichung erhalten wir

$$\|(P_{j,n} A_i^{(n)} - A_i)\psi_j\|_{0,\alpha} \leq \|(P_{j,n} A_i^{(n)} - A_i^{(n)})\psi_j\|_{0,\alpha} + \|(A_i^{(n)} - A_i)\psi_j\|_{0,\alpha}$$

Mit Hilfe der Abschätzung des Interpolationsfehlers und der gleichmäßigen Beschränktheit der Folge $(A_i^{(n)})$ können wir den ersten Term abschätzen durch

$$\begin{aligned} \|(P_{j,n} A_i^{(n)} - A_i^{(n)})\psi_j\|_{0,\alpha} &\leq C_1 \frac{\log n}{n^{p+\beta-\alpha}} \|A_i^{(n)} \psi_j\|_{p,\beta} \quad \text{mit } \alpha < \beta < 1 \\ &\leq C_2 \frac{\log n}{n^{p+\beta-\alpha}} \|\psi_j\|_{p,\gamma} \end{aligned}$$

für $j = 1, p = 1, i = 1, 3$ und $j = 2, p = 0, i = 2, 4$. Zusammen mit dem letzten Satz erhalten wir die Abschätzung

$$\|(P_{j,n} A_i^{(n)} - A_i)\psi_j\|_{0,\alpha} \leq C \frac{\log n}{n^{p+\epsilon}} \|\psi_j\|_{p,\gamma}$$

für alle $\psi_j \in [0, \pi]$ mit einer Konstanten C und mit einem festen $\epsilon \in (0, 1)$, die beide nur abhängig von α, γ sind. Daraus folgt die Normkonvergenz der Operatorfolge. \square

Der Beweis für die Normkonvergenz der Operatorfolge $(B_i^{(n)})$ gegen B_i ist leichter und wird hier nicht ausgeführt. An dieser Stelle wollen wir den Funktionenraum $X^{p,q,\alpha}$ definiert durch

$$X^{p,q,\alpha} := C_0^{p,\alpha}[0, \pi] \times C^{q,\alpha}[0, \pi]$$

für $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \alpha \in (0, 1)$. Wir haben also den folgenden Satz bewiesen.

Satz 3.7. *Die Operatorfolge $L - \mathcal{P}_n A_n : X^{1,0,\gamma} \rightarrow X^{0,0,\alpha}$ konvergiert in der Operatornorm gegen $L - A : X^{1,0,\gamma} \rightarrow X^{0,0,\alpha}$ für alle $\alpha, \gamma \in (0, 1)$.*

Aus dem Beweis des Satzes 3.6 erhalten wir die folgende

Folgerung 3.8. *Die Operatormatrizen $L - \mathcal{P}_n A_n : X^{1,0,\gamma} \rightarrow X^{0,0,\alpha}$ sind gleichmäßig beschränkt für alle $\alpha, \gamma \in (0, 1)$.*

Nun können wir die bisherigen Ergebnisse in dem folgenden Satz zusammenfassen.

Satz 3.9. *Die Näherungsgleichung (3.13) besitzt genau eine Lösung Ψ_n für hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$. Sei Ψ die eindeutige Lösung der Gleichung (2.21). Es gilt die Fehlerabschätzung*

$$\|\Psi_n - \Psi\|_{X^{1,0,\alpha}} \leq C \{ \|\mathcal{P}_n g - g\|_{X^{0,0,\alpha}} + \|(\mathcal{P}_n A_n - A)\Psi\|_{X^{0,0,\alpha}} \}, \quad (3.16)$$

mit einer Konstanten C , die nur von α abhängt.

Beweis: Da die Operatorfolge $L - \mathcal{P}_n A_n$ gleichmäßig beschränkt ist und in der Norm gegen $L - A$ konvergiert, ist $L - \mathcal{P}_n A_n$ nach dem Satz 3.2 für großes $n \in \mathbb{N}$ beschränkt invertierbar. Es gilt außerdem die folgende Fehlerabschätzung :

$$\|\Psi_n - \Psi\|_{X^{1,0,\alpha}} \leq C \{ \|(\mathcal{P}_n A_n - A)\Psi\|_{X^{0,0,\alpha}} + \|\mathcal{P}_n g - g\|_{X^{0,0,\alpha}} \}.$$

wobei die Konstante C eine obere Schranke für

$$\frac{\|(L - A)^{-1}\|}{1 - \|(L - A)^{-1}(\mathcal{P}_n A_n - A)\|}$$

ist. Die Konstante C ist nach Satz 3.6 nur von α abhängig. □

Bemerkung. Aus dem Satz 3.7 und der Fehlerabschätzung (3.16) sieht man leicht, daß genau dann die Lösungen Ψ_n der Näherungsgleichung gegen die wahre Lösung Ψ konvergieren, wenn

$$\|\mathcal{P}_n g - g\|_{X^{0,0,\alpha}} \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

Dies entspricht dem Hauptbestandteil des Approximationsfehlers.

Nach dem Satz 3.3 haben wir

Folgerung 3.10. *Für alle $\alpha \in (0, 1)$ und für alle rechten Seite $g \in X^{0,0,\gamma}$ mit $\alpha < \gamma < 1$ konvergiert die Folge der Näherungslösungen (Ψ_n) gegen die wahre Lösung.*

Anschließend wird die Güte des numerischen Verfahrens in dem nächsten Satz geklärt.

Satz 3.11. *Für $g \in X^{0,0,\gamma}$, $0 < \alpha < \gamma < 1$ gilt*

$$\|\Psi_n - \Psi\|_{X^{1,0,\alpha}} \leq C \frac{\log n}{n^{\gamma-\alpha}} \|\Psi\|_{X^{0,0,\gamma}} \quad (3.17)$$

mit einer Konstanten C , die nur von α, γ abhängt.

Beweis: Nach dem Satz 3.9 brauchen wir nur die rechte Seite von (3.16) abzuschätzen. Aus Satz 3.3 und der beschränkten Invertierbarkeit von $L - A$ folgt die Abschätzung

$$\|\mathcal{P}_n g - g\|_{X^{0,0,\alpha}} \leq C_1 \frac{\log n}{n^{\gamma-\alpha}} \|\Psi\|_{X^{1,0,\alpha}}$$

Aus dem Beweis von Satz 3.5 und dem Beweis von Satz 3.6 folgt die zweite Abschätzung

$$\|(\mathcal{P}_n A_n - A)\Psi\|_{X^{0,0,\alpha}} \leq C_2 \frac{\log n}{n^{\gamma-\alpha}} \|\Psi\|_{X^{1,0,\alpha}}$$

Die Konstanten C_1, C_2 hängen nur von α, γ ab. Der Beweis ist damit erbracht. \square

Kapitel 4

Numerische Ergebnisse des direkten Problems

In diesem Kapitel werden wir vermöge einiger Beispiele das im letzten Kapitel beschriebene numerische Verfahren zur näherungsweise Lösung des Randwertproblems diskutieren. In der (direkten) Streutheorie ist die gestreute Welle im Unendlichen das am meisten interessierende Objekt. Das hängt mit der Tatsache zusammen, daß in der Realität die gestreute Welle sich nicht nahe an den Hindernissen messen läßt. Das Verhalten der gestreuten Welle im Unendlichen wird durch das sogenannte Fernfeld charakterisiert. Nach dem Rellich Lemma ist das gestreute Feld durch das Fernfeld eindeutig bestimmt. Es ist also sinnvoll das Fernfeld numerisch zu berechnen.

4.1 Das Fernfeld

Eine ausstrahlende Lösung der Helmholtzgleichung u^s verhält sich im Unendlichen asymptotisch in der Form

$$u^s(x) = \frac{e^{ik|x|}}{\sqrt{|x|}} \left\{ u_\infty(\hat{x}) + O\left(\frac{1}{|x|}\right) \right\}, \quad |x| \rightarrow \infty, \quad (4.1)$$

gleichmäßig in allen Richtungen $\hat{x} := \frac{x}{|x|}$. Die Funktion u_∞ , welche auf dem Einheitskreis $\Omega \in \mathbb{R}^2$ definiert ist, heißt das *Fernfeld* von u^s .

Unter Verwendung der Asymptotik der Hankelfunktionen erhalten wir für das Fernfeld einer Lösung der Helmholtzgleichung für eine ebene Welle in Form eines Doppelschichtpotentials die folgende Darstellung:

$$u_{1,\infty}(\hat{x}) = \frac{1-i}{4} \sqrt{\frac{k}{\pi}} \int_{\Gamma} \langle \nu(y), \hat{x} \rangle e^{-ik\langle \hat{x}, y \rangle} \varphi_1(y) ds(y) \quad (4.2)$$

Für das Einfachschichtpotential erhalten wir das Fernfeld

$$u_{2,\infty}(\hat{x}) = \frac{1+i}{4\sqrt{k\pi}} \int_{\Gamma} e^{-ik\langle \hat{x}, y \rangle} \varphi_2(y) ds(y) \quad (4.3)$$

In der parametrisierten Form haben wir

$$u_{1,\infty}(\hat{x}) = \frac{1-i}{4} \sqrt{\frac{k}{\pi}} \int_{\Gamma} \langle \nu(\tau), \hat{x} \rangle e^{-ik\langle \hat{x}, z(\cos(\tau)) \rangle} \psi_1(\tau) \sin(\tau) |z'(\cos(\tau))| d\tau \quad (4.4)$$

und

$$u_{2,\infty}(\hat{x}) = \frac{1+i}{4\sqrt{k\pi}} \int_{\Gamma} e^{-ik\langle \hat{x}, z(\cos(\tau)) \rangle} \psi_2(\tau) \sin(\tau) |z'(\cos(\tau))| d\tau \quad (4.5)$$

Wir werden daher das zusammengesetzte Fernfeld $u_{\infty} := u_{1,\infty} + u_{2,\infty}$ berechnen.

4.2 Numerische Beispiele

In diesem Abschnitt werden wir anhand einiger numerischen Beispiele das Konvergenzverhalten des numerischen Verfahrens diskutieren.

Beispiel 4.1. Als erstes Beispiel nehmen wir das Geradenstück

$$z(t) = (t, 0), \quad t \in [-1, 1]$$

Für die einfallende Welle wählen wir die ebene Welle mit Einfallrichtung $d = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$.

Die ersten Ergebnisse in den Tabellen 4.1 und 4.2 sind nicht uninteressant. Während für das Neumannproblem (den Fall $\lambda = 0$) das numerische Verfahren sehr schnell konvergiert, ist dagegen die Konvergenz bei dem Impedanzproblem mit konstanter Impedanz $\lambda \neq 0$ sehr langsam. Der Grund dafür ist das unterschiedliche Verhalten der Lösungen an den beiden Endpunkten. Beim Streuproblem für einen offenen Bogen verhält sich die Singularität der Lösung wie $u = \sqrt{s}w$ in der Nähe der beiden Endpunkte, wobei s die Distanz zu den Endpunkten ist. Beim Neumann- oder Dirichletproblem besitzt das Teil w quasi die gleiche Glattheit wie die der Randdaten. Die Singularität wird dann durch die Cosinus-Substitution aufgehoben. Daher ist die exponentielle Konvergenz des numerischen Verfahrens zu beobachten. Bei dem Impedanzproblem enthält die Lösung noch eine logarithmische Singularität in der Nähe der beiden Endpunkte (siehe [7], [3]). Wir werden mit anderen Impedanzen diese Tatsache verifizieren. An dieser Stelle wollen wir

	n	$\text{Re}u_\infty(d)$	$\text{Im}u_\infty(d)$	$\text{Re}u_\infty(-d)$	$\text{Im}u_\infty(-d)$
$k = 1$	4	0.2188930593	0.7048408180	0.7327472842	-0.0476271951
	8	0.2193498394	0.7059285113	0.7349202501	-0.0506430287
	16	0.2193498387	0.7059285133	0.7349202214	-0.0506429978
	32	0.2193498387	0.7059285133	0.7349202214	-0.0506429978
$k = 5$	4	-1.2655090731	1.1733478171	0.6898474091	0.0919528921
	8	-0.8232049220	1.4463599064	-0.4107776255	-0.1920337717
	16	-0.8191108671	1.4477138852	-0.4190981208	-0.1949351993
	32	-0.8191108727	1.4477138906	-0.4190981164	-0.1949352203
	64	-0.8191108727	1.4477138906	-0.4190981164	-0.1949352203

Tabelle 4.1: Fernfeld für das Geradenstück mit Impedanz $\lambda = 0$

	n	$\text{Re}u_\infty(d)$	$\text{Im}u_\infty(d)$	$\text{Re}u_\infty(-d)$	$\text{Im}u_\infty(-d)$
$k = 1$	4	-0.2785431331	0.6380378058	0.2325201743	-0.1437696597
	8	-0.2783708059	0.6394323083	0.2359879426	-0.1458041367
	16	-0.2783435149	0.6394631981	0.2360065709	-0.1458247692
	32	-0.2783418024	0.6394651450	0.2360077531	-0.1458260351
	64	-0.2783416956	0.6394652672	0.2360078274	-0.1458261135
	128	-0.2783416890	0.6394652748	0.2360078321	-0.1458261184
$k = 5$	4	-1.1057449551	1.0073845548	0.0057774742	0.0628638972
	8	-1.0321181482	1.1305992223	-0.2032606329	0.1604200205
	16	-1.0318551380	1.1306605046	-0.2002133807	0.1620149409
	32	-1.0318486423	1.1306713800	-0.2002199134	0.1620130689
	64	-1.0318482505	1.1306720631	-0.2002203030	0.1620129305
	128	-1.0318482263	1.1306721059	-0.2002203272	0.1620129215

Tabelle 4.2: Fernfeld für das Geradenstück mit Impedanz $\lambda = 0.5$

noch darauf hinweisen, daß in beiden Fällen die Cosinus-Substitution für die Konvergenzgeschwindigkeit eine zentrale Rolle spielt. In Vergleich zu [4], [9] und [8], wo eine hypersinguläre Integralgleichung dieser Art auf $[0, \pi]$ ohne Cosinus-Substitution gelöst wurde, zeigt unser Verfahren eine bessere Konvergenz.

In der Tabelle 4.3 sehen wir, daß die Konvergenz für die Impedanz $\lambda = t^2$ etwa die gleiche Geschwindigkeit wie die für die konstante Impedanz hat. Interessanter sind aber die Ergebnisse in den Tabellen 4.4 und 4.5. Die Im-

	n	$\text{Re}u_\infty(d)$	$\text{Im}u_\infty(d)$	$\text{Re}u_\infty(-d)$	$\text{Im}u_\infty(-d)$
$k = 1$	4	-0.1361181083	0.4728432271	-0.0880992386	-0.2527419463
	8	-0.1355375898	0.4757064961	-0.0867611068	-0.2539361694
	16	-0.1354690959	0.4757556353	-0.0868134099	-0.2539985769
	32	-0.1354651652	0.4757583851	-0.0868164521	-0.2540020989
	64	-0.1354649250	0.4757585534	-0.0868166379	-0.2540023149
	128	-0.1354649101	0.4757585639	-0.0868166494	-0.2540023284
$k = 5$	4	-0.9544688942	0.6366495612	0.4112042803	-0.1230386445
	8	-0.8873542050	1.0916648169	-0.0210017297	-0.0421801982
	16	-0.8834642019	1.0898505951	-0.0162015336	-0.0356346849
	32	-0.8834548673	1.0898729531	-0.0161814229	-0.0356596957
	64	-0.8834543679	1.0898742902	-0.0161801531	-0.0356612174
	128	-0.8834543382	1.0898743729	-0.0161800729	-0.0356613116

 Tabelle 4.3: Fernfeld für das Geradenstück mit Impedanz $\lambda = t^2$

	n	$\text{Re}u_\infty(d)$	$\text{Im}u_\infty(d)$	$\text{Re}u_\infty(-d)$	$\text{Im}u_\infty(-d)$
$k = 1$	4	-0.3287810982	0.3935596712	-0.1499003912	-0.0840035751
	8	-0.3314470388	0.3930949619	-0.1488117378	-0.0817796639
	16	-0.3314494646	0.3930937175	-0.1488110867	-0.0817772539
	32	-0.3314495049	0.3930936935	-0.1488110650	-0.0817772166
	64	-0.3314495055	0.3930936931	-0.1488110646	-0.0817772160
	128	-0.3314495055	0.3930936931	-0.1488110646	-0.0817772160
$k = 5$	4	-0.8358576206	0.5951655438	0.1032184255	-0.0561534229
	8	-0.8014498286	0.8575069795	0.0328581774	-0.1566651556
	16	-0.8008821968	0.8567216603	0.0335649990	-0.1563748384
	32	-0.8008826799	0.8567213668	0.0335653946	-0.1563743307
	64	-0.8008826877	0.8567213619	0.0335653996	-0.1563743222
	128	-0.8008826878	0.8567213618	0.0335653997	-0.1563743221

 Tabelle 4.4: Fernfeld für das Geradenstück mit Impedanz $\lambda = (1 - t^2)$

pedanzfunktion verhält sich in diesen Fällen wie $\lambda = o(s^\gamma)$ in der Nähe der Endpunkte. Aus den beiden Tabellen sehen wir, je größer γ ist, desto schneller ist die Konvergenz. Das entspricht auch der oben genannten Tatsache.

	n	$\text{Re}u_\infty(d)$	$\text{Im}u_\infty(d)$	$\text{Re}u_\infty(-d)$	$\text{Im}u_\infty(-d)$
$k = 1$	4	-0.2706934161	0.3769022310	-0.1499090822	-0.1094422354
	8	-0.2770395614	0.3847161552	-0.1424358846	-0.1084057856
	16	-0.2770367776	0.3847136679	-0.1424385068	-0.1084017919
	32	-0.2770367755	0.3847136690	-0.1424385081	-0.1084017937
	64	-0.2770367755	0.3847136690	-0.1424385081	-0.1084017937
$k = 5$	4	-0.8563180981	0.6392250142	0.1272992523	-0.0520830222
	8	-0.7649731169	0.8765565147	0.0403565163	-0.2037031552
	16	-0.7675574178	0.8710482182	0.0407405317	-0.1981921425
	32	-0.7675574890	0.8710481333	0.0407398633	-0.1981923144
	64	-0.7675574889	0.8710481334	0.0407398632	-0.1981923145
	128	-0.7675574889	0.8710481334	0.0407398632	-0.1981923145

Tabelle 4.5: Fernfeld für das Geradenstück mit Impedanz $\lambda = (1 - t^2)^2$

Beispiel 4.2. In diesem Beispiel betrachten wir die Halbellipse

$$z(t) = (0.4 \cos(\frac{\pi t}{2}), 0.3 \sin(\frac{\pi t}{2})), \quad t \in [-1, 1]$$

Für die einfallende Welle wählen wir die ebene Welle mit Einfallsrichtung $d = (1, 0)$.

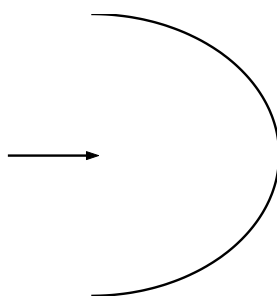


Abbildung 4.1: Halbellipse

In diesem Beispiel sehen wir, daß das Konvergenzverhalten im Wesentlichen dasselbe wie im ersten Beispiel ist. Wieder ist die exponentielle Konvergenz in den Tabellen 4.6 und 4.8 zu beobachten. Für $\lambda = 0.5$ konvergiert das Verfahren wegen der Endpunktsingularität langsamer.

	n	$\text{Re}u_\infty(d)$	$\text{Im}u_\infty(d)$	$\text{Re}u_\infty(-d)$	$\text{Im}u_\infty(-d)$
$k = 1$	4	0.0727641747	0.0841271176	-0.0033061678	-0.1107694880
	8	0.0725927828	0.0838843976	-0.0052254239	-0.1106213718
	16	0.0725927723	0.0838843839	-0.0052252925	-0.1106213640
	32	0.0725927723	0.0838843839	-0.0052252925	-0.1106213640
$k = 5$	4	-0.2069384755	0.2780807831	-0.4725361034	0.1247235608
	8	-0.2705490861	0.2230216582	-0.4119431034	0.1597578733
	16	-0.2704716912	0.2230158988	-0.4121804562	0.1594777809
	32	-0.2704716912	0.2230158988	-0.4121804562	0.1594777808
	64	-0.2704716912	0.2230158988	-0.4121804562	0.1594777808

Tabelle 4.6: Fernfeld für die Halbellipse mit Impedanz $\lambda = 0$

	n	$\text{Re}u_\infty(d)$	$\text{Im}u_\infty(d)$	$\text{Re}u_\infty(-d)$	$\text{Im}u_\infty(-d)$
$k = 1$	4	-0.1122551824	0.1713030138	-0.1569681143	-0.0258242601
	8	-0.1127542999	0.1710709719	-0.1586815177	-0.0268321028
	16	-0.1127531309	0.1710714330	-0.1586826372	-0.0268341834
	32	-0.1127529408	0.1710714449	-0.1586827125	-0.0268342411
	64	-0.1127529286	0.1710714457	-0.1586827172	-0.0268342446
	128	-0.1127529279	0.1710714458	-0.1586827175	-0.0268342448
$k = 5$	4	-0.3929107795	0.4242259725	-0.1946436832	-0.0858151095
	8	-0.3866612444	0.4093911613	-0.1458904327	0.0229823642
	16	-0.3866597744	0.4093897074	-0.1457851822	0.0226627417
	32	-0.3866595049	0.4093887419	-0.1457852730	0.0226624140
	64	-0.3866594855	0.4093886810	-0.1457852798	0.0226623975
128	-0.3866594842	0.4093886772	-0.1457852803	0.0226623965	

Tabelle 4.7: Fernfeld für die Halbellipse mit Impedanz $\lambda = 0.5$

	n	$\operatorname{Re}u_\infty(d)$	$\operatorname{Im}u_\infty(d)$	$\operatorname{Re}u_\infty(-d)$	$\operatorname{Im}u_\infty(-d)$
$k = 1$	8	-0.1178202452	0.1597228483	-0.1577507368	-0.0623993040
	16	-0.1178273326	0.1597192039	-0.1577512969	-0.0624059901
	32	-0.1178273330	0.1597192041	-0.1577512973	-0.0624059905
	64	-0.1178273330	0.1597192041	-0.1577512973	-0.0624059905
$k = 5$	8	-0.3678417611	0.3681344789	0.0221863540	0.0226335621
	16	-0.3681260737	0.3682506750	0.0220491039	0.0201697400
	32	-0.3681261029	0.3682506316	0.0220492504	0.0201694309
	64	-0.3681261029	0.3682506316	0.0220492504	0.0201694309

Tabelle 4.8: Fernfeld für die Halbellipse mit Impedanz $\lambda = (1 - t^2)^2$

Beispiel 4.3. In diesem Beispiel wollen wir das numerische Verfahren an einem geometrischen etwas komplizierten Bogen testen.

$$z(t) = (\cos(5t) + 0.1t, 2 \sin(3t) - 0.2t), \quad t \in [-1, 1] \quad (4.6)$$

Für die einfallende Welle wählen wir die ebene Welle mit Einfallsrichtung $d = (1, 0)$.

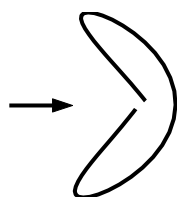


Abbildung 4.2: Bogen 4.6

	n	$\text{Re}u_\infty(d)$	$\text{Im}u_\infty(d)$	$\text{Re}u_\infty(-d)$	$\text{Im}u_\infty(-d)$
$k = 1$	16	-1.0270849962	1.1833403947	-0.6792034126	-1.5909083854
	32	-0.9471404714	1.2008539862	-0.3494519210	-1.6670655147
	64	-0.9477179020	1.2005689586	-0.3543286374	-1.6660103836
	128	-0.9477177121	1.2005691135	-0.3543282595	-1.6660104605
	256	-0.9477177121	1.2005691135	-0.3543282595	-1.6660104605
$k = 5$	16	-3.5700860224	2.0189118870	-0.0105090364	-1.3175995053
	32	-2.2615102586	2.2091358180	-1.3880387773	-0.8553366852
	64	-2.0484623707	2.2888384065	-1.3379153651	-0.3625445662
	128	-2.0484173342	2.2887924434	-1.3378687450	-0.3625586588
	256	-2.0484173342	2.2887924434	-1.3378687450	-0.3625586588

Tabelle 4.9: Fernfeld für den Bogen (4.6) mit Impedanz $\lambda = 0$

In diesem Beispiel ist wieder exponentielle Konvergenz zu erkennen. Wegen der Form des Bogens ist allerdings die spätere Erscheinung der exponentiellen Konvergenz zu erwarten. Im Vergleich zu den Fällen $\lambda = 0$ und $\lambda = (1 - t^2)^2$ konvergiert das numerische Verfahren für den Fall $\lambda = 0.5$ auch hier wegen der Endpunktsingularität langsamer.

Aus den verschiedenen Beispielen sehen wir, daß die Konvergenz immer nach demselben Muster kommt: Exponentielle Konvergenz für die Impedanzfunktion $\lambda = 0$ und fast exponentielle Konvergenz für die Impedanz, die

	n	$\text{Re}u_\infty(d)$	$\text{Im}u_\infty(d)$	$\text{Re}u_\infty(-d)$	$\text{Im}u_\infty(-d)$
$k = 1$	16	-1.1208195318	1.1805107232	-0.2431159889	-0.2132405333
	32	-1.0877388284	1.1946305225	-0.1974890817	-0.2472094673
	64	-1.0879938741	1.1943662399	-0.1982845150	-0.2467406530
	128	-1.0879939475	1.1943663130	-0.1982843562	-0.2467413980
	256	-1.0879939559	1.1943663160	-0.1982843637	-0.2467414371
$k = 5$	16	-2.3429057040	2.4929802050	-0.2081831651	0.0635167092
	32	-2.4498018130	2.4441499829	0.0582745433	0.0530810378
	64	-2.4574436460	2.4560496827	-0.0168640076	0.0713094739
	128	-2.4574590250	2.4560767364	-0.0168570649	0.0713169178
	256	-2.4574590261	2.4560767288	-0.0168568873	0.0713169512

Tabelle 4.10: Fernfeld für den Bogen (4.6) mit Impedanz $\lambda = 0.5$

	n	$\text{Re}u_\infty(d)$	$\text{Im}u_\infty(d)$	$\text{Re}u_\infty(-d)$	$\text{Im}u_\infty(-d)$
$k = 1$	16	-1.3751723167	1.1685067430	-0.3823940547	-1.0982081587
	32	-1.3415425975	1.1896861321	-0.3114715880	-1.1262424973
	64	-1.3418197983	1.1893501329	-0.3126760063	-1.1260333319
	128	-1.3418197160	1.1893501474	-0.3126758116	-1.1260332887
	256	-1.3418197159	1.1893501474	-0.3126758116	-1.1260332887
$k = 5$	16	-1.9595044495	2.6854834854	-0.5872993347	-0.1468812373
	32	-2.4605553571	2.3492712292	-0.8759941170	-0.1835262605
	64	-2.4873547044	2.3668130480	-0.9579557087	-0.1772261238
	128	-2.4873993736	2.3668153126	-0.9579577982	-0.1772099362
	256	-2.4873993736	2.3668153126	-0.9579577982	-0.1772099362

Tabelle 4.11: Fernfeld für den Bogen (4.6) mit Impedanz $\lambda = (1 - t^2)^2$

an beiden Endpunkten schnell zu 0 geht. Für Impedanz, die nicht zu der ersten Kategorie gehört, herrscht langsamere Konvergenz wegen der Endpunktsingularität der Lösung. Also ist das numerische Verfahren recht stabil, wenn auch nicht für alle Impedanzen exponentielle Konvergenz erzielt werden kann.

Kapitel 5

Ein inverses Randwertproblem

In diesem Kapitel werden wir ein inverses Streuproblem für einen Bogen mit den Impedanzrandbedingungen beschreiben. Anschließend wird die Eindeutigkeit des inversen Problems bewiesen. Wegen der inkorrekten Gestelltheit des inversen Problems wird für die Lösungstheorie ein Regularisierungsverfahren benötigt.

5.1 Beschreibung des inversen Problems

Bevor wir das inverse Problem definieren, möchten wir einige Bezeichnungen für das gesamte Kapitel festlegen. Mit Ω bezeichnen wir den Einheitskreis in \mathbb{R}^2 , d.h. $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = 1\}$. Für die einfallende Welle wählen wir stets die ebene Welle, welche durch $u^i(x) := e^{ik\langle x, d \rangle}$, $d \in \Omega$, $x \in \mathbb{R}^2$ definiert ist. Wir bezeichnen mit u_∞ das Fernfeld der durch u^i an dem Bogen $\Gamma \in \mathbb{R}^2$ gestreuten Welle u^s . Ferner nennen wir das Feld $u := u^i + u^s$ das Gesamtfeld des Streuproblems. Wegen der Abhängigkeit der Felder von der Einfallsrichtung d , werden wir auch die Notationen $u^i(\cdot, d)$, $u^s(\cdot, d)$, $u_\infty(\cdot, d)$ und $u(\cdot, d)$ verwenden. Nun können wir das inverse Problem, das wir untersuchen wollen, definieren.

Definition 5.1. (Inverses Impedanzproblem)

Gegeben sei ein offener Bogen $\Gamma \in \mathbb{R}^2$ mit Impedanzrandbedingungen. Die Aufgabe des inversen Impedanzproblems besteht darin, aus der Kenntnis des Fernfeldes $u_\infty(\cdot, d)$ für eine Einfallsrichtung d und für eine feste Wellenzahl $k > 0$ die Impedanz λ zu rekonstruieren.

Der nächste Satz beantwortet die Frage der Eindeutigkeit des inversen Problems.

Satz 5.1. Falls u_1^s, u_2^s Lösungen zu dem inversen Impedanzproblem mit Impedanz λ_1 bzw. λ_2 sind und die entsprechenden Fernfelder $u_{1,\infty}$ bzw. $u_{2,\infty}$ identisch sind, dann gilt $\lambda_1 = \lambda_2$. Mit anderen Worten, die Impedanz ist eindeutig bestimmt durch das Fernfeld.

Beweis: Es seien λ_1 und λ_2 Lösungen des inversen Problems mit zugehörigen Lösungen u_1^s und u_2^s des direkten Streuproblems. Nach Voraussetzung haben u_1^s und u_2^s das gleiche Fernfeld und stimmen daher nach dem Rellich Lemma überein, d.h. $u_1^s = u_2^s =: u^s$. Für $u := u^s + u^i$ gilt dann

$$\frac{\partial u_{\pm}}{\partial \nu} \pm ik\lambda_1 u_{\pm} = 0 = \frac{\partial u_{\pm}}{\partial \nu} \pm ik\lambda_2 u_{\pm} \quad \text{auf } \Gamma_0 \quad (5.1)$$

Als nächstes definieren wir $\lambda := \lambda_1 - \lambda_2$. Für λ gilt offenbar

$$\lambda u_{\pm} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_0.$$

Die Menge $\{x \in \Gamma \mid \lambda(x) = 0\}$ bezeichnen wir mit Σ . Der Satz ist dann bewiesen, wenn wir $\Sigma = \Gamma$ beweisen können. Falls $\Sigma \neq \Gamma$ gibt es wegen der Stetigkeit von λ eine nichtleere offene Teilmenge $\Sigma_0 \subset \Gamma_0$ mit $\lambda(x) \neq 0, x \in \Sigma_0$. Daraus folgt $u_+(x) = u_-(x) = 0$, für $x \in \Sigma_0$. Die Gleichung (5.1) ergibt $\frac{\partial u_{\pm}}{\partial \nu}(x) = 0, x \in \Sigma_0$. Nachdem wir Γ zu einer geschlossenen C^2 -Kurve ergänzt haben, kann der Holmgren's Eindeutigkeitsatz hier angewendet werden. Wir haben also $u \equiv 0$. Dies ist ein Widerspruch, da u^i nicht die Ausstrahlungsbedingung erfüllt. \square

Den Impedanzrandbedingungen nach haben wir für die Impedanzfunktion λ die folgenden Gleichungen :

$$\frac{\partial u_{\pm}}{\partial \nu} \pm ik\lambda u_{\pm} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_0 \quad (5.2)$$

Wir nehmen diese Darstellung als Ausgangspunkt und bauen darauf eine Lösungsstrategie für unsere Aufgabe.

Aus der Lösungstheorie des direkten Problems wissen wir, daß die Lösung des Randwertproblems sich in Form eines gemischten Potentials darstellen läßt. Wir schreiben

$$u^s(x) := \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \psi_1(y) ds(y) + \int_{\Gamma} \Phi(x, y) \psi_2(y) ds(y), x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma. \quad (5.3)$$

für $\Psi := (\psi_1, \psi_2) \in L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$

Die beiden Gleichungen (5.2) werden wir wie in dem Abschnitt 2.3 behandeln. Genauer gesagt erhalten wir mit der Hilfe der Sprungbeziehungen der Potentiale die Gleichungen (vgl. (2.11))

$$\begin{cases} 2 \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \psi_1(y) ds(y) + 2 \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} \psi_2(y) ds(y) \\ \quad + 2ik \langle \nu(x), d \rangle u^i(x, d) = -ik\lambda(x)\psi_1(x) \\ 2ik\lambda(x) \left(\int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \psi_1(y) ds(y) + \int_{\Gamma} \Phi(x, y) \psi_2(y) ds(y) + u^i(x, d) \right) = \psi_2(x) \end{cases} \quad (5.4)$$

für $x \in \Gamma_0$. Diese Gleichungen deuten an, wie die Impedanzfunktion λ berechnet werden kann, wenn die Dichte Ψ bekannt ist.

Bemerkung. Die zweite Gleichung ermöglicht sogar die folgende Darstellung für die Impedanz λ :

$$\lambda = \frac{\psi_2}{2iku} \quad \text{auf } \Gamma. \quad (5.5)$$

Diese Gleichung ist auch numerisch günstiger.

Nun wollen wir wissen, wie das inverse Problem gelöst werden kann. Als Daten haben wir das Fernfeld u_{∞} des gestreuten Feldes u^s . Für die Beobachtungsrichtung $\hat{x} \in \Omega$ ist das Fernfeld von (5.3) gegeben durch

$$u_{\infty}(\hat{x}) := C_1 \int_{\Gamma} \langle \nu(y), \hat{x} \rangle e^{-ik\langle \hat{x}, y \rangle} \psi_1(y) ds(y) + C_2 \int_{\Gamma} e^{-ik\langle \hat{x}, y \rangle} \psi_2(y) ds(y), \quad (5.6)$$

wobei $C_1 := \frac{1-i}{4} \sqrt{\frac{k}{\pi}}$, $C_2 := \frac{1+i}{4\sqrt{k\pi}}$.

Für $\Psi := (\psi_1, \psi_2) \in L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$ können wir nun den folgenden Fernfeldoperator $F : L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma) \rightarrow L^2(\Omega)$ definieren durch

$$F(\Psi)(\hat{x}) := C_1 \int_{\Gamma} \langle \nu(y), \hat{x} \rangle e^{-ik\langle \hat{x}, y \rangle} \psi_1(y) ds(y) + C_2 \int_{\Gamma} e^{-ik\langle \hat{x}, y \rangle} \psi_2(y) ds(y). \quad (5.7)$$

Mit anderen Worten, der Operator F bildet die Dichte Ψ des Potentials u^s nach dem Fernfeld u_{∞} von u^s ab. Nach Rellich Lemma ist die Definition (5.7) sinnvoll. Wenn wir die Gleichung (5.7) für Ψ lösen können, angesichts der Darstellungen (5.4) und (5.5), dann können wir das inverse Problem lösen.

Es ist ersichtlich, daß der Operator F kompakt ist. Folglich ist das Lösen der Gleichung (5.7) schlecht gestellt. Um eine stabile Näherung zu der Gleichung (5.7) zu finden, ist ein Regularisierungsschema wie z.B. Tikhonov Regularisierung notwendig. Die Idee eines Regularisierungsverfahrens besteht

darin, daß die unbeschränkte Inverse eines kompakten Operators durch einen beschränkten Operator approximiert wird. Die Näherungsgleichung ist somit nicht nur eindeutig lösbar, die Lösung hängt auch stetig von den Daten ab. Wir werden im nächsten Abschnitt ein Regularisierungsverfahren für unsere Aufgabe vorstellen.

5.2 Das Regularisierungsverfahren

Wie bereits erwähnt, hilft ein Regularisierungsverfahren beim Lösen eines schlecht gestellten Problems eine stabile Näherung zu diesem Problem zu finden. Ein Regularisierungsverfahren wird folgendermaßen definiert.

Definition 5.2. (Regularisierungsverfahren)

X, Y seien normierte Räume. Der Operator $A : X \rightarrow Y$ sei linear, beschränkt und injektiv. Eine Familie

$$R_\alpha : Y \rightarrow X, \quad \alpha > 0,$$

von beschränkten linearen Operatoren heißt ein *Regularisierungsverfahren* für

$$A\varphi = f,$$

falls die punktweise Konvergenz

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} R_\alpha A\varphi = \varphi \quad \text{für alle } \varphi \in X \quad (5.8)$$

gilt. α heißt *Regularisierungsparameter*.

Aus der Definition sehen wir, daß die Gleichung (5.8) zu

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} R_\alpha f = A^{-1}f, \quad \text{für alle } f \in A(X). \quad (5.9)$$

äquivalent ist.

Die Räume X, Y sind ab sofort bis zum Ende dieses Abschnittes Hilberträume, falls nichts anders explizit gesagt wird.

Der folgende Satz beschreibt ein Regularisierungsverfahren, dem wir folgen wollen.

Satz 5.2. *Der Operator $A : X \rightarrow Y$ sei kompakt und linear. Dann ist für jedes $\alpha > 0$ der Operator*

$$\alpha I + A^*A : X \rightarrow X$$

bijektiv mit beschränkter Inverse. Falls zusätzlich A injektiv ist, dann ist

$$R_\alpha := (\alpha I + A^*A)^{-1}A^*, \quad \alpha > 0$$

ein Regularisierungsverfahren mit $\|R_\alpha\| \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$.

Beweis: Siehe [18], Theorem 15.23. \square

Der nächste Satz gibt uns eine andere Interpretation des Regularisierungsverfahrens.

Satz 5.3. *Sei $A : X \rightarrow Y$ ein beschränkter linearer Operator. $\alpha > 0$. Dann gibt es für jedes $f \in Y$ genau ein $\varphi_\alpha \in X$, so daß*

$$\|A\varphi_\alpha - f\| + \alpha\|\varphi_\alpha\| = \inf_{\varphi \in X} \{\|A\varphi - f\|^2 + \alpha\|\varphi\|^2\} \quad (5.10)$$

gilt. φ_α ist die eindeutige Lösung der Gleichung

$$\alpha\varphi_\alpha + A^*A\varphi_\alpha = A^*f \quad (5.11)$$

und hängt stetig von f ab.

Beweis: Siehe Theorem 16.1 in [18]. \square

Das Regularisierungsverfahren aus Satz 5.2 minimiert also das *Tikhonov Funktional*, das durch die rechte Seite von (5.10) definiert ist. Dieser Interpretation zufolge minimiert das Verfahren den Fehler $\|A\varphi - f\|$ und stabilisiert die Lösung durch den zusätzlichen Term $\alpha\|\varphi\|^2$. Die Tikhonov Regularisierung kann deshalb auch als Minimierungsproblem betrachtet werden. Daher möchten wir den folgenden Begriff vorstellen.

Definition 5.3. Sei $A : X \rightarrow Y$ beschränkt und linear. $\delta > 0$. Für $f \in Y$ heißt $\varphi_0 \in X$ eine *Minimumnormlösung* von $A\varphi = f$ mit *Diskrepanz* δ , falls $\|A\varphi_0 - f\| \leq \delta$ und $\|\varphi_0\| = \inf_{\|A\varphi - f\| \leq \delta} \|\varphi\|$.

Wie bereits erwähnt, haben wir als Eingabe des inversen Problems das Fernfeld. Es besteht meistens aus Meßdaten und enthält bekanntlich Fehler. Deshalb ist es auch sinnvoll, die originale Gleichung nicht exakt lösen zu müssen, sondern Fehler zu erlauben. Daher ist es auch vernünftig, daß man für das Problem die Minimumnormlösung sucht. Die nächsten beiden Sätze sollen die eindeutige Lösbarkeit der (Tikhonov) Regularisierung (als Minimierungsproblem) und das Verhalten der Minimumnormlösung klären.

Satz 5.4. *$A : X \rightarrow Y$ sei ein beschränkter linearer Operator, der dichten Wertebereich habe. $\delta > 0$. Dann existiert für jedes $f \in Y$ eine eindeutige Minimumnormlösung φ_0 von $A\varphi = f$ mit Diskrepanz δ . Ferner kann α so gewählt werden, daß φ_0 die Lösung von (5.11) ist mit $\|A\varphi_0 - f\| = \delta$.*

Beweis: Siehe Theorem 16.12 in [18]. \square

Satz 5.5. $A : X \rightarrow Y$ sei beschränkt, linear und injektiv mit dichtem Wertebereich. $\delta > 0, f \in A(X)$. Für $f^\delta \in Y$ mit $\|f^\delta - f\| \leq \delta$ und $\delta < \|f^\delta\|$. Es gilt dann

$$\varphi^\delta \rightarrow A^{-1}f, \quad \delta \rightarrow 0,$$

wobei φ^δ die Minimumnormlösung mit Diskrepanz δ ist.

Beweis: Siehe Theorem 16.13 in [18]. □

Bemerkung. Die Forderung $\delta < \|f^\delta\|$ in dem letzten Satz ist berechtigt. Denn normalerweise ist die Störung nicht größer als die Lösung. Wenn aber $\delta \geq \|f^\delta\|$ ist, dann ist $\varphi^\delta = 0$ die Minimumnormlösung der Gleichung.

5.3 Numerisches Verfahren zum inversen Problem

Anhand der Ergebnisse des letzten Abschnitts können wir nun die Diskussion um das Lösen des inversen Problems fortsetzen. Als erstes soll der adjungierte Operator zu F bestimmt werden. Für $g \in L^2(\Omega)$ ist der zu F adjungierte Operator $F^* : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$ gegeben durch

$$F^*(g)(y) := \left(\bar{C}_1 \int_{\Omega} \langle \nu(y), \hat{x} \rangle e^{ik \langle \hat{x}, y \rangle} g(\hat{x}) ds(\hat{x}), \bar{C}_2 \int_{\Omega} e^{ik \langle \hat{x}, y \rangle} g(\hat{x}) ds(\hat{x}) \right), \quad (5.12)$$

für $y \in \Gamma$. Dies erfolgt durch Vertauschen von Integrationsreihenfolgen.

Für einen linearen, beschränkten Operator A ist der adjungierte Operator A^* auch linear und beschränkt. Es gilt außerdem noch die folgenden Beziehungen.

Satz 5.6. A sei ein beschränkter, linearer Operator. Es gilt

$$A(X)^\perp = N(A^*), \quad N(A^*)^\perp = \overline{A(X)}$$

Beweis: Theorem 15.8 in [18]. □

Die folgende Aussage garantiert die Anwendbarkeit des Regularisierungsverfahrens für unsere Aufgabe.

Satz 5.7. Der Operator F ist injektiv und hat dichten Wertebereich.

Beweis: Sei $F\Psi \equiv 0$. Als Folge der beiden Definitionen (5.6), (5.7) und des Rellich Lemmas gilt für das durch (5.3) definierte Potential $u^s(x) = 0$ für alle

$x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$. Aus der Sprungbeziehung (im L^2 -Sinne) des Doppelschichtpotentials folgt zunächst $\varphi_1 \equiv 0$. Dann gilt für das Einfachschichtpotential

$$w(x) := \int_{\Gamma} \Phi(x, y) \varphi_2(y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma.$$

offenbar $w(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$. Aus der Sprungsbeziehung des Einfachschichtpotentials im L^2 -Sinne

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial w(x + h\nu(x))}{\partial \nu(x)} - \frac{\partial w(x - h\nu(x))}{\partial \nu(x)} + \varphi_2(x) \right|^2 ds(x) = 0$$

ergibt sich $\varphi_2 \equiv 0$. Die Injektivität des Operators F ist damit bewiesen.

Um die zweite Aussage des Satzes zu beweisen, reicht es nach dem letzten Satz, die Injektivität des zu F adjungierten Operators F^* zu beweisen. Um die Injektivität des Operators F^* zu beweisen, folgen wir der Idee des Beweises zum ersten Teil. Zu diesem Zweck definieren wir zunächst für $g \in L^2(\Omega)$ die Herglotzfunktion

$$v(y) := \int_{\Omega} e^{ik \langle \hat{x}, y \rangle} g(\hat{x}) ds(\hat{x}), \quad y \in \mathbb{R}^2.$$

Sei nun $F^*(g)(y) = 0$, für $y \in \Gamma$. Daraus folgt $v = 0$ auf Γ . Für $y \in \Gamma$ gilt ferner

$$\frac{\partial v(y)}{\partial \nu(y)} = \langle \nu(y), \text{grad} v(y) \rangle = \langle \nu(y), ikv(y)\hat{x} \rangle = 0.$$

Die Herglotzfunktion v löst die Helmholtzgleichung. Nach dem Eindeutigkeitssatz von Holmgren ist $v \equiv 0$ in \mathbb{R}^2 . Da v Herglotzfunktion ist, gilt $g \equiv 0$ auf Γ (Theorem 3.15 in [6]). Daraus folgt die Injektivität des Operators F^* . \square

Nun können wir das im Satz 5.2 beschriebene Regularisierungsverfahren auf Gleichung (5.7) anwenden. Nach dem Satz haben wir die folgende Gleichung

$$(\alpha I + F^*F)\Psi = F^*u_{\infty}, \quad \alpha > 0, \quad (5.13)$$

zu lösen. Wir bezeichnen mit Ψ_{α} die eindeutige Lösung dieser Gleichung für ein vorgegebenes α .

Nach dem Satz 5.4 kann die Minimumnormlösung durch Lösen von $G(\alpha) = 0$ für ein vorgegebenes δ gewonnen werden, wobei die Funktion $G : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$G(\alpha) := \|F\Psi_{\alpha} - u_{\infty}\|^2 - \delta^2$$

definiert ist. Numerisch wird hier das Newton Verfahren genutzt. Zu diesem Zweck formulieren wir zunächst die Darstellung von G um durch

$$\begin{aligned} G(\alpha) &:= \|F\Psi_\alpha - u_\infty\|^2 - \delta^2 \\ &= \langle u_\infty - F\Psi_\alpha, u_\infty \rangle - \langle F^*(u_\infty - F\Psi_\alpha), \Psi_\alpha \rangle - \delta^2 \\ &= \|u_\infty\|^2 - \langle \Psi_\alpha, F^*u_\infty \rangle - \alpha\|\Psi_\alpha\|^2 - \delta^2 \end{aligned}$$

Aus

$$\frac{1}{h}(\Psi_{\alpha+h} - \Psi_\alpha) = -(\alpha I + F^*F)^{-1}\Psi_{\alpha+h}$$

sehen wir, daß die Lösung Ψ_α von (5.13) differenzierbar bzgl. α ist. Außerdem erfüllt das Differential die Gleichung

$$\alpha \frac{d\Psi_\alpha}{d\alpha} + F^*F \frac{d\Psi_\alpha}{d\alpha} = -\Psi_\alpha \quad (5.14)$$

Daher ist auch G differenzierbar mit

$$G'(\alpha) = -\left\langle \frac{d\Psi_\alpha}{d\alpha}, F^*u_\infty \right\rangle - \|\Psi_\alpha\|^2 - 2\alpha \operatorname{Re} \left\langle \frac{d\Psi_\alpha}{d\alpha}, \Psi_\alpha \right\rangle$$

Also ist hier das Newton Verfahren anwendbar.

Nachdem wir für vorgeschriebenes δ die Minimumnormlösung Ψ^δ gefunden haben, können wir z.B. gemäß (5.5) die Impedanz λ lösen. Die dadurch gewonnene Lösung kann aber unstabil gegen kleine Störung in der Nähe der Nullstelle von dem Gesamtfeld u sein. Um dies zu vermeiden, suchen wir die Lösung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Die Impedanzfunktion wird als lineare Kombination von einer Menge linearer unabhängigen Funktionen dargestellt. Wir schreiben

$$\lambda = \sum_{m=1}^M a_m \varphi_m \quad \text{auf } \Gamma \quad (5.15)$$

Die Aufgabe ist nun die Bestimmung der Koeffizienten a_m , für die die folgende Summe

$$\sum_{n=1}^N \left| \psi_2(x_n) - 2iku(x_n) \sum_{m=1}^M a_m \varphi_m(x_n) \right|^2 \quad (5.16)$$

minimiert wird, wobei $x_n \in \Gamma$, $n = 0, \dots, N$ die Stützstellen der Diskretisierung sind (Vgl. [1]). In diesem Zusammenhang ist es ersichtlich, daß die Zahl M auch als Regularisierungsparameter angesehen werden kann.

5.4 Numerische Ergebnisse

In diesem Abschnitt präsentieren wir einige numerischen Testergebnisse für das inverse Problem. Als einfallende Welle wählen wir stets die ebene Welle $u^i(\cdot, d) := e^{ik\langle \cdot, d \rangle}$ mit der Einfallsrichtung $d = (0, 1)$. Da keine explizite Lösung des direkten Problems bekannt ist, nehmen wir als Daten des inversen Problems das Fernfeld, das wir beim Lösen des direkten Problems bekamen. Dies hat die Folge, daß die Daten selbst schon Fehler enthalten. Wir wählen das Fernfeld $u_\infty^n, n = 256$, d.h. das Fernfeld, das wir für $n = 256$ bei dem direkten Problem gerechnet haben. Für das inverse Problem wählen wir $N = 32$. Die dadurch entstandene Impedanzfunktion bezeichnen wir mit λ_{32} . Sie wird mit gebrochener Linie in den Bildern dargestellt. Als Basisfunktionen für die Methode der kleinsten Quadrate wählen wir die trigonometrischen Funktionen $\varphi_m(x) := e^{-imx}$. Wir wählen den Parameter $M = 5$ und bezeichnen mit λ_* die kleinste Quadrate Lösung, welche durch die Punktlinie gezeichnet wird. Die wahre Impedanz wird immer mit λ bezeichnet und mit durchgezogener Linie dargestellt.

Beispiel 5.1. In dem ersten Beispiel betrachten wir ein Geradenstück wie in Beispiel 4.1. Wie bei dem direkten Randwertproblem werden wir auch einige Impedanzfunktionen an diesem Bogen testen. Wir testen jeweils die Impedanzfunktionen $\lambda = 0, 1, t^2$ und $(1 - t^2)^2$ für die Wellenzahl $k = 1$ und $k = 5$.

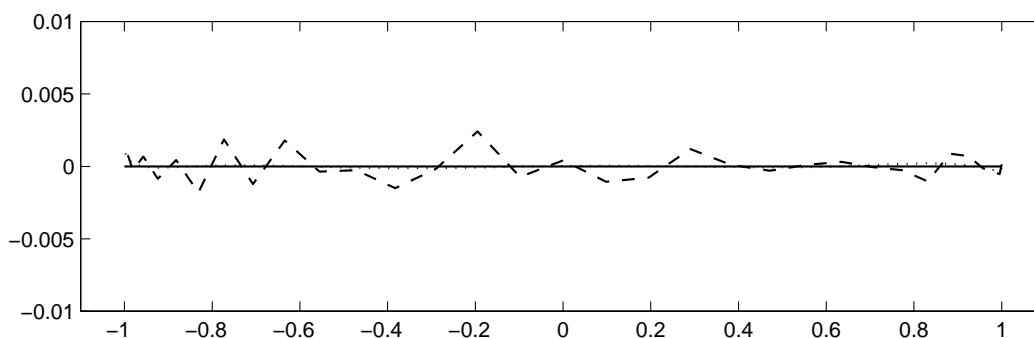


Abbildung 5.1: $k = 1, \lambda = 0, \quad \alpha = 1.8 E^{-14}, \quad \|\lambda_{32} - \lambda\|_2 = 1.3 E^{-3}$

Wir sehen in diesem Beispiel, daß unser Verfahren sehr gut funktioniert. Selbst das direkte Rechnen ohne die Methode der kleinsten Quadrate bei dem problematischen Fall $\lambda = 1$ funktioniert ohne Probleme.

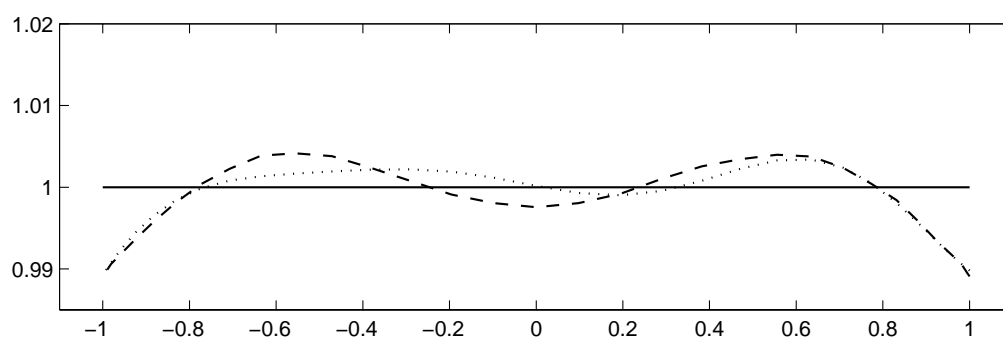


Abbildung 5.2: $k = 1, \lambda = 1, \alpha = 1 E^{-12}, \|\lambda_{32} - \lambda\|_2 = 8.6 E^{-3}$

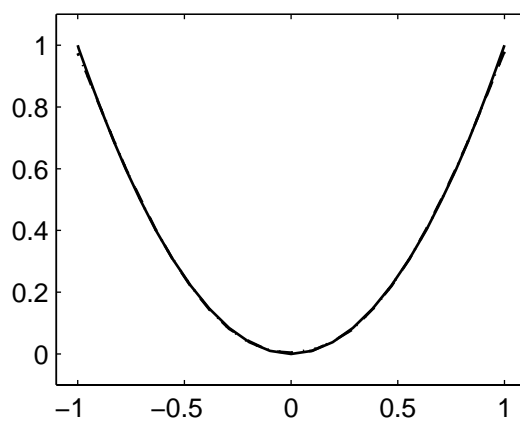


Abbildung 5.3: $k = 1, \lambda = t^2, \alpha = 1.9 E^{-14}, \|\lambda_{32} - \lambda\|_2 = 1.1 E^{-2}$

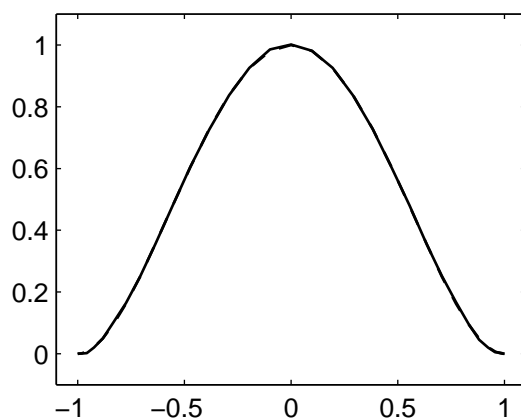


Abbildung 5.4: $k = 1, \lambda = (1 - t^2)^2, \alpha = 3.1 E^{-14}, \|\lambda_{32} - \lambda\|_2 = 3.8 E^{-3}$

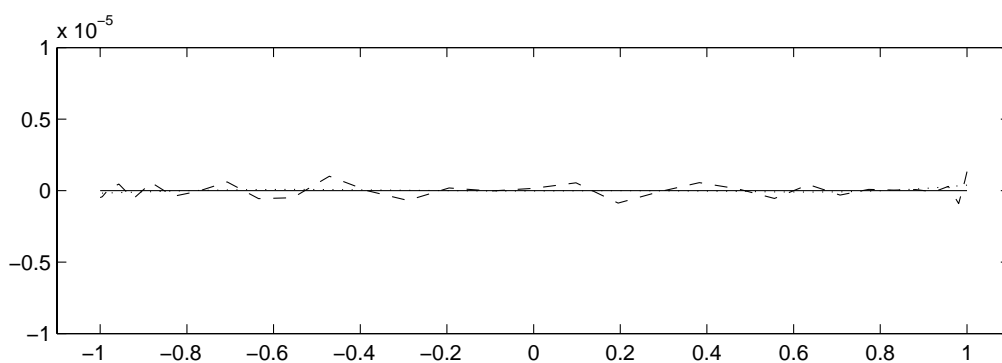


Abbildung 5.5: $k = 5, \lambda = 0, \alpha = 2.2 E^{-12}, \|\lambda_{32} - \lambda\|_2 = 8.4 E^{-7}$

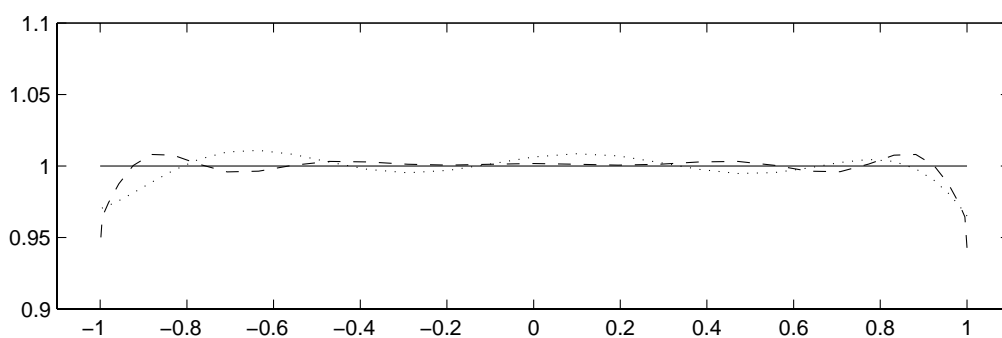


Abbildung 5.6: $k = 5, \lambda = 1, \alpha = 1.5 E^{-12}, \|\lambda_{32} - \lambda\|_2 = 3.9 E^{-2}$

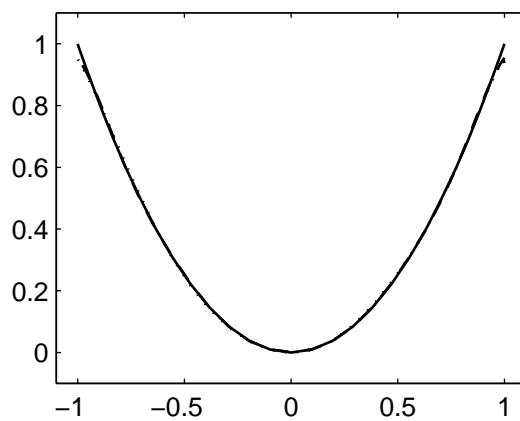


Abbildung 5.7: $k = 5$, $\lambda = t^2$, $\alpha = 1.9 E^{-14}$, $\|\lambda_{32} - \lambda\|_2 = 3.8 E^{-2}$

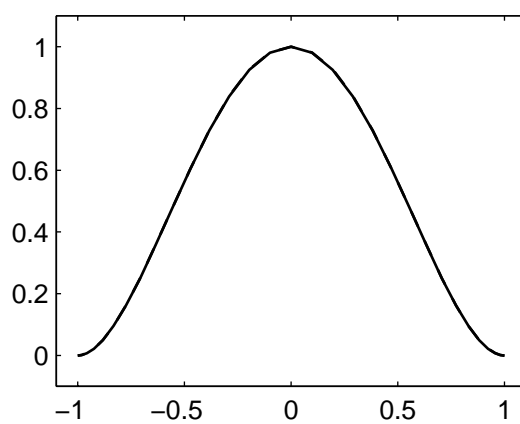


Abbildung 5.8: $k = 5$, $\lambda = (1 - t^2)^2$, $\alpha = 6.6 E^{-14}$, $\|\lambda_{32} - \lambda\|_2 = 7.4 E^{-3}$

Beispiel 5.2. In diesem Beispiel betrachten wir das Geradenstück von dem letzten Beispiel. Um zu testen, ob die Lösung stabil ist, verwenden wir statt exakter Daten f nun fehlerhafte Daten f^δ für die rechte Seite. Genauer : $f_i^\delta := (1 + ((-1)^i + \frac{2}{5})\delta)f_i$. Hier wählen wir $\delta = 0.1$.

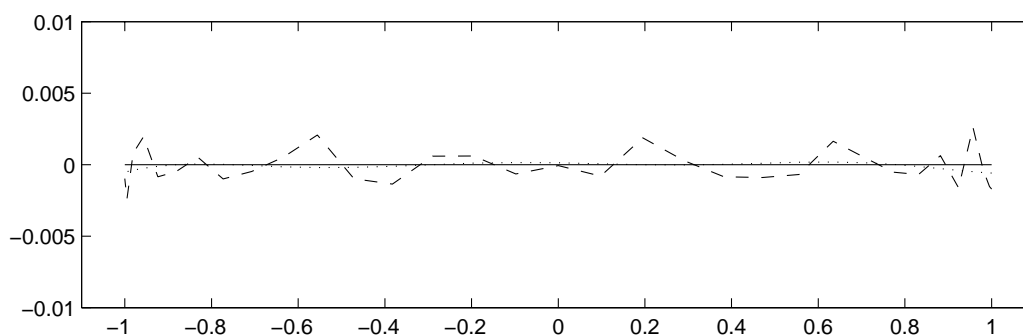


Abbildung 5.9: $k = 1, \lambda = 0, \quad \alpha = 1.2 E^{-14}, \quad \|\lambda_{32} - \lambda\|_2 = 1.8 E^{-3}$

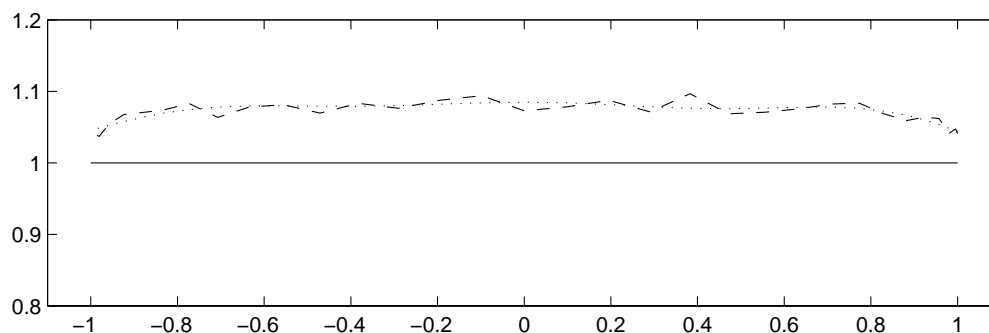


Abbildung 5.10: $k = 1, \lambda = 1, \quad \alpha = 1.5 E^{-14}, \quad \|\lambda_{32} - \lambda\|_2 = 7.4 E^{-2}$

In diesem Beispiel wird es deutlich spürbar, wie unterschiedlich die Impedanzfunktionen auf Störungen reagieren. Während für den Fall $\lambda = 0$ die direkte Methode völlig ausreicht, ist für den Fall $\lambda = (1 - t^2)^2$ der Einsatz der Methode der kleinsten Quadrate unvermeidbar. Für den Fall $\lambda = 1$ ist der Einfluß der fehlerhaften Daten noch deutlicher zu sehen.

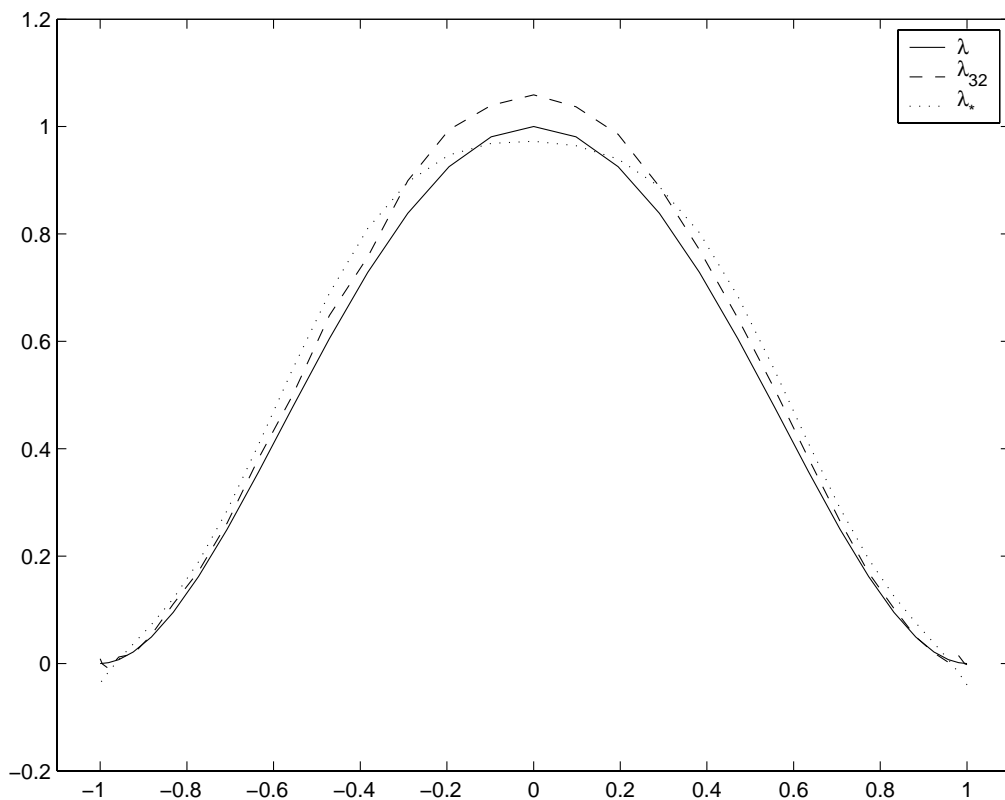


Abbildung 5.11: $k = 1, \lambda = (1 - t^2)^2, \alpha = 2.1 E^{-14}, \|\lambda_{32} - \lambda\|_2 = 3.3 E^{-2}$

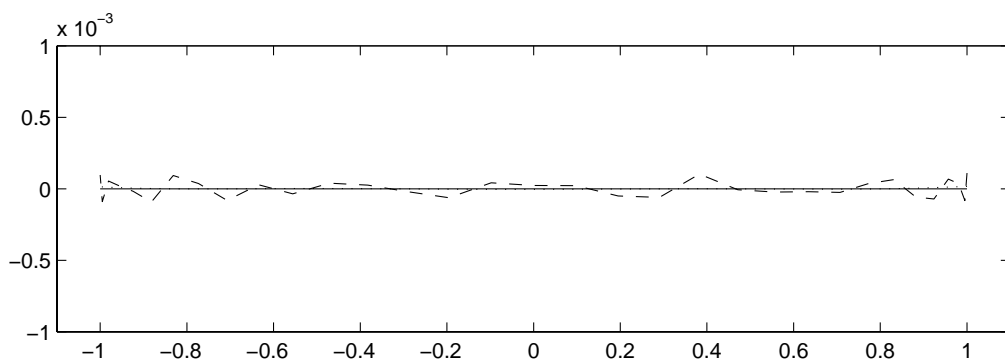


Abbildung 5.12: $k = 5, \lambda = 0, \alpha = 2.6 E^{-14}, \|\lambda_{32} - \lambda\|_2 = 8.2 E^{-5}$

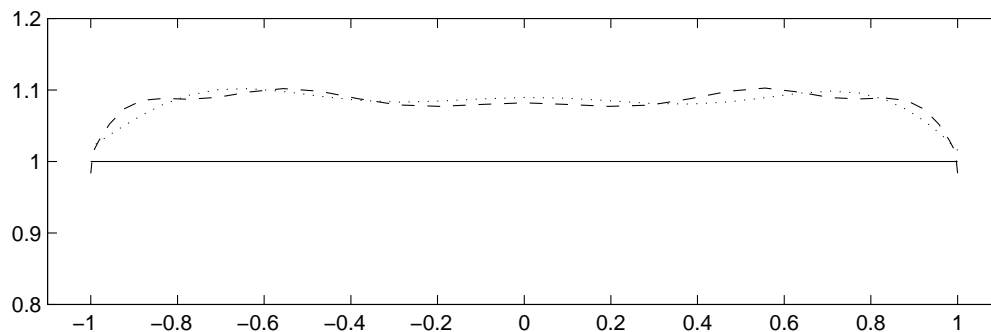


Abbildung 5.13: $k = 5, \lambda = 1, \alpha = 4.1 E^{-14}, \|\lambda_{32} - \lambda\|_2 = 8.8 E^{-2}$

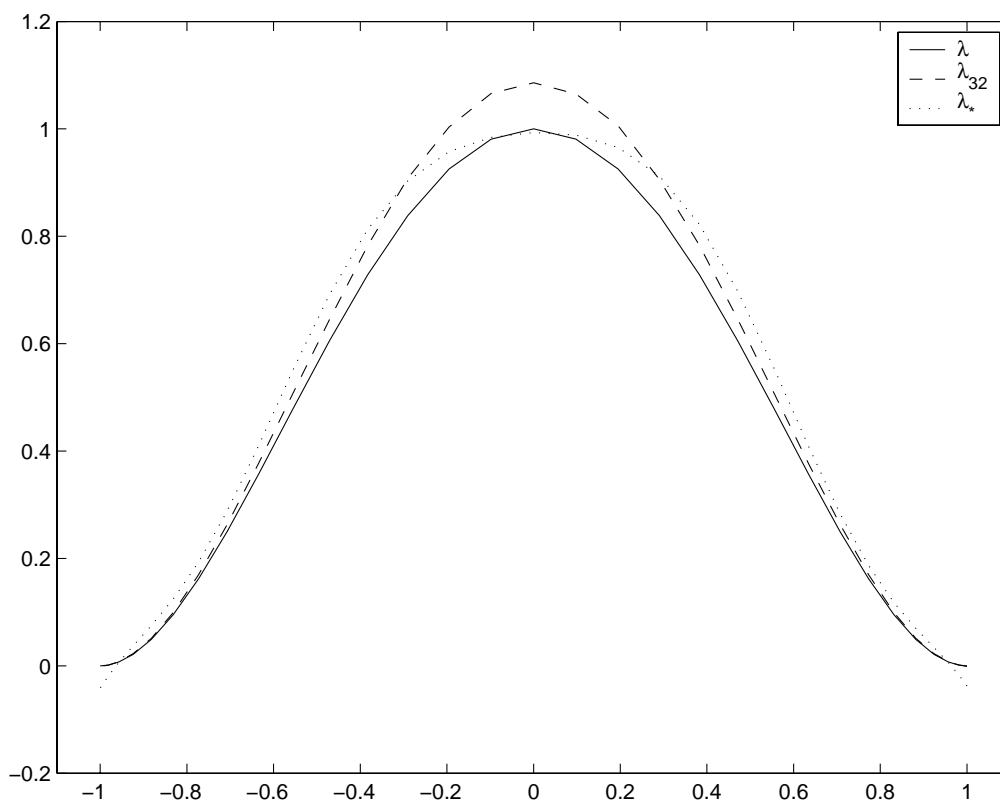


Abbildung 5.14: $k = 5, \lambda = (1 - t^2)^2, \alpha = 3.2 E^{-14}, \|\lambda_{32} - \lambda\|_2 = 4.2 E^{-2}$

Beispiel 5.3. In diesem Beispiel betrachten wir einen Teilbogen von dem Einheitskreis

$$z(t) = (\cos(t), \sin(t)), \quad t \in [-1, 1]$$

Wir testen an diesen Bogen die Impedanzen $\lambda = 0$, $\lambda = 1$ und $\lambda = (1 - t^2)^2$. Die Ergebnisse von exakten Daten f werden mit den Ergebnissen von fehlerhaften Daten f^δ , $\delta = 0.1$ verglichen.

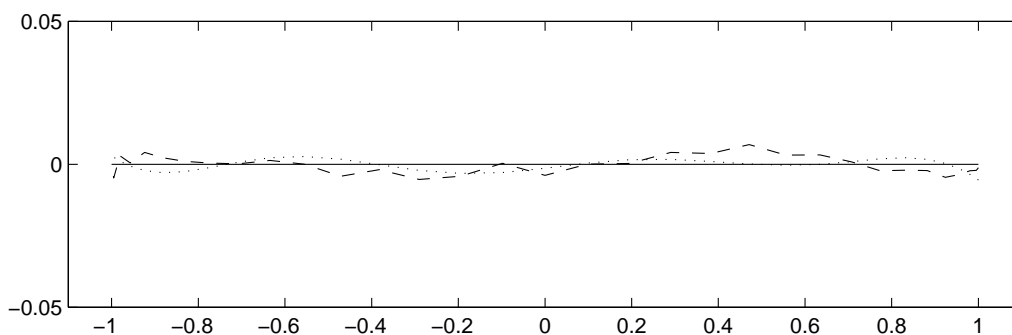


Abbildung 5.15: $k = 1, \lambda = 0, \quad \alpha = 4 E^{-15}, \quad \|\lambda_{32} - \lambda\|_2 = 6.7 E^{-3}$

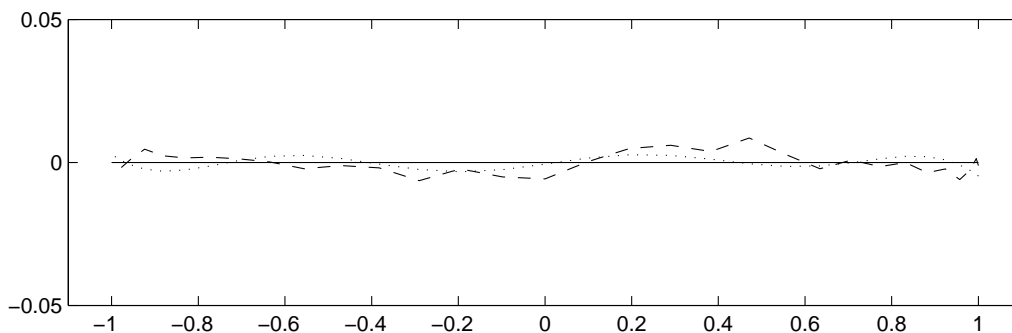


Abbildung 5.16: $k = 1, \lambda = 0, \quad \delta = 0.1, \quad \alpha = 4 E^{-15}, \quad \|\lambda_{32} - \lambda\|_2 = 7.2 E^{-3}$

Dieses Beispiel zeigt ungefähr das gleiche Verhalten wie bei den letzten zwei Beispielen.

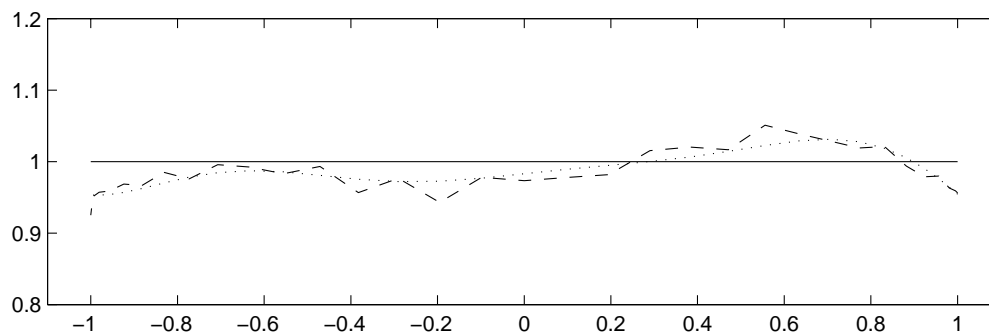


Abbildung 5.17: $k = 1, \lambda = 1, \alpha = 8 E^{-15}, \|\lambda_{32} - \lambda\|_2 = 6.1 E^{-2}$

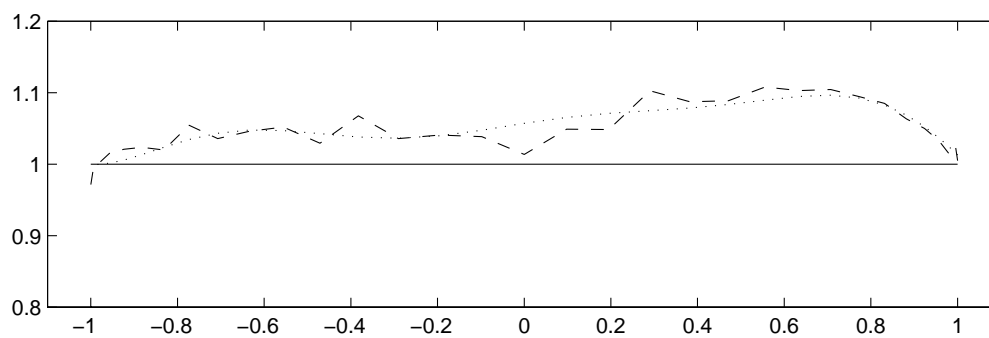


Abbildung 5.18: $k = 1, \lambda = 1, \delta = 0.1, \alpha = 8 E^{-15}, \|\lambda_{32} - \lambda\|_2 = 6.5 E^{-2}$

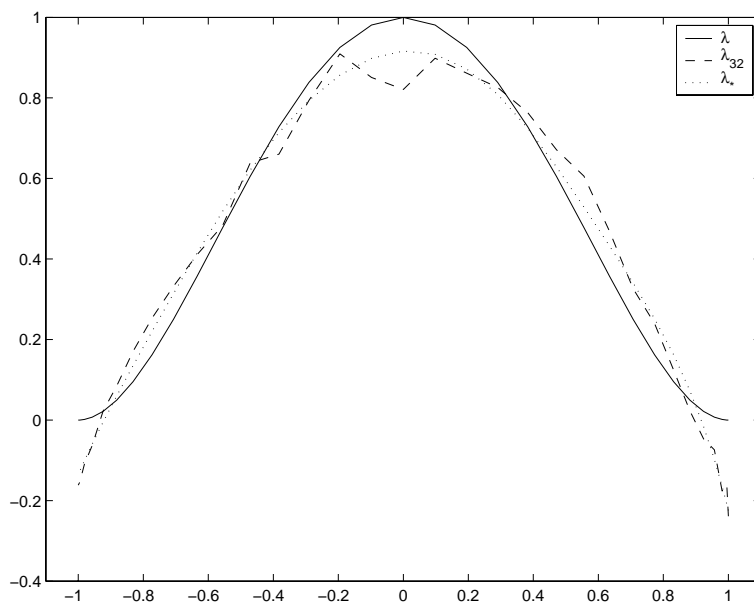


Abbildung 5.19: $k = 1, \lambda = (1 - t^2)^2, \alpha = 2 E^{-15}, \|\lambda_{32} - \lambda\|_2 = 1.3 E^{-1}$

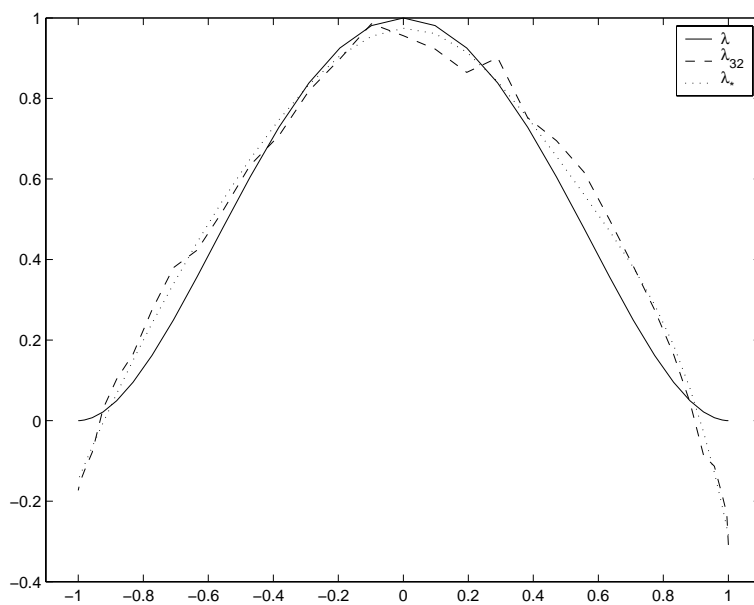


Abbildung 5.20: $k = 1, \lambda = (1 - t^2)^2, \delta = 0.1, \alpha = 3 E^{-15}, \|\lambda_{32} - \lambda\|_2 = 1.4 E^{-1}$

5.5 Ausblicke

Wir haben in dem Abschnitt 5.4 gesehen, daß die Rekonstruktion der Impedanz nicht immer ganz ohne Probleme verlief. Das ist zwar die Eigenschaft des inversen Problems (schlechte Gestelltheit), aber auch die unvollständige Kenntnis des direkten Problems hat dazu beigetragen. Daher muss die Endpunktsingularität der Lösung noch genauer untersucht werden. Obwohl der Versuch beim direkten Problem mit einigen rationalen Substitutionen, die in z.B. [18] und [10] verwendet worden sind, in Kombination mit der Cosinus Substitution erfolglos geblieben war, ist es nicht auszuschließen, Substitutionen zu finden, die die Singularitäten gleichzeitig behandeln können, nachdem diese genauer charakterisiert worden sind.

Eine weitere Untersuchungsrichtung wäre die Bestimmung des Bogens, mit oder ohne Kenntnis der Impedanz. Dies erfordert dann das Lösen einer nichtlinearen Gleichung $F(\Gamma) = u_\infty$. Größeren Aufwand erfordert dabei die Berechnung der Fréchet Ableitung des Fernfeldoperators bzgl. dem Bogen Γ , die für Newton Verfahren benötigt wird.

Literaturverzeichnis

- [1] Ibrahim Akduman and Rainer Kress. Direct and inverse scattering problems for inhomogeneous impedance cylinders of arbitrary shape. *Radio Science*, (to appear).
- [2] J. Bürger. Die numerische Behandlung von Integralgleichungen erster Art bei Dirichletschen Randwertaufgaben zur Helmholtzgleichung. Diplomarbeit, Göttingen, 1993.
- [3] F. Cakoni and D. Colton. The linear sampling method for cracks. *Inverse Problems*, 19:279–295, 2003.
- [4] Maria Rosaria Capobianco, Giuliana Criscuolo, and Peter Junghanns. A fast algorithm for Prandtl’s integro-differential equation. *J. of Computational and Applied Mathematics*, 77:103–128, 1997.
- [5] David Colton and Rainer Kress. *Integral Equation Methods in Scattering Theory*. Wiley Interscience, 1983.
- [6] David Colton and Rainer Kress. *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*. Springer, 2 edition, 1998.
- [7] Martin Costabel and Monique Dauge. Crack Singularities for General Elliptic Systems. *Math. Nachr.*, 235:29–49, 2002.
- [8] W. Hoppe D. Berthold and B. Silbermann. A fast algorithm for solving the generalized airfoil equation. *J. of Computational and Applied Mathematics*, 43:185–219, 1992.
- [9] W. Hoppe D. Berthold and B. Silbermann. The numerical solution of the generalized airfoil equation. *J. of Integral Equations and Applications*, 4(2):309–336, 1992.
- [10] D. Elliott and S. Prössdorf. An algorithm for the approximate solution of integral equations of Mellin type. *Numerische Mathematik*, 70:427–452, 1995.

- [11] I. E. Garrick. Conformal mapping in aerodynamics, with emphasis on the method of successive conjugates. *Nat. Bur. Standards Appl. Math. Ser.*, 18:137–147, 1952.
- [12] Yoshio Hayashi. The Dirichlet problem for the two-dimensional Helmholtz equation for an open boundary. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 44:489–530, 1973.
- [13] O. D. Kellogg. *Foundations of Potential Theory*. Springer, Berlin, 1929.
- [14] A Kirsch and R Kress. Uniqueness in inverse obstacle scattering. *Inverse Problems*, 9:285–299, 1993.
- [15] R. Kress and W. Rundell. A quasi-newton method in inverse obstacle scattering. *Inverse Problems*, 10:1145–1157, 1994.
- [16] Rainer Kress. Inverse Scatteing from an Open Arc. *Math. Meth. in the Appl. Sci.*, 18:267–293, 1995.
- [17] Rainer Kress. On the numerical solution of a hypersingular integral equation in scattering theory. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 61:345–360, 1995.
- [18] Rainer Kress. *Linear Integral Equations*. Springer, 2 edition, 1999.
- [19] Rainer Kress and William Rundell. Inverse scattering for shape and impedance. *Inverse Problems*, 17:1075–1085, 2001.
- [20] R. Kussmaul. Ein numerisches Verfahren zur Lösung des Neumannschen Außenraumproblems für die Helmholtzsche Schwingungsgleichung. *Computing*, 4:246–273, 1969.
- [21] Rolf Leis. Über das Neumannsche Randwertproblem für die Helmholtzsche Schwingungsgleichung. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 2:101–113, 1958.
- [22] P. A. Lewis and G. R. Wickham. The diffraction of SH waves by an arbitrary shaped crack in two dimensions. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 340:503–529, 1992.
- [23] E. Martensen. Über eine Methode zum räumlichen Neumannschen Problem mit einer Anwendung für torusartige Berandungen. *Acta Math.*, 109:75–135, 1963.
- [24] P. A. Martin. End-point behaviour of solutions to hypersingular integral equations. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 432:301–320, 1991.

- [25] P. A. Martin and F. J. Rizzo. On boundary integral equations for crack problems. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 421:341–355, 1989.
- [26] Lars Mönch. Die numerische Lösung des inversen akustischen Streuproblems am schallharten Kurvenbogen. Dissertation, Göttingen, 1996.
- [27] Lars Mönch. On the numerical solution of the direct scattering problem for an open sound-hard arc. *J. Comput. Appl. Math.*, 71(2):343–356, 1996.
- [28] S. Prössdorf and B. Silbermann. *Projektionsverfahren und die näherungsweise Lösung singulärer Gleichungen*. Teubner Verlag, Leipzig, 1977.
- [29] F. Rellich. Über das asymptotische Verhalten der Lösung von $\Delta u + \lambda u = 0$ in unendlichen Gebieten. *Jber. Deutsch. Math.-Verein.*, 53:57–65, 1943.
- [30] W. L. Wendland and E. P. Stephan. A hypersingular boundary integral method for two-dimensional screen and crack problems. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 112:363–390, 1990.
- [31] H. Weyl. Kapazität von Strahlungsfeldern. *Math. Z.*, 55:187–198, 1952.
- [32] G. R. Wickham. Integral equations for boundary value problem exterior to open arcs and surfaces. In C. T. H. Baker and G. F. Miller, editors, *Treatment of integral equations by numerical methods*, pages 421–431. Academic Press London, 1982.
- [33] Y. Yan and I. H. Sloan. On integral equations of the first-kind with logarithmic kernels. *J. Integral Equations Appl.*, 1:549–579, 1988.

Lebenslauf

Name Kuo-Ming Lee
Geburtsdatum 08.06.1968
Geburtsort Taipeh/Taiwan
Staatsangehörigkeit Taiwan
Eltern Kun-Lieh Lee, LKW-Fahrer
Chang Hsiu-Ying Lee

Ausbildung :

1974-1980 Zinzhung Elementary School, Taipeh
1980-1983 Cheng Cheng Junior High School, Taipeh
1983-1986 Cheng Kung Senior High School, Taipeh
1986-1990 National Chiao Tung University in Hsinchu, Taiwan
mit Abschluß B. Sc.
1990-1992 Wehrdienst
WS 93/94 - WS 99/00 Studium der Mathematik mit Nebenfach
Theo. Physik an der Georg-August-Universität
in Göttingen, Abschluß: Diplom
seit SS 00 Promotionsstudium in Mathematik

Tätigkeiten :

Feb 01-Jun 03 wissenschaftlicher Mitarbeiter in der NFG
„Neue numerische Verfahren zur Lösung inverser Probleme“