

**EXPERIMENTELLE UNTERSUCHUNGEN
DOPPELT DIFFUSIVER KONVEKTION
IM FINGER-REGIME**

DISSERTATION

zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultäten
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von

ELLEN-CHRISTIN HAGE

aus Hannover

Göttingen 2010

D 7

Referent: Prof. Dr. A. Tilgner

Korreferent: Prof. Dr. Dr. A. Dillmann

Tag der mündlichen Prüfung: 14. Juli 2010

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	ii
Tabellenverzeichnis	vii
1 Einleitung	1
2 Theoretische Grundlagen	7
2.1 Rayleigh-Bénard-Konvektion	7
2.2 Hydrodynamische Grundgleichungen	8
2.2.1 Die Kennzahlen	10
2.2.2 Randbedingungen	13
2.3 Chemische Grundlagen	14
2.3.1 Die elektrolytische Zelle	14
2.3.2 Kennlinie einer elektrochemischen Zelle	16
2.3.3 Das elektrische Feld	18
2.4 Doppelt diffusive Konvektion	19
3 Experimenteller Aufbau und Messmethoden	23
3.1 Der Aufbau	23
3.1.1 Bestimmung des Spannungsbereichs	25
3.1.2 Durchführung einer Messung	26
3.2 Die Messmethoden	27
3.2.1 Schattenverfahren	27
3.2.2 Particle Image Velocimetry	28
3.2.3 Temperaturmessung	31
4 Die Struktur der Strömung	35
4.1 Die Stabilität des Finger-Regimes	35
4.2 Vertikales Strömungsbild	37

4.2.1	Das Temperaturprofil	39
4.3	Horizontales Strömungsbild	42
4.4	Die Grenzschicht-Rayleigh-Zahlen	46
4.5	Die Energiedissipation	48
4.6	Das Kräftegleichgewicht	51
5	Skalierungsgesetze	57
5.1	Bestimmung der Abhängigkeiten	57
5.2	Der Transport von Masse und Temperatur	60
5.2.1	Die Sherwood-Zahl	61
5.2.2	Die Nusselt-Zahl	67
5.2.3	Das Flussverhältnis	70
5.3	Die Fingerdicke	73
5.4	Die Geschwindigkeit	76
5.5	Die Anwachsrate der Finger	80
5.6	Weitere Ergebnisse	83
5.6.1	Ergebnisse für $\Delta T \rightarrow 0$	83
5.6.2	Abhängigkeit vom Aspektverhältnis	85
5.6.3	Abhängigkeit von der Anfangsstratifizierung	86
6	Zusammenfassung	89
A	Nomenklatur	93
B	Ergebnistabellen	96
C	Bestimmung der Materialeigenschaften	102
C.1	Bestimmung der Kupferkonzentration	102
C.2	Gleichungen zur Bestimmung der Stoffeigenschaften	104
D	Technische Angaben	106
	Literaturverzeichnis	113

Abbildungsverzeichnis

1.1	<i>Skizze der thermohalinen Konvektionsbewegung, die das ozeanisches Förderband antreibt. Bild aus [Wikipedia, 2010b].</i>	2
1.2	<i>Schichtbildung aufgrund von doppelt diffusiver Konvektion in einem Latte Macchiato. Bild aus [Wikipedia, 2010a].</i>	3
2.1	<i>Schematischer Aufbau der Konvektionszelle bei Rayleigh-Bénard-Konvektion.</i>	7
2.2	<i>Prinzip der elektrolytischen Zelle am Beispiel Kupfersulfat.</i>	15
2.3	<i>Experimentell bestimmte Kennlinie einer chemisch getriebenen Konvektionszelle (Messung 080919, $c_0 = 0.03M$, $L = 2\text{ cm}$).</i>	16
2.4	<i>Bild (a) zeigt die vertikalen Profile von Temperatur T und Salzgehalt S, potentielle Dichteanomalie σ_Θ [kg/m^3] und Auftriebsverhältnis (hier Λ, in der Abbildung aber mit R_ρ gekennzeichnet) im westlichen tropischen Nordatlantik (aus [Schmitt, 1994]). Bild (b) und (c) sind Ausschnitte aus den Salz/Zucker-Experimenten von [Krishnamurti, 2003]. (c) zeigt zwei konvektiv durchmischte Schichten, die durch schmale Fingerzonen (im Ausschnitt (b) ist eine davon vergrößert zu sehen) abgegrenzt werden.</i>	21
3.1	<i>Photographie des Versuchsaufbaus, hier die 8 cm hohe Zelle. Die Zahlen markieren: 1: Konvektionszelle, 2: Thermostate, 3: Spannungsquelle, 4: Laser, 5: CCD-Kamera.</i>	24
3.2	<i>Prinzipielle Funktionsweise des direkten Schattenverfahrens.</i>	28
3.3	<i>Schematischer Aufbau des Schattenverfahrens –Seitenansicht.</i>	28
3.4	<i>Skizze des PIV-Aufbaus in Aufsicht.</i>	29
3.5	<i>Skizze zur Vernetzung und Bedienung des PIV-Systems.</i>	30
3.6	<i>Prinzip der Geschwindigkeitsermittlung mittels Kreuzkorrelation bei Particle Image Velocimetry. Bild aus [Raffel et al., 1998].</i>	31

- 4.1 Das Stabilitätsdiagramm (a) zeigt die verschiedenen Bereiche doppelt-diffusiver Konvektion. Dort sind Notation und Vorzeichenkonvention dem Autor entnommen, siehe erklärend im Text. Die pinkfarbenen Rauten in (b) kennzeichnen die Messungen dieser Arbeit im Rayleigh-Zahlen-Phasenraum. Sie liegen bis auf zwei Ausnahmen außerhalb des klassischen Fingerbereichs. Die blau gestrichelte Kurve entspricht gerade $|\Lambda| = 1$ 36
- 4.2 Typisches Geschwindigkeitsfeld einer ausgewerteten PIV-Messung. Die Vektoren zeigen das Geschwindigkeitsfeld, die Grauskala nur die vertikale Komponente u_z [$\frac{mm}{s}$]. Hier eine Mittelung über 60 Bilder (entspricht 15 Sekunden) von Messung 091201 mit $Ra_c = 1.05 \cdot 10^9$ und $|Ra_T| = 3.81 \cdot 10^5$. Der Ausschnitt umfasst die komplette Zellhöhe von 20 mm und eine Breite von 15 mm. 38
- 4.3 Typisches Schattenbild. Die weiße Färbung auf $\frac{3}{4}$ der Bildhöhe entstand durch Lichtreflexe auf der Leinwand. Hier ein Einzelbild nach 15 Minuten von Messung 091112 mit $Ra_c = 1.15 \cdot 10^{11}$ und $|Ra_T| = 9.70 \cdot 10^7$. Der Ausschnitt umfasst die komplette Zellhöhe von 80 mm und eine Breite von 85 mm. 38
- 4.4 Vereinfacht dargestellt sind Dichte- (schwarz), Temperatur- (rot) und Konzentrationsverteilung (grün) in der Zelle im Fingerregime. $\Delta\varrho_{innen} \leq 0$, d. h. stabil und $\Delta\varrho_{ges} \geq 0$, also instabil. 39
- 4.5 In Bild (a) bis (c) sieht man experimentell gemessene Temperaturprofile. Sie zeigen jeweils die obersten 12 mm der 2 cm-Zelle. Bild (d) zeigt das Falschfarbenbild, d. h. die Temperaturverteilung. Bei dieser Messung war der Temperaturgradient mit 1 K/cm klein. Der Ausschnitt zeigt 30×24 mm aus der 80 mm-Zelle. Die Temperatur dieses Ausschnitts variiert etwa zwischen 15.5 (gelb) und 14 (blau) °C. 40
- 4.6 In Bild (a) sieht man exemplarisch die Temperaturdifferenz zum linearen Profil eines aufsteigenden (blau) und eines absinkenden (rot) Fingers. Durch die Asymmetrie der einzelnen Profile ergibt sich eine nicht mehr lineare mittlere Temperaturverteilung, wie Bild (b) zeigt. Die Profile stammen aus der Simulation von [Haase, 2010] mit $Ra_T = 200$, $Ra_c = 5 \cdot 10^6$, $Le = 500$ und $|Nu| = 1.025$ 42

4.7	<i>Horizontaler Querschnitt durch das Fingerregime. Man erkennt die zu Bändern verschmolzenen Finger vor allem im rechten Bildausschnitt. Das Bild zeigt den kompletten Zellquerschnitt von 40×40 cm. Entnommen aus [Hosoyamada and Honji, 1989].</i>	43
4.8	<i>Vertikaler Schnitt durch die Struktur des Fingers am Beispiel der oberen Grenzschicht – mit chemischer Grenzschichtdicke λ. In schwarz ist zusätzlich die Geschwindigkeitsverteilung skizziert.</i>	44
4.9	<i>Die Bilder (a) und (b) deuten die Konzentrations- und Temperaturdifferenz zwischen auf- und absteigenden Fingern der Dicke d in einer konstanten, aber beliebigen Höhe z_0 an.</i>	44
4.10	<i>Schematische Darstellung möglicher horizontaler Fingerquerschnitte und die Konzentrationsverteilung. In grün der konzentrationsführende, absteigende Fingerkern mit $c_K = \Delta c$, in gelb der frische, aufsteigende Kern mit $c_K = 0$. Die Fingermäntel haben jeweils eine mittlere Konzentration (dargestellt in hellgrün) von $c_M = \frac{\Delta c}{2}$.</i>	45
4.11	<i>Chemischer Diffusionsweg im Verhältnis zur Fingerdicke d während der Transitzeit in Abhängigkeit des Auftriebsverhältnisses. Die Legende zu den Symbolen befindet sich in Anhang A und gilt auch für alle folgenden Graphen, sofern nicht explizit anders aufgeführt. Dabei markieren die Farben rot, blau, grün und cyan die verschiedenen Zellhöhen von 2, 4, 8 und 20 cm. Die Symbole stehen für bestimmte Temperaturgradienten: von Stern über Quadrat nach Dreieck von klein nach groß.</i>	46
4.12	<i>Auftragung der effektiven Grenzschicht-Rayleigh-Zahl $Ra_{\text{eff},\lambda}$ gegen das Auftriebsverhältnis Λ.</i>	47
4.13	<i>Plot von Gleichung (4.16) der Daten für $L = 2$ cm mit drei verschiedenen Werten für K: $K = 1$ in rot, $K = 10$ in blau und $K = 0.01$ in grün.</i>	49
4.14	<i>Die verschiedenen Werte für K aus Gleichung (4.17) für alle hier gemessenen Wertepaare (Ra_T, Ra_c) aufgetragen gegen das Auftriebsverhältnis Λ.</i>	50
4.15	<i>Das Kräftegleichgewicht mit den intuitiven Termen aus Gleichung (4.22) und (4.29).</i>	53
4.16	<i>Das Kräftegleichgewicht mit den Termen aus Gleichung (4.33) und (4.31), die sich aus dem Ergebnis für die Sherwood- und Nusselt-Zahl ergeben.</i>	54
5.1	<i>Aufgetragen ist der Phasenraum, den die Rayleigh-Zahlen aller durchgeführten Experimente aufspannen.</i>	58

5.2	<i>Aufgetragen ist Sh in Abhängigkeit von Re, Sc und d/L. Die vollen Symbole sind nach Gleichung (5.9) für lamellenartigen, die offenen Symbole nach Gleichung (5.11) für quadratischen Fingerquerschnitt berechnet. . . .</i>	63
5.3	<i>Aufgetragen ist in (a) die gesamte Datenmenge, in (b) der, mit den Potenzen des 3-dimensionalen Fits berechnete Wert Sh gegen die experimentell gemessene Sherwood-Zahl.</i>	65
5.4	<i>Aufgetragen ist die Sherwood-Zahl Sh in Abhängigkeit von $Ra_T ^{-1/12}$ und $Ra_c^{4/9}$. Die Fehlerbalken haben für Sh eine Länge von 5 % und für die Rayleigh-Zahlen von 10 %.</i>	66
5.5	<i>Aufgetragen ist in (a) die gesamte Datenmenge, in (b) der, mit den Potenzen des 3-dimensionalen Fits berechnete Wert $Nu - 1$ gegen die experimentelle Nusselt-Zahl, die aus der Energiedissipation folgt.</i>	69
5.6	<i>Aufgetragen ist der advective Anteil der Nusselt-Zahl $Nu - 1$ in Abhängigkeit von $Ra_T ^{-13/12}$ und $Ra_c^{13/9}$.</i>	70
5.7	<i>Aufgetragen ist $\chi = Le \Lambda \frac{ Nu-1 }{Sh-1}$ in Abhängigkeit von Λ. Die Gleichheit $\chi = 1$ aus Gleichung (5.32) ist für nicht allzukleine Auftriebsverhältnisse gut zu erkennen.</i>	72
5.8	<i>Aufgetragen ist in (a) die gesamte Datenmenge, in (b) der, mit den Potenzen des 3-dimensionalen Fits berechnete Wert $\frac{d}{L}$ gegen die experimentell gemessene, dimensionslose Fingerdicke $\frac{d}{L}$.</i>	75
5.9	<i>Aufgetragen ist die dimensionlose Fingerdicke $\frac{d}{L}$ in Abhängigkeit von $Ra_T ^{-1/3}$ und $Ra_c^{1/9}$. Die Fehlerbalken entsprechen dem abgeschätzten Fehler für d und den Rayleigh-Zahlen von 10 Prozent.</i>	75
5.10	<i>Aufgetragen ist in (a) die gesamte Datenmenge, in (b) der, mit den Potenzen des 3-dimensionalen Fits berechnete Wert Re gegen die experimentell gemessene Reynolds-Zahl Re.</i>	79
5.11	<i>Aufgetragen ist die Reynolds-Zahl Re in Abhängigkeit von $Ra_T ^{-1/2}$ und Ra_c. Die Fehlerbalken haben die Länge der Standardabweichung der Geschwindigkeit (teilweise kleiner als Symbolgröße) und für die Rayleigh-Zahlen 10 %.</i>	79
5.12	<i>Aufgetragen ist die Zeit t_{merge} [s] in Abhängigkeit von Λ. Die Fehlerbalken haben eine Länge von 8 Sek. und für Λ von 10 %.</i>	81
5.13	<i>Aufgetragen ist die Froude-Zahl Fr (gebildet mit der Geschwindigkeit u_{merge}) gegen das Auftriebsverhältnis Λ. Die Fehlerbalken sind mit einem Zeitfehler von 8 Sek. berechnet und für Λ sind 10 % angenommen.</i>	82

5.14	<i>Aufgetragen ist die Aufbau-Reynolds-Zahl Re_{Aufbau} gegen die Reynolds-Zahl Re des stationären Fingerregimes. Die Fehlerbalken haben eine Länge von 8 Sek. und für Re sind sie wieder mit der Standardabweichung der rms-Geschwindigkeit berechnet.</i>	83
5.15	<i>Sh in Abhängigkeit von Ra_c. Die blauen Rauten sind Messdaten des Kupfersulfat-Systems für $\Delta T = 0$. Die beiden Vergleichsgeraden sind aus [Xia et al., 2002] und [Grossmann and Lohse, 2001].</i>	84
A.1	<i>Legende zu den Symbolen der Datenplots: Jedes Symbol entspricht einem bestimmten Temperaturgradienten, jede Farbe einer Zellhöhe.</i>	95
C.1	<i>Typischer Verlauf eines Spektrums von Kupfersulfat in 1-molarer Schwefelsäure – hier eine Konzentration von $c = 0.058$ M.</i>	103
C.2	<i>Eichkurve zur Bestimmung der Cu^{2+}-Konzentration in 1-molarer Schwefelsäure bei 800 nm.</i>	103

Tabellenverzeichnis

2.1	<i>Eine Gegenüberstellung typischer Werte einer Fingerschicht innerhalb einer thermohalinen Treppe aus einer Messung östlich von Barbados im Zuge des C-SALT-Programms (Daten aus [Kunze, 2003]) mit den minimal und maximal hier im Experiment erreichten Werten.</i>	13
3.1	<i>Spannungen für die verschiedenen Konzentrationen und Zellhöhen, die zum Grenzstrom führen.</i>	25
3.2	<i>Aufgerundete Zeiten zum Erreichen eines stabilen, linearen Temperaturprofils für die einzelnen Zellen.</i>	26
6.1	<i>Zusammenstellung der Potenzgesetze für den Massentransport (Sh), den konvektiven Wärmetransport $Nu - 1$, die Fingerdicke $\frac{d}{L}$ und die Geschwindigkeit in Form der Reynolds-Zahl. Die Fitwerte wurden jeweils bestimmt durch lineare Regression der logarithmierten Gleichung $Z = A \cdot Ra_T ^p \cdot Ra_c^q$ mit Fehler (5.4).</i>	92
B.1	<i>Liste der Messungen mit $\Gamma = 10$ und entsprechend $L = 2$ cm. Dabei Messungen 100211 und 100212 mit anfänglichem Stufenprofil.</i>	98
B.2	<i>Liste aller Messungen mit $\Gamma = 5$. Dabei Messungen 091023 bis 091029 mit $L = 4$ cm, $W = 20$ cm und den beiden Messungen mit abgetrennter Seitenfläche 091201,02 mit $L = 2$ cm und $W = 10$ cm.</i>	99
B.3	<i>Liste der Messungen mit $\Gamma = 2.5$, also aus der $L = 8$ cm-Zelle.</i>	100
B.4	<i>Die beiden Messungen mit $\Gamma = 1.0$ und entsprechend $L = 20$ cm.</i>	101
B.5	<i>Liste der einfach diffusiven Messungen (alle mit $\Gamma = 10.0$ und entsprechend $L = 2$ cm).</i>	101

1 Einleitung

„Small streams in the form of threads or curiously shaped bands will be seen passing from one stratum into another, and often curving about in the most complicated and beautiful manner. [...] but there will now also be seen with the greatest distinctness, numbers of these small parallel threads ascending and reaching nearly to the surface of the top stratum, of considerable length, and ending in evanescent points. [...]

The parts of these strata, however, which are immediately in contact, soon communicate their heat and tend to assume a mean temperature; and it is evident that whenever this is the case, the portions of liquid containing sugar must always be slightly denser than those that are pure, and must consequently sink below and displace the latter.

We shall thus have portions of the upper stratum continually sinking into the lower, and corresponding portions of the lower rising through the upper, and this movement, as the experiment demonstrates, takes place by an interfiltration of minute, thread-like streams.“

Mit diesen Worten beschrieb [\[Jevons, 1857\]](#) die wohl ersten Experimente doppelt diffusiver Konvektion. Dabei suchte er eigentlich nach Möglichkeiten, Cirrus-Wolken („Federwolken“) im Labor zu simulieren. Obwohl er die deutlich schnellere Diffusion der Temperatur gegenüber des Zuckers (etwa 300:1) als entscheidenden Punkt erkannte, schlussfolgerte er vereinfacht und nahm eine instabile Schichtung als Grund für die Bewegung an.

Fast ein Vierteljahrhundert später las Lord Rayleigh davon und wiederholte Jevons Experimente. Dies veranlasste ihn zu der Untersuchung von auftriebsbehafteten Fluiden. Er veröffentlichte 1883 theoretische Stabilitätsanalysen zu geschichteten Fluiden ([\[Rayleigh, 1883\]](#)), vernachlässigte aber die Diffusion. Dabei allerdings formulierte er als erster den Ausdruck für die Auftriebsfrequenz interner Wellen und das Phänomen der später nach ihm benannten Rayleigh-Taylor-Instabilität.

Einen übersichtlichen und gut recherchierten wissenschaftshistorischen Überblick über

diese beiden historischen Arbeiten gibt [Schmitt, 1995].

Erst Mitte des 20. Jahrhunderts ([Stommel et al., 1956]) wird Doppeldiffusion (wieder-) entdeckt, was wohl M. Stern zugeschrieben werden kann ([Schmitt, 1995]). Dieser entwickelte zusammen mit A. Arons, A. Faller und W. Malkus die Formulierung der Doppeldiffusion als Konvektionsproblem, einfache Laborexperimente und eine analytische Lösung für Salzfinger. Keine zehn Jahre später fängt J. S. Turner an, systematisch Experimente durchzuführen. Er erweitert die Theorien und formuliert das sogenannte $4/3$ -Gesetz ([Turner, 1965], [Turner, 1967]), welches den Massenfluss beschreibt und noch heute als Maßstab gilt – wenn auch nicht zweifelsfrei.

Die Messungen von Temperatur- und Salzgehaltverteilung in den Ozeanen seit den Sechziger Jahren werden immer feiner und ergeben auch für weite Gebiete der Weltmeere klein-skalige Strukturen, die den Salz fingern und Schichten der Laborexperimente entsprechen. Einen guten, zusammenfassenden Überblick über die Entwicklung und die Rolle der Doppeldiffusion in der Ozeanografie gibt die Veröffentlichung von [Ruddick and Gargett, 2003].

Motivation und Anwendung

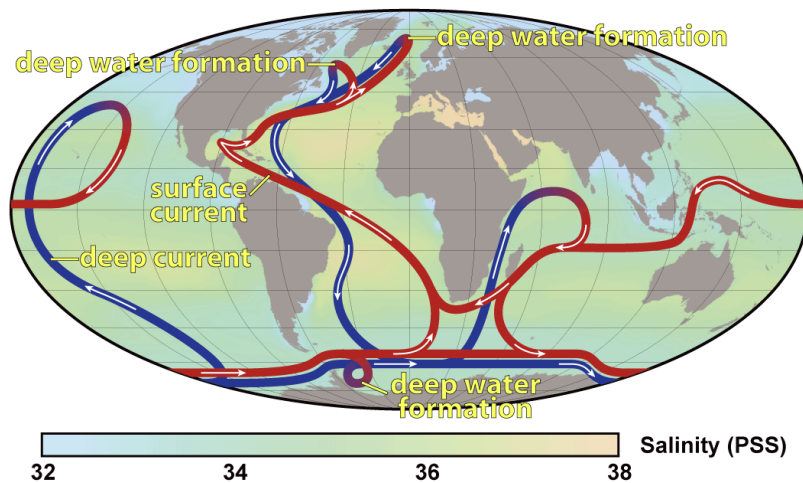


ABB. 1.1: Skizze der thermohalinen Konvektionsbewegung, die das ozeanisches Förderband antreibt. Bild aus [Wikipedia, 2010b].

Was genau kennzeichnet denn Doppeldiffusion? Von doppelt diffusiver Stömung spricht man dann, wenn zwei Komponenten unterschiedlicher Diffusivität vorliegen. Welche Art der Strömung entsteht, hängt von der Ausgangsverteilung/-schichtung der beiden Kom-

ponenten ab und wird später erläutert (siehe Abschnitt 2.4).

Das prominenteste Beispiel für ein doppelt diffusiv getriebenes System ist wohl die globale Ozeanströmung, das sogenannte ozeanische Förderband, das in Abbildung 1.1 skizziert ist. Temperatur und Salzgehalt beeinflussen die Dichte des Wassers. Leichteres Wasser wird aufsteigen, dichteres absinken. Durch die unterschiedlich starke Sonneneinstrahlung an der Meeresoberfläche, durch Schmelzwasser oder Zuflüsse variiert sowohl Temperatur wie auch Salzgehalt stark.

Wie in Abbildung 1.1 kann das zu großskaligen Strömungen führen, die sich über die ganze Erde erstrecken; die Umlaufdauer hierbei ist ungefähr 2000 Jahre. Die Variationen können aber auch zu viel kleinskaligeren Strukturen führen, wie etwa Schichtbildung mit Schichtdicken von einigen zehn Metern oder sogenannten Salz fingern mit horizontaler Ausdehnung von nur wenigen Zentimetern.

Allerdings bleiben doppelt diffusive Effekte nicht auf den Ozean beschränkt. Man findet sie auch in astrophysikalischen, industriellen/chemischen ([Turner, 1974]) oder alltäglichen Situationen, wie z. B. in einem gut zubereiteten Latte Macchiato in Abbildung 1.2, bei dem Schichtbildung und manchmal auch Salzfinger zu beobachten sind.



ABB. 1.2: Schichtbildung aufgrund von doppelt diffusiver Konvektion in einem Latte Macchiato. Bild aus [Wikipedia, 2010a].

Umsetzung

Wie Experimente, Computersimulationen und hier Doppeldiffusion behandelt wird, wird jetzt kurz vorgestellt. Zuerst stellt sich die Frage, welche Komponenten die Dichte des Systems beeinflussen. Das können, wie z. B. im Ozean, Temperatur und Salzgehalt sein, wobei die Temperatur etwa hundert mal schneller als das Salz diffundiert. Hier in dieser Arbeit handelt es sich um Temperatur und Kupferionen, deren Diffusivitätenverhältnis

etwa 250:1 ist.

Andere gängige Experimente (im Labor oder am Computer) behandeln das System Temperatur/Zucker (300:1, siehe z. B. oben bei [Jevons, 1857]), Glycerin/Tensid (33:1, [Markus and Kötter, 2001]), Zucker/Milcheiweiß ([Markus and Kötter, 2005]) oder Salz/Zucker (unter anderem [Turner and Chen, 1974]) mit einem Verhältnis von nur 3:1.

Auch gibt es verschiedene Herangehensweisen der Experimentatoren: So kann das Fluid anfangs linear geschichtet sein, also konstante Gradienten beider Spezies enthalten, wie z. B. im Laborexperiment bei [Krishnamurti, 2009] oder in der Simulation bei [Radko, 2005]. [Turner, 1967] oder auch [McDougall and Taylor, 1984] hingegen starten mit einer Stufenverteilung, also zwei – in sich homogenen – Schichten, die dann ineinander diffundieren. Hier wird die Temperatur zu Beginn einer Messung linear verteilt sein, die Ionenkonzentration aber wird Stufen an den horizontalen Platten haben.

Auch die Art der Randbedingungen unterscheidet sich sehr. So ist es nicht schwer, die Temperatur an den Rändern konstant zu halten; eine Konzentration dagegen schon. Deshalb gibt es viele sogenannte "run-down"-Experimente, bei denen eine Ausgangssituation geschaffen wird, deren Ränder aber während des Experiments isolieren. Beide Komponenten werden sich langsam ausgleichen (siehe z. B. [Griffiths and Ruddick, 1980] oder [Linden, 1973]).

Die Alternative ist, die Ränder auf konstanten Werten zu halten. Für gleichbleibende Konzentrationen könnte das z. B. durch poröse Wände ([Stommel, 1961]) oder poröse Membranen ([Krishnamurti, 2003]) realisiert werden.

Hier werden die Ränder auch auf konstanter Temperatur und konstanter Konzentration gehalten. Durch Auflöten von Wasserrohren werden die gut wärmeleitenden Platten oben und unten auf beliebiger Temperatur konstant gehalten. Eine konstante Konzentration wird elektrochemisch erzeugt, indem eine feste Potentialdifferenz an die Platten angelegt wird. Diese sorgt für gleichbleibende Ionenkonzentrationen an den beiden Platten.

Die elektrochemische Variante sorgt im Gegensatz zu der Methode mit porösen Membranen für einen erheblich kleineren und weniger komplizierten Aufbau. Sie wurde schon von [Wagner, 1949] benutzt, der wohl als erster – allerdings bei vertikalen Platten – einfach getriebene Konvektion mit einem elektrochemisch erzeugten Dichtegradienten untersuchte. Wagner benutze, wie hier, den Grenzstrom eines Kupfersulfatsystems und mischte Schwefelsäure als Leitsalz bei, um die Migration auszuschalten.

Auch [Wilke et al., 1953] und [Selman and Newman, 1971] untersuchten freie Konvektion an vertikalen Elektroden elektrochemisch. Dazu benutzten sie auch $CuSO_4 - H_2SO_4$ bzw. $K_3Fe(CN)_6 - K_4Fe(CN)_6 - KOH/NaOH$. [Ward III and Le Blanc, Jr, 1984] wa-

ren dann wohl die ersten, die chemisch getriebene Rayleigh-Bénard-Konvektion betrieben. Sie nutzten das Redoxpaar $FeCl_2 - FeCl_3$ in 1 molarer Salzsäure bei horizontalen Platinelektroden. Die Veröffentlichung von [Goldstein et al., 1990] untersuchte mit einem Kupfersulfatsystem die Analogie von thermisch und chemisch getriebener Konvektion. Sie diente als Vorlage für die Vorgängerarbeit ([Hage, 2003]) dieser Studie.

Elektrochemische Systeme haben den Vorteil gegenüber thermisch getriebenen, dass sie bei recht kleinem, handlichen Aufbau große Rayleigh-Zahlen liefern. Das liegt an der Diffusivität der Ionen, die gut zwei Größenordnungen kleiner als die der Temperatur ist. Aus demselben Grund ist dann aber auch die Schmidt-Zahl viel größer als die analoge Prandtl-Zahl.

Gliederung

Zuerst wird in Kapitel 2 in die Theorie der Konvektionsströmung eingeführt. Die gängigen Gleichungen werden aufgestellt und erläutert, die Randbedingungen werden beschrieben und ein kurzer Einblick in die chemischen Hintergründe wird gegeben. Abschnitt 2.4 führt dann in die Besonderheiten der Doppeldiffusion ein.

Kapitel 3 befasst sich mit den experimentellen Bedingungen dieser Arbeit. Der Versuchsaufbau und Ablauf einer typischen Messung wird in Abschnitt 3.1 dargestellt. Die folgenden Abschnitte erläutern die verschiedenen Messmethoden.

Die Ergebnisse sind der Übersichtlichkeit halber in zwei Kapitel aufgeteilt. Zuerst werden in Kapitel 4 die allgemeinen Eigenschaften des untersuchten Fingerregimes aufgezeigt. Es werden Fragen zur Stabilität, zur Struktur und zu den herrschenden Kräften beantwortet. Danach werden in Kapitel 5 die gefundenen Skalierungsgesetze für den Transport, die Fingerdicke und die Geschwindigkeit präsentiert.

Abschließend gibt Kapitel 6 eine Zusammenfassung der Arbeit.

Teile der Ergebnisse sind in dem Bericht "High Rayleigh number convection with double diffusive fingers" für das Magazin *Physics of Fluids* eingereicht, aber noch nicht veröffentlicht.

2 Theoretische Grundlagen

Dieses Kapitel führt in die Theorie der (einfach diffusiven) Rayleigh-Bénard-Konvektion ein. Für diese werden die relevanten Gleichungen vorgestellt. Aus diesen werden durch Entdimensionalisierung die Parameter gefunden, die das System bestimmen.

Analog wird der Fall von chemisch getriebener Konvektion gezeigt. Kurz wird auch auf die chemischen Eigenschaften und die sich daraus ergebenden Zusammenhänge eingegangen.

Im Anschluss daran wird der Fall der doppelt diffusiven Konvektionsströmung eingeführt; die Analogien, die Unterschiede und die entstehenden Strukturen werden veranschaulicht.

2.1 Rayleigh-Bénard-Konvektion

Von Rayleigh-Bénard-Konvektion spricht man, wenn man die Strömung eines viskosen Fluids betrachtet, welches von unten geheizt wird. Im Fall dieser Arbeit befindet sich das Fluid in einer Box mit der Höhe L und einer quadratischen Grundfläche mit Seitenlänge W . Zwischen der oberen und unteren Platte wird ein konstanter, destabilisierender Tem-

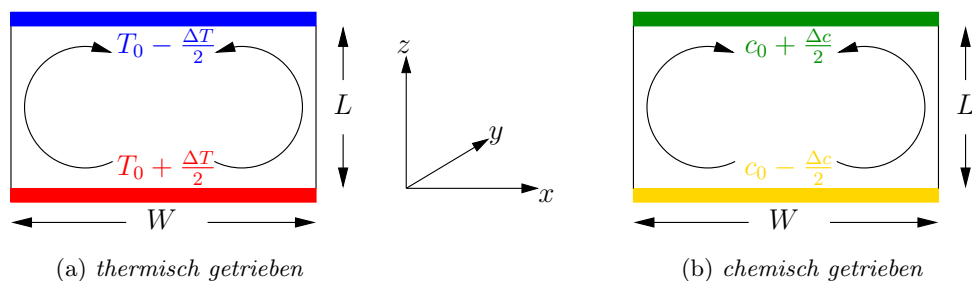


ABB. 2.1: Schematischer Aufbau der Konvektionszelle bei Rayleigh-Bénard-Konvektion.

peraturunterschied ΔT angelegt, wie in Bild 2.1a zu erkennen. Die Gravitationskraft in

z -Richtung sorgt dafür, dass das leichtere Fluid von unten aufsteigt und das schwerere von oben absinkt. Je nach Wahl der verschiedenen Parameter entstehen unterschiedliche Strömungsformen.

Durch welche Größe allerdings der Dichteunterschied hervorgerufen wird, ist für die Strömung irrelevant. Ein bestimmter Dichteunterschied kann so entweder durch eine Temperaturdifferenz ΔT oder z. B. auch durch einen entsprechenden Konzentrationsunterschied Δc hervorgerufen werden. Im ersten Fall spricht man von (klassischer oder thermisch getriebener) Rayleigh-Bénard-Konvektion, im zweiten Fall von chemisch getriebener (Rayleigh-Bénard-)Konvektion.

2.2 Hydrodynamische Grundgleichungen

Ende des 19. Jahrhunderts haben sich Oberbeck ([Oberbeck, 1879]) und Boussinesq ([Boussinesq, 1903]) unabhängig voneinander Gedanken über die Strömung eines partiell geheizten Fluides gemacht. Ohne Einschränkung der Ergebnisse haben sie eine Reihe von Näherungen gefunden, die das System für nicht zu große ΔT erheblich vereinfachen. So hängt die Dichte ρ des Fluids nur linear von der Temperatur ab. Alle anderen Fluideigenschaften wie spezifische Wärmekapazität c_p , Ausdehnungskoeffizient α_T , kinematische Viskosität ν und Temperaturleitfähigkeit κ_T werden als konstant angenommen. Somit haben Temperaturänderungen nur Einfluss auf die Dichte und erzeugen so im Schwerfeld Auftrieb.

Gleichermaßen wie für Temperaturänderungen kann man die Approximation auch auf Konzentrationsunterschiede anwenden, die ebenfalls die Dichte beeinflussen und somit für Auftrieb sorgen. Sind diese Konzentrationsvariationen nicht zu groß, bleiben auch die „chemischen“ Fluideigenschaften wie chemischer Ausdehnungskoeffizient α_c und Diffusionskoeffizient κ_c konstant.

Der für diese Arbeit ausgeschöpfte Parameterbereich liegt innerhalb der Grenzen in denen die oben beschriebene, sogenannte Oberbeck-Boussinesq-Approximation gültig ist.

Die Navier-Stokes-Gleichung

Die Navier-Stokes-Gleichung beschreibt die Bewegung eines inkompressiblen, newtonschen Flüssigkeitsvolumens der Dichte ρ . Sie folgt aus dem Impulssatz und hat die Form:

$$\partial_t \vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \nu \vec{\nabla}^2 \vec{u} + \vec{f}. \quad (2.1)$$

Hierbei ist \vec{u} die Geschwindigkeit, t die Zeit, p der Druck, ν die kinematische Viskosität und \vec{f} die auf das Fluidteilchen wirkenden Volumenkräfte. Auf der linken Seite steht die substantielle Ableitung (die mit dem Fluidvolumen mitbewegte Zeitableitung der Geschwindigkeit) und rechts die Kräfte, die auf das Flüssigkeitsteilchen wirken: zum einen die durch einen Druckgradienten hervorgerufene Kraft, zum anderen der Dissipations-term, der aufgrund viskoser Reibung entsteht. Außerdem können noch andere äußere Kräfte wirken, die in \vec{f} enthalten sind.

Hier sind das im Speziellen die Auftriebskräfte, die durch einen Dichtegradienten im Schwerfeld – aufgrund von Temperatur- und Konzentrationsunterschieden – hervorgerufen werden.

$$\vec{f} = \vec{g} \frac{\Delta \varrho}{\varrho_0} = \vec{g}(\alpha_c \Delta c + \alpha_T \Delta T), \quad (2.2)$$

wobei α_c bzw. α_T der (jeweils positive) Koeffizient der Dichtevariation mit der Konzentration bzw. Temperatur ist und Δc bzw. ΔT der Konzentrations- bzw. Temperaturunterschied (negativ, wenn stabilisierend; positiv, wenn destabilisierend).

Die Kontinuitätsgleichung

Die Kontinuitätsgleichung beschreibt die Massenerhaltung. Für inkompressible Fluide und mit der Boussinesq-Approximation reduziert sie sich zu:

$$\partial_t \varrho = -\vec{\nabla} \cdot (\varrho \vec{u}) \quad \xrightarrow{\varrho = \text{konst.}} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0. \quad (2.3)$$

Die Wärmeleitungsgleichung

Die Wärme im Fluid wird durch Konvektion und Diffusion transportiert. Aus der Energieerhaltung folgt für die Temperatur T :

$$\partial_t T = -(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})T + \kappa_T \vec{\nabla}^2 T, \quad (2.4)$$

hierbei ist κ_T die Temperaturleitfähigkeit.

Die Nernst-Planck-Gleichung

Die Nernst-Planck-Gleichung beschreibt den Transport der Ionen in der Lösung durch Konvektion, Diffusion und Migration. Kann man wie hier die Bewegung durch das elektrische Feld vernachlässigen (siehe Abschnitt 2.3.3), gilt analog zur Temperatur:

$$\partial_t c = -(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})c + \kappa_c \vec{\nabla}^2 c, \quad (2.5)$$

hierbei ist κ_c die Diffusionskonstante.

2.2.1 Die Kennzahlen

Damit Strömungen sich gleich verhalten, müssen sie geometrisch und dynamisch ähnlich sein. Will man z. B. die Konvektionsströmung in zwei Zellen vergleichen, dann reicht es nicht, dass die Zellen die gleiche Geometrie haben. Man muss weiter darauf achten, dass auch dynamische Ähnlichkeit vorliegt. Von Ähnlichkeit spricht man, wenn die Variablen, die zwei Prozesse beschreiben, in einem festen Verhältnis stehen.

Dazu müssen sämtliche Gleichungen in dimensionsloser Form geschrieben werden. Um das zu erreichen, schreibt man alle in den Gleichungen vorkommenden Variablen als Faktoren von typischen Größen. So kann man z. B. alle Längen x mit der Zellhöhe L entdimensionalisieren: $x = x' L$ (hierbei ist x' die dimensionslose Länge). Durch Ersetzen aller Größen erhält man dann dimensionslose Gleichungen, deren Parameter man Kennzahlen nennt.

Für diese Arbeit wurde als Längenskala der Plattenabstand L , als Zeitskala die Diffusionszeit der Ionen für die Länge L , also $\frac{L^2}{\kappa_c}$, als Maß für die Konzentration die Variation der Kupferionen-Konzentration über die gesamte Zellhöhe Δc und als Temperaturmaß die Temperaturdifferenz zwischen den Platten ΔT gewählt.

Damit erhält man:

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \vec{u}' \frac{\kappa_c}{L}, & \vec{\nabla} &= \vec{\nabla}' \frac{1}{L}, & t &= t' \frac{L^2}{\kappa_c}, \\ p &= p' \frac{\rho \kappa_c^2}{L^2}, & c &= c' \Delta c, & T &= T' \Delta T, \end{aligned}$$

wobei die gestrichenen Größen alle dimensionslos sind. Mit dem Einheitsvektor $\vec{\hat{z}}$ in Richtung der Schwerkraft ($\vec{g} = g \vec{\hat{z}}$) ergibt das Einsetzen in die Grundgleichungen (2.1) bis (2.5):

$$\partial_{t'} \vec{u}' + (\vec{u}' \cdot \vec{\nabla}') \vec{u}' = -\vec{\nabla}' p' + \frac{\nu}{\kappa_c} \vec{\nabla}'^2 \vec{u}' + \frac{\nu}{\kappa_c} \frac{gL^3 \alpha_c \Delta c}{\nu \kappa_c} c' \vec{\hat{z}} + \frac{\nu}{\kappa_c} \frac{\kappa_T}{\kappa_c} \frac{gL^3 \alpha_T \Delta T}{\nu \kappa_T} T' \vec{\hat{z}} \quad (2.6)$$

$$\vec{\nabla}' \cdot \vec{u}' = 0 \quad (2.7)$$

$$\partial_{t'} c' + (\vec{u}' \cdot \vec{\nabla}') c' = \vec{\nabla}'^2 c' \quad (2.8)$$

$$\partial_{t'} T' + (\vec{u}' \cdot \vec{\nabla}') T' = \frac{\kappa_T}{\kappa_c} \vec{\nabla}'^2 T' \quad (2.9)$$

Ein Vergleich mit den Ausgangsgleichungen lässt erkennen, dass die äußere Form gleich geblieben ist. Lediglich die Vorfaktoren haben sich geändert. Sie werden Kennzahlen

genannt und sind die abhängigen Parameter eines Systems. Man definiert:

$$Ra_c = \frac{gL^3\alpha_c\Delta c}{\nu\kappa_c} = \text{chemische Rayleigh-Zahl} \quad (2.10)$$

$$Ra_T = \frac{gL^3\alpha_T\Delta T}{\nu\kappa_T} = \text{thermische Rayleigh-Zahl} \quad (2.11)$$

$$\left. \begin{array}{l} Sc = \frac{\nu}{\kappa_c} = \text{Schmidt-Zahl} \\ Pr = \frac{\nu}{\kappa_T} = \text{Prandtl-Zahl} \end{array} \right\} Le = \frac{Sc}{Pr} = \frac{\kappa_T}{\kappa_c} = \text{Lewis-Zahl} \quad (2.12)$$

Schreibt man die Kennzahlen in die Gleichungen und verzichtet der Übersichtlichkeit halber auf die Striche, erhält man:

$$\partial_t \vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\vec{\nabla} p + Sc \vec{\nabla}^2 \vec{u} + Sc Ra_c c \vec{\hat{z}} + Sc Le Ra_T T \vec{\hat{z}} \quad (2.13)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (2.14)$$

$$\partial_t c + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) c = \vec{\nabla}^2 c \quad (2.15)$$

$$\partial_t T + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) T = Le \vec{\nabla}^2 T \quad (2.16)$$

Die das System beschreibenden Kennzahlen lassen sich folgendermaßen interpretieren: Die beiden Rayleigh-Zahlen sind ein Maß für die Auftriebskraft. Diese wird durch Dichteunterschiede im Gravitationsfeld hervorgerufen und basiert hier entweder auf einem Temperatur- oder Konzentrationsunterschied. Zu bemerken ist, dass die Rayleigh-Zahl in dieser Arbeit als positiv gezählt wird, wenn sie konvektionstreibend wirkt, d. h. bei destabilisierendem Temperatur- bzw. Konzentrationsgradienten. Eine negative Temperatur- oder Konzentrationsdifferenz und damit auch eine negative Rayleigh-Zahl beschreibt entsprechend ein stabiles, konvektionshemmendes System. Außerdem zu beachten ist bei der Definition der chemischen Rayleigh-Zahl (2.10), dass sie mit der chemischen Diffusivität im Nenner gebildet wird, wie z. B. bei [Chen and Chen, 1997] und nicht wie in der Literatur meistens üblich mit κ_T .

Schmidt- bzw. Prandtl-Zahl beschreiben das Fluid. Sie sind das Verhältnis der Diffusivitäten von Impuls zu Masse bzw. Temperatur. Die Lewis-Zahl sagt aus, um wieviel schneller die Temperatur als die Konzentration diffundiert.

Weitere Kennzahlen sind:

$$\Gamma = \frac{W}{L} = \text{Aspektverhältnis} \quad (2.17)$$

$$\Lambda = \frac{\alpha_T \Delta T}{\alpha_c \Delta c} = \frac{Ra_T}{Ra_c} Le = \text{Auftriebsverhältnis} \quad (2.18)$$

Das Aspektverhältnis ist der Quotient aus Zellbreite zu -höhe und beschreibt die Geometrie des Systems.

Das Auftriebsverhältnis sagt aus, wie groß der Auftrieb durch die Temperaturdifferenz ist, im Gegensatz zu dem, der durch die Konzentrationsdifferenz hervorgerufen wird. Dabei ist zu beachten, dass Λ eine globale Größe ist, also mit den Differenzen über die gesamte Zelhöhe ermittelt wird. Eine Aussage über die Stabilität des Systems kann daraus nicht sofort gemacht werden, da im Innern der Zelle – außerhalb der Grenzschichten – andere Verhältnisse gelten können.

Ein positives Auftriebsverhältnis bedeutet, dass Temperatur und Konzentration beide konvektionstreibend oder beide konvektionshemmend geschichtet sind. Wirkt eine Komponente stabilisierend, die andere destabilisierend – haben also ΔT und Δc unterschiedliche Vorzeichen – dann ist $\Lambda < 0$. Hier wird der Fall untersucht, bei dem die Temperatur stabilisierend wirkt (d. h. konvektionshemmend, $\Delta T < 0$) und die Konzentration destabilisierend, also konvektionstreibend ($\Delta c > 0$). Damit sind hier sämtliche Auftriebsverhältnisse negativ. Im Folgenden wird deshalb $|\Lambda|$ betrachtet.

Weiter ist zu beachten, dass die Dichte des Systems für $|\Lambda| < 1$ an der oberen Platte größer ist als an der unteren, weil der destabilisierende Einfluss der Konzentration stärker die Dichte beeinflusst als die Temperatur. Für $|\Lambda| > 1$ ist das System stabil geschichtet, die Dichte nimmt überalle in der Zelle nach oben hin ab.

Eben wurden die Kennzahlen definiert und besprochen, die das System charakterisieren. Je nach Größe dieser Kennzahlen stellt sich ein entsprechender Zustand ein. Dieser wird durch weitere Kennzahlen beschrieben, die in dem Auswertungskapitel 5 noch genau besprochen werden. Hier nur kurz ein Überblick:

Der Massentransport wird in Form der Sherwood-Zahl Sh dargestellt. Er beschreibt das Verhältnis von gesamt transportierten Kupferionen zu dem Anteil an Kupferionen, die nur durch Diffusion transportiert werden.

Die Nusselt-Zahl Nu ist das Analogon zur Sherwood-Zahl und beschreibt in dimensionsloser Form den Wärmetransport. Im Fingerregime bewegt die Konvektionsströmung die Wärme aber gegen die Schwerkraft: kaltes Fluid wird von unten nach oben und warmes von oben nach unten transportiert. Damit ist der advektierte Anteil negativ.

Die sich einstellende Geschwindigkeit wird über die Reynolds-Zahl Re gekennzeichnet und die Fingerdicke wird mit der Zelhöhe zu $\frac{d}{L}$ entdimensionalisiert.

Ein Vergleich von Werten bzw. Kennzahlen, wie sie hier im Experiment vorkommen mit typischen Messwerten aus dem Ozean ist in Tabelle 2.1 dargestellt.

Es werden beispielhaft die Werte gezeigt, die aus der großen Messreihe C-SALT von 1985 stammen. Es sind typische Werte für den westlichen Teil des tropischen Nordatlantiks,

	Laborexperiment		C-SALT
	min. Wert	max. Wert	typischer Wert
$ \Lambda $	0.01	1.2	1.6
$ \alpha_T \Delta T $	$8.1 \cdot 10^{-5}$	$7.2 \cdot 10^{-3}$	$1.2 \cdot 10^{-4}$
$\alpha_c \Delta c$	$3.0 \cdot 10^{-3}$	$1.5 \cdot 10^{-2}$	$7.5 \cdot 10^{-5}$
Le	230	280	130
L [cm]	2	20	200
d [mm]	1.0	5.6	15.5
$\frac{d}{L}$	$1.65 \cdot 10^{-2}$	$2.80 \cdot 10^{-1}$	$7.75 \cdot 10^{-3}$
$ Ra_T $	$3.8 \cdot 10^4$	$2.1 \cdot 10^9$	$6.7 \cdot 10^{10}$
Ra_c	$5.5 \cdot 10^8$	$1.1 \cdot 10^{12}$	$5.4 \cdot 10^{12}$

TAB. 2.1: Eine Gegenüberstellung typischer Werte einer Fingerschicht innerhalb einer thermohalinen Treppe aus einer Messung östlich von Barbados im Zuge des C-SALT-Programms (Daten aus [Kunze, 2003]) mit den minimal und maximal hier im Experiment erreichten Werten.

der in einer Tiefe von einigen hundert Metern Schichten von Salz fingern aufweist (siehe dazu auch die Profile in Abbildung 2.4a aus dem gleichen Gebiet).

2.2.2 Randbedingungen

Um das System vollständig beschreiben zu können, fehlen noch die Randbedingungen, die hier vorgestellt werden.

Zuerst eine Annahme, die physikalischen bzw. chemischen Voraussetzungen betreffend: Die Kupferplatten seien während einer gesamten Messung eben, homogen und unverändert. Damit unterschlägt man, dass sich durch das Auslösen der Kupfer-Ionen aus der Anode und das Anlagern derselben an der Kathode die Rauheit der Elektroden und damit die Oberfläche vergrößert. Ein Abschätzen der Ionenanzahl, die pro Messung die Anode verlässt bzw. sich an der Kathode deponiert, gibt nur maximal 1 g Kupfer bei einem Grenzstrom von 1 A, sodass die Annahme gerechtfertigt ist. Weiter garantiert das sorgfältige Präparieren der Elektroden vor Beginn einer Messung gleiche Ausgangsbedingungen.

Seitenwände: An den Seitenwänden sind die Randbedingungen einfach, da sie thermisch, chemisch und elektrisch neutral sind. Bezeichnet n die Normalenrichtung und ist Φ das Potential, so gilt:

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial n} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0. \quad (2.19)$$

Obere und untere Platte: Mit den Thermostaten werden die beiden Platten auf konstanter Temperatur gehalten. Durch Anlegen einer konstanten Spannung stellt sich auch eine feste Konzentration an den Elektroden ein.

Die Bedingungen sind also:

$$c = c_0 + \frac{\Delta c}{2} \quad \text{und} \quad T = T_0 - \frac{\Delta T}{2} \quad \text{oben} \quad (2.20)$$

$$c = c_0 - \frac{\Delta c}{2} \quad \text{und} \quad T = T_0 + \frac{\Delta T}{2} \quad \text{unten} \quad (2.21)$$

Elektroneutralität: Eine weitere Bedingung ist die der Elektroneutralität, die der Vollständigkeit halber hier schon mit aufgeführt, aber erst im Abschnitt 2.3.3 diskutiert wird. Benutzt man kein Leitsalz, befinden sich also nur Cu^{2+} - und SO_4^{2-} -Ionen in der Lösung, kann man von einem elektrisch neutralen Inneren ausgehen. Die Ionen werden ihre Ladungen gegenseitig und die des Feldes ausgleichen. Nur innerhalb der sogenannten Nernst-schen Diffusionsschicht herrscht Ladungstrennung. Diese Schicht ist aber sehr dünn (bei Konvektion höchstens einige Nanometer) und kann deshalb vernachlässigt werden. Auch bei Leitsalzüberschuss ist der Fehler, den man durch Annahme von Elektroneutralität macht, klein.

Die Bedingung der Neutralität ist:

$$\sum z_i c_i = 0, \quad (2.22)$$

wobei i für die verschiedenen Ionensorten (Cu^{2+} , SO_4^{2-} , HSO_4^- und H^+) steht und z die zugehörige Wertigkeit meint.

2.3 Chemische Grundlagen

2.3.1 Die elektrolytische Zelle

Um die Dichte des Fluids durch die Konzentration zu verändern, wird ein elektrochemisches Verfahren angewendet. Der Aufbau und die Funktionsweise einer solchen elektrolytischen Zelle wird hier kurz erläutert. Siehe dazu auch Abbildung 2.2.

Eine wässrige Elektrolytlösung wird leitend über zwei Elektroden mit einer Spannungsquelle verbunden. Hier handelt es sich um eine Kupfersulfatlösung. Das Kupfersulfat dissoziiert vollständig, liegt also als Cu^{2+} - und als SO_4^{2-} -Ionen vor. Die Elektroden sind aus reinem Kupfer. Kommen die Elektroden in Kontakt mit der Lösung, so diffundieren

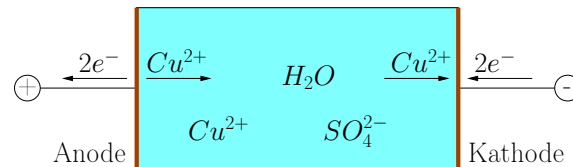
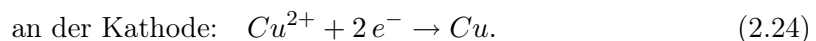
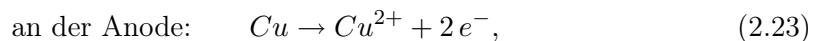


ABB. 2.2: Prinzip der elektrolytischen Zelle am Beispiel Kupfersulfat.

einige Kupfer-Ionen aus den Elektroden heraus und gehen in Lösung. Die sich einstellende Potentialdifferenz zwischen Elektrode und Elektrolyt ist zellenspezifisch. Bei Cu/Cu^{2+} liegt dieses sogenannte Ruhepotential (es fließt kein Strom, das System ist im Gleichgewicht) bei $\phi_0 = 0,34\text{ V}$.

Bei Anlegen einer äußeren Spannung wird das dynamische Gleichgewicht gestört. Die Kupferabscheidung an der Anode wird verstärkt, die Rückreaktion gehemmt. An der Kathode führt die Spannung zum gegenteiligen Effekt. Es herrscht damit eine Potentialdifferenz zwischen beiden Elektroden und ein Strom fließt. Je größer die angelegte Spannung ist, desto mehr Cu^{2+} -Ionen können sich von der Anode lösen und sich an der Kathode wieder als festes Kupfer anlagern.

Die Reaktionen sind also folgende:



Man beachte hierbei, dass die Sulfat-Ionen keinen Einfluss auf den Stromfluss haben. Außerdem ist zu bemerken, dass die Kupfer-Ionen von der Anode zur Kathode durch verschiedene Mechanismen transportiert werden:

Migration: Durch das elektrische Feld werden die Kupfer-Ionen von der Kathode elektrisch angezogen.

Diffusion: Durch die hohe Spannung gehen zwar viele Ionen in Lösung, aber der Transport zur Kathode ist langsam, so dass sich ein Konzentrationsgradient einstellt. Dieser bewirkt einen Diffusionsstrom der Cu^{2+} -Ionen zur Kathode, wo die Konzentration entsprechend klein ist.

Konvektion: Bewirkt dieser Konzentrationsgradient jetzt zusätzlich noch einen instabilen Dichtegradienten, dann setzt noch eine Konvektionsströmung ein, die die gesamte

Flüssigkeit in Bewegung bringt und somit auch die Kupferionen transportiert. Die Dichteverteilung bei horizontal angeordneten Elektroden ist gerade dann instabil, wenn sich die größere Konzentration über der niedrigeren befindet, wenn also die Anode oben ist.

2.3.2 Kennlinie einer elektrochemischen Zelle

Misst man in einer elektrolytischen Zelle den Strom in Abhängigkeit der von außen angelegten Spannung, so erhält man eine Kurve folgender Charakteristik (siehe Abb. 2.3): Man erkennt schnell drei Bereiche: der erste kennzeichnet sich durch steten Stromanstieg.

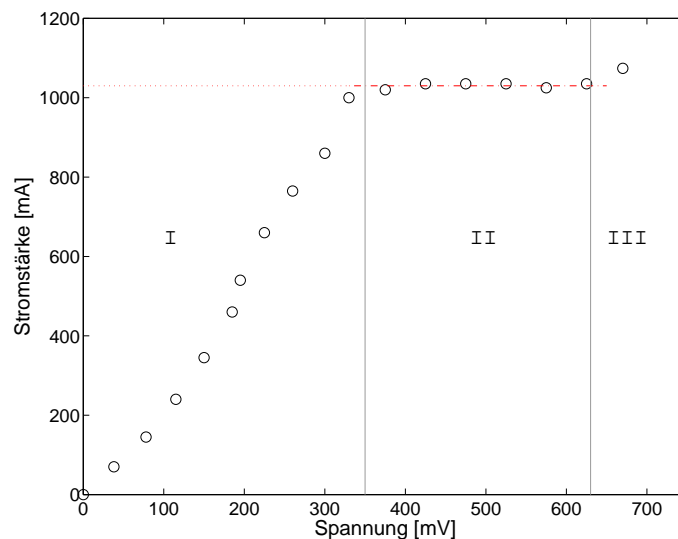


ABB. 2.3: Experimentell bestimmte Kennlinie einer chemisch getriebenen Konvektionszelle (Messung 080919, $c_0 = 0.03M$, $L = 2\text{ cm}$).

Im mittlere Bereich erreicht der Strom ein Plateau, der sogenannte Grenzstrom fließt. Bei noch höheren Spannungen steigt der Strom erneut an.

Um diesen Stromfluss zu verstehen, müssen verschiedenen Einflüsse herangezogen werden. Der Stromkreis kann dargestellt werden durch drei Widerstände: der Widerstand des Elektrolyten und jeweils der Widerstand der Anode und Kathode. Hierbei ist der Elektrolyt-Widerstand nur von der Leitfähigkeit der Lösung, d. h. von der Beweglichkeit γ der Kupfer-Ionen abhängig. Da die Leitfähigkeit konstant bleibt, ist der Widerstand ohmsch. Die Widerstände aber, die die Ionen direkt an den Elektroden erfahren, sind abhängig von der Stromstärke. Im Folgenden wird darauf näher eingegangen.

Die von außen angelegte Spannung U setzt sich aus der sogenannten Überspannung η , dem Ruhepotential ϕ_0 und dem Spannungsabfall im Elektrolyten ΔU zusammen. Es ist also

$$U = \eta + \phi_0^a - \phi_0^c + \Delta U. \quad (2.25)$$

Sind beide Elektroden aus dem gleichen Material, heben sich die Ruhepotentiale an Anode und Kathode ϕ_0^a und ϕ_0^c gegeneinander zu Null auf.

Die Abweichung des Elektrodenpotentials bei Stromfluss nennt man Überspannung. Sie ist von mehreren Faktoren abhängig, von denen hier nur einige ganz kurz erklärt werden sollen (siehe umfassend in [C.H.Hamann and W.Vielstich, 1980] oder auch zusammenfassend in [Hage, 2003]).

Es ist lediglich festzuhalten, dass für kleine Spannungen die Durchtrittsreaktion den Massenfluss bestimmt. Mit Durchtritt ist der Übergang der Ionen aus der Elektrode in den Elektrolyten bzw. vom Elektrolyten an die Elektrode gemeint. Durch die endliche Geschwindigkeit dieses Übergangs durch die Phasengrenze bleibt der Massenfluss stets gehemmt. Der Stoffumsatz ist noch klein und der Transport (durch Diffusion) schnell genug, um den Kupferionenkonzentrationsgradienten an den Platten klein zu halten.

Für größere Spannungen können noch Hemmungen durch vor- oder nachgelagerte chemische Reaktionen/Reaktionsschritte dazukommen. Bei dem hier verwendeten System von Kupfersulfat werden z. B. die beiden Valenzelektronen einzeln abgegeben, bzw. aufgenommen. Das geschieht aber hinreichend schnell, so dass die Reaktionsüberspannung hier wohl keine Rolle spielt.

Auch der Stofftransport kann bremsend auf den Massentransport wirken. Wenn für größere Potentialdifferenzen der Stoffumsatz groß ist – wenn also viele Ionen aus der Anode ausgelöst und an der Kathode angelagert werden – hemmt die langsame Diffusion der Ionen durch den Elektrolyten den Massenfluss.

Somit dominiert zuerst die Durchtrittsüberspannung den Bereich I und sorgt für einen exponentiellen Anstieg des Stroms. Danach sorgt die Konzentrations- bzw. Diffusionsüberspannung für den weiteren Anstieg bis hin zum Grenzstrombereich (Bereich II).

Es bildet sich ein lineares Konzentrationsprofil in der Zelle mit größerer Kupferionenkonzentration an der Anode als an der Kathode. Genauso viele Ionen, wie aus der Anode ausgelöst werden, lagern sich an der Kathode auch an – und das sind umso mehr, je größer die Potentialdifferenz ist. In diesem Bereich erzeugt also eine konstante Spannung eine spezifische, für diese Spannung eindeutige, konstante Anoden- bzw. Kathodenkonzentration.

Die für steigende Spannungen in Bereich I immer größer gewordene Konzentrationsdiffe-

renz zwischen Anode und Kathode kann nicht weiter steigen, wenn sämtliche Ionen, die an der Kathode ankommen, sofort deponiert werden, wenn also $c_{Kathode} = 0$. Dann ist gerade $c_{Anode} = 2c_0$. Wird die Potentialdifferenz weiter erhöht, können jetzt nicht mehr Ionen pro Zeit angelagert werden, da die Konzentration schon bei Null ist; also werden auch an der Anode nicht noch größere Mengen an Ionen ausgelöst. Der Strom bleibt konstant, der Grenzstrom fließt (Bereich II).

Im Bereich III steigt der Strom erneut, weil das Potential groß genug für weitere Reaktionen ist. Bei der Kupfersulfatzelle z. B. wird an der Kathode dann Wasser dissoziiert und es kann zusätzlich Wasserstoff gebildet werden ($2H^+ + 2e^- \rightarrow H_2 \uparrow$), was eine Steigerung des Stroms zur Folge hat.

Als Transportmechanismus wurde eben nur Diffusion angenommen. Die Migration, d. h. der Transport der Ionen durch das elektrische Feld, wird nicht behandelt, weil dieser Effekt durch die Zugabe des viel höher konzentrierten Leitsalzes zu vernachlässigen ist (siehe Abschnitt 2.3.3).

Durch Konzentrationsdifferenzen entstehen aber auch Dichtedifferenzen, die eine Bewegung des Fluid hervorrufen und somit auch Ionen transportieren. Es bildet sich kein lineares Konzentrationsprofil aus, sondern die Gradienten an den Elektroden werden steiler und im Innern herrscht die konstante, mittlere Konzentration. Weiter ist der Transport jetzt schnell, so dass im Bereich I hauptsächlich die Durchtrittsüberspannung den Strom bestimmt.

2.3.3 Das elektrische Feld

Die Kupferionen bewegen sich, wie schon in Abschnitt 2.3.1 erwähnt, aufgrund von Diffusion, Konvektion und Migration. Bei der Thermokonvektion hingegen wird der Wärmestrom nur durch Diffusion und Konvektion getragen; es gibt kein Äquivalent zur Migration. Um aber dennoch den Massenfluss (d. h. die Sherwood-Zahl) bei chemischer Konvektion mit dem Wärmefluss (also der Nusselt-Zahl) bei Thermokonvektion vergleichen zu können, muss man den Effekt der Migration ausschalten.

Dazu gibt man ein sogenanntes Leitsalz in die Lösung. Mit Leitsalz bezeichnet man eine starke Säure oder Base, die in so hoher Konzentration vorliegt, dass sie das elektrische Feld abschirmt. Dies geschieht einfach dadurch, dass so viele entgegengesetzt geladene Ionen von den Elektroden angezogen werden, bis die Ladung ausgeglichen ist.

Hier im Experiment wird 1-molare Schwefelsäure benutzt. Sie dissoziiert vollständig und

verringert so den Widerstand der Lösung stark; der Spannungsabfall wird verschwindend klein, so dass man die Migration der Kupfer-Ionen vernachlässigen kann (der Fehler ist nach [Levich, 1962] von der Größenordnung des Quotienten aus Kupferkonzentration zu Leitsalzkonzentration).

Mit Leitsalzüberschuss bewegen sich die Kupferionen also wie neutrale Teilchen und somit analog zum Wärmestrom. Allerdings werden die Gleichungen umfangreicher, da vier verschiedene Ionensorten vorliegen, nämlich Cu^{2+} , SO_4^{2-} , HSO_4^- und H^+ . Für jede Spezies gibt es einen Satz an Gleichungen und es ist nicht möglich, sie z. B. über neue Diffusionskonstanten oder normierte Konzentrationen zusammenzufassen.

In den numerischen Simulationen von [Gerstung, 2010] wurde der Drei-Ionen-Fall untersucht. Es wird gefunden, dass in den Grundgleichungen (2.13) und (2.15) keine weiteren Terme (die durch die chemischen und elektrischen Eigenschaften der Zelle entstehen) berücksichtigt werden müssen. Weiter erkennt man gut, dass ein Leitsalzüberschuss von $c_{H_2SO_4} > 10 \cdot c_{CuSO_4}$ ausreichend ist, um den Migrationseffekt auszuschalten.

Auch zeigen die Simulationen eine Analogie zu thermischer Konvektion, wenn man eine effektive chemische Rayleigh-Zahl benutzt. Diese setzt sich aus den chemischen Rayleigh-Zahlen für Cu^{2+} , SO_4^{2-} und H^+ zusammen. Die Abweichung dieser effektiven Rayleigh-Zahl von der chemischen Rayleigh-Zahl (2.10), die nur die Kupferionen betrachtet, ist gering. Außerdem liegen numerische Vergleiche nur für Rayleigh-Zahlen vor, die mehr als drei Dekaden geringer sind. Deshalb wird in dieser Arbeit der Einfluss der anderen Ionen auf den Auftrieb nicht berücksichtigt.

2.4 Doppelt diffusive Konvektion

Ein System heißt doppelt diffusiv, wenn zwei Komponenten die Dichte beeinflussen, deren Diffusivitäten unterschiedlich sind. Hier in dieser Arbeit sind das Temperatur und Kupferionenkonzentration mit den Diffusivitäten κ_T und κ_c , wobei $\kappa_T > \kappa_c$. Weisen beide Komponenten einen vertikalen Gradienten auf, gibt es vier verschiedene Konfigurationen, die die Gesamtdichte bestimmen (graphisch dargestellt in den folgenden vier Abbildungen).

verdünnt warm

konzentriert kalt

Doppelt-stabiles Regime:

Liegen sowohl Temperatur als auch Konzentration in einer stabilen Schichtung vor, ist entsprechend die Gesamtdichte stabil geschichtet. Es findet keine Bewegung statt und der gesamte Transport von Wärme und Konzentration läuft über Diffusion.

konzentriert kalt

verdünnt warm

Instabiles Regime:

Wenn aber sowohl Temperatur als auch Konzentration destabilisierend geschichtet sind, ist auch die Gesamtdichte instabil. Das Fluid wird turbulent durchmischt.

verdünnt kalt

konzentriert warm

Diffusives Regime:

Hierbei ist die Konzentration stabil und die Temperatur instabil geschichtet. Die langsam diffundierende, stabil geschichtete Konzentration sorgt dafür, dass ausgelenkte Fluidpartikel einer Rückstellkraft ausgesetzt sind (die Temperatur gleicht sich schnell der Umgebung an, während die Konzentration sich quasi nicht ändert). Diese lässt sie in einer schmalen (horizontal ausgedehnten)

Schicht vertikal oszillieren. Es entwickelt sich also ein System aus gut durchmischten, homogenen Schichten, die durch Grenzschichten getrennt sind. Innerhalb der Grenzschicht liegen sehr große Temperatur- und Konzentrationsgradienten vor. Durch die Schichtbildung erhöht sich die Stabilität des gesamten Systems.

konzentriert warm

verdünnt kalt

Finger-Regime:

Ist allerdings die schneller diffundierende Komponente (hier die Temperatur) stabil geschichtet und die langsamer diffundierende Komponente wirkt destabilisierend, dann entwickeln sich fingerartige Strukturen. Das Fluid in einer solchen Säule wird abwärts(aufwärts) transportiert, ohne dass Salz horizontal heraus-(hinein-)diffundiert. Wieder gleicht sich die Temperatur sehr

schnell der Umgebung an, die hohe(niedrige) Konzentration bleibt aber erhalten und führt zu weiterer Abwärts-(Aufwärts-)bewegung. Die gute Wärmeleitung sorgt auch dafür, dass sich ein nahezu lineares vertikales Temperaturprofil einstellt, welches kaum horizontale Gradienten besitzt; die Konzentration hingegen entwickelt große horizontale Gradienten aber ist vertikal so gut wie homogen verteilt (große Gradienten nur in der

Grenzschicht am Anfang und Ende des Fingers).

Diese Konfiguration, also warmes salziges über kaltem, frischen Wasser, die zu Fingern führt, wird in dieser Arbeit näher untersucht.

Aufgrund der kleineren Diffusivität des Salzes kann selbst ein System mit stabiler Dichteschichtung Fingerinstabilitäten entwickeln, und zwar sobald $|\Lambda| < Le$. Im Ozean werden aber erst für $|\Lambda| \lesssim 4$ Finger beobachtet, weil die Wachstumsraten für größere Auftriebsverhältnisse, also stabilere Systeme, zu klein werden ([Merryfield, 2000] und [Schmitt, 2003]).

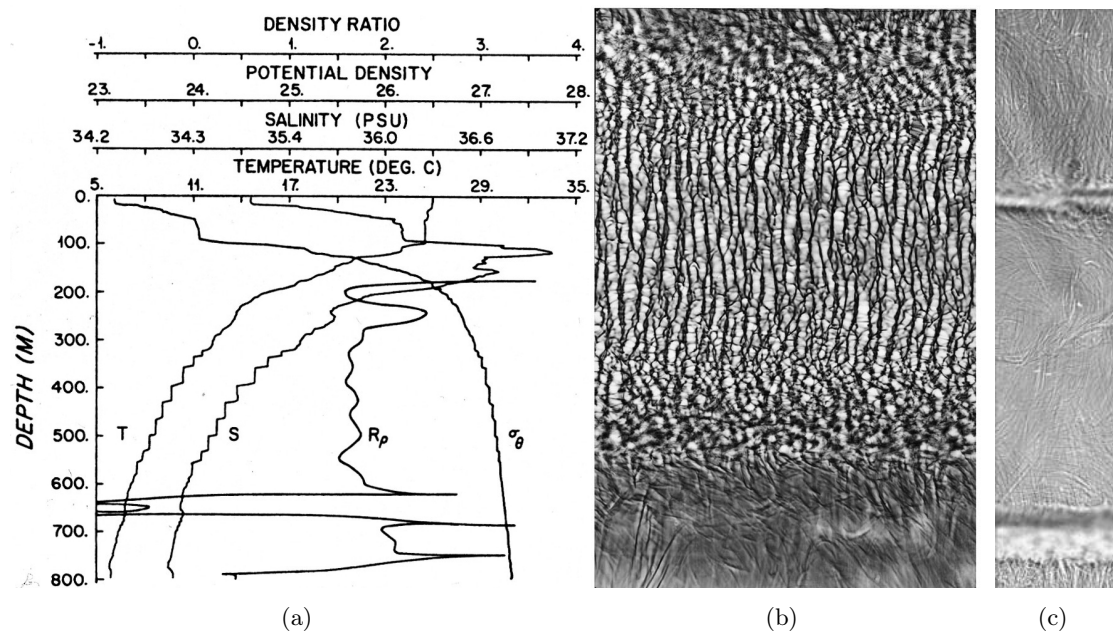


ABB. 2.4: Bild (a) zeigt die vertikalen Profile von Temperatur T und Salzgehalt S, potentielle Dichteanomalie σ_θ [kg/m^3] und Auftriebsverhältnis (hier Λ , in der Abbildung aber mit R_ρ gekennzeichnet) im westlichen tropischen Nordatlantik (aus [Schmitt, 1994]). Bild (b) und (c) sind Ausschnitte aus den Salz/Zucker-Experimenten von [Krishnamurti, 2003]. (c) zeigt zwei konvektiv durchmischte Schichten, die durch schmale Fingerzonen (im Ausschnitt (b) ist eine davon vergrößert zu sehen) abgegrenzt werden.

In Abbildung 2.4 sieht man Beispiele für Schichtbildung, die sowohl im diffusiven, wie auch im Fingerregime entstehen können. Im Ozean bilden sich über weite Teile sogenannte thermohaline Treppen, die ein vertikales Stufenprofil in Temperatur und Salzgehalt aufweisen, wie am Beispiel einer Messung des C-SALT (Caribbean-Sheets And Layers Transects) Programms in Abbildung 2.4a zu sehen. Die Abbildung zeigt die vertikalen

Profile einer Station von der Oberfläche bis zu einer Tiefe von 800 m. Die geschichtete Treppenstruktur findet sich in Tiefen zwischen 300 und 600 m bei einem Auftriebsverhältnis zwischen 1.5 und 1.8. Temperatursprünge zwischen den einzelnen Stufen sind dort typischerweise 0.5 bis 1.0 °C und die konvektiv durchmischten Schichten weisen eine Dicke zwischen 5 und 30 m auf. Die Ausdehnung solcher Gebiete ist in der Regel viele zig Kilometer groß und auch über Jahre stabil ([Merryfield, 2000]). Die Auftriebsverhältnisse dort haben immer Werte zwischen Eins und Zwei ([Schmitt, 2003]).

Theorien zur Schichtenstehung gibt es viele. Die populärsten sind wohl zum einen die sogenannte „kollektive Instabilität“: [Stern, 1969] untersucht die Anfachung interner Schwellen und deren Brechung/Überschlagung im Fingerregime, was geschichtete, großskalige Strukturen hervorrufen kann.

Eine weitere Möglichkeit sind externe Einflüsse wie laterale Intrusionen, die horizontale Gradienten hervorrufen ([Merryfield, 2000]) oder andere Störungen, die zu einem geschichteten, metastabilen Gleichgewicht führen.

Zum anderen wird die von [Radko, 2003] eingeführte „ γ -Instabilität“ (die hier χ -Instabilität heißen müsste, denn mit γ ist das Flussverhältnis (siehe Abschnitt 5.2.3) gemeint, was in dieser Arbeit mit χ gekennzeichnet ist) für Schichtbildung verantwortlich gemacht. Durch lineare Stabilitätsanalyse wird gezeigt, dass sich eine treppenartige Struktur bilden kann für den Bereich, in dem sich das Flussverhältnis mit steigendem Auftriebsverhältnis verkleinert. Das ist besonders für Auftriebsverhältnisse $1 < |\Lambda| < 2$ der Fall, für die das Flussverhältnis auf ein Minimum sinkt.

Wie oben schon erwähnt, ist das auch genau der Bereich, in dem thermohaline Treppen im Ozean oder in Experimenten beobachtet werden.

3 Experimenteller Aufbau und Messmethoden

Dieses Kapitel beschreibt den Aufbau und die Durchführung des Experiments. Anhand eines Photos der Versuchsanordnung kann man sich den Aufbau veranschaulichen. Weiter wird die prinzipielle Vorbereitung und Durchführung einer Messung beschrieben.

In Abschnitt 3.2 werden dann die einzelnen Messtechniken vorgestellt. Technische Einzelheiten zu sämtlichen benutzten Geräten und Materialien werden im Anhang D aufgeführt.

3.1 Der Aufbau

Hier soll zunächst ein Überblick über die verwendete Messapparatur gegeben werden. Im Wesentlichen ist der Aufbau gleich dem aus [Goldstein et al., 1990], nur das zusätzlich die Möglichkeit besteht, vertikale Temperaturgradienten anzulegen.

Die Konvektionszelle besteht aus einem 1 cm starken Plexiglasrahmen mit quadratischer Querschnittsfläche von 20 cm Innenmaß. Um das Aspektverhältnis verändern zu können, gibt es vier verschiedene Rahmen mit den Höhen $L = 2, 4, 8$ und 20 cm. Die Boden- und Deckplatte besteht jeweils aus einer Kupferplatte ($30 \times 30 \times 1$ cm reines Kupfer). Dichtungsringe, Vakuumpaste und vier Gewindestangen an den Ecken sorgen für das dichte Verschließen der Box.

Die Platten können unabhängig voneinander auf konstanter Temperatur gehalten werden. Dazu sind auf die Außenseiten der Kupferplatten Kupferrohre gelötet, durch die Wasser aus einem Thermostaten gepumpt wird. Zur besseren Isolierung wurden die Platten von außen mit 5 cm starken Styroporplatten abgedeckt und auch die Zulaufschläuche sind gegen Wärmeverlust geschirmt.

Der Konzentrationsgradient wird elektrochemisch erzeugt, indem an die Kupferplatten eine Spannung angelegt wird. Die Spannung wird durch eine Spannungsquelle eingestellt

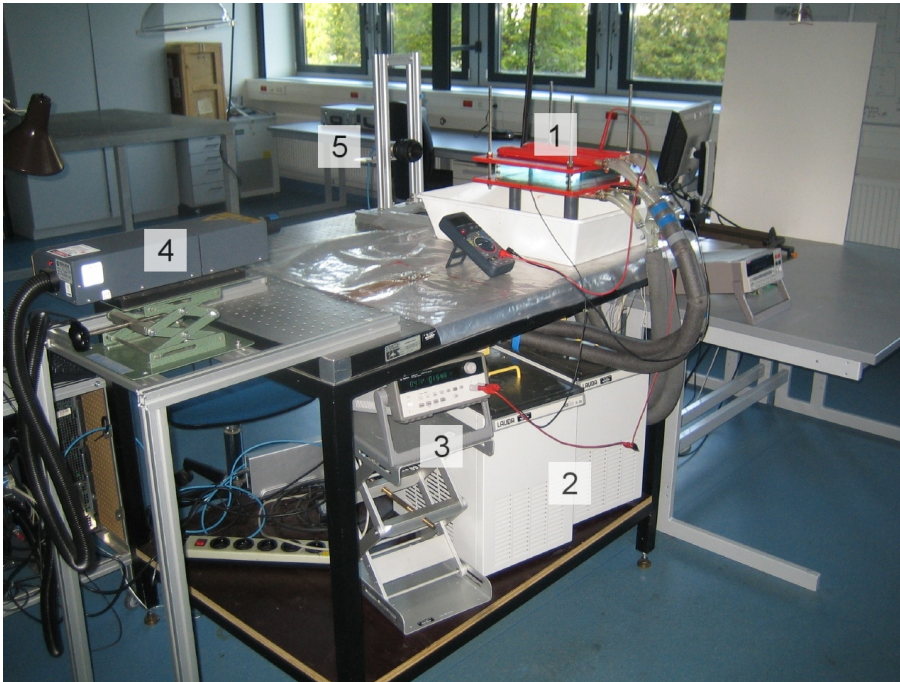


ABB. 3.1: Photographie des Versuchsaufbaus, hier die 8 cm hohe Zelle. Die Zahlen markieren: 1: Konvektionszelle, 2: Thermostate, 3: Spannungsquelle, 4: Laser, 5: CCD-Kamera.

und der Strom kann dort mit abgelesen werden. Um das effektiv zwischen den Platten herrschende Potential zu messen, wird mit einem Hand-Multimeter direkt an den Platten die Spannung gemessen. Für eine konstante Spannung enthält man so konstante Konzentrationen an den Platten. Allerdings kennt man die Konzentration an den Platten ohne direkte Messung nur genau dann, wenn man gerade die Plateauspannung (siehe dazu Abschnitt 2.3.2 und 3.1.1) einstellt; dann ist die Konzentration an der Kathode gerade $c_{Kathode} = 0$ und an der Anode $c_{Anode} = 2 \cdot c_0$.

Die Elektroden sind von außen mit rotem Lack (auf Alkydharz-Basis) bestrichen, um elektrisch zu isolieren und Korrosion zu verlangsamen. Um die Zelle genau horizontal ausrichten zu können, sind drei höhenverstellbare Füße unter die untere Kupferplatte geschraubt.

Als Arbeitsfluid wird 1-molare Schwefelsäure mit einer Kupfersulfatkonzentration von einigen 10^{-2} mol/l verwendet. Diese muss zunächst aus destilliertem Wasser, konzentrierter Schwefelsäure und der Menge an Kupfersulfat-Pentahydrat, die der gewünschten Konzentration entspricht, gemischt werden. Um Luftblasen in der Zelle zu verhindern, muss die Lösung erst mehrere Stunden (etwa 2Std./l) entgast werden. Beim Einfüllen

ist darauf zu achten, dass keine Blasen entstehen und an den Rändern haften bleiben. Bei genügend langsamem Einfüllen ist dies aber gewährleistet.

Während der gesamten Messung wird Kupfer aus der Anode ausgelöst und an der Kathode deponiert. Dadurch wird die Oberfläche beider Elektroden verändert. Beim Entleeren und Öffnen der Zelle reagiert das Kupfer zusätzlich mit der Luft. Deshalb müssen die Kupferplatten vor jedem Befüllen der Zelle gereinigt werden: Zuerst werden sie mit Schleifpapier (240er Körnung) geschmirgelt, dann mit feiner Stahlwolle geglättet und poliert. Die Rückstände werden mit Wasser und Aceton abgewaschen.

3.1.1 Bestimmung des Spannungsbereichs

Für das Einstellen konstanter Konzentrationen an den Platten mit $\Delta c = 2 \cdot c_0$ ist es erforderlich, die Spannung so zu wählen, dass sie gerade der entspricht, bei der der Grenzstrom fließt. Aus Abschnitt 2.3.2 ist bekannt, dass es sich hierbei um einen Bereich von etwa 200 mV handelt. Dieser Spannungsbereich ist von verschiedenen Parametern abhängig: Zum ersten von der Konzentration c_0 der Kupfersulfatlösung. Je größer die Konzentration an Ionen ist, desto höher muss die Spannung eingestellt werden. Zweitens beeinflusst die Zellhöhe den Bereich insofern, als dass für hohe Zellen auch der Spannungsbereich zu größeren Spannungswerten hin verschoben wird. Drittens macht es einen Unterschied, ob ein stabilisierender Temperaturgradient angelegt ist oder nicht. Für $\Delta T = 0$ muss die Spannung größer gewählt werden, um den Grenzstrom zu erreichen. Wie groß allerdings der stabilisierende Temperaturgradient ist, ist unabhängig für die Bestimmung des Spannungsbereiches.

c_0 [mol/l]	0.01			0.02	0.03		0.04	0.05		
L [cm]	2	4	8	2	2	20	2	2	4	8
U_{eff} [mV]	350	450	500	500	550	650	550	600	650	620
U_{set} [mV]	400	470	520	550	610	700	650	700	730	700

TAB. 3.1: Spannungen für die verschiedenen Konzentrationen und Zellhöhen, die zum Grenzstrom führen.

So wurde also für jede Konzentration und für jede Zelle bei einer Temperaturdifferenz von $\Delta T = -4^\circ\text{C}$ zuerst die komplette Kennlinie gemessen, um die anzulegende Spannung zu ermitteln. Das Ergebnis ist in Tabelle 3.1 zu sehen, in der sowohl die ausschlaggebende

Spannung U_{eff} zwischen den Elektroden angegeben ist als auch die Spannung U_{set} , die an der Spannungsquelle einzustellen ist, um U_{eff} zu erhalten.

3.1.2 Durchführung einer Messung

Ist die Zelle also sauber und gefüllt, sieht eine „normale“ Messung im Fingerregime wie folgt aus: Zur Vorbereitung wird der stabilisierende Temperaturgradient eingestellt. Je nach Zellhöhe ist die Diffusionszeit t_{diff} bis zum Erreichen des linearen Temperaturprofils unterschiedlich, wie Tabelle 3.2 zeigt.

L [cm]	2	4	8	20
t_{diff} [h:min]	1:07	4:25	17:50	111:07

TAB. 3.2: Aufgerundete Zeiten zum Erreichen eines stabilen, linearen Temperaturprofils für die einzelnen Zellen.

In der Regel wurden aber mindestens einen Tag vorher die Thermostate angeschaltet, so dass die Platten die gewünschte Temperatur stabil annahmen und das Profil zum Start einer Messung sicher ausgebildet war. Nur für die Messungen in der $L = 20$ cm-Zelle wurde 6 Tage gewartet.

Zum Start der Messung wird die Spannung instantan eingeschaltet (für die entsprechende Größe siehe Tabelle 3.1). Es wurden Schattenaufnahmen gemacht, um das Wachstum der Finger zu Beginn einer Messung zu untersuchen. Mit einer Frequenz von 0.25 Hz wurde die Zelle durchleuchtet und das Schattenbild auf einer Leinwand abfotografiert. Es dauerte bis zu 60 Minuten, bis sich ein stabiles, gleichmäßiges Fingermuster ausgebildet hatte.

Besonders in den ersten Minuten einer Messung ist zu kontrollieren, ob die Spannung richtig gewählt wurde. Sobald Blasenbildung zu beobachten ist, muss die Spannungsdifferenz schrittweise verringert werden, bis sich kein neuer Wasserstoff bildet.

Während der Ausbildungszeit eines stabilen Strömungsbildes wurde der Stromfluss beobachtet. Dieser sinkt in den ersten Sekunden schnell ab und pendelt dann (mit abnehmender Periodendauer und Amplitude) um den Grenzstrom. Treffen sich die auf- und abströmenden Finger, sinkt der Strom noch langsam weiter. Erst wenn sich ein durchgängiges Fingermuster ausgebildet hat, steigt der Strom langsam wieder, bis er den Grenzstrom erreicht. Dieser bleibt dann auch für den Rest der Messung konstant und schwankt nur um $< 1\%$.

Ist die Strömung stationär, wird mit PIV das Strömungsfeld gemessen. In der Regel werden mehrere Zeitreihen von mindestens 60 Bildern bei verschiedenen Frequenzen und Pulsabstände aufgenommen. Der Bildabstand variiert je nach Rayleigh-Zahlen zwischen 50 und 1000 ms.

Vor und nach den PIV-Messungen wird eine etwa 10 ml große Probe der Lösung entnommen (möglichst durchmischt und von außerhalb der Grenzschicht), um im Nachhinein die Konzentration zu bestimmen (siehe dazu Anhang C.1).

Zu den Streupartikeln für die PIV-Messung ist zu bemerken, dass diese mindestens 1 Stunde, besser aber länger, vor Injektion in die Zelle in eine Lösung der entsprechenden Konzentration eingerührt werden sollten, um nicht zu klumpen. Pro Liter Arbeitsfluid werden etwa eine Spatelspitze Polyamid-Partikel in 15 ml Lösung eingespritzt.

Die Verwirbelungen durch die Probenentnahme und das Einspritzen der PIV-Partikel müssen vor dem Start der PIV-Messung verschwunden sein. Dies erkennt man aber schon mit bloßem Auge und merkt es auch daran, ob der Grenzstrom wieder erreicht ist.

3.2 Die Messmethoden

3.2.1 Schattenverfahren

Lokale, den Brechungsindex verändernde Inhomogenitäten nennt man Schlieren. Eine Änderung des Brechungsindex n erkennt man oft schon mit bloßem Auge an der Ablenkung der Lichtstrahlen, ein verschwommen wirkendes Bild entsteht. Auch Dichteänderungen rufen eine Variation des Brechungsindex eines Fluids hervor, was in der Gladstone-Dale-Beziehung

$$n - 1 = k \cdot \rho \quad (3.1)$$

zum Ausdruck kommt. Hierbei ist k eine Konstante, die vom Fluid, der Temperatur, dem Druck und von der Wellenlänge abhängt. Treten also parallele Lichtstrahlen durch ein Fluid mit Dichteunterschieden, so werden diese unterschiedlich abgelenkt. Auf einer abbildenden Leinwand sieht man so Bereiche unterschiedlicher Beleuchtungsintensität (vgl. Abbildung 3.2). Die relative Intensitätsveränderung $\frac{\Delta I}{I}$ ist

$$\frac{\Delta I}{I} \propto \int dx \frac{\partial^2 n}{\partial y^2} \propto \int dx \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2}, \quad (3.2)$$

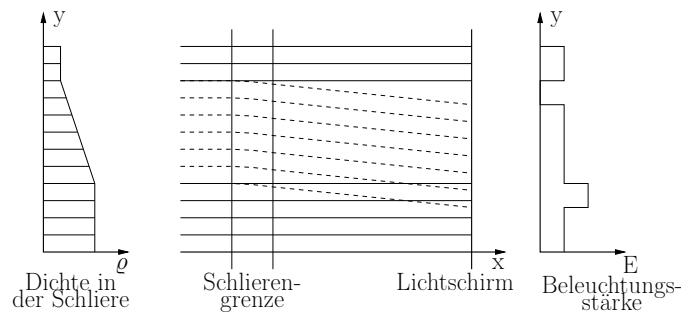


ABB. 3.2: Prinzipielle Funktionsweise des direkten Schattenverfahrens.

also nur proportional zur zweiten Ableitung der Dichte und gibt auch keine Richtung an. Trotzdem erreicht man mit diesem optisch einfachen Verfahren eine gute Sichtbarmachung der Finger in doppelt-diffusiven Strömung, da die Konzentrations- und damit Dichteunterschiede sehr groß und fast sprunghaft sind.

Eine Skizze des hier verwendeten Aufbaus ist in Abbildung 3.3 zu sehen.

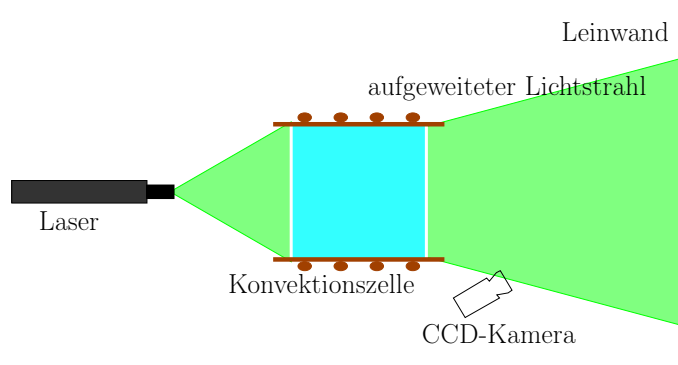


ABB. 3.3: Schematischer Aufbau des Schattenverfahrens –Seitenansicht.

3.2.2 Particle Image Velocimetry

Particle Image Velocimetry, kurz: PIV, ist ein berührungsloses Messverfahren zur Bestimmung des Geschwindigkeitsfeldes in einem Fluid. Dazu werden dem Fluid Tracerpartikel beigemischt, die sich möglichst genau mit dem Fluid mitbewegen. Dazu sollten sie dieselbe Dichte besitzen, gleichmäßig verteilt sein und die Konzentration und Größe muss der Strömung angepasst sein. Mit einem Laser und der entsprechenden Optik wird nun eine Ebene des Fluids gepulst beleuchtet. Eine (in der Regel CCD-) Kamera nimmt dann Bilder der beleuchteten Streupartikel dieser Ebene auf. Mittels Kreuzkorrelation zweier

aufeinander folgender Bilder werden Verschiebungsvektoren einzelner kleiner Bildausschnitte ermittelt; man erhält daraus ein 2-dimensionales Geschwindigkeitsfeld. Auch sind 3-dimensionale Messungen möglich, wenn man zwei Kameras benutzt, was hier aber nicht weiter erklärt werden soll. Der prinzipielle Aufbau ist in Abbildung 3.4 zu sehen.

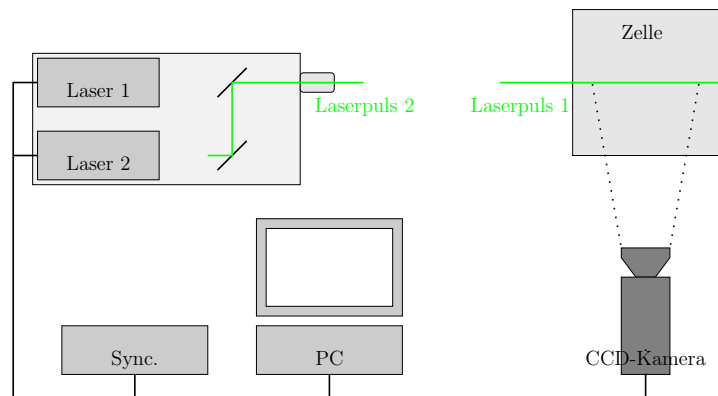


ABB. 3.4: Skizze des PIV-Aufbaus in Aufsicht.

Um PIV anwenden zu können, müssen folgende Voraussetzungen gegeben sein: Zum einem muss die Zelle durchsichtig sein, d. h. die zu untersuchende Ebene muss vom Lichtschnitt beleuchtet werden und die Kamera muss – senkrecht dazu – die Ebene abbilden. Hier im Experiment ist das für vertikale Schnitte gegeben, da alle vier Zellwände zu diesem Zweck aus durchsichtigem Plexiglas gebaut wurden. Horizontalschnitte können nicht gemacht werden, weil Deckel und Boden der Zelle aus Kupferplatten bestehen.

Weiter müssen die Streupartikel, wie schon erwähnt, dem Fluid angepasst sein. Die Dichte muss der des Fluids entsprechen, um Auf- oder Abtriebsbewegungen durch die Schwerkraft zu minimieren. Sie müssen klein genug sein, so dass sie der Strömung schnell genug folgen, aber groß genug, um genügend Licht zur Kamera zu streuen. Die Konzentration der Partikel wird so gewählt, dass auch kleinskalige Strömungen von genügend vielen Teilchen erfasst werden, dass mittels Kreuzkorrelation (siehe weiter unten) die Geschwindigkeit ermittelt werden kann und dass weiter das Fluid nicht gestört wird.

Für den Laser gilt, dass er hell genug sein muss, damit genügend viel Licht von den Teilchen zur Kamera reflektiert wird. Weiter müssen Pulsweite und Wiederholungsfrequenz der Strömungsgeschwindigkeit angepasst werden können. Die Kamera muss entsprechend schnell und empfindlich sein, um die Bilder aufnehmen und auslesen zu können. Heutzuta-

ge werden in der Regel, und so auch hier im Experiment, zwei CCD-Chips kurz hintereinander belichtet und ausgelesen. Der Pulsabstand des Lasers gibt somit den Zeitabstand der beiden Bilder an. Ein Synchronisator triggert Laser, Kamera und Computer. Zur Vernetzung und Bedienung der PIV-Messung siehe Abbildung 3.5.

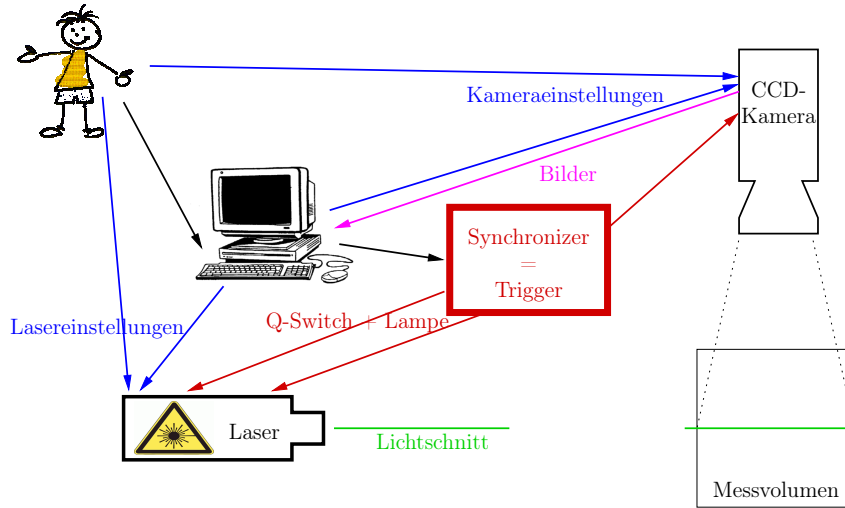


ABB. 3.5: Skizze zur Vernetzung und Bedienung des PIV-Systems.

Das Geschwindigkeitsfeld ermittelt man aus den PIV-Bildern mittels Kreuzkorrelation so: Man teilt jedes Bild in sog. Interrogation Areas (IA) auf, für die man jeweils eine gemittelte Geschwindigkeit $\langle v \rangle_{IA}$ angeben möchte. Die Größe dieser Gebiete muss gerade so sein, dass man eine einheitliche Geschwindigkeit (Größe und Richtung) hat, aber auch genügend Teilchen zu sehen sind, um den Fehler zu minimieren. Der zeitliche Abstand Δt zweier Bilder ist gleich dem Pulsabstand der beiden Laserpulse. Die Verschiebung Δx der Partikel von einem zum anderen Bild ergibt sich, indem man beide Bilder korreliert. Daraus erhält man die Geschwindigkeit

$$\langle v \rangle_{IA} = \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (3.3)$$

Die Größe der Interrogation Areas und des Zeitabstandes müssen so an die Strömung angepasst werden, dass die Bilder noch kreuzkorreliert werden können. Dazu muss in jedem Ausschnitt der Größe $d_{IA} \times d_{IA}$ der Geschwindigkeitsgradient klein sein, als Grenzwert gilt z. B. nach [Raffel et al., 1998]

$$|v_{max} - v_{min}| < \frac{1}{20} \frac{d_{IA}}{\Delta t}. \quad (3.4)$$

Weiter dürfen die Teilchen sich von einem zum anderen Bild nur so viel bewegen, dass sie von der Korrelation noch erfasst werden, also etwa

$$v_{max} < \frac{1}{4} \frac{d_{IA}}{\Delta t}. \quad (3.5)$$

Mathematisch ausgedrückt ist die Kreuzkorrelation

$$C(s) = \iint_{IA} d\vec{x} I_1(\vec{x}) \cdot I_2(\vec{x} - \vec{s}), \quad (3.6)$$

wobei \vec{s} der Verschiebungsvektor ist. Bild 3.6 veranschaulicht die Kreuzkorrelation. Mit

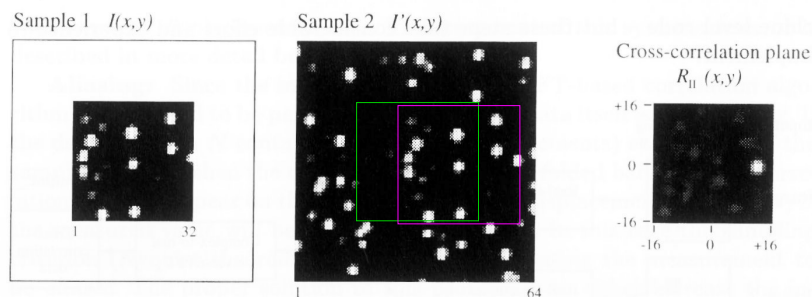


ABB. 3.6: *Prinzip der Geschwindigkeitsermittlung mittels Kreuzkorrelation bei Particle Image Velocimetry. Bild aus [Raffel et al., 1998].*

diesem Verfahren kann man berührungslos, also ohne die Strömung zu beeinflussen, das gesamte Geschwindigkeitsfeld in einer Ebene zu einem Zeitpunkt aufnehmen. Je nach Schnelligkeit der Kamera kann man auch ganze Zeitreihen von Geschwindigkeitsfeldern ermitteln, wodurch ein gute Beobachtung der Strömung gegeben ist. Zu beachten ist dabei, dass man ein 2-dimensionales Bild einer in der Regel 3-dimensionalen Strömung betrachtet.

3.2.3 Temperaturmessung

Die Temperatur wurde mit drei unterschiedlichen Verfahren gemessen. Mit Flüssigkristallen konnte die Temperaturverteilung einer vertikalen Ebene und mit Thermoelementen das Temperaturprofil in z -Richtung bei festen Koordinaten (x, y) gemessen werden. Die Thermistoren wurden benutzt, um die Plattentemperatur zu beobachten.

Flüssigkristalle

Flüssigkristalle ändern ihre Farbe je nach Temperatur. So ist es möglich, eine Ebene mit weißem Licht zu beleuchten und sich anhand der Farbverteilung ein Bild von der Temperaturverteilung in dieser Ebene zu machen. Leider sind die verwendeten Kristalle schon sehr alt und das Farbspektrum erstreckt sich nur noch über einen Bereich von etwa 4 °C, in dem die Auflösung nicht sehr groß ist. Die Umwandlung der Photos in Temperaturbilder mit der Eichung und dem Programm aus [Warner, 2010] gibt somit bestenfalls ein qualitatives Ergebnis. Es wird unterstützend bei den Überlegungen zur Temperaturverteilung in den Fingern eingebracht.

Thermoelemente

Ein Thermoelement besteht aus zwei verschiedenen Metallen, deren Kontaktstelle eine temperaturabhängige Spannung liefert. Ausgenutzt wird der Seebeck-Effekt, der bei einer Temperaturdifferenz entlang eines Leiters eine Spannung erzeugt. Diese Spannung ist materialabhängig und etwa linear zur Temperaturdifferenz. Lötet man also zwei verschiedene Metalle zusammen und befinden sich beide Enden auf gleicher Referenztemperatur, so ist die gemessene Thermospannung U_{th} proportional zu der Temperatur T_x der Kontaktstelle:

$$U_{th} = (k_{M1} - k_{M2}) \cdot (T_x - T_{ref}), \quad (3.7)$$

hierbei sind $k_{M1,M2}$ die beiden thermoelektrischen Koeffizienten der Metalle (hier Kupfer und Konstantan).

Zum Vermessen des Temperaturprofils wurde das Thermoelement vor dem Füllen der Zelle durch die obere Platte geführt und mit einer Mikrometerschraube von außen befestigt. Diese hat einen Hub von 12 mm, so dass gut eine Hälfte des Profils ausgemessen werden konnte. Die freien Enden der Metalle wurden elektrisch isolierend mit Wärmeleitpaste auf der oberen Platte befestigt, so dass $T_{ref} = T_t$. Angeschlossen wurde das Thermoelement an das Multimeter, welches die Umrechnung der Spannung in Temperatur übernahm. So konnte für jede eingestellte Höhe die gemittelte Temperatur abgelesen werden. Als Referenzkurve wurde in der Regel das lineare Profil vor Einschalten der Spannung, also ohne Finger, gemessen. Die Temperaturschwankungen während des stationären Fingerregimes waren mit ± 0.02 °C gut doppelt so groß wie vor Beginn der Finger.

Thermistoren

Thermistoren sind Widerstände, die ihre Leitfähigkeit je nach Temperatur ändern. Es handelt sich meistens um halbleitende Metalloxide, deren spezifischer elektrischer Widerstand mit der Temperatur steigt (PTC – positiver Temperaturkoeffizient, auch Kaltleiter) oder, wie hier benutzt, deren spezifischer elektrischer Widerstand mit steigender Temperatur sinkt (NTC – negativer Temperaturkoeffizient, auch Heißleiter). Der Widerstand wurde mit dem Multimeter ausgelesen und gespeichert. Zur Umrechnung von Widerstand in Temperatur mussten die Thermistoren erst geeicht werden. Mit einem einfachen C-Programm und einer Spline-Interpolation aus [Haramina, 2005] konnte der Temperaturverlauf innerhalb der Platten aufgezeichnet werden.

Die Thermistoren steckten in Löchern, die von der Seite her 3 cm tief in die Kupferplatten gebohrt wurden. Damit befinden sie sich zwar noch außerhalb der Konvektionszelle (die Platten stehen 5 cm über den inneren Rand des Rahmens über), aber durch die gute Leitfähigkeit der 10 mm starken Kupferplatte sollte die Temperatur innerhalb der gesamten Platte gleich sein.

4 Die Struktur der Strömung

Dieses erste der beiden Ergebniskapitel beschreibt und interpretiert die aus den Messungen gewonnenen Ergebnisse über die allgemeinen Eigenschaften der Strömung im Fingerregime. Überlegungen zur Energiedissipation sowie zu den vorherrschenden Kräften beenden das Kapitel.

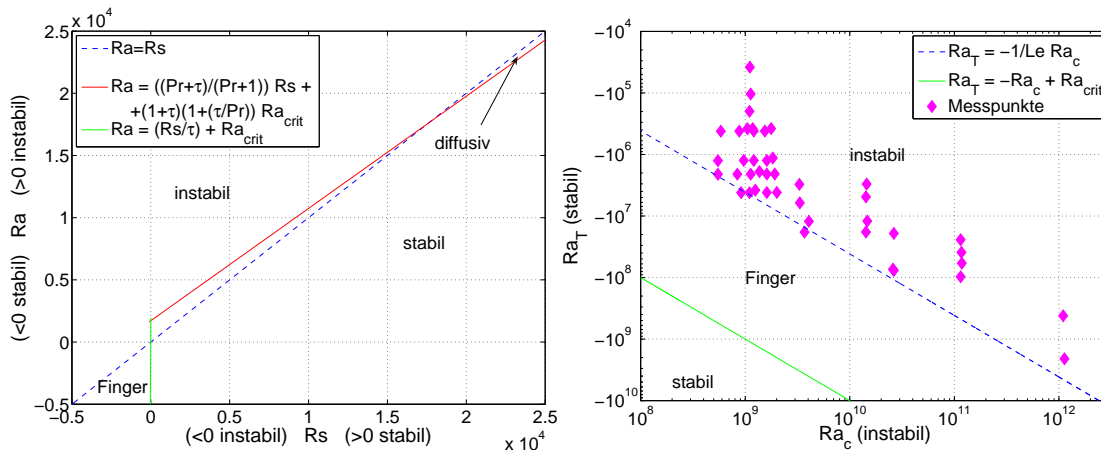
4.1 Die Stabilität des Finger-Regimes

Es ist festzustellen, dass in allen experimentellen Durchläufen eine Fingerstruktur entstand und stationär erhalten blieb. Es wurden nie Schichten beobachtet.

Ersteres ist insofern bemerkenswert, da das Auftriebsverhältnis $|\Lambda|$ bis auf in zwei Durchläufen immer kleiner Eins war. Das System war also bis auf zwei Ausnahmen instabil geschichtet. Die allgemeine Fingerstruktur war bei den beiden Versuchen mit $|\Lambda| > 1$ genau die gleiche wie bei dem kleinsten Auftriebsverhältnis von $|\Lambda| = 0.01$. Es ist aus den Experimenten dieser Arbeit also nicht zu erkennen, wie oder ab wann der Umschlag vom Finger-Regime in das der normalen Konvektion (also chemisch getriebene Rayleigh-Bénard-Konvektion, in der die Temperatur keine Rolle mehr spielt) erfolgt. Extrapoliert man die Fingerdicke gegen größere Werte so findet man für eine Fingerdicke von $d \approx L$ einen sehr kleinen Wert für den stabilisierenden Temperaturgradienten von $|Ra_T| \approx Ra_c^{1/3}$ – siehe dazu Abschnitt 5.6.1. Es sind mir auch keine anderen Arbeiten oder Überlegungen bekannt, die sich mit diesem Ende der Stabilität der Finger befassen. Klassischerweise wird sowohl theoretisch (z. B. [Stern, 1960]) wie auch experimentell (z. B. [Turner, 1967]) oder numerisch (z. B. [Shen, 1989]) nur der Bereich für $|\Lambda| > 1$ untersucht und die Grenze zur stabilen Schichtung, in der sich nichts mehr bewegt. Diese Grenze wird für das Finger-Regime bei z. B. [Turner, 1974] mit

$$\underbrace{Ra = Rs}_{\text{Notation Turner}} \quad \text{bzw.} \quad Ra_T = - \underbrace{\frac{\kappa_c}{\kappa_T} Ra_c}_{\text{eigene Notation}} \quad (4.1)$$

angegeben, siehe dazu auch das Stabilitätsdiagramm in Abbildung 4.1a. Das Diagramm enthält die Gleichungen aus [Turner, 1974], aber mit den Parametern, die für diese Arbeit gültig sind (d. h. $Pr \approx 10$, $\tau^{-1} = Le \approx 250$, $Ra_{crit} = 1708$). Hierbei ist zu beachten, dass die Notation und Vorzeichenkonvention bei Bild 4.1a der des Autors entspricht. Der für diese Arbeit relevante Quadrant des Fingerregimes ist in Abbildung 4.1b nochmals dargestellt, diesmal mit der Notation und Vorzeichenkonvention, wie sie in dieser Arbeit benutzt wird.



(a) Stabilitätsdiagramm nach [Turner, 1974].

(b) Ausschnitt des Fingerregimes.

ABB. 4.1: Das Stabilitätsdiagramm (a) zeigt die verschiedenen Bereiche doppelt-diffusiver Konvektion. Dort sind Notation und Vorzeichenkonvention dem Autor entnommen, siehe erklärend im Text. Die pinkfarbenen Rauten in (b) kennzeichnen die Messungen dieser Arbeit im Rayleigh-Zahlen-Phasenraum. Sie liegen bis auf zwei Ausnahmen außerhalb des klassischen Fingerbereichs. Die blau gestrichelte Kurve entspricht gerade $|\Lambda| = 1$.

Zu der Beobachtung, dass es in keinem der durchgeführten Experimente zu Schichtbildung kam, ist Folgendes anzumerken: Sowohl im Labor (bei z. B. [Krishnamurti, 2009]), wie numerisch (z. B. [Radko, 2003]) und auch im Ozean (z. B. [Schmitt, 1994]) wird Schichtbildung beobachtet. Dabei scheint es auch unabhängig von der Anfangsstratifizierung zu sein, denn sowohl bei Versuchen mit anfänglich linearen Temperatur- und Konzentrationsprofilen (z. B. [Özgökmen et al., 1998]) als auch bei Versuchen mit zwei homogenen Schichten (z. B. [McDougall and Taylor, 1984]) bilden sich vertikal begrenzte Fingerschichten, sog. thermohaline Treppen, aus.

Warum werden dann hier im Experiment keine Schichten beobachtet?

Aus den Experimenten von [Krishnamurti, 2003] lernt man, dass das System für Schicht-

bildung eine Mindesthöhe haben muss. Das sollte hier aber in der 20 cm-Zelle gegeben sein. Denn [Stellmach et al., 2009] beobachten schon zwei Schichten in einer Zelloh e von $40d$, was für die beide Messungen, die in der 20 cm-Zelle durchgeführt wurden, erfüllt ist.

Außerdem müssen die Temperatur- und Konzentrationsgradienten groß genug sein, damit sich Stufen formen. Mit steigenden Rayleigh-Zahlen sieht [Krishnamurti, 2003] einen Übergang von geraden Fingern zu klumpigen (‐lumpy‐), dann zu welligen (‐wavy‐) und erst für noch größere Gradienten bilden sich schließlich Stufen aus. Die hier im Experiment beobachteten Finger waren alle sehr stabil und gerade. Es liegt deshalb wohl an der zu kleinen Temperaturdifferenz, dass hier im Experiment die Finger ein durchgehend homogenes Muster über die komplette Zelloh e bilden. Es sei bemerkt, dass das Auftriebsverhältnis bei [Krishnamurti, 2003] mit 1.1 bis 1.2 zwar nur unwesentlich größer (also stabiler) ist als das maximale $|\Lambda|$ hier, aber die Rayleigh-Zahlen, bei denen sie Schichten beobachtet, sind mit $10^{13} - 10^{16}$ wesentlich größer.

Ein weiterer Punkt ist, dass im Ozean – und soweit mir bekannt auch im Labor und bei Simulationen – Schichtbildung immer nur für Auftriebsverhältnisse $1 < |\Lambda| < 2$ beobachtet wurde, nie aber für $|\Lambda| \leq 1$, also instabile Systeme, wie hier in dieser Arbeit behandelt.

Zur Thematik der Schichtbildung siehe auch Abschnitt 2.4, in dem verschiedene Möglichkeiten zur Entstehung von treppenartigen Vertikalprofilen angesprochen wurden.

4.2 Vertikales StrömungsBild

Wie schon in Kapitel 3.1.2 beschrieben, wird die Strömung auf zwei verschiedene Weisen untersucht. Man erkennt schon bei den Schattenaufnahmen, dass die Strömung stationär wird, sobald sich die Finger komplett über die Zelle ausgebildet haben.

Auch PIV-Messungen langer Zeitreihen zeigen, dass sich die Salzfinger kaum bewegen: Sie sind in allen Messungen vertikal ausgerichtet, reichen nahezu ohne Grenzschicht von Platte zu Platte und bewegen sich nicht. Dabei wurden Zeitreihen mit verschiedenen Frequenzen aufgenommen und ausgewertet.

Aufgrund der Auslesezeit des CCD-Chips der Kamera war die Bildaufnahmefrequenz auf maximal 5 Hz beschränkt, aber auch bei Aufnahmen über eine halbe Stunde bei 0.25 Hz konnte keine Bewegung festgestellt werden.

Ein typisches Geschwindigkeitsfeld einer PIV-Messung sieht man in Abbildung 4.2 und das einer Schattenaufnahme in 4.3.

ABB. 4.2: *Typisches Geschwindigkeitsfeld einer ausgewerteten PIV-Messung. Die Vektoren zeigen das Geschwindigkeitsfeld, die Grauskala nur die vertikale Komponente u_z [$\frac{mm}{s}$]. Hier eine Mittelung über 60 Bilder (entspricht 15 Sekunden) von Messung 091201 mit $Ra_c = 1.05 \cdot 10^9$ und $|Ra_T| = 3.81 \cdot 10^5$. Der Ausschnitt umfasst die komplette Zelhöhe von 20 mm und eine Breite von 15 mm.*

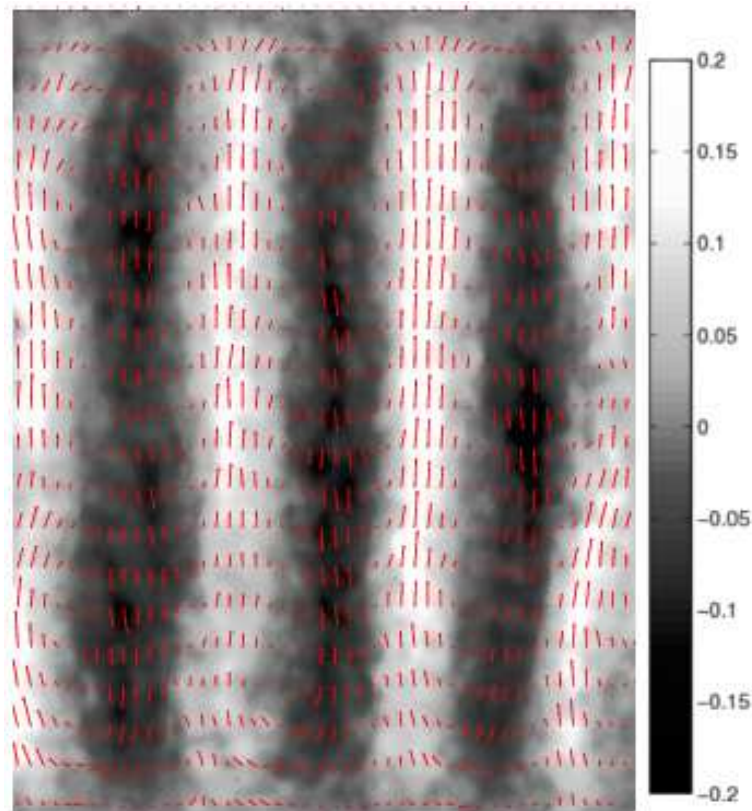
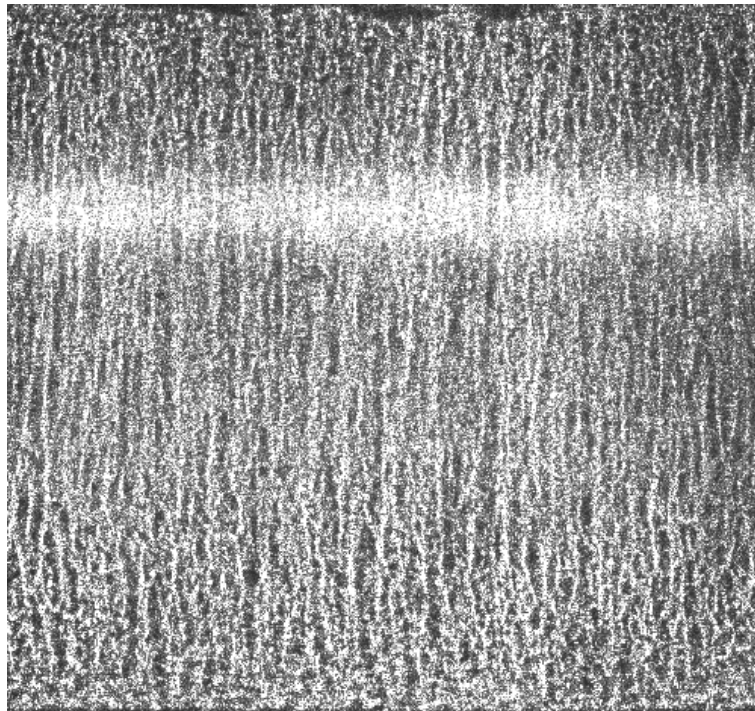


ABB. 4.3: *Typisches Schattenbild. Die weiße Färbung auf $\frac{3}{4}$ der Bildhöhe entstand durch Lichtreflexe auf der Leinwand. Hier ein Einzelbild nach 15 Minuten von Messung 091112 mit $Ra_c = 1.15 \cdot 10^{11}$ und $|Ra_T| = 9.70 \cdot 10^7$. Der Ausschnitt umfasst die komplette Zelhöhe von 80 mm und eine Breite von 85 mm.*



Technisch bzw. chemisch bedingt ist der Einfluss des stabilisierenden Temperaturgradienten im Gegensatz zum Konzentrationsgradienten hier sehr gering, was sich in einem Auftriebsverhältnis von $0.01 \leq |\Lambda| \leq 1.2$ äußert. Die Temperaturdifferenzen dürfen nicht zu groß werden, um die Boussinesq-Näherung nicht zu verletzen. Der Konzentrationsgradient andererseits ist zu kleinen Werten hin begrenzt durch die steigende Unsicherheit der hervorgerufenen Dichteveriation (siehe [Chiang and Goldstein, 1992]). Trotzdem ist im Innern der Zelle die Dichteschichtung stabil, da sich eine sehr dünne Konzentrationsgrenzschicht ausbildet, außerhalb derer die Konzentration weitgehend konstant bleibt. Siehe dazu auch Abbildung 4.4 und den „Beweis“ in Abbildung 4.11.

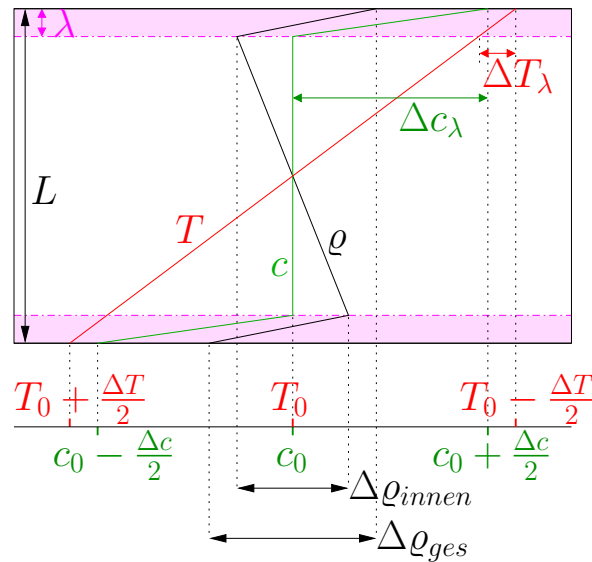


ABB. 4.4: Vereinfacht dargestellt sind Dichte- (schwarz), Temperatur- (rot) und Konzentrationsverteilung (grün) in der Zelle im Fingerregime. $\Delta \rho_{innen} \leq 0$, d. h. stabil und $\Delta \rho_{ges} \geq 0$, also instabil.

4.2.1 Das Temperaturprofil

Das Temperaturprofil weicht signifikant vom linearen Profil ab; und zwar umso stärker, je kleiner der angelegte Temperatur- oder je größer der angelegte Konzentrationsgradient ist: d. h. je instabiler das gesamte System, desto größer der Wärmetransport.

Dabei unterscheidet sich das Profil eines aufsteigenden Fingers von dem eines absteigenden Fingers. Das ist verständlich, da der aufsteigende Finger die Kälte der unteren Platte langsamer abgibt als er aufsteigt; entsprechend behält der absinkende Finger anfangs die

höhere Temperatur der oberen Platte.

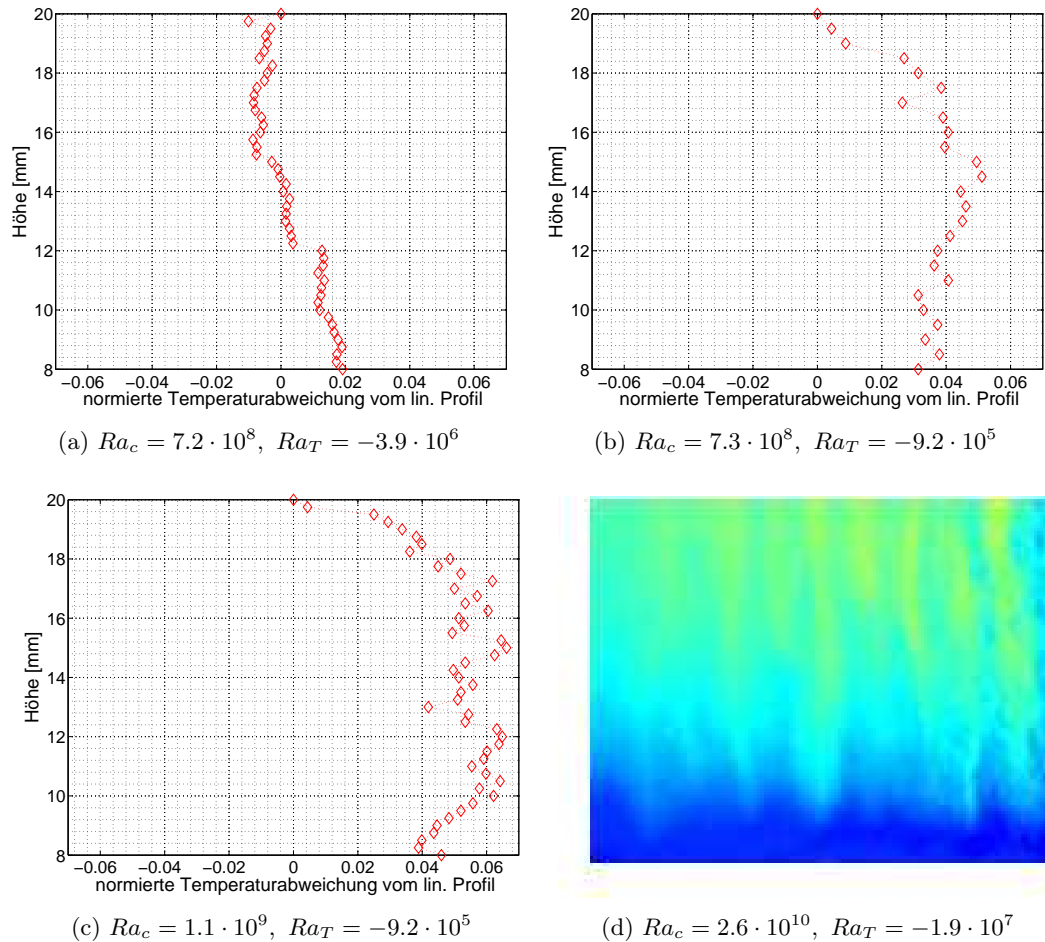


ABB. 4.5: In Bild (a) bis (c) sieht man experimentell gemessene Temperaturprofile. Sie zeigen jeweils die obersten 12 mm der 2 cm-Zelle. Bild (d) zeigt das Falschfarbenbild, d. h. die Temperaturverteilung. Bei dieser Messung war der Temperaturgradient mit 1 K/cm klein. Der Ausschnitt zeigt 30×24 mm aus der 80 mm-Zelle. Die Temperatur dieses Ausschnitts variiert etwa zwischen 15.5 (gelb) und 14 (blau) °C.

Um das Profil genau zu messen, müsste man den Temperatursensor in der Mitte des Fingers führen. Das ist experimentell unmöglich, da der Sensor an festen, durch ein Loch in der oberen Zellplatte vorgegebenen Koordinaten (x_0, y_0) das z -Profil misst.

Nur durch Interpretation der Messdaten kann man schließen, ob der Sensor einen auf- oder absteigenden Finger durchmaß. Durch die nur annähernd vertikale Ausrichtung des Fingers wird der Sensor für verschiedene Höhen auch verschieden weit vom Fingerkern entfernt sein oder sogar in einen sich entgegengesetzt bewegendem Finger hineingeraten.

Aus diesem Grund sind die gemessenen Temperaturprofile nur qualitativ zu deuten. Sicher kann man aber sagen, dass die Temperaturverteilung nicht mehr linear ist, sobald das gesamte System zu instabil wird. Das entspricht den Erwartungen, denn ein instabiles System fordert große vertikale Geschwindigkeiten. Damit bleibt der Wärme weniger Zeit, sich horizontal auszugleichen.

Eine Reihe von beispielhaften, experimentell ausgemessenen Temperaturprofilen ist in Abbildung 4.5 zu sehen. Man erkennt deutlich die oben angesprochene Messunsicherheit. Auch lässt sich die prinzipielle Form des Profils nicht erkennen.

Die eben angesprochene Tendenz ist aber deutlich sichtbar. So weicht in Bild 4.5a die Temperatur kaum vom linearen Profil ab ($\pm 2\%$); hier war der Temperaturunterschied mit -16°C auch am größten. Bei den Messungen von Bild 4.5b und 4.5c war jeweils eine Temperaturdifferenz von -4°C eingestellt. Die Messpunkte weichen hier auch deutlich vom linearen Profil ab. Der Unterschied bei diesen beiden Bildern besteht darin, dass der Konzentrationsunterschied in Bild 4.5c größer ist. Dadurch vergrößert sich die Geschwindigkeit und die Temperaturabweichung folglich auch.

Numerische 2-dimensionale Simulationen bei deutlich kleineren Rayleigh-Zahlen, aber vergleichbaren Auftriebsverhältnissen von [Haase, 2010] zeigen Profile für auf- und absteigende Finger, die für $|Nu| > 1$ deutlich vom linearen Profil abweichen und asymmetrisch sind.

Der aufsteigende Finger nimmt kaltes Fluid mit und bleibt über die gesamte Höhe kälter als die mittlere Temperatur. Erst oberhalb der Mittellinie nimmt er vermehrt Wärme auf. Der absinkende Finger nimmt analog wärmeres Fluid mit nach unten und gibt erst unterhalb der Mittellinie mehr Wärme ab. Dadurch ist auch das gemittelte Temperaturprofil nur annähernd linear.

Um das noch deutlicher darzustellen, ist in Abbildung 4.6 jeweils die Abweichung vom linearen Profil gezeigt.

Auch der Ausschnitt eines Falschfarbenbildes mit Flüssigkristallen in Abbildung 4.5d lässt deutlich erkennen, dass die Temperatur nicht linear geschichtet ist; dann sähe man keinen Temperaturunterschied δT zwischen aufsteigendem und absinkendem Finger, siehe Abbildung 4.9b. Durch die schlechte Auflösung der Kristalle ist die Umrechnung von Farbe in Temperatur nicht quantitativ möglich.

Qualitativ lässt sich aber aus diesem und anderen Flüssigkristallbildern zweierlei schlussfolgern: Erstens, dass die Temperatur wie erwartet von unten nach oben zunimmt (unten blauer, ober gelber). Zweitens, dass δT kleiner wird, je größer der Temperaturgradient

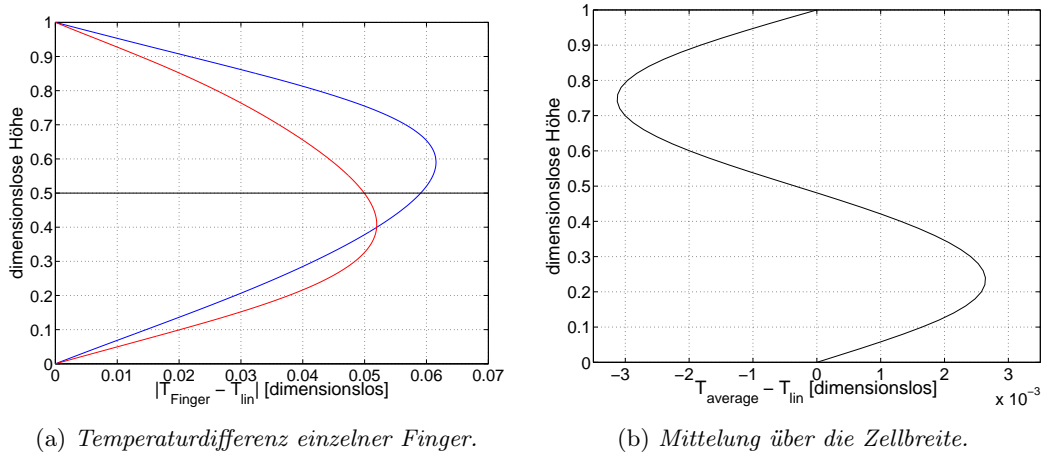


ABB. 4.6: In Bild (a) sieht man exemplarisch die Temperaturdifferenz zum linearen Profil eines aufsteigenden (blau) und eines absinkenden (rot) Fingers. Durch die Asymmetrie der einzelnen Profile ergibt sich eine nicht mehr lineare mittlere Temperaturverteilung, wie Bild (b) zeigt. Die Profile stammen aus der Simulation von [Haase, 2010] mit $Ra_T = 200$, $Ra_c = 5 \cdot 10^6$, $Le = 500$ und $|Nu| = 1.025$.

über die gesamte Zelle ist. Das bedeutet, dass schmale Finger weniger Wärme vertikal transportieren, die Nusselt-Zahl also mit steigendem Auftriebsverhältnis (entsprechend steigender Stabilität) sinkt.

Dieser Zusammenhang ist intuitiv klar, denn mit steigender Stabilität sinkt die Vertikalgeschwindigkeit; damit bleibt mehr Zeit für die Wärme, sich horizontal anzugleichen. Dieser Zusammenhang wird in Abschnitt 5.2.2 bestätigt.

4.3 Horizontales Strömungsbild

Dreidimensionaler Fingerquerschnitt

Horizontale Schnitte konnten aufgrund der Messapparatur hier nicht gemessen werden. Die Daten weisen aber auf bandartige Finger hin (siehe dazu die folgenden Abschnitte), im Gegensatz zu säulenartigen, wie der Name „Finger“ vermuten lässt. Das ist recht glaubwürdig, da ja auch die turbulenten Strukturen in einfach getriebener Konvektion als „streaks“ oder „sheets“ – also zwei- und nicht eindimensional – identifiziert werden (siehe z. B. [Hartlep, 2004], [Puthenveetil and Arakeri, 2005]).

Schon in der frühen Veröffentlichung von [Shirtcliffe and Turner, 1970] und besser noch

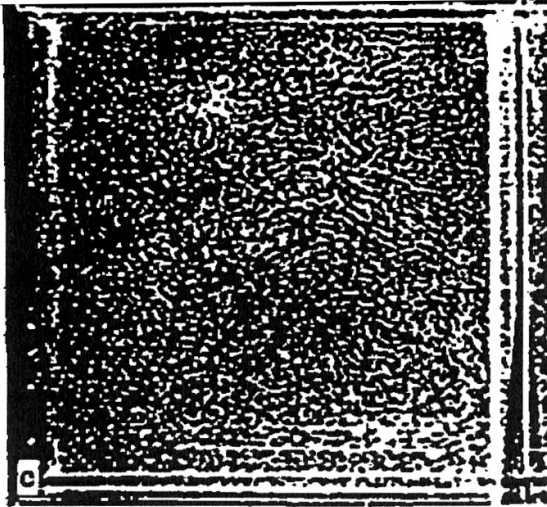


ABB. 4.7: *Horizontaler Querschnitt durch das Fingerregime. Man erkennt die zu Bändern verschmolzenen Finger vor allem im rechten Bildausschnitt. Das Bild zeigt den kompletten Zellquerschnitt von 40×40 cm. Entnommen aus [Hosoyamada and Honji, 1989].*

bei [Hosoyamada and Honji, 1989] sieht man in den Horizontalschnitten sich zu Ketten zusammenfügende Finger. In Abbildung 4.7 kann man sich den Fingerquerschnitt veranschaulichen.

Der Fingerquerschnitt war schon vorher Gegenstand der Forschung und hat zu kontroversen Ergebnissen geführt. So ergaben erste experimentelle Untersuchungen von [Shirtcliffe and Turner, 1970] in einem Salz-Zucker-Experiment mit Stufenprofil eher einen quadratischen Querschnitt. Theoretische Überlegungen von [Proctor and Holyer, 1986] allerdings finden als bevorzugte Lösung zweidimensionale Rollen, also Lamellen. Dreidimensionale numerische Arbeiten von [Nagashima et al., 1997] zeigen ebenfalls zu Ketten verschmolzene Finger, hingegen konnten [Radko and Stern, 2000] zeigen, dass sich auch nach anfänglichen Rollen wieder quadratische Querschnitte durchsetzen.

Schnitte durch den Finger bei z_0

Hier noch einige Skizzen zum horizontalen Aufbau der Finger, die erstens die x -Profile verdeutlichen und zweitens in die Nomenklatur einführen. Abbildung 4.8 zeigt das in etwa sinusförmige Geschwindigkeitsprofil, das auch im gemessenen PIV-Bild (Abbildung 4.2) gut erkennbar ist. Die Skizzen in Abbildung 4.9 verdeutlichen den wieder sinusförmigen Temperaturverlauf und den im Gegensatz dazu eckigen Verlauf der Konzentration. Leider kann die Temperatur- und Konzentrationsverteilung hier nicht selber gemessen werden, aber numerische Arbeiten von z. B. [Piacsek and Toomre, 1980] oder [Shen, 1993] zeigen die gleichen Charakteristika der Kurven für Geschwindigkeit, Temperatur und Konzentration.

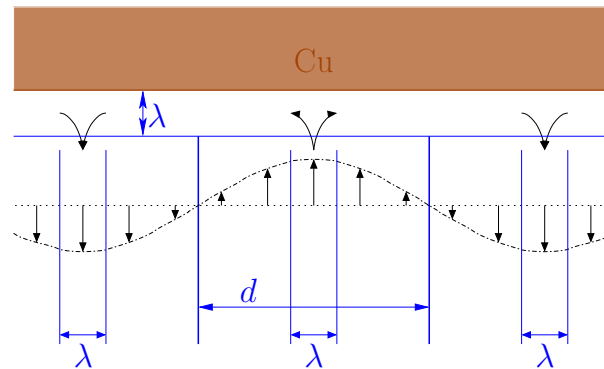
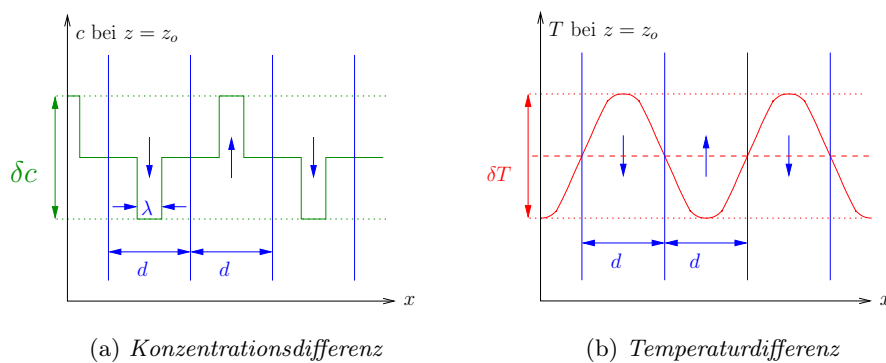


ABB. 4.8: Vertikaler Schnitt durch die Struktur des Fingers am Beispiel der oberen Grenzschicht – mit chemischer Grenzschichtdicke λ . In schwarz ist zusätzlich die Geschwindigkeitsverteilung skizziert.



(a) Konzentrationsdifferenz

(b) Temperaturdifferenz

ABB. 4.9: Die Bilder (a) und (b) deuten die Konzentrations- und Temperaturdifferenz zwischen auf- und absteigenden Fingern der Dicke d in einer konstanten, aber beliebigen Höhe z_0 an.

Die Konzentrationsverteilung

An der Anode, also oben, ist die Grenzschicht voller Kupferionen und deswegen schwerer. Unten an der Kathode ist die Konzentration der Ionen stark reduziert. Aus diesen chemischen Grenzschichten heraus lösen sich die Finger aufgrund von Auftriebskräften. Diese haben einen „Kern“ der Dicke der chemischen Grenzschicht λ , der sich aufgrund der kleinen Diffusivität kaum verbreitert. Die gesamte Fingerdicke d umfasst dann auch das Fluid, welches durch den absinkenden Kern mitgezogen wird – den „Mantel“ – (siehe dazu Abbildung 4.8).

Zur Überprüfung dieser Aussage kann man den chemischen Diffusionsweg plotten, den die Konzentration in der Transitzeit von einer zur anderen Platte zurücklegt. Die Zeit,

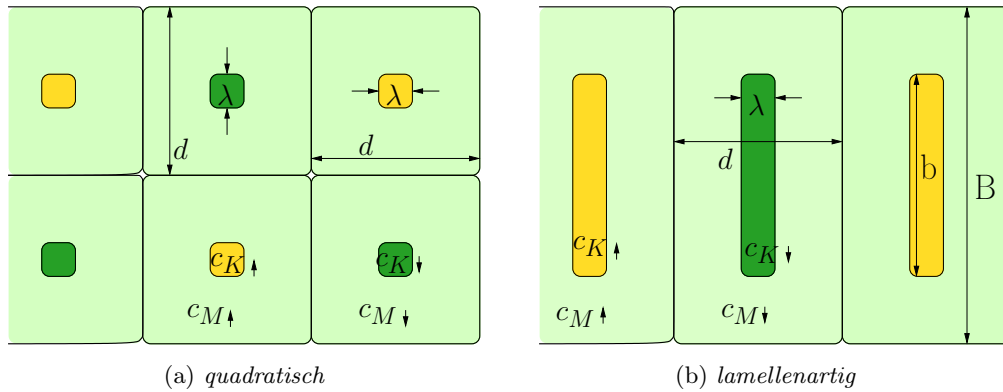


ABB. 4.10: Schematische Darstellung möglicher horizontaler Fingerquerschnitte und die Konzentrationsverteilung. In grün der konzentrationsführende, absteigende Fingerkern mit $c_K = \Delta c$, in gelb der frische, aufsteigende Kern mit $c_K = 0$. Die Fingermäntel haben jeweils eine mittlere Konzentration (dargestellt in hellgrün) von $c_M = \frac{\Delta c}{2}$.

die ein Kupferion für die Strecke der gesamten Zellhöhe L bei einer Geschwindigkeit u benötigt, ist $\frac{L}{u}$. Während dieser Zeit diffundiert es die Strecke $\sqrt{\kappa_c \frac{L}{u}}$. Verglichen mit der Fingerdicke d ist der chemische Diffusionsweg X_{diff} also

$$X_{diff} = \frac{1}{d} \sqrt{\kappa_c \frac{L}{u}} = \frac{L}{d} (Re Sc)^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.2)$$

In Abbildung 4.11 kann man sich davon überzeugen, dass die Annahme gerechtfertigt ist. Erst für Auftriebsverhältnisse $|\Lambda| \gtrsim 5$ diffundieren die Ionen etwa eine ganze Fingerbreite weit.

Damit ist der chemische Austausch zwischen den Fingern hier vernachlässigbar und die Annahme über das chemische Profil aus Abbildung 4.4 und 4.9a gültig. Unter dieser Voraussetzung kann man sich jetzt Gedanken über die mittlere Konzentration machen, die die auf- und absteigenden Finger mitführen.

Die Konzentration im Fingerkern ist $c_K = \Delta c$ für den absteigenden, $c_K = 0$ für den aufsteigenden Finger; die Mantelkonzentration ist in beiden Fällen $c_M = \frac{\Delta c}{2}$. Damit heben sich die auf- und absteigenden Konzentrationsströme des Mantels auf, im Mantel werden also effektiv keine Ionen transportiert. Der aufsteigende Fingerkern transportiert nur frische Lösung, also auch keine Ionen. Damit ist die Nettokonzentration an transportierten Ionen gleich der Konzentration des absinkenden Fingerkerns.

Um den Konzentrationsfluss zu bestimmen, muss man den horizontalen Fingerquerschnitt kennen. Ist dieser kreisförmig mit einem Durchmesser von d oder quadratisch wie in Abbildung 4.10a skizziert mit einer Kantenlänge von d , dann ergibt sich der Nettokonzen-

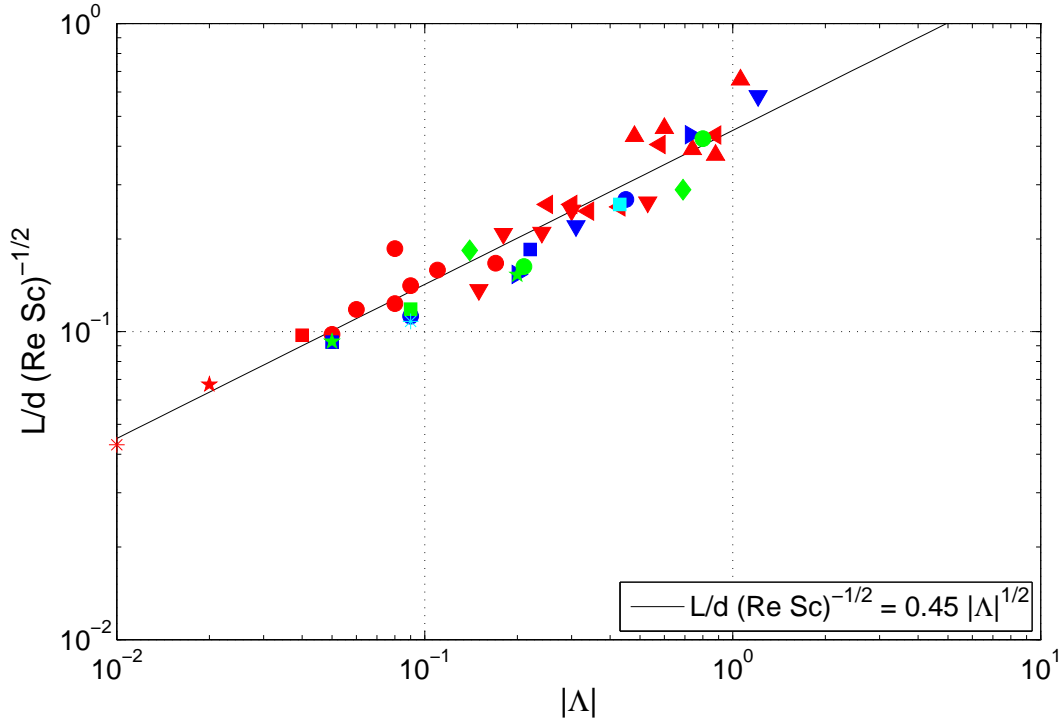


ABB. 4.11: Chemischer Diffusionsweg im Verhältnis zur Fingerdicke d während der Transitzeit in Abhängigkeit des Auftriebsverhältnisses. Die Legende zu den Symbolen befindet sich in Anhang A und gilt auch für alle folgenden Graphen, sofern nicht explizit anders aufgeführt. Dabei markieren die Farben rot, blau, grün und cyan die verschiedenen Zellhöhen von 2, 4, 8 und 20 cm. Die Symbole stehen für bestimmte Temperaturgradienten: von Stern über Quadrat nach Dreieck von klein nach groß.

trationsfluss \bar{c} – als mittlere Konzentration pro Fingerpaar – zu

$$\bar{c} = \left(\frac{\lambda}{d}\right)^2 \frac{\Delta c}{2} \quad \text{für quadr./kreisf. Querschnitt.} \quad (4.3)$$

Bei lamellenartigen Fingern mit Querschnittsfläche des Kerns von λb , einer gesamten Fingerquerschnittsfläche von dB und unter der Annahme von $b \approx B \gg d$ (siehe dazu Abbildung 4.10b) ergibt sich entsprechend

$$\bar{c} = \left(\frac{\lambda}{d}\right) \frac{\Delta c}{2} \quad \text{für lamellenartigen Querschnitt.} \quad (4.4)$$

4.4 Die Grenzschicht-Rayleigh-Zahlen

Eine weitere Möglichkeit, Rayleigh-Zahlen zu definieren, bietet die chemische Grenzschichtdicke λ als Längeneinheit. Wie in Abbildung 4.4 zu sehen, ist der Konzentrationsabfall in einer Grenzschicht gleich der Hälfte der gesamten Konzentrationsdifferenz, also $\Delta c_\lambda = \frac{\Delta c}{2}$ und der Temperaturabfall innerhalb der chemischen Grenzschicht ist gerade $\Delta T_\lambda = \frac{\Delta T}{L} \lambda$. Mit dem Zusammenhang von Grenzschichtdicke zu Sherwood-Zahl (zur Sherwood-Zahl siehe auch Abschnitt 5.2.1)

$$Sh = \frac{L}{2\lambda} \Leftrightarrow \lambda = \frac{L}{2Sh} \quad (4.5)$$

ergibt sich analog zu (2.10) und (2.11):

$$Ra_{c,\lambda} = \frac{g \alpha_c \frac{\Delta c}{2} \lambda^3}{\nu \kappa_c} = \frac{1}{16} Ra_c Sh^{-3}, \quad (4.6)$$

$$Ra_{T,\lambda} = \frac{g \alpha_T \frac{\Delta T}{L} \lambda \lambda^3}{\nu \kappa_T} = \frac{1}{16} Ra_T Sh^{-4}. \quad (4.7)$$

Berechnet man daraus eine effektive Grenzschicht-Rayleigh-Zahl $Ra_{\text{eff},\lambda} = Ra_{c,\lambda} - |Ra_{T,\lambda}|$, so ist diese für einen Großteil der Messungen unterkritisch, wie Abbildung 4.12 zeigt. Außerdem ist der Anteil der thermischen Grenzschicht-Rayleigh-Zahl bei allen Messungen hier maximal $2/10000$ der chemischen und hat somit quasi keinen Einfluss.

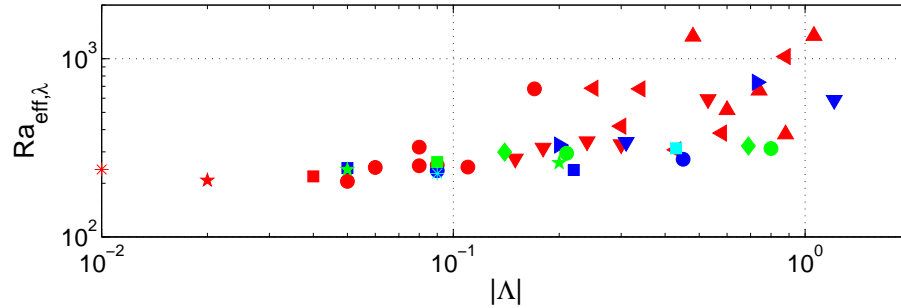


ABB. 4.12: Auftragung der effektiven Grenzschicht-Rayleigh-Zahl $Ra_{\text{eff},\lambda}$ gegen das Auftriebsverhältnis $|\Lambda|$.

Desweiteren kann man das Verhältnis der beiden Grenzschicht-Rayleigh-Zahlen betrachten. Es ist

$$\begin{aligned} \frac{Ra_{T,\lambda}}{Ra_{c,\lambda}} &= \frac{\alpha_T \Delta T}{\alpha_c \Delta c} \frac{\kappa_c}{\kappa_T} \frac{2\lambda}{L} = \Lambda \frac{1}{Le} \frac{1}{Sh} \\ &\approx |\Lambda| \frac{1}{Le} \frac{1}{(Sh-1)}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Da hier $Sh > 30$ für alle Messungen, ist der letzte Schritt gerechtfertigt.

Dieses Verhältnis wird noch in Abschnitt 4.5 gebraucht. Dort interessieren die minimal und maximal in diesen Messungen erreichten, absoluten Zahlenwerte. Multipliziert mit dem Quadrat der Lewis-Zahl ist hier

$$0.14205 < \left[Le^2 \frac{Ra_{T,\lambda}}{Ra_{c,\lambda}} \right]^{-1} < 32.754. \quad (4.9)$$

4.5 Die Energiedissipation

Ein Maß für die kinetische Energiedissipation im Experiment ist die Größe

$$\epsilon \sim \left(\frac{u_z}{d} \right)^2. \quad (4.10)$$

Um eine Beziehung zwischen Energiedissipation und Strömungsgrößen zu finden, wird hier ein Ausdruck aus den Grundgleichungen hergeleitet. Dimensionsbehaftet lautet die Navier-Stokes-Gleichung (vgl. (2.1))

$$\underbrace{\partial_t \vec{u}}_1 + \underbrace{(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}}_2 = - \underbrace{\rho^{-1} \vec{\nabla} p}_3 + \underbrace{\nu \vec{\nabla}^2 \vec{u}}_4 - \underbrace{g \alpha_c c \vec{z}}_5 + \underbrace{g \alpha_T T \vec{z}}_6. \quad (4.11)$$

Multipliziert man (4.11) jetzt mit \vec{u} , integriert über das gesamte Volumen $V = W \cdot W \cdot L$ und betrachtet dann das zeitliche Mittel $\langle \rangle_t$, so bleiben von den obigen 6 Termen nur folgende übrig (detailliert vorgerechnet in [Schmitz, 2009]): Term 1 bis 3 verschwinden zu Null. Term 4 ist in Indexschreibweise dann

$$\nu \int \langle u_i \partial_j \partial_j u_i \rangle_t dV = \dots = -\nu \epsilon V \quad (4.12)$$

Für Term 5 betrachte zuerst

$$\int \langle \partial_t c \rangle_t dV = \int \langle -(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) c + \kappa_c \vec{\nabla}^2 c \rangle_t dV \quad \text{Nernst-Planck-Gleichung}$$

Wegen Massenerhaltung, mit dem Satz von Gauß, mit $\vec{u} = u \vec{z}$ und $\langle \partial_z c \rangle_t \vec{z} = Sh \frac{dc}{dz}$ kommt man zu

$$\int \langle \vec{u} c \rangle_t \vec{z} dV = \kappa_c \frac{dc}{dz} V (1 - Sh).$$

Hierbei ist Sh die Sherwood-Zahl, siehe Abschnitt 5.2.1. Damit ist Term 5:

$$g \alpha_c \int \langle (\vec{u} c) \vec{z} \rangle_t dV = -g \alpha_c \kappa_c \frac{dc}{dz} V (Sh - 1) = -Ra_c \frac{W^2}{L^3} \kappa_c^2 \nu (Sh - 1). \quad (4.13)$$

Analog geht man mit Term 6 um. Mit der Nusselt-Zahl Nu (siehe Abschnitt 5.2.2) folgt

$$g\alpha_T \int \langle (\vec{u}T)\vec{z} \rangle_t dV = -g\alpha_T \kappa_T \frac{dT}{dz} V(Nu - 1) = -Ra_T \frac{W^2}{L^3} \kappa_T^2 \nu (Nu - 1). \quad (4.14)$$

Ersetzt man noch die Diffusivitäten durch Prandtl- und Schmidt-Zahl und setzt die Terme in Gleichung (4.11) ein, folgt für die Energiedissipation

$$\epsilon \frac{L^4}{\nu^2} = Ra_c \frac{1}{Sc^2} (Sh - 1) - Ra_T \frac{1}{Pr^2} (Nu - 1). \quad (4.15)$$

Wie oben schon erwähnt, kann man im Fingerregime die Energiedissipation abschätzen durch das Quadrat von u_z/d . Somit erhält man mit Gleichung (4.15) eine Möglichkeit, die Nusselt-Zahl zu bestimmen, da ja alle anderen Größen im Experiment gemessen werden können. In dieser Gleichung steht streng genommen nur eine Proportionalität statt einer Gleichheit, wenn man ϵ durch $(\frac{u_z}{d})^2$ ersetzt, also führt man die Proportionalitätskonstante K ein:

$$(Nu - 1) = \frac{Pr^2}{Ra_T} \left(\frac{Ra_c}{Sc^2} (Sh - 1) - K \left(\frac{u_z}{d} \right)^2 \frac{L^4}{\nu^2} \right). \quad (4.16)$$

Damit für den rein advektiven Wärmetransport $(Nu - 1) \leq 0$ gegeben ist (siehe Argumentation in Abschnitt 5.2.2), muss – weil ja Ra_T hier immer negativ ist – die Proportionalitätskonstante K folgendes erfüllen:

$$K \leq Ra_c \frac{1}{Sc^2} (Sh - 1) \left(\frac{d\nu}{u_z L^2} \right)^2. \quad (4.17)$$

Aufgetragen ergibt sich aber für verschiedene K kein großer Unterschied (siehe Abbildung 4.13 für drei beispielhafte K -Werte). Welchen Wert hat denn dann die Proportionalitätskonstante K ?

Man kann für jedes Wertepaar (Ra_T, Ra_c) das maximal mögliche K mit Gleichung (4.17) bestimmen. Die Werte reichen von $K = 18$ bis $K = 250$. Für alle muss aber die gleiche Konstante gelten. Wie man in Abbildung 4.14 jedoch sieht, scheinen die Werte wild zu streuen. Es ist deshalb anzunehmen, dass bei weiteren Messungen auch noch kleinere Werte für K ermittelt werden würden.

Zur Bestimmung der Nusselt-Zahl muss aber ein Wert angenommen werden. Je kleiner dieser Wert für K aber ist, desto kleiner wird der Einfluss der Dissipation. Um also durch die Wahl von K die Dissipation nicht künstlich zu vernachlässigen, wird ein Wert gesucht, der möglichst groß ist, aber für keine Messung Gleichung (4.17) verletzt. Es stellt sich aber heraus, dass mit Werten von $K \gg 1$ die berechnete Nusselt-Zahl sich nicht mehr

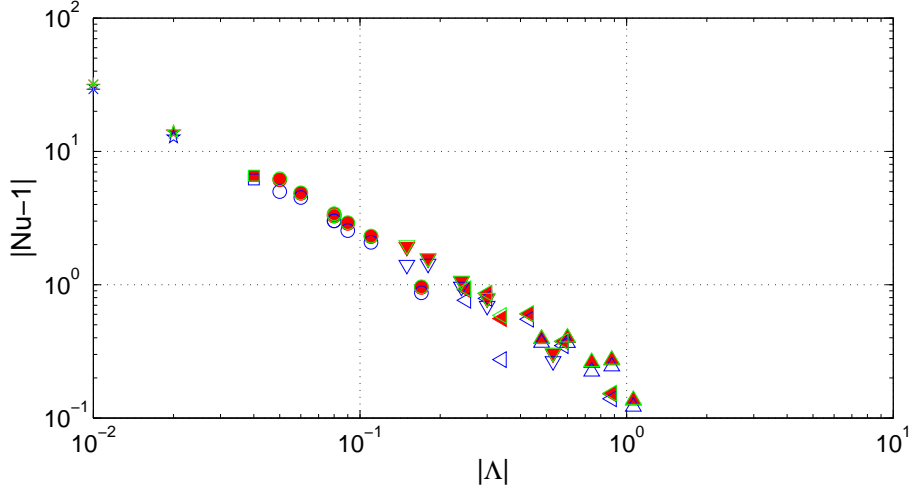


ABB. 4.13: Plot von Gleichung (4.16) der Daten für $L = 2 \text{ cm}$ mit drei verschiedenen Werten für K : $K = 1$ in rot, $K = 10$ in blau und $K = 0.01$ in grün.

gut als Kombination der Rayleigh-Zahlen schreiben lässt. Verschiedene Fits geben unterschiedliche Abhängigkeiten, aber alle streuen sehr. Aus diesem Grund scheint $K = 1$ ein guter Kompromiss zu sein, der für den Rest der Arbeit auch angenommen wird.

In Abschnitt 4.4 wurde schon das Verhältnis der Grenzschicht-Rayleigh-Zahlen angesprochen. Mit diesem Verhältnis und den Beziehungen für das Flussverhältnis (siehe Abschnitt 5.2.3), kann man auf unabhängige Weise die Proportionalitätskonstante K bestimmen. Wie in Abbildung 5.7 zu erkennen, ist $\chi = 1$. Laut Gleichung (5.30) ist aber auch

$$\chi = Le |\Lambda| \frac{|Nu - 1|}{Sh - 1} \equiv 1 \quad (4.18)$$

$$\implies \frac{|\Lambda|}{Le (Sh - 1)} = \frac{1}{Le^2} \frac{1}{|Nu - 1|}. \quad (4.19)$$

Setzt man dies in Gleichung (4.8) für das Verhältnis der Grenzschicht-Rayleigh-Zahlen ein, ergibt sich eine Möglichkeit zur Bestimmung der Nusselt-Zahl, bzw. des konvektiven Anteils $|Nu - 1|$:

$$\frac{Ra_{T,\lambda}}{Ra_{c,\lambda}} = |\Lambda| \frac{1}{Le} \frac{1}{(Sh - 1)} = \frac{1}{Le^2} \frac{1}{|Nu - 1|} \quad (4.20)$$

$$\implies |Nu - 1| = \left[Le^2 \frac{Ra_{T,\lambda}}{Ra_{c,\lambda}} \right]^{-1}. \quad (4.21)$$

Je nach Variation von K bei der Bestimmung von $|Nu - 1|$ nach Gleichung (4.16) trifft man die Grenzen für den advektiven Wärmetransport, die über die Grenzschicht-Rayleigh-Zahlen in (4.9) gegeben werden. Für $K > 1$ werden die Zahlenwerte für $|Nu - 1|$

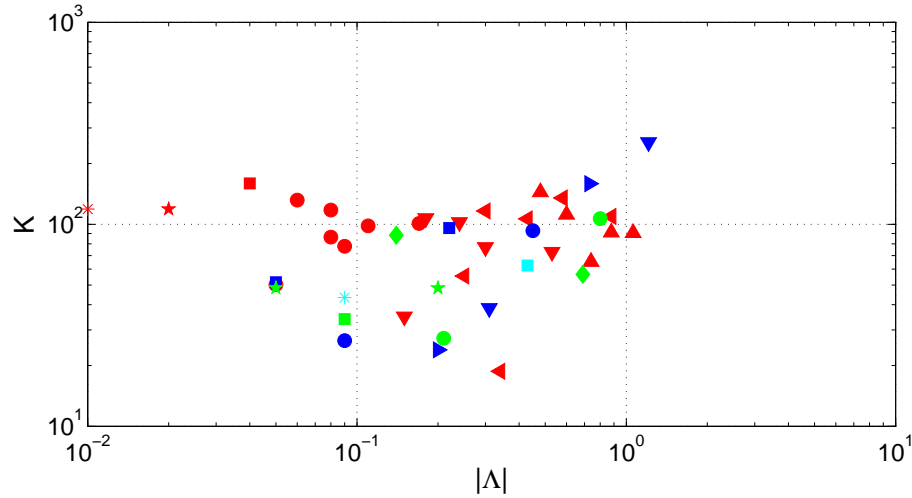


ABB. 4.14: Die verschiedenen Werte für K aus Gleichung (4.17) für alle hier gemessenen Wertepaare (Ra_T, Ra_c) aufgetragen gegen das Auftriebsverhältnis $|\Lambda|$.

zu klein; erst für $K \approx 0.4$ erreichen die Messungen mit den größten Werten den Grenzwert aus (4.9) mit $|Nu - 1| > 32$.

Da auch diese Methode den Proportionalitätsfaktor K nicht zu groß werden lässt, wird, wie oben schon erwähnt, im Folgenden mit $K = 1$ gerechnet.

4.6 Das Kräftegleichgewicht

Es sei jetzt noch die Frage zu klären, welche Kräfte hier im Fingerregime die Strömung bestimmen. Zum einen sicherlich eine Auftriebskraft, die durch die Konzentrationsdifferenz hervorgerufen wird. Sie ist:

$$\vec{F}_c = \vec{g} \alpha_c \delta c \quad \implies \quad \mathcal{O}(F_c) = g \alpha_c \Delta c, \quad (4.22)$$

mit $\delta c = \Delta c$ aus Abbildung 4.9a. Andererseits wurde in Abschnitt 4.2.1 gezeigt, dass die Temperatur horizontale Gradienten aufweist; Wärme wird auch advektiv transportiert. Damit wird es auch eine Auftriebskraft geben, die durch die Temperaturverteilung hervorgerufen wird; allerdings zeigt diese Auftriebskraft in entgegengesetzte Richtung der chemischen Kraft. Der thermische Auftrieb (eigentlich negativer Auftrieb, also Abtrieb) hat die Form:

$$\vec{F}_T = -\vec{g} \alpha_T \delta T, \quad (4.23)$$

wobei δT die Temperaturdifferenz aus Abbildung 4.9b zwischen auf- und absteigendem Finger ist. Die genaue Form muss noch gefunden werden. Weiter sind fluidinterne Kräfte denkbar, wie etwa die viskose Reibung \vec{F}_{visk} mit

$$\vec{F}_{visk} = -\nu \vec{\nabla}^2 \vec{u} \implies \mathcal{O}(F_{visk}) = -\nu \frac{u}{d^2}, \quad (4.24)$$

oder ein nichtlinearer Reibungsterm \vec{F}_{nlin} , der entweder auf der Längenskala der Fingerdicke wirkt ($\vec{F}_{nlin,d}$) oder mit der Zellhöhe gebildet werden kann ($\vec{F}_{nlin,L}$). Auch dieser wirkt gegen den chemischen Auftrieb und ist

$$\vec{F}_{nlin,d} = -(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \implies \mathcal{O}(F_{nlin,d}) = -\frac{u^2}{d}, \quad (4.25)$$

$$\vec{F}_{nlin,L} = -(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \implies \mathcal{O}(F_{nlin,L}) = -\frac{u^2}{L}. \quad (4.26)$$

Die physikalisch sinnvollere Größe ist sicherlich $\vec{F}_{nlin,d}$, denn die Reibung findet ja auf der Größenordnung der Fingerdicken statt; die Geschwindigkeiten zwischen auf- und absteigendem Finger auf einer Höhe z_0 variieren weitaus mehr als in vertikaler Richtung.

Im Folgenden soll jetzt das Gleichgewicht der vorherrschenden Kräfte gefunden werden. Dazu wird zuerst eine Abschätzung der Größenordnungen der einzelnen Terme gemacht um festzustellen, welche der Kräfte (4.23) bis (4.26) den chemischen Auftrieb ausgleichen. Der chemisch getriebene Auftrieb \vec{F}_c ist von der Größenordnung

$$F_c \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right] \in [0.02, 0.2]. \quad (4.27)$$

Aufgrund der relativ kleinen Geschwindigkeiten im Fingerregime liegt die Vermutung nahe, dass der nichtlineare Term $F_{nlin,d}$ vernachlässigbar klein ist. Und tatsächlich ist $F_{nlin,d}$ mit $F_{nlin,d} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right] \in [2 \cdot 10^{-7}, 2 \cdot 10^{-5}]$ um bis zu zwei Größenordnungen kleiner als F_{visk} mit $F_{visk} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right] \in [6 \cdot 10^{-6}, 6 \cdot 10^{-5}]$.

Somit fällt schon beim Betrachten der Größenordnungen auf, dass der thermische Auftrieb (bzw. Abtrieb, denn die Temperatur ist ja stabil geschichtet) den Großteil der chemischen Auftriebskraft ausgleicht. Die Form des thermischen Auftriebs ist nach Gleichung (4.23) proportional zur Schwerebeschleunigung $g \alpha_T$. Sie sollte auch proportional zur Temperaturdifferenz ΔT sein; weiter spielt sicherlich die Geschwindigkeit u und die Fingerdicke d eine Rolle.

Die intuitive Vermutung würde zu einer Proportionalität von δT zum Temperaturgradi-

enten, zur Geschwindigkeit und zur Diffusionszeit führen, also

$$\delta T_{intuitiv} \sim \frac{\Delta T}{L} u \frac{d^2}{\kappa_T} = \Delta T \frac{Re}{Pr} \left(\frac{d}{L} \right)^2 \sim \Delta T Re \left(\frac{d}{L} \right)^2 \quad (4.28)$$

$$\Rightarrow F_{T,intuitiv} \sim g \alpha_T \Delta T Re \left(\frac{d}{L} \right)^2. \quad (4.29)$$

Ein Gleichgewicht mit dieser Form des thermischen Auftriebs ist in Abbildung 4.15 zu sehen.

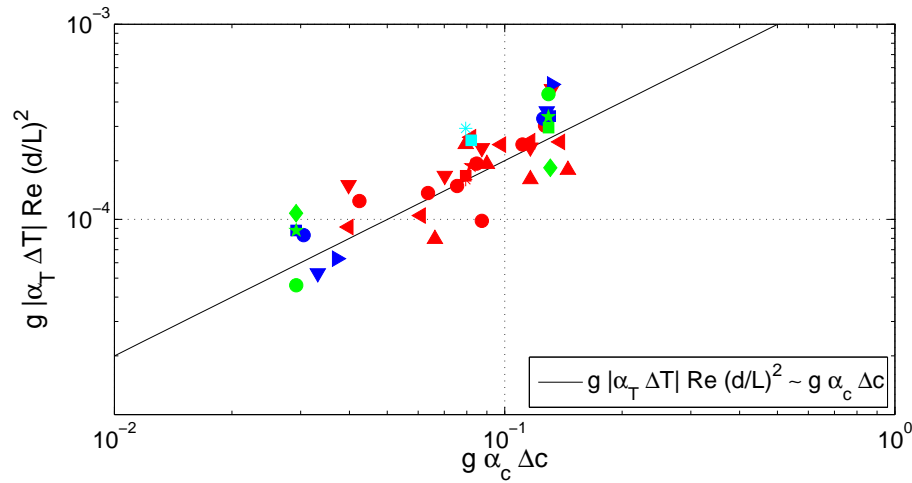


ABB. 4.15: Das Kräftegleichgewicht mit den intuitiven Termen aus Gleichung (4.22) und (4.29).

Man erkennt zwar den richtigen Trend der Daten, allerdings werden für gleiche Δc unterschiedliche thermische Auftriebe gesehen. Somit scheint ein Gleichgewicht aus Gleichung (4.22) und (4.29) hier nicht gegeben.

Eine andere Möglichkeit bieten die Definitionen für Nusselt- und Sherwood-Zahl, die in Abschnitt 5.2.2 und 5.2.1 gegeben werden. Nach Gleichung (5.22) ist nämlich

$$\delta T = |Nu - 1| \frac{1}{Pr} \frac{1}{Re} \Delta T = \frac{16.9}{Pr} \Delta T Re^{3/10} \left(\frac{d}{L} \right)^{13/10} \quad (4.30)$$

$$\Rightarrow F_{T,Fit} = \frac{16.9}{Pr} g \alpha_T \Delta T Re^{3/10} \left(\frac{d}{L} \right)^{13/10}, \quad (4.31)$$

wobei die Beziehungen (5.28), (5.45) und (5.39) von $|Nu - 1|$, Re und $\frac{d}{L}$ in Abhängigkeit der beiden Rayleigh-Zahlen eingesetzt wurden, wie sie im folgenden Kapitel aus den Daten gefunden werden.

Analog dazu kann man einen Ausdruck für den chemischen Auftrieb finden. Ein Vorgreifen auf die Ergebnisse aus Abschnitt 5.2.1 mit Gleichung (5.17) und wiederum das Einsetzen der Beziehungen für Re und $\frac{d}{L}$ in die Definition der Sherwood-Zahl (5.8) gibt

$$\delta c = Sh \frac{1}{Sc} \frac{1}{Re} \Delta c = \frac{16.6}{Sc} \Delta c Re^{-1/2} \left(\frac{d}{L} \right)^{-1/2} \quad (4.32)$$

$$\Rightarrow F_{c,Fit} = \frac{16.6}{Sc} g \alpha_c \Delta c Re^{-1/2} \left(\frac{d}{L} \right)^{-1/2}. \quad (4.33)$$

Damit weicht auch die Form des chemisch verursachten Auftriebs von der intuitiven Form (Gleichung (4.22)) ab.

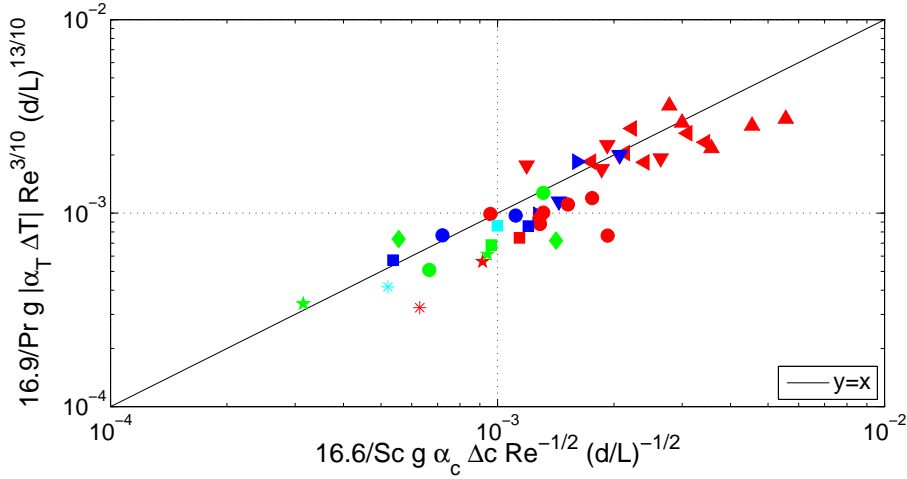


ABB. 4.16: Das Kräftegleichgewicht mit den Termen aus Gleichung (4.33) und (4.31), die sich aus dem Ergebnis für die Sherwood- und Nusselt-Zahl ergeben.

Abbildung 4.16 zeigt den Plot der Daten für den thermischen gegen den chemischen Auftrieb, die aus den Ergebnissen für die Nusselt- und Sherwood-Zahl gewonnen wurden. Eine deutlich bessere Übereinstimmung als in Abbildung 4.15 ist erkennbar. Auch die absoluten Werte werden gut getroffen, so dass beide Auftriebsterme die gleiche Größenordnung haben.

Bildet man die Reynolds-Zahl nicht wie bisher mit der Zellhöhe L sondern mit der Fingerdicke d , also $Re_d = \frac{u d}{\nu}$, dann kann man Gleichung (4.31) und (4.33) auch schreiben als

$$F_{T,Fit} \sim Re_d^{3/10} \left(\frac{d}{L} \right), \quad (4.34)$$

$$F_{c,Fit} \sim Re_d^{-1/2}. \quad (4.35)$$

Schreibt man die Kräfte so, dann hängt der chemische Auftrieb nicht mehr explizit von der Fingerdicke ab, sondern nur noch von der Finger-Reynolds-Zahl Re_d . Der thermische Abtrieb hingegen variiert sowohl mit der Finger-Reynolds-Zahl als auch immer noch direkt mit der Fingerdicke.

Diese Schreibweise zeigt deutlich, dass die Temperaturdifferenz zwischen den Fingern δT umso größer ist, je dicker die Finger sind. Und das ist ja gerade für kleine Temperaturgradienten $\frac{\Delta T}{L}$ bzw. für instabile Systeme der Fall.

Für den chemischen Auftrieb hat die Fingerdicke direkt keinen Einfluss, weil die Ionen-diffusion so langsam ist, dass die Konzentrationsdifferenz zwischen den Fingern in jedem Fall $\delta c \approx \Delta c$ ist.

5 Skalierungsgesetze

Dieses Kapitel beschreibt und interpretiert die weiteren Messergebnisse. Es werden die gefundenen Zusammenhänge in Form von Potenzgesetzen präsentiert, erklärt und mit anderen Arbeiten verglichen.

Bei den Messungen konnte mit dem Schattenverfahren die Wachstumsgeschwindigkeit der Finger ermittelt werden, mit PIV die Strömungsgeschwindigkeit und die Fingerdicke. Außerdem wurde der Massentransport in Form der Sherwood-Zahl gemessen.

Die Abhängigkeiten von äußeren Verhältnissen schließen dieses Ergebniskapitel ab.

5.1 Bestimmung der Abhängigkeiten

Sämtliche Größen haben die Eigenschaft, von zwei unabhängigen Größen abzuhängen, nämlich von der thermischen und von der chemischen Rayleigh-Zahl Ra_T und Ra_c . Desweiteren ist eine Abhängigkeit von Prandtl- und Schmidt-Zahl möglich. Eine solche kann aber hier nicht untersucht werden, da diese beiden Größen nur um etwa 30% variieren. Pr und Sc sind vom Fluid abhängig, welches hier immer gleich bleibt. Die Varianz um einige Prozent kommt im wesentlichen daher, dass die mittlere Temperatur nicht immer die gleiche war. Schwankt T_0 nur um wenige Grad, dann verändern sich Pr und Sc auch nur sehr wenig. Die Schwankung von 30% rührt daher, dass einige Messungen bei einer mittleren Temperatur von nur 15 °C durchgeführt wurden, um die Farbwirkung der Flüssigkristalle zu nutzen. Das Senken der Temperatur um mehr als 5 °C bewirkt dann auch eine Vergrößerung von Pr und Sc um einige zehn Prozent.

Am Anfang dieses Kapitels jetzt also ein kurzer Abschnitt zu der Bestimmung der Rayleigh-Zahl-Abhängigkeiten der Datenpunkte. Ein einfaches Auftragen der Daten und Ablesen der Abhängigkeiten von den einzelnen Rayleigh-Zahlen ist aufgrund der Dreidimensionalität der Daten nicht direkt möglich. Es wird ein Potenzgesetz angenommen mit der Form

$$Z = A \cdot |Ra_T|^p \cdot Ra_c^q, \quad (5.1)$$

wobei Z die experimentell ermittelte Größe ist, deren Abhängigkeit bestimmt werden soll, also z. B. die dimensionslose Fingerdicke $\frac{d}{L}$ oder die Reynolds-Zahl Re . A ist der Achsenabschnitt (wobei $A = A(Pr, Sc)$) und p und q die gesuchten Potenzen.

Aus experimentellen Gründen ist es nicht möglich, eine Rayleigh-Zahl festzuhalten und die andere genügend zu variieren, um eine gesicherte Abhängigkeit herauszufinden. In einer Zelle, d. h. für ein festes L kann die thermische Rayleigh-Zahl über ΔT nur maximal um eine Größenordnung variiert werden, die chemische mit Δc sogar nur um den Faktor 5. Zudem kann man im Voraus die Konzentration nur annähernd einstellen, der exakte Wert muss während der Messung bestimmt werden. Aus diesen Gründen müssen die Daten also gleichzeitig und dreidimensional (d. h. in Abhängigkeit von zwei Variablen Ra_c und Ra_T) gefittet werden. Zur Übersicht über den Phasenraum, den die Rayleigh-Zahlen hier abdecken, siehe Abbildung 5.1.

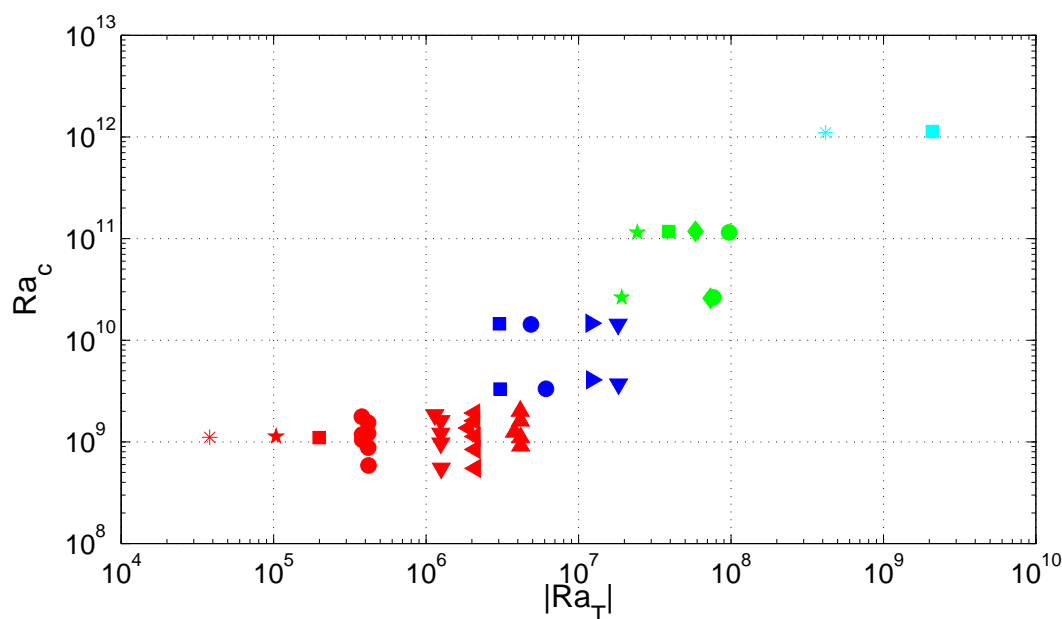


ABB. 5.1: Aufgetragen ist der Phasenraum, den die Rayleigh-Zahlen aller durchgeführten Experimente aufspannen.

Zum Fitten der Daten wurde die MATLAB-Funktion `FMINSEARCH` benutzt und so eingebunden, dass das Ergebnis ein Potenzgesetz ergibt, welches die zu bestimmende Größe Z in Abhängigkeit der beiden Rayleigh-Zahlen beschreibt. Es stellte sich heraus, dass die Wahl des dreidimensionalen Startvektors (A, p, q) das Ergebnis kaum beeinflusst, wenn man nur genügend viele Iterationen zulässt (hier 10^4). Allerdings basiert das Prinzip von `FMINSEARCH` auf der Minimierung einer Funktion, hier also des Fehlers des Fits. Dieser

Fehler muss definiert werden und je nach Definition, unterscheiden sich auch die Ergebnisse. Es wurden zwei verschiedene Fehlerdefinitionen benutzt, deren Ergebnisse zwar unterschiedliche Abhängigkeiten liefern, die allerdings innerhalb des Fehlerintervalls von Z liegen.

Eine der beiden Fehlerdefinitionen berechnet das gewöhnliche Fehlerquadrat, welches dann mit FMINSEARCH minimiert wird. Dazu wird eine lineare Regression an den Logarithmen gemacht, also

$$\log(Z) = \log(A) + p \cdot \log(|Ra_T|) + q \cdot \log(Ra_c) \quad (5.2)$$

$$\equiv a + p \cdot ra_T + q \cdot ra_c. \quad (5.3)$$

Für diese lineare Gleichung kann man den Fehler E des Fits definieren als

$$E = \sum (g - \log(Z))^2, \quad (5.4)$$

wenn $g = a + p \cdot ra_T + q \cdot ra_c$ der Fit mit den Parametern a, p, q ist.

Bei der zweiten Variante, den zu minimierenden Fehler zu bestimmen, müssen die Größen nicht logarithmiert werden. Der Fehler ist diesmal die relative Abweichung des Fits von den tatsächlichen Messwerten Z , allerdings gewichtet:

$$E = \sum \left(\frac{g - Z}{Z N} \right)^2, \quad (5.5)$$

wobei N die Anzahl der Messpunkte pro Dekade der Rayleigh-Zahl ist, die den größeren Einfluss auf Z hat, also Ra_T , wenn $|p| > |q|$ bzw. Ra_c wenn $|q| > |p|$. Dadurch wird gewährleistet, dass auch die beiden Messwerte der 20 cm-Zelle berücksichtigt werden, obwohl deutlich mehr Messpunkte bei kleineren Rayleigh-Zahlen zu finden sind. Außerdem wird hier der relative Fehler benutzt, weil sich der Messwertebereich über mehrere Dekaden erstreckt.

Die Fehler bei der Bestimmung der zu messenden Größen wird jeweils im entsprechenden Abschnitt selber besprochen. Allerdings ist ja schon die Berechnung der Rayleigh-Zahlen fehlerbehaftet. Das liegt zum einen an der Unsicherheit bei der Bestimmung der Materialeigenschaften wie z. B. der Dichte oder auch der Diffusivitäten. Dieser Fehler wird mit 5% abgeschätzt, geht aber natürlich auch in die Unsicherheit bei der Bestimmung der Messgrößen mit ein.

Weiter wird der Temperatur- und Konzentrationsunterschied zwischen den Platten benötigt, um die Rayleigh-Zahlen zu bestimmen. Die Temperaturdifferenz wird an den Thermostaten eingestellt. Das Reservoir-Wasser hat dann auch ziemlich genau die eingestellte Temperatur, allerdings weicht die Temperatur, die dann tatsächlich an den Platten

anliegt, sicherlich davon ab.

Das wird hauptsächlich am Wärmeverlust(Wärmezufuhr) auf dem Weg zu den Platten bzw. an der Abstrahlung der Platten selber liegen. Die Temperatur in den Platten wurde nicht kontrolliert. Es wird deshalb die Rayleigh-Zahl mit der an den Thermostaten eingestellten Temperaturdifferenz berechnet. Die tatsächliche wird geringer sein.

Somit sind vermutlich alle thermischen Rayleigh-Zahlen etwas zu groß berechnet. Es ist aber nicht bekannt, inwieweit es sich um einen Offset handelt oder ob die Diskrepanz proportional zur Temperaturdifferenz ist.

Aus dieser Unsicherheit heraus wird der Fehler der thermischen Rayleigh-Zahl Ra_T hier mit 10 % angenommen.

Für die chemische Rayleigh-Zahl muss die Konzentrationsdifferenz zwischen Anode und Kathode bekannt sein. Nach Abschnitt 2.3.2 und C.2 ist $\Delta c = 2 c_0$. Die mittlere Konzentration wird bis auf 0.001 M genau bestimmt; allerdings ist $c_{Kathode} = 0$ nur dann genau gegeben, wenn auch die richtige Spannung gewählt wurde. Ist die Spannung zu groß, wird das sofort am aufsteigenden Wasserstoff bemerkt. Ist sie hingegen zu klein gewählt worden, bleibt das unbemerkt. In diesem Fall ist $\Delta c < 2 c_0$ und auch die Stromdichte wird geringer ausfallen.

Daher wird auch für die chemische Rayleigh-Zahl Ra_c ein Fehler von 10 % angenommen, der aber sicherlich recht konservativ geschätzt ist.

5.2 Der Transport von Masse und Temperatur

Ein zentraler Punkt in der Untersuchung von Konvektionsströmungen ist der vertikale Transport. Durch die Bewegung des Fluids wird dieser Transport deutlich erhöht und erreicht ein Vielfaches dessen, was allein durch Diffusion transportiert wird.

Bei einfach getriebener Konvektion ist das sofort einleuchtend, denn durch die instabile Schichtung kann potentielle Energie freigesetzt werden. Die entstehende Strömung bewegt das Fluid und erhöht den Transport: Im Fall von thermisch getriebener Rayleigh-Bénard-Konvektion wird Wärme bewegt, im Fall von chemisch getriebener Konvektion wird Masse – im elektrochemischen Kupfersulfatsystem sind das Kupferionen – transportiert.

Wie sieht das aber im Fall von doppelt diffusiver Konvektion aus, wenn die eine Komponente stabilisiert? Im Fingerregime, wenn die langsamer diffundierende Komponente destabilisierend wirkt, dann kann man leicht verstehen, dass durch die einsetzende Strömung Masse von oben nach unten getragen wird, analog zur oben erwähnten einfach

getriebenen Konvektion. Aber es wird sich herausstellen, dass auch der gesamte Wärmetransport größer ist als der, der allein durch Diffusion stattfinden würde. Das ist bemerkenswert, denn für die Wärme – im Gegensatz zur Konzentration – gilt, dass sie gegen die Schwerkraft transportiert wird. Die Diffusion bewegt zwar Wärme von der oberen, warmen Platte nach unten, aber das Fluid in den Fingern folgt der treibenden Massendifferenz, so dass die Konvektion das kalte Fluid aufsteigen und das warme absinken lässt. Inwieweit sich die beiden Größen beeinflussen, bzw. wie sich der stabilisierende Temperaturgradient auf den Massentransport auswirkt, wird im Folgenden untersucht.

5.2.1 Die Sherwood-Zahl

Ein Maß für den Massentransport ist die Sherwood-Zahl Sh . Sie gibt die gesamt transportierte Masse im Verhältnis zur diffundierten Masse an und ist definiert als:

$$Sh = \frac{j L}{z F \kappa_c \Delta c}, \quad (5.6)$$

wobei j die Stromdichte, $z = 2$ die Wertigkeit der Kupferionen und F die Faraday-Konstante ist. Somit ist die Sherwood-Zahl direkt proportional zu dem Strom, der durch die Zelle fließt. Das ist einleuchtend, weil ja jedes Kupferion, was nach unten zur Kathode transportiert wird, sich dort anlagert und somit einen Strom ($2 e^-$) initiiert.

Weiter ist der rein advektierte Massenanteil von Interesse. Sein Verhältnis zum diffundierten Teil ist nach der Definition der Sherwood-Zahl von oben gerade $(Sh - 1)$. Das sieht man leicht, denn für reine Diffusion ist $Sh = 1$; sobald der Massentransport aber durch Konvektion erhöht wird, wird auch $Sh > 1$.

Wie kann man die Sherwood-Zahl in Abhängigkeit der anderen Größen (Geschwindigkeit und Konzentration) beschreiben? Eine alternative Definition für den advektiven Anteil pro Volumen V ist

$$Sh - 1 = \frac{1}{\kappa_c \frac{\Delta c}{L}} \frac{1}{V} \int u_z c dV = \frac{\langle u_z c \rangle}{\kappa_c \frac{\Delta c}{L}} \quad (5.7)$$

$$\implies Sh \approx \frac{\langle u_z \rangle \bar{c} L}{\kappa_c \Delta c} \quad \text{für } Sh \gg 1. \quad (5.8)$$

In Abschnitt 4.3 wurde die gemittelte Konzentration \bar{c} für verschiedene Querschnitte gefunden. Setzt man z. B. die Beziehung (4.4) für lamellenartigen Querschnitt in Gleichung

(5.8) ein und weiter $\langle u_z \rangle \sim u_{rms}$, erhält man

$$\begin{aligned}
 Sh &\sim \frac{u_{rms} L}{2 \kappa_c} \left(\frac{\lambda}{d} \right) \\
 &\sim \frac{1}{2} \frac{u_{rms} L}{\nu} \frac{\nu}{\kappa_c} \frac{L}{d} \frac{\lambda}{L} \\
 &\sim \frac{1}{2} Re Sc \left(\frac{d}{L} \right)^{-1} \frac{1}{2} Sh^{-1} \\
 \implies Sh &\sim \frac{1}{2} Re^{1/2} Sc^{1/2} \left(\frac{d}{L} \right)^{-1/2}. \tag{5.9}
 \end{aligned}$$

Hierbei wurde die chemische Grenzschichtdicke λ durch Sh ausgedrückt (Gleichung (4.5)); Re ist die Reynolds-Zahl und wird in Abschnitt 5.4 erklärt und definiert. Mit

$$\int_a^b dx u_z = \lambda u_{rms} \tag{5.10}$$

stünde in Gleichung (5.9) sogar ein Gleichheitszeichen statt der Proportionalität. Hierbei begrenzen a und b den Fingerkern, in dem die Konzentration absinkt (der Rest des Fingerpaares transportiert effektiv keine Ionen). Für ein sinusförmiges Geschwindigkeitsprofil – was hier angenommen wird, vgl. auch Abbildung 4.2 – ist das eine gute Näherung. Im Gegensatz zu Gleichung (5.9) erhielte man für Finger quadratischen Querschnitts entsprechend:

$$Sh \sim \frac{1}{2} Re^{1/3} Sc^{1/3} \left(\frac{d}{L} \right)^{-2/3}. \tag{5.11}$$

Eine Auftragung von Sh gegen $\frac{1}{2} Re^{1/2} Sc^{1/2} \left(\frac{d}{L} \right)^{-1/2}$ bzw. $\frac{1}{2} Re^{1/3} Sc^{1/3} \left(\frac{d}{L} \right)^{-2/3}$ wie in Abbildung 5.2 sollte über den wirklichen Querschnitt hier im Experiment Aufschluss geben.

Hiernach scheinen die Daten einen lamellenförmigen Fingerquerschnitt zu bestätigen. Zum einen streuen sie weniger, zum anderen ist auch ihr absoluter Wert näher an der Geraden mit Steigung Eins. Diese Gerade müsste mit der Näherung (5.10) laut Gleichung (5.9) bzw. (5.11) getroffen werden. Eine kleine Abweichung ist damit zu erklären, dass Gleichung (5.10) nur eine Näherung ist. Der tatsächliche Wert ist wohl größer und liegt irgendwo zwischen λu_{rms} und $\lambda u_{z,max}$. Andererseits könnte eine systematische Falschbestimmung von Sh die Daten noch verschieben. Wäre z. B. die Konzentrationsdifferenz für jede Messung kleiner als der angenommene Wert von $2c_0$, dann verschöben sich die Messwerte in Abbildung 5.2 nach oben. Es würden die Daten der lamellenartigen Finger besser, die mit quadratischem Querschnitt errechneten Daten noch schlechter passen. Ob

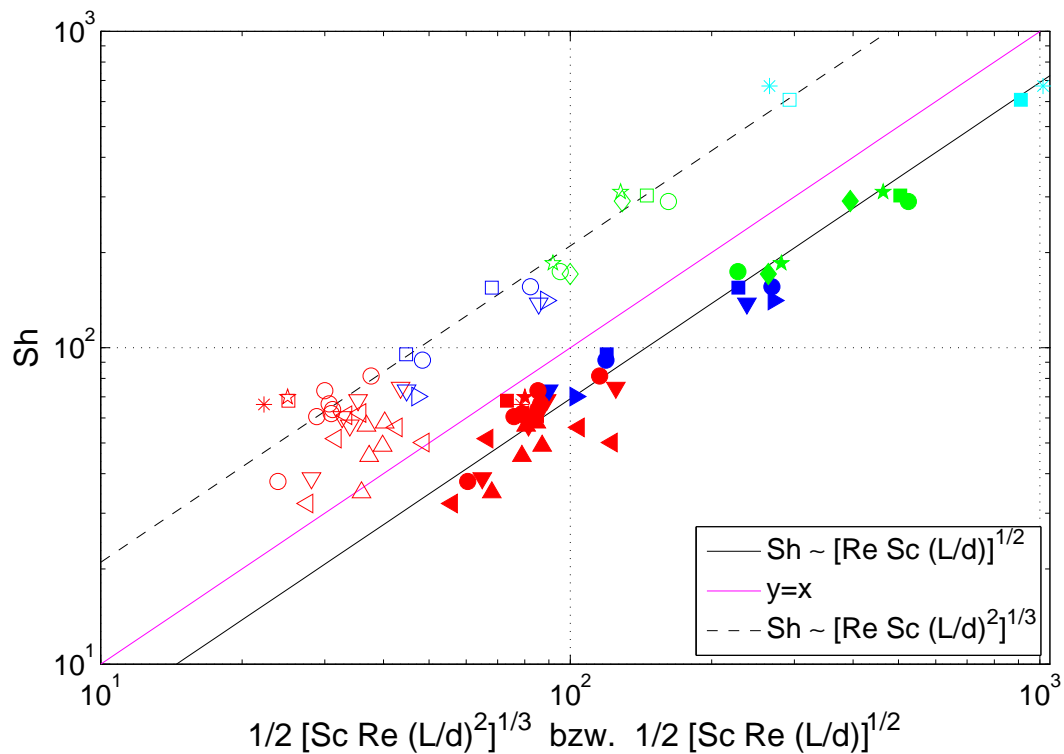


ABB. 5.2: Aufgetragen ist Sh in Abhängigkeit von Re , Sc und d/L . Die vollen Symbole sind nach Gleichung (5.9) für lamellenartigen, die offenen Symbole nach Gleichung (5.11) für quadratischen Fingerquerschnitt berechnet.

allerdings tatsächlich die Spannung zu niedrig gewählt wurde, so dass die Konzentration an der Kathode zwar niedriger, nicht aber ganz Null war, ist nicht mehr festzustellen. Weitere Diskussion über die Bestimmung und den Fehler der Sherwood-Zahl folgen jetzt.

Wie wird die Sherwood-Zahl hier im Experiment bestimmt? Wie anfangs dieses Kapitels schon erwähnt, gibt der Strom ein Maß für die gesamt transportierten Ionen an und ist somit proportional zur Sherwood-Zahl. Bei der Bestimmung von Sh ist zu beachten, dass nur die durch Diffusion und Konvektion transportierten Ionen gezählt werden, nicht die durch Migration von oben nach unten bewegten. Dieser Effekt wird durch die eingesetzte Schwefelsäure stark verringert und [Gerstung, 2010] konnte numerisch zeigen, dass er quasi zu vernachlässigen ist (siehe dazu auch Abschnitt 2.3.3). Wie groß der Anteil am Gesamtstrom aber dennoch ist, sagt die sogenannte Transport-Zahl t aus. Bei der Berechnung von Sh wird sie berücksichtigt, obwohl sie eine Größenordnung von nur 10^{-3} hat, d. h. nur ein Promille der Ionen wird durch das elektrische Feld bewegt.

Damit berechnet sich die Sherwood-Zahl aus dem Experiment durch

$$Sh = \frac{j(1-t)L}{zF\kappa_c\Delta c}. \quad (5.12)$$

Der Strom kann sehr genau gemessen werden und im stationären Fingerregime schwankt er auch nur um etwa 1%. Proben der mittleren Konzentration c_0 werden vor und nach der Messung entnommen und anschließend bis auf 0.001 mol/l bestimmt, was einen Fehler für Δc von maximal 5% bedeutet. Somit ist die Sherwood-Zahl wohl diejenige Messgröße hier im Experiment mit dem kleinsten Fehler. Für größer werdende Auftriebsverhältnisse, d. h. für stabilere Schichtungen, dauert es länger, bis sich das System im stationären Zustand befindet. Für diese Messungen nähert sich der Grenzstrom dann auch nur sehr langsam seinem endgültigen Wert (von unten her) an. So könnte es passieren, dass der Strom zu früh und damit etwas zu klein abgelesen wurde. Oder, wie oben angesprochen, könnte die Spannung falsch gewählt worden sein, so dass sich eine Konzentrationsdifferenz von $\Delta c < 2c_0$ eingestellt hätte.

Trotz dieser potentiellen Fehlermöglichkeiten scheint ein Fehler von 5% gerechtfertigt.

Wie sehen jetzt also die Daten für die Sherwood-Zahl aus? Abbildung 5.3 zeigt den experimentell bestimmten Massentransport in Abhängigkeit von den beiden Rayleigh-Zahlen. Man erkennt einen nur kleinen, aber – wie später noch gezeigt – wesentlichen Einfluss des Temperaturgradienten und eine Abhängigkeit von der destabilisierenden Rayleigh-Zahl von etwa $Sh \sim Ra_c^{1/3}$. Aus der Rayleigh-Bénard-Konvektion kennt man diesen Zusammenhang, der bedeutet, dass der Transport nicht mehr von der Zellhöhe abhängt, sondern lediglich von den Grenzschichten beeinflusst wird (siehe z. B. [Malkus, 1954]). Erst wenn der Transport vom turbulenten Inneren beeinflusst wird und der Einfluss der Grenzschichten verschwindet wird als obere Grenze $Sh \sim Ra_c^{1/2}$ erreicht (siehe auch [Puthenveetil and Arakeri, 2005]). Auch für doppelt-diffusive Konvektion finden [Balmforth et al., 2006] eine obere Grenze von $Sh \sim Ra_c^{1/2}$, die durch den stabilisierenden Einfluss von Ra_T nicht verringert wird.

Auch das in der Einleitung erwähnte $^{4/3}$ -Gesetz von Turner entspricht einer Abhängigkeit von $Ra_c^{1/3}$:

$$j \sim \Delta c^{4/3} \cdot f \quad \Rightarrow \quad \frac{j}{\Delta c} \sim \Delta c^{1/3} \cdot f \quad \Rightarrow \quad Sh \sim Ra_c^{1/3} \cdot f, \quad (5.13)$$

mit $f = f(Pr, Sc, \Lambda)$ einer unbestimmten Funktion. Für feste Pr , Sc und Λ ist der Massenfluss j also proportional zu $\Delta c^{4/3}$.

Diese Abhängigkeit wird seither experimentell (z. B. [Schmitt, 1979a]) und numerisch

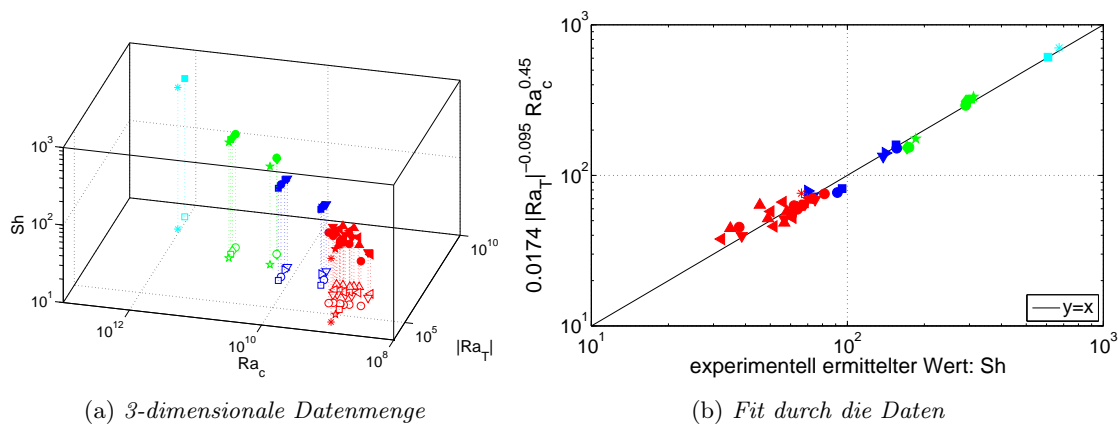


ABB. 5.3: Aufgetragen ist in (a) die gesamte Datenmenge, in (b) der, mit den Potenzen des 3-dimensionalen Fits berechnete Wert Sh gegen die experimentell gemessene Sherwood-Zahl.

(u. a. bei [Özgökmen et al., 1998]) größtenteils bestätigt, aber es scheint, als würde dieses Gesetz den Salzfluss im Ozean zu groß vorhersagen ([Saiki et al., 1998]).

Man kann aber auch selber mit einer Dimensionsanalyse die Abhängigkeiten abschätzen. Wie könnten Temperatur und Konzentration den dimensionsbehafteten Massentransport (in Form der Stromdichte j) beeinflussen? Die Temperatur diffundiert recht schnell, so dass der horizontale Unterschied sehr klein ist und ein Fluidpartikel nur den vertikalen Temperaturgradienten $\frac{\Delta T}{L}$ und nicht die gesamte Temperaturdifferenz ΔT sieht. Zur Konzentration: durch die kleine Diffusivität ist die horizontale Konzentrationsdifferenz von einem zum benachbarten Finger etwa so groß wie die über die gesamte Zellhöhe. Der vertikale Gradient ist aber (außerhalb der Grenzschicht) vernachlässigbar klein. Somit ist eine Abhängigkeit von Δc gegeben. Hat die Zellhöhe L keinen direkten Einfluss, dann ergibt sich damit:

$$j \sim \left(\frac{\Delta T}{L}\right)^{\gamma_1} (\Delta c)^{\gamma_2} \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \frac{jL}{\Delta c} &\sim L \Delta c^{-1} \left(\frac{\Delta T}{L}\right)^{\gamma_1} (\Delta c)^{\gamma_2} \\ \Rightarrow \quad Sh &\sim L |Ra_T|^{\gamma_1} L^{-4\gamma_1} Ra_c^{\gamma_2-1} L^{-3(\gamma_2-1)} \\ \Rightarrow \quad 0 &= 1 - 4\gamma_1 - 3(\gamma_2 - 1). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Somit hängen die Potenzen der beiden Rayleigh-Zahlen über die Beziehung (5.15) fest zusammen. Die Proportionalität von $Sh \sim Ra_c^{1/3}$ gäbe dann tatsächlich ein $\gamma_1 = 0$ und damit hätte die Temperatur keinen Einfluss auf den Transport. Fittet man die hier

gemessenen Werte für Sh gegen Ra_c und $|Ra_T|$ ergibt sich (mit dem Fehler aus (5.4))

$$Sh = 0.0174 |Ra_T|^{-0.0955} Ra_c^{0.451}. \quad (5.16)$$

Zuerst fällt auf, dass die Abhängigkeit von Ra_c deutlich über dem Wert von $\frac{1}{3}$ liegt und weiter eine Abhängigkeit von der stabilisierenden Rayleigh-Zahl gegeben ist. Überprüft man die Beziehung der beiden Potenzen mit Gleichung (5.15), stellt man fest, dass für $(\gamma_2 - 1) = 0.451$ eine betragsmäßig kleinere Potenz folgen sollte, nämlich $\gamma_1 = -0.0883$ statt der gefundenen $\gamma_1 = -0.0955$, was aber in einem Fehlerintervall von 10% liegt. Auch mit einem Fit, der den Fehler nach Gleichung (5.5) berechnet, kommen Potenzen heraus ($(\gamma_2 - 1) = 0.462$, $\gamma_1 = -0.103$), die der Beziehung (5.15) nicht genügen.

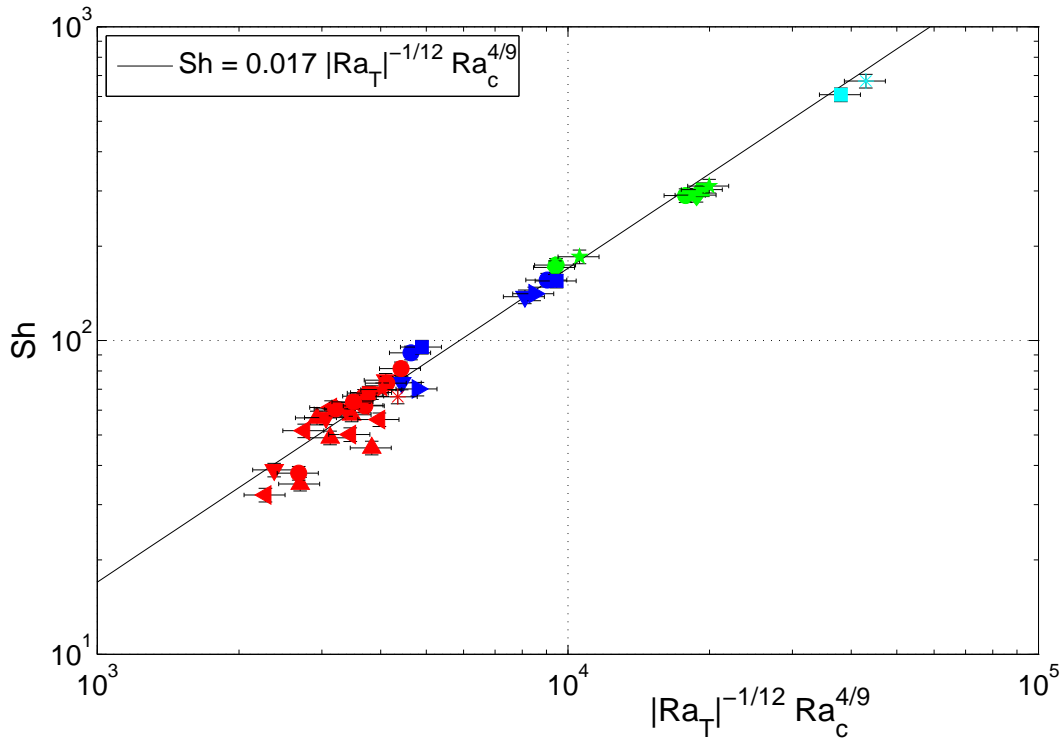


ABB. 5.4: Aufgetragen ist die Sherwood-Zahl Sh in Abhängigkeit von $|Ra_T|^{-1/12}$ und $Ra_c^{4/9}$. Die Fehlerbalken haben für Sh eine Länge von 5% und für die Rayleigh-Zahlen von 10%.

Ein Runden der gefitteten Potenzen, welche der Dimensionsüberlegung entsprechen, gäbe z. B. $\gamma_2 = \frac{4}{9}$ und $\gamma_1 = -\frac{1}{12}$. Ein Auftragen der Daten gegen $|Ra_T|^{-1/12} Ra_c^{4/9}$ ist in Abbildung 5.4 zu sehen. Die Daten passen gut und geben einen Vorfaktor von 0.017,

also:

$$Sh = 0.017 |Ra_T|^{-1/12} Ra_c^{4/9}. \quad (5.17)$$

Aber auch im klassischen $4/3$ -Gesetz (5.13) gibt es eine unbestimmte Funktion $f = f(Pr, Sc, \Lambda)$, die mit Λ eine potentielle Temperaturabhängigkeit hat. Gleichung (5.17) kann man mithilfe von Gleichung (2.18) nämlich auch schreiben als

$$Sh \sim |Ra_T|^{-1/12} Ra_c^{4/9} \sim Ra_c^{1/3} |\Lambda|^{-1/9} |Ra_T|^{1/36}, \quad (5.18)$$

und eine Abhängigkeit von $|Ra_T|^{1/36}$ ist experimentell mit diesem Aufbau nicht feststellbar. Somit passen auch die Daten hier in das Flussgesetz (5.13).

Betrachtet man weiter Gleichung (5.17) dann fällt auf, dass der Massentransport im doppelt diffusiven System Sh_{DDC} den der normalen Rayleigh-Bénard-Konvektion (Sh_{RBC}) übertreffen könnte. Für die einfach getriebene Konvektion findet man (siehe auch Abschnitt 5.6.1 bzw. Gleichung (5.48)) $Sh \approx 0.05 Ra_c^{1/3}$. Mit

$$\begin{aligned} Sh_{DDC} &\geq Sh_{RBC} \\ 0.016 |Ra_T|^{-1/12} Ra_c^{4/9} &\geq 0.05 Ra_c^{1/3} \\ \implies |Ra_T| &\leq 10^{-6} Ra_c^{4/3} \end{aligned} \quad (5.19)$$

folgt also, dass für $|Ra_T| < 10^{-5} Ra_c$ dies der Fall wäre. Es gibt vorerst keinen Grund, warum das nicht der Fall sein darf; allerdings könnte der Gültigkeitsbereich von Gleichung (5.17) aber auch beschränkt sein. Dafür spricht, dass nach Gleichung (5.17) $Sh \rightarrow \infty$ wenn $|Ra_T| \rightarrow 0$. Für zu kleine Temperaturgradienten muss es also irgendwo eine Grenze geben, weil der Massentransport ja nicht unendlich groß werden kann. Wo diese liegt, kann aber hier nicht geprüft werden. Im Experiment können so kleine Temperaturdifferenzen nicht mehr fehlerfrei eingestellt werden.

5.2.2 Die Nusselt-Zahl

Entsprechend der Sherwood-Zahl beschreibt die Nusselt-Zahl Nu in dimensionsloser Form die gesamt transportierte Wärme im Verhältnis zur ausschließlich diffundierten Wärmemenge. Die gesamt bewegte Wärmemenge setzt sich dabei wie bei der Sherwood-Zahl aus dem Anteil zusammen, der diffundiert wird und dem, der durch die Konvektionsbewegung advektiert wird. Damit ist das Verhältnis des rein advektierten Teils zum nur diffundierten Teil wieder $Nu - 1$, analog zu $Sh - 1$.

Zu beachten ist, dass die Temperatur hier stabil geschichtet ist, also unten kalt (und damit dichter) und oben warm (weniger dicht – betrachtet man nur die Temperatur). Der diffusive Anteil ist – laut Definition der Fick’schen Diffusion und wegen eines positiven Diffusionskoeffizienten – positiv. Der advective Anteil ist aber, aufgrund der stabilen Schichtung, negativ: Es wird kaltes Fluid von unten nach oben bzw. warmes Fluid von oben nach unten – also gegen die Schwerkraft – transportiert.

Somit kann im Fingerregime die Nusselt-Zahl sowohl negativ, Null oder positiv sein, je nachdem, ob der advective Anteil größer, gleich oder kleiner als der diffundierte ist. Der Übersichtlichkeit halber wird hier deshalb meistens $|Nu - 1|$ betrachtet; $Nu - 1$ statt Nu , um einen möglichen Vorzeichenwechsel zu umgehen und $|Nu - 1|$ statt $Nu - 1$, weil der advective Teil laut Definition immer negativ ist und man somit keine Information verliert aber der Bequemlichkeit halber mit positiven Zahlen umgehen kann.

Wie ist die Nusselt-Zahl jetzt definiert? Analog zur Sherwood-Zahl gibt sie die gesamt transportierte Wärmemenge im Verhältnis zur nur diffundierten Wärmemenge an. Das ist

$$Nu = \frac{Q L}{c_p \rho \kappa_T \Delta T}, \quad (5.20)$$

wobei Q die Wärmemenge pro Fläche und Zeit und c_p die spezifische Wärmekapazität ist. Analog zu Gleichung (5.7) kann man auch das Verhältnis von advektierter zu diffundierter Wärme definieren als

$$Nu - 1 = \frac{1}{\kappa_T \frac{\Delta T}{L}} \frac{1}{V} \int u_z T dV = \frac{\langle u_z T \rangle}{\kappa_T \frac{\Delta T}{L}} \quad (5.21)$$

$$\implies Nu - 1 = \frac{u_z \delta T L}{\kappa_T \Delta T}, \quad (5.22)$$

wobei δT der Temperaturunterschied bei zwischen auf- und absteigendem Finger auf gleicher Höhe ist (siehe dazu Abbildung 4.9b).

Eine Dimensionsanalyse für die Nusselt-Zahl kann, wie oben für die Sherwood-Zahl, die Abhängigkeiten von den beiden Rayleigh-Zahlen in ein festes Verhältnis setzen. Nach den gleichen Überlegungen, die zu (5.14) führten, überlegt man sich für die Nusselt-Zahl:

$$Q \sim \left(\frac{\Delta T}{L} \right)^{\gamma_3} (\Delta c)^{\gamma_4} \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned} \implies \frac{Q L}{\Delta T} &\sim \left(\frac{\Delta T}{L} \right)^{\gamma_3 - 1} (\Delta c)^{\gamma_4} \\ \implies Nu &\sim |Ra_T|^{\gamma_3 - 1} L^{-4(\gamma_3 - 1)} Ra_c^{\gamma_4} L^{-3\gamma_4} \\ \implies 0 &= -4(\gamma_3 - 1) - 3\gamma_4. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Die Bestimmung der Nusselt-Zahl im Experiment war direkt nicht möglich. In thermischer Rayleigh-Bénard-Konvektion wird für gewöhnlich die thermische Grenzschichtdicke λ_T gemessen, die mit der Nusselt-Zahl in folgender Beziehung steht:

$$Nu = \frac{L}{2\lambda_T}. \quad (5.25)$$

Wie aber in Abschnitt 4.2.1 gesehen, bildet die Temperatur keine ausgeprägte Grenzschicht aus. Eine weitere Möglichkeit könnte Beziehung (5.21) liefern. Allerdings lässt sich hier der Temperaturunterschied δT nicht messen (siehe dazu auch Abschnitt 4.2.1). Auch der Energieaufwand zur Aufrechterhaltung der konstanten Plattentemperaturen wäre ein Maß für die Nusselt-Zahl, kann aber mit dem hier verwendeten Aufbau nicht gemessen werden.

So bleibt nur die Möglichkeit, die Nusselt-Zahl, bzw. $|Nu - 1|$ über die Energiedissipationsgleichung (4.15) zu bestimmen. Aus Abschnitt 4.5 ist nämlich

$$\begin{aligned} Nu - 1 &= \frac{Pr^2}{Ra_T} \left(\frac{Ra_c}{Sc^2} (Sh - 1) - \epsilon \frac{L^4}{\nu^2} \right) \\ &= \frac{Pr^2}{Ra_T} \left(\frac{Ra_c}{Sc^2} (Sh - 1) - K \left(\frac{u_z}{d} \right)^2 \frac{L^4}{\nu^2} \right). \end{aligned} \quad (5.26)$$

Wie schon erwähnt (Abschnitt 4.5) wird $K = 1$ gesetzt und außerdem $u_z = u_{rms}$ (siehe Abschnitt 5.4). Damit kann der Wärmetransport aus den experimentell bestimmten Größen berechnet werden.

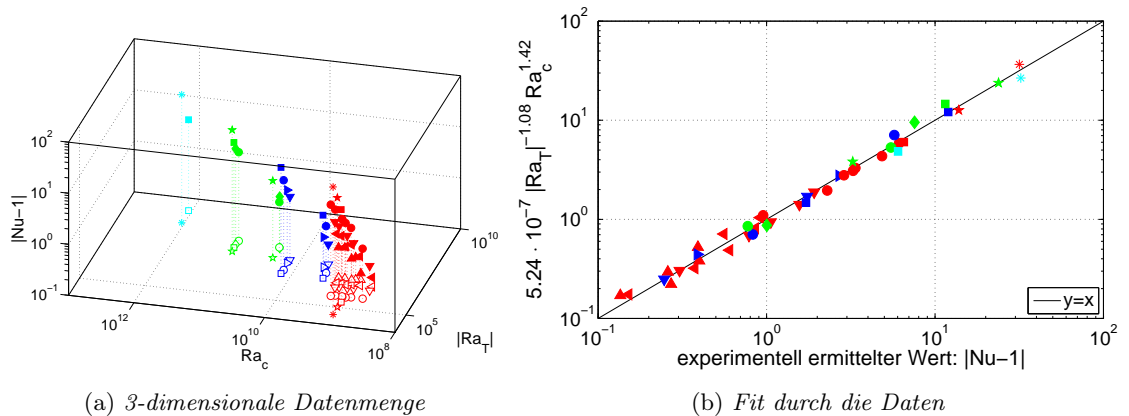


ABB. 5.5: Aufgetragen ist in (a) die gesamte Datenmenge, in (b) der, mit den Potenzen des 3-dimensionalen Fits berechnete Wert $|Nu - 1|$ gegen die experimentelle Nusselt-Zahl, die aus der Energiedissipation folgt.

Die so gewonnenen Daten können genauso in Abhängigkeit der beiden Rayleigh-Zahlen

geplottet werden wie die anderen Größen. Man erhält Abbildung 5.5 und 5.6.

Das Ergebnis des dreidimensionalen Fits, mit Fehler (5.4) ist:

$$Nu = 5.25 \cdot 10^{-7} |Ra_T|^{-1.08} Ra_c^{1.42}. \quad (5.27)$$

Das Fitergebnis bestätigt zuerst einmal den qualitativen Zusammenhang des Wärmetransports von den Rayleigh-Zahlen aus Abschnitt 4.2.1; dort wurde ein Wachsen der Nusselt-Zahl bei sinkender Temperaturdifferenz (Verkleinerung von $|Ra_T|$) bzw. ansteigender Konzentrationsdifferenz (Vergrößerung von Ra_c) festgestellt.

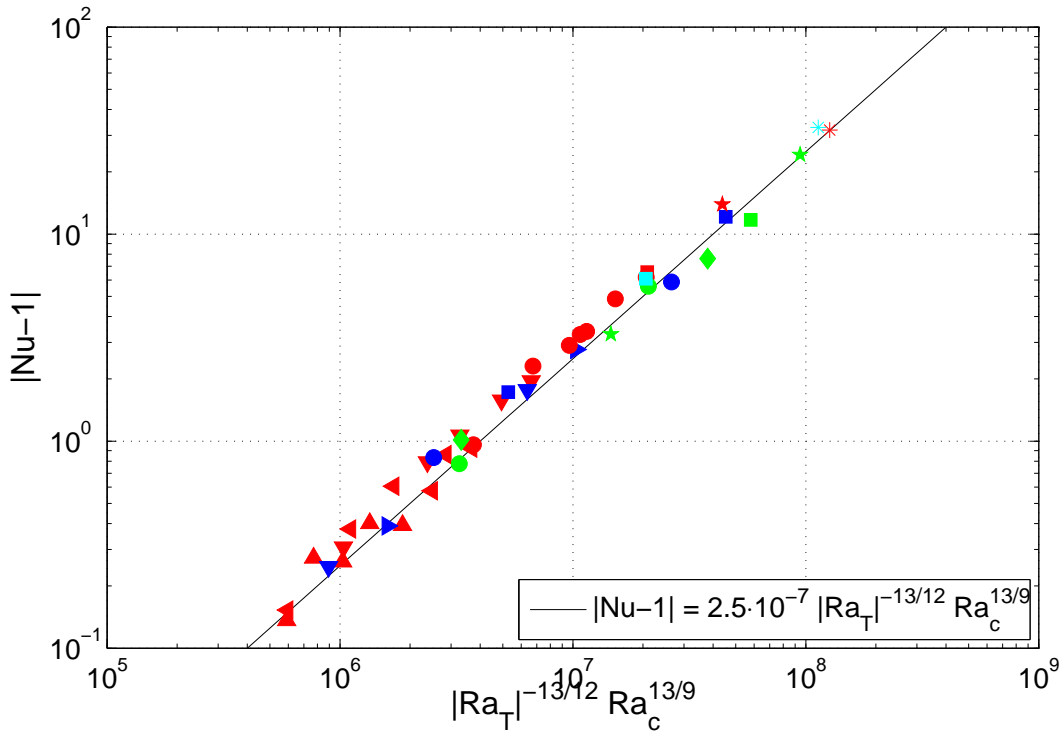


ABB. 5.6: Aufgetragen ist der advektive Anteil der Nusselt-Zahl $|Nu - 1|$ in Abhängigkeit von $|Ra_T|^{-13/12}$ und $Ra_c^{13/9}$.

Ein Vergleich mit der Dimensionsanalyse sollte nach Gleichung (5.24) für $(\gamma_3 - 1) = -1.08$ ein $\gamma_4 = 1.44$ liefern, was mit $\gamma_4 = 1.42$ gut getroffen wird. Allerdings erfüllen auch die gerundeten Werte $(\gamma_3 - 1) = -\frac{13}{12}$ und $\gamma_4 = \frac{13}{9}$ die Beziehung (5.24). Der entsprechende Plot ist in Abbildung 5.6 zu sehen und gibt keine sichtbare Verschlechterung. Es ergibt sich ein Vorfaktor von $2.5 \cdot 10^{-7}$, wenn

$$|Nu - 1| \sim |Ra_T|^{-13/12} Ra_c^{13/9}. \quad (5.28)$$

5.2.3 Das Flussverhältnis

Die meiste Literatur betrachtet nicht den Massen- oder Wärmetransport separat in Form der Sherwood- oder Nusselt-Zahl, sondern deren Verhältnis, das sogenannte Flussverhältnis ("flux ratio") χ (siehe z. B. [Piacsek and Toomre, 1980]). Ist $\langle u_z T \rangle$ der vertikale Wärmefluss und analog $\langle u_z c \rangle$ der vertikale Massenfluss, dann ist das Transportverhältnis definiert als

$$\chi = \frac{|\alpha_T \langle u_z T \rangle|}{\alpha_c \langle u_z c \rangle} \quad (5.29)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\alpha_T |Nu - 1| \kappa_T \frac{\Delta T}{L}}{\alpha_c (Sh - 1) \kappa_c \frac{\Delta c}{L}} \\ &= Le |\Lambda| \frac{|Nu - 1|}{Sh - 1}, \end{aligned} \quad (5.30)$$

mit den Definitionen (5.7) und (5.21) für $(Sh - 1)$ und $(Nu - 1)$.

Denkt man zurück an Gleichung (4.16) aus der Energiedissipation, dann kann man durch Umformen eine Beziehung für $\frac{|Nu-1|}{(Sh-1)}$ finden:

$$\begin{aligned} \frac{|Nu - 1|}{(Sh - 1)} &= \frac{1}{Sh - 1} \frac{Pr^2}{Ra_T} \left(\underbrace{\frac{Ra_c}{Sc^2} (Sh - 1)}_{(i)} - \underbrace{K \left(\frac{u_z}{d} \right)^2 \frac{L^4}{\nu^2}}_{(ii)} \right) \\ &\approx \frac{1}{Sh - 1} \frac{Pr^2}{Ra_T} \frac{Ra_c}{Sc^2} (Sh - 1) \quad \text{wegen } (ii) \ll (i) \\ &= \frac{Pr^2}{Sc^2} \frac{Ra_c}{Ra_T} = \frac{Pr}{Sc} \frac{1}{|\Lambda|}. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Setzt man dieses jetzt in Gleichung (5.30) ein, dann erhält man

$$\chi = Le |\Lambda| \frac{Pr}{Sc} \frac{1}{\Lambda} = 1, \quad (5.32)$$

also einen konstanten Wert für χ . Den finden auch [McDougall and Taylor, 1984], [Turner, 1967] oder [Taylor and Bucens, 1989], aber in all ihren Experimenten ist er bis zu einem Faktor von 3 deutlich kleiner. Allerdings wurden deren Experimente bei Auftriebsverhältnissen von deutlich größer Eins gemessen. Außerdem stellt [Sreenivas et al., 2009] für kleiner werdende Rayleigh-Zahlen (bei konstanten Auftriebsverhältnissen) einen Übergang vom advektiv zum diffusiv dominierten System fest, bei dem auch das Transportverhältnis kleiner wird. Und da es sich hier um instabile Schichtung bzw. große Rayleigh-Zahlen handelt, ist es folgerichtig, dass auch das Flussverhältnis größer ist, bzw. sogar Eins wird.

Allerdings gibt es auch die Beobachtung vieler Autoren, dass sich $\chi \nearrow 1$ wenn $|\Lambda| \searrow 1$

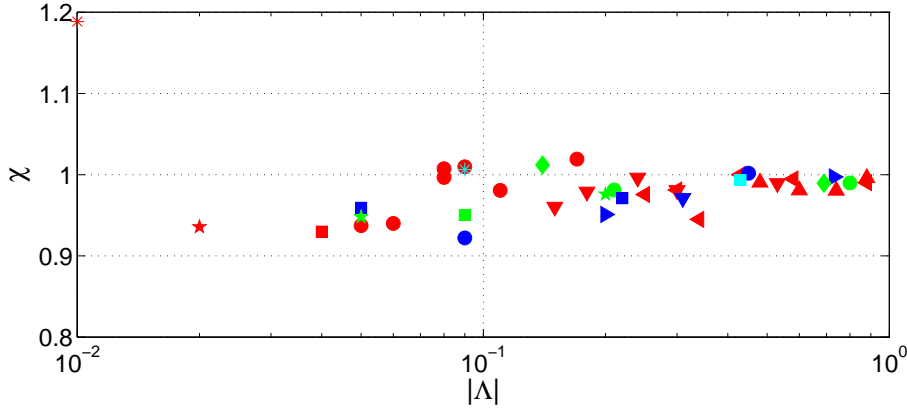


ABB. 5.7: Aufgetragen ist $\chi = Le |\Lambda| \frac{|Nu-1|}{Sh-1}$ in Abhängigkeit von $|\Lambda|$. Die Gleichheit $\chi = 1$ aus Gleichung (5.32) ist für nicht allzukeine Auftriebsverhältnisse gut zu erkennen.

([Kunze, 2003]).

Wie kann man diese verschiedenen Aussagen verstehen? Zuerst ein Bild, um sich das Flussverhältnis anschaulich vorzustellen: Auf dem Weg von oben nach unten wird kaum Salz horizontal aus dem Finger herausdiffundiert. So ist praktisch der Nettofluss an Ionen gleich dem maximal möglichem Fluss. Für die Temperatur sieht das aber anders aus, weil sie viel schneller diffundiert. Aus diesem Grund unterscheidet sich der tatsächlich transportierte Wärmefluss von dem maximal möglichem/dem idealen (der bei Vernachlässigung von Diffusion zu erwarten ist). Daher ist das maximale Flussverhältnis auch gerade Eins; es wird erreicht, wenn der Austausch mit den Nachbarfingern gen Null geht. Es ist:

$$\begin{aligned}
 \chi &= \frac{|\alpha_T \langle u_z T \rangle|_{netto}}{(\alpha_c \langle u_z c \rangle)_{netto}} \\
 &\approx \frac{|\alpha_T \langle u_z T \rangle|_{ideal} - Q_{hor.}}{(\alpha_c \langle u_z c \rangle)_{ideal}} \\
 &= \left(1 - \frac{Q_{hor.}}{(\alpha_c \langle u_z c \rangle)_{ideal}} \right). \tag{5.33}
 \end{aligned}$$

Hierbei ist $Q_{hor.}$ proportional zum seitlichen Wärmefluss. Dieser ist sicherlich unterschiedlich bei vielen Experimenten und nicht nur abhängig vom Auftriebsverhältnis, sondern von beiden Rayleigh-Zahlen unabhängig voneinander ([Sreenivas et al., 2009]).

Mit Gleichung (5.33) versteht man den konstanten Wert von Eins aus Gleichung (5.32), wenn man beachtet, wie er entstand. Und zwar wurde der dissipative Term aus der Energiedissipationsgleichung vernachlässigt. Wenn also wenig Energie aus einem Finger dissipiert wird, dann ist der Fluss maximal. Und das ist genau dann der Fall, wenn die

Geschwindigkeiten und Fingerdicken groß sind ([Schmitt, 1979b]).

Die Daten dieser Experimente bestätigen Gleichung (5.32) gut, was in Abbildung 5.7 zu sehen ist.

5.3 Die Fingerdicke

Durch lineare Stabilitätsanalyse für den Fall einsetzender Fingerinstabilität ergibt sich als Schätzwert für die horizontale Ausdehnung der am schnellsten wachsenden Finger die Abhängigkeit (aus der Veröffentlichung von [Saiki et al., 1998] oder auch schon [Stern, 1960])

$$d_{lin} \approx \pi \left(\frac{g\alpha_T \Delta T}{4\nu\kappa_T L} \right)^{-1/4} \Rightarrow \frac{d_{lin}}{L} \approx 4.4 |Ra_T|^{-1/4}. \quad (5.34)$$

Für eine allgemeine Stabilitätsanalyse doppelt diffusiver Strömungen siehe auch die Veröffentlichung von [Baines and Gill, 1969] und den Artikel von [Linden, 2000].

An Gleichung (5.34) fällt auf, dass die Konzentrationsdifferenz keinen Einfluss auf die Fingerdicke hat. Für sehr stabile Systeme (nahe des Onsets der Fingerinstabilität; im Stabilitätsdiagramm 4.1 kurz oberhalb der grünen Geraden mit Gleichung $Ra_T = -Ra_c + Ra_{crit}$) ist der Einfluss der Konzentration ja auch sehr gering und somit ist zu verstehen, dass die Fingerdicke nicht von Ra_c abhängt – bzw. eine solche Abhängigkeit zu vernachlässigen ist.

Weiter sagt die Potenz von $-\frac{1}{4}$, dass die komplette Zellhöhe L nicht von Bedeutung für die Fingerdicke ist, sondern nur der Temperaturgradient $\frac{\Delta T}{L}$. Das macht man sich am besten wieder in einer Dimensionsanalyse klar:

Wie könnten Temperatur und Konzentration die dimensionsbehaftete Fingerdicke d beeinflussen? Durch die gleichen Argumente wie beim Massentransport sollten hier auch nur der vertikale Temperaturgradient $\frac{\Delta T}{L}$ und die gesamte Konzentrationsdifferenz Δc Einfluss haben. Damit ist

$$d \sim \left(\frac{\Delta T}{L} \right)^{\gamma_5} (\Delta c)^{\gamma_6} \quad (5.35)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \frac{d}{L} &\sim L^{-1} |Ra_T|^{\gamma_5} L^{-4\gamma_5} Ra_c^{\gamma_6} L^{-3\gamma_6} \\ \Rightarrow \quad 0 &= -1 - 4\gamma_5 - 3\gamma_6, \end{aligned} \quad (5.36)$$

wenn man d mit der Zellhöhe L entdimensionalisiert. Diese Bedingung ist z. B. dann erfüllt, wenn $\gamma_5 = -\frac{1}{4}$ und $\gamma_6 = 0$ wie in Gleichung (5.34).

Die experimentell erreichbaren Rayleigh-Zahlen sind allerdings fern der Stabilität. Beide Rayleigh-Zahlen sind groß und im turbulenten Bereich und auch die effektive Rayleigh-Zahl Ra_{eff} (nach z.B. [Turner, 1974]) mit

$$Ra_{eff} \equiv |Ra_c| - |Ra_T| \quad (5.37)$$

ist weit über dem kritischen Wert von 1708. Somit ist es nicht verwunderlich, wenn hier eine andere Abhängigkeit der Fingerdicke von den Rayleigh-Zahlen gefunden wird. Damit die Überlegung zu den Abhängigkeiten (5.35) aber stimmt, müsste auch die neue Abhängigkeit wieder Gleichung (5.36) genügen. Im Folgenden werden die Abhängigkeiten gesucht und Bedingung (5.36) überprüft.

Die Fingerdicke wird auf zwei verschiedene Arten unabhängig voneinander bestimmt. Durch das Aufnehmen mehrerer Zeitreihen mit PIV hat man dann mehrere Ergebnisse für d . Aus diesen wird am Ende ein subjektiver Mittelwert als Ergebnis in die Tabelle eingetragen, d. h. Ausreißer werden nicht berücksichtigt.

Für beide Bestimmungsmethoden wird zuerst über die Vertikalgeschwindigkeit eines jeden PIV-Bildes zeitlich, d. h. über die gesamte Zeitreihe, gemittelt. In der Regel sind die Zeitreihen 60 Bilder lang, was einer Zeit von einigen Sekunden entspricht. Auf all diesen Bildern sind beide Platten der Konvektionszelle zu erkennen, so dass eine Zuordnung in reale Längen möglich ist.

Die erste Art, die Fingerdicke zu bestimmen besteht jetzt einfach darin, die Finger auf diesem gemittelten Bild mit dem Lineal auszumessen.

Für die zweite, etwas objektivere Methode wird jede horizontale Zeile des Bildes fouriertransformiert (Fast-Fourier-Transformation mit MATLAB). Das einseitige Amplitudenspektrum wird über alle Zeilen gemittelt und das Maximum dieser Verteilung gibt dann die Frequenz bzw. Periode der Finger.

Für gewöhnlich sind die Resultate der beiden verschiedenen Methoden fast gleich, so dass eine gute Kontrollmöglichkeit besteht. Der Fehler bei der Ermittlung der Fingerdicke mit den eben beschriebenen Methoden ist abhängig von der Anzahl der auf einem Bild sichtbaren Finger. Somit kann der relative Fehler mit weniger als 10% abgeschätzt werden.

Plottet man die so gewonnenen Fingerdicken dimensionslos als $\frac{d}{L}$, ergibt sich Abbildung

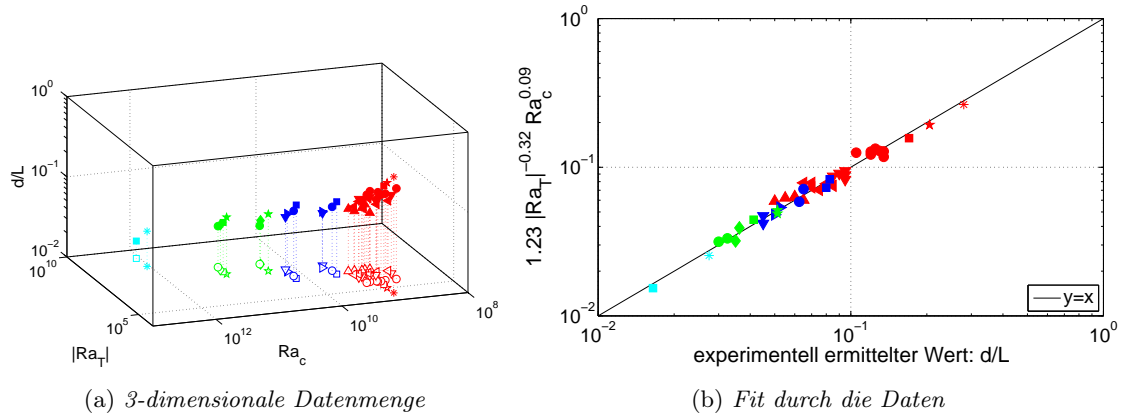


ABB. 5.8: Aufgetragen ist in (a) die gesamte Datenmenge, in (b) der, mit den Potenzen des 3-dimensionalen Fits berechnete Wert $\frac{d}{L}$ gegen die experimentell gemessene, dimensionslose Fingerdicke $\frac{d}{L}$.

5.8. Dabei wurde der Fehler aus Gleichung (5.4) benutzt. Das Fitergebnis ist

$$\frac{d}{L} = 1.23 |Ra_T|^{-0.315} Ra_c^{0.0857}. \quad (5.38)$$

Jetzt ist zu prüfen, ob diese Potenzen auch der Dimensionsanalyse (5.36) genügen. Mit $\gamma_5 = -0.315$ ergäbe sich $\gamma_6 = 0.0867$, was nur wenig von dem Fitergebnis 0.0857 abweicht und sicher innerhalb des angenommenen Fehlers liegt. Allerdings sind auch beide Werte nicht weit von den runderen Werten $\gamma_5 = -\frac{1}{3}$ und $\gamma_6 = \frac{1}{9}$ entfernt, die auch Bedingung (5.36) erfüllen.

Schon [Shirtcliffe and Turner, 1970] können die Unabhängigkeit der Fingerdicke von der Konzentration nicht bestätigen. Sie schlagen außerdem eine Abhängigkeit zwischen $|Ra_T|^{-1/4}$ und $|Ra_T|^{-1/3}$ vor. Und auch die numerischen Ergebnisse und die Skalenanalyse von [Sreenivas et al., 2009] für ein Stufenprofil finden eine Abhängigkeit von $\frac{d}{L} \sim |Ra_T|^{-1/3}$. Plottet man die Ergebnisse des Experiments hier an

$$\frac{d}{L} \sim |Ra_T|^{-1/3} Ra_c^{1/9}, \quad (5.39)$$

findet man eine gute Übereinstimmung, wie Abbildung 5.9 beweist. Mit den angenommenen Fehlern liegen fast alle Datenpunkte auf dem hypothetisch angenommenen Skalierungsgesetz. Der Vorfaktor ergibt sich dann zu 0.95.

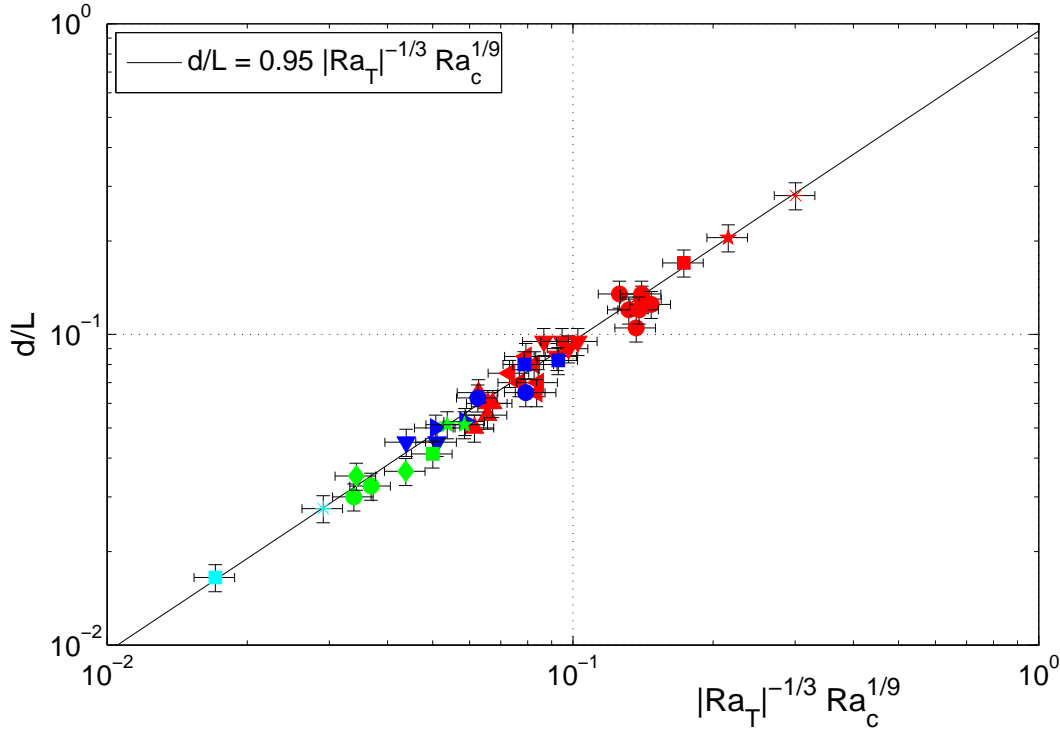


ABB. 5.9: Aufgetragen ist die dimensionlose Fingerdicke $\frac{d}{L}$ in Abhängigkeit von $|Ra_T|^{-1/3}$ und $Ra_c^{1/9}$. Die Fehlerbalken entsprechen dem abgeschätzten Fehler für d und den Rayleigh-Zahlen von 10 Prozent.

5.4 Die Geschwindigkeit

Eine weitere Größe, die hier bestimmt werden kann, ist die Geschwindigkeit. Für jedes PIV-Bild wird eine *rms*-Geschwindigkeit bestimmt, das ist die Wurzel des Mittelwert des Geschwindigkeitsquadrats an jedem Gitterpunkt: $u_{rms} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum u_x^2 + u_z^2}$.

Im Fingerregime mit fast nur vertikaler Geschwindigkeitskomponente ist die *rms*-Geschwindigkeit etwa gleich der vertikalen *rms*-Geschwindigkeit; zur Vereinfachung sei deshalb im Folgenden mit u zwar in der Regel die vertikale Geschwindigkeit gemeint, aber gerechnet wird wegen $u_{z,rms} \approx u_{rms}$ mit der, die Horizontalgeschwindigkeit mitnehmenden *rms*-Geschwindigkeit u_{rms} . Hat man nun für jedes PIV-Einzelbild eine Geschwindigkeit berechnet, dann wird diese für die gesamte Zeitreihe (d. h. 60 bis 300 Bilder) gegen die Zeit aufgetragen. Der Medianwert der *rms*-Geschwindigkeiten ist dann die gemessene Geschwindigkeit, ihre Standardabweichung der Fehler.

Anhand des Plots kann man sich von der Güte der Messung überzeugen. Schwankt die Geschwindigkeit gleichmäßig um einen Mittelwert, dann ist erstens der Zeitpunkt der

Messung richtig gewesen, d. h. das System befand sich schon im stationären Fingerregime.

Zweitens war bei der Bildaufnahme der Zeitabstand zwischen den Doppelbildern passend gewählt worden, so dass die Verschiebung der Tracerpartikel von einem zum anderen Bild auswertbar war.

Drittens wurde zur Korrelation die passende Interrogation Area gewählt. Allerdings hängen Punkt Zwei und Drei zusammen und eine unpassende Wahl des Pulsabstandes kann zum Teil durch die Größe des Abfragegebietes für die Korrelation ausgeglichen werden. In der Regel sieht man schon nach Anwendung der Kreuzkorrelation auf die Daten und spätestens beim Einstellen der Filter, wie gut die Größen gewählt wurden und kann dann gleich an dieser Stelle die Korrelationseigenschaften anpassen. Dabei ist darauf zu achten, dass die Finger eine recht kleinskalige Struktur darstellen und große Gradienten aufweisen, was entsprechend kleine Interrogation Fenster fordert (siehe dazu auch Abschnitt 3.2.2).

Mit etwas Erfahrung trifft man einen geeigneten Pulsabstand aber ganz gut. Um eine Messung aber wegen eines – im Nachhinein festgestellten – ungünstigen Pulsabstandes später nicht wiederholen zu müssen, wurden sowieso mehrere Zeitreihen mit unterschiedlichen Einstellungen pro Messung aufgenommen.

So erhält man für eine Messung, d. h. für ein Rayleigh-Zahlen-Paar (Ra_T , Ra_c), mehrere Geschwindigkeiten: eine aus jeder Zeitreihe. In die Ergebnistabelle wurde dann die Geschwindigkeit (mit ihrer Standardabweichung) aufgenommen, deren Wert etwa dem Mittelwert entsprach und deren Zeitreihe um einen konstanten Wert schwankte.

Der Fehler der Geschwindigkeit ist ziemlich groß. Für ein Drittel der Daten liegt er sogar über 10%. Das kann mehrere Gründe haben.

Hauptsächlich liegt es wohl an der Messmethode. Die kleinskalige Struktur der Finger erfordert eine recht große Partikeldichte und die großen Geschwindigkeitsgradienten sind hinderlich für genaue Korrelationsergebnisse. Weiter wurde, aber erst nach Abschluss aller Messungen, herausgefunden, dass es Probleme beim Triggern der Kamera und des Lasers gab.

Eigentlich sollte die Kamera jedesmal, wenn ein Laserpuls die Zelle ausleuchtet, den CCD-Chip belichten und auslesen. Im Synchronizer können Laserfrequenz, Q-Switch (Wiederholungsrate) und Laserpulsabstand weitgehend unabhängig voneinander eingestellt werden.

Jetzt kann es zu Konflikten mit der Kamera kommen, wenn die Frequenzen nicht mit der Kameraauslesezeit zusammenpassen. Allerdings wird dem Benutzer keine Fehlermeldung

gegeben.

Laut Vertreiber könnte folgendes passieren: Ist die Kamera noch mit Auslesen des CCD-Chips beschäftigt wenn ein erneuter Laserpuls kommt, dann wird der Triggerimpuls an die Kamera ignoriert. Sie nimmt dann dieses Bild erstmal nicht auf. Je nach eingestellten Frequenzen kann es dazu führen, dass entweder einzelne Bilder ausgelassen werden oder dass sich eine neue Frequenz – eine Art Schwebung – einstellt.

So kann es bei diversen Zeitreihen also sein, dass die eingestellten Zeiten nicht eingehalten wurden/werden konnten. Die Zeitabstände der Bilder sind also nicht immer das, was eingestellt war und was dann auch als Zeitskala in die Korrelationsdaten einfließt, um eine Geschwindigkeit zu ermitteln. Bei nicht gleich langen Abständen führt das zu einer großen Standardabweichung des Mittelwerts. Bei zwar gleich langen – aber unbekannt langen – Pulsabständen führt es zu falschen Geschwindigkeiten.

Zur verallgemeinerten Betrachtung muss noch ein dimensionsloses Maß für die Geschwindigkeit gefunden werden. Eine Möglichkeit ist die Reynolds-Zahl Re . Sie ist definiert als das Verhältnis des Impulstransports bei Konvektion zu dem bei Diffusion:

$$Re = \frac{uL}{\nu}. \quad (5.40)$$

Eine Alternative bietet die thermische Péclet-Zahl Pe mit

$$Pe = \frac{uL}{\kappa_T} = Re Pr, \quad (5.41)$$

die zwar genau wie Re mit der Zellhöhe als Längeneinheit gebildet wird, aber anstelle der kinematischen Viskosität ν die Temperaturleitfähigkeit κ_T im Nenner hat. In allen Experimenten hier ist allerdings das Verhältnis beider Diffusivitäten nahezu konstant, so dass $Pe \sim Re$.

Auch für die Geschwindigkeit kann man mit einer Dimensionsanalyse eine Bedingung der Potenzen von thermischer und chemischer Rayleigh-Zahl finden. Mit gleichen Argumenten wie bei der Fingerdicke erwartet man auch für die Geschwindigkeit eine Abhängigkeit von $\frac{\Delta T}{L}$ und Δc , aber nicht von L alleine. Unter der Annahme eines Potenzgesetzes ergibt sich:

$$u \sim \left(\frac{\Delta T}{L}\right)^{\gamma_7} (\Delta c)^{\gamma_8} \quad (5.42)$$

$$\begin{aligned} \implies \frac{uL}{\nu} &\sim L |Ra_T|^{\gamma_7} L^{-4\gamma_7} Ra_c^{\gamma_8} L^{-3\gamma_8} \\ \implies 0 &= 1 - 4\gamma_7 - 3\gamma_8. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Ein Plot der experimentell bestimmten Reynolds-Zahlen ist in Abbildung 5.10 zu sehen.

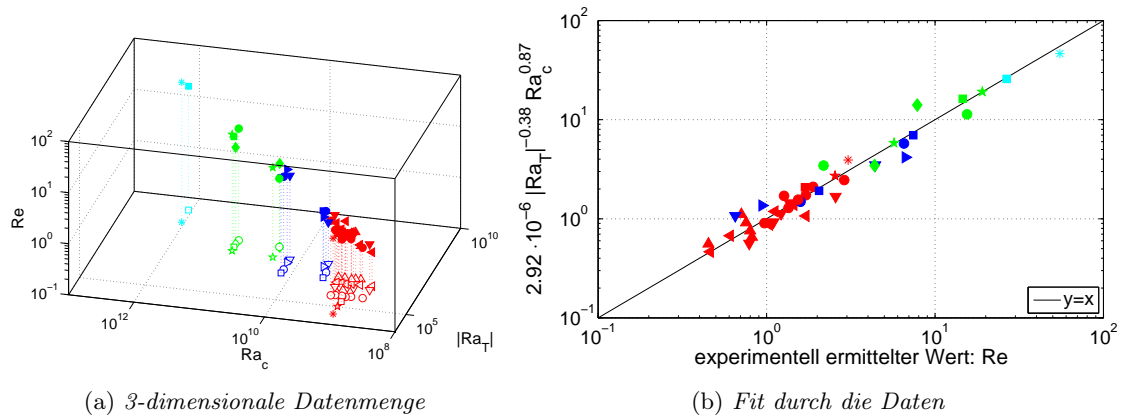


ABB. 5.10: Aufgetragen ist in (a) die gesamte Datenmenge, in (b) der, mit den Potenzen des 3-dimensionalen Fits berechnete Wert Re gegen die experimentell gemessene Reynolds-Zahl Re .

Man sieht die relativ große Streuung der Daten, wie oben erwähnt, aber dennoch lässt sich eine Abhängigkeit fitten, die den Daten gut entspricht. Der Fit mit dem Fehler aus linearer Regression (5.4) ergibt sich zu

$$Re = 2.92 \cdot 10^{-6} |Ra_T|^{-0.379} Ra_c^{0.870}. \quad (5.44)$$

Die beiden Potenzen erfüllen Bedingung (5.43) nicht genau; aus $\gamma_7 = -0.379$ ergäbe sich $\gamma_8 = 0.839$, was etwas kleiner als der gefittete Wert ist, aber innerhalb eines Fehlers von 5% liegt.

Ein Runden der Potenzen führt zu

$$Re \sim |Ra_T|^{-1/2} Ra_c^1, \quad (5.45)$$

was in Abbildung 5.11 geplottet ist. Der Vorfaktor ergibt sich zu 10^{-6} . Auch diese Abhängigkeit scheint passend für die Daten. Zudem genügen die Potenzen der Bedingung aus der Dimensionsanalyse. Da der Fehler der Geschwindigkeitsbestimmung hier die größte Unsicherheit hat, sind auch die Potenzen der hypothetisch angenommenen Skalierung noch zu rechtfertigen.

[Sreenivas et al., 2009] kommen mit Gleichgewichtsüberlegungen von potentieller Energie und Dissipation zu einer Abhängigkeit der Geschwindigkeit von den Rayleigh-Zahlen von $Re \sim |Ra_T|^{-2/3} Ra_c$. Ihre Daten passen auch gut zu diesem Potenzgesetz, welches aber der Dimensionsbetrachtung (5.43) nicht genügt und auch mit den Daten dieses Experiments nicht übereinstimmt.

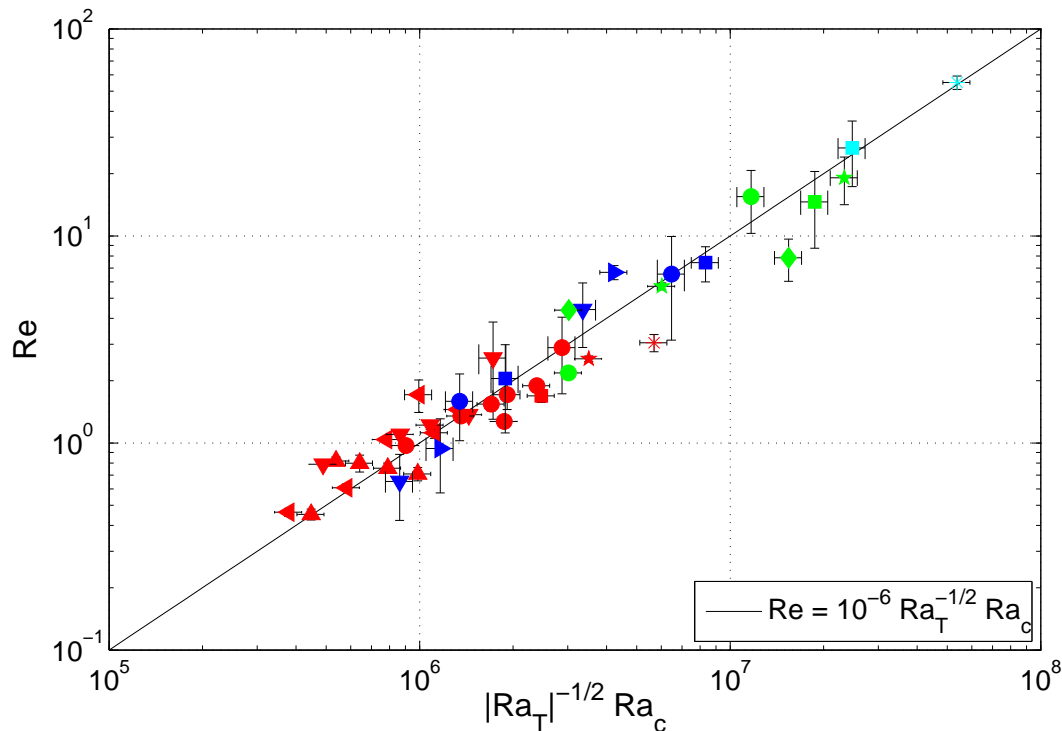


ABB. 5.11: Aufgetragen ist die Reynolds-Zahl Re in Abhängigkeit von $|Ra_T|^{-1/2}$ und Ra_c . Die Fehlerbalken haben die Länge der Standardabweichung der Geschwindigkeit (teilweise kleiner als Symbolgröße) und für die Rayleigh-Zahlen 10 %.

5.5 Die Anwachsrate der Finger

Mit Anwachsrate ist die Geschwindigkeit gemeint, mit der sich die Finger aus der Anfangsstratifizierung heraus ausbilden. In diesem Abschnitt soll kurz und nur qualitativ über die beobachteten Eigenschaften berichtet werden.

Wie in Abschnitt 3.1.2 erwähnt, wird die Messung erst gestartet, d. h. die Spannung angeschaltet, wenn sich ein lineares Temperaturprofil ausgebildet hat. Für $t < 0$ herrscht also ein stabil geschichteter, linearer Temperaturgradient und die Konzentration ist überall gleichverteilt, also $c = c_0$. Mit Einschalten der Spannung bei $t = 0$ baut sich an den Platten eine chemische Grenzschicht auf, die destabilisierend wirkt.

Aus dieser Grenzschicht heraus lösen sich einzelne Finger und breiten sich vertikal aus. Von der oberen Platte sinken Fluidströme mit $c = \Delta c = 2c_0$ nach unten; entsprechend steigen von der Kathode Fluidströme mit $c = 0$ auf.

Dieser Vorgang wird mit dem Schattenverfahren beobachtet. Alle 4 Sekunden werden Aufnahmen gemacht. Anhand dieser kann dann der Zeitpunkt bestimmt werden, an dem

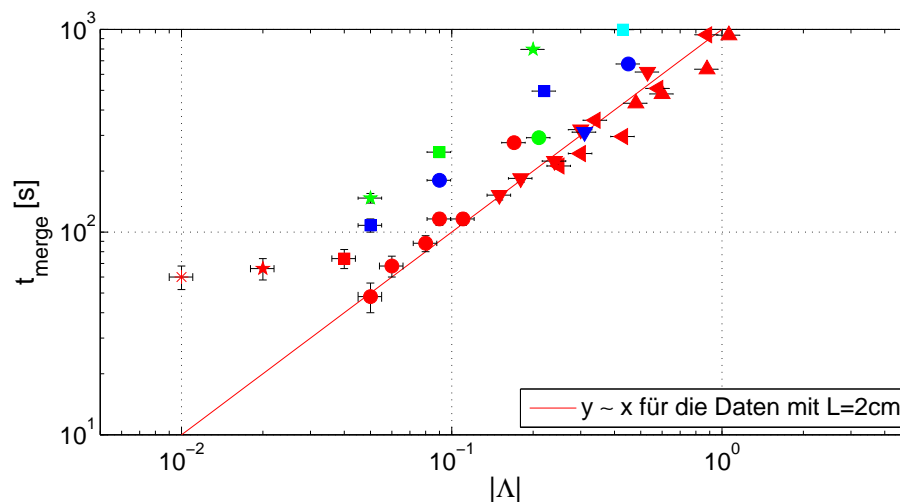


ABB. 5.12: Aufgetragen ist die Zeit t_{merge} [s] in Abhängigkeit von $|\Lambda|$. Die Fehlerbalken haben eine Länge von 8 Sek. und für $|\Lambda|$ von 10 %.

sich die auf- und absteigenden Finger in der Zellmitte treffen. Der Fehler bei der Bestimmung der Zeit ist zum einen dadurch verursacht, dass nur alle 4 Sekunden ein Photo gemacht wird. Außerdem ist es nicht immer einfach zu entscheiden, wann genau sich die Finger wirklich treffen. Daher wird ein Fehler von 8 Sekunden angenommen.

In Abbildung 5.12 ist diese Zeit (t_{merge}) gegen das Auftriebsverhältnis $|\Lambda|$ aufgetragen. Die Daten zeigen ein proportionales Zunehmen der Zeit vom Einschalten der Spannung bis zum Treffen der Finger bei steigender Stabilität. Weiter ist zu bemerken, dass sich für sehr kleine Auftriebsverhältnisse die Zeiten nicht weiter zu verkleinern scheinen. Dieser Trend müsste noch weiter untersucht werden, um den Verdacht zu bestätigen; allerdings erscheint es sinnvoll, denn auch der Aufbau der chemischen Grenzschicht braucht Zeit. Erst wenn der Dichtegradient instabil genug geworden ist, lösen sich Finger und fangen an, in das stationäre, stabil stratifizierte Fluid vorzudringen.

Weiter kann man aus der gemessenen Zeit eine Geschwindigkeit u_{merge} errechnen, mit der sich die Finger entwickeln, also aufbauen. Ein dimensionsloses Maß dieser Geschwindigkeit wäre die sogenannte Aufbau-Reynolds-Zahl Re_{Aufbau} mit

$$Re_{Aufbau} = \frac{u_{merge} L}{\nu} = \frac{L^2}{2 t_{merge} \nu} \quad (5.46)$$

wobei $u_{merge} = \frac{L/2}{t_{merge}}$.

Eine weitere Möglichkeit, aus der Geschwindigkeit u_{merge} eine dimensionslose Kennzahl

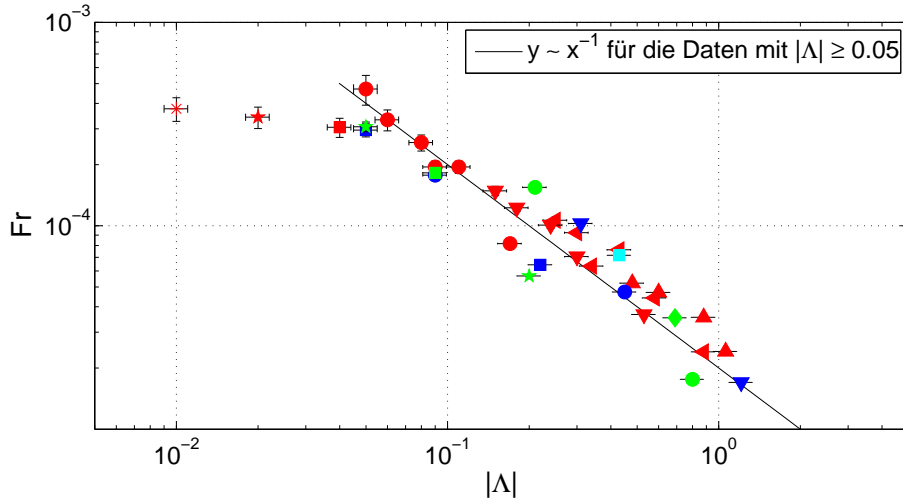


ABB. 5.13: Aufgetragen ist die Froude-Zahl Fr (gebildet mit der Geschwindigkeit u_{merge}) gegen das Auftriebsverhältnis $|\Lambda|$. Die Fehlerbalken sind mit einem Zeitfehler von 8 Sek. berechnet und für $|\Lambda|$ sind 10 % angenommen.

zu machen, ist das Betrachten des Verhältnisses von Trägheits- zu Schwerkraft. Die sogenannte Froude-Zahl Fr beschreibt dieses Verhältnis und ist definiert als

$$Fr = \frac{u_{merge}}{\sqrt{gL}} = \frac{\sqrt{L}}{2t_{merge}\sqrt{g}}. \quad (5.47)$$

Die Froude-Zahl (5.47) bietet eine Möglichkeit, Abbildung 5.12 dimensionslos darzustellen. Gleichzeitig verschwindet dabei der Effekt, dass die Daten der verschiedenen Zellen nicht übereinanderliegen. Siehe dazu Abbildung 5.13.

Wie man in Abbildung 5.14 erkennt, ist $Re \sim Re_{Aufbau}$. Allerdings ist die Aufbau-Reynolds-Zahl kleiner. Das bedeutet, dass die Geschwindigkeiten größer sind, wenn sich ein durchgängiges, stationäres Fingermuster gebildet hat.

Das liegt sicherlich daran, dass – wie oben schon erwähnt – die chemische Grenzschicht sich erst langsam aufbaut. Ist die Konzentrationsdifferenz anfangs noch kleiner, dann ist auch der Auf- bzw. Abtrieb kleiner und damit die Geschwindigkeit. Dahingegen sind aber die Reibungskräfte noch kleiner, da keine – sich in entgegengesetzte Richtung bewegende – Nachbarfinger den Auf- oder Abstrom bremsen. Bei den recht kleinen Geschwindigkeiten ist dieser Effekt offensichtlich zu vernachlässigen.

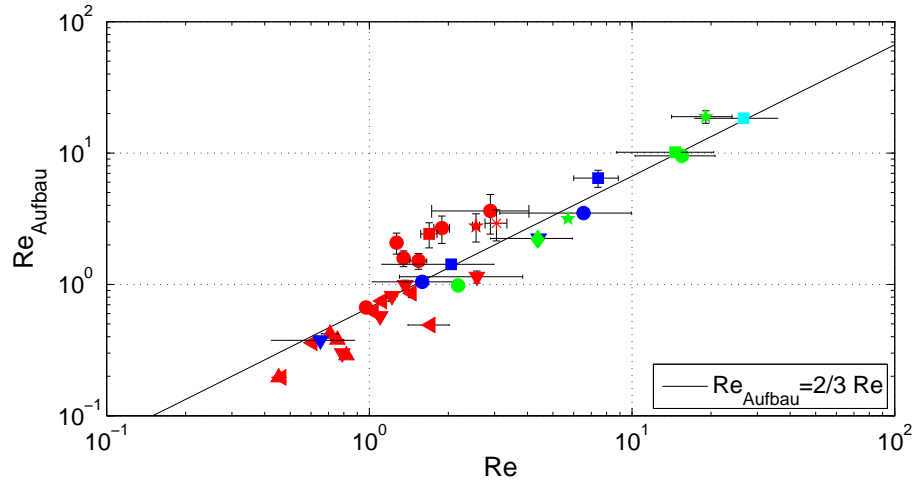


ABB. 5.14: Aufgetragen ist die Aufbau-Reynolds-Zahl Re_{Aufbau} gegen die Reynolds-Zahl Re des stationären Fingerregimes. Die Fehlerbalken haben eine Länge von 8 Sek. und für Re sind sie wieder mit der Standardabweichung der rms -Geschwindigkeit berechnet.

5.6 Weitere Ergebnisse

5.6.1 Ergebnisse für $\Delta T \rightarrow 0$

Wie in Abschnitt 4.1 schon angedeutet, lassen sich aus den Ergebnissen dieser Arbeit keine Rückschlüsse auf das Ende des Fingerregimes für $\Delta T \rightarrow 0$ ziehen. Ist der stabilisierende Temperaturgradient klein genug, muss ein Umschlag vom Fingerregime in das der normalen, also einfach getriebenen Konvektion erfolgen. Dort spielt dann die Temperatur keine Rolle mehr und die Strömungsform sollte Konvektionszellen bilden mit Eigenschaften, die der Rayleigh-Bénard-Konvektion entsprechen.

Die eine Kontrollmessung in der 2 cm-Zelle mit $\Delta T = 0$ zeigt auch ein entsprechendes Verhalten mit deutlich größerem Anteil der Horizontalgeschwindigkeit an der rms -Geschwindigkeit als im Fingerregime üblich. Auch der Wert der Geschwindigkeit bzw. die Reynolds-Zahl sind viel größer als bei Messungen im Fingerregime mit gleicher Ra_c . Das Strömungsbild lässt entsprechend keine Finger mehr erkennen; die Struktur ist viel turbulenter und die großskalige Bewegung entspricht der einer Konvektionszelle.

Ein Übergang vom doppelt- zum einfach-diffusiven System könnte plötzlich bei einem bestimmten Stabilitätsverhältnis geschehen. Eine andere Möglichkeit ist, dass die Finger einfach immer breiter werden, bis sie irgendwann genauso breit wie hoch sind und wie eine Rolle aussehen. Für den hier gemessenen Bereich ist kein Hinweis auf einen abrupten

Wechsel von einem zum anderen System erkennbar. Geht man von einem schleichenden Wechsel aus und extrapoliert die Auftragung in Abbildung 5.9 nach $\frac{d}{L} \rightarrow 1$, dann würde erst eine so kleine thermische Rayleigh-Zahl wie $|Ra_T| \approx Ra_c^{-1/3}$ ein Aspektverhältnis der Finger von Eins geben. Einen so kleinen Wert kann man mit diesem Aufbau nicht erreichen und somit muss diese Frage offen bleiben.

Kontrollmessung bei $\Delta T = 0$

In der vorausgehenden Arbeit ([Hage, 2003]) wurde in drei verschiedenen kubischen Zellen die Analogie von chemisch getriebener zu thermisch getriebener Konvektion untersucht. Der Versuchsaufbau war im Grunde wie der dieser Arbeit, nur dass die Platten immer die Temperatur der Lösung hatten. So konnte für das Kupfersulfat-System die Sherwood-Zahl in Abhängigkeit der chemischen Rayleigh-Zahl gemessen werden. Beachtet man die hohe Schmidt-Zahl, dann ist ein Vergleich mit Ergebnissen thermischer Rayleigh-Bénard-Konvektion möglich.

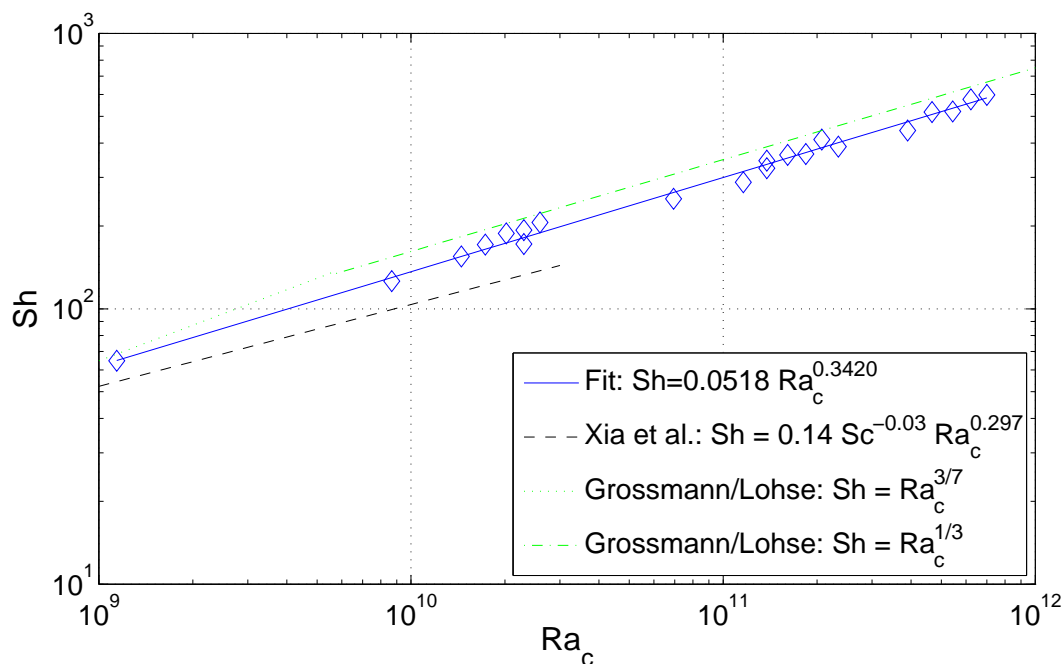


ABB. 5.15: Sh in Abhängigkeit von Ra_c . Die blauen Rauten sind Messdaten des Kupfersulfat-Systems für $\Delta T = 0$. Die beiden Vergleichsgeraden sind aus [Xia et al., 2002] und [Grossmann and Lohse, 2001].

Die Auftragung in Abbildung 5.15 zeigt die experimentell ermittelten Daten aus den ku-

bischen Zellen und zusätzlich die eine Kontrollmessung aus dieser Arbeit bei $Ra_c \approx 10^9$. Diese Daten liefern eine Abhängigkeit der Form

$$Sh = 0.052 Ra_c^{0.34}. \quad (5.48)$$

Zusätzlich als Geraden eingetragen ist das Ergebnis von [Xia et al., 2002], die Messungen bei Prandtl-Zahlen zwischen 4 und 1350 und Rayleigh-Zahlen von $2 \cdot 10^7$ bis $3 \cdot 10^{10}$ durchgeführt haben. Sie stellen eine geringe Abhängigkeit der Prandtl-Zahl fest, in der Form, dass größere Prandtl-Zahlen den Wärmetransport verringern. Die unterschiedlich hohen Nusselt-Zahlen (die Werte von [Xia et al., 2002] sind etwa 20% kleiner als die hier gemessenen) können mehrere Gründe haben, sind aber auch nicht ungewöhnlich in Rayleigh-Bénard-Experimenten diesen Bereichs (siehe z. B. [Ahlers et al., 2009]). Zum einen unterschied sich die Geometrie, zum anderen ist die Schmidt-Zahl hier nochmal fast doppelt so groß wie die größte Prandtl-Zahl bei [Xia et al., 2002].

Die zweite Gerade zeigt die Proportionalität aus der sog. Grossmann-Lohse-Theorie ([Grossmann and Lohse, 2001]) für große Prandtl-Zahlen. Man erkennt eine gute Übereinstimmung der Steigungen.

Kontrollmessung bei $\Delta c = 0$

Zur Validierung des Versuchsaufbaus wurden auch zwei Messungen mit $\Delta c = 0$ gemacht. Es handelt sich hierbei um klassische, thermisch getriebene Rayleigh-Bénard-Konvektion. Als Arbeitsfluid diente aber wieder die Kupfersulfat-Schwefelsäure-Mischung, so dass die Prandtl-Zahl mit $Pr \approx 9$ etwas höher als die von reinem Wasser war.

Die beiden Messungen bei $Ra_T = 2.1 \cdot 10^5$ und $2.1 \cdot 10^6$ zeigen das erwartete Verhalten. Die Geschwindigkeiten sind genau wie schon im Fall $\Delta T = 0$ deutlich größer, haben einen merklichen Horizontalanteil und variieren sogar um den Faktor $\sqrt{10}$, was genau der Proportionalität $Re \propto Ra^{1/2}$ aus [Ahlers et al., 2009] entspricht.

Auch das Strömungsmuster weist die typischen Zellen auf; für die Messung mit der größeren Rayleigh-Zahl werden auch die Strömungsstrukturen kleiner.

5.6.2 Abhängigkeit vom Aspektverhältnis

Es liegt die Vermutung nahe, dass sich irgendeine Form von Wellen in der Konvektionsbox ausbreitet und Einfluss auf die Strömung des Fingerregimes nimmt. Durch die im Innern stabile Schichtung oder durch die großen Dichtesprünge an der chemischen Grenzschicht ist es möglich, dass sich (im Vergleich zur Fingerdicke) langwellige Schwerewellen

ausbreiten.

Existierten solche Wellen, dann sollte sich die Strömung, insbesondere die Fingerdicke, ändern, wenn man die Boxausmaße verändert.

Also wurden zusätzlich zu den Messungen in den vier verschieden hohen Zellen noch zwei Messungen in der 2 cm-Zelle durchgeführt, bei denen die Konvektionsbox unterteilt wurde. Mit Plexiglasstücken wurde ein 10×10 cm großer Bereich abgetrennt, aus dem das Fluid nicht ausströmen konnte. So konnten zwei Messungen (090730 und 090723) wiederholt werden mit dem einzigen Unterschied, dass das Aspektverhältnis nur halb so groß ist.

Das Ergebnis dieser beiden Kontrollmessungen ist, dass sämtliche gemessene Größen mit denen aus der breiteren Zelle übereinstimmen; damit scheint der Einfluss der Zellbreite hier vernachlässigbar zu sein. Allerdings ist die Zelle in allen Fällen breiter als 35 Fingerdicken gewesen, also auch in der geteilten Zelle war $W \gg d$ gegeben.

Es ist anzunehmen, dass die Zellbreite spätestens dann an Einfluss gewinnt, wenn sie nur noch wenige Fingerdicken groß ist. Allerdings wurden auch einige PIV-Zeitreihen am Rand der Zelle aufgenommen und untersucht. Es stellte sich heraus, dass schon die Finger direkt am Rand die gleichen Eigenschaften (Breite, Geschwindigkeit, räumliche und zeitliche Stabilität) besitzen, wie die im Innern der Zelle.

Die Ergebnisse dieser beiden Kontrollmessungen wurden der Ergebnistabelle zugeführt und befinden sich als Datenpunkte in allen Plots wieder (rot, weil aus der 2 cm-Zelle stammend und Kreis bzw. linksgerichtetes Dreieck für einen Temperaturgradienten von -1 bzw. -5 K/cm).

5.6.3 Abhängigkeit von der Anfangsstratifizierung

Inwieweit die Anfangsbedingungen das sich einstellende Strömungsbild beeinflussen, wurde mit zwei Kontrollmessungen untersucht und wird jetzt hier vorgestellt.

Für gewöhnlich wurde der Konzentrationsgradient erst eingeschaltet, wenn sich ein lineares Temperaturprofil schon eingestellt hatte. Bei den beiden Kontrollmessungen 100211 und 100212 allerdings wurden Temperatur und Konzentration gleichzeitig zugeschaltet. Das System befand sich also für Zeitpunkte $t < 0$ in einem stationären Stadium homogener Temperatur T_0 und Konzentration c_0 .

Durch Einschalten der Spannung wurde innerhalb von Sekunden die gewünschte Konzentrationsdifferenz erreicht (oben an der Anode $c_t = c_0 + \frac{\Delta c}{2} = 2c_0$ und unten $c_b =$

$c_0 - \frac{\Delta c}{2} = 0$).

Ein Einschalten der Thermostate bedeutet allerdings, dass sich die Platten nur langsam der gewünschten Temperatur nähern. Bei einer Temperaturdifferenz von 1 °C dauert es nur 2(5) Minuten, bis die neue Temperatur erreicht(stabil gehalten) wird. Bei 10 °C aber schon gut eine halbe Stunde. Erst dann ist oben $T_t = T_0 - \frac{\Delta T}{2}$ und unten $T_b = T_0 + \frac{\Delta T}{2}$ (mit $\Delta T < 0$ wie vorher, weil eine stabile Schichtung vorliegt).

Durch den anfangs kaum vorhandenen und sich nur langsam ausbildenden stabilisierenden Einfluss der Temperatur ist die Strömung in diesen Minuten deutlich turbulenter. Es bilden sich aber bald Finger. Abgesehen von der verlängerten Zeit bis zur Ausbildung der endgültig stationären Fingerströmung sind die Strömungseigenschaften aber die gleichen wie bei den vorher linear stratifizierten Messungen.

Bei nur genügend langer Zeit zur Ausbildung der stationären Strömung scheint die Anfangsverteilung von Konzentration und Temperatur also keinen Einfluss auf die endgültigen Strömungseigenschaften zu haben.

Auch die Ergebnisse dieser beiden Kontrollmessungen wurden in die Ergebnistabelle geschrieben und befinden sich als Datenpunkte in allen Plots wieder (rot, weil aus der 2 cm-Zelle stammend und Kreis bzw. nach oben gerichtetes Dreieck für einen Temperaturgradienten von -1 bzw. -10 K/cm).

6 Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird doppelt diffusive Konvektion experimentell untersucht. Dabei wird in einer einfachen Geometrie gemessen: die Konvektionszelle hat quadratischen Querschnitt und durch vier verschiedene Rahmenhöhen werden Aspektverhältnisse von 10, 5, 2.5 und 1 erreicht. Die schneller diffundierende Komponente hier ist die Temperatur. Sie wird an den Platten konstant gehalten und wirkt stabilisierend, d. h. dass die untere Platte kälter als die obere gehalten wird. Die im Gegensatz zur Temperatur langsamer diffundierende Komponente ist die Konzentration von Kupferionen. Die destabilisierende Konzentrationsdifferenz wird elektrochemisch erzeugt und aufrechterhalten. Dazu wird als Arbeitsfluid Kupfersulfat in 1-molarer Schwefelsäure benutzt.

Die Fluideigenschaften werden durch Schmidt- und Prandtl-Zahl beschrieben. Diese beiden Kennzahlen sind bei allen Versuchen nahezu konstant und haben Werte von $Sc \approx 2200$ und $Pr \approx 9$. Die chemische Rayleigh-Zahl wird zwischen $5 \cdot 10^8$ und 10^{12} variiert, für die thermische gilt hier $4 \cdot 10^4 < |Ra_T| < 2 \cdot 10^9$; daraus folgt für das Auftriebsverhältnis $0.01 < |\Lambda| < 1.2$.

Durch den stabilisierenden Einfluss der Temperatur und den destabilisierenden Einfluss der Konzentration entwickelt sich eine Strömung, die aus dicht aneinander grenzenden, vertikalen, schmalen Auf- und Abströmen besteht: die sogenannten Salzfinger. Dabei entsteht diese Art der direkten Instabilität schon für Systeme, deren Dichte stabil geschichtet ist, wenn also der Auftrieb, der durch die Konzentration hervorgerufen wird, kleiner als der thermisch bedingte Abtrieb ist. Das stabil geschichtete System wird seit Jahrzehnten untersucht.

Hier konnte gezeigt werden, dass auch für instabile Konfigurationen – wenn also die Konzentration einen größeren Einfluss auf die Dichte hat als die Temperatur – Salzfinger entstehen.

Allerdings bleibt offen, wie weit die Stabilität reduziert werden muss, um das Fingerregime zu verlassen. Für alle hier gemessenen Auftriebsverhältnisse scheinen einheitliche Abhängigkeiten zu bestehen; ein Systemwechsel ist aus den Daten nicht zu erkennen.

Man kann aber davon ausgehen, dass bei nur genügend kleinem Temperatureinfluss die Strömung vom Fingerregime zu normaler Rayleigh-Bénard-Konvektion übergeht. Bei dieser treten Konvektionszellen auf, die mindestens so breit wie hoch sind. Betrachtet man also die Fingerdicke und extrapoliert die Daten für breiter werdende Finger bis hin zu $d \approx L$, dann findet man mit Gleichung (5.39) als Bedingung dafür $|Ra_T| \approx Ra_c^{1/3}$. Solch kleine Werte für die thermische Rayleigh-Zahl können mit dem Aufbau hier aber nicht realisiert werden.

Eine weitere Grenze könnte Gleichung (5.17) aufzeigen, denn danach wäre $Sh \rightarrow \infty$ wenn $|Ra_T| \rightarrow 0$. Vergleicht man den Transport bei einfach getriebener Konvektion mit dem im Fingerregime, dann ist dieser für große Temperaturgradienten erst geringer, übertrifft aber für $|Ra_T| \lesssim 10^{-6} Ra_c^{4/3}$ den der einfachen Konvektion.

Damit wird hier für sinkende Temperaturgradienten die Grenze für gleichen Massentransport zuerst erreicht. Erst für noch geringeren Einfluss der Temperatur werden die Finger gleich breit wie hoch.

Hierbei sei natürlich immer vorausgesetzt, dass es einen kontinuierlichen Übergang von einem zum anderen Regime gibt und dass die Gesetze des Fingerregimes bis zu diesem Übergang gelten.

Welche Größen bestimmen die Strömung?

Die Strömungseigenschaften wie Massen- und Wärmetransport, Geschwindigkeit und Fingerdicke sind unabhängig von der Zellhöhe L . Es stellt sich heraus, dass auch die Temperaturdifferenz ΔT keine Rolle spielt, sondern nur der Temperaturgradient $\frac{\Delta T}{L}$. Bei der Konzentration hingegen ist die entscheidende Größe die Konzentrationsdifferenz Δc über die gesamte Höhe.

Es wird gezeigt, dass das entstehende Strömungsmuster unabhängig von den Anfangsbedingungen ist. Lässt man dem System nur genügend Zeit, dann entwickeln sich unabhängig von der Anfangsstratifizierung der Temperatur die spezifischen Eigenschaften, die nur noch vom Temperaturgradienten und der Konzentrationsdifferenz abhängen.

Auch das Aspektverhältnis Γ bzw. die Zellbreite W spielt hier keine Rolle für die Gesetzmäßigkeiten.

Lediglich die Zeit, die zum Aufbau der Finger benötigt wird – bis sich also eine stationäre Strömung eingestellt hat – ist umgekehrt proportional zum Auftriebsverhältnis. Die Aufbaugeschwindigkeit ist noch kleiner als die endgültig im vollentwickelten Fingerregime vorherrschende mittlere *rms*-Geschwindigkeit.

Welche Fingerdicke und Geschwindigkeit stellt sich ein?

Im Gegensatz zur linearen Stabilitätsanalyse wird für die Fingerdicke hier eine Abhängigkeit von der Konzentrationsdifferenz festgestellt. Sie ist nur gering, aber für steigende chemische Rayleigh-Zahlen, d. h. für instabilere Dichteschichtungen, verbreitern sich die Finger. Ein Abnehmen der Fingerdicke bei steigendem Temperaturgradienten stimmt mit der klassischen $\frac{d}{L} \sim |Ra_T|^{-1/4}$ Skalierung überein, aber die hier gefundene Abhängigkeit ist mit $\frac{d}{L} \sim |Ra_T|^{-1/3}$ größer.

Für die Geschwindigkeit wird eine Gesetzmäßigkeit gefunden, die genauso der Intuition entspricht wie bei der Fingerdicke. Je instabiler die Schichtung, desto größer die Geschwindigkeiten. Das bedeutet ein Steigen der Reynolds-Zahl für größer werdende chemische Rayleigh-Zahlen bzw. für sinkende thermische Rayleigh-Zahlen, wobei der Einfluss der Konzentration größer ist als der der Temperatur.

Wie groß ist der Massentransport?

Im Fingerregime werden deutlich mehr Ionen von einer zur anderen Platte transportiert als allein durch Diffusion. Der Massenfluss ist etwa gleich dem der einfach getriebenen Konvektion. Ein Fit der Daten gibt eine Abhängigkeit von $Sh \sim Ra_c^{4/9}$, was sich experimentell nicht vom klassischen $4/3$ -Gesetz von Turner (Gleichung (5.13)) unterscheiden lässt.

Ein Einsetzen der Ergebnisse für Fingerdicke (Gleichung (5.39)) und Reynolds-Zahl (Gleichung (5.45)) in die Gleichung für den Massentransport (5.17) gibt

$$Sh = 16.6 Re^{1/2} \left(\frac{d}{L}\right)^{-1/2} = 0.7 \cdot \frac{1}{2} Re^{1/2} Sc^{1/2} \left(\frac{d}{L}\right)^{-1/2},$$

was nach Gleichung (5.9) für lamellenförmigen Fingerquerschnitt spricht und von den Daten gut bestätigt wird.

Wieviel Wärme wird konvektiert?

Beachtenswert bei der Betrachtung des Wärmetransports ist, dass die konvektierte Wärme gegen die Schwerkraft transportiert wird. So wird kaltes Fluid nach oben und warmes nach unten bewegt. Und zwar umso mehr, je kleiner der Temperaturgradient ist. Das erscheint zwar auf den ersten Blick unphysikalisch, ist aber zu verstehen, denn ein kleiner Temperaturgradient bedeutet ja eine große Instabilität, also größere Geschwindigkeiten und größere Fingerdicken. Damit wird auch die Temperatur weniger horizontal diffundiert, die Temperaturdifferenzen zwischen den Fingern vergrößern sich.

Auch die Nusselt-Zahl lässt sich mit Gleichung (5.39) und (5.45) durch die Fingerdicke und die Reynolds-Zahl ausdrücken, was zu

$$|Nu - 1| = 16.9 Re^{13/10} \left(\frac{d}{L} \right)^{13/10}$$

führt.

Ein direktes Bestimmen des Wärmetransports ist hier nicht möglich, so dass dieser über die Energiedissipation bestimmt werden muss. Dabei fällt auf, dass der nichtlineare Reibungsterm sowie auch die viskose Reibung um Größenordnungen kleiner sind als die beiden Auftriebskräfte. So herrscht hier ein Kräftegleichgewicht, welches zwischen dem chemischen und thermischen Auftrieb besteht.

Welche Potenzgesetze gelten?

Zu allerletzt noch eine Zusammenstellung der Potenzgesetze, die bei den Experimenten hier gefunden werden konnten. Dabei ist zu beachten, dass es sicherlich Bereiche gibt, für die andere Zusammenhänge gelten. Für den hier untersuchten Wertebereich allerdings wurde kein Wechsel der Abhängigkeiten festgestellt.

		Vorfaktor	Potenz von $ Ra_T $	Potenz von Ra_c
Sh	Fit	0.0174	-0.0955	0.451
	Hypothese	0.0170	$-\frac{1}{12} = -0.0833$	$\frac{4}{9} = 0.444$
$ Nu - 1 $	Fit	$5.25 \cdot 10^{-7}$	-1.08	1.42
	Hypothese	$2.50 \cdot 10^{-7}$	$-\frac{13}{12} = -1.08$	$\frac{13}{9} = 1.44$
$\frac{d}{L}$	Fit	1.23	-0.315	0.0857
	Hypothese	0.95	$-\frac{1}{3} = -0.333$	$\frac{1}{9} = 0.111$
Re	Fit	$2.92 \cdot 10^{-6}$	-0.379	0.870
	Hypothese	10^{-6}	$-\frac{1}{2} = -0.500$	$1 = 1.000$

TAB. 6.1: Zusammenstellung der Potenzgesetze für den Massentransport (Sh), den konvektiven Wärmetransport $|Nu - 1|$, die Fingerdicke $\frac{d}{L}$ und die Geschwindigkeit in Form der Reynolds-Zahl. Die Fitwerte wurden jeweils bestimmt durch lineare Regression der logarithmierten Gleichung $Z = A \cdot |Ra_T|^p \cdot Ra_c^q$ mit Fehler (5.4).

A Nomenklatur

Die meisten in der Arbeit benutzten Größen sind hier zusammengestellt. Dimensionen in eckigen Klammern [] und teilweise für diese Arbeit typische Größenordnungen sind mit angegeben.

$\mathcal{O}(X)$ steht für: Größenordnung von X und $x \sim y$ besagt, dass x proportional zu y ist. Die meisten Indizes sollten durch den Kontext verständlich werden. Einige sind durchgängig genutzt, wie z.B. die tiefgestellten c und T zum Kennzeichnen von chemischen (eigentlich: die Konzentration betreffenden) und thermischen Eigenschaften, 0 für Referenz- oder Mittelwerte. Um Eigenschaften der oberen und unteren Platte zu kennzeichnen, wird t (top) und b (bottom) benutzt.

Im Anschluss an die Nomenklatur wird noch die einheitliche Legende für die meisten der experimentellen Plots gezeigt.

c	Konzentration	$0.01 - 0.05 \left[\frac{\text{mol}}{\text{l}} \right]$
c_p	spezifische Wärmekapazität	$\approx 4 \cdot 10^3 \left[\frac{\text{J}}{\text{kg K}} \right]$
d	Fingerdicke	[mm]
\vec{E}	Elektrisches Feld	$\left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right]$
\vec{f}	Volumenkraft	$\left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$
F	Faraday-Konstante	$96485 \left[\frac{\text{C}}{\text{mol}} \right]$
\vec{g}	Erdbeschleunigung, $\vec{g} = g\vec{z}$	$ \vec{g} = 9.81 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$
I	Grenzstrom	100 - 2000 [mA]
\vec{j}	Stromdichte	$\left[\frac{\text{A}}{\text{m}^2} \right]$
\vec{J}	Teilchenstrom-Flussdichte	$\left[\frac{\text{mol}}{\text{cm}^2 \text{s}} \right]$
k_T	Wärmeleitfähigkeit	$\approx 5 \cdot 10^{-1} \left[\frac{\text{J}}{\text{K sm}} \right]$
L	Zellhöhe	2, 4, 8, 20 [cm]
p	Druck	[Pa]
Q	Wärmemenge pro Fläche und Zeit	$\left[\frac{\text{J}}{\text{m}^2 \text{s}} \right]$
R	allg. Gaskonstante	$= 8.13 \left[\frac{\text{J}}{\text{mol K}} \right]$
t_i	Transportzahl des Ions i	$\approx 3 \cdot 10^{-3}$

t	Zeit	[s]
T	Temperatur	[K]
\vec{u}	Geschwindigkeit mit den Komponenten (u_x, u_y, u_z)	$\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$
U	von außen angelegte Zellspannung	~ 500 [mV]
W	Kantenlänge der Zelle	20 [cm]
x, y, z	kartesische Koordinaten	[m]
α_c	Koeffizient der Dichteveriation mit der Konzentration	$\approx 1 \cdot 10^{-1} \left[\frac{1}{\text{mol}}\right]$
α_T	Koeffizient der Dichteveriation mit der Temperatur	$\approx 3 \cdot 10^{-4} \left[\frac{1}{\text{K}}\right]$
Δc	Kupferkonzentrationsdifferenz zw. Anode und Kathode	0.02 – 0.10 $\left[\frac{\text{mol}}{\text{l}}\right]$
ΔT	Temperaturdifferenz zwischen Anode und Kathode	-2 – -20 [K]
κ_c	Diffusionskonstante	$\approx 5 \cdot 10^{-10} \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}}\right]$
κ_T	Temperaturleitfähigkeit	$\approx 1 \cdot 10^{-7} \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}}\right]$
λ, λ_T	chemische, thermische Grenzschichtdicke	[mm]
μ	dynamische Viskosität	$\approx 1 \cdot 10^{-3} \left[\frac{\text{kg}}{\text{s m}}\right]$
ν	kinematische Viskosität	$\approx 1 \cdot 10^{-6} \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}}\right]$
ρ	Dichte	$\approx 1 \cdot 10^3 \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right]$
Φ	Potential	[V]

Dimensionslose Kennzahlen:

Fr	Froude-Zahl, $Fr = \frac{u}{\sqrt{gL}}$	
Le	Lewis-Zahl, $Le = \frac{\kappa_T}{\kappa_c}$	≈ 250
Nu	Nusselt-Zahl, $Nu = \frac{QL}{c_p \rho \kappa_T \Delta T}$	
Pe	Péclet-Zahl, $Pe = \frac{u_{rms} L}{\kappa_T}$	
Pr	Prandtl-Zahl, $Pr = \frac{\nu}{\kappa_T}$	≈ 9
Ra_c	Konzentrations-Rayleigh-Zahl, $Ra_c = \frac{g L^3 \alpha_c \Delta c}{\nu \kappa_c}$	
Ra_T	Temperatur-Rayleigh-Zahl, $Ra_T = \frac{g L^3 \alpha_T \Delta T}{\nu \kappa_T}$	
Re	Reynolds-Zahl, $Re = \frac{u_{rms} L}{\nu}$	
Sc	Schmidt-Zahl, $Sc = \frac{\nu}{\kappa_c}$	≈ 2300
Sh	Sherwood-Zahl, $Sh = \frac{j L}{z F \kappa_c \Delta c}$	
Γ	Aspektverhältnis, $\Gamma = \frac{W}{L}$	10, 5, 2.5, 1
Λ	Auftriebsverhältnis, $\Lambda = \frac{\alpha_T \Delta T}{\alpha_c \Delta c}$	-0.01 – -1.2
χ	Flussverhältnis ("flux ratio"), $\chi = \frac{ \alpha_T \langle u_z T \rangle }{\alpha_c \langle u_z c \rangle}$	

Werden in dieser Arbeit die experimentellen Daten geplottet, dann bedeuten die Symbole und Farben folgendes, wenn nicht explizit anders erwähnt. Die vier verschiedenen Farben kennzeichnen die verschiedenen Zellhöhen. So sind alle roten Symbole Daten aus der Zelle mit $L = 2 \text{ cm}$, blau kennzeichnet $L = 4 \text{ cm}$, grün und cyan dann entsprechend $L = 8$ und $L = 20 \text{ cm}$.

Die verschiedenen Symbole beziehen sich auf den angelegten Temperaturgradienten. Es ist:

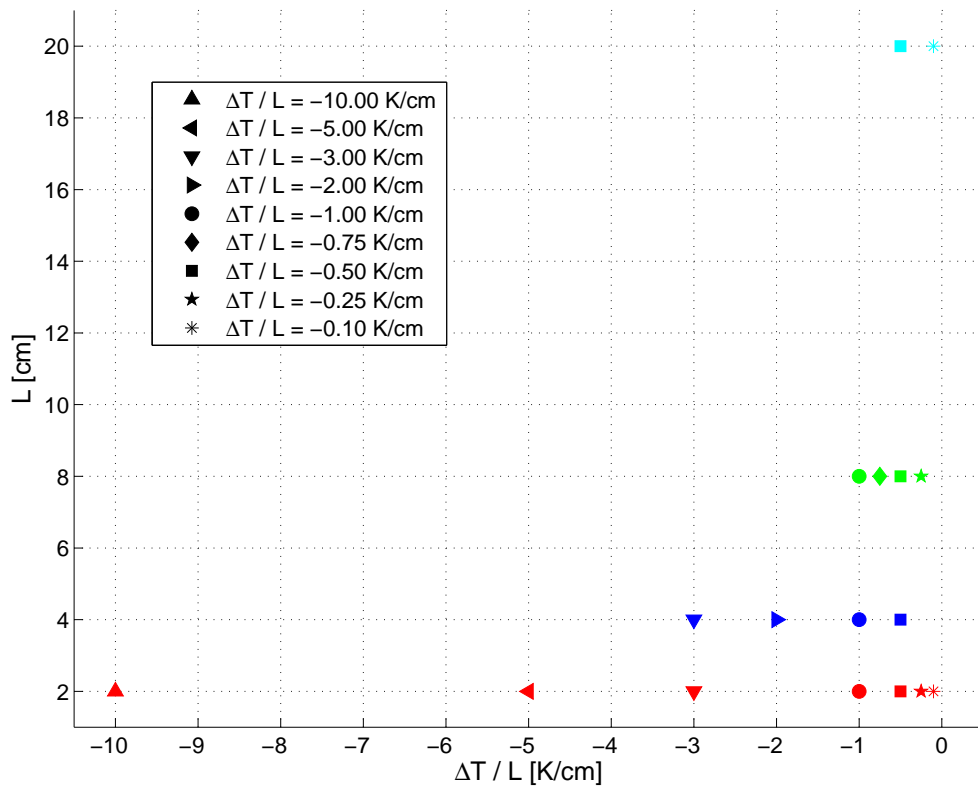


ABB. A.1: *Legende zu den Symbolen der Datenplots: Jedes Symbol entspricht einem bestimmten Temperaturgradienten, jede Farbe einer Zellhöhe.*

B Ergebnistabellen

Hier werden in tabellarischer Form die Messergebnisse dargestellt. Tabelle B.1 beinhaltet die Daten der Zelle mit $\Gamma = 10$. In Tabelle B.2 finden sich die Ergebnisse für $\Gamma = 5$. Die Werte mit $\Gamma = 2.5$ und $\Gamma = 1$ schließen sich in Tabelle B.3 und B.4 an. Tabelle B.5 listet drei Vergleichsmessungen auf, bei denen die Konvektion nur durch eine Komponente getrieben wird; die andere blieb während der gesamten Messung zeitlich und räumlich konstant. Diese Daten haben ein Aspektverhältnis von 10.

Jede Tabelle ist zuerst nach Konzentrations- und dann nach Temperaturdifferenzen aufsteigend sortiert.

Zu jeder Messung werden also die Konzentrations- und Temperaturdifferenzen Δc und ΔT angegeben. Es folgen die Messwerte für die Fingeraufbauzeit t_{merge} , Fingerdicke d , die rms-Geschwindigkeit u_{rms} und den Grenzstrom I . Daran schließen sich die errechneten Kennzahlen Λ , Sc , Pr , Ra_c , Ra_T und Sh .

Name	Δc [$\frac{\text{mol}}{\text{T}}$]	ΔT [K]	t_{merge} [s]	d [mm]	u_{rms} [mm/s]	I [mA]	Λ	Sc	Pr	Rac	RaT	Sh
090812	+0.032	-2.0	276	2.7	0.053 ± 0.001	250	-0.17	2031	8.8	$+5.85 \cdot 10^8$	$-4.19 \cdot 10^5$	37.8
090813	+0.030	-6.0	616	1.9	0.043 ± 0.001	240	-0.53	2029	8.8	$+5.49 \cdot 10^8$	$-1.26 \cdot 10^6$	38.7
090818	+0.030	-10.0	940	1.5	0.025 ± 0.001	200	-0.88	2029	8.8	$+5.49 \cdot 10^8$	$-2.10 \cdot 10^6$	32.2
090824	+0.048	-2.0	116	2.4	0.074 ± 0.003	600	-0.11	2046	8.8	$+8.78 \cdot 10^8$	$-4.18 \cdot 10^5$	60.6
090825	+0.053	-6.0	320	1.7	0.060 ± 0.002	620	-0.30	2051	8.8	$+9.69 \cdot 10^8$	$-1.25 \cdot 10^6$	56.8
090826	+0.046	-10.0	511	1.4	0.033 ± 0.001	490	-0.58	2044	8.8	$+8.41 \cdot 10^8$	$-2.09 \cdot 10^6$	51.6
090827	+0.050	-20.0	936	1.0	0.025 ± 0.002	360	-1.06	2048	8.8	$+9.15 \cdot 10^8$	$-4.18 \cdot 10^6$	34.9
100224	+0.060	-0.2	60	5.6	0.174 ± 0.017	775	-0.01	2268	9.3	$+1.11 \cdot 10^9$	$-3.81 \cdot 10^4$	66.2
100302	+0.062	-0.5	66	4.1	0.139 ± 0.004	890	-0.02	2059	8.9	$+1.13 \cdot 10^9$	$-1.04 \cdot 10^5$	69.8
100225	+0.060	-1.0	74	3.4	0.095 ± 0.007	818	-0.04	2160	9.1	$+1.10 \cdot 10^9$	$-1.99 \cdot 10^5$	68.0
090730	+0.066	-2.0	88	2.1	0.070 ± 0.001	840	-0.08	2063	8.9	$+1.21 \cdot 10^9$	$-4.17 \cdot 10^5$	61.9
100212	+0.064	-2.0	—	2.6	0.098 ± 0.015	830	-0.08	2272	9.3	$+1.18 \cdot 10^9$	$-3.80 \cdot 10^5$	66.5
090731	+0.066	-6.0	224	1.9	0.067 ± 0.003	820	-0.24	2063	8.9	$+1.21 \cdot 10^9$	$-1.25 \cdot 10^6$	60.4
090723	+0.062	-10.0	296	1.7	0.057 ± 0.001	780	-0.43	2059	8.9	$+1.13 \cdot 10^9$	$-2.09 \cdot 10^6$	61.2
090724	+0.060	-20.0	636	1.3	0.045 ± 0.002	700	-0.88	2057	8.9	$+1.10 \cdot 10^9$	$-4.18 \cdot 10^6$	56.7
100211	+0.068	-20.0	—	1.2	0.046 ± 0.004	650	-0.74	2276	9.3	$+1.25 \cdot 10^9$	$-3.80 \cdot 10^6$	49.0
090901	+0.084	-2.0	68	2.7	0.103 ± 0.007	1260	-0.06	2080	8.9	$+1.54 \cdot 10^9$	$-4.17 \cdot 10^5$	73.2
090902	+0.088	-6.0	184	1.8	0.075 ± 0.003	1230	-0.18	2084	8.9	$+1.61 \cdot 10^9$	$-1.25 \cdot 10^6$	68.3

090903	+0.088	-10.0	244	1.6	0.061 ± 0.004	1120	-0.30	2084	8.9	$+1.61 \cdot 10^9$	$-2.08 \cdot 10^6$	62.2
090904	+0.088	-20.0	480	1.1	0.042 ± 0.002	1045	-0.60	2084	8.9	$+1.61 \cdot 10^9$	$-4.16 \cdot 10^6$	58.0
091103	+0.096	-2.0	48	2.5	0.166 ± 0.067	1515	-0.05	2306	9.4	$+1.77 \cdot 10^9$	$-3.79 \cdot 10^5$	81.4
091104	+0.100	-6.0	152	1.9	0.148 ± 0.073	1450	-0.15	2310	9.4	$+1.84 \cdot 10^9$	$-1.14 \cdot 10^6$	74.8
090806	+0.105	-10.0	212	1.4	0.080 ± 0.002	1200	-0.25	2100	9.0	$+1.92 \cdot 10^9$	$-2.08 \cdot 10^6$	56.0
090807	+0.110	-20.0	432	1.2	0.039 ± 0.003	1020	-0.48	2105	9.0	$+2.01 \cdot 10^9$	$-4.15 \cdot 10^6$	45.5

TAB. B.1: Liste der Messungen mit $\Gamma = 10$ und entsprechend $L = 2$ cm. Dabei Messungen 100211 und 100212 mit anfänglichem Stufenprofil.

Name	Δc [$\frac{\text{mol}}{\text{l}}$]	ΔT [K]	t_{merge} [s]	d [mm]	u_{rms} [mm/s]	I [mA]	Λ	Sc	Pr	Ra_c	Ra_T	Sh
091023	+0.022	-2.0	496	3.2	0.058 ± 0.026	210	-0.22	2230	9.2	$+3.30 \cdot 10^9$	$-3.06 \cdot 10^6$	95.4
091022	+0.023	-4.0	675	2.5	0.045 ± 0.016	203	-0.45	2230	9.2	$+3.33 \cdot 10^9$	$-6.12 \cdot 10^6$	91.4
091019	+0.028	-8.0	—	2.0	0.027 ± 0.010	190	-0.73	2235	9.2	$+4.07 \cdot 10^9$	$-1.22 \cdot 10^7$	70.1
091020	+0.025	-12.0	1880	1.8	0.018 ± 0.006	180	-1.21	2232	9.2	$+3.69 \cdot 10^9$	$-1.83 \cdot 10^7$	73.3
091201	+0.057	-2.0	116	2.4	0.088 ± 0.006	177	-0.09	2265	9.3	$+1.05 \cdot 10^9$	$-3.81 \cdot 10^5$	63.8
091202	+0.074	-10.0	356	1.3	0.098 ± 0.018	182	-0.34	2283	9.3	$+1.37 \cdot 10^9$	$-1.90 \cdot 10^6$	50.2
091028	+0.099	-2.0	108	3.3	0.214 ± 0.041	1485	-0.05	2309	9.4	$+1.45 \cdot 10^{10}$	$-3.03 \cdot 10^6$	155.0
091030	+0.095	-4.0	180	2.6	0.208 ± 0.108	1280	-0.09	2871	10.4	$+1.43 \cdot 10^{10}$	$-4.88 \cdot 10^6$	156.0
091027	+0.100	-8.0	—	2.1	0.192 ± 0.015	1360	-0.20	2310	9.4	$+1.47 \cdot 10^{10}$	$-1.21 \cdot 10^7$	141.0
091029	+0.097	-12.0	311	1.8	0.127 ± 0.044	1295	-0.31	2307	9.4	$+1.43 \cdot 10^{10}$	$-1.82 \cdot 10^7$	138.0

TAB. B.2: Liste aller Messungen mit $\Gamma = 5$. Dabei Messungen 091023 bis 091029 mit $L = 4$ cm, $W = 20$ cm und den beiden Messungen mit abgetrennter Seitenfläche 091201,02 mit $L = 2$ cm und $W = 10$ cm.

Name	Δc [mol/l]	ΔT [K]	t_{merge} [s]	d [mm]	v_{rms} [mm/s]	I [mA]	Λ	Sc	Pr	Ra_c	Ra_T	Sh
091013	+0.022	-2.0	796	4.1	0.090 ± 0.004	175	-0.20	2846	10.3	$+2.64 \cdot 10^{10}$	$-1.92 \cdot 10^7$	185.0
091007	+0.022	-6.0	1280	2.8	0.062 ± 0.003	185	-0.69	2229	9.2	$+2.59 \cdot 10^{10}$	$-7.34 \cdot 10^7$	171.0
091012	+0.022	-8.0	2567	2.4	0.035 ± 0.002	165	-0.80	2846	10.3	$+2.64 \cdot 10^{10}$	$-7.66 \cdot 10^7$	174.0
100209	+0.066	-4.0	—	0.0	0.000 ± 0.000	672	-0.14	2833	10.3	$+7.92 \cdot 10^{10}$	$-3.91 \cdot 10^7$	235.0
091113	+0.098	-2.0	147	4.1	0.274 ± 0.071	1472	-0.05	2308	9.4	$+1.15 \cdot 10^{11}$	$-2.43 \cdot 10^7$	311.0
091111	+0.098	-4.0	248	3.3	0.233 ± 0.094	1275	-0.09	2875	10.4	$+1.17 \cdot 10^{11}$	$-3.90 \cdot 10^7$	303.0
091110	+0.099	-6.0	—	2.9	0.125 ± 0.029	1235	-0.14	2876	10.4	$+1.18 \cdot 10^{11}$	$-5.85 \cdot 10^7$	291.0
091112	+0.098	-8.0	292	2.6	0.224 ± 0.075	1370	-0.21	2308	9.4	$+1.15 \cdot 10^{11}$	$-9.70 \cdot 10^7$	290.0

TAB. B.3: Liste der Messungen mit $\Gamma = 2.5$, also aus der $L = 8$ cm-Zelle.

Name	$\Delta c [\frac{\text{mol}}{\text{l}}]$	$\Delta T [\text{K}]$	$t_{\text{merge}} [\text{s}]$	$d [\text{mm}]$	$u_{\text{rms}} [\text{mm/s}]$	$I [\text{mA}]$	Λ	Sc	Pr	Ra_c	Ra_T	Sh
090916	+0.060	-2.0	—	5.5	0.301 ± 0.022	830	-0.09	2057	8.9	$+1.10 \cdot 10^{12}$	$-4.18 \cdot 10^8$	672.0
090921	+0.062	-10.0	996	3.3	0.145 ± 0.051	775	-0.43	2059	8.9	$+1.13 \cdot 10^{12}$	$-2.09 \cdot 10^9$	608.0

TAB. B.4: Die beiden Messungen mit $\Gamma = 1.0$ und entsprechend $L = 20 \text{ cm}$.

Name	$\Delta c [\frac{\text{mol}}{\text{l}}]$	$\Delta T [\text{K}]$	$t_{\text{merge}} [\text{s}]$	$d [\text{mm}]$	$u_{\text{rms}} [\text{mm/s}]$	$I [\text{mA}]$	Λ	Sc	Pr	Ra_c	Ra_T	Sh
100303	—	+1.0	—	26.0	0.572 ± 0.058	0	—	2061	8.9	—	$+2.09 \cdot 10^5$	—
100304	—	+10.0	—	12.0	1.820 ± 0.118	0	—	2061	8.9	—	$+2.09 \cdot 10^6$	—
100301	+0.062	—	—	8.0	0.305 ± 0.006	805	—	2162	9.1	$+1.14 \cdot 10^9$	—	64.8

TAB. B.5: Liste der einfach diffusiven Messungen (alle mit $\Gamma = 10.0$ und entsprechend $L = 2 \text{ cm}$).

C Bestimmung der Materialeigenschaften

In diesem Anhang wird beschrieben, wie die Fluideigenschaften des Arbeitsfluids in Abhängigkeit der Temperatur und der verschiedenen Konzentrationen für jede Messung ermittelt wurden.

C.1 Bestimmung der Kupferkonzentration

Für jede Messung muss die Konzentration der Kupferionen bekannt sein, damit die Konzentrationsdifferenz bzw. der -gradient bestimmt werden kann. Leider reicht es aber nicht, durch Abwiegen der nötigen Kupfersulfatmenge (sie liegt als kristallines Kupfer(II)-Sulfat-Pentahydrat – $CuSO_4 \cdot 5 H_2O$ vor) eine Lösung der gewünschten Konzentration herzustellen, weil zum einen das Abwiegen zu ungenau ist, zum anderen die Konzentration in der Zelle zeitlich nicht konstant bleibt.

Es gibt aber einen linearen Zusammenhang zwischen der Extinktion E_λ (bei einer festen Wellenlänge λ) und der Konzentration. Diesen Zusammenhang beschreibt das Lambert-Beer'sche Gesetz:

$$E_\lambda = -\lg\left(\frac{I_1}{I_0}\right) = \epsilon_\lambda \cdot c \cdot d, \quad (C.1)$$

wobei I_1 die Intensität des transmittierten Lichts und I_0 die des einfallenden Lichts ist. c ist die Konzentration der Substanz, ϵ_λ der dekadische molare Extinktionskoeffizient bei der Wellenlänge λ und d die Dicke des durchleuchteten Fluids.

Um die konzentrationsabhängige Absorption der Lösung zu nutzen, wurde eine Eichkurve bestimmt (diese ist in Abbildung C.2 zu sehen). Dazu wurde eine 0.1 molare Kupfersulfatlösung (in 1-molarer Schwefelsäure) hergestellt und zu den gewünschten Konzentrationen verdünnt. Die größte Ungenauigkeit der Kalibrierkurve entsteht also durch das Abmessen der Lösungsmengen ($\pm 2 \cdot 0.05$ ml).

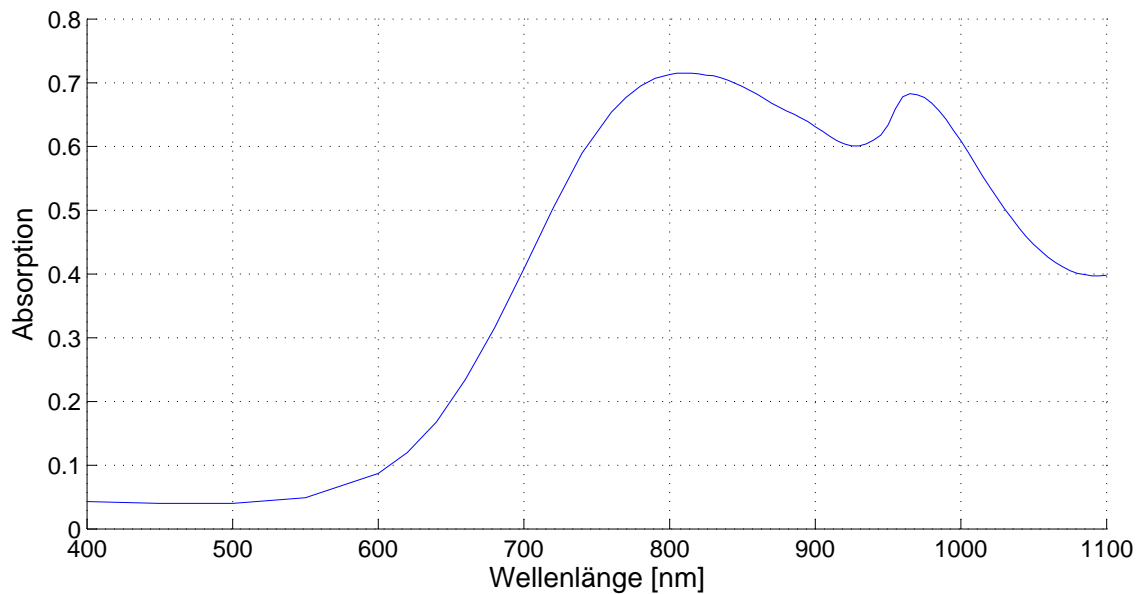


ABB. C.1: Typischer Verlauf eines Spektrums von Kupfersulfat in 1-molarer Schwefelsäure – hier eine Konzentration von $c = 0.058 \text{ M}$.

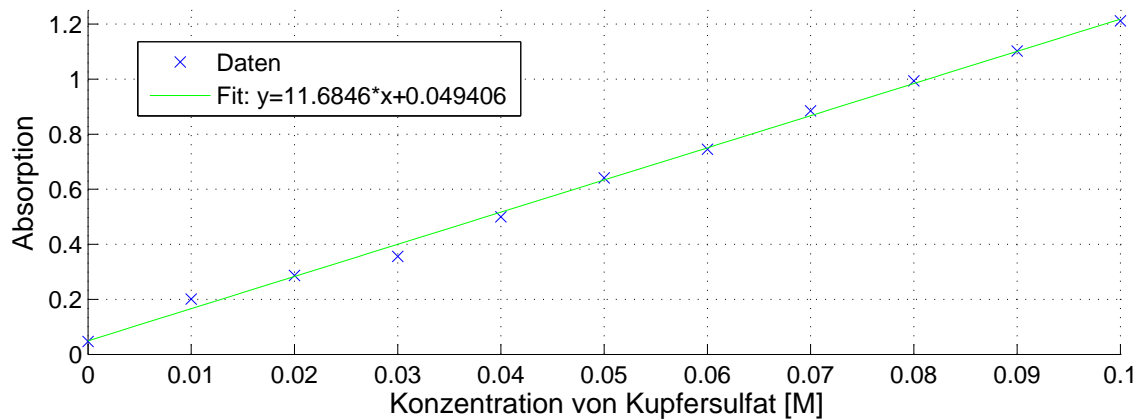


ABB. C.2: Eichkurve zur Bestimmung der Cu^{2+} -Konzentration in 1-molarer Schwefelsäure bei 800 nm.

Das Spektrum von Kupfersulfat in Schwefelsäure hat ein Maximum bei $\lambda = 800 \text{ nm}$ (siehe Abbildung C.1), daher wurde diese Wellenlänge für die Eichkurve und die Folgemessungen gewählt.

Die Kalibrierung ergibt:

$$c[\text{mol/l}] = \frac{A - 0.049}{11.68} \pm 0.001, \quad (\text{C.2})$$

wobei A der Zahlenwert der gemessenen Absorption ist (siehe dazu auch Abbildung C.2). Es ist allerdings zu beachten, dass das Photometer keine absoluten Werte liefert, sondern man immer erst eine sog. Baseline messen muss (Spektrum ohne Küvette und Lösung). Außerdem braucht man eine Probe bekannter Konzentration (z.B. $c = 0$ M), um den Offset des Gerätes bei jeder Messung zu bestimmen.

C.2 Gleichungen zur Bestimmung der Stoffeigenschaften

Um aus den abgelesenen Messdaten die Kennzahlen zu berechnen, benötigt man zuerst einmal die zugehörigen Materialkonstanten. Hier wird deshalb kurz aufgeführt, wie die nicht direkt zu bestimmenden Parameter ermittelt werden.

Der Übersichtlichkeit halber werde ich in den Formeln diesen Abschnitts Abkürzungen benutzen: c_1 bzw. c_2 ist der Zahlenwert der Kupfersulfat- bzw. Schwefelsäure-Konzentration in [mol/l] und $\Theta = (T - 25)$ wobei $T = \frac{T_t + T_b}{2}$ der Zahlenwert der mittleren Temperatur in [°C] ist. Die Formeln stammen aus [Chiang and Goldstein, 1992], Referenzwerte aus [CRC, 2000].

Dichte:

$$\begin{aligned} \rho \text{ [kg/m}^3\text{]} = & 999.448 + 148.07c_1 + 60.816c_2 - 0.4246\Theta + \\ & + 1.51c_1^2 - 0.7043c_2^2 - 4.56c_1c_2 - \\ & - 4.47 \cdot 10^{-3}\Theta^2 - 6.0 \cdot 10^{-2}c_1\Theta + 1.81 \cdot 10^{-2}c_2\Theta \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Viskosität:

$$\begin{aligned} \mu \left[\frac{\text{kg}}{\text{s m}} \right] = & (899.54 + 453.7c_1 + 140.63c_2 - 19.235\Theta + \\ & + 232.4c_1^2 + 28.94c_2^2 + 94.96c_1c_2 + \\ & + 0.321\Theta^2 - 15.04c_1\Theta - 4.953c_2\Theta) 10^{-6} \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Diffusionskoeffizienten:

$$\kappa_c \text{ [m}^2\text{/s]} = \left(\frac{T + 273.15}{\mu} \right) 2.09 \cdot 10^{-15} \quad (\text{C.5})$$

$$\kappa_T \text{ [m}^2\text{/s]} = \frac{k_T}{\rho c_p}; \quad (\text{C.6})$$

mit der spezifischen Wärmekapazität $c_p \left[\frac{\text{J}}{\text{kg K}} \right] = 4178 - 174.6 c_2$ und der Wärmeleitfähigkeit $k_T \left[\frac{\text{J}}{\text{s K m}} \right] = 0.52077 + 0.0049033 c_2$; μ und ρ aus (C.4) und (C.3).

Transportzahl:

$$t_{Cu^{2+}} = (0.2633 - 0.1020 c_2) c_1 \quad (\text{C.7})$$

Dichtevariationskoeffizienten: Es ist laut Definition:

$$\alpha_c = \frac{1}{\varrho_0} \left(\frac{\partial \varrho}{\partial c} \right)_{T_0, p_0} \quad \text{bzw.} \quad \alpha_T = - \frac{1}{\varrho_0} \left(\frac{\partial \varrho}{\partial T} \right)_{c_0, p_0} . \quad (\text{C.8})$$

Mit Formel (C.3) für die Dichte ergibt sich somit:

$$\alpha_c \left[\frac{1}{\text{mol}} \right] = \frac{1}{\varrho} (148.07 + 2 \cdot 1.51 c_1 - 4.56 c_2 - 0.06 T) \quad (\text{C.9})$$

$$\alpha_T \left[\frac{1}{\text{K}} \right] = \frac{1}{\varrho} (-0.4246 - 2 \cdot 4.47 \cdot 10^{-3} T - 0.06 c_1 + 1.810 \cdot 10^{-2} c_2) . \quad (\text{C.10})$$

Konzentrationsdifferenz: Die Dichtedifferenz aufgrund des Konzentrationsgradienten zwischen Anode und Kathode kann man für den statischen Fall mit Störungsrechnung ermitteln. Damit erhält man im Grenzstrombereich einen Gesamtunterschied in der Dichte, der dem Fall entspricht, dass sich die Kupfersulfatkonzentration von 0 auf $2 c_1$ ändert, die Schwefelsäurekonzentration aber konstant bleibt. Damit ist

$$\Delta c = 2 c_1 \quad (\text{C.11})$$

D Technische Angaben

In diesem Anhang werden die technischen Daten der im Experiment genutzten Geräte und Materialien aufgeführt.

PIV-Komponenten

Laser

Um die PIV-Aufnahmen zu machen wurde ein Nd:YAG-Laser-System der Firma „New Wave Research, Inc“ mit der Typenbezeichnung „Solo III-15“ benutzt. Es besitzt zwei IR-Laserköpfe, die zusammen in einem Gehäuse stecken. Die Strahlen werden in einem KTP-Kristall frequenzverdoppelt und treten vertikal polarisiert in die Lichtschnittoptik. Weitere Eigenschaften sind:

- Wellenlänge: 532 nm
- Wiederholungsrate: 15 Hz
- Energie: 50 mJ
- Strahldurchmesser: 3,5 mm
- Pulsweite (full width half maximum): 3-5 ns

Der Laser kann sowohl manuell als auch über TTL-Signale oder, wie für PIV mit dem „ILA“-Synchronisator nötig, über BNC-Stecker gesteuert werden.

Der Lichtschnitt wird durch eine variable, divergente Lichtschnittoptik, die direkt an den Laserkopf geschraubt wird, erzeugt. Verschiedene Linsen ermöglichen eine Fokussierung in gewünschter Entfernung und eine Justage der benötigten Schnittbreite. Durch einfaches Drehen kann man zusätzlich die Ausrichtung des Lichtschnitts frei wählen.

Kamera

Die PIV-Aufnahmen wurden mit der CCD-Kamera von „PCO“, der PixelFly qe, aufgenommen. Die Kamera erzeugt 12 Bit schwarz/weiß Bilder und die maximale spektrale Empfindlichkeit liegt bei 62 % (bei 500 nm). Weitere Eigenschaften sind:

Pixel: Auflösung von 1392 (horiz.) \times 1024 (vert.) Pixeln bei einer Pixelgröße von 6.45 \times 6.45 μm .

CCD-Sensor: Diagonale von 11.14 mm, Scanbereich 9.0 \times 6.6 mm.

Die Auslesezeit beträgt 87 bzw. 43 ms bei Binning von 1 bzw. 2, damit eine Bildfrequenz von 12 bzw. 23 fps.

Objektiv: Die Kamera besitzt einen C-Mount-Anschluss für Objektive. Für die Aufnahmen wurden Objektive der Firma „Nikon“ benutzt: das Normalobjektiv AF Nikkor 50 mm 1:1,8 D und das Weitwinkelobjektiv AF Nikkor 24 mm 1:2. Teilweise wurden zusätzlich Linsen mit Brennweiten von $f = 200$ bzw. 300 mm benutzt, um vergrößerte Ausschnitte darzustellen.

Timing: Die Kamera verfügt über verschiedene Belichtungszeitmodi, unter anderem über den für die PIV zu benutzenden Double-Shutter-Modus.

Die Triggerung kann sowohl intern über die Software als auch extern über das PCI-Board erfolgen.

Software: Mit der mitgelieferten Software CamWare kann die Kamera komplett gesteuert werden. Sie kann die Bilder aufnehmen, darstellen und in diversen Formaten abspeichern.

Synchronisation

Die Synchronisation des gesamten PIV-Systems wird durch den „mini PIV-Synchronizer“ der Firma „ILA -Intelligent Laser Applications GmbH“ gesteuert. Einstellen lassen sich folgende Größen:

Laser: Der Zeitabstand der Laserpulse Δt kann in dem Bereich $10 \text{ ms} < \Delta t < 75 \text{ ms}$ angegeben werden. Bei größeren Zeitabständen schaltet der Laser automatisch von 'double shutter mode' auf 'pseudo double shutter mode' um, wobei nur ein Laser benutzt wird.

Auch die Laserenergie wird für jeden Laser einzeln [in % der Maximalenergie] eingegeben, um eine gleichhelle Ausleuchtung zu garantieren.

Hier werden auch die Frequenzen der Lampen und der Q-Switche angegeben, wobei erstere immer $> 8 \text{ Hz}$ betragen sollte, um eine gleichmäßige Beleuchtung sicherzustellen.

Kamera: Aufnahmefrequenz und mögliche Delay-Zeit werden eingestellt. Es ist auf die begrenzte Auslesegeschwindigkeit des CCD-Chips zu achten.

Software

Zur Bearbeitung und Auswertung der PIV-Aufnahmen wird die Software „VidPIV“, wieder von ILA, benutzt. Diese ermöglicht die Eingabe der experimentellen Gegebenheiten („Timing“ und „Mapping“) und lässt den Benutzer die Auswertungsschritte individuell zusammenstellen. Die Software bietet fertige Korrelationsalgorithmen, diverse einzeln einstellbare Filter, Interpolations- und Statistikfunktionen, die in einer Baumstruktur aufgestellt werden und dann auf ausgewählte Bilder angewendet werden können. Außerdem können zu jedem Auswertepunkt – falls gewünscht – die Bilder als Bilddatei oder Datenmatrix exportiert werden.

Strömungssichtbarmachung

Streupartikel

Als Streuteilchen für die PIV-Messungen wurden die Polyamid Seeding Particles der Firma „DANTEC Dynamics“ benutzt. Sie tragen die Nummer 38A2122 PSP-50, haben einen Teilchendurchmesser von nur $50\ \mu\text{m}$ und eine Dichte von $\rho = 1.03\ \text{g/cm}^3$, die nur minimal kleiner als die der benutzten Schwefelsäure ist. Die Teilchen werden in hoher Konzentration (etwa eine Spatelspitze in 20 ml Lösung) in die Lösung entsprechender Kupfersulfat-Konzentration eingerührt und dann mittels einer Spritze in die Zelle eingespritzt. Durch die Bewegung des Einspritzens und der Strömung in der Zelle verteilen sich die Teilchen in wenigen Minuten und bewegen sich für die gesamte Messzeit mit der Strömung mit ohne aufzusteigen.

Schattenverfahren

Als Lichtquelle für die Schattenaufnahmen wurde der Laser benutzt, dessen Strahl mit drei Zylinderlinsen (jeweils senkrecht zueinander) so aufgeweitet wurde, dass er die gesamte Zelle durchleuchtet. Ein weißer Schirm im Abstand von ca 1 m hinter der Zelle dient als Projektionsfläche und wird mit der „PixelFly“-CCD-Kamera abfotografiert. Zum Aufbau siehe auch [Abbildung 3.3](#).

Temperatur

Temperaturregulierung

Die Kupferplatten werden mit Kältethermostaten der Firma „Lauda“ auf die gewünschte Temperatur gebracht und gehalten. Die genaue Typenbezeichnung ist Ecoline RE 310. Technische Daten sind unter anderem:

- Der Arbeitstemperaturbereich liegt zwischen -40 und $+200$ °C mit einer Auflösung von $0,1$ °C und einer Temperaturkonstanz von $\pm 0,2$ °C.
- Die Heizleistung beträgt $2,25$ kW und die effektive Kühlleistung $0,5$ kW (bei 20 °C).
- Die Druckpumpe hat 5 wählbare Leistungsstufen, wobei der maximale Förderdruck $0,4$ bar ist und der daraus resultierende maximale Förderstrom 171 /min.

Temperaturmessung

Die Temperatur wurde auf drei unterschiedliche Weisen gemessen:

Thermoelemente: Um in der Zelle Temperaturmessungen durchführen zu können, werden Thermoelemente des Typs T (Kupfer/Konstantan) der Firma „physitemp“ benutzt. Die genaue Bezeichnung ist IT-23. Durch die Teflonbeschichtung sind sie säureresistent bei einem Drahtdurchmesser von nur $0,08$ mm und einer Ansprechzeit von $0,03$ s.

Thermistoren: Um die Plattentemperatur zu messen, werden Thermistoren benutzt. Diese sind NTC-Widerstände, deren Ursprung ungewiss ist. Durch eine Eichung können sie gut genutzt werden und geben die Plattentemperatur bis auf $\frac{1}{100}$ °C genau an.

Thermokristalle: Alternativ kann die Temperatur auch mit Thermokristallen beobachtet werden, die ihre Farbe je nach Temperatur ändern. Hier wurden die mikrogekapselten Thermochromic liquid crystals (TLC) der Firma „Hallcrest Inc.“ verwendet, die einen angegebenen Temperaturbereich von 15 °C (rot) bis 25 °C (blau) haben und als konzentrierte Suspension vorliegen. Der Teilchendurchmesser beträgt 50 – 100 μm . Durch das Alter der Kristalle hat sich der Temperaturbereich auf etwa 13 – 17 °C verschoben.

Weitere Geräte

Vakuumpumpe

Die Vakuumpumpe der Firma „vacuubrand“ ist eine dreistufige Membranpumpe mit der Bezeichnung „MD 4“. Sie besitzt ein Saugvermögen von $3,3 \text{ m}^3/\text{h}$ und kann ein Endvakuum von 1,5 mbar (absolut) erreichen.

Photometer

Zur Bestimmung der Kupferkonzentration wurde vor und nach jeder Messung eine 10 ml-Probe der Lösung entnommen und in einem UV-Visible Spectrophotometer der Firma „Shimadzu Corporation“ vermessen. Die Gerätebezeichnung ist „UV-1700 PharmaSpec, Model TCC-240A“. Es ist weiter:

- Der messbare Bereich der Wellenlänge reicht von 190 bis 1100 nm bei einer Auflösung von $< 1 \text{ nm}$ und einer Genauigkeit von $\pm 0.5 \text{ nm}$
- Lichtmessung: Photometrischer Bereich von -0.5 bis 3 Abs bei einer Genauigkeit von $\pm 0.004 \text{ Abs}$
- Lampe: 20 W Halogenlampe und eine Deuteriumlampe für den UV-Bereich

Waagen

Zum Abwiegen der Chemikalien wurden zwei Waagen der Firma „Sartorius“ benutzt. Die Präzisionswaage „LC 4201S“ mit einer maximalen Belastbarkeit von 4200 g und einer Messgenauigkeit von $\frac{1}{100} \text{ g}$ zum Abmessen von z. B. Flüssigkeitsmengen.

Kleine Mengen an Chemikalien, z. B. Kupfersulfat-Pentahydrat zum Anmischen der Kupfersulfatlösung einer bestimmten Konzentration, wurden auf der Analysewaage „CP64“ abgewogen. Die maximale Belastung liegt hier bei 64 g und die Genauigkeit bei $\frac{1}{10} \text{ mg}$.

Spannungsquelle

Als Spannungsquelle dient die „E3644A“ von „Agilent Technologies“. Es ist ein „single-output dual range“ Gerät. Es wird im Niedrigvolt-Bereich betrieben und hat folgende Spezifikationen:

- 0 bis 8 A bei 0 bis 8 V
- Rücklesbarkeit von $< 0.05\% + 5 \text{ mV}$
- Rauschen von $< 0.5 \text{ mV rms}$
- Auflösung bei direkter Bedienung durch das vordere Bedienfeld: 10 mV

Multimeter

Das Multimeter der Firma „Keithley Instruments, Inc.“ mit der Nummer 2700 wird benutzt, um die Temperaturmessungen durchzuführen. Es können dort bis zu 20 einzelne Größen gemessen werden, so auch die Widerstände der Thermistoren oder die Temperaturen (über die Spannungen; Typ und Referenztemperaturen werden einzeln eingegeben) der Thermoelemente. Das Gerät kann programmiert werden über eine Schnittstelle für GPIB (IEEE-488.2) und SCPI. Ein Programm wurde geschrieben, mit dem Zeitreihen beliebige Größen zeitgleich aufgenommen werden können.

Chemikalien

Wasser: Für sämtliche Lösungen und zum Reinigen wird destilliertes Wasser (H_2O) benutzt.

Kupfersulfat: Zum Mischen der Kupfersulfatlösung wird kristallines Kupfersulfat-Pentahydrat ($CuSO_4 \cdot 5 H_2O$), reinst Ph. Eur., USP mit einer Masse von $M = 249.68$ g/mol verwendet.

Schwefelsäure: Die Schwefelsäure (H_2SO_4) liegt in konzentrierter Form (96%, rein) vor. Sie hat so eine Molmasse von $M = 98.08$ g/mol und eine Dichte von $D \sim 1.84$.

Literaturverzeichnis

- [CRC, 2000] (2000). *CRC Handbook of Chemistry and Physics*. CRC Press LLC, 81 edition.
- [Ahlers et al., 2009] Ahlers, G., Grossmann, S., and Lohse, D. (2009). Heat transfer and large scale dynamics in turbulent Rayleigh-Bénard convection. *Rev. Mod. Physics*, 81(2).
- [Baines and Gill, 1969] Baines, P. and Gill, A. (1969). On thermohaline convection with linear gradients. *J. Fluid Mech.*, 37(2).
- [Balmforth et al., 2006] Balmforth, N., Ghadge, S., Kettapun, A., and Mandre, S. (2006). Bounds on double-diffusive convection. *J. Fluid Mech.*, 569.
- [Boussinesq, 1903] Boussinesq, J. (1903). *Théorie Analytique de la Chaleur*, volume 2. Gauthier-Villars, Paris.
- [Chen and Chen, 1997] Chen, C. and Chen, F. (1997). Salt-finger convection generated by lateral heating of a solute gradient. *J. Fluid Mech.*, 352.
- [C.H.Hamann and W.Vielstich, 1980] C.H.Hamann and W.Vielstich (1980). *Elektrochemie II*. VCH, Weinheim.
- [Chiang and Goldstein, 1992] Chiang, H. and Goldstein, R. (1992). Application of the Electrochemical Mass Transfer Technique to the study of Bouyancy-driven Flows. In *Transport Phenomena in Heat and Mass Transfer*, volume 1. Elsevier, Amsterdam.
- [Gerstung, 2010] Gerstung, P. (2010). Numerische 2D-Simulationen chemisch getriebener Konvektion mit drei Ionen Sorten. Master's thesis, Georg-August-Universität, Göttingen.
- [Goldstein et al., 1990] Goldstein, R., Chiang, H., and See, D. (1990). High-Rayleigh-number convection in a horizontal enclosure. *J. Fluid Mech.*, 213.
- [Griffiths and Ruddick, 1980] Griffiths, R. and Ruddick, B. (1980). Accurate fluxes across a salt-sugar finger interface deduced from direct density measurements. *J. Fluid Mech.*, 99.

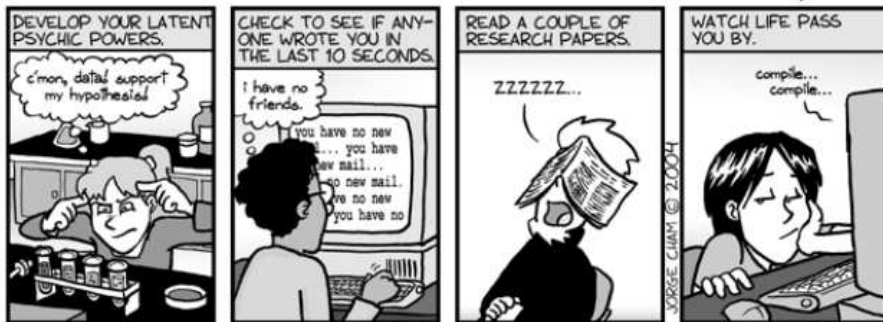
- [Grossmann and Lohse, 2001] Grossmann, S. and Lohse, D. (2001). Thermal convection for large Prandtl number. *Phys. Rev. Lett.*, 86.
- [Haase, 2010] Haase, O. (2010). Numerische Simulation doppelt diffusiver Konvektion. Master's thesis, Georg-August-Universität, Göttingen.
- [Hage, 2003] Hage, E. (2003). Chemisch getriebene Konvektion. Master's thesis, Georg-August-Universität, Göttingen.
- [Haramina, 2005] Haramina, T. (2005). *Coherent Structures in Turbulent Rayleigh-Bénard Convection*. PhD thesis, Georg-August-Universität, Göttingen.
- [Hartlep, 2004] Hartlep, T. (2004). *Strukturbildung und Turbulenz. Eine numerische Studie zur turbulenten Rayleigh-Bénard-Konvektion*. PhD thesis, Georg-August-Universität, Göttingen.
- [Hosoyamada and Honji, 1989] Hosoyamada, T. and Honji, H. (1989). A thermohaline-diffusion tank with a movable plate. *Experiments in Fluids*, 7(3).
- [Jevons, 1857] Jevons, W. (1857). On the cirrous form of cloud. *London, Edinburgh, Dublin Philos. Mag. J. Sci., 4th Ser.*, 14.
- [Krishnamurti, 2003] Krishnamurti, R. (2003). Double-diffusive transport in laboratory thermohaline staircases. *J. Fluid Mech.*, 483.
- [Krishnamurti, 2009] Krishnamurti, R. (2009). Heat, salt and momentum transport in a laboratory thermohaline staircase. *J. Fluid Mech.*, 638.
- [Kunze, 2003] Kunze, E. (2003). A review of oceanic salt-fingering theory. *Progress in Oceanography*, 56.
- [Levich, 1962] Levich, V. (1962). *Physicochemical Hydrodynamics*. Prentice Hall, New Jersey.
- [Linden, 1973] Linden, P. (1973). On the structure of salt fingers. *Deep-Sea Research*, 20.
- [Linden, 2000] Linden, P. (2000). Convection in the Environment. In *Perspectives in Fluid Dynamics*, chapter 6. Cambridge University Press.
- [Malkus, 1954] Malkus, M. (1954). The heat transport and spectrum of thermal turbulence. *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, 225(1161).
- [Markus and Kötter, 2001] Markus, M. and Kötter, K. (2001). Double-diffusive fingering instability of a surfactant-glycerine-water drop in water. *Europhys. Letters*, 55(6).

- [Markus and Kötter, 2005] Markus, M. and Kötter, K. (2005). Doppelt-diffusive Konvektion. Einfach demonstriert mit Kaffeeweißer. *Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht*, 58(1).
- [Ward III and Le Blanc, Jr, 1984] Ward III, W. and Le Blanc, Jr, O. (1984). Rayleigh-Bénard Convection in an Electrochemical Redox Cell. *Science*.
- [McDougall and Taylor, 1984] McDougall, T. and Taylor, J. (1984). Flux measurements across a finger interface at low values of the stability ratio. *Journal of Marine Research*, 42(1).
- [Merryfield, 2000] Merryfield, W. (2000). Origin of Thermohaline Staircases. *J. Phys. Oceanography*, 30.
- [Nagashima et al., 1997] Nagashima, H., Yoshida, J., and Nagahama, Y. (1997). A three dimensional modeling of salt-fingering convection. In *Proceedings of an international congress on modeling and simulation*, volume 1.
- [Oberbeck, 1879] Oberbeck, A. (1879). Über die Wärmeleitung der Flüssigkeiten bei Berücksichtigung der Strömungen infolge von Temperaturdifferenzen. *Annalen der Physik und Chemie*, 243(6).
- [Piacsek and Toomre, 1980] Piacsek, S. and Toomre, J. (1980). Nonlinear evolution and structure of salt fingers. In *Marine Turbulence*. Elsevier, Amsterdam.
- [Proctor and Holyer, 1986] Proctor, M. and Holyer, J. (1986). Planform selection in salt fingers. *J. Fluid Mech.*, 168.
- [Puthenveetil and Arakeri, 2005] Puthenveetil, B. and Arakeri, J. (2005). Plume structure in high-Rayleigh-number convection. *J. Fluid Mech.*, 542.
- [Radko, 2003] Radko, T. (2003). A mechanism for layer formation in a double-diffusive fluid. *J. Fluid Mech.*, 497.
- [Radko, 2005] Radko, T. (2005). What determines the thickness of layers in a thermohaline staircase? *J. Fluid Mech.*, 523.
- [Radko and Stern, 2000] Radko, T. and Stern, M. (2000). Finite-amplitude salt fingers in a vertically bounded layer. *J. Fluid Mech.*
- [Raffel et al., 1998] Raffel, M., Willert, C., and Kompenhans, J. (1998). *Particle Image Velocimetry, A practical Guide*. Springer.
- [Rayleigh, 1883] Rayleigh, L. (1883). Investigation of the character of the equilibrium of an incompressible heavy fluid of variable density. In *Proc. London Math. Soc.*, volume 14.

- [Ruddick and Gargett, 2003] Ruddick, B. and Gargett, A. (2003). Oceanic double-diffusion: introduction. *Progress in Oceanography*, 56.
- [Saiki et al., 1998] Saiki, E., Kerr, R., and Large, W. (1998). Numerical simulation of three-dimensional thermohaline fingering. In *Developments in Geophysical Turbulence*. Proceedings of the IUTAM symposium, Kluwer Academic Publishers.
- [Schmitt, 1979a] Schmitt, R. (1979a). Flux measurements at an interface. *Journal of Marine Research*, 37.
- [Schmitt, 1979b] Schmitt, R. (1979b). The growth rate of supercritical salt fingers. *Deep-Sea Research*, 26(23).
- [Schmitt, 1994] Schmitt, R. (1994). Double diffusion in oceanography. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 26.
- [Schmitt, 1995] Schmitt, R. (1995). The Salt Finger Experiments of Jevons (1857) and Rayleigh (1880). *J. Phys. Oceanography*, 25.
- [Schmitt, 2003] Schmitt, R. (2003). Observational and laboratory insights into salt finger convection. *Progress in Oceanography*, 56.
- [Schmitz, 2009] Schmitz, S. (2009). *Numerische Simulation rotierender Rayleigh-Bénard-Konvektion ohne Ekman-Schichten*. PhD thesis, Georg-August-Universität, Göttingen.
- [Selman and Newman, 1971] Selman, J. and Newman, J. (1971). Free Convection Mass Transfer with a Supporting Electrolyte. *J. Electrochem. Soc.*, 118(7).
- [Shen, 1989] Shen, C. (1989). The evolution of the double-diffusive instability: Salt fingers. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, 1(5).
- [Shen, 1993] Shen, C. Y. (1993). Heat-salt finger fluxes across a density interface. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, 5(11).
- [Shirtcliffe and Turner, 1970] Shirtcliffe, T. and Turner, J. (1970). Observations of the cell structure of salt fingers. *J. Fluid Mech.*, 41(4).
- [Sreenivas et al., 2009] Sreenivas, K., Sigh, O., and Srinivasan, J. (2009). On the relationship between finger width, velocity, and fluxes in thermohaline convection. *Physics of Fluids*, 21(2).
- [Stellmach et al., 2009] Stellmach, S., Garaud, P., Traxler, A., Brummell, N., and Radko, T. (2009). Spontaneous Layer Formation by Compositionally-Driven Double-Diffusive Convection.
- [Stern, 1960] Stern, M. (1960). The "Salt-Fountain" and Thermohaline Convection. *Tellus*, 12(2).

- [Stern, 1969] Stern, M. (1969). Collective Instability of salt fingers. *J. Fluid Mech.*, 35(2).
- [Stommel, 1961] Stommel, H. (1961). Thermohaline Convection with Two Stable Regimes of Flow. *Tellus*, 13(2).
- [Stommel et al., 1956] Stommel, H., Arons, A., and Blanchard, D. (1956). An oceanographical curiosity: the perpetual salt fountain. *Deep-Sea Research*, 3.
- [Taylor and Bucens, 1989] Taylor, J. and Bucens, P. (1989). Laboratory experiments on the structure of salt fingers. *Deep-Sea Research*, 36(11).
- [Turner, 1965] Turner, J. (1965). The coupled turbulent transports of salt and and heat across a sharp density interface. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 8(5).
- [Turner, 1967] Turner, J. (1967). Salt finger across a density interface. *Deep-Sea Research*, 14.
- [Turner, 1974] Turner, J. (1974). Double-diffusive Phenomena. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 6.
- [Turner and Chen, 1974] Turner, J. and Chen, C. (1974). Two-dimensional effects in double-diffusive convection. *J. Fluid Mech.*, 63.
- [Wagner, 1949] Wagner, C. (1949). The Role of Natural Convection in Electrolytic Processes. *Journal of The Electrochemical Society*, 95(4).
- [Warner, 2010] Warner, C. (2010). Visualisierung mit thermochromen Flüssigkristallen. Master's thesis, Georg-August-Universität, Göttingen.
- [Wikipedia, 2010a] Wikipedia (07.05.2010a). Latte Macchiato.
http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Latte_macchiato.jpg.
- [Wikipedia, 2010b] Wikipedia (17.05.2010b). thermohaline circulation.
http://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Thermohaline_Circulation_2.png.
- [Wilke et al., 1953] Wilke, C., Eisenberg, M., and Tobias, C. (1953). Correlation of Limiting Currents under Free Convection Conditions. *J. Electrochem. Soc.*, 100(11).
- [Xia et al., 2002] Xia, K.-Q., Lam, S., and Zhou, S.-Q. (2002). Heat-Flux Measurements in High-Prandtl-Number Turbulent Rayleigh-Bénard Convection. *Phys. Rev. Lett.*, 88(6).
- [Özgökmen et al., 1998] Özgökmen, T., Esenkov, O., and Olson, D. (1998). A numerical study of layer formation due to fingers in double-diffusive convection in a vertically-bounded domain. *Journal of Marine Research*.

THINGS TO DO WHILE WAITING FOR YOUR EXPERIMENT TO FINISH (OR SIMULATION TO RUN, OR CODE TO COMPILE, OR...)



www.phdcomics.com ¹

¹<http://www.phdcomics.com/comics/archive.php?comid=413>; originally published 2/6/2004

Danksagung

Besonders bedanken möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Andreas Tilgner für seine gute Betreuung, die ständige Diskussions- und Hilfsbereitschaft, die vielen Ideen und Hinweise und die Tolerierung meiner unregelmäßigen Arbeitszeiten.

Herrn Prof. Dr. Dr. Andreas Dillmann danke ich für die Übernahme des Korreferats.

Mein Dank gilt auch Herrn Wilfried Steinhoff, der mir in den letzten Monaten vor seiner Pensionierung den gesamten Versuchsaufbau anfertigte, sowie Herrn Hille und seinem Team für die Übernahme der anfallenden Werkstattarbeiten. Außerdem den weiteren (technischen) Angestellten, die mir mit sofortiger Hilfe zur Seite standen. Desweiteren bedanke ich mich bei den Biophysikern, insbesondere bei Dr. Stefan Lakämper, für die Einarbeitung und das zur Verfügung stellen ihres Photometers.

Den Mitgliedern der Arbeitsgruppe danke ich für die guten Gespräche und Antworten und den noch nicht erwähnten anderen Institutsmitgliedern für die angenehme Atmosphäre (und die leckeren Teetrinkmontage). Außerdem Jim Cutright, der mir in seinem dreimonatigen Aufenthalt im Labor geholfen hat.

Dank gilt auch meinen Eltern für ihre moralische Unterstützung während der gesamten Studien- und Promotionszeit.

Nicht zu vergessen sind natürlich meine Freunde, meine beiden Kinder und der beste Ehemann der Welt, die mein Leben in Göttingen so wahnsinnig angenehm und abwechslungsreich mitgestaltet haben und mir immer zur Seite standen und stehen.

Vielen Dank.

Lebenslauf

PERSÖNLICHE DATEN:

Name: Ellen-Christin Hage
 geboren: 5. September 1977 in Hannover
 Staatsangehörigkeit: deutsch
 Familienstand: verheiratet, 2 Kinder: Ole Schmitz, 9. April 2006
 Nora Schmitz, 25. Dezember 2007

SCHULBILDUNG:

09. 1984 - 07 1990: Freie Waldorfschule am Maschsee, Hannover
 08. 1990 - 06 1997: Gymnasium: Elsa-Brändström-Schule, Hannover
 Abschluss: Allgemeine Hochschulreife

STUDIUM:

10. 1998 - 07 2000: Physikstudium an der Georg-August-Universität, Göttingen
 Abschluss: Vordiplom
 09. 2000 - 03 2001: Erasmus-Programm, University of Oxford, Großbritannien
 04 2001 - 02. 2004: Hauptstudium der Physik, Georg-August-Universität, Göttingen
 Diplomarbeit am Institut für Geophysik mit dem Thema:
 „Chemisch getriebene Konvektion“
 Abschluss: Dipl. Phys.
 seit 04. 2004: Promotion zum Thema „Experimentelle Untersuchungen doppelt
 diffusiver Konvektion im Finger-Regime“