Vektorfeldkonzepte in der Studieneingangsphase Physik

Über die Wirkung multi-repräsentationaler Lehr-Lern-Materialien und die Rolle der visuellen Aufmerksamkeit

Dissertation
zur Erlangung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Doktorgrades
"Doctor rerum naturalium"
der Georg-August-Universität Göttingen

im Promotionsprogramm Physik
der Georg-August University School of Science (GAUSS)

vorgelegt von
Larissa Hahn
aus Hameln
Göttingen, 24.01.2024

Betreuungsausschuss

PROF. DR. PASCAL KLEIN, Physik und ihre Didaktik, Fakultät für Physik, Georg-August-Universität Göttingen

PROF. DR. STEFAN DREIZLER, Institut für Astrophysik, Fakultät für Physik, Georg-August-Universität Göttingen

APL. PROF. DR. SUSANNE SCHNEIDER, Physik und ihre Didaktik, Fakultät für Physik, Georg-August-Universität Göttingen

Mitglieder der Prüfungskommission

Referent	PROF. DR. PASCAL KLEIN, Physik und ihre Didaktik, Fakultät für Physik, Georg-August-Universität Göttingen
Koreferent	PROF. DR. STEFAN DREIZLER, Institut für Astrophysik, Fakultät für Physik, Georg-August-Universität Göttingen

Weitere Mitglieder der Prüfungskommission

APL. PROF. DR. SUSANNE SCHNEIDER, Physik und ihre Didaktik, Fakultät für Physik, Georg- August-Universität Göttingen

PROF. DR. STEFAN HALVERSCHEID, Didaktik der Mathematik, Mathematisches Institut, Georg-August-Universität Göttingen

PROF. DR. THOMAS WAITZ, Abteilung für Fachdidaktik Chemie, Institut für Anorganische Chemie, Georg-August-Universität Göttingen

PROF. DR. STEFAN KLUMPP, Institut für Dynamik komplexer Systeme, Fakultät für Physik, Georg-August-Universität Göttingen

Tag der mündlichen Prüfung: 04.03.2024

Danksagung

Die vergangenen Jahre meiner Promotion waren eine sehr ereignisreiche Zeit, in der ich viele Personen schätzen gelernt habe, bei denen ich mich ganz herzlich bedanken möchte.

Mein großer Dank gilt Prof. Dr. Pascal Klein für die Möglichkeit zur Promotion und die umfassende Betreuung in der bisherigen gemeinsamen Zeit. Dabei schätze ich ganz besonders den freundschaftlichen Umgang, die konstruktiven Diskussionen und die vielseitigen Ideen und Denkanstöße. Die zahlreichen Gespräche und Anregungen haben mich sehr beim Einstieg in die Wissenschaftswelt unterstützt und haben damit einen wesentlichen Anteil an meiner stetig wachsenden Begeisterung für die physikdidaktische Forschung. Die vergangenen drei Jahre meiner Promotion waren eine sehr herausfordernde, interessante, anregende und lehrreiche Zeit, in der ich mich weiterentwickeln konnte und aus der ich viel mitnehmen werde.

Darüber hinaus möchte ich Prof. Dr. Stefan Dreizler danken für die herzliche Unterstützung im Laufe meiner Promotion und die Formulierung des Zweitgutachtens. Ein besonderer Dank geht auch an apl. Prof. Dr. Susanne Schneider für ihre Hilfe beim Einstieg in das Drittfach Physik, den Anstoß zur Promotion und die persönliche Beratung. Bei allen weiteren Mitgliedern meiner Prüfungskommission, Prof. Dr. Stefan Halverscheid, Prof. Dr. Thomas Waitz und Prof. Dr. Stefan Klumpp, möchte ich mich bedanken für das Interesse und die Unterstützung.

Ganz besonders möchte ich auch den Mitarbeiter:innen und Hilfskräften der Arbeitsgruppe *Physik und ihre Didaktik* danken. Die Unterstützung bei der Durchführung und Auswertung von Studien sowie die zahlreichen Diskussionen, Anregungen und Ideen haben mein Promotionsprojekt sehr bereichert und die gemeinsame Zeit hat mir sehr viel Freude bereitet. Ganz besonderen Dank möchte ich in diesem Zusammenhang an Ronja Langendorf, die mir den Einstieg in die Promotion erheblich erleichtert hat, und Simon Blaue richten für seine unermüdliche Programmierarbeit. Besonderer Dank geht zudem an alle Physikstudierenden der Universität Göttingen für die aktive Teilnahme an meinen Datenerhebungen und den gegenseitigen Austausch im Rahmen von Seminaren und Lehrveranstaltungen. Dies gilt insbesondere auch für die Studierenden, die mein Dissertationsprojekt durch die Erarbeitung ihrer Masterarbeiten bereichert haben.

Abschließend möchte ich mich bei meiner Familie und meinen Freunden bedanken. Allen voran, bei meinen Eltern, die mich zu jeder Zeit bedingungslos unterstützt und immer an mich geglaubt haben. Ohne sie wäre diese Promotion nicht möglich gewesen. Gleiches gilt für meinen Bruder, der in den vergangenen drei Jahren so manche physikdidaktische Diskussion mit mir führen musste und mir bei Entscheidungen mit Rat und Tat zur Seite stand. Zu guter Letzt geht ein großer Dank an meine Freunde, die in den vergangenen Jahren immer an meiner Seite waren und mich und meine Arbeit zu jedem Zeitpunkt unterstützt haben.

Zusammenfassung

Ausgangslage

Die Visualisierung von Vektorfeldern als Vektorfelddiagramm ist essentieller Bestandteil verschiedener Teilgebiete der Physik und bietet darüber hinaus eine gewinnbringende Lerngelegenheit für Physikstudierende. Indem Vektorfelddiagramme Konzepte und Eigenschaften von Vektorfeldern veranschaulichen, ermöglichen sie es, mathematische Beschreibungen dieser Charakteristika visuell erfahrbar zu machen. Angesichts des großen Potentials eines vektorfelddiagrammzentrierten Ansatzes zur Unterstützung des Lernens in der Physikstudieneingangsphase wurden bereits einige Instruktionen sowie digitalgestützte Visualisierungswerkzeuge entwickelt, die einen qualitativen Zugang zur Vektoranalysis adressieren. Lernwirksamkeitsuntersuchungen der Materialien unterstützen den Mehrwert dieses Ansatzes; die empirische Untersuchung einer lernförderlichen instruktionalen Unterstützung derartiger Materialien sowie der Prozesse im Umgang mit Vektorfelddiagrammen als Lernwerkzeug steht jedoch noch am Anfang.
Angesichts hoher Schwundquoten im Physikstudium sowie zahlreicher nachgewiesener studentischer Verständnisschwierigkeiten bezüglich vektoranalytischer Konzepte zeigt sich der Bedarf vertiefender evidenzbasierter Untersuchungen zum vektorfelddiagrammzentrierten Lehr-Lern-Ansatz. Da Vektorfelddiagramme visuelle Darstellungen sind, stellt Eye-Tracking, d. h. die Analyse von Blickbewegungen, eine wertvolle Methode zur Untersuchung der kognitiv-visuellen Prozesse in diesem Zusammenhang dar.

Forschungsmethodik

Um zur Schließung dieser Lücke beizutragen, zielte das Forschungsinteresse dieser Arbeit auf die methodische Unterstützung, die Prozesse, Potentiale sowie Schwierigkeiten von und im Umgang mit Vektorfelddiagrammen als Lerninstrument ab. Vor diesem Hintergrund wurden vier Studien durchgeführt, die zum Zweck einer hohen Validität der Ergebnisse sowohl Theorie- als auch empirische Labor- sowie Feldstudien einschlossen. Neben drei Studien im Kontext der Vektoranalysis ergänzte ein systematisches Literaturreview ($n = 33$ Studien) zur Implementation, den Potentialen sowie Limitationen von **Eye-Tracking in der physikdidaktischen Forschung** die Untersuchungen dieser Arbeit um eine methodisch-fachdidaktische Komponente.
Im Fokus der Untersuchungen zur Vektoranalysis stand zum einen die **zielgerichtete Unterstützung des vektorfelddiagrammzentrierten Lernens vektoranalytischer Konzepte** im Hinblick auf verschiedene Performanz-, Prozess- sowie Belastungsindikatoren. Zum anderen adressierte diese Arbeit die **Analyse kognitiv-visueller Strukturen, Handlungen und Prozeduren** im Umgang mit Vektorfelddiagrammen. Gegenüber vorangegangenen Arbeiten zum Lernen von Differentialoperatoren erfolgte dabei einerseits eine Ausweitung der Untersuchungen auf eine weitere Anforderung, den Repräsentationswechsel von Vektorfelddarstellungen. Andererseits wurden bestehende Lehr-Lern-Materialien zum Zweck einer Optimierung theoriebasiert modifiziert, digital unterstützt sowie auf andere Konzepte der Vektoranalysis erweitert. Konkret untersuchten die drei Studien im Kontext

der Vektoranalysis dabei visuelle Koordinationsstrategien beim Repräsentationswechsel zwischen Vektorfelddiagramm und Formeldarstellung (Stichprobengröße $N = 147$), den Einfluss von Zeichenaktivitäten beim multi-repräsentationalen, instruktionalen Lernen der Divergenz ($N = 84$) und die Wirkung multi-repräsentationaler, digitalgestützter Lernaufgaben in einem Kurs zur Elektrodynamik.

Ausgewählte Ergebnisse

Mit Blick auf kognitiv-visuelle **Strategien und Prozesse beim Repräsentationswechsel** zwischen Vektorfelddiagramm und Formel resultierten blickdatenbasierte Clusteranalysen sowohl für ein rein fixationsbasiertes Clustermodell als auch unter der zusätzlichen Einbeziehung sakkadischer Metriken in zwei Clustern. Im Vergleich der Modelle zeigte sich, dass nur die Cluster, die neben fixationsbasierten auch auf sakkadischen Metriken basierten, zu einer Diskrimination bezüglich verschiedener Performanzindikatoren führten. So erreichten Studierende, deren Blickverhalten durch horizontale und vertikale Sakkaden auf dem Diagramm charakterisiert wurde, höhere Antwortkorrektheiten und -sicherheiten beim Repräsentationswechsel (Signifikanzniveau $p < 0.001$, Effektstärke $d = 0.77$ und $p = 0.004$, $d = 0.50$) und wiesen ein ausgeprägteres visuell-räumliches Vorstellungsvermögen auf ($p = 0.024$, $d = 0.39$). Mit Blick auf vorangegangene Arbeiten, die bei der Divergenzbeurteilung von Vektorfelddiagrammen ebenfalls fanden, dass das Blickverhalten leistungsstarker Studierender durch horizontale und vertikale Sakkaden dominiert wurde, lassen sich aus diesen Ergebnissen Charakteristika repräsentationsspezifischer visueller Expertise ableiten. Qualitative Analysen verbaler Erläuterungen ergaben zudem, dass die Verwendung von Änderungsargumenten beim Repräsentationswechsel mit einer hohen Antwortkorrektheit einher ging ($p < 0.001$, $d = 0.95$). Dies legt Prozesse kovariaten Denkens, d. h. Prozeduren der Beurteilung von Veränderungen einer Variable in Abhängigkeit einer anderen, nahe.

Bezüglich der Unterstützung des Lernens mit Vektorfelddiagrammen ergaben Vergleiche von Studierenden, die mit und ohne Zeichenaktivitäten instruiert wurden, einen positiven Einfluss repräsentationsspezifischer **Zeichenaktivitäten beim instruktionalen Lernen der Divergenz** auf ihre Performanz, ihr Blickverhalten und ihre kognitive Belastung. So nahmen Lernende der Interventionsgruppe eine geringere kognitive Belastung durch den Lerngegenstand sowie eine höhere lernrelevante kognitive Belastung infolge der Instruktion wahr ($p = 0.02$, $d = 0.47$ und $p = 0.0045$, $d = 0.37$). Bei einer anschließenden Transferaufgabe erreichten sie zudem höhere Antwortkorrektheiten ($p = 0.02$, $d = 0.51$) sowie -sicherheiten ($p = 0.004$, $d = 0.64$). Dies impliziert sowohl eine Förderung des vektoranalytischen Konzeptwissens als auch der Repräsentationskompetenzen, d. h. der Fähigkeiten, verschiedene Repräsentationsformen (Vektorfelddiagramm, Formel) zu interpretieren und Bezüge zwischen ihnen herzustellen.

Aus methodischer Perspektive zeigte sich ein progressiver Anstieg der Verwendung von **Eye-Tracking als Erkenntnismethode in der physikdidaktischen Forschung**, vor allem in repräsentationsreichen Assessmentszenarien. Auch für die Analyse von Lernumgebungen indizierten erste Untersuchungen neue Einblicke durch die Methode. Insbesondere für die Verwendung von Eye-Tracking-Brillen in Real-World-Szenarien, z. B. beim Experimentieren, in konstruktiven oder kollaborativen Lernumgebungen, bietet die Methode großes, bisher jedoch kaum ausgeschöpftes Potential.

Abstract

Starting point

The visualization of vector fields as vector field diagrams finds its application in various physics areas and also provides a valuable learning opportunity for physics students. By visualizing concepts and properties of vector fields, vector field diagrams allow to experience mathematical descriptions of these characteristics in a visual manner. Considering the enormous potential of vector field diagrams to support learning in introductory physics, some instructions as well as digitally aided visualization tools have been developed that address a qualitative approach to vector calculus. Studies examining the learning effectiveness of these materials support the value of the approach. However, the empirical investigation of a learning-promoting design of such materials, as well as the processes involved in using vector field diagrams as a learning tool, are still in their early stages.
In view of high dropout rates in physics studies and numerous proven difficulties in students' understanding of vector calculus concepts a need for in-depth evidence-based studies on learning with vector field diagrams becomes apparent. Since vector field diagrams are visual representations, eye-tracking, i. e., analysis of eye movements, is a valuable method for investigating cognitive-visual processes in this context.

Research methodology

To address this research gap, this work focused on the instructional support, processes, potentials, and difficulties of dealing with vector field diagrams as a learning tool. Against this background, four studies were conducted, which included theoretical as well as empirical laboratory and field studies to ensure high validity of the results. In addition to three studies in the context of vector calculus, a systematic literature review of $n = 33$ studies on the implementation, potentials, and limitations of **eye tracking in physics education research** supplemented the investigations in this work by a methodological objective.
The studies in the field of vector calculus focused, on the one hand, on **targeted support for learning with vector field diagrams** with regard to various performance, process, and cognitive load indicators. On the other hand, the **analysis of cognitive-visual structures, actions, and procedures** in dealing with vector field diagrams were targeted. Compared to previous work on learning about differential operators, the research was extended to a new task, the representational change between vector field diagram and formula. Moreover, already existing multi-representational teaching-learning materials were modified based on theory, enhanced by digital means, and extended to further concepts of vector calculus.
Specifically, the studies examined visual coordination strategies when switching between vector field diagram and formula (sample size $N = 147$), the influence of drawing activities in multi-representational instructional learning about divergence ($N = 84$), and the effect of multi-representational, digitally aided learning tasks in a course on electrodynamics.

Selected results

With regard to cognitive-visual **strategies and processes involved in representational change** between vector field diagram and formula, gaze based cluster analyses for both, a purely fixation-based cluster model and with additional inclusion of saccadic metrics, resulted in two clusters. A comparison of the models showed that only the clusters that were based on saccadic metrics led to a discrimination of various performance indicators. For example, students whose gaze behavior was characterized by horizontal and vertical saccades on the diagram achieved higher response accuracy and confidence for the representational change task (level of significance $p < 0.001$, effect size $d = 0.77$ and $p = 0.004$, $d = 0.50$) and had higher visual-spatial abilities ($p = 0.024$, $d = 0.39$). With regard to previous studies, which also found the gaze behavior of high-achieving students being dominated by horizontal and vertical saccades when determining the divergence of vector field diagrams, characteristics of visual expertise specific to the representation can be derived. Moreover, qualitative analyses of verbal explanations revealed that the use of change arguments during representational change was associated with high response accuracy ($p < 0.001$, $d = 0.95$). This suggests processes of covariational reasoning, i. e., procedures for assessing changes in one variable being dependent on another.

In terms of supporting the learning with vector field diagrams, comparisons of students who were instructed with and without drawing activities revealed a positive influence of **drawing activities in instructional learning about divergence** on their performance, gaze behavior, and cognitive load. Thus, learners in the intervention group perceived a lower cognitive load caused by the learning subject and a higher learning-relevant load as a result of the instruction ($p = 0.02$, $d = 0.47$ and $p = 0.0045$, $d = 0.37$). Moreover, they achieved higher response accuracy ($p = 0.02$, $d = 0.51$) and confidence ($p = 0.004$, $d = 0.64$) in a subsequent transfer task. This implies a development of conceptual knowledge about vector calculus as well as representational competencies, i. e., the ability to interpret and connect different representations (vector field diagram, formula).

From a methodological perspective, there has been a progressive increase in using **eye tracking in physics education research**, particularly in representation-rich assessment scenarios. For the analysis of learning environments, initial studies also indicated new insights through the method. Particularly for the use of eye-tracking glasses in real-world scenarios, e. g., during experimentation, in constructive, or collaborative learning environments, the method offers great but so far barely exploited potential.

Publikationsliste dieser Arbeit

Diese kumulative Dissertation umfasst insgesamt fünf Manuskripte, die in peer-reviewed Fachzeitschriften veröffentlicht wurden. Nachfolgend sind diese, assoziierte Tagungsbandbeiträge und Artikel sowie die Beiträge der Verfasserin zu diesen Publikationen übersichtlich zusammengefasst. Die vorliegende Arbeit ist entsprechend der Klassifikation von Mason und Merga (2018) an ein Mega Sandwich Model A angelehnt, d. h. neben Einleitung und Konklusion werden der fachdidaktische und lerntheoretische Hintergrund (Kap. 2 und 3) und die Forschungsmethodik (Kap. 4) dieser Arbeit in drei separaten Kapiteln dargelegt. Die Artikel sowie (konzeptionelle) Vorarbeiten und assoziierte Beiträge und Artikel werden in den Kap. 5 bis 9 vorgestellt.

Manuskript 1

Titel:	Eye tracking in physics education research: A systematic literature review
Status:	Publiziert in *Physical Review Physics Education Research* (Open Access):
	Hahn, L., & Klein, P. (2022). Eye tracking in physics education research: A systematic literature review. *Physical Review Physics Education Research*, *18*(1), 013102. https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.18.013102

Manuskript 2

Titel:	Clustering eye-movement data uncovers students' strategies for coordinating equations and diagrams of vector fields
Status:	Publiziert in *Educational Studies in Mathematics* (Open Access):
	Hahn, L., & Klein, P. (2023). Clustering eye-movement data uncovers students' strategies for coordinating equations and diagrams of vector fields. *Educational Studies in Mathematics*. https://doi.org/10.1007/s10649-023-10243-y

Assoziierte Artikel:

- Hahn, L., Halverscheid, S., Kuhn, J., & Klein, P. (2022). Wechsel zwischen Diagramm und Formel im Kontext von Vektorfeldern. Einfluss der Aufgabenkomplexität auf Indikatoren visueller Aufmerksamkeit. In P. Klein, N. Graulich, J. Kuhn & M. Schindler (Hrsg.), *Eye-Tracking in der Mathematik- und Naturwissenschaftsdidaktik: Forschung und Praxis* (S. 193–208). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-662-63214-7_12

- Hahn, L., Halverscheid, S., Kuhn, J., & Klein, P. (2021). Einfluss der Aufgabenkomplexität auf die Blickbewegungen beim Koordinieren multipler Repräsentationen im Kontext von Vektorfeldern. In S. Habig (Hrsg.), *Naturwissenschaftlicher Unterricht und Lehrerbildung im Umbruch. Gesellschaft für Didaktik der Chemie und Physik online Jahrestagung 2020* (S. 306–309). Gesellschaft für Didaktik der Chemie und Physik.
- Hahn, L., & Klein, P. (2023). Clusterbildung mit Blickbewegungen zur Analyse von Personen- und Aufgabenmerkmalen. In H. van Vorst (Hrsg.), *Lernen, Lehren und Forschen in einer digital geprägten Welt. Gesellschaft für Didaktik der Chemie und Physik, Jahrestagung in Aachen 2022* (S. 490–493). Gesellschaft für Didaktik der Chemie und Physik.

Manuskript 3

Titel:	Analysis of eye movements to study drawing in the context of vector fields
Status:	Publiziert in *Frontiers in Education* (Open Access): Hahn, L., & Klein, P. (2023). Analysis of eye movements to study drawing in the context of vector fields. *Frontiers in Education*, *8*, 1162281. https://doi.org/10.3389/feduc.2023.1162281
Assoziierte Artikel:	• Hahn, L., & Klein, P. (2021). Multiple Repräsentationen als fachdidaktischer Zugang zum Satz von Gauß. Qualitative Zugänge zur Interpretation der Divergenz von Vektorfeldern. In J. Grebe-Ellis & H. Grötzebauch (Hrsg.), *PhyDid B, Didaktik der Physik, Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung 2021* (S. 95–100). • Hahn, L., & Klein, P. (2022). Kognitive Entlastung durch Zeichenaktivitäten? Eine empirische Untersuchung im Kontext der Vektoranalysis. In S. Habig & H. van Vorst (Hrsg.), *Unsicherheit als Element von naturwissenschaftsbezogenen Bildungsprozessen. Gesellschaft für Didaktik der Chemie und Physik virtuelle Jahrestagung 2021* (S. 384–387). Gesellschaft für Didaktik der Chemie und Physik. • Hahn, L., & Klein, P. (2023). Multiple Repräsentationen und Zeichenaktivitäten als Zugänge zu Vektorfeldkonzepten. In H. Grötzebauch & S. Heinicke (Hrsg.), *PhyDid B, Didaktik der Physik, Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung 2023* (S. 107–114).

Manuskript 4

Titel:	A research-informed graphical tool to visually approach Gauss' and Stokes' theorems in vector calculus
Status:	Publiziert in *European Journal of Physics* (Open Access):
	Hahn, L., Blaue, S. A., & Klein, P. (2024). A research-informed graphical tool to visually approach Gauss' and Stokes' theorems in vector calculus. *European Journal of Physics*, *45*(2), 025706. https://doi.org/10.1088/1361-6404/ad2390

Manuskript 5

Titel:	The impact of multiple representations on students' understanding of vector field concepts: Implementation of simulations and sketching activities into lecture-based recitations in undergraduate physics
Status:	Publiziert in *Frontiers in Psychology* (Präregistrierung Stage 1; Open Access):
	Hahn, L., & Klein, P. (2023). The impact of multiple representations on students' understanding of vector field concepts: Implementation of simulations and sketching activities into lecture-based recitations in undergraduate physics. *Frontiers in Psychology*, *13*, 1012787. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2022.1012787

Assoziierte Artikel:

- Hahn, L., & Klein, P. (2022). Vektorielle Feldkonzepte verstehen durch Zeichnen? Erste Wirksamkeitsuntersuchungen. In H. Grötzebauch & S. Heinicke (Hrsg.), *PhyDid B, Didaktik der Physik, Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung 2022* (S. 119–126).
- Rabe, C., Drews, V., Hahn, L., & Klein, P. (2022). ihrefhttps://ojs.dpg-physik.de/index.php/phydid-b/article/view/1269/1491Einsatz von multiplen Repräsentationsformen zur qualitativen Beschreibung realer Phänomene der Fluiddynamik. In H. Grötzebauch & S. Heinicke (Hrsg.), *PhyDid B, Didaktik der Physik, Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung 2022* (S. 71–77).
- Hahn, L., Blaue, S. A., Höhn, P., Merkert, N., & Klein, P. (2023). Open Educational Resources für den Hochschulbereich. Anschauliche Vektoranalysis für die Studieneingangsphase. In H. Grötzebauch & S. Heinicke (Hrsg.), *PhyDid B, Didaktik der Physik, Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung 2023* (S. 123–130).

Beiträge der Verfasserin (Darstellung in Anlehnung an die Autor:innenschaftskriterien des International Committee of Medical Journal Editors, 2023):

Manuskript	Design der Studie	Durchführung der Datenerhebung	Datenaufbereitung, -auswertung und -interpretation	Verfassen des Artikels
Manuskript 1	50 %	60 %	50 %	50 %
Manuskript 2	0 %	0 %	75 %	80 %
Manuskript 3	50 %	80 %	80 %	90 %
Manuskript 4	50 %	60 %	70 %	80 %
Manuskript 5	50 %	80 %	80 %	90 %

Inhaltsverzeichnis

Abkürzungsverzeichnis . . . XII
Abbildungsverzeichnis . . . XIII
Tabellenverzeichnis . . . XIV

1 Einleitung 1

2 Vektorfelder und vektoranalytisches Konzeptwissen 7
2.1 Vektorfeldkonzepte in der Physik . . . 7
2.2 Ebene Vektorfelddiagramme: Qualitative Interpretation und kognitive Prozesse . . . 15
2.3 Lernschwierigkeiten im Umgang mit Vektorfeldern und vektoranalytischen Konzepten 18

3 Lernen mit Vektorfelddiagrammen: Theoretische Fundierung und Forschungsstand 23
3.1 Lerntheoretische und kognitionspsychologische Ansätze . . . 23
3.2 Blickpfade zur Dekodierung kognitiver Prozesse . . . 36
3.3 Multi-repräsentationales Lernen mit Vektorfelddiagrammen . . . 39

4 Forschungsmethodik 45
4.1 Forschungsziele und -fokusse . . . 45
4.2 Rahmenbedingungen der Zielgruppe . . . 47
4.3 Studien und Studiendesigns . . . 48
4.4 Erhebungsmethoden und Testinstrumente . . . 51
4.5 Analysemethoden . . . 59

5 Eye-Tracking in der physikdidaktischen Forschung: Ein systematisches Literaturreview 70

6 Visuelle Strategien beim Repräsentationswechsel zwischen Vektorfelddarstellungen 106

7 Zeichenaktivitäten beim instruktionalen Lernen zur Divergenz 134

8 Digitalgestützte Visualisierung vektoranalytischer Konzepte 153

9 Multi-repräsentationale Lernaufgaben zur Vektoranalysis in der Hochschullehre 172

10 Konklusion und Diskussion 182
10.1 Eye-Tracking in der physikdidaktischen Forschung . . . 183
10.2 Visuelle Expertise im Umgang mit Vektorfelddiagrammen . . . 187
10.3 Kovariates Denken im Kontext der Vektoranalysis . . . 191
10.4 Zielgerichtete Unterstützung des Lernens mit Vektorfelddiagrammen . . . 194
10.5 Zusammenfassung und Ausblick . . . 197

Literaturverzeichnis **201**

A Anhang **229**

A.1 Ergänzendes Material der Publikationen 229

A.2 Lehr-Lern-Materialien und Forschungsinstrumente 244

Abkürzungverzeichnis

ANCOVA	Analysis of Covariance
ANOVA	Analysis of Variance
ANOVA-RM	Repeated Measures Analysis of Variance
AOI	Area of Interest
B.Sc.	Bachelor of Science
CATLM	Cognitive-Affective Theory of Learning with Media
CLT	Cognitive Load Theory
CONSORT	Consolidated Statement of Reporting Trials
CoRP	Covariational Reasoning in Physics-Framework
CTML	Cognitive Theory of Multimedia Learning
CTVE	Cognitive Theory of Visual Expertise
DeFT	Design, Function, Task; Orientierungsrahmen
DZHW	Deutsches Zentrum für Hochschul- und Wissenschaftsforschung
ECL	Entrinsic Cognitive Load
EMME	Eye movement modelling examples
FZ	Forschungsziel
GCL	Germane Cognitive Load
ICALM	Integrated Cognitive Affective Model of Learning with Multimedia
ICL	Intrinsic Cognitive Load
IG	Interventionsgruppe
I-VT	Velocity-Threshold Identification
KFP	Konferenz der Fachbereiche Physik
LV	Lehrveranstaltung
meR	multiple externale Repräsentationen
NoNIP	natures of negativity in introductory physics
OER	Open Educational Resources
OSF	Open Science Framework
PRISMA	Preferred Reporting Items for Systematic reviews and Meta-Analyses
RCFI	Representational Competence of Fields Inventory
SOI	Selektions-, Organisation- und Integrationsprozesse
SST	Spatial Span Task
VFR	Vector Field Representations test

Abbildungsverzeichnis

Hinweis: Die Abbildungsunterschriften sind verkürzt angegeben.

Abb. 1: Visualisierung des Magnetfeldes eines geraden, stromdurchflossenen Leiters in der x-y-Ebene als Vektorfelddiagramm. 3

Abb. 2: Visualisierungen des elektrischen Coulombfeldes einer positiven Punktladung in der x-y-Ebene. 10

Abb. 3: Schema zur qualitativen Interpretation der Divergenz eines ebenen, stationären Vektorfelddiagramms. 16

Abb. 4: Funktionale Taxonomie multipler Repräsentationen beim Lernen. 26

Abb. 5: Kognitive Belastung beim Lernen. 29

Abb. 6: Informationsverarbeitungsprozesse multimodaler Stimuli in der Cognitive Theory of Multimedia Learning. 31

Abb. 7: Expert:innenhafter Blickpfad im Umgang mit Vektorfelddiagrammen charakterisiert durch zeilen- und spaltenweise Evaluation und Vergleiche benachbarter Vektoren. . . 190

Tabellenverzeichnis

Hinweis: Die Tabellenüberschriften sind verkürzt angegeben.

Tab. 1: Übersicht vektoranalytischer Konzepte. 8
Tab. 2: Studentische Lern- und Verständnisschwierigkeiten im Umgang mit Vektorfeldrepräsentationen und Konzepten der Vektoranalysis. 22

Tab. 3: Übersicht der Theorien zum Lernen und den Umgang mit Vektorfelddiagrammen in dieser Arbeit. 24
Tab. 4: Designprinzipien multimedialer Lernumgebungen für die Gestaltung von Lehr-Lern-Materialien zur Vektoranalysis. 33
Tab. 5: Text-bild-basierte, vektorfelddiagrammzentrierte Lehr-Lern-Materialien in der physikdidaktischen Forschung. 41

Tab. 6: Übersicht und Design der Studien in dieser Arbeit. 50
Tab. 7: Übersicht der psychometrischen Kennwerte und ihres Zielbereichs bei Item- und Skalenanalysen von Performanztests und Fragebögen in dieser Arbeit. 57
Tab. 8: Übersicht der Analysemethoden der Studien in dieser Arbeit. 60
Tab. 9: Interpretation der Effektgrößen für statistische Hypothesentests in dieser Arbeit. . . . 63

1 Einleitung

Naturwissenschaftliche und vor allem physikalische Erkenntnisse und Technologien prägen nahezu alle Aspekte unseres täglichen Lebens. Sie stimulieren jedoch nicht nur Innovation und Fortschritt, sondern bestimmen auch grundlegend unser Weltverständnis und unsere Entscheidungsfindung. In einer Ära komplexer globaler Herausforderungen ist ein fundiertes Verständnis von Naturwissenschaft und Physik von entscheidender Bedeutung für die Entwicklung zukunftsweisender Strategien und Problemlösungen (Der Rat der Europäischen Union, 2018).
Die anhaltende Bedeutung naturwissenschaftlicher Erkenntnisse spiegelt sich auch in der Studienwahl wider. So entschieden sich dem Statistischen Bundesamt zufolge im Sommersemester 2022 und dem darauffolgenden Wintersemester 2022/2023, wie bereits in den Jahren zuvor, etwa 100.000 Studierende, d. h. 9 % aller Studienanfänger:innen in Deutschland, für ein Studium der Naturwissenschaften oder der Mathematik (Statistisches Bundesamt, 2024). Die Konferenz der Fachbereiche Physik (KFP) berichtet von etwa 11.000 Schüler:innen, die ein Physikstudium wählten[1] (Düchs und Runge, 2023).

Die Studieneingangsphase des Physikstudiums als Kipppunkt

Trotz einer hohen gegenstandsbezogenen intrinsischen Motivation und eines ausgeprägten Studieninteresses zu Beginn des Studiums (Albrecht und Nordmeier, 2010), gelingt jedoch längst nicht allen Studienanfänger:innen ein erfolgreicher Studienabschluss. Im Gegenteil, für den universitären Absolvent:innenjahrgang 2020 war die Studienabbruchquote der Fächergruppe Physik/Geowissenschaften mit 60 % höher denn je (Heublein et al., 2022). Auch ohne mögliche Pandemieeinflüsse zeigten sich in den vorangegangenen Jahren nur minimal geringere Abbruchquoten (Heublein et al., 2020).
Untersuchungen von Albrecht (2011) zu Abbruchmotiven im Physikstudium ergaben, dass die inhaltlichen Anforderungen des Studiums den häufigsten Grund für einen Studienabbruch darstellten. Dies betrifft insbesondere Lehramtsstudierende, die in der Schule i. d. R. seltener mathematische und physikalische Leistungskurse wählen und daher mit geringeren studienrelevanten Vorkenntnissen in das Physikstudium starten (Albrecht und Nordmeier, 2013). Angesichts des sich verstärkenden Lehrkräftemangels ist diese Entwicklung als besonders kritisch zu betrachten. Analysen des Deutschen Zentrums für Hochschul- und Wissenschaftsforschung (DZHW) zeigten zudem, dass fast die Hälfte der Abbrüche bereits innerhalb der ersten beiden Studiensemester erfolgten (Heublein et al., 2017). Damit stellt die Studieneingangsphase, d. h. die ersten zwei Studiensemester, einen zentralen Kipppunkt für das Gelingen des Studiums dar (Heublein et al., 2017). Aus fachdidaktischer Perspektive kommt dieser Phase somit eine besondere Relevanz zu, da hier die fachlichen Grundlagen für eine erfolgreiche Bewältigung des Physikstudiums gelegt werden. Eine gezielte Unterstützung des Lernens besonders in den ersten beiden Semestern kann maßgeblich dazu beitragen, potentielle Schwierigkeiten abzumildern, die in einem Studienabbruch münden könnten.

[1] Dies umfasst den Fachstudiengang Physik, Studiengänge mit Schwerpunkt Physik und den Lehramtsstudiengang Physik.

Über die Relevanz vektoranalytischen Konzeptwissens in der Physik

Zu Beginn ihres Physikstudiums werden Studierende vor allem mit Inhalten der Mechanik und des Elektromagnetismus konfrontiert. Erstere thematisiert Bewegungen von Körpern und die auf sie wirkenden Kräfte, der Elektromagnetismus beschäftigt sich mit elektrischen und magnetischen Feldern sowie ihren Wechselwirkungen in dynamischen Kontexten. Die Beschreibung von Kraft- sowie elektromagnetischen Feldern beruht hierbei fundamental auf mathematischen Grundlagen der Vektoranalysis. Ein Vergleich der Verwendung vektoranalytischer Prinzipien in Mathematik und Physik deutet jedoch auf eine „vector calculus gap“ zwischen den Disziplinen hin, die sich in der unterschiedlichen Betrachtung und Anwendung der Vektoranalysis vor allem in mathematischen und physikalischen Einführungsveranstaltungen widerspiegelt (Dray und Manogue, 1999). Während die Vektoranalysis in der Mathematik möglichst generalisierte Beschreibungen und Formeln verwendet, die auf eine Vielzahl Situationen anwendbar sind, werden in der Physik vor allem exemplarische Szenarien betrachtet, die sich aufgrund ihrer Symmetrieeigenschaften auf geometrisch einfach zu interpretierende Formelausdrücke reduzieren lassen.

Insbesondere für das Lernen im Elektromagnetismus gilt ein Verständnis vektoranalytischer Inhalte im Allgemeinen als essentiell. Auch Untersuchungen mit Studierenden der Natur- und Ingenieurswissenschaften an der Stanford University ergaben, dass der Besuch eines Kurses zur Vektorrechnung ein starker Prädiktor für die Prüfungsleistungen in einer Elektromagnetismus-Klausur Ende des zweiten Studiensemesters darstellte (Signifikanzniveau $p < 0.001$, Effektstärke $ES = 0.58SD$; Burkholder et al., 2021). Besonders ausschlaggebend war vor allem ein konzeptuelles Wissen zur Vektoranalysis, da sich zeigte, dass bessere Leistungen der Studierenden, die einen Kurs zur Vektorrechnung belegt hatten, auf Unterschiede in der Argumentation über Vektoren, Vektorfelder und vektorielle Geometrien zurückzuführen waren. Qualitative Analysen von Freitextantworten zur Bestimmung eines elektrischen Feldes ergaben zudem, dass alle Studierenden etwa gleich viele Rechenfehler, z. B. bei der Integration, machten. Jedoch traten bei Studierenden, die im Vorfeld einen Kurs zur Vektorrechnung absolviert hatten, signifikant weniger geometrische Fehler auf ($p = 0.017$).

Die herausragende Bedeutung eines vektoranalytischen Konzeptwissens für das Physikstudium betont auch Yusaf (2017), der dem Stokesschen Integralsatz, einem zentralen Satz der Vektoranalysis, eine Rolle als Schwellenwertkonzept einräumt. Ein Schwellenwertkonzept stellt, wenn es von Physikstudierenden verstanden wird, einen grundlegenden Meilenstein in ihrem Lernen der Physik dar (Meyer und Land, 2005). So fungiert ein fundiertes Verständnis des Satzes von Stokes als Voraussetzung für den Zugang zu den im Studium sowie der Forschung verwendeten Methoden und kann Studierenden neue Wissensebenen eröffnen (Yusaf, 2017).

Diagnostische Studien zum Verständnis vektoranalytischer Konzepte sowohl in mathematisch-abstrahierten physik-inspirierten Kontexten (z. B. Baily et al., 2015; Singh und Maries, 2013) als auch in konkreten physikalischen Anwendungen, z. B. der Elektrodynamik (Campos et al., 2020; Pepper et al., 2012) oder der Mechanik (Ambrose, 2004), ergaben jedoch zahlreiche konzeptuelle Lücken und Schwierigkeiten von Studierenden. Analysen verschiedener physikalischer Lehrbücher von Smith (2014) zeigten zudem, dass vektoranalytische Inhalte in einführenden Texten zur Physik i. d. R. for-

melbasiert vermittelt werden. Qualitative Erklärungen hingegen werden nicht oder nur unzureichend gegeben (für typische universitäre Lehrbücher siehe z. B. Griffiths, 2023; Korsch, 2007). Auch fortgeschrittene Physiklehrbücher thematisieren kaum eine geometrische Erläuterung von Vektorfeldern, Differentialoperatoren und Integralsätzen (Smith, 2014). Insgesamt zeigt sich also trotz der fundamentalen Relevanz eines vektoranalytischen Konzeptverständnisses für das physikalische Lernen, vor allem in der Studieneingangsphase, sowie studentischer Lernschwierigkeiten in diesem Zusammenhang ein Defizit entsprechender Unterstützungsmaßnahmen.

Vektorfelddiagramme als gewinnbringende Lerngelegenheit

Die beschriebene Ausgangslage verdeutlicht die Relevanz sowie Notwendigkeit neuartiger Zugänge, die ein konzeptuelles Verständnis der Vektoranalysis in der Physik adressieren (z. B. auch Bollen et al., 2016; Gire und Price, 2012). Allerdings ist die Anwendung mathematischen Wissens in der Physik für Studierende neben den mathematischen Anforderungen zumeist mit zusätzlichen Problemen verbunden (siehe z. B. auch Redish, 2006). Angesichts zahlreicher Schwierigkeiten von Studierenden bezüglich vektoranalytischer Konzepte auch ohne Anwendung in der Physik, plädieren daher einige Arbeiten dafür, Vektorfeldkonzepte zunächst in einem rein mathematischen Kontext einzuführen und erst später in Anwendungsszenarien zu überführen (Dray und Manogue, 2023; Hernandez et al., 2023). Diese Forderung deckt sich mit Analysen von Bollen et al. (2016) und Dray und Manogue (1999), die dem vektoranalytischen Konzeptwissen und der geometrischen Interpretation einen hohen Stellenwert für eine zielgerichtete Anwendung der Vektoranalysis in der Physik einräumen.

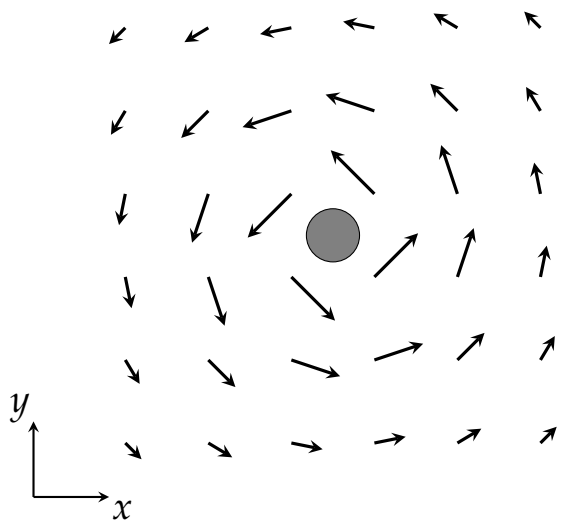


Abb. 1: Visualisierung des Magnetfeldes eines geraden, stromdurchflossenen Leiters in der x-y-Ebene als Vektorfelddiagramm. Der Leiter verläuft senkrecht zur x-y-Ebene und schneidet diese im grauen Punkt. Die technische Stromrichtung im Leiter zeigt aus der x-y-Ebene heraus. In dieser Darstellungsform werden zentrale Eigenschaften des Magnetfeldes veranschaulicht, z. B. seine Radialsymmetrie, d. h. die radiale Abnahme des Feldes mit zunehmender Entfernung vom Leiter.

Mit Blick auf ein breites Forschungsfeld zum Lernen mit visuellen Repräsentationen, d. h. Darstellungsformen, bieten ebene Vektorfelddiagramme, wie beispielsweise in Abb. 1, eine wertvolle Lerngelegenheit sowohl für den Erwerb eines vektoranalytischen Konzeptverständnisses als auch bei der späteren Anwendung der Vektoranalysis in der Physik (Gire und Price, 2012). Ihr Potential zeigt sich bereits dadurch, dass die experimentelle Visualisierung elektrischer und magnetischer Felder traditioneller Gegenstand physikalischer Praxis sowie Lehrveranstaltungen ist (Thompson, 1878). Darüber hinaus lassen sich anhand von Vektorfelddiagrammen Eigenschaften und Charakteristika des Feldes, z. B. Symmetrien oder Veränderungen von Feldkomponenten, einfach und schnell erfassen. Die Darstellung als Vektorfelddiagramm verringert somit die Abstraktion des Feldes und bietet die Möglichkeit, durch algebraische Berechnungen gewonnene Erkenntnisse bezüglich bestimmter Feldeigenschaften zu komplementieren. Dies kann ein intuitives Verständnis vektoranalytischer Formeln und Konzepte unterstützen. Ihr didaktischer Wert liegt dabei vor allem darin, dass sie den Verlauf des Feldes anhand einzelner Feldvektoren veranschaulichen. Dies ermöglicht eine konkrete Auswertung der Eigenschaften sowie das Nachvollziehen vektoranalytischer Konzepte für die dargestellten Vektoren. Entsprechend der Meta-Analyse innovativer Lehransätze in der Studieneingangsphase von Ruiz-Primo et al. (2011) gliedert sich das Lernen mit Vektorfelddiagrammen in eine Vielzahl konzeptuell-orientierter Innovationen ein, die z. B. die Bearbeitung von Konzeptaufgaben zur Überwindung alltagsgeprägter Vorstellungen umfassen[2]. Der visuelle Lehr-Lern-Ansatz mit Vektorfelddiagrammen bietet darüber hinaus Potential für den Einsatz digitalgestützter Anwendungen (Ruiz-Primo et al., 2011).
Studien zu studentischen Lern- und Verständnisschwierigkeiten indizieren jedoch, dass die Interpretation von Vektorfelddiagrammen kaum intuitiv gelingt. Angesicht des großen Potentials eines vektorfelddiagrammzentrierten Lehr-Lern-Ansatzes wird daher die Notwendigkeit einer lernförderlichen instruktionalen Einbettung von Vektorfelddiagrammen deutlich.

Forschungsinteresse der Arbeit

Vor dem beschriebenen Hintergrund existieren in der physikdidaktischen Forschung bereits einige Arbeiten, die einen vektorfelddiagrammzentrierten Lehr-Lern-Ansatz ohne physikalische Einbettung adressieren. Diese umfassen sowohl digitale Visualisierungswerkzeuge, Simulationen und Lernspiele als auch text-bild-basierte Lehr-Lern-Materialien und Instruktionen. Untersuchungen der Lernwirksamkeit text-bild-basierter Instruktionen zur Divergenz und Rotation in experimentellen Laborstudien unterstützen dabei den Mehrwert dieses Ansatzes für das Lernen vektoranalytischer Konzepte, indem sie positive Effekte der Instruktion auf die Lernleistung von Studierenden hervorbrachten (Klein et al., 2018, 2019; Ruf et al., 2022). Aus diesen Arbeiten lassen sich erste Anhaltspunkte für die Gestaltung von Lehr-Lern-Materialien beim Lernen mit Vektorfelddiagrammen ableiten. Sie weisen jedoch auch auf Defizite bestehender Instruktionen hin, z. B. bezüglich eines Transfers des Gelernten auf ähnliche Konzepte. Zu einem Großteil bestehender Materialien gibt es allerdings kaum Erkenntnisse bezüglich ihrer Lernwirksamkeit. In diesem Zusammenhang besteht somit im Hinblick auf die zunehmende For-

[2] Hierzu zählen u. a. die *Tutorials in Introductory Physics* der University of Washington, z. B. das „Divergence as a source“-Tutorial im Kontext Elektromagnetismus/Vektoranalysis (Xue, 2021).

derung nach einer evidenzbasierten Untersuchung von Bildungsmaterialien weiterer Forschungsbedarf (Kulawiak und Wilbert, 2017; Slavin, 2002).

Bei Vektorfelddiagrammen handelt es sich um visuelle Darstellungen, daher kommt der Informationsentnahme aus der Darstellungsform eine Schlüsselrolle beim Lernen zu. So lassen sich bestimmte Eigenschaften des Vektorfeldes zwar aus der Darstellung herauslesen, dies erfordert jedoch spezifische Kompetenzen bezüglich der Interpretation der dargestellten Informationen. Derartige Kompetenzen verhindern beispielsweise, dass das oberflächliche Erscheinungsbild des Feldes zu einer Fehlinterpretation seiner Eigenschaften führt. Erst mit ausgeprägten Kompetenzen dieser Art können Vektorfelddiagramme ihr Potential beim Lernen entfalten. Derartige Kompetenzen werden jedoch nicht en passant erworben, sondern müssen gezielt gefördert und ausgebildet werden. Für eine gewinnbringende Instrumentalisierung von Vektorfelddiagrammen zum Lernen vektoranalytischer Konzepte auch im physikalischen Kontext bedarf es daher fundierter Kenntnisse über die Ausprägungen und Charakteristika der Mechanismen und Prozesse im Umgang mit der Darstellungsform.

Eye-Tracking, die Aufzeichnung von Blickdaten, bietet hierbei eine wertvolle Methode zur Analyse mentaler, unbewusster oder schwer zu artikulierender visueller Prozesse und Handlungen im Umgang mit Vektorfelddiagrammen (Havanki und VandenPlas, 2014). So geben vorangegangene Eye-Tracking-Untersuchungen erste Einblicke in repräsentationsspezifische visuelle Strategien und Prozeduren im Umgang mit Vektorfelddiagrammen. Diese können mit der Instruktion einer Strategie zur visuellen Evaluation von Vektorfelddiagrammen assoziiert werden (Klein et al., 2018, 2019, 2021b). Erkenntnisse dieser Art beschränken sich jedoch auf einen Problemkontext und ein Erhebungsszenario, das instruktionale Lernen zur qualitativen Beurteilung der Divergenz.

Insgesamt steht die Forschung zu Lern- und Informationsverarbeitungsprozessen im Umgang mit Vektorfelddiagrammen sowie zur zielgerichteten Gestaltung vektorfelddiagrammzentrierter Lernumgebungen noch am Anfang. Für ein fundiertes Verständnis von Vektorfelddiagrammen als Lerngegenstand bedarf es daher weiterer evidenzbasierter Untersuchungen. Vor diesem Hintergrund zielt das Forschungsinteresse dieser Dissertation auf die methodische Unterstützung, die Prozesse, Potentiale sowie Schwierigkeiten von und im Umgang mit Vektorfelddiagrammen als Lerninstrument ab. Über vorangegangene Arbeiten hinaus involvieren die Untersuchungen dieser Arbeit dabei neue Methoden zur Unterstützung des Lernens, z. B. Zeichenaktivitäten und digitalgestützte Visualisierungen. Außerdem wird ein weiterer Problemkontext betrachtet, der Repräsentationswechsel zwischen Vektorfelddiagramm und Formeldarstellung, und zur Untersuchung werden zusätzliche Datenquellen und Analysemethoden herangezogen.

Aufbauend auf bestehenden Arbeiten fungiert dabei die Analyse von Blickdaten, das Eye-Tracking, als zentrale Erkenntnismethode für die Untersuchung kognitiv-visueller Prozesse im Umgang mit Vektorfelddiagrammen. Auch über das Lernen im Kontext der Vektoranalysis hinaus bietet Eye-Tracking großes Potential als Erkenntnismethode für die Analyse physikalischer Lern- und Problemlöseprozesse. Eine Synthese der Implementationen, Potentiale und Limitationen dieser Methode in der physikdidaktischen Forschung wurde jedoch noch nicht erarbeitet. Diese ergänzt daher das Forschungsinteresse dieser Arbeit um eine methodisch-fachdidaktische Komponente.

Aufbau der Arbeit

Bei der vorliegenden Arbeit handelt es sich um eine kumulative Dissertation. Daher stehen die im Rahmen dieses Forschungsprojekts entstandenen Publikationen im Fokus dieser Arbeit (Kap. 5 bis 9). Die fachliche, fachdidaktische, lerntheoretische sowie forschungsmethodische Einordnung, Erläuterung sowie Diskussion erfolgt in drei vorgelagerten und einem nachgelagerten Kapitel.

In Kap. 2 werden dabei zunächst die zentralen Begriffe, Definitionen und Konzepte der Vektoranalysis für das Lernen in der Physik dargelegt (Kap. 2.1). Anschließend werden aufbauend auf den beschriebenen Konzepten die mentalen Prozesse bei der qualitativen Interpretation ebener Vektorfelddiagramme analysiert (Kap. 2.2). Das Kapitel wird durch eine Zusammenfassung des aktuellen Forschungsstandes zu studentischen Lernschwierigkeiten in Bezug auf vektoranalytische Konzepte abgeschlossen (Kap. 2.3).

Das nachfolgende Kapitel beleuchtet das Lernen mit Vektorfelddiagrammen aus theoretischer Perspektive und stellt bestehende Instruktionen und Lehr-Lern-Werkzeuge vor (Kap. 3). Zu diesem Zweck wird zunächst ein Überblick des lerntheoretischen sowie kognitionspsychologischen Rahmens gegeben, der einem vektorfelddiagrammzentrierten Lehr-Lern-Ansatz zugrunde liegt, und Methoden zur Unterstützung dieses Ansatzes vorgestellt (Kap. 3.1). Unter Bezug auf die beschriebenen Theorien werden anschließend die Prinzipien und Grundlagen von Eye-Tracking als Erkenntnismethode für das Lernen mit visuellen Repräsentationen dargelegt (Kap. 3.2). Abschließend erfolgt eine Einordnung eines vektorfelddiagrammzentrierten Lehr-Lern-Ansatzes in die beschriebenen Theorien und es wird der aktuelle Forschungsstand zur Entwicklung und Wirksamkeitsanalyse von vektorfelddiagrammzentrierten Lehr-Lern-Materialien zusammengefasst (Kap. 3.3).

Kap. 4 gibt einen Überblick der Forschungsmethodik. Hierbei werden zunächst auf Basis der vorangegangenen Kapitel die übergeordneten Forschungsziele dieser Dissertationsschrift hergeleitet und formuliert (Kap. 4.1). Darauf folgt eine Darlegung der Rahmenbedingungen der Zielgruppe (Kap. 4.2) sowie der verwendeten Untersuchungsdesigns, Erhebungsmethoden, Testinstrumente und Analysemethoden der Studien in dieser Arbeit (Kap. 4.3, 4.4 und 4.5).

Im Anschluss werden die fünf zentralen Publikationen dieser Arbeit vorgestellt (Kap. 5 bis 9). Die wesentlichen Ergebnisse der enthaltenen Studien werden anschließend im Hinblick auf die Forschungsziele dieser Arbeit rekapituliert und diskutiert (Kap. 10.1 bis 10.4). Abschließend werden weiterführende Forschungsperspektiven angeregt (Kap. 10.5).

2 Vektorfelder und vektoranalytisches Konzeptwissen

Dieses Kapitel thematisiert die fachlichen sowie fachdidaktischen Hintergründe dieser Arbeit. Zu diesem Zweck wird zunächst ein Überblick der für das Lernen in der Physik relevanten Begriffe, Definitionen und Konzepte der Vektoranalysis gegeben (Kap. 2.1). Anschließend werden die kognitiven Prozesse im Zuge einer qualitativen Interpretation ebener Vektorfelddiagramme aus didaktischer Perspektive beleuchtet (Kap. 2.2). Abschließend wird der aktuelle Forschungsstand zu studentischen Lernschwierigkeiten in Bezug auf Vektorfelddarstellungen und vektoranalytische Konzepte zusammengefasst (Kap. 2.3).

2.1 Vektorfeldkonzepte in der Physik

Während einige physikalische Größen bereits durch ihren Betrag vollständig beschrieben sind, z. B. Druck oder Temperatur (sog. skalare Größen), bedarf es für eine vollständige Beschreibung von Größen wie Geschwindigkeit oder Kraft zusätzlich einer Richtungsinformation. Aus diesem Grund werden derartige, sog. vektorielle Größen, typischerweise durch Vektoren mit Betrag und Richtung beschrieben (Wagner, 2016). Kann jedem Punkt eines Anschauungsraumes eine physikalische Größe zugeordnet werden, beschreibt die räumliche Verteilung dieser Größe ein Feld, genauer ein Skalar- bzw. Vektorfeld (Wagner, 2016). Entsprechend dem von Faraday und Maxwell geprägten Feldbegriff erfasst das Feld einen besonderen Zustand des Raumes zwischen wechselwirkenden Körpern und schreibt dem Raum als Träger von Feldern somit eine aktive Rolle bei der Wechselwirkung von Körpern zu (für eine ausführliche Beschreibung der Entwicklung des Feldbegriffs siehe Römer und Forger, 1993). Als bekanntes Resultat schlägt sich diese Eigenschaft in den Maxwellschen Gleichungen des Elektromagnetismus nieder, die elektrische und magnetische Kräfte in einer einheitlichen Theorie zusammenfassen. Die klassische Feldtheorie zur Beschreibung von Feldern legt damit den Grundstein für die Beschreibung kontinuierlicher Systeme, wie z. B. der Lichtausbreitung und der Strömung von Fluiden. Sie gilt somit als Wegbereiter für die moderne Physik der allgemeinen Relativitätstheorie und der Quantenfeldtheorie (Römer und Forger, 1993). Insbesondere Vektorfelder und ihre Formalisierung in der Vektoranalysis sind essentieller Bestandteil der Hochschulphysik zum Elektromagnetismus und darüber hinaus, z. B. in der Aero- und Strömungsmechanik.
Im Folgenden werden die für die Physik relevante Begriffe, Definitionen und Konzepte der Vektoranalysis zusammengefasst (siehe Tab. 1 für einen Überblick).

Tab. 1: Übersicht vektoranalytischer Konzepte mit Kurzbeschreibung und Beispiel.

Konzept[a]	Kurzbeschreibung	Beispielhafter Formelausdruck[b]
Vektorkomponenten-zerlegung/-dekomposition	Zerlegung der Feldvektoren in Komponenten, die den Betrag des Feldes in Richtung der Einheitsvektoren des zugrundeliegenden Koordinatensystems wiedergeben	$\vec{F}(x,y) = F_x(x,y)\hat{e}_x + F_y(x,y)\hat{e}_y$
Skalarprodukt von Vektor und normiertem Vektor	Projektion des Vektors auf den normierten Vektor	$(\mathrm{rot}\,\vec{F}(p)) \cdot \hat{n}$
Linien-, (Ober-)Flächen- und Volumenintegral	Summe aller Werte des Integranten innerhalb des Integrationsbereichs	$\int_V \mathrm{div}\,\vec{F}\,dV$
Fluss durch Fläche; *Divergenz (int.)*	Bilanzierung der Zu- und Abflüsse einer Fläche; Zu- und Abflüsse als Projektion der Feldvektoren auf die äußeren Flächennormalen	$\int_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{n}$
Zirkulation entlang einer geschlossenen Kurve; *Rotation (int.)*	Bilanzierung der positiv- und negativ-orientierten Zirkulationen einer Kurve; positiv- und negativ-orientierte Zirkulationen als Projektion der Feldvektoren auf die vektoriellen Wegelemente der Kurve	$\int_{\partial A} \vec{F} \cdot d\vec{l}$
Partielle Vektorableitung; *Divergenz und Rotation (diff.)*	Veränderung einer Feldkomponente nach einer Variablen, während alle anderen Variablen konstant gehalten werden	$\frac{\partial}{\partial x} F_x(x,y,z)$

Legende: [a]Übergeordnete Konzepte, denen die aufgeführten Konzepte zugeordnet werden, sind kursiv angegeben (diff. = differentielle Definition Gln. 5 und 9, int. = integrale Definition Gln. 4 und 8); [b]Die angegebenen Formeln entstammen den Ausführungen in Kap. 2.1.1 und 2.1.2.

2.1.1 Vektorfelder, Koordinatensysteme und Visualisierungen

Mathematisch betrachtet ist ein Vektorfeld auf einer Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine Abbildung $\vec{F} : \Omega \to \mathbb{R}^n$, die jedem Punkt $P \in \Omega$ einen Vektor $\vec{F}(P) \in \mathbb{R}^n$ zuordnet (Königsberger, 2004). Dabei wird i. d. R. vorausgesetzt, dass es sich bei $\vec{F}$ um eine k-mal differenzierbare (und damit insbesondere stetige) Abbildung handelt. Vektorfelder physikalischer Größen sind typischerweise ortsabhängig bzw. inhomogen, d. h. Betrag und/oder Richtung der Vektoren variieren räumlich. Besitzt ein Vektorfeld neben einer Ortszusätzlich eine Zeitabhängigkeit, wie z. B. das von einem Wechselstromkreis erzeugte Magnetfeld in einem Leiter oder einer Spule, wird es durch die Abbildung $\vec{F} : U \times \Omega \to \mathbb{R}^n$, $(t, P) \mapsto \vec{F}(t, P)$ mit $U \subset \mathbb{R}$, $P \in \Omega$, $t \in U$ beschrieben (Königsberger, 2004). In diesem Fall wird also jedem Punkt im Raum zu jedem Zeitpunkt ein Vektor zugeordnet, das Vektorfeld wird als instationär bezeichnet.
In der Physik häufig verwendete Vektorfelder sind Abbildungen zwischen dreidimensionalen euklidischen Vektorräumen $\mathbb{R}^3$, bei denen eine Abbildung der Punkte $P = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^3$ stattfindet. Das Vektorfeld $\vec{F}\,(x_1, x_2, x_3)$ wird hierbei als Linearkombination der Basisvektoren $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$

und $\hat{e}_3$ durch $\vec{F}(x_1, x_2, x_3) = F_1(x_1, x_2, x_3)\,\hat{e}_1 + F_2(x_1, x_2, x_3)\,\hat{e}_2 + F_3(x_1, x_2, x_3)\,\hat{e}_3$ beschrieben. Die Menge $\{\hat{e}_1,\, \hat{e}_2,\, \hat{e}_3\}$ bezeichnet dabei eine Orthonormalbasis, d. h. die Basisvektoren $\hat{e}_{i,\, i\in\{1,2,3\}}$ sind orthogonal und besitzen die Länge 1. In der Physik wird häufig eine Orthonormalbasis aus den kartesischen Einheitsvektoren $\hat{e}_x$, $\hat{e}_y$ und $\hat{e}_z$ verwendet. Diese sind unveränderlich, d. h. sie kennzeichnen ein globales Koordinatensystem (Michler und Kowalsky, 2008; Wagner, 2016). Das Vektorfeld $\vec{F}\,(x, y, z)$ der kartesischen Koordinaten x, y und z wird hierbei als Linearkombination dieser Basisvektoren beschrieben durch (Papula, 2008)

$$\vec{F}\,(x, y, z) = F_x(x, y, z)\,\hat{e}_x + F_y(x, y, z)\,\hat{e}_y + F_z(x, y, z)\,\hat{e}_z\,. \tag{1}$$

Die skalaren Vektorkomponenten $F_x(x, y, z)$, $F_y(x, y, z)$ und $F_z(x, y, z)$ geben dabei die Anteile von $\vec{F}$ in Richtung der kartesischen Basisvektoren an. Dies wird geometrisch als Projektion von $\vec{F}(x, y, z)$ auf die zugehörigen Koordinatenachsen interpretiert. In der Physik werden Gravitations- oder Strömungsfelder häufig als ebene, stätionäre Vektorfelder durch eine Abbildung der Punkte $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ beschrieben. In der kartesischen Basis sind diese dann typischerweise durch eine $F_x(x, y)$-Komponente und eine $F_y(x, y)$-Komponente als Linearkombination der kartesischen Basisvektoren $\hat{e}_x$ und $\hat{e}_y$ definiert (siehe Abb. 2a. für ein Beispiel).
Um besondere Strukturen, z. B. Symmetrien, zu berücksichtigen und dadurch Probleme zu vereinfachen, ist es oft zweckmäßig, der Problemstellung angepasste Koordinaten zur Beschreibung der Felder einzuführen (Königsberger, 2004). Hierfür erweisen sich häufig nicht-kartesische, krummlinige Koordinatensysteme als hilfreich, z. B. Zylinder- oder sphärische Koordinaten (Wagner, 2016). Beispielsweise zur Beschreibung des magnetischen Feldes eines stromdurchflossenen Leiters kann aufgrund der Rotationssymmetrie statt der Darstellung in kartesischen Koordinaten eine äquivalente Darstellung in krummlinigen Koordinaten, z. B. Zylinderkoordinaten, verwendet werden. Diese vereinfacht die mathematische Beschreibung der Feldeigenschaften, vor allem seine Abstandsabhängigkeit vom Leiter im Ursprung (siehe auch Abb. 1). In Zylinderkoordinaten r, φ und z wird ein Vektorfeld $\vec{F}(r, \varphi, z)$ über die orthonormalen Basisvektoren $\hat{e}_r$, $\hat{e}_\varphi$ und $\hat{e}_z$ mit den Feldkomponenten $F_r(r, \varphi, z)$, $F_\varphi(r, \varphi, z)$ und $F_z(r, \varphi, z)$ definiert durch

$$\vec{F}(r, \varphi, z) = F_r(r, \varphi, z)\,\hat{e}_r + F_\varphi(r, \varphi, z)\,\hat{e}_\varphi + F_z(r, \varphi, z)\,\hat{e}_z\,. \tag{2}$$

Im Gegensatz zum kartesischen Koordinatensystem, bei dem die Basisvektoren $\hat{e}_x$, $\hat{e}_y$ und $\hat{e}_z$ an jedem Raumpunkt in dieselbe Richtung zeigen, ändert sich die Richtung der krummlinigen Basisvektoren $\hat{e}_r$ und $\hat{e}_\varphi$ mit dem Winkel φ. Die Koordinatenlinien, d. h. die Kurven die entstehen, wenn alle bis auf eine Koordinate konstant gehalten werden, verlaufen daher beim kartesischen Koordinatensystem gradlinig, während die φ-Koordinatenlinie in Zylinderkoordinaten kreisförmig ist (Wagner, 2016). Außerdem lässt sich aufgrund der Koordinatenabhängigkeit der Basisvektoren keine globale Basis angeben, stattdessen bilden die Basisvektoren in jedem Punkt des Anschauungsraumes ein lokales Koordinatensystem (Wagner, 2016).

In zwei Dimensionen reduziert sich das Koordinatensystem auf die Koordinaten r und φ und das Vektorfeld $\vec{F}(r,\varphi)$ wird in ebenen Polarkoordinaten definiert durch

$$\vec{F}(r,\varphi) = F_r(r,\varphi)\,\hat{e}_r + F_\varphi(r,\varphi)\,\hat{e}_\varphi \tag{3}$$

(siehe Abb. 2a. für ein Beispiel). Alle Eigenschaften krummliniger Koordinatensysteme bleiben hierbei erhalten. Die beschriebenen Charakteristika kartesischer sowie krummliniger Koordinatensysteme wirken sich maßgeblich auf die Beschreibung der Eigenschaften von Vektorfeldern aus (Kap. 2.1.2).

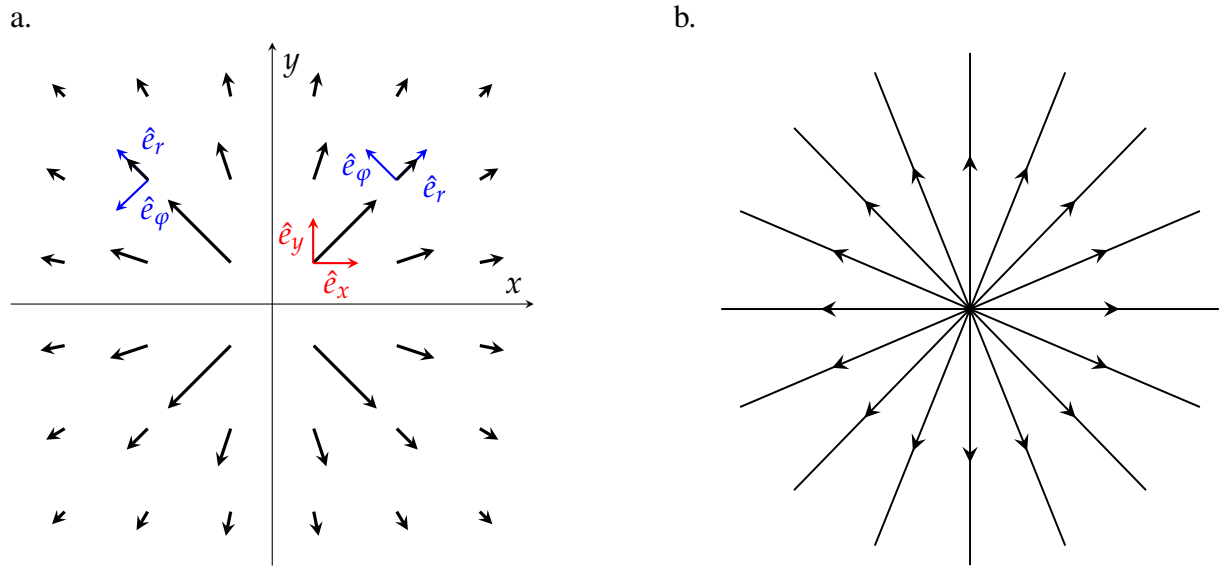


Abb. 2: Visualisierungen des elektrischen Coulombfeldes einer positiven Punktladung in der x-y-Ebene. a. Darstellung als Vektorfelddiagramm beschrieben (i) in kartesischen Koordinaten durch $\vec{F}(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}\,\hat{e}_x + \frac{y}{x^2+y^2}\,\hat{e}_y$ (mit den kartesischen Basisvektoren $\hat{e}_x$ und $\hat{e}_y$ in rot) und (ii) in Polarkoordinaten durch $\vec{F}(r,\varphi) = \frac{1}{r}\,\hat{e}_r$ (mit den Basisvektoren $\hat{e}_r$ und $\hat{e}_\varphi$ in blau). Zudem sind die kartesischen Koordinatenachsen eingezeichnet, die die Orientierung des globalen kartesischen Koordinatensystems angeben, und die Vektoren sind äquidistanten Gitterpunkten in kartesischen Koordinaten angeheftet (abiträre Längenskala). Die Punktladung befindet sich im Koordinatenursprung. b. Darstellung als Feldliniendiagramm.

Vektorfelder werden typischerweise anhand von Richtungsfeldern, sog. Vektorfelddiagrammen, oder Feld- bzw. Stromliniendiagrammen visualisiert (Abb. 2). Bei der Darstellung eines Vektorfeldes als Vektorfelddiagramm geht konventionell von jeden Punkt $P \in \Omega$ einer diskreten Menge Ω der zugehörige Vektor $\vec{F}(P)$ aus, welcher als Pfeil repräsentiert wird (Abb. 2a.). Dies wird formal als eine Bildung der Tupel $\left(P, \vec{F}(P)\right)$, $P \in \Omega$, formuliert (Königsberger, 2004). Die Beschränkung auf eine diskrete Menge Ω dient dabei der Vermeidung einer Überschneidung verschiedener Vektoren, die die visuelle Interpretierbarkeit einschränken würde (Seiler, 2012). Außerdem werden häufig äquidistante Gitterpunkte als Startpunkte der Vektoren verwendet, zwischen denen eine Stetigkeit des Feldes angenommen wird. Die Vektoren eines Vektorfeldes sind charakterisiert über ihre Länge (Betrag) und ihre Richtung (Wagner, 2016), wobei sich die Länge eines Vektors als Vektorsumme seiner Komponenten ergibt. Um Überschneidungen benachbarter Vektoren zu vermeiden, werden in Vektorfelddiagrammen

häufig abiträre Längenskalen verwendet, sodass nicht der tatsächliche Betrag der Vektoren dargestellt wird. Somit visualisieren Vektorfelddiagramme vor allem Betragsunterschiede verschiedener Vektoren und stellen so die zentralen Eigenschaften des Feldes durch wenige repräsentative Vektoren qualitativ dar (Bollen et al., 2017). Werden alle Vektoren des Urbildraumes auf denselben Vektor im Zielraum abgebildet, handelt es sich um ein homogenes Vektorfeld (Königsberger, 2004; Papula, 2008). Die Darstellung von Vektorfeldern als Vektorfelddiagramm ist dabei i. d. R. statisch und visualisiert stationäre Vektorfelder. Die Visualisierung instationärer Vektorfelder bedarf im Allgemeinen aufwändiger Berechnungsverfahren (für eine Beispiel siehe Pfeiffer, 2008), alternativ wird ein Zeitpunkt fixiert.
Neben der Darstellung als Vektorfelddiagramm werden vor allem elektromagnetische Felder sowie Strömungsfelder häufig als Feldliniendiagramme visualisiert (Abb. 2b.). Feldlinien, in der Fluidmechanik als Stromlinien bezeichnet, sind Kurven, die entlang der Feldrichtung zeigen, deren Tangente also in jedem Punkt durch die Richtung des dortigen Feldvektors gegeben ist (Römer und Forger, 1993; Wagner, 2016). Ihre Dichte ist proportional zur Feldstärke (Wagner, 2016).
Die beschriebenen Visualisierungen von Vektorfeldern kommen sowohl in der universitären Lehre der Physik als auch in der physikalischen Forschung vielfältig zum Einsatz. So werden in Veranstaltungen der Experimentalphysik im ersten Studienjahr Visualisierungen von Vektorfeldern typischerweise in Demonstrationsexperimenten verwendet, um stationäre elektrische und magnetische Felder beispielsweise durch Grießkörner oder Eisenfeilspäne zu veranschaulichen (Benimoff, 2006; Küchemann et al., 2021; Lincoln, 2017; Thompson, 1878). Darüber hinaus erfolgt die Visualisierung von stationären Strömungen typischerweise durch die Sichtbarmachung der Bahnkurven strömender Luft mithilfe von Nebel in einem Windkanal; Bahnkurven strömender Flüssigkeiten werden durch Farbmarker visualisiert. In der experimentellen und simulationsbasierten, physikalischen Forschung werden Geschwindigkeitsfelder strömender Fluide, Plasmen oder Kristalle sowie Magnetfelder häufig als Vektorfelddiagramme dargestellt, um sie bezüglich ihrer Eigenschaften, z. B. möglicher Vortices, zu analysieren (Abbasi et al., 2020; Ermakov und Stepanyants, 2021; Kumar et al., 2023; Pitarma et al., 2005; Straube et al., 2018; Wolf et al., 2019). Darüber hinaus dienen Vektorfelddiagramme auch der Visualisierung theoretischer Überlegungen der Quantenmechanik (Cruz-Prado et al., 2021) und der theoretischen Kosmologie, genauer der Anwendung der allgemeinen Relativitätstheorie auf kosmologische Modelle (Mandal et al., 2022; Rathore und Singh, 2023). In ihrer Rolle als Visualisierungs- und somit auch Kommunikationsmedium besitzen Vektorfelddiagramme daher eine relevante Funktion in den genannten physikalischen Forschungsgebieten.

2.1.2 Eigenschaften von Vektorfeldern: Differentialoperatoren und Integralsätze

Im Zusammenhang mit der Darstellung von Feldern physikalischer Größen, z. B. eines Geschwindigkeitsfeldes, sind vor allem die Charakteristika des Feldes von Bedeutung. Als Maß für die Variation eines Feldes werden dabei die Differentialoperatoren der Divergenz und Rotation herangezogen.
Die Beschreibung der Quellen und Senken eines Feldes in einem beliebigen Volumen V mit der

Oberfläche ∂V erfolgt typischerweise anhand der Durchströmung, dem sog. Fluss, des Feldes durch V (Burg et al., 2012). Hierbei wird der Netto-Fluss durch V mit einem Oberflächenintegral über der geschlossenen Oberfläche ∂V beschrieben, welches anschaulich die Projektion des Feldes $\vec{F}$ auf die äußeren Normalenvektoren $\vec{n}$ an ∂V für die gesamte Oberfläche integriert. Division durch V ergibt den mittleren Fluss durch V und durch Grenzwertbildung von V auf einen Punkt $P \in V$ ergibt sich die Divergenz des Vektorfeldes $\vec{F}$ in P zu

$$\operatorname{div} \vec{F}(P) = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \oint_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{n} \,. \tag{4}$$

Die Divergenz $\operatorname{div} \vec{F}(P)$ ist eine skalare Größe. Im Allgemeinen ist P für $\operatorname{div} \vec{F} > 0$ eine Quelle und für $\operatorname{div} \vec{F} < 0$ eine Senke des Feldes (Burg et al., 2012). Das Vektorfeld in Abb. 2 ist ein Beispiel für ein Vektorfeld mit einer Quelle im Ursprung.
Die lokale Definition der Divergenz als Fluss durch ein Volumen ist dabei zunächst koordinatenunabhängig. Zusätzlich lässt sich die Divergenz von Vektorfeldern auch in Abhängigkeit des zugrundeliegenden Koordinatensystems mithilfe des Nabla-Operators, $\vec{\nabla}$, berechnen. So ergibt sich die Divergenz eines Vektorfeldes $\vec{F}(x, y, z)$ in kartesischen Koordinaten über

$$\operatorname{div} \vec{F}(x, y, z) = \vec{\nabla}_{\text{kart.}} \cdot \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x} F_x(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial y} F_y(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial z} F_z(x, y, z) \tag{5}$$

als Skalarprodukt des Vektorfeldes mit dem Nabla-Operator $\vec{\nabla}_{\text{kart.}} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ (siehe Burg et al., 2012, S. 131ff. für eine ausführliche Herleitung). $\frac{\partial F_x}{\partial x}$, $\frac{\partial F_y}{\partial y}$ und $\frac{\partial F_z}{\partial z}$ bezeichnen die partiellen Ableitungen der Feldkomponenten nach den kartesischen Koordinaten. Für ein Vektorfeld $\vec{F}(r, \varphi, z)$ in Zylinderkoordinaten ist die Divergenz analog definiert über

$$\operatorname{div} \vec{F}(r, \varphi, z) = \vec{\nabla}_{\text{zylin.}} \cdot \vec{F}(r, \varphi, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r F_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} F_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} F_z \tag{6}$$

(siehe Hohenadler, 2018, S. 52ff. für eine ausführliche Herleitung). Obgleich diese Formel der Berechnung der Divergenz in kartesischen Koordinaten (Gl. 5) stark ähnelt, treten hier direkt sichtbare Unterschiede auf, die aus der Wahl des Koordinatensystems resultieren. So gilt anders als in kartesischen Koordinaten für eine infinitesimale Änderung $d\vec{v}$ eines Vektors $\vec{v}$ in Zylinderkoordinaten $d\vec{v} = dr\hat{e}_r + rd\varphi\hat{e}_\varphi + dz\hat{e}_z$, wobei dr, $d\varphi$ und dz infinitesimale Änderungen der Koordinaten entlang der Einheitsvektoren beschreiben. Die Längenänderung in $\hat{e}_\varphi$-Richtung ist demnach abhängig von r. Der Nabla-Operator in Zylinderkoordinaten enthält daher den Normierungsfaktor $\frac{1}{r}$ und lässt sich in Zylinderkoordinaten schreiben als $\vec{\nabla}_{\text{zylin.}} = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$. Die Fortpflanzung des Normierungsfaktors in der Anwendung des Nabla-Operators $\vec{\nabla}_{\text{zylin.}}$ auf $\vec{F}(r, \varphi, z)$ resultiert in dem Faktor $\frac{1}{r}$ in den ersten beiden Summanden (Gl. 6). Zudem gilt aufgrund der Koordinatenabhängigkeit der krummlinigen Basisvektoren für ihre partiellen Ableitungen $\frac{\partial \hat{e}_r}{\partial \varphi} = \hat{e}_\varphi$ und $\frac{\partial \hat{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\hat{e}_r$. Bei Anwendung des Nabla-Operators $\vec{\nabla}_{\text{zylin.}}$ resultiert dieser Zusammenhang in dem zusätzlichen Faktor r im ersten Summanden von Gl. 6. Mithilfe dieser Änderungen liefern die Berechnungen in kartesischen und

Zylinderkoordinaten (Gl. 5 und Gl. 6) das gleiche Ergebnis; allgemeiner gilt, dass die Divergenz invariant unter orthogonalen Koordinatentransformationen ist, d. h. wenn Längen und Winkel von und zwischen Vektoren erhalten bleiben (Lehrstuhl für Numerik und Geometrische Modellierung, 2018). Für ein ebenes Vektorfeld in kartesischen oder Polarkoordinaten $\vec{F}(x,y)$ bzw. $\vec{F}(r,\varphi)$ reduziert sich die Berechnung in Gln. 5 und 6 entsprechend jeweils auf die ersten zwei Summanden, z. B. in kartesischen Koordinaten

$$\operatorname{div}\vec{F}(x,y) = \vec{\nabla}_{\text{kart.}} \cdot \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}F_x(x,y) + \frac{\partial}{\partial y}F_y(x,y)\,. \tag{7}$$

Eine weitere zentrale Eigenschaft von Vektorfeldern, ihre Wirbelstärke, ergibt sich typischerweise aus der Betrachtung der Umströmung, d. h. Zirkulation, einer Fläche A mit der geschlossenen Randkurve ∂A. Ein Kurvenintegral über der Randkurve der Fläche summiert dabei die Feldkomponenten in Durchlaufrichtung der Kurve, d. h. ihre Projektion auf das vektorielle Wegelement der Kurve, auf und gibt so an, wie stark die Fläche umströmt wird, d. h. wie stark das Feld längs der Kurve zirkuliert (Burg et al., 2012). Analog zum Fluss wird auch die Zirkulation durch die Gesamtfläche geteilt, um die mittlere Wirbelstärke des Feldes in A zu erhalten. Zudem wird die Fläche A durch Grenzwertbildung auf einen Punkt $P \in A$ verringert. So ergibt sich die Wirbelstärke des Vektorfeldes $\vec{F}$ in P entlang der äußeren Normalen $\vec{n}$ an die Fläche A über

$$\left(\operatorname{rot}\vec{F}(P)\right) \cdot \hat{n} = \lim_{A\to 0}\frac{1}{A}\oint_{\partial A}\vec{F}\cdot d\vec{l}\,. \tag{8}$$

Die vektorielle Größe $\operatorname{rot}\vec{F}(P)$ bezeichnet die Rotation von $\vec{F}$ in P und gibt die Richtung der Rotationsachse für lokale Wirbel um P an. $\left(\operatorname{rot}\vec{F}(P)\right) \cdot \hat{n}$ beschreibt somit den Anteil der Rotation senkrecht zu A. Aufgrund des Skalarprodukts auf der linken Seite der Gleichung ist die Wirbelstärke dann am größten, wenn $\vec{n}$ und $\operatorname{rot}\vec{v}(P)$ in parallele Richtung zeigen. Das Feld in Abb. 2 ist ein Beispiel für ein rotationsfreies Feld.

Analog zur Divergenz existiert für die Rotation eines Vektorfeldes eine koordinatenabhängige Definition anhand des Kreuzprodukts zwischen Vektorfeld und Nabla-Operator (siehe Burg et al., 2012, S. 150ff. für eine ausführliche Herleitung). In kartesischen Koordinaten ergibt sich die Rotation des Feldes $\vec{F}(x,y,z)$ daher über die partiellen Ableitungen der Feldkomponenten mit

$$\operatorname{rot}\vec{F}(x,y,z) = \vec{\nabla}\times\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\hat{e}_x + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\hat{e}_y + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\hat{e}_z\,. \tag{9}$$

Für ein ebenes Vektorfeld $\vec{F}(x,y,z=0)$ reduziert sich die Rotation entsprechend auf

$$\operatorname{rot}\vec{F}(x,y,z=0) = \vec{\nabla}\times\vec{F}(x,y,z=0) = \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\hat{e}_z\,. \tag{10}$$

Mit Blick auf obige Erläuterungen zur Wirbelstärke (Gl. 8) sind $\operatorname{rot}\vec{F}(x,y,z=0)$ und die äußere Flächennormale $\vec{n}$ für ebene Vektorfelder in der x-y-Ebene immer kollinear, genauer in $\pm\hat{e}_z$-Richtung gerichtet. Für ein Vektorfeld $\vec{F}(r,\varphi,z)$ in Zylinderkoordinaten ist die Rotation analog

definiert durch

$$\operatorname{rot}\vec{F}(r,\varphi,z=0) = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial F_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial F_\varphi}{\partial z}\right)\hat{e}_r + \left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r}\right)\hat{e}_\varphi + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rF_\varphi) - \frac{\partial F_r}{\partial\varphi}\right)\hat{e}_z\,. \tag{11}$$

Für ein ebenes Vektorfeld $\vec{F}(r,\varphi,z=0)$ reduziert sich Gl. 11 wie in kartesischen Koordinaten auf den dritten Summanden.

Aus der Herleitung der Divergenz und der Wirbelstärke von Vektorfeldern (Gln. 4 und 8) ergeben sich neben den Differentialoperatoren wesentliche Zusammenhänge, die vor allem in den integralen Darstellungen der Maxwellschen Gleichungen der Elektrodynamik eine zentrale Rolle spielen. So lässt sich mithilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung sowie des Mittelwertsatzes der Integralrechnung für Bereichsintegrale aus der koordinatenunabhängigen Definition der Divergenz der Integralsatz von Gauß herleiten, der auch als Divergenztheorem bezeichnet wird (siehe Burg et al., 2012, S. 131ff. für eine ausführliche Herleitung und den Beweis des Satzes). Seine mathematische Formulierung lautet

$$\int_V \operatorname{div}\vec{F}\,dV = \oint_{\partial V}\vec{F}\cdot d\vec{n} \tag{12}$$

für ein Volumen V mit der (geschlossenen) Oberfläche ∂V, dem Volumenelement dV und dem Flächendifferential $d\vec{n}$. Aus der Definition der Rotation ergibt sich ein weiterer Integralsatz, der Integralsatz von Stokes (siehe Herleitung und Beweis des Satzes in Burg et al., 2012, S. 147ff.). Seine mathematische Formulierung lautet

$$\int_A \operatorname{rot}\vec{F}\cdot d\vec{n} = \oint_{\partial A}\vec{F}\cdot d\vec{l} \tag{13}$$

für eine Fläche A mit der (geschlossenen) Randkurve ∂A, dem Flächendifferential $d\vec{n}$ und dem vektoriellen Wegelement $d\vec{l}$.

Anschaulich stellt der Gaußsche Integralsatz eine Relation zwischen der Divergenz eines Vektorfeldes in einem Volumen und dem Fluss durch die Randfläche des Volumens her (Gl. 12). Der Stokessche Integralsatz verbindet die Rotation eines Vektorfeldes bezüglich einer Fläche mit der Zirkulation entlang der Randkurve dieser Fläche (Gl. 13).

Bei genauerem Hinsehen weisen beide Integralsätze eine ähnliche Struktur auf: Sie verbinden das Integral eines Differentials über einer bestimmten Region mit dem Wert der Funktion am Rand dieser Region (Griffiths, 2023). Diese Struktur tritt auch im Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung auf. Anschaulich gesprochen beschreibt dieser, dass die Gesamtänderung einer Funktion zwischen zwei Punkten auf zwei Weisen ermittelt werden kann: durch Subtraktion der Funktionswerte an den Endpunkten oder durch schrittweise Addition infinitesimaler Änderungen entlang des Weges (Griffiths, 2023). Die schrittweise Addition von Änderungen wird dabei im Grenzwert durch ein Riemann-Integral eines Differentials beschrieben (Burg et al., 2012). Der wesentliche Unterschied des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung gegenüber den Integralsätzen besteht dabei darin, dass der Rand der betrachteten Region bei den Integralsätzen selbst durch ein Integral beschrieben wird; der Rand eines Volumens entspricht einer geschlossenen Fläche und der Rand einer Fläche beschreibt eine

geschlossene Kurve. Aus diesem Grund werden die Integralsätze von Gauß und Stokes häufig als Verallgemeinerungen des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung aufgefasst (Burg et al., 2012).
Mit Blick auf obige Ausführungen zur Definition der Differentialoperatoren ermöglichen beide Integralsätze, Zusammenhänge zwischen dem lokalen Verhalten eines Vektorfeldes (Gln. 4 bzw. 8) und seinen globalen Eigenschaften (Gln. 5 und 6 bzw. 9 und 11) herzustellen. Diese Relationen liefern wertvolle Erkenntnisse über die Felder und ihre Eigenschaften und erleichtern Berechnungen in verschiedenen physikalischen und mathematischen Kontexten. Aus diesem Grund sind die Integralsätze von Gauß und Stokes von zentraler Bedeutung für das Herzstück des Elektromagnetismus, die Maxwellschen Gleichungen in integraler und differentieller Form (Burg et al., 2012). Sie spielen aber auch in der Strömungs- und Aerodynamik eine zentrale Rolle, z. B. bei der Herleitung der Kontinuitätsgleichung (in-)kompressibler Fluide (Burg et al., 2012).

2.2 Ebene Vektorfelddiagramme: Qualitative Interpretation und kognitive Prozesse

Die Definition der Divergenz eines ebenen, stationären Vektorfeldes in kartesischen Koordinaten als globale Feldeigenschaft erfolgt über die Summe der partiellen Ableitungen der Feldkomponenten $F_x(x, y)$ und $F_y(x, y)$ (im Nachfolgenden abgekürzt als F_x und F_y) nach den kartesischen Koordinaten x und y (Gl. 7). Anschaulich gesprochen beschreibt $\frac{\partial F_x}{\partial x}$ dabei die Veränderung von F_x in x-Richtung; analog lässt sich $\frac{\partial F_y}{\partial y}$ als Veränderung von F_y in y-Richtung interpretieren. Ausgehend von dieser anschaulichen Interpretation der partiellen Vektorableitungen lassen sich anhand der Beurteilung der Veränderungen von Feldkomponenten qualitative Aussagen über die Divergenz eines Vektorfelddiagramms treffen. Diese qualitative Vorgehensweise verzichtet dabei auf eine Auseinandersetzung mit konkreten Werten.
Die Beurteilung der partiellen Vektorableitungen eines ebenen Vektorfeldes beruht auf drei sequenziell ablaufenden, mentalen Prozessen (siehe auch Hahn und Klein, 2023b):

1. Der Zerlegung einzelner Vektoren eines Vektorfelddiagramms in ihre Vektorkomponenten,
2. der mentalen Aufrechterhaltung dieser Zerlegung und
3. der Beurteilung ihrer (Längen-)Änderung in Richtung der Basisvektoren des Koordinatensystems.

Die Beurteilung der Längenänderung ist dabei eng an die Orientierung der Koordinatenachsen geknüpft und erfordert eine Betrachtung der Komponentenvektoren unter Bezug auf das zugrundeliegende Koordinatensystem. Erfolgt beispielsweise eine Abnahme des Betrags einer negativen Komponente in positiver Koordinatenrichtung, d. h. sie wird kürzer, ist die Änderung der Komponente in Koordinatenrichtung dennoch positiv. In diesem Zusammenhang kommt einer korrekten Interpretation und Differenzierung der Komponentenvorzeichen sowie der Komponentenänderung und ihrer Verbindung

mit dem zugrundeliegenden Koordinatensystem also eine entscheidende Rolle zu. Diese Überlegungen greifen Aspekte auf, die dem, was Brahmia et al. (2020) als Denken über vorzeichenbehaftete Größen (Übersetzung der Verfasserin, engl. reasoning about signed quantities) bezeichnen, ähneln (natures of negativity in introductory physics; NoNIP). Am Ende des beschriebenen Beurteilungsprozesses steht eine qualitative Einschätzung des Vorzeichens, d. h. > 0, < 0 oder $= 0$, der partiellen Vektorableitung der betrachteten Feldkomponente. Für eine qualitative Bestimmung des Vorzeichens der Divergenz bedarf es anschließend des Zusammenfügens der Evaluationsergebnisse der Feldkomponenten in beide Koordinatenrichtungen (siehe Abb. 3 für einen Überblick des beschriebenen Vorgehens).

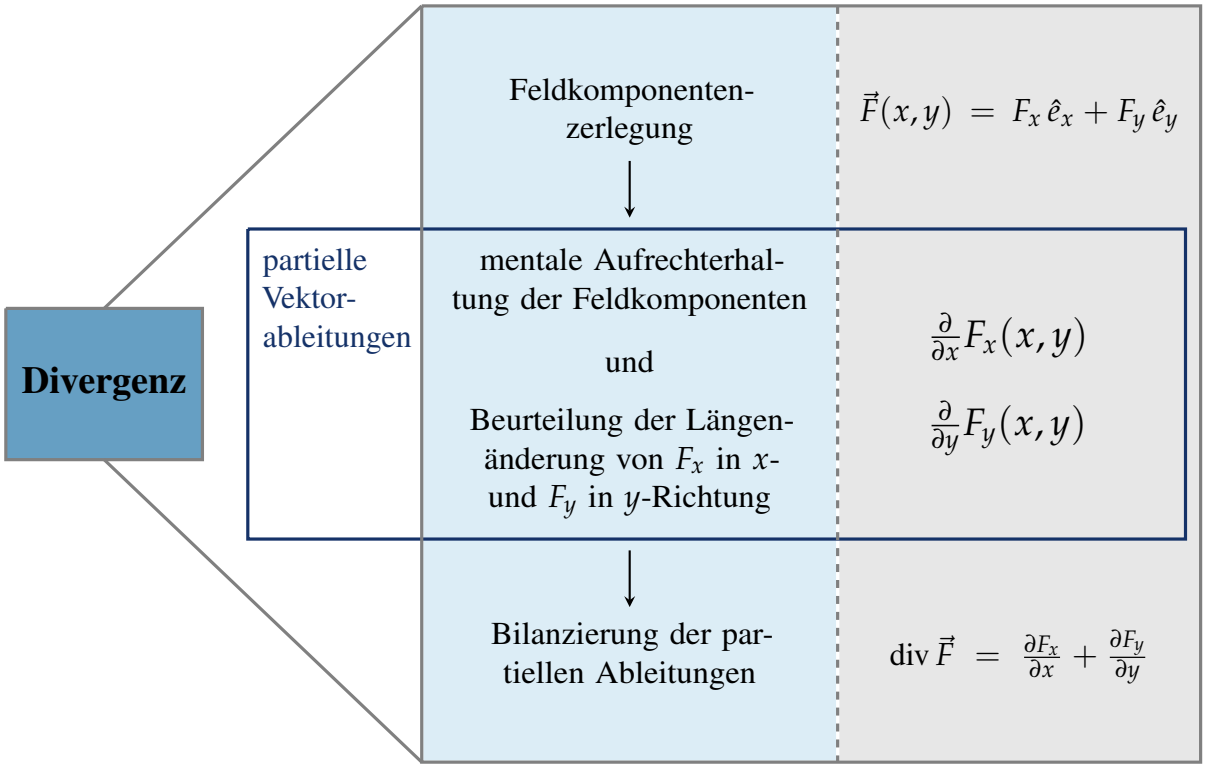


Abb. 3: Schema zur qualitativen Interpretation der Divergenz eines ebenen, stationären Vektorfelddiagramms. Dies umfasst die Abfolge der Handlungen und Prozesse (Mitte) und die zugehörigen Formeln (rechts). Das blaue Rechteck hebt die Prozesse der Beurteilung der partiellen Vektorableitungen hervor, welche mit Strukturen kovariaten Denkens assoziiert werden können. Das Schema gilt in adaptierter Form auch für die qualitative Interpretation der Rotation.

Die visuelle Interpretation der Rotation eines ebenen Vektorfeldes involviert sehr ähnliche Prozesse wie das beschriebene Vorgehen, wobei es zusätzlich die Spezifika der Rotation als vektorielle Größe zu beachten gilt. Gemeinsam haben beide Definitionen der Differentialoperatoren, dass sie partielle Vektorableitungen involvieren, deren Evaluation auf einer Beurteilung der Veränderung einer Variable (Länge der Komponenten F_x und F_y) in Abhängigkeit einer anderen (kartesische x- bzw. y-Koordinate) beruht (Abb. 3, blaues Rechteck). Auch bei der Bestimmung einer algebraischen Formel zu einem Vektorfelddiagramm werden Prozesse dieser Art integriert. Die Beurteilung der Kovariation von Feldkomponenten und Koordinaten ist dabei charakterisiert durch spezifische kognitive Handlungen und Prozesse (engl. mental actions nach Carlson et al., 2002), die mit dem kovariaten

Denken (engl. covariational reasoning) aus der mathematikdidaktischen Lehr-Lern-Forschung assoziiert werden können. In Anlehnung an die theoretische Rahmung von Carlson et al. (2002) umfassen diese mentalen Handlungen z. B. die Beurteilung einer gleichzeitigen Zu-/Abnahme-Beziehung (dt. Je-desto-Beziehung; überarbeitet von Jones, 2022; Thompson und Carlson, 2017). Aus verschiedenen mathematikdidaktischen Studien zum Reasoning im Kontext von Funktionen (Confrey und Smith, 1995; Johnson et al., 2016; Oehrtman et al., 2008; Paoletti und Moore, 2018), Koordinatensystemen und Graphen (Byerley und Thompson, 2017; Moore et al., 2013; Weber und Thompson, 2014) ist dabei bekannt, dass sich verschiedene Ausprägungen kovariaten Denkens durch entsprechende Verhaltensweisen, z. B. die Beschreibung der Zunahme einer Variable bei gleichzeitiger Abnahme einer anderen, operationalisieren lassen (Carlson et al., 2002; Jones, 2022; Thompson und Carlson, 2017). Aufgrund der fundamentalen Bedeutung des kovariaten Denkens für das Verständnis mathematischer Konzepte, sehen einige Autor:innen in einem Mangel dieser Fähigkeit eine der Hauptursachen für die Schwierigkeiten von Lernenden im Umgang mit Funktionen, Änderungsraten und Ableitungen (Carlson et al., 2002; Kertil, 2014, 2020).

Während Untersuchungen zur Rolle und den kognitiven Mechanismen kovariaten Denkens in der Mathematikdidaktik umfassend untersucht wurden (Carlson et al., 2002; Confrey und Smith, 1995; Johnson, 2012; Jones, 2022; Thompson und Carlson, 2017), ist der Begriff in der physikdidaktischen Forschung bisher kaum etabliert. Olsho et al. (2023), Zimmerman (2023) und Zimmerman et al. (2023) leisten hierzu einen ersten Beitrag, indem sie die theoretischen Überlegungen aus der mathematikdidaktischen Forschung erweitern und so einen ersten Ansatz für eine physikdidaktische Charakterisierung kovariaten Denkens von Expert:innen bei der Bearbeitung von graphenbasierten Aufgaben formulieren (Covariational Reasoning in Physics-Framework, CoRP). Im Rahmen ihrer Analyse identifizierten die Autor:innen verschiedene Argumentationsmuster und Modellierungsmodi (Übersetzung der Verfasserin, engl. Reasoning Devices und Modelling Modes), die das kovariate Denken von Physikexpert:innen begleiten. Sie argumentieren, dass diese stark verwandt mit den mentalen Handlungen des mathematikdidaktischen covariational reasoning ist, mit dem Unterschied, dass das kovariate Denken in der Physik eng mit der Wahrnehmung der physikalischen Welt und der relevanten physikalischen Größen verflochten ist. Diese Argumentation lässt sich auch auf den Umgang mit Vektorfelddiagrammen übertragen. So stellt mit Blick auf Bollen et al. (2016) die Verwendung zentraler physikalischer Größen im Umgang mit elektromagnetischen Feldern, z. B. Ladungsdichten und Ströme, eine zentrale Komponente der Anwendung der Vektoranalysis in der Physik dar.

Alternativ zu den Definitionen von Divergenz und Rotation anhand der partiellen Vektorableitungen lassen sich die Differentialoperatoren zudem anhand der Konzepte des Flusses und der Zirkulation in koordinatenfreier Form definieren (Gln. 4 und 8). An dieser Stelle wird auf Kap. 8 verwiesen für eine detaillierte Beschreibung der qualitativen Beurteilung dieser Definitionen. Der vorgestellte qualitative Beurteilungsansatz diente Klein et al. (2018) als Grundlage für die Entwicklung instruktionsbasierter Lehr-Lern-Materialien zur visuellen Interpretation der Divergenz von Vektorfelddiagrammen. Kap. 3.3 beleuchtet einen solchen qualitativen Lehr-Lern-Ansatz mit Vektorfelddiagrammen zunächst aus einer theoretischen Perspektive und fasst anschließend Ergebnisse entsprechender Wirksamkeitsuntersuchungen zu bestehenden Lehr-Lern-Materialien zusammen.

2.3 Lernschwierigkeiten im Umgang mit Vektorfeldern und vektoranalytischen Konzepten

Vektoren sind zentraler Gegenstand der Mathematik und Physik. Daher stellen Probleme im Umgang mit Vektoren einen zentralen Aspekt der physik- und mathematikdidaktischen Forschung im schulischen sowie universitären Kontext dar. Zahlreichen Studien zufolge besitzen Studienanfänger:innen vielfältige Schwierigkeiten im Hinblick auf unterschiedliche Vektorkonzepte, z. B. Richtung, Komponentenzerlegung, Vektoraddition und -subtraktion sowie Skalar- und Kreuzprodukt (Barniol und Zavala, 2014; Brahmia et al., 2020; Knight, 1995; Moynihan, 2018; Nguyen und Meltzer, 2003; Susac et al., 2018b; Van Deventer und Wittmann, 2007; Zavala und Barniol, 2010). Diese traten dabei sowohl in rein mathematischen als auch in physikalischen Kontexten auf. So erzielten Studierende in Tests zu grundlegenden vektoriellen Konzepten im physikalischen und mathematischen Kontext ähnliche Ergebnisse, verwendeten aber häufig unterschiedliche Lösungsstrategien für isomorphe Aufgaben (Van Deventer und Wittmann, 2007). Verschiedene Studien schlussfolgerten, dass die Probleme der Studierenden vor allem in dem Fehlen eines in sich konsistenten mathematisch-physikalischen Wissensgerüsts begründet sind (Carli et al., 2020).
Aufgrund der Relevanz der Vektoranalysis für verschiedene Teilgebiete der Physik hat sich im letzten Jahrzehnt über das Lernen von und mit Vektoren hinaus ein Forschungsstrang zu den studentischen Lern- und Verständnisschwierigkeiten in Bezug auf Vektorfelder entwickelt. Verschiedene physikdidaktische Studien untersuchten dabei das vektoranalytische Konzeptwissen von Studierenden sowohl in mathematisch-abstrahierten physik-inspirierten Kontexten (z. B. Baily et al., 2015; Singh und Maries, 2013) als auch in konkreten physikalischen Anwendungsszenarien, z. B. der Elektrodynamik (Campos et al., 2020; Pepper et al., 2012) oder der Mechanik (Ambrose, 2004). In Tab. 2 sind Lern- und Verständnisschwierigkeiten im Umgang mit Vektorfeldrepräsentationen und Konzepten der Vektoranalysis zusammengefasst.

2.3.1 Repräsentationsformen von Vektorfeldern

Ein bisher nur wenig adressiertes aber dennoch zentrales Forschungsinteresse bei der Untersuchung von Lernschwierigkeiten im Kontext der Vektoranalysis gilt der Darstellung von Vektorfeldern anhand verschiedener Repräsentationsformen und dem Wechsel zwischen diesen (siehe Kap. 3.1.1). Der Vector Field Representations test (VFR; Bollen et al., 2017) und der Representational Competence of Fields Inventory (RCFI; Küchemann et al., 2021) dienen hierbei als valide Testinstrumente, um Lernschwierigkeiten im Umgang mit Vektorfeldrepräsentationen zu diagnostizieren und zu systematisieren. Studien untersuchten dabei die Darstellungsformen als Vektorfelddiagramm, als algebraische Formel und als Feldliniendiagramm (Lernschwierigkeiten mit der Repräsentationsform als Feldliniendiagramm siehe Bollen et al., 2017). Beim Repräsentationswechsel zwischen Vektorfelddiagramm und Formel fanden Bollen et al. (2017) unter Verwendung des VFR, dass Physikstudierende vor allem mit der

Konstruktion eines Vektorfelddiagramms bei gegebenem Formelausdruck Probleme hatten ($N = 196$; ähnliche Ergebnisse siehe Gire und Price, 2012). So zeigten die Studierenden Schwierigkeiten, alle Eigenschaften eines Feldes in der Skizze darzustellen und Veränderungen von Länge und Richtung der Vektoren mit zunehmendem Abstand vom Ursprung korrekt abzubilden (Bollen et al., 2017). Die Ursache dafür lag vor allem in Problemen bezüglich der Vektoraddition und -komponentenzerlegung. In diesem Kontext warfen die Autor:innen zudem den Gedanken auf, dass einige Proband:innen zwar die Grundlagen der Vektoraddition für einen einzelnen Vektor verstehen, aber nicht wissen, wie sie das gleiche Prinzip im Falle eines Vektorfeldes anwenden können. Darüber hinaus zeichneten Studierende Vektoren als gebogene Pfeile, ließen alle Vektoren eines Feldes im Koordinatenursprung beginnen und zentrierten diese an ihrem Ort. Diese Ergebnisse indizieren grundlegende Verständnisschwierigkeiten bezüglich der Darstellungsform eines Vektorfeldes als Vektorfelddiagramm. Die Autor:innen folgerten treffend, dass viele Proband:innen möglicherweise gar nicht wussten, wie ein Vektorfeld skizziert wird, oder was ein Vektorfeld ist, obwohl sie bereits erfolgreich einen Einführungskurs zum Elektromagnetismus abgeschlossen hatten. Beim Repräsentationswechsel vom Vektorfelddiagramm zur Formel wurden darüber hinaus zumeist Probleme deutlich, die sich auf die Wahl eines geeigneten Koordinatensystems, den Umgang mit Einheitsvektoren und die Differenzierung zwischen Komponenten und Koordinaten bezogen (Bollen et al., 2017; Gire und Price, 2012).

2.3.2 Differentialoperatoren und Integralsätze der Vektoranalysis

Aktuelle Untersuchungen konzentrieren sich vor allem auf studentische Lernschwierigkeiten im Umgang mit Differentialoperatoren. In einer Studie von Bollen et al. (2015) antworteten nur etwa ein Viertel der Physik- und Mathematikstudierenden bei der Frage nach einer Interpretation von „$\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$“ und „$\vec{\nabla} \times \vec{F}$“ (korrekte oder inkorrekte) konzeptuell ($N = 30$); während etwa die Hälfte eine Formel oder den korrekten Namen des Differentialoperators angaben (Bollen et al., 2016, berichteten ähnliche Ergebnisse). Außerdem zeigten verschiedene Untersuchungen Schwierigkeiten von Studierenden, zu beurteilen, ob ein ebenes Vektorfelddiagramm in kartesischen Koordinaten divergenz- bzw. rotationsfrei ist oder nicht (Ambrose, 2004; Baily und Astolfi, 2014; Bollen et al., 2015; Jung und Lee, 2012; Klein et al., 2018, 2019; Singh und Maries, 2013; Xue, 2021). Eine Klassifikation der studentischen Strategien von Bollen et al. (2015) ergab dabei, dass nur 3 % der Studierenden konzeptuelle Erklärungen formulierten, mit diesen dann aber 100 % Erfolgsquote erzielten. Die bloße Berechnung von Divergenz und Rotation bereitete Studierenden im Vergleich zur qualitativen Beurteilung von Vektorfelddiagrammen wesentlich weniger Schwierigkeiten (Bollen et al., 2015; Singh und Maries, 2013). Verschiedene Studien zeigten zudem, dass die Aufgabe der Divergenz- oder Rotationsbeurteilung eines Vektorfelddiagramms auch Studierende, die bereits fortgeschrittene Kurse zum Elektromagnetismus erfolgreich abgeschlossen hatten, vor ähnliche Herausforderungen stellte (Bollen et al., 2015, 2016; Singh und Maries, 2013). Singh und Maries (2013) resümierten, dass selbst Studierende mit Hochschulabschluss Schwierigkeiten mit den Konzepten der Divergenz und Rotation haben, obwohl sie wissen, wie diese für ein gegebenes Vektorfeld mathematisch berechnet werden (Übersetzung

der Verfasserin; Singh und Maries, 2013, S. 384). Die genannten Untersuchungen zeigten zudem, dass Studierende die Bezeichnungen der Differentialoperatoren wörtlich verstehen. Beispielsweise assoziierten sie Divergenz mit einem Auseinanderlaufen des Feldes und Rotation mit der Biegung von Vektoren (Baily und Astolfi, 2014; Baily et al., 2015; Bollen et al., 2016; Jung und Lee, 2012; Singh und Maries, 2013). Baily und Astolfi (2014) beschreiben zudem, dass sich Studierende bei der Beurteilung von Vektorfeldern von Äußerlichkeiten des Feldes leiten lassen. Weiterhin zeigten Studierende Schwierigkeiten mit den Quantitäten der Divergenz und Rotation als skalare und vektorielle Größen, assoziierten Divergenz lose mit Quellen und Senken, nutzten die Richtungsänderung von Vektoren als Indikator für eine von Null verschiedene Rotation, interpretierten Divergenz und Rotation als globale Eigenschaften eines Feldes und betrachteten das Verschwinden der Divergenz als Indikator dafür, dass das Feld selbst Null ist (Baily und Astolfi, 2014; Baily et al., 2013, 2015; Bollen et al., 2015, 2016, 2018). Wie auch im Umgang mit Vektorfeldrepräsentationen zeigten Studierende zudem Lernschwierigkeiten, die sich auf die Vektordekomposition und die partiellen Vektorableitungen bezogen, z. B. verwechselten sie die Änderung von Vektorpfeilen mit ihrem Wert (Bollen et al., 2015, 2018). Einige der genannten Schwierigkeiten transferieren von Problemen im Umgang mit Vektoren auf Vektorfelder. Analog zu Carli et al. (2020) diagnostizierten Jung und Lee (2012) im Kontext der Vektoranalysis eine Diskrepanz zwischen mathematischem und konzeptuellem Wissen als ursächlich für Verständnisprobleme.

Neben den Differentialoperatoren sind bei den Integralsätzen von Gauß und Stokes vor allem Weg-, Oberflächen- und Volumenintegrale essentiell. In verschiedenen Studien zeigten sich hierbei zahlreiche Verständnisschwierigkeiten von Studierenden bezüglich der Interpretation solcher Integrale und ihrer einzelnen Komponenten sowie der Beschreibung und Konstruktion vektorieller Linien-, Flächen- und Volumendifferentiale (Jones, 2020; Schermerhorn und Thompson, 2019a,b). Huffman et al. (2020) fanden darüber hinaus, dass Studierende zwar die Formel des Satzes von Gauß in Worten ausdrücken konnten, aber große Probleme hatten, eine verständliche und korrekte qualitative Interpretation des Satzes, vor allem seiner divergenzbezogenen Seite (linke Seite in Gl. 12), zu formulieren ($N = 60$). 48 % der Proband:innen gaben indes an, keine Interpretation formulieren zu können. In einer weiteren Studie von Yusaf (2017) beurteilten mehr als die Hälfte aller Physikstudierenden in einem Grundkurs zur Vektoranalysis im zweiten Studienjahr an der Universität Bristol den Integralsatz von Stokes als das schwierigste Thema des Kurses. Sie begründeten ihre Einschätzung damit, dass der Satz nicht-intuitiv und schwer zu veranschaulichen ist, keine physikalische Analogie besitzt und das Verständnis weiterer Konzepte, z. B. dem Fluss durch Fläche sowie Oberflächen- und Linienintegrale, erfordert.

2.3.3 Lernschwierigkeiten bei der Anwendung vektoranalytischer Konzepte in der Physik

Über studentische Lernschwierigkeiten bezüglich vektoranalytischer Konzepte hinaus untersuchten verschiedene Studien die Ver- und Anwendung vektoranalytischer Inhalte in der Physik, vor allem im

Elektromagnetismus. Es zeigte sich, dass die beschriebenen konzeptuellen Lücken und Schwierigkeiten auf physikalische Anwendungskontexte transferierten und zu Verständnisproblemen und Fehlern bei der Anwendung essentieller physikalischer Prinzipien, z. B. der Maxwellschen Gleichungen, führten. So fanden Pepper et al. (2012), dass Studierende bei der Betrachtung elektrischer Felder häufig nur die Richtung oder den Betrag der Vektoren betrachteten, statt beide Größen zu berücksichtigen. Die Autor:innen schlussfolgerten, dass die Studierenden, Probleme mit der Vektorstruktur der Felder hatten. Ähnlich wie im mathematisch-abstrakten Kontext fanden Campos et al. (2020) zudem, dass Studierenden der Ingenieurswissenschaften ($N = 32$) die Skizzierung des Vektorfelddiagramms eines elektrischen Feldes anhand einer Formel wesentlich mehr Probleme bereitete (25 % korrekt) als der umgekehrte Repräsentationswechsel (75 % korrekt). Außerdem berichteten Pepper et al. (2012), dass bei der Anwendung des Gaußschen Gesetzes nur 26 % ($N = 51$) der Studierenden in einem Kurs zum Elektromagnetismus eine korrekte Aussage dazu trafen, wo das elektrische Feld einer dünnen, kugelförmigen Ladungsschale divergenzfrei ist (Baily und Astolfi, 2014; Bollen et al., 2015, 2016, berichteten ähnliche Ergebnisse).

Bezüglich der Berechnung von Linien-, Oberflächen- und Volumenintegralen zeigten Studierende zahlreiche Schwierigkeiten darin, diese korrekt aufzustellen und zu berechnen, z. B. zur Ermittlung des Potentials eines elektrischen Feldes (Pepper et al., 2012). Außerdem hatten sie Probleme mit ihrer Interpretation als Summe, z. B. beim Ampèreschen Gesetz (Wallace und Chasteen, 2010). Darüber hinaus zeigten zahlreiche Studien studentische Probleme im Umgang mit den Maxwellschen Gleichungen des Elektromagnetismus in differentieller (Bollen et al., 2015, 2016) und integraler Form (Guisasola et al., 2008; Li und Singh, 2017; Pepper et al., 2010; Singh, 2006), dem elektrischen Potential (Pepper et al., 2012) und bei der Evaluation konservativer Felder (Ambrose, 2004). Bollen et al. (2016) berichteten, dass Studierende für die Diskussion der Divergenz oder Rotation elektromagnetischer Felder Skizzierungen anfertigten, diese jedoch häufig fehlerhaft waren oder nicht von den Studierenden interpretiert werden konnten. Die Autor:innen sehen die Ursache hierfür u. a. darin, dass sich Lernende auf Gleichungen und Berechnungen konzentrieren und nicht auf die zugrundeliegenden Konzepte, was eine Integration mathematischer Kenntnisse in den elektromagnetischen Kontext erschwert (Bollen et al., 2015; Dray und Manogue, 2003; Guisasola et al., 2019; Kuo et al., 2013; Pepper et al., 2012; Sherin, 2001). Pepper et al. (2012) schlussfolgerten in diesem Kontext, dass viele Schwierigkeiten bezüglich der Anwendung von Vektorfeldkonzepten im Elektromagnetismus z. T. darauf zurückzuführen sind, dass es den Studierenden schwer fällt, auf alle mathematischen Hilfsmittel zurückzugreifen, physikalische Ideen und mathematische Rechnungen zu verknüpfen und die physikalische Situation bei einer Berechnung zu berücksichtigen. Bollen et al. (2015, 2016) fordern daher Instruktionen, die eine Verknüpfung von Mathematik und Physik fokussieren, einen konzeptuell-visuellen Ansatz verfolgen und dabei insbesondere eine geometrische Interpretation der entsprechenden Konzepte adressieren. Diese Überlegungen gliedern sich in zahlreiche Vorschläge von Dray und Manogue (1999, 2003) zur Überwindung der „vector calculus gap“ zwischen Mathematik und Physik ein.

Tab. 2: Studentische Lern- und Verständnisschwierigkeiten im Umgang mit Vektorfeldrepräsentationen und Konzepten der Vektoranalysis in mathematisch-abstrahierten sowie physikalischen Kontexten.

Inhalt/Konzept	Schwierigkeiten bezüglich ...	Referenzen
Repräsentationswechsel: Formel zu Vektorfelddiagramm	• Skizzierung eines Vektorfelddiagramms • Darstellungsform: Feld ordnet jedem Ort einen Vektor zu; Charakterisierung der Vektoren durch Länge und Richtung; Vektoren als gerade Pfeile, die von ihrem Referenzpunkt ausgehen • Vektorkomponentenzerlegung und -addition	Bollen et al. (2017), Campos et al. (2020), Gire und Price (2012), Pepper et al. (2012)
Repräsentationswechsel: Diagramm zu Formel	• Wahl des Koordinatensystems und Verwendung von Einheitsvektoren • Differenzierung zwischen Komponenten und Koordinaten	Bollen et al. (2017), Gire und Price (2012)
Partielle Vektorableitung	Differenzierung von Komponenten und Koordinaten: Verwechslung der Änderung eines Vektorpfeils mit seinem Wert	Bollen et al. (2015, 2018)
Differentialoperatoren als Eigenschaften eines Vektorfeldes	• Beurteilung der Divergenz und Rotation eines Vektorfelddiagramms • Interpretation von Divergenz: Wörtliches Verständnis von Divergenz, d. h. fälschlicherweise mit Auseinanderlaufen des Feldes und lose mit Quellen und Senken assoziiert; Divergenz gleich Null impliziert fälschlicherweise Feld gleich Null • Interpretation von Rotation: Wörtliches Verständnis von Rotation, d. h. fälschlicherweise mit Biegung und Richtungsänderung der Vektoren assoziiert • Divergenz als skalare Größe; Rotation als vektorielle Größe • Lokalität von Divergenz und Rotation	Ambrose (2004), Baily und Astolfi (2014) und Baily et al. (2013, 2015), Bollen et al. (2015, 2016, 2018), Jung und Lee (2012), Klein et al. (2018, 2019), Singh und Maries (2013), Xue (2021)
Linien-, Oberflächen- und Volumenintegral	• Interpretation von Integralen den zugehörigen Differentialen • Beschreibung und Konstruktion vektorieller Linien-, Flächen- und Volumendifferentiale	Jones (2020), Pepper et al. (2012), Schermerhorn und Thompson (2019a,b), Wallace und Chasteen (2010)
Integralsätze von Gauß und Stokes	Interpretation der Integralsätze	Huffman et al. (2020), Yusaf (2017)

3 Lernen mit Vektorfelddiagrammen: Theoretische Fundierung und Forschungsstand

In diesem Kapitel wird das Lernen mit Vektorfelddiagrammen aus theoretischer Perspektive beleuchtet und bestehende Unterstützungsmaßnahmen vorgestellt. Zu diesem Zweck werden in Kap. 3.1 Lerntheorien dargelegt, die einem vektorfelddiagrammzentrierten Lehr-Lern-Ansatz zugrunde liegen, sowie Methoden zur Unterstützung dieses Ansatzes beschrieben. Die Vorstellung der Lerntheorien erfolgt hierbei zunächst losgelöst vom Lehr-Lern-Ansatz mit Vektorfelddiagrammen, eine theoretische Einordnung des vektorfelddiagrammzentrierten Lernens findet in Kap. 3.3.1 statt. Die konkrete Verwendung der in Kap. 3.1 vorgestellten Methoden und theoretischen Prinzipien bei der Konzeption der im Rahmen dieser Arbeit entwickelten und untersuchten Lehr-Lern-Materialien sowie Testinstrumente wird im Zuge der Beschreibung dieser Instrumente und der entsprechenden Studien in den Kap. 4.4 sowie 7 bis 9 erläutert.
Im Anschluss an die theoretische Fundierung (Kap. 3.1) werden die Prinzipien und Grundlagen der Eye-Tracking-Methode zusammengefasst (Kap. 3.2). Diese stellt die Basis für die Analyse von kognitiv-visuellen Prozessen im Umgang mit Vektorfelddiagrammen in dieser Arbeit dar (konkrete Einbindung in die Studien dieser Arbeit in den Kap. 4.4.2.1 und 4.5.1). Nach der Einordnung des vektorfelddiagrammzentrierten Lernens in die beschriebenen Theorien (Kap. 3.3.1) wird abschließend der aktuelle Stand der Forschung zur Entwicklung und Wirksamkeitsanalyse von vektorfelddiagrammzentrierten Lehr-Lern-Materialien zusammengefasst (Kap. 3.3.2).

3.1 Lerntheoretische und kognitionspsychologische Ansätze

In diesem Kapitel werden verschiedene Ansätze der Lehr-Lern-Forschung sowie kognitiver Lerntheorien vorgestellt, die die Grundlage für das Lernen mit Vektorfelddiagrammen und die Entwicklung von Lehr-Lern-Materialien zur Förderung eines vektoranalytischen Konzeptwissens darstellen. Da es sich bei Vektorfelddiagrammen um visuelle Darstellungen handelt, umfasst dies zunächst den Ansatz des Lernens mit multiplen Repräsentationen (Kap. 3.1.1). Auf Basis verschiedener Funktionen von multiplen Repräsentationen beim Lernen begründet dieser Ansatz den DeFT-Orientierungsrahmen, der Anhaltspunkte für die Gestaltung multi-repräsentationaler Lehr-Lern-Umgebungen mit Vektorfelddiagrammen gibt (Kap. 3.1.3.1). An dieser Stelle wird der Ansatz des multi-repräsentationalen Lernens aus theoretischer Perspektive dargelegt, die Einordnung des vektorfelddiagrammzentrierten Lernens in die theoretische Rahmung erfolgt in Kap. 3.3.1. Anschließend werden kognitive Theorien zum Lernen mit multiplen Repräsentationen vorgestellt (Kap. 3.1.2). Dieses Kapitel thematisiert die

Cognitive Load Theory (Kap. 3.1.2.1) und darauf aufbauende Theorien zur kognitiven Verarbeitung multimedialer Informationen, die Cognitive Theory of Multimedia Learning und die Cognitive Theory of Visual Expertise (Kap. 3.1.2.2). Diese formulieren auf Basis begrenzter kognitiver Verarbeitungskanäle bild- und textbasierter Informationen verschiedene Prinzipien zur Gestaltung multimedialer Lehr-Lern-Umgebungen (Kap. 3.1.3.2). Abschließend werden Zeichenaktivitäten sowie digitalgestützte Visualisierungs- und Simulationswerkzeuge als Methoden zur Unterstützung des Lernens mit multiplen Repräsentationen vorgestellt (Kap. 3.1.4.1 und 3.1.4.2). Die Anwendung der Gestaltungsprinzipien sowie der Methoden des zeichen- und simulationsbasierten Lernens bei der Konzeption der Lehr-Lern-Materialien und Testinstrumente in dieser Arbeit erfolgt im Zuge der Beschreibung der Instrumente sowie der entsprechenden Studien in den Kap. 4.4 und 7 bis 9.

Tab. 3: Übersicht der Theorien zum Lernen und den Umgang mit Vektorfelddiagrammen in dieser Arbeit. Zusätzlich sind die daraus abgeleiteten Richtlinien zur Gestaltung von Lehr-Lern-Materialien angegeben.

Ansatz	Referenz	Gestaltung von Lernumgebungen (Kap. 3.1.3)
Lernen mit multiplen Repräsentationen	Ainsworth (1999)	DeFT-Orientierungsrahmen (Ainsworth, 2006)
Cognitive Load Theory	Chandler und Sweller (1991)	Designprinzipien multimedialer Lernumgebungen (Mayer, 2009; Mayer und Fiorella, 2014)
Cognitive Theory of Multimedia Learning	Mayer (2005)	
Cognitive Theory of Visual Expertise	Gegenfurtner (2020)	–

3.1.1 Lernen mit multiplen Repräsentationen

Die Darstellung naturwissenschaftlicher Konzepte in verschiedenen externen Repräsentationsformen ist essentieller Bestandteil naturwissenschaftlichen Arbeitens und fungiert als zentrales Mittel zur Kommunikation naturwissenschaftlicher Gedanken und Ideen (Krey und Schwanewedel, 2018; Opfermann et al., 2017). In Anlehnung an Rosengrant et al. (2006) und De Cock (2012) ist eine Repräsentation dabei eine Darstellung, die ein Objekt oder einen Prozess symbolisiert. Krey und Schwanewedel (2018) erweitern diese Definition um eine zweckorientierte Komponente und definieren Repräsentationen als „Darstellungen, die als kognitive Werkzeuge dem Verstehen von und dem Umgang mit mehr oder weniger abstrakten Konzepten dienen“ (Krey und Schwanewedel, 2018, S. 161).
Repräsentationen können auf verschiedene Weisen klassifiziert werden (für einen Überblick siehe Krey und Schwanewedel, 2018). Eine der verbreitetsten Kategorisierungen basiert auf der Differenzierung in deskriptive Repräsentationen, die ein Konzept durch Symbole darstellen, z. B. Text oder Formeln, und depiktive Repräsentationen, die für die Darstellung ikonische Zeichen nutzen, z. B. Diagramme

(Krey und Schwanewedel, 2018; Schnotz et al., 2010). Während die Symbole in deskriptiven Repräsentationen explizite Verbindungen zwischen den Elementen des Konzepts erzeugen, weisen ikonische Zeichen in depiktiven Repräsentationen lediglich eine strukturelle Ähnlichkeit mit dem dargestellten Sachverhalt auf (Krey und Schwanewedel, 2018; Schnotz und Bannert, 2003). Derartige externale Repräsentationen sind dabei von internalen, mentalen Repräsentationen abzugrenzen, die vor allem die kognitive Verarbeitung dieser Darstellungsformen maßgeblich beeinflussen (Kap. 3.1.2.2). Die nachfolgenden Ausführungen beziehen sich daher, sofern nicht anders gekennzeichnet, auf externale Repräsentationen. Werden verschiedene Repräsentationen des gleichen Bezugsobjekts in einer Lernumgebung zusammengeführt, handelt es sich um multiple (externale) Repräsentationen (meR; Ainsworth, 2006; Krey und Schwanewedel, 2018).
Lehr-Lern-theoretische und kognitionspsychologische Forschungsansätze zum Lernen mit multiplen Repräsentationen sind maßgeblich durch zwei unterschiedliche, allerdings eng verbundene, Fokusse charakterisiert: das Lernen über Repräsentationen, d. h. der Erwerb von Repräsentationskompetenzen (Kap. 3.1.1.2), und das Lernen mit Repräsentationen, wobei die Repräsentationen eine instrumentelle Rolle beim Lernen einnehmen (Kap. 3.1.1.1; Krey und Schwanewedel, 2018). Rau (2017) sieht in der engen Relation des Lernens über und mit Repräsentationen ein representational dilemma, das sich aus der Doppelrolle von Repräsentationen beim Lernen ergibt: Wie können Lernende neue Inhalte aus visuellen Darstellungen lernen, die sie noch nicht vollständig verstehen, und gleichzeitig lernen, wie visuelle Darstellungen Inhalte zeigen, die sie noch nicht gelernt haben? (Übersetzung der Verfasserin; Rau, 2017, S. 719). Im Folgenden werden zunächst wesentliche Grundlagen und Erkenntnisse zum Lernen mit multiplen Repräsentationen dargelegt, bevor die Überwindung des Dilemmas durch den Erwerb von Repräsentationskompetenzen beschrieben wird.

3.1.1.1 Über den Mehrwert multipler Repräsentationen beim Lernen

Im Allgemeinen wird der Verwendung multipler Repräsentationen eine Schlüsselrolle beim Lernen in den Naturwissenschaften, und insbesondere in der Physik, zugeschrieben (Kohl et al., 2007). Ainsworth (1999, S. 134) begründet diesen Stellenwert anhand drei zentraler Funktionen multipler Repräsentationen (Abb. 4):

1. meR enthalten ergänzende Informationen oder unterstützen komplementäre kognitive Prozesse, sodass eine Verbindung verschiedener Repräsentationen die Möglichkeit bietet, von der Summe aller Vorteile zu profitieren (Seufert, 2003).
2. meR können Lernenden helfen, ein besseres Verständnis zu entwickeln, indem eine Repräsentation verwendet wird, um eine andere einzuschränken.
3. meR ermöglichen ein tieferes Verständnis einer Situation oder eines Konzepts.

Ausgehend von diesen Funktionen ergaben zahlreiche naturwissenschaftsdidaktische Untersuchungen einen positiven Einfluss multipler Repräsentationen auf das Konzeptverständnis und den Wissenserwerb (z. B. Berthold und Renkl, 2009; Herrlinger et al., 2017) sowie bei der Bearbeitung von Konzepttests

oder Aufgaben (z. B. Saß et al., 2012; Susac et al., 2017). In der physikdidaktischen Forschung zeigen sich derartige Ergebnisse z. B. im Kontext der Mechanik (Hubber et al., 2010; Nieminen et al., 2017; Sutopo und Waldrip, 2014) und der Optik (Hettmannsperger et al., 2016; Kuo et al., 2017). Mit Blick auf die verschiedenen Funktionen von meR ermöglicht ihre Verwendung die Betrachtung und Bearbeitung von Problemen und Konzepten aus verschiedenen Perspektiven und unter Verwendung verschiedener Strategien (Seufert, 2003). Untersuchungen mit offenen Problem-Fragestellungen ergaben zudem, dass der Einsatz multipler Repräsentationen im Studium dazu führte, dass Studierende, multiple Darstellungen selbstständig und flexibel verwendeten (De Leone und Gire, 2006; Dufresne et al., 1997; Rosengrant et al., 2005, 2009). Rosengrant et al. (2007) resümierten ergänzend, dass die Nutzung multipler Repräsentationen eine hinreichende, aber nicht notwendige, Voraussetzung für eine erfolgreiche Problemlösung darstellt. Vor diesem Hintergrund bietet das Lernen mit multiplen Repräsentationen einen gewinnbringenden Ansatz, um die beschriebenen Lernschwierigkeiten im Umgang mit Vektorfeldern und vektoranalytischen Konzepten abzumildern (Kap. 2.3) und so den hohen Studienabbruchquoten entgegenzuwirken.

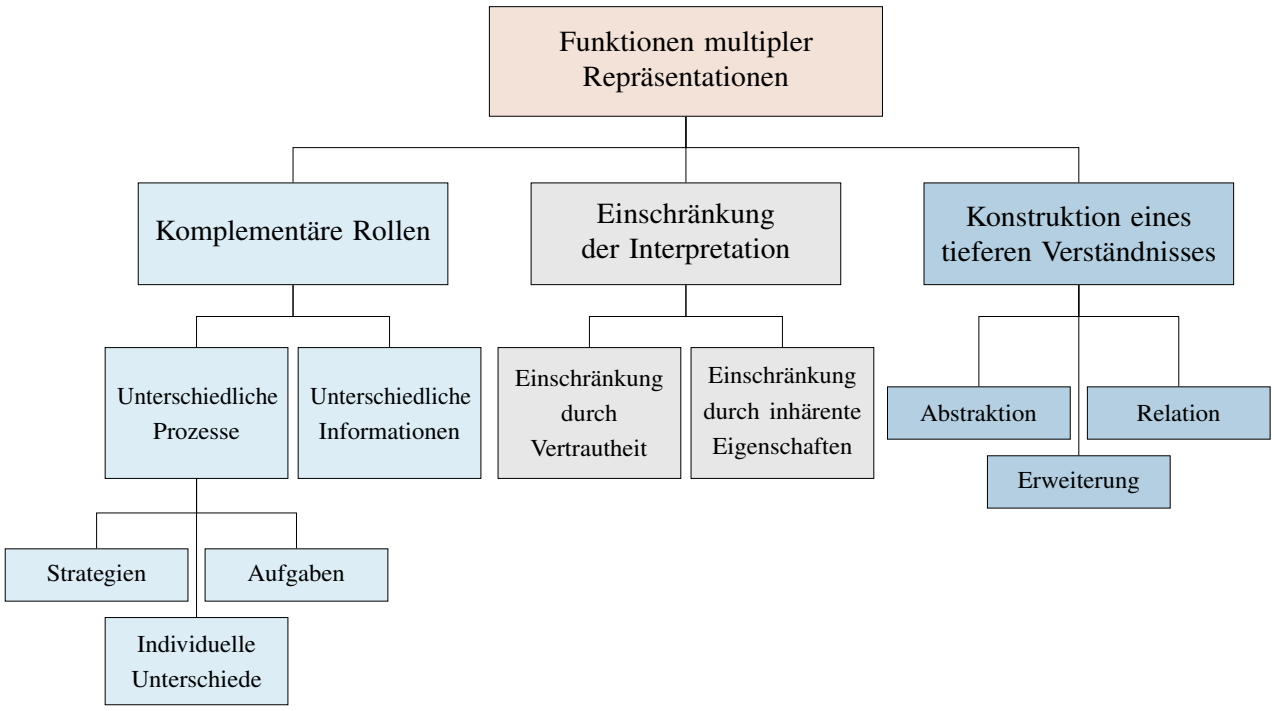


Abb. 4: Funktionale Taxonomie multipler Repräsentationen beim Lernen (nach Ainsworth, 2006, S. 187).

3.1.1.2 Repräsentationskompetenzen: Lernen über (multiple) Repräsentationen

Trotz der nachgewiesenen Lernwirksamkeit gibt es zahlreiche Studien und Untersuchungen, bei denen die Verwendung multipler Repräsentationen zu keinem Lernerfolg führte, sondern im Gegenteil eine kognitive Belastung erzeugte (Ainsworth, 2006; De Jong et al., 1998; Nguyen und Rebello, 2011; Susac et al., 2023). Dass multiple Repräsentationen nicht per se lernförderlich sind, ist dabei vor

allem dadurch begründet, dass die erste Konfrontation von Lernenden mit einer Repräsentation auch eine Vielzahl an kognitiven Aufgaben an sie stellt (Ainsworth, 2006). Dazu zählt beispielsweise, dass die Lernenden verstehen müssen, wie die entsprechende Repräsentation Informationen kodiert und darstellt, in welcher Beziehung sie zum Lerngegenstand oder anderen Repräsentationen steht und wie eine passende Repräsentation gewählt und konstruiert werden kann. Die Bewältigung dieser Aufgaben erfordert nach Rau (2017) Repräsentationskompetenzen, d. h. „knowledge and skills that enable them [learners, Anm. d. Verf.] to use visual representations to reason and solve tasks“ (Rau, 2017, S. 719). Dieser Forschungslinie folgend berichteten eine Vielzahl von Studien positive Effekte ausgeprägter Repräsentationskompetenzen auf das repräsentationale Lernen und den Erwerb von Inhaltswissen (Ainsworth, 2006, 2008; Kozma und Russell, 2005; McElhaney et al., 2015; Rau, 2017; Van der Meij und de Jong, 2011).

Verschiedenen Theorien und Ansätze aus der Kognitionspsychologie nutzen unterschiedliche Termini zum Ziel einer Ausdifferenzierung und detaillierte Beschreibung von konzeptuellen Repräsentationskompetenzen und ihrem Erwerb. Rau (2017) differenziert dabei zwischen einem visuellen und einem konnektiven Verständnis (engl. visual und connectional understanding). Das visuelle Verständnis bezieht sich auf das Wissen über eine einzelne Repräsentation, ihre Form der Informationskodierung und ihre Relation zu den zugrundeliegenden Konzepten. Beim konnektiven Verständnis steht hingegen die Verbindung und der Vergleich verschiedener Repräsentationen im Fokus. Dies umfasst die Identifikation und Erklärung korrespondierender Eigenschaften von Repräsentationen, wobei vor allem die Unterscheidung in oberflächliche und konzeptuelle Ähnlichkeiten eine zentrale Fähigkeit darstellt. Der Erwerb von Repräsentationskompetenzen wird von Seufert und Brünken (2006) als Kohärenzbildungsprozess beschrieben. Dieser umfasst eine lokale Komponente, die sich auf das repräsentationsspezifische Verständnis bezieht, sowie eine globale, repräsentationsverbindende Komponente (engl. local/global coherence formation). Im Kontext der Vektoranalysis involvieren lokale Kohärenzbildungsprozesse z. B. ein Verständnis der Darstellungsform als Vektorfelddiagramm, während globale Prozesse die Verknüpfung der Darstellungsformen als Formel und Diagramm unterstützen. Bei globalen Kohärenzbildungsprozessen unterscheiden Seufert und Brünken (2006) zudem eine Kohärenzbildung auf einer Oberflächenmerkmal- und einer Tiefenstruktur-Ebene (engl. coherence formation on a surface feature/deep stucture level). Erstere beschreibt eine Verknüpfung von Oberflächenmerkmalen verschiedener Repräsentationen, während eine Tiefenstrukturebene durch die Interpretation von Ähnlichkeiten und Unterschieden der korrespondierenden Merkmale charakterisiert ist.

Mit Blick auf die Relevanz von externalen Repräsentationen im naturwissenschaftlichen Diskurs schreiben verschiedene Autor:innen dem Erwerb von Repräsentationskompetenzen eine zentrale Bedeutung beim Lernen in den Naturwissenschaften zu (De Cock, 2012; Rau, 2017; Scheid et al., 2019). Außerdem zeigte sich, dass instruktive Unterstützung verschiedener Facetten der Repräsentationskompetenzen die Lerneffekte beim repräsentationalen Lernen verstärken kann (Rau und Wu, 2018; Van der Meij und de Jong, 2011). Mit Blick auf das representational dilemma argumentiert Rau (2017), dass der Erwerb von Repräsentationskompetenzen jedoch selten isoliert stattfindet, sondern vor allem beim Lernen mit Repräsentationen, d. h. beim Erwerb von Inhaltswissen, erfolgt.

3.1.2 Kognitionspsychologische Theorien zum Lernen mit multiplen Repräsentationen

Die Analyse kognitiver Prozesse beim multi-repräsentationalen Lernen sind Gegenstand kognitiver Lerntheorien, denen das Verständnis des Lernens als Aufnahme und Verarbeitung von Informationen zugrunde liegt. Sie adressieren die mentalen Prozesse beim Lernen vor dem Hintergrund limitierter Arbeitsgedächtnisressourcen im Allgemeinen, und speziell in multimedialen Lernumgebungen. Zentrale Theorien in diesem Kontext sind die Cognitive Load Theory (Kap. 3.1.2.1) und die Cognitive Theory of Multimedia Learning (Kap. 3.1.2.2), auf deren Grundlage Prinzipien zur Gestaltung effektiver multi-repräsentationaler Lernumgebungen formuliert wurden (Kap. 3.1.3). Die Cognitive Theory of Visual Expertise beschreibt ergänzend die Veränderungen kognitiver Informationsverarbeitung mit zunehmender Expertise (Kap. 3.1.2.2). Die Operationalisierung der kognitiven Prozesse beim multi-repräsentationalen Lernen durch Blickbewegungen wird in Kap. 3.2.2 beschrieben.

3.1.2.1 Kognitive Belastung beim Lernen

Die Cognitive Load Theory (CLT) nach Chandler und Sweller (1991) beschreibt die kognitive Belastung beim Lernen beispielsweise in einer (multi-repräsentationalen) Lehr-Lern-Umgebung mit Vektorfelddiagrammen, d. h. der Aufnahme und Verarbeitung von Informationen, anhand der kognitiven Ressourcen einer Person, die durch entsprechende Prozesse im Arbeitsgedächtnis sowie zwischen Arbeits- und Langzeitgedächtnis allokiert werden (Kalyuga, 2011; Krell et al., 2022; Paas et al., 2003). Für die Wissenskonstruktion nimmt dabei das Arbeitsgedächtnis eine zentrale Rolle ein, welches jedoch nur eine begrenzte Kapazität für die Verarbeitung neuer Informationen besitzt. Dies bezieht sich sowohl auf die Informationsmenge, die verarbeitet werden kann, als auch auf die Zeit, die dieser Verarbeitung zur Verfügung steht (Sweller, 2005). Mit dem Ziel der Konstruktion ressourcenoptimierender und lernförderlicher Lernumgebungen (Klepsch und Seufert, 2020; Sweller et al., 1998) unterscheidet die CLT daher drei Arten kognitiver Belastung beim Lernprozess (Sweller, 2010):

1. Intrinsische kognitive Belastung (engl. intrinsic cognitive load; ICL): Art der kognitiven Belastung, die durch die natürliche Komplexität von Informationen bedingt ist und von der Schwierigkeit des Lernmaterials abhängt,
2. Extrinsische oder lernirrelevante kognitive Belastung (engl. extraneous cognitive load; ECL): Art der kognitiven Belastung, die durch die Darstellung und Gestaltung des Lernmaterials bedingt ist und
3. Lernrelevante kognitive Belastung (engl. germane cognitive load; GCL): Art der kognitiven Belastung, die durch die Arbeitsgedächtnisressourcen bestimmt wird, die Lernende der intrinsischen kognitiven Belastung widmen.

Die intrinsische kognitive Belastung wird neben der Komplexität der zu verarbeitenden Informationen durch das Vorwissen der Person, die diese verarbeitet, bestimmt (Sweller et al., 1998, 2019). Darüber hinaus bezieht sich die extrinsische kognitive Belastung vor allem auf Prozesse, die kognitive Ressourcen belegen, ohne zur Wissenskonstruktion beizutragen (Sweller et al., 1998, 2019). Diese hängt damit genauso wie die lernrelevante kognitive Belastung maßgeblich vom instruktionalen Design ab (Sweller et al., 1998). Da letztere zur Wissenskonstruktion beiträgt, sollte diese möglichst einen großen Anteil der kognitiven Ressourcen beim Wissenserwerb belegen (Sweller et al., 1998).
Mit Blick auf die begrenzte Kapazität des Arbeitsgedächtnisses ergibt sich die Gesamtbelastung aus der Summe der beschriebenen Arten, wobei die Überschreitung eines individuellen Grenzwertes zu einer Überlastungssituation führen kann, in der Wissenserwerb und Verständnis behindert werden (Abb. 5; Sweller et al., 2011). Aus diesem Grund zeigt sich eine große Relevanz der Untersuchung und Berücksichtigung der kognitiven Belastung bei der Entwicklung und Wirksamkeitsuntersuchung von Instruktionen und Lehr-Lern-Materialien (Kirschner, 2002; Kirschner et al., 2006; Krell, 2017; Nieminen et al., 2010; Sweller, 2005; Sweller et al., 1998, siehe Kap. 3.1.3).
Alternativ zu obiger Aufteilung in drei Belastungsarten beziehen sich zahlreiche Arbeiten auf das Schema der kognitiven Belastung nach Paas und van Merriënboer (1994) und Paas et al. (2003). Dieses beschreibt eine Konzeptualisierung der kognitive Belastung durch die aufgabenbezogene Dimension der mentalen Belastung (engl. mental load) und die subjektbezogene Dimension der mentalen Anstrengung (engl. mental effort; Paas und van Merriënboer, 1994). Die mentale Belastung gibt dabei die kognitive Kapazität an, die aufgrund der Komplexität der Aufgabe für ihre Verarbeitung erforderlich ist, und die mentale Anstrengung spiegelt die investierte kognitive Kapazität einer Person bei der Aufgabenbearbeitung wider. Mit Blick auf die Erhebung kognitiver Belastung in empirischen Studien argumentieren Kirschner et al. (2011), dass es einer möglichst differenzierten Erfassung verschiedener Aspekte kognitiver Belastung bedarf, um theoretische Argumente zu stützen, die auf verschiedenen Arten von Belastung basieren.

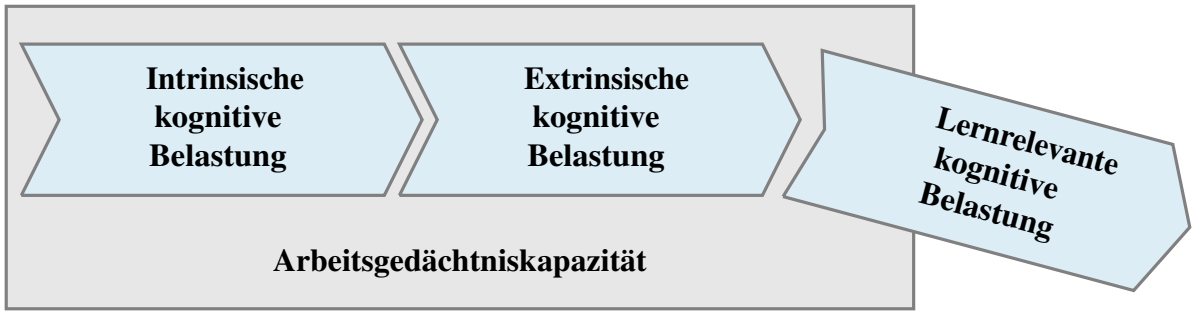


Abb. 5: Kognitive Belastung beim Lernen (nach Girwidz, 2020, S. 471).

3.1.2.2 Kognitive Theorien zum multi-repräsentationalen Lernen und Assessment

Der Moment des ersten Kontakts von Lernenden mit multiplen Repräsentationen in einer Lernumgebung wird vor allem durch die Sinneswahrnehmung, d. h. die Perzeption der multimodalen Reize, bestimmt. Die Cognitive Theory of Multimedia Learning (CTML) nach Richard E. Mayer (2005), die die Prozesse in derartigen Lernumgebungen beschreibt, legt daher das Drei-Speicher-Modell nach Atkinson und Shiffrin (1968) zur Beschreibung der Informationsverarbeitungsprozesse zugrunde. Dieses involviert, als Erweiterung der dualen Kognitionsarchitektur in der CLT, neben dem Arbeits- und Langzeitgedächtnis auch den Sensorischen Speicher.
Die anschließende Verarbeitung einer Auswahl relevanter Informationen im Arbeitsgedächtnis beruht unter Integration weiterer Modelle und Theorien der klassischen Informationsverarbeitung (Theorie der dualen Kodierung, Arbeitsgedächtnismodell; Baddeley, 1986; Paivio, 1990) im Rahmen der CTML auf drei zentralen Annahmen (Mayer, 2005):

1. Die Verarbeitung auditiv-verbaler und visuell-piktorialer Informationen erfolgt über separate Kanäle im Arbeitsgedächtnis (engl. dual-channels assumption)
2. Jeder Kanal des Arbeitsgedächtnisses besitzt eine begrenzte Kapazität (engl. limited capacity assumption)
3. Bedeutsames Lernen (meaningful learning) findet dann statt, wenn Lernende aktiv am Lernprozess teilnehmen (engl. active-processing assumption)

Die aktive Auseinandersetzung mit dem Lerngegenstand ist dabei nach Mayer (2005) durch drei kognitive Prozesse charakterisiert, die zwischen und innerhalb der drei Gedächtnisspeicher auftreten (**SOI**-Modell; Abb. 6). Abhängig vom jeweiligen Verarbeitungsstadium gehen diese mit verschiedenen Repräsentationsformen der auditiven und visuellen Stimuli (Wörter und Bilder) einher. Nach kurzzeitiger Speicherung der durch auditive und visuelle Reize aufgenommene Informationen im Sensorischen Speicher erfolgt eine **S**elektion relevanter Text- und Bildinformationen für die Weiterverarbeitung im verbalen bzw. piktorialen Arbeitsgedächtnis. Neben der modalitätsspezifischen Verarbeitung der Informationen ist es dort möglich, die internalen verbalen oder piktorialen Repräsentationen, die aus dem Sensorischen Speicher überführt wurden, in eine Repräsentation des jeweils anderen Kanals zu konvertieren. Geschriebene Wörter, die über das ikonische Gedächtnis in das piktoriale Arbeitsgedächtnis transferiert wurden, werden so in internale verbale Repräsentationen umgewandelt und damit im verbalen Arbeitsgedächtnis weiter verarbeitet (Abb. 6 $\star$). Im Zuge der Informationsverarbeitung im Arbeitsgedächtnis laufen anschließend Organisationsprozesse ab, in denen die internalen verbalen und piktorialen Repräsentationen in kohärente internale (verbale oder piktoriale) Modelle überführt werden (**O**rganisation). In diesem Zuge wird zudem bereits erworbenes Wissen aus dem Langzeitgedächtnis aktiviert und mit den reorganisierten Repräsentationen zu einem kohärenten Modell integriert (**I**ntegration). Nach der Konstruktion neuen Wissens im Arbeitsgedächtnis wird dieses ins Langzeitgedächtnis transferiert und dort als Vorwissen gespeichert.

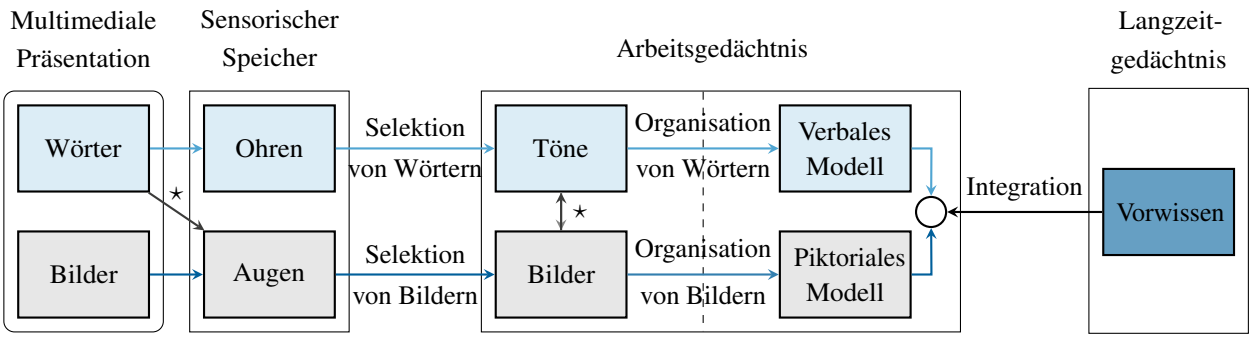


Abb. 6: Informationsverarbeitungsprozesse multimodaler Stimuli in der Cognitive Theory of Multimedia Learning (CTML). Die Verarbeitung auditiv-verbaler Stimuli (oben, hellblau) und visuell-piktorialer Stimuli (unten, grau) erfolgt in separaten Kanälen. Geschriebene Wörter durchlaufen einen Pfad mit anteiliger Verarbeitung im auditiv-verbalen und visuell-piktorialen Kanal (⋆; Darstellung nach Mayer, 2005, S. 37).

Auf Basis der CTML argumentiert Gegenfurtner (2020), dass sich die Verarbeitung visuell-piktorialer Informationen mit zunehmender Expertise verändert. Mit der Cognitive Theory of Visual Expertise (CTVE) formuliert er daher ein Modell zur Beschreibung expert:innenhafter Verarbeitungsprozesse piktorialer Informationen unter Verwendung der Nomenklatur der CTML. Die Informationsverarbeitung wird dabei im Sinne der CTVE mit zunehmender Expertise durch erweiterte Kapazitäten des Arbeitsgedächtnisses sowie Fähigkeiten zur ganzheitlichen Wahrnehmung und dem bewussten Ignorieren von Informationen charakterisiert. Im Zuge der Erweiterung der Arbeitsgedächtniskapazität kommt vor allem dem Vorwissen eine größere Rolle bei der Informationsverarbeitung zu. Hierbei differenziert die CTVE zwischen deklarativem, prozeduralem und metakognitivem Vorwissen. Mit Blick auf obige SOI-Prozesse, die sich auch in der CTVE wiederfinden, unterstützt deklaratives Vorwissen die Wahrnehmung relevanter Informationen, während prozedurales Vorwissen visuelle Praktiken zur Informationsaufbereitung und -verarbeitung umfasst (für eine ausführliche Darstellung siehe Gegenfurtner, 2020).

3.1.3 Theoriegeleitete Gestaltung multi-repräsentationaler Lernumgebungen

Angesicht der Gefahr einer kognitiven (Über-)Belastung beim Lernen mit multiple Repräsentationen kommt dem Design multi-repräsentationaler Lehr-Lern-Umgebungen eine besondere Relevanz zu. Im Folgenden werden daher zum einen der DeFT-Orientierungsrahmen von Ainsworth (2006) aufbauend auf den Funktionen multi-repräsentationalen Lernens (Kap. 3.1.3.1) und zum anderen die Designprinzipien von Mayer (2009) als Konsequenz der CLT und CTML vorgestellt (Kap. 3.1.3.2). Der wesentliche Unterschied beider Ansätze besteht dabei darin, dass die CTML sich auf die duale Darstellung von Informationen beschränkt, während Ainsworth (2006) insbesondere auch die Zusammenführung von mehr als zwei Repräsentationsformen in einer Lernumgebung berücksichtigt. Die Anwendung der Gestaltungsprinzipien bei der Konzeption der Lehr-Lern-Materialien in dieser Arbeit erfolgt im Zuge der Beschreibung der entsprechenden Studie in Kap. 7.

3.1.3.1 DeFT-Orientierungsrahmen

Aufbauend auf den **F**unktionen zum Lernen mit multiplen Repräsentationen (Abb. 4) und den kognitiven Aufgaben (**T**asks), die Lernende dabei zu bewältigen haben, formulierte Ainsworth (2006) den DeFT-Orientierungsrahmen. Dieser betrachtet verschiedene **De**sign-Parameter multi-repräsentationaler Lernumgebungen, z. B. die Anzahl einzelner sowie die Sequenzierung und Verbindung verschiedener Repräsentationen. Nach Ainsworth (2006) bedarf es Überlegungen bezüglich der Funktionen von multiplen Repräsentationen und den damit verbundenen kognitiven Aufgaben, um adäquate Entscheidungen dieser Design-Parameter treffen zu können.
Die von ihr beschriebenen Heuristiken beinhalten in diesem Zusammenhang verschiedene Empfehlungen zur Gestaltung multi-repräsentationaler Lernumgebungen. Werden meRs beispielsweise verwendet, um ein tieferes Verständnis eines Konzepts zu unterstützen, kommt der Verbindung der Repräsentationen eine zentrale Rolle zu. In diesem Fall gilt es ein angemessenes Niveau der Übersetzungsanforderungen zwischen den verschiedenen Repräsentationen zu finden, dass eine aktive Wissensaneignung unterstützt. Außerdem sollten die Lernenden dabei unterstützt werden, kognitive Verknüpfungen über mehrere Repräsentationen herzustellen, z. B. indem die Repräsentationen gemeinsam präsentiert werden. Ergänzend zum DeFT-Orientierungsrahmen betonen Wu und Puntambekar (2012) die Relevanz von Unterstützungsmaßnahmen beim multi-repräsentationalen Lernen. Den Autor:innen zufolge sollten diese vor allem auf die Erstellung, Integration und Translation verschiedener Repräsentationen abzielen, z. B. durch dynamische Verbindungen und eine geeignete Sequenzierung.

3.1.3.2 Designprinzipien multimedialer Lernumgebungen

Auf Basis der CLT und der CTML sowie zahlreicher empirischer Studien entwickelte Mayer (2009) zwölf Designprinzipien für multimediale Lernumgebungen (siehe Tab. 4 für einen Überblick der Prinzipien, die den Lehr-Lern-Materialien dieser Arbeit zugrunde liegen; Kap. 7). Das Multimediaprinzip beschreibt dabei, dass Menschen mit Bildern und Text besser lernen als mit Text allein, und fungiert damit als Grundprinzip dieser Forschungslinie (Ainsworth, 2018; Mayer, 2017). Im Sinne der CTML unterstützt die multimediale Präsentation von Bild und Text die Konstruktion verbaler und piktorialer Modelle eines Lerngegenstandes sowie deren bilaterale Verbindung. Meta-Analysen verschiedener e-Learning-Interventionen von Mayer (2009) und Mayer (2017) zur lernförderlichen Wirkung einer multimedialen Präsentation ergaben dabei mittlere Effektstärken von $d = 1.67$ ($n = 5$ Studien) und $d = 1.39$ ($n = 11$).
Mit Blick auf die CLT besteht ein wesentliches Ziel bei der Gestaltung von Lernumgebungen in einer Reduktion der lernirrelevanten, instruktionsbedingten kognitiven Belastung (Kap. 3.1.2.1). Dies gelingt beispielsweise durch die Vermeidung einer räumlichen sowie zeitlichen Trennung korrespondierender Informationsquellen (räumliches und zeitliches Kontiguitätsprinzip; Mayer, 2017). So evoziert eine

Tab. 4: Designprinzipien multimedialer Lernumgebungen für die Gestaltung von Lehr-Lern-Materialien zur Vektoranalysis. Aufgeführt sind die Prinzipien nach Mayer (2009), die der Konzeption der Lehr-Lern-Materialien in dieser Arbeit zugrunde liegen. Ihre Anwendung im Rahmen dieser Arbeit wird im Zuge der Vorstellung der Lernwirksamkeitsuntersuchung konkretisiert (Kap. 7).

Prinzip	Beschreibung
Multimediaprinzip	Integration von Bildern und Texten unterstützt Bildung kohärenter Wissenstrukturen
räumliches und zeitliches Kontiguitätsprinzip	Vermeidung einer räumlichen und zeitlichen Trennung korrespondierender Informationsquellen verhindert Split-Attention-Effekt und verringert extrinsische kognitive Belastung
Segmentierungsprinzip	Segmentierung der zu verarbeitenden Informationen in Lernabschnitte verhindert kognitive Überbelastung und unterstützt Informationsselektion und -organisation
Vortrainingsprinzip	Einführung in zentrale Begriffe und Konzepte vor der Lernintervention reduziert kognitive Belastung und unterstützt Aufmerksamkeitsfokussierung

räumliche Trennung korrespondierender Informationsquellen Ayres und Sweller (2014) zufolge Suchprozesse bei Lernenden; bei einer zeitlichen Trennung sind Lernende dazu gezwungen, Informationen mental aufrecht zu erhalten, bis sie mit einer anderen Informationsquelle verknüpft werden können (Split-Attention-Effect). Die lernförderliche Wirkung integrierter Lehr-Lern-Materialien wurde bereits in zahlreichen Studien, u. a. unter Verwendung von Eye-Tracking (Yang et al., 2018), und für verschiedene Lernumgebungen und -kontexte, z. B. beim Experimentieren mit Augmented Reality in der Thermodynamik (Thees et al., 2020), untersucht und nachgewiesen (Meta-Analysen und Reviews von Ginns, 2006; Schroeder und Cenkci, 2018; Yang et al., 2018).

Neben räumlicher und zeitlicher Kontiguität trägt auch die Präsentation einer multimedialen Botschaft in diskreten Segmenten zur Lernwirksamkeit einer multimedialen Lernumgebung bei (Segmentierungsprinzip; Mayer und Fiorella, 2014). Im Sinne der CLT kann eine solche Segmentierung der zu verarbeitenden Informationen eine kognitive Überbelastung vermeiden. Außerdem erleichtert diese die Strukturierung der Instruktion für die Lernenden und unterstützt die in der CTML postulierten Selektions- und Organisationsprozesse (Kap. 3.1.2.2; Rey et al., 2019; Spanjers et al., 2010). Einige Studien zeigten dabei bereits die Wirksamkeit der Segmentierung, z. B. bei text-bild-basierten Lehr-Lern-Materialien zum menschlichen Nervensystem (Florax und Ploetzner, 2010). Neben einer Segmentierung kann eine Einführung in zentrale Begriffe und Konzepte im Vorfeld der Lernintervention zusätzlich belastungsvermindernd wirken und eine Fokussierung der Aufmerksamkeit unterstützen (Vortrainingsprinzip; Mayer und Fiorella, 2014; Skuballa et al., 2015; Yang et al., 2018). Meta-Analysen von Mayer und Fiorella (2014) und Mayer (2017) ergaben eine mittlere Effektstärke von $d = 0.79$ ($n = 10$ Studien) bzw. $d = 0.70$ ($n = 12$) für die Segmentierung einer multimedialen Präsentation und eine mittlere Effektstärke von $d = 0.75$ ($n = 16$) bzw. $d = 0.46$ ($n = 20$) für das Vortrainingsprinzip.

3.1.4 Unterstützung multi-repräsentationalen Lernens durch Zeichenaktivitäten und digitalgestützte Visualisierungen

Mit Blick auf die CLT bergen multi-repräsentationale Lernumgebungen das Risiko einer kognitiven Überbelastung bei den Lernenden (Kap. 3.1.2.1). Neben der Berücksichtigung der vorgestellten Kriterien (Kap. 3.1.3) können hierbei vor allem die Ansätze des zeichen- sowie simulationsbasierten Lernens die kognitive Belastung verringern und so ein effektives Lernen mit multiplen Repräsentationen unterstützen. Im Folgenden werden beide Ansätze kurz vorgestellt (Kap. 3.1.4.1 und 3.1.4.2). Eine Konkretisierung der Umsetzung im Kontext des vektorfelddiagrammzentrierten Lernens in dieser Arbeit erfolgt in den Kap. 7 bis 9.

3.1.4.1 Zeichnen als Lernstrategie in den Naturwissenschaften

Die Visualisierung ist ein integraler Bestandteil des naturwissenschaftlichen Denkens und entspricht den visuell-räumlichen Anforderungen des naturwissenschaftlichen Lernens (Ainsworth et al., 2011). Vor diesem Hintergrund befürworten zahlreiche Arbeiten eine Anreicherung multi-repräsentationaler Lernumgebungen in den Naturwissenschaften durch zielgerichtete Zeichenaktivitäten (Ainsworth et al., 2011; Ainsworth und Scheiter, 2021; Cheng und Gilbert, 2009). Ainsworth und Scheiter (2021) betonen dabei, dass sich das Zeichnen besonders für solche Aufgaben eignet, die visuelles Denken in zwei Dimensionen erfordern. Ein positiver Einfluss von Zeichenaktivitäten beim multi-repräsentationalen Lernen konnte dabei bereits in einer Vielzahl an Untersuchungen nachgewiesen werden, z. B. im Kontext der Immunbiologie (Hellenbrand et al., 2019), der Quantenmechanik (Kohnle et al., 2020) und der Chemie (Cooper et al., 2017; Leopold und Leutner, 2012; Schwamborn et al., 2010; Wu und Rau, 2018; Zhang und Linn, 2011). Der Einsatz von Zeichenaktivitäten beim naturwissenschaftlichen Lernen bezieht sich zumeist auf das lerner-generierte Zeichnen, bei dem Lernende in einem Text beschriebene Schlüsselelemente und Zusammenhänge als repräsentative Zeichnung darstellen (Van Meter und Garner, 2005; Van Meter et al., 2006). In diesem Zusammenhang identifizierten Schmidgall et al. (2019) die Externalisierung visuell-räumlicher Informationen als lernförderlichen Faktor dieser Methode. Im Vergleich zur rein text-basierten Instruktion und der mentalen Vorstellung des Inhalts oder der beschriebenen Zusammenhänge kann das Zeichnen hierbei durch die Externalisierung der mental angeregten Bilder für eine kognitive Entlastung sorgen (Ainsworth, 2006). Der Zeichenprozess als solcher ist dabei zunächst anspruchsvoll. Sobald die Informationen jedoch externalisiert sind, wird das Arbeitsgedächtnis mental entlastet, indem der/die Lernende anhand der Zeichnung sein/ihr Verständnis vertiefen kann (Bilda und Gero, 2005; Schmidgall et al., 2019). Dies ist vor allem dann hilfreich, wenn aufgrund einer hohen Komplexität der Lehr-Lern-Materialien oder des zu lernenden Inhalts die Gefahr einer kognitiven Überforderung besteht (Kap. 3.1.2.1). Die mentale Entlastung ermöglicht dabei zudem eine effektive Ausführung anderer Handlungen. So führte das Zeichnen beim multi-repräsentationalen Lernen zu einer intensiveren Auseinandersetzung mit dem gelesenen Text oder der verwendeten Repräsentation, ermöglichte Studierenden, relevanten Bereichen einer Darstellung eine

größere Aufmerksamkeit zuzuweisen und unterstützte ein tieferes visuelles Verständnis von Konzepten (Hellenbrand et al., 2019; Leopold und Leutner, 2012; Scheiter et al., 2017; Schwamborn et al., 2010). Neben text-basierten Instruktionen ist in den letzten Jahren auch der Einsatz von Zeichenaktivitäten beim Lernen mit digitalen Werkzeugen, z. B. Visualisierungen, vermehrt in den Fokus gerückt (Cooper et al., 2017; Kohnle et al., 2020; Mason et al., 2013; Wu und Rau, 2018; Zhang und Linn, 2011). Dabei kristallisierten sich drei Zeitpunkte für den Einsatz von Zeichenaktivitäten beim Lernen mit digitalgestützten Visualisierungs- und Simulationswerkzeugen heraus: vor, während und nach der Interaktion mit dem Werkzeug. Zeichnen vor der Interaktion unterstützt hierbei die Lernvorbereitung durch die Aktivierung von Vorwissen und eine aktive Auseinandersetzung mit den lernrelevanten Repräsentationsformen (Cooper et al., 2017; Kohnle et al., 2020; Wu und Rau, 2018). Zeichenaktivitäten während der Verwendung des Werkzeugs, z. B. das Abzeichnen von Eigenschaften oder Darstellungen, helfen, eine passive Verarbeitung der Repräsentationen zu überwinden und so das Verständnis der gezeigten Darstellungen zu vertiefen (Cooper et al., 2017; Kohnle et al., 2020; Wu und Rau, 2018; Zhang und Linn, 2011). Nach Interaktion mit dem Werkzeug bieten Zeichenaktivitäten Anlass zur Zusammenfassung und Reflektion über den zurückliegenden Lernprozess (Cooper et al., 2017; Mason et al., 2013; Wu und Rau, 2018; Zhang und Linn, 2011).
Bisherige Forschung ergab jedoch auch, dass Zeichenaktivitäten nicht per se effektiv sind (De Bock et al., 2003; Leutner et al., 2009). Wu und Rau (2019) synthetisierten daher im Rahmen eines Literaturreviews bisherige Forschung zum zeichenbasierten Lernen und nutzten dies, um Empfehlungen für eine effektive Gestaltung von Zeichenaktivitäten zu geben. Als ein wesentliches Kriterium für das Design effektiver Zeichenaktivitäten formulierten sie die zielgerichtete Abstimmung der Zeichenaufgabe und des Unterstützungslevels auf den spezifischen, ein konkretes Ziel verfolgenden Lernprozess.

3.1.4.2 Lernen mit Simulationen und digitalgestützten Visualisierungswerkzeugen

Im Zuge der Forderung nach einer Anwendung wissenschaftlicher Prinzipien in der naturwissenschaftsdidaktischen Bildung betonen zahlreiche Fachdidaktiker:innen die Relevanz moderner Technologien zur Förderung eines effektiven naturwissenschaftlichen Unterrichts (Wieman, 2007). Im Kontext multirepräsentationalen Lernens konkretisiert sich diese Forderung auf digitalgestützte Visualisierungs- und Simulationswerkzeuge. Diese dienen der Veranschaulichung ausgewählter Aspekte eines Fachinhalts und reduzieren so dessen Komplexität (De Jong, 2011). Im Sinne lerntheoretischer Ansätze tragen sie dabei zu einer Verringerung der kognitiven Belastung und der Bildung kohärenter mentaler Modelle beim multimedialen Lernen bei (Urhahne et al., 2009; Wieman et al., 2010; Wu et al., 2001). Verschiedene Studien berichteten in diesem Zusammenhang von einer Förderung des Konzeptverständnisses durch digitalgestützte Werkzeuge, z. B. beim Lernen über chemische Strukturen (Williamson und Abraham, 1995; Wu et al., 2001). Eine Interaktion mit der Darstellung durch aktive Manipulation, z. B. beim digitalgestützten Experimentieren (Chang et al., 2008; Finkelstein et al., 2005; Wieman et al.,

2008) oder beim aufgabenbasierten Lernen physikalischer Konzepte (Putranta et al., 2019; Wieman et al., 2010), ermöglicht eine in besonderem Maße lernendenzentrierte Unterrichtsgestaltung (De Jong, 2011). Dessen positiver Einfluss zeigte sich dabei vor allem bezüglich der Entwicklung von Repräsentationskompetenzen (Kohnle und Passante, 2017; Stieff, 2011; Stieff und McCombs, 2006). So half die Aktivität den Lernenden, Repräsentationswissen systematisch mit inhaltlichem Wissen zu verknüpfen (Linn et al., 2006; Stieff, 2011). Dies vermeidet träges Wissen, fördert die Entwicklung deklarativer sowie prozeduraler Wissensstrukturen und unterstützt die Korrektur fehlgeleiteter Vorstellungen (Bodemer et al., 2004; Liu et al., 2010; Urhahne und Harms, 2006). Ergebnissen von Keehner et al. (2004) zufolge, profitieren dabei vor allem Lernende mit geringem visuell-räumlichen Vorstellungsvermögen.

Mit der hohen Interaktivität der Lernenden beim simulationsbasierten Lernen geht jedoch eine eigenverantwortliche Steuerung des Lernprozesses einher. Dies führt bei schwächeren Lernenden zumeist zu unsystematischen und zufälligen Handlungen (Urhahne und Harms, 2006). Ungeleitetes Lernen mit Simulationen gilt daher als nicht effektiv (De Jong, 2011). De Jong (2011) und Urhahne und Harms (2006) betonten in diesem Zusammenhang die Notwendigkeit begleitender Unterstützungsmaßnahmen und Instruktionen, die nachweislich nicht nur den Lerneffekt verstärken, sondern auch bei den Lernenden zu einer höheren wahrgenommenen Konzentration beitragen (De Jong und van Joolingen, 1998; Winberg und Hedman, 2008). Auf Basis einer Synthese verschiedener Literaturüberblicke formulierten die Autoren Empfehlungen für die Gestaltung von begleitenden Unterstützungsangeboten beim Lernen mit digitalgestützten Visualisierungs- und Simulationswerkzeugen. So regten sie verschiedene Formen interpretativer und experimenteller Unterstützung an, z. B. die Vorgabe einer allgemeinen Struktur, z. B. in Form von Arbeitsaufträgen, und die Einführung in wesentliche Variablen und Eigenschaften des Werkzeugs zur Unterstützung der Orientierung in der Lernumgebung (für eine ausführliche Darstellung siehe De Jong, 2011). Für eine derartige Einführung erwiesen sich beispielsweise Erklärvideos als hilfreich (Holzinger et al., 2009). Eine Meta-Analyse zum Einsatz digitaler Werkzeuge im schulischen Mathematik- und Naturwissenschaftsunterricht ergab zudem, dass Visualisierungen und Simulationen vor allem dann besonders wirksam sind, wenn sie ergänzend zu anderen Instruktionsmethoden eingesetzt werden, statt als Ersatz dieser (Hillmayr et al., 2020).

3.2 Blickpfade zur Dekodierung kognitiver Prozesse

Aus Perspektive der Lehr-Lern-Forschung sind die Lern- und Informationsverarbeitungsprozesse beim multi-repräsentationalen Lernen von zentraler Bedeutung für die Konzeption und Entwicklung lernwirksamer und effektiver Lernumgebungen. Allerdings entziehen sich diese Prozesse einer direkten Beobachtung. In den letzten Jahrzehnten ist das Eye-Tracking, d. h. die Analyse von Blickbewegungen, als Erkenntnismethode für die Analyse dieser Prozesse zunehmend in den Fokus der Wissenschaft gerückt, da es die Möglichkeit bietet, unverzögert Rückschlüsse auf derartige Prozesse zu erhalten. Aus diesem Grund werden auch für die Analysen der kognitiv-visuellen Prozesse im Umgang mit

Vektorfelddiagrammen in dieser Arbeit Blickdaten herangezogen. Im Folgenden findet zunächst eine Einführung in die Eye-Tracking-Methode sowie zentrale Begriffe statt (Kap. 3.2.1). Anschließend werden Grundannahmen der Interpretation von Blickdaten bei der Betrachtung visueller Stimuli in Bezug auf die lerntheoretischen Ansätze in Kap. 3.1 vorgestellt (Kap. 3.2.2).

3.2.1 Eye-Tracking als Erkenntnismethode

Eye-Tracking bezeichnet im Allgemeinen die Aufnahme und systematische Analyse von Blickbewegungen bei der Betrachtung eines Stimulus (Rakoczi, 2012). Die Methode wird bereits in einem breiten Spektrum wissenschaftlicher Disziplinen für die Analyse der mentalen Prozesse herangezogen, z. B. im Marketing (Wedel und Pieters, 2008), in der Psychotherapie (Armstrong und Olatunji, 2012), in den Neurowissenschaften (Popa et al., 2015) und in der Linguistik (Conklin und Pellicer-Sánchez, 2016). Vor allem seit der Jahrtausendwende wird Eye-Tracking vermehrt auch in der Bildungsforschung eingesetzt (für eine theoretische Betrachtung siehe Jarodzka et al., 2017), z. B. in der Lehr-Lern-Forschung (Lai et al., 2013), in der Mathematik- und Medizindidaktik (Ashraf et al., 2018; Strohmaier et al., 2020). Aufgrund des hohen Visualitätsgrades der Stimuli beim multi-repräsentationalen Lernen bietet sich die Forschungsmethode insbesondere für die Untersuchung der Prozesse beim multimedialen Lernen und Assessment an (Alemdag und Cagiltay, 2018; Hyönä, 2010; Yang et al., 2018). Typische Anwendungsszenarien sind hier z. B. die Nutzung digitaler Lernumgebungen (Chiou et al., 2022) und die Bearbeitung von Konzepttests (Han et al., 2017) oder -aufgaben (Susac et al., 2023).
Durch die Methode kann das menschliche Blickverhalten auf einem Stimulus, das durch eine Abfolge von Fixationen und Sakkaden charakterisiert ist, erfasst werden. Eine Fixation bezeichnet dabei eine temporäre Ruhepause der Blickbewegung auf einem Ort des Stimulus, die von $200 - 300$ ms bis zu mehreren Sekunden dauern kann (Holmqvist et al., 2011). Die schnellen Blickbewegungen zwischen zwei aufeinander folgenden Fixationen werden als Sakkaden bezeichnet. Im Gegensatz zu Fixationen ist das Auge bei einer Sakkade „blind“. Es wird keine visuelle Information aufgenommen.
Aufgezeichnete Blickbewegungen werden typischerweise in Form von Aufmerksamkeitsverteilungsplots (engl. heat maps) oder als Blickpfade (engl. scanpaths) visualisiert (Holmqvist et al., 2011). Quantitative Analysen der aufgenommenen Blickdaten beruhen darüber hinaus auf der Definition von Interessengebieten, sog. Areas of Interest (AOIs), d. h. Regionen auf dem Stimulus, die entsprechend dem Forschungsziel von Interesse sind (Holmqvist et al., 2011). Auf diesen werden fixationsbasierte und sakkadische Metriken ausgewertet (Goldberg und Helfman, 2010). Dazu zählen u. a. die Fixationsdauer, die Fixationszahl und die Zeit bis zur ersten Fixation in einer AOI. Neben Positionsmaßen gibt es zudem Metriken, die sich auf die Bewegung des Blicks beziehen, wie z. B. die Sakkadenrichtung und -länge (Holmqvist et al., 2011). Neben der Analyse der Blickbewegungen auf einem oder mehreren Interessengebieten sind dabei vor allem auch die Übergänge zwischen verschiedenen solchen Regionen, sog. Transitionen, relevant für die Analyse von Lern- und Problemlöseprozessen (Goldberg und Helfman, 2010). Für eine umfassende Einführung in die Termini und Umsetzung der Eye-Tracking-Methode wird auf Holmqvist et al. (2011) verwiesen.

3.2.2 Eye-Tracking beim multi-repräsentationalen Lernen und Assessment

Die Verwendung von Eye-Tracking als Erkenntnismethode beruht auf der postulierten Verbindung von Blickbewegungen und kognitiven Prozessen anhand zweier kognitionspsychologischer Annahmen (Just und Carpenter, 1976, 1980; Wu und Liu, 2022):

1. Unmittelbarkeitshypothese (engl. immediacy assumption): Die Verarbeitung und Interpretation eines betrachteten Objekts (z. B. eines Wortes) erfolgt unmittelbar und unverzögert,
2. Auge-Geist-Hypothese (engl. eye-mind-assumption): Ein betrachtetes Objekt wird kognitiv verarbeitet, d. h. die Blickdauer ist ein Indikator für die Verarbeitungszeit.

Als kontinuierliche Abfolge von Fixationen und Sakkaden bilden Blickbewegungen angesichts der postulierten Annahmen eine zeitlich-räumliche Dekodierung visueller Informationen (Holmqvist et al., 2011; Rakoczi, 2012), die durch die beschriebenen Metriken operationalisiert wird.
Im Rahmen der Analyse multimedialer Lernumgebungen können die genannten Blickmetriken mit den SOI-Prozessen in der CTML (und CTVE) assoziiert werden (für einen Überblick siehe Alemdag und Cagiltay, 2018). So indiziert die Zeit bis zur ersten Fixation auf relevanten Repräsentationsformen einer Instruktion die Zeit, bis Lernende mit der Verarbeitung ausgewählter Informationen beginnen, mit anderen Worten, sie gibt die Dauer des Selektionsprozesses an (Park et al., 2015a,b). Die absolute Fixationsdauer, die mittlere Fixationsdauer und die Fixationszahl auf einzelnen Repräsentationsformen einer Instruktion dienen zudem als Indikatoren für Organisationsprozesse im Zuge der Informationsverarbeitung (Glaser und Schwan, 2015; Park et al., 2015a; Scheiter und Eitel, 2015; Skuballa et al., 2015). Nach Park et al. (2015b) laufen diese Prozesse während der Fixationen ab, sodass eine höhere visuelle Aufmerksamkeit mit einer tiefergehenden Wissensorganisation bezüglich der einzelnen Repräsentationen assoziiert werden kann. Skuballa et al. (2015) zogen an dieser Stelle zudem die Anzahl der Sakkaden auf einer Instruktion heran, die eine im Vortraining instruierte Bewegungsrichtung widerspiegelten. Eine hohe mittlere Fixationsdauer wird neben der Verarbeitungstiefe in einigen Arbeiten mit einer hohen kognitiven Belastung während der Verarbeitung einer Repräsentation assoziiert und in diesem Kontext als Indikator für Verständnisschwierigkeiten verstanden (Krejtz et al., 2016; Liu und Chuang, 2011). Zuletzt betrachten eine Vielzahl von Studien die Transitionszahl zwischen verschiedenen Repräsentationsformen als Indikator für repräsentationsübergreifende Integrationsprozesse (Park et al., 2015b; Schüler, 2017). Laut eines Reviews von Yang et al. (2018) zu multimedialen und technologiebasierten Lernumgebungen ist die Integration von verbalen und visuellen Informationen, operationalisiert durch Transitionen zwischen deskriptiven und depiktiven Repräsentationen, ein relevanter Prädiktor für den Erwerb konzeptuellen Wissens. Das Review ergab zudem, dass das Blickverhalten und die Aufmerksamkeitsverteilung auf multimedialen Lernumgebungen maßgeblich durch das visuell-räumliche Vorstellungsvermögen und das Vorwissen beeinflusst werden.
Im Einklang mit der CTVE zeigten sich beim Assessment expertiseabhängige Unterschiede der visuellen Aufmerksamkeit auf relevanten und irrelevanten Bereichen eines Stimulus. So ergab eine Meta-Analyse von Gegenfurtner et al. (2011), dass Expert:innen verglichen mit Noviz:innen insgesamt kürzere Fixationsdauern sowie höhere Fixationszahlen auf aufgabenrelevanten Bereichen und geringere

Fixationszahlen auf aufgabenredundanten Bereichen aufwiesen. Derartige Ergebnisse spiegelten sich auch im Blickverhalten in Multiple-Choice-Umgebungen wider, indem die visuelle Aufmerksamkeit mit zunehmender Expertise, d. h. Testleistung, zunehmend auf der korrekten Antwortoption allokierte (Klein et al., 2020). Transitionen zwischen verschiedenen Optionen werden in diesem Zusammenhang mit Entscheidungsfindungsprozessen assoziiert (Lindner et al., 2014; Tsai et al., 2012), während Transitionen zwischen Aufgabe und Antwortoptionen ein bewusstes Koordinationsverhalten implizieren (Andrà et al., 2015; Susac et al., 2023). Darüber hinaus berichten Chumachemko et al. (2014) und Krichevets et al. (2014) von einem repräsentationsspezifischen Blickverhalten bei der Navigation zu Punkten in einem kartesischen Koordinatensystem. Dieses war durch einen hohen Anteil von Sakkaden in vertikaler und horizontaler Richtung und einem geringen Anteil schräger Sakkaden gekennzeichnet. Unter Bezugnahme auf theoretische Wahrnehmungshandlungen schlussfolgern die Autor:innen, dass derartige Sakkaden die kulturelle Art und Weise der Annäherung an das kartesische Koordinatensystem widerspiegeln und somit repräsentationsspezifische visuelle Prozeduren abbilden.
Im Kontext visueller Expertiseforschung plädieren Gegenfurtner et al. (2017) für eine Kombination quantitativer und qualitativer Methoden zur Prozessanalyse, und somit dafür, weitere Informationsquellen, vor allem verbale Erläuterungen, zur Interpretation von Blickdaten heranzuziehen. Den Autor:innen zufolge gibt die Triangulation von Blick- und Verbaldaten Einblicke, die mit nur einer Methode nicht möglich wären (Gegenfurtner und Seppänen, 2013; Helle, 2017; Jaarsma et al., 2014). So liefern Eye-Tracking-Daten Informationen über unbewusste visuelle Prozesse, während Verbaldaten Aufschluss darüber geben, warum Personen so schauen, wie sie schauen (Gegenfurtner et al., 2017; Van Gog et al., 2005, 2009). Im Kontext kovariater Argumentationsstrukturen zeigte sich beispielsweise, dass Lernende ausgeprägter kovariater Denkstrukturen, eine hohe Anzahl Transitionen zwischen relevanten Bereichen einer Aufgabe vollzogen und diesen zudem einen Großteil ihrer visuellen Aufmerksamkeit zuwiesen (Martsching, 2019; Thomaneck et al., 2022).

3.3 Multi-repräsentationales Lernen mit Vektorfelddiagrammen

In diesem Kapitel erfolgt eine Einordnung der Instrumentalisierung ebener Vektorfelddiagramme zum Lernen vektoranalytischer Konzepte in die vorgestellten Theorien (Kap. 3.3.1). Anschließend wird der aktuelle Stand der Forschung zur Entwicklung und Wirksamkeitsanalyse von vektorfelddiagrammzentrierten Lehr-Lern-Materialien zusammengefasst (Kap. 3.3.2).

3.3.1 Theoretische und fachdidaktische Einordnung von Vektorfelddiagrammen als Lerninstrument

Ein qualitativer Lehr-Lern-Ansatz, der eine Beurteilung vektoranalytischer Konzepte anhand von Vektorfelddiagrammen, wie in Kap. 2.2 für die Divergenz und Rotation beschrieben, instruiert, folgt dem Ansatzes des Lernens mit multiplen Repräsentationen (Kap. 3.1.1.1). Dieser zeichnet sich dabei

dadurch aus, dass Formel und Vektorfelddiagramm mithilfe einer anschaulichen Interpretation von partiellen Vektorableitungen qualitativ verbunden werden (siehe Abb. 3). Unter Bezug auf den DeFT-Orientierungsrahmen dienen die multiplen Repräsentationen, d. h. Formel, Vektorfelddiagramm und Text, einer Vertiefung des Verständnisses vektoranalytischer Konzepte, indem Lernende über verschiedene Repräsentationsformen hinweg Verbindungen herstellen und Referenzen konstruieren (Abb. 4; Kap. 3.1.3.1). Mit Blick auf Kap. 3.1.1.2 und das representational dilemma nach Rau (2017) adressieren vektorfelddiagrammzentrierte Instruktionen dabei insbesondere Repräsentationskompetenzen im Umgang mit Vektorfelddiagrammen. Zudem beschreibt die Autorin auf Basis der CTML, dass das multi-repräsentationale Lernen maßgeblich von der Fähigkeit der Lernenden abhängt, exakte internale Repräsentationen der externalen Referenten zu bilden. Hierbei kommt vor allem dem Konzeptwissen im Umgang mit der Repräsentationsform eine zentrale Rolle zu. Beim vektorfelddiagrammzentrierten Lernen ohne physikalische Einbettung kann zwar nicht vom Lernen physikalischen Inhaltswissens gesprochen werden, es werden vielmehr Repräsentationskompetenzen und ein repräsentationsbezogenes Konzeptwissen adressiert. Beide Komponenten sind dabei eng miteinander verzahnt.
Die Relevanz ausgeprägter Repräsentationskompetenzen sowie eines umfassenden repräsentationsbezogenen Konzeptwissens für ein physikalischen Verständnis der Maxwellschen Gleichungen wird durch die Überlegungen von Bollen et al. (2016) deutlich, die die Anwendung der Vektoranalysis im Elektromagnetismus anhand eines Conceptual Blending Frameworks beschreiben. Dabei argumentieren die Autor:innen, dass, wenn Studierende in einem elektromagnetischen Kontext mit den Differentialoperatoren konfrontiert werden, sie selektiv Informationen aus drei mentalen Räumen zu einer neuen Bedeutung zusammenfügen. Die drei Räume umfassen dabei, erstens, alle vektoranalytischen Konzepte, einschließlich der Art und Weise, wie sich diese in graphischen Darstellungen manifestieren, zweitens, Symbole und Gleichungen der Vektoranalysis und, drittens, die relevanten physikalischen Größen, wie z. B. elektromagnetische Felder, Ladungsdichten und Ströme. Ein multi-repräsentationaler Lehr-Lern-Ansatz, der auf einer qualitativen Beurteilung von Vektorfelddiagrammen beruht, adressiert sowohl den konzeptuellen als auch den formelbasierten Raum.

3.3.2 Vektorfelddiagrammzentrierte Lehr-Lern-Materialien zum multi-repräsentationalen Lernen vektoranalytischer Konzepte

Bei bestehenden Lehr-Lern-Materialien, die einen multi-repräsentationalen, vektorfelddiagrammzentrierten Ansatz für das Lernen vektoranalytischer Konzepte verfolgen, handelt es sich vor allem um dynamische Visualisierungswerkzeuge, Simulationen und Lernspiele (engl. serious games). Die meisten dieser Werkzeuge erlauben, zwei- und dreidimensionale Vektorfelddiagramme graphisch darzustellen, Werte der Divergenz und Rotation für ein Vektorfelddiagramm zu berechnen, anzugeben und zu visualisieren (Budi und Muliyati, 2018; Massachusetts Institute of Technology, 2023; Ozgun und Sevgi, 2015; The University of Queensland, 2023). Sie bieten darüber hinaus Veranschaulichungen von Differentialoperatoren, z. B. durch die Flächenveränderung und Drehung sich bewegender Rechtecke (Department of Electrical and Computer Engineering University of Waterloo, 2023), sowie

Vektorlinienintegralen (Ponce Campuzano et al., 2019) und ermöglichen die spielerische Übung des Repräsentationswechsels zwischen Vektorfelddiagramm und Formel (Klein et al., 2021a). Für die meisten dieser Werkzeuge sind allerdings kaum fachdidaktische Überlegungen oder Erkenntnisse zu ihrer Lernwirksamkeit dokumentiert.

Tab. 5: Text-bild-basierte, vektorfelddiagrammzentrierte Lehr-Lern-Materialien in der physikdidaktischen Forschung, die ein qualitatives Verständnis vektoranalytischer Konzepte anhand von ebenen Vektorfelddiagrammen adressieren.

Konzept	Format	Wirksamkeits-untersuchung N, Design[a]	Referenz
Divergenz (diff. & int.)	Text-bild-basierte Instruktion	41, L (2 × 2), E	Klein et al. (2018)
Divergenz (diff.), [Rotation, diff.[b]]	Text-Bild-basierte Instruktion (mit VH)	32, L (2 × 2), E	Klein et al. (2019)
		141, L (2 × 2), E	Klein et al. (2021b)
Rotation (diff.)	Bild-basierte Instruktion mit geschriebenen/gesprochenen Erklärungen und statischen/dynamischen Hilfen	38, L (2 × 2), E	Ruf et al. (2022)
Rotation (diff., int.)	Text-Bild-basierte Instruktion	27, F (1 × 1)	Jung und Lee (2012)
Divergenz (int.), Rotation (int.), Integralsätze von Gauß und Stokes	Text-Bild- und Aufgaben-basierte Lernsequenz	60, F (1 × 2)	Bollen et al. (2018)

Legende: diff. = differentielle Definition (Gln. 5 und 9), int. = integrale Definition (Gln. 4 und 8), VH = visuelle Hilfen, L = Laborstudie, F = Feldstudie, E = Eye-Tracking, [a]Gruppe(n) × Untersuchungszeitpunkt(e), [b]Die Instruktion zur Rotation beruhte auf dem Transfer der Divergenzinstruktion ohne explizite Anleitung.

Neben digitalgestützten Lernumgebungen existieren zudem einige text-bild-basierte Lehr-Lern-Materialien eines vektorfelddiagrammzentrierten Ansatzes (siehe Tab. 5 für einen Überblick). So entwickelten Klein et al. (2018) visuelle Lehr-Lern-Materialien zur qualitativen Interpretation der Divergenz von Vektorfelddiagrammen. Anhand zweidimensionaler Vektorfelddiagramme in kartesischen Koordinaten mit beigefügten Erklärtexten instruierten die Autoren zwei visuelle Strategien zur qualitativen Beurteilung der Divergenz: Die differentielle Strategie adressierte die Definition der Divergenz anhand der partiellen Vektorableitungen (Gl. 5, Kap. 2.2) und die integrale Strategie basierte auf der koordinatenfreien Definition der Divergenz und dem Fluss-Konzept (Gl. 4, Kap. 2.1.2). Die Lehr-Lern-Materialien instruierten dabei die in Kap. 2.2 beschriebene qualitative Vorgehensweise, wobei sich die Erklärungen zur Vereinfachung auf Vektorfelder mit räumlich konstanter Divergenz beschränkten. In einer Eye-Tracking-Studie untersuchten Klein et al. (2018) die unabhängige sowie gemeinsame Verwendung beider Strategien und ihren Einfluss auf die Performanz von $N = 41$ Physikstudierenden.

Es zeigte sich, dass Studierende die besten Ergebnisse erzielten, wenn ihnen beide Ansätze bekannt waren. Nach Instruktion beider Strategien erreichten sie einen Score von 73 % bei der Divergenzbeurteilung von Vektorfelddiagrammen. Dieser liegt deutlich über der Ratewahrscheinlichkeit von 50 %, was den qualitativen Ansatz zur Beurteilung von Vektorfelddiagrammen für das Lernen von Vektorfeldkonzepten unterstützt. In nachgelagerten Interviews berichteten die Studierenden von einer höheren Belastung durch die integrale Strategie, was sich auch in ihrem Blickverhalten widerspiegelte: sie war mit einer hohen Anzahl längerer Fixationen verbunden. Darüber hinaus berichteten einige Proband:innen von Schwierigkeiten bezüglich der instruierten Strategien, z. B. der Zerlegung der Vektoren in ihre Komponenten oder der Bilanzierung der Zu- und Abflüsse einer imaginären Testfläche. Sie gaben darüber hinaus an, dass es ihre Leistung verbessern würde, die Komponentenzerlegung oder die Testfläche einzuzeichnen.

In einer experimentellen Folgestudie, die sich auf die differentielle Strategie fokussierte, verglichen Klein et al. (2019) daher die Performanz und das Blickverhalten zwischen $N = 16$ Physikstudierenden einer Interventionsgruppe, die mit visuellen Hilfestellungen zur Komponentenzerlegung instruiert wurden, und $N = 16$ Physikstudierenden einer Kontrollgruppe ohne visuelle Hilfen. Es zeigte sich, dass Studierende der Interventionsgruppe signifikant bessere Leistungen bei der Divergenzbeurteilung von Vektorfelddiagrammen erreichten (82 % Antwortkorrektheit). Darüber hinaus zeigte sich ein positiver Zusammenhang mit der Antwortsicherheit, indem Lernende der Interventionsgruppe angaben, sich ihrer Antworten sicherer zu sein. Studierende der Interventionsgruppe berichteten zudem von einer geringeren mentalen Anforderung und einer höheren wahrgenommenen Qualität der Instruktion. Blickdatenanalysen bei der Bearbeitung der Lehr-Lern-Materialien ergaben außerdem, dass die Verwendung visueller Hilfestellungen höhere Fixationszahlen und -dauern auf aufgabenrelevanten Bereichen, d. h. dem Vektorfelddiagramm, und mehr Transitionen, zwischen Vektorfelddiagramm und Erklärtext, zur Folge hatte. Im Anschluss an die Anwendung der instruierten Strategie auf acht Vektorfelddiagramme sollten die Studierenden die Strategie anhand eines text-basierten Prompts auf die Rotation übertragen und diese für die gleichen acht Vektorfelddiagramme bestimmen. Hier erreichten die Studierenden der Interventionsgruppe einen signifikant höheren matched Score, indem sie für 64 % der Vektorfelddiagramme die Divergenz und die Rotation korrekt bestimmten. Im Mittel erreichten beide Gruppen dabei einen matched Score von 54 %, der somit nur knapp über der Ratewahrscheinlichkeit von 50 % lag.

Die Gruppenunterschiede von Klein et al. (2019) konnten in einer dritten Studie mit $N = 141$ Studierenden der Ingenieurswissenschaften bestätigt werden (Klein et al., 2021b). In dieser Studie wurden zusätzlich die visuell-räumlichen Fähigkeiten der Lernenden anhand eines standardisierten Raumspannentests im Vorfeld der Intervention erfasst. Es zeigte sich, dass die Instruktion vor allem Studierende mit hohem oder mittlerem visuell-räumlichen Vorstellungsvermögen zu Gute kam, während Studierende mit geringem Vorstellungsvermögen unabhängig von der Instruktionsform bei der Divergenzbestimmung von Vektorfelddiagrammen niedrige Scores erreichten. Außerdem nahmen Studierende mit geringem visuell-räumlichen Vorstellungsvermögen die Aufgabe der Divergenzbeurteilung als signifikant schwieriger wahr als Studierende mit mittleren und hohen räumlichen Fähigkeiten.

Über die Wirkung der Interventionen hinaus untersuchten alle drei Studien das Blickverhalten der Lernenden bei der Divergenzbeurteilung von Vektorfelddiagrammen. Es zeigte sich, dass das Blickver-

halten leistungsstarker Proband:innen nach Instruktion der differentiellen Strategie durch horizontale und vertikale Sakkaden charakterisiert war, während oblique Richtungen zumeist ignoriert wurden. Leistungsschwache Proband:innen betrachteten Vektorfelddiagramme hingehen eher unsystematisch und führten viele schräge Sakkaden durch. Außerdem zeigte sich, dass die leistungsstärksten Proband:innen im Vergleich zu den leistungsschwächsten Proband:innen signifikant kürzere Sakkaden auf dem Vektorfelddiagramm durchführten. Die Autoren sehen in diesem Blickverhalten eine expert:innenhafte Ausführung der instruierten Strategie durch eine Fokussierung auf Bewegungen entlang der Koordinatenrichtungen x und y. Mozaffari et al. (2020, 2021) knüpften an diese Interpretation an und entwickelten einen Machine Learning-Algorithmus, der das Blickverhalten der Lernenden bei der Divergenzbeurteilung klassifiziert. Trotzdem die Leistung der Studierenden bei der Divergenzbeurteilung mit einem hohen visuell-räumlichen Vorstellungsvermögen einher ging, zeigte sich im Allgemeinen keine Korrelation mit der Anzahl oder dem Anteil horizontaler und vertikaler Sakkaden auf dem Vektorfelddiagramm (Klein et al., 2021b).

Nach dem Vorbild der Instruktion mit visuellen Hilfen von Klein et al. (2019, 2021b) entwickelten Ruf et al. (2022) Lehr-Lern-Materialien für die Instruktion einer differentiellen Strategie zur Beurteilung der Rotation ebener Vektorfelddiagramme. Während eine Hälfte der Stichprobe ($N = 18$) eine Instruktion mit schriftlichen Erläuterungen und statischen visuellen Hilfen im Diagramm (ähnlich der Materialien von Klein et al., 2019, 2021b) erhielt, wurde die andere Hälfte der Physikstudierenden ($N = 20$) mit gesprochenen Erklärungen und dynamischen visuellen Hilfen instruiert. Dabei erreichten die Studierenden, die verbal-dynamische Erläuterungen erhielten, einen signifikant höheren Score von 79 % bei der anschließenden Beurteilung der Rotation von sechs Vektorfelddiagrammen im Vergleich zur Gruppe mit schriftlich-statischen Erklärungen (62 %). Außerdem zeigten sich Unterschiede in der visuellen Aufmerksamkeitsverteilung und den Transitionen zwischen verschiedenen Bereichen der Instruktionsseite. Die wahrgenommene extrinsische kognitive Belastung unterschied sich hingegen nicht signifikant zwischen den Bedingungen.

Das Tutorial zur Rotation von Jung und Lee (2012) adressierte neben einem anschaulichen Verständnis der Rotation von Vektorfelddiagrammen vor allem die Verbindung qualitativer, konzeptueller und mathematischer Erklärungsansätze. Aufbauend auf ihren Ergebnissen zu studentischen Verständnisschwierigkeiten bezüglich der Rotation thematisierte das Tutorial dabei zum einen den Zusammenhang zwischen dem Linienintegral eines Rechtecks in der x-y-Ebene und der partiellen Vektorableitung entsprechend dem Satz von Stokes. Zum anderen adressiert es die Verknüpfung des Stokesschen Satzes mit dem Konzept konservativer Felder und den Schaufelrad-Ansatz. Die Evaluation des Tutorials nach Implementation in einem fortgeschrittenen Kurs zur Mechanik zeigte, dass die Studierenden zunehmend mathematische und qualitative Argumente verknüpften und der Rotationsbeurteilung eines zweidimensionalen Vektorfelddiagramms eine geringere Schwierigkeit zuwiesen ($N = 27$).

Während die beschriebenen Lehr-Lern-Materialien sich auf die anschauliche Instruktion vektoranalytischer Konzepte beschränken, umfasste die fünfteilige, aufgabenbasierte Lehr-Lern-Sequenz von Bollen et al. (2018) sowohl eine Einführung in die mathematischen Konzepte der Vektoranalysis als auch ihre Verwendung in der Elektrodynamik. Die Lernaufgaben umfassten fünf Einheiten zu den Themen Divergenz, Rotation, Integralsatz von Gauß, Faradaysches Gesetz und Maxwell-Ampèresches Gesetz

und basierten auf kurzen, offenen Fragen. Im Zuge einer Implementation der Lehr-Lern-Materialien in einen Kurs zur Elektrodynamik im zweiten Studiensemester untersuchten Bollen et al. (2018) die Wirksamkeit der Aufgaben ($N = 60$). Hierbei zeigten sich positive Auswirkungen der Lernaufgaben auf das strukturelle Verständnis der Differentialoperatoren, das konzeptuelle Verständnis der Maxwellschen Gleichungen und die Fähigkeit der Interpretation von Vektorfelddiagrammen. In einem kurzen Fragebogen gaben die Physikstudierenden zudem an, durch die Aufgaben etwas gelernt zu haben, gerne weitere Lernaufgaben dieser Art bearbeiten zu wollen und beurteilten ihren Schwierigkeitsgrad als herausfordernd aber angemessen. Die Autor:innen merkten jedoch auch einige Limitationen der Ergebnisinterpretation an, z. B. die geringe Stichprobengröße, sowie Unterschiede zwischen den Jahrgängen (Lehrbuch, Lehrpersonal, absolvierte Kurse).

4 Forschungsmethodik

Dieses Kapitel gibt einen Überblick der Forschungsmethodik dieser Dissertation. Hierbei werden zunächst auf Basis der vorangegangenen Kapitel die Forschungsziele dieser Arbeit hergeleitet und formuliert (Kap. 4.1). Anschließend werden die Rahmenbedingungen der Zielgruppe sowie die zur Erreichung der Forschungsziele verwendeten Untersuchungsdesigns, Erhebungsmethoden, Testinstrumente und Analysemethoden der Studien in dieser Arbeit dargelegt (Kap. 4.3, 4.4 und 4.5).

4.1 Forschungsziele und -fokusse

Aus den vorangegangenen Kapiteln ergeben sich vier zentrale Forschungsrichtungen für diese Arbeit. Diese adressieren Eye-Tracking als Erkenntnismethode zur Untersuchung von Lern- und Assessmentszenarien in der physikdidaktischen Forschung (Fokus 1), den visuellen Umgang mit Vektorfelddiagrammen (Fokus 2), das kovariate Denken im Kontext der Vektoranalysis (Fokus 3) und die zielgerichtete Unterstützung des Lernens vektoranalytischer Konzepte (Fokus 4). Im Folgenden werden die zentralen Forschungsziele (FZ) dieser Arbeit für diese Fokusse motiviert und formuliert.

Fokus 1: Eye-Tracking zur Analyse von Lern- und Assessmentszenarien in der physikdidaktischen Forschung

In vorangegangenen Arbeiten zeigte sich, dass Eye-Tracking großes Potential für die Analyse von Lern- und Problemlöseprozessen, vor allem in multimedialen und -repräsentationalen Szenarien bietet (Alemdag und Cagiltay, 2018; Lai et al., 2013, Kap. 3.2). Vorarbeiten im Kontext der Vektoranalysis griffen ebenfalls auf diese Methode zurück und legten Charakteristika im Blickverhalten von leistungsstarken Studierenden im Umgang mit Vektorfelddiagrammen offen (Klein et al., 2018, 2019, 2021b). Während beispielsweise in der Mathematikdidaktik und Lehr-Lern-Forschung bereits Arbeiten zur disziplinspezifischen Verwendung der Methode vorliegen (Lai et al., 2013; Strohmaier et al., 2020), steht eine Forschungssynthese der Ergebnisse und Potentiale bestehender Eye-Tracking-Studien in der physikdidaktischen Forschung noch aus. Das erste Forschungsziel im Rahmen dieser Arbeit zielt daher darauf ab, ebendiese Lücke zu schließen und die Verwendung von Eye-Tracking zur Analyse von Lern- und Problemlöseprozessen in der physikdidaktischen Forschung aus methodisch-fachdidaktischer Perspektive zu beleuchten:

> **FZ1:** Analyse der Implementation, der Potentiale und der Limitationen von Eye-Tracking als Erkenntnismethode zur Untersuchung von Lern- und Assessmentszenarien in der physikdidaktischen Forschung

Fokus 2: Visuelle Expertise im Umgang mit Vektorfelddiagrammen

Blickdaten bieten eine zeitlich-räumliche Dekodierung visueller Informationen und lassen so Rückschlüsse auf die zugrundeliegenden kognitiven Prozesse beim Lernen zu (Kap. 3.2). Mit Blick auf die CTVE ermöglichen sie außerdem die Identifikation repräsentationsspezifischer, expert:innenhafter Blickmuster im Umgang mit einem Stimulus (Kap. 3.1.2.2). Während blickbasierte Expertiseforschung, z. B. im Umgang mit Diagrammen, dabei vor allem auf der Unterscheidung relevanter und irrelevanter Bereiche eines Stimulus beruht (Gegenfurtner et al., 2011), lassen sich für Vektorfelddiagramme keine solchen Bereiche identifizieren. Klein et al. (2018, 2019, 2021b) zogen stattdessen sakkadische Maße heran und zeigten so, dass das Blickverhalten leistungsstarker Studierender bei der Beurteilung der Divergenz von Vektorfelddiagrammen durch eine Dominanz horizontaler und vertikaler Sakkaden charakterisiert ist (Kap. 3.3). Die Autor:innen assoziierten dieses Blickverhalten mit einer expert:innenhaften Ausführung der instruierten Strategie zur visuellen Interpretation der Feldkomponenten entlang der Koordinatenrichtungen.
Aus ähnlichen Ergebnissen bei der Navigation zu Punkten in einem kartesischen Koordinatensystem schlussfolgerten Chumachemko et al. (2014) und Krichevets et al. (2014), dass dieses Blickverhalten exekutive Handlungen der Wahrnehmung der Repräsentationsform widerspiegelt (Kap. 3.2). Diese Ergebnisse legen in Verbindung mit den Überlegungen in Kap. 2.2 nahe, dass die beobachteten Charakteristika des expert:innenhaften Blickverhaltens im Umgang mit Vektorfelddiagrammen repräsentationsspezifischer Natur und damit nicht exklusiv der Divergenzbeurteilung zuzuordnen sind.
Da der Repräsentationswechsel zwischen Vektorfelddiagramm und Formeldarstellung eine weitere zentrale Anforderung im Kontext der Vektoranalysis darstellt (Kap. 2.1), bietet sich dieses Aufgabenformat ergänzend zu vertiefenden Analysen der Divergenzbeurteilung für weiterführende Untersuchungen der visuellen Verhaltensweisen im Umgang mit Vektorfelddiagrammen an. Es ergibt sich das zweite Forschungsziel dieser Arbeit:

> **FZ2:** Charakterisierung expert:innenhafter, visueller Verhaltensweisen im Umgang mit Vektorfelddiagrammen

Fokus 3: Kovariates Denken im Kontext der Vektoranalysis

Eine Analyse der kognitiven Prozesse bei der qualitativen Beurteilung der Divergenz von Vektorfelddiagrammen anhand partieller Vektorableitungen legte nahe, dass sich die mentalen Prozesse beim Umgang mit Vektorfelddiagrammen durch Strukturen kovariaten Denkens charakterisieren lassen (Kap. 2.2).
Die Arbeit von Martsching (2019) regt darüber hinaus eine Verbindung von charakteristischen Blickbewegungen im Umgang mit Vektorfelddiagrammen, wie sie Klein et al. (2018, 2019, 2021b) fanden, und kovariaten Argumentationsstrukturen an. Da der Begriff des kovariaten Denkens im Kontext der Vektoranalysis bisher nicht etabliert ist, adressiert das dritte Forschungsziel eine erste Charakterisierung kovariater Denkmuster im Umgang mit Vektorfelddiagrammen.

Es wird das folgende Forschungsziel formuliert:

> **FZ3:** Identifikation und Charakterisierung von Mustern kovariaten Denkens im Umgang mit Vektorfelddiagrammen

Dieses Forschungsziel involviert insbesondere auch die Diagnose von studentischen Lernschwierigkeiten bezüglich kovariater Denk- und Argumentationsstrukturen im Umgang mit Vektorfelddiagrammen.

Fokus 4: Zielgerichtete Unterstützung des Lernens mit Vektorfelddiagrammen

Wirksamkeitsuntersuchungen bestehender multi-repräsentationaler Lehr-Lern-Materialien, die auf der Beurteilung vektoranalytischer Konzepte anhand von Vektorfelddiagrammen beruhen, verdeutlichten den Mehrwert eines vektorfelddiagrammzentrierten Lehr-Lern-Ansatzes für die Förderung eines vektoranalytischen Konzeptverständnisses (Klein et al., 2018, 2019, 2021b; Ruf et al., 2022). Dies galt vor allem dann, wenn zusätzliche visuelle Hilfen zur Komponentenzerlegung im Vektorfelddiagramm verwendet wurden (Klein et al., 2019). Es zeigte sich jedoch auch, dass Studierende mit geringen visuell-räumlichen Fähigkeiten nur bedingt von der Instruktion profitierten, sondern die Divergenzbeurteilung vielmehr als sehr herausfordernd wahrnahmen. Ein matched Score, der angibt, wie viele der Studierenden die Divergenz und Rotation eines Vektorfelddiagramms korrekt bestimmten, lag außerdem sowohl für die gesamte Stichprobe als auch für die Interventionsgruppe mit visuellen Hilfen nur knapp über der Ratewahrscheinlichkeit (Kap. 3.3). Im Vergleich zu Scores bei der reinen Divergenzbeurteilung von über 80 % zeigt sich an dieser Stelle Innovations- und Weiterentwicklungsbedarf bestehender Instruktionen. Die Methoden des zeichen- und simulationsbasierten Lernens (Kap. 3.1.4.1 und 3.1.4.2) sowie die Prinzipien zur Gestaltung lernförderlicher multi-repräsentationaler Lernumgebungen (Kap. 3.1.3) bieten dabei wertvolle Ansätze für die Unterstützung des vektorfelddiagrammzentrierten Lernens. Es ergibt sich das folgende vierte Forschungsziel:

> **FZ4:** Identifikation und Wirksamkeitsanalyse (fach-)didaktischer Methoden, Prinzipien und Ansätze zur zielgerichteten Unterstützung des Lernens mit Vektorfelddiagrammen

Mit Blick auf bestehende Vorarbeiten wird das Lernen mit Vektorfelddiagrammen durch ein Konglomerat verschiedener theoretischer Konstrukte beschrieben und analysiert: Performanz, kognitiv-visuelle Prozesse, kognitive Belastung und visuell-räumliches Vorstellungsvermögen (Fokus 2, 3 und 4; siehe Kap. 4.3 und 4.4).

4.2 Rahmenbedingungen der Zielgruppe

Die Untersuchungen in dieser Arbeit zum Lernen von Vektorfeldkonzepten zielten auf Studienanfänger:innen in der Studieneingangsphase des Physikstudiums ab. Damit setzten sich die Stichproben der durchgeführten Studien aus Studierenden im B.Sc. Physik und dem 2-Fach Bachelor Physik (Lehramt)

zusammen, die sich kurz vor dem Hochschuleintritt oder innerhalb der ersten beiden Studiensemester befanden (Breitschuh et al., 2020). Aus diesem Grund wird ihr Kenntnisstand maßgeblich von den in der Schule absolvierten Kursen und vermittelten Inhalten bestimmt (Wendt et al., 2016).
Mit Blick auf die Empfehlung der KFP sind Inhalte zur Vektorrechnung, z. B. Komponentenzerlegung, Skalar- und Kreuzprodukt, i. d. R. Gegenstand des Schulunterrichts. Vektorfelder, Differentialoperatoren und Integralsätze hingegen werden erst im Physikstudium eingeführt (Konferenz der Fachbereiche Physik, 2011). Da Flächen- und Kurvenintegrale in einzelnen Bundesländern zudem bereits in der Schule behandelt werden, ist jedoch von heterogenen Vorkenntnissen der Studierenden zur Vektoranalysis in den untersuchten Stichproben auszugehen (Konferenz der Fachbereiche Physik, 2011; Wendt et al., 2016).
Vektorfelder sollten Studierenden zu Beginn ihres Studiums zwar zumeist nicht als mathematische Objekte bekannt sein, sie besitzen i. d. R. jedoch bereits Eindrücke und Assoziationen zum Feldbegriff aus dem Elektromagnetismusunterricht in der Schule (Cao und Brizuela, 2016; Sağlam und Millar, 2006). Diese basieren zumeist auf Visualisierungen elektrischer oder magnetischer Felder aus typischen Lehrbeispielen, z. B. eines homogenen Kondensators, einer Punktladung oder eines stromdurchflossenen Leiters, sowie aus traditionellen Demonstrationsexperimenten (Kap. 2.1).
Angesichts dieser Rahmenbedingungen erhoben alle empirischen Studien in dieser Arbeit das vektoranalytische Vorwissen der Proband:innen sowie die soziodemographischen Merkmale der jeweiligen Stichprobe. Letztere erfassten auch die bereits absolvierten universitären Lehrveranstaltungen mit mathematischem und physikalischem Inhalt, die gewählten Leistungskurse im Abitur und eine Einschätzung der eigenen Leistung bezüglich der Schulmathematik und -physik (Kap. 4.4.3). Diese Informationen wurden für eine detaillierte Charakterisierung der Stichprobe und ihres Vorwissens herangezogen und flossen in die Dateninterpretation und -diskussion der Studien ein.

4.3 Studien und Studiendesigns

Die beschriebenen Fokusse und Forschungsziele wurden im Rahmen dieser Arbeit in vier Hauptstudien adressiert (siehe Übersicht in Tab. 6). Mit dem allgemeinen Ziel grundwissenschaftlicher Erkenntnisgewinnung griffen sie dabei auf ein breites Spektrum wissenschaftstheoretischer Ansätze zurück und involvierten qualitative, quantitative sowie kombinierte Methoden. Dabei wurden eine Theorie- und drei empirische Originalstudien mit eigens entwickeltem Design durchgeführt (Bortz und Döring, 2016). Erstere, ein systematisches Literaturreview, dient im Hinblick auf FZ1 einem Überblick über bisherige Eye-Tracking-Studien in der physikdidaktischen Forschung (Fokus 1). Um ein hohes Maß an Transparenz im Auswahlprozess sowie Ergebnisbericht zu gewährleisten, basierte das Literaturreview dabei auf den PRISMA-Richtlinien (Preferred Reporting Items for Systematic reviews and Meta-Analyses; Page et al., 2021).

Die empirischen Originalstudien untersuchen im Sinne einer Gruppenstudie Stichproben von Physikstudierenden in der Studieneingangsphase (Kap. 4.2). Das Studiendesign war dabei sowohl explorativer als auch explanativer Form, was der unterschiedlich ausgeprägten Literatur- und Theoriebasis der Forschungsziele Rechnung trug. So konnte bezüglich der Konzeption multi-repräsentationaler Lehr-Lern-Materialien sowie des zeichen- und simulationsbasierten Lernens bereits auf eine breite Theoriebasis zurückgegriffen werden (Kap. 3.1.3.2 und 4). Dies ermöglichte die Ableitung von Hypothesen für den Kontext der Vektoranalysis (Fokus 4). Da der Repräsentationswechsel zwischen Vektorfelddiagramm und Formeldarstellung bisher kaum Gegenstand fachdidaktischer Untersuchungen war und bisherige Ergebnisse zum visuellen Umgang mit Vektorfelddiagrammen vor allem aus Wirksamkeitsuntersuchungen von Lehr-Lern-Materialien stammten (Fokus 2 und 3), ließen sich hier kaum theoriegeleitete Hypothesen formulieren. Für die Studien dieser Fokusse boten sich daher explorative oder explorativ-explanative Zugänge an.

Vor dem Hintergrund vorheriger Untersuchungen im Kontext der Vektoranalysis (Kap. 2.3 und 3.3) und im Sinne bestehender Praktiken der Expertiseforschung (Gegenfurtner et al., 2013) erfolgte die Analyse des Lernens mit Vektorfelddiagrammen (Fokus 2, 3 und 4) mit Blick auf zwei wesentliche Zielebenen: die Performanz von Lernenden und ihre kognitiv-visuellen Prozesse im Umgang mit Vektorfelddiagrammen beim Lernen und Assessment. Die Performanz wurde im Rahmen dieser Arbeit durch die Repräsentationskompetenzen, das vektoranalytische Konzeptverständnis und die Antwortsicherheit operationalisiert. Die Analyse kognitiv-visueller Prozesse erfolgte anhand des Blickverhaltens und der Argumentationsweise im Umgang mit Vektorfelddiagrammen. Mit Blick auf die Cognitive Load Theory (Kap. 3.1.2.1) und vorangegangene Untersuchungen zum Einsatz von Zeichenaktivitäten beim multi-repräsentationalen Lernen (Kap. 3.1.4.1) stellte die kognitive Belastung darüber hinaus eine zentrale Zielvariable bei der Untersuchung von Lernumgebungen mit Vektorfelddiagrammen dar (Fokus 4). Für explorative Untersuchungen visueller Verhaltensweisen und kovariater Argumentationsstrukturen wurde zudem das visuell-räumliche Vorstellungsvermögen untersucht (Fokus 2 und 3). Die Operationalisierung aller Variablen im Rahmen der Studien anhand von Tests und Fragebögen ist in Kap. 4.4 beschrieben.

Das Blickverhalten wurde im Rahmen dieser Arbeit zum Zweck einer Minimierung äußerer Störfaktoren in Laborstudien untersucht (Studien *Strategien* und *Zeichnen*). Ein zentrales Qualitätskriterium bei der Durchführung experimenteller Studien ist durch ihre interne und externe Validität gegeben. Wenn eine Studie eine hohe interne Validität besitzt, sind ihre Ergebnisse kausal eindeutig interpretierbar. Bei gegebener externer Validität sind die Ergebnisse über die Studienbedingungen hinaus generalisierbar (Bortz und Döring, 2016). Zum Zweck einer hohen internen Validität und des Ausschlusses personenbezogener Störvariablen nutzten die explanativen Studien in dieser Arbeit eine Randomisierung durch zufällige Zuweisung der Studierenden auf Interventions- und Kontrollgruppe. Außerdem involvierten sie das visuell-räumliche Vorstellungsvermögen, soziodemographische und bildungskontextuelle Angaben und das Vorwissen zu vektoranalytischen Konzepten als Kontrollvariablen. Um Klarheit, Vollständigkeit und Transparenz des Ergebnisberichts zu erhöhen, wurden bei der Planung der Studien die CONSORT-Richtlinien für randomisierte kontrollierte Gruppenvergleiche (Consolidated Statement of Reporting Trials; Schulz et al., 2010) berücksichtigt.

Tab. 6: Übersicht und Design der Studien in dieser Arbeit. Die Klassifizierung beruht auf der Übersicht von Bortz und Döring (2016, S. 183).

Studie Kurztitel	Kap.	Thema	Studiengegenstand	Erkenntnisinteresse	Design[a]	Untersuchungsort	Gesamtstichprobe	UV	AV[⋆,b]	KV[⋆]	Methode	FZ
Review	5	Eye-Tracking in der physikdidaktischen Forschung	Theorie (Literaturreview)	Synthese	PRISMA (Moher et al., 2011)	33[1795][d]	–	–	–	–	qualitativ	FZ1
Strategien	6	Strategien beim Wechsel zwischen Formel und Diagramm	Empirie	explorativ	1×1	Labor	147	–	RK, KW, AS, RV, BV, A	–	mixed-methods	FZ1, **FZ2**, **FZ3**, FZ4
Zeichnen	7	Zeichnen beim meR Lernen von Divergenz	Empirie	explanativ	2×2 (R)	Labor	84[54][e]	Zeichenaktivitäten	RK, KW, AS, KB, [BV][c]	RV, SB, V	quantitativ	FZ1, FZ2, FZ3, **FZ4**
Lernaufgaben	(8), 9	digitalgestützte Lernaufgaben in der universitären Lehre	Empirie	explanativ	2×3[11][e] (R)	Feld (Uni LV)	–[f]	meR Lernaufgaben	RK, KW, AS, [KB][e]	T, SB, V	quantitativ	FZ4[g]

Legende: AV = Abhängige Variable, FZ = Forschungsziel(e) (Kap. 4.1, bei mehreren Forschungszielen sind vorrangig adressierte Forschungsziele fett), UV = Unabhängige Variable,
⋆*Variablen:* A = Argumentation, AS = Antwortsicherheit, BV = Blickverhalten, KB = kognitive Belastung, KV = Kontrollvariablen, KW = Konzeptwissen, LV = Lehrveranstaltung, meR = multi-repräsentational, RK = Repräsentationskompetenz, RV = visuell-räumliches Vorstellungsvermögen, SB = Soziodemographische Angaben und Bildungskontext, T = Tutor:innenverhalten, V = Vorwissen zur Vektoranalysis
Anmerkungen: [a]Gruppe(n) $\times$ Untersuchungszeitpunkt(e), R = Randomisierung; [b]Für die explorative Studie sind die untersuchten Zielvariablen angegeben; [c]Enthält zwei Teilstudien mit nahezu identischem Studiendesign, wobei in der Studie mit $N = 54$ zusätzlich das Blickverhalten erhoben wurde; [d]Anzahl einbezogener Studien und die Anzahl der dort insgesamt betrachteten Proband:innen; [e]Antwortkorrektheit und -sicherheit werden an drei Messzeitpunkten gemessen (Rotationsdesign), zwischen diesen wird zusätzlich an je vier Zeitpunkten die kognitive Belastung erhoben. [f]Präregistrierte Studie (Stage 1), die Datenerhebung ist noch nicht abgeschlossen; [g]Es werden die angegebenen Forschungsziele adressiert, da jedoch nur der Stage 1-Artikel der Studie Gegenstand dieser Arbeit ist, können keine Ergebnisse der Studie zur Diskussion der Forschungsziele herangezogen werden.

Die ungestörte Blickdatenaufnahme in den Laborstudien besitzt den Nachteil einer geringen externen Validität der Ergebnisse (Bortz und Döring, 2016). Um diese zu stärken, wurde eine der explanativen Studien als Feldstudie im Realsetting der Studieneingangsphase des Physikstudiums durchgeführt (Studie *Lernaufgaben*). Zum Zweck der Eliminierung umweltbedingter Störvariablen wurde in diesem Zusammenhang das Tutor:innenverhalten als zusätzliche Kontrollvariable erhoben. Mit dem Ziel einer größtmöglichen Transparenz des Forschungsprozess, handelte es sich bei der entsprechenden Datenerhebung um eine präregistrierte Studie. Die Stage 1-Publikation dieser Studie, d. h. der theoretische Hintergrund, die Forschungsziele und die Forschungsmethodik, ist dabei Teil dieser Arbeit. Da die Datenerhebung bis einschließlich Sommersemester 2024 erfolgt, werden jedoch keine Ergebnisse der Studie im Rahmen dieser Arbeit im Hinblick auf die Forschungsziele diskutiert (Kap. 10).

4.4 Erhebungsmethoden und Testinstrumente

Die Untersuchung des Lernens vektoranalytischer Konzepte mit Vektorfelddiagrammen erfolgte anhand von vier Variablen: Performanz, kognitiv-visuelle Prozesse, kognitive Belastung und visuell-räumliches Vorstellungsvermögen (Fokus 2, 3 und 4). In diesem Kapitel wird die Operationalisierung dieser Begriffe im Rahmen der empirischen Studien in dieser Arbeit erläutert. Dies erfolgt anhand einer Differenzierung zwischen punktuellen Messungen latenter Merkmale durch Tests und Fragebögen (Kap. 4.4.1) und einer prozeduralen Erfassung der zeitlichen Dynamik mittels Blick- oder Verbaldaten (Kap. 4.4.2). Kap. 4.4.3 beschreibt zudem die Messung soziodemographischer Merkmale. Neben den hier aufgeführten Variablen involvierte die Studie *Lernaufgaben* (Kap. 9) zusätzlich das Tutor:innenverhalten als Kontrollvariable (siehe Anhang A.1). Alle verwendeten Testinstrumente finden sich im Anhang A.2.

4.4.1 Operationalisierung latenter Variablen

Die Konstrukte der Performanz, der kognitiven Belastung und des räumlichen Vorstellungsvermögens wurden punktuell anhand von Tests und Fragebögen erfasst (Kap. 4.4.1.1, 4.4.1.2 und 4.4.1.3). Um dabei eine präzise Erfassung der zugrundeliegenden Merkmale zu gewährleisten, wurden die verwendeten Tests und Fragebögen einem psychometrischen Skalenbildungsprozess unterzogen (Kap. 4.4.1.4). Aus den Skalenwerten (Testscores und Mittelwerte) wurden anschließend die Ausprägungen der Untersuchungsvariablen zur Untersuchung der Forschungsfragen und -hypothesen in den Studien mittels statistischer Analyseverfahren berechnet (Kap. 4.5.4).

4.4.1.1 Performanz: Repräsentationskompetenzen, Konzeptwissen und Antwortsicherheit

Die Performanz wird aufgrund der ambivalenten Beziehung von Konzeptwissen und Repräsentationskompetenzen (Kap. 3.3) im Rahmen dieser Dissertation durch das Konzeptwissen von Studierenden zur Vektoranalysis und ihre Repräsentationskompetenzen bezüglich verschiedener Vektorfelddarstellungen operationalisiert. Viele Aufgaben und Items der eingesetzten Performanztests adressierten dabei beide Zielvariablen, ohne dass eine strikte Trennung möglich war. Da ebene Vektorfelddiagramme den Kern des Forschungsinteresses dieser Arbeit darstellen, waren diese auch Teil vieler Items der eingesetzten Tests. Zum Zweck einer internen Konsistenz zwischen den verschiedenen Studien dieser Arbeit sowie studienintern zwischen Lehr-Lern-Materialien und Testinstrumenten besaßen die verwendeten Vektorfelddiagramme spezifische Charakteristika:

1. Die ebenen Vektorfelder werden in den kartesischen Koordinaten x und y mit etwa 25 bis 30 repräsentativen Vektorpfeilen dargestellt. Die Feldkomponenten $F_x(x,y)$ und $F_y(x,y)$ hängen maximal linear von den Koordinaten x und y ab. Alle Skalen sind abiträr. Konstante Komponenten und Faktoren verschiedenen von 0 sind ± 1.
2. Die Vektorfelder sind kontextfrei.

In den Performanztests dieser Studien erhielten die Proband:innen z. B. die Aufgabe, die algebraische Formeldarstellung (Studie *Strategien*, Kap. 6), die Divergenz (Studie *Zeichnen*, Kap. 7) oder die partiellen Ableitungen des Feldes (Studie *Zeichnen*, Kap. 7) anhand des Diagramms zu bestimmen. Die Antwortangabe erfolgte hierbei zumeist in geschlossenen Antwortformaten als Multiple-Choice-Item, indem eine Formeldarstellung aus vier Antwortoptionen auszuwählen oder die Divergenz als gleich oder ungleich Null zu bestimmen war. Darüber hinaus griffen die Items der Performanztests in halboffenen Aufgabenformaten auch andere Repräsentationsformen auf, indem z. B. die Erstellung einer Vektorfelddiagramm-Skizze, die Angabe einer Formel, die Formulierung einer (verbalen oder schriftlichen) Erläuterung (siehe auch Kap. 4.4.2) oder die Durchführung einer Rechnung oder eines Beweises gefordert war. Die Items stammten zumeist aus etablierten Konzepttests zur Elektrodynamik (CURrENT; Baily et al., 2013, 2017) oder wurden, z. T. mit ähnlichen Vektorfelddiagrammen bereits in vorangegangenen Studien eingesetzt (Baily und Astolfi, 2014; Bollen et al., 2015, 2016, 2017, 2018; Klein et al., 2018, 2019, 2021b; Singh und Maries, 2013).

Einzelne Aufgaben fokussierten zudem eine Erfassung des Konzeptwissens der Studierenden ohne Bezug zur konkreten Repräsentationsform. Dies erfolgte zumeist anhand von Items im Multiple-Choice- oder True-False-Format, wie z. B. „Die Divergenz kann für jede Stelle eines Feldes verschieden sein“ (Übersetzung der Verfasserin; Baily et al., 2015). Diese Items wurden in ähnlicher Form bereits in verschiedenen, vorangegangenen Untersuchungen verwendet (Baily et al., 2015; Bollen et al., 2018; Klein et al., 2018, 2019, 2021b). In der Studie *Lernaufgaben* wurden zusätzlich zwei Aufgaben mit physikalischer Einbettung zum Problemkontext der Kontinuitätsgleichung inkompressibler Fluide und dem Gaußschen Gesetz der Elektrostatik integriert.

Die Auswertung der Performanztests erfolgte anhand der dichotomen Beurteilung der einzelnen Items als korrekt oder inkorrekt. Der (Sub-)Skalenwert der Antwortkorrektheit ergab sich über die Angabe eines ungewichteten Anteils der korrekten Antworten im Intervall $[0;1]$ (Kap. 4.4.1.4). Die Antwortkorrektheit fungierte entweder ein Indikator für das Konzeptwissen oder für eine Überlagerung von Repräsentationskompetenzen und Konzeptwissen (in den nachfolgenden Artikeln in Kap. 6, 7 und 9 als „problem solving"/„coordination task "/„performance test" oder für weiterführende Aufgaben als „transfer" bezeichnet).
Beim Einsatz von Performanztests wurde bei vielen Items zusätzlich die Antwortsicherheit abgefragt. Dabei gaben die Proband:innen auf einer 6-stufigen Likert-Skala an, wie sicher sie sich ihrer Antwort waren von 1 = „absolut sicher" bis 6 = „absolut unsicher". Die Messwerte wurden für die Auswertung auf das Intervall $[0;1]$ linear transformiert und der (Sub-)Skalenwert der Antwortsicherheit ergab sich über den ungewichteten Mittelwert der (Sub-)Skalenitems (Kap. 4.4.1.4). Die Sicherheitsabfrage zielte darauf ab, Einblick in die Fähigkeit der Lernenden, ihr eigenes Verständnis einzuschätzen, zu erhalten (Lindsey und Nagel, 2015). Die gerade Anzahl an Skalenpunkten wurde dabei gewählt, um die Wahl der neutralen Mitte zu vermeiden und mögliche Fehlinterpretationen des Mittelwerts auszuschließen (Bortz und Döring, 2016; Porst, 2014). Aktueller Forschung zur Selbstregulation von Lernenden folgend kann die Fähigkeit, zu erkennen, was man weiß und was nicht, eine Voraussetzung dafür sein, dass Lernende ihr eigenes Lernen reflektieren und regulieren können (Lindsey und Nagel, 2015; May und Etkina, 2002; Stone, 2000). Verschiedene Studien fanden hierbei, dass Lernende dazu neigen, ihre eigenen Leistungen zu überschätzen, und dass diese Überschätzung i. d. R. bei Personen mit vergleichsweise schlechten Leistungen am größten ist (Kruger und Dunning, 1999; Rebello, 2012). Nach Lindsey und Nagel (2015) ist die Fähigkeit zu erkennen, dass das eigene Verständnis richtig ist, ein notwendiger Teil des wahren Verständnisses. Die Antwortsicherheit stellt daher einen relevanten Aspekt der Performanz bei der Wirksamkeitsuntersuchung von Lehr-Lern-Materialien und der Analyse von Lernprozessen dar.

4.4.1.2 Kognitive Belastung

Im Zuge der Wirksamkeitsuntersuchungen multi-repräsentationaler Lehr-Lern-Materialien mit Vektorfelddiagrammen wurde die interventions- und aufgabeninduzierte kognitive Belastung anhand subjektiver Messverfahren mithilfe Likert-skalierter Fragebögen erhoben. Die subjektive Methode anhand von Selbsteinschätzungen ist die übliche Form der Erhebung kognitiver Belastung. Sie gilt als reliabel, valide und unempfindlich gegenüber Schwankungen der Messgröße (Krell et al., 2022; Paas et al., 2003). Die Items der in dieser Arbeit verwenden Fragebögen stammen vor allem aus einem validierten Testinstrument von Leppink et al. (2013), welches im Original die drei Formen kognitiver Belastung (Kap. 3.1.2.1) mit je drei bzw. vier Items erfasst. Die interne Struktur des Testinstruments mit drei Subskalen entsprechend der drei Belastungsarten ist dabei nachweislich robust gegenüber einer Anpassung an den disziplinären Kontext (Leppink et al., 2014). Für die Studien im Rahmen dieser Arbeit wurde je eine Auswahl der Items ins Deutsche übersetzt und an den Lerngegenstand der

Divergenz bzw. Vektoranalysis angepasst. Neben den Items von Leppink et al. (2013) wurden z. T. auch einzelne Items von Klepsch et al. (2017, zweite Version) in die Fragebögen integriert. Hierbei handelt es sich ebenfalls um ein validiertes und reliables Testinstrument, das die drei Formen kognitiver Belastung erfasst (Kap. 3.1.2.1). Mit Blick auf die Konzeptualisierung der kognitiven Belastung von Paas und van Merriënboer (1994) wurden z. T. außerdem Items der Skala von Krell (2017) zur Erfassung der mentalen Belastung und Anstrengung integriert. Da die Fragebögen von Klepsch et al. (2017) und Krell (2017) bereits in deutscher Sprache publiziert wurden, fand hierbei nur für einzelne Items eine Anpassung an den Lernkontext der Vektoranalysis statt. Darüber hinaus kamen z. T. einzelne aufgaben- bzw. repräsentationsspezifische Items zum Einsatz, die bereits in vorangegangenen Studien im Kontext der Vektoranalysis verwendet wurden (Klein et al., 2019, 2021b).
Da es keine allgemeine Praxis für die Stufenanzahl der Antwortskalen in der CLT-Forschung gibt (Van Gog und Paas, 2008), wurde für die verwendeten Fragebögen die Antwortskala zum Zweck der internen Konsistenz mit anderen Indikatoren dieser Arbeit auf eine 6-stufige Skala (1 bis 6) reduziert. Die erhobenen Messwerte wurden im Zuge der Datenauswertung auf das Intervall $[0;1]$ linear transformiert. Der (Sub-)Skalenwert der kognitiven Belastung ergab sich über den ungewichteten Mittelwert der Items der entsprechenden (Sub-)Skala (Kap. 4.4.1.4).

4.4.1.3 Visuell-räumliches Vorstellungsvermögen

Die Erhebung des visuell-räumlichen Vorstellungsvermögens erfolgte mithilfe einer elektronischen Version der Spatial Span Task (SST) nach Shah und Miyake (1996) – ein Raumspannentest, der die Verarbeitungs- und Speicherfähigkeiten des räumlichen Arbeitsgedächtnisses testet. Nach Schüler et al. (2011) adressiert die SST in Anlehnung an das Arbeitsgedächtnismodell von Baddeley (1992) den räumlich-visuellen Notizblock. Sie gilt im Sinne der CTML als Prädiktor für die Integration von Informationen in ein kohärentes, mentales Modell (Dutke und Rinck, 2006). Mit Blick auf die Überlegungen in Kap. 2.2 zu kognitiven Prozessen im Umgang mit Vektorfelddiagrammen zielt die Aufgabe sowohl auf räumliche Operationen als auch auf mentale Speicherprozesse ab. Shah und Miyake (1996) argumentierten daher, dass die SST ein wertvolles Instrument darstellt, um die Rolle des räumlichen Arbeitsgedächtnisses bei spezifischen, räumlichen Prozessen zu konkretisieren. In Bezug auf Vektorfelddiagramme resümierten Klein et al. (2021b) zudem, dass es sich bei der SST um ein adäquates Messinstrument zur Erfassung der visuell-räumlichen Fähigkeiten handelt, die im Umgang mit zweidimensionalen Vektorfeldern erforderlich sind.
Die SST wurde bereits in einer Vielzahl Studien zur Erfassung der Kapazität des räumlichen Arbeitsgedächtnisses eingesetzt, z. B. bei Untersuchungen zu Sequenz-Raum-Synästhesien (Brang et al., 2013) oder zum situativen Bewusstsein beim Fliegen eines Flugzeugs (Sohn und Doane, 2004). Die Aufgabe besteht aus Sequenzen mentaler Rotationsaufgaben, in denen ein Buchstabe (F, J, L, P oder R) für zwei Sekunden entweder korrekt oder gespiegelt und in einer von fünf jeweils um 45° um die vertikale Achse gedrehten Orientierungen präsentiert wird. Innerhalb des Zwei-Sekunden-Intervalls gilt es per Tastendruck anzugeben, ob der Buchstabe korrekt oder spiegelbildlich dargestellt ist und sich gleich-

zeitig den Drehwinkel zu merken. Am Ende aller Präsentationen wird die Ausrichtung der einzelnen Buchstaben wiedergegeben. Dieser Ablauf erfolgt zunächst für zwei aufeinander folgende Buchstaben, erhöht sich nach drei Durchläufen auf drei Buchstaben, und endet nach der dritten Sequenz mit fünf aufeinander folgenden Buchstaben. Die Angabe des visuell-räumlichen Vorstellungsvermögens erfolgt anhand eines Scores als Wert zwischen 0 (minimaler Score) und 1 (maximaler Score). Er berechnet sich als ungewichteter Anteil der Buchstaben, für die sowohl die Rotation als auch die (Nicht-)Spiegelung korrekt angegeben wurden.

4.4.1.4 Item- und Skalenanalysen

Sowohl die Ratingskalen zur Messung der Antwortsicherheit und der kognitiven Belastung als auch die Scores der Performanztests erfassten die zugrundeliegenden latenten Variablen auf Intervall- bzw. Verhältnisskalenniveau. Die einzelnen Items der Performanz waren hingegen dichotom. Mit dem Ziel der Verwendung inhaltlich valider und reliabler Skalen wurden die Testinstrumente verschiedenen psychometrischen Verfahren unterzogen (siehe Bortz und Döring, 2016, S. 267ff. für eine Beschreibung der Anforderungen einer psychometrischen Skala). Dies ist ein zentraler Baustein, der gewährleistet, dass fundierte und belastbare Schlussfolgerungen aus den erhobenen Daten abgeleitet werden können. Von diesen Analysen wurden i. d. R. nur einzelne Kennwerte in die Ergebnispublikationen übernommen (siehe Tab. 7 für eine Übersicht dieser Kennwerte). Nur im Fall der präregistrierten Studie sind diese in ausführlicher Form Teil der Pilotierung der Testintrumente in der Stage 1-Publikation (Studie *Lernaufgaben*).

Ein wesentlicher Schritt bei der Skalenbildung ist die Überprüfung der Dimensionalität des Instruments anhand einer explorativen Faktorenanalyse mit Varimax-Rotation, die die einzelnen Items gemäß ihrer Interkorrelationen zu übergeordneten Faktoren bündelt. Dies geschah auf Basis einer Korrelationsmatrix der (Bravais-Pearson-)Korrelationskoeffizienten (siehe Bortz und Schuster, 2010, S. 358ff. für eine ausführliche Darstellung). Da die Bestimmung der Pearson-Korrelation streng genommen eine Normalverteilung der Daten voraussetzt, wurden im Vorfeld der Analyse Ausreißer mit $|z| > 3.29$ am 99.9ten Perzentil winsorisiert, d. h. durch Itemmittelwert plus/minus (entsprechend der Ausreiß-Richtung) drei Standardabweichungen ersetzt (Tabachnick und Fidell, 2019). Bei nominalskalierten Daten neigt der Pearson-Korrelationskoeffizient jedoch dazu, den Grad der Assoziation zwischen den Items zu unterschätzen (Kubinger, 2003). Daher wurden für die Faktorenanalysen von Performanztets, deren Items dichotom vorliegen, stattdessen tetrachorische Korrelationen verwendet (Scott et al., 2012). Die explorative Faktorenanalyse eines Testinstruments ermöglicht eine Identifikation von Items, die nicht angemessen das interessierende Konstrukt oder seine Subdimensionen messen. Ihr Ausschluss erhöht die Validität des Testinstruments (Moosbrugger und Kelava, 2020). Werden Items verschiedener Fragebögen in das untersuchte Testinstrument integriert, wie z. B. bei der Erfassung der kognitiven Belastung, können anhand der Faktorenanalyse Subdimensionen des zugrundeliegenden Konstrukts identifiziert werden.

Im Anschluss an die Dimensionsprüfung wurden die einzelnen Items der ermittelten, nun eindimensionalen (Sub-)Skalen einer Itemanalyse unterzogen. Dabei wurden die folgenden psychometrischen Kenndaten herangezogen, um die Güte der Items (i) zu ermitteln (siehe Tab. 7):

- Schwierigkeitsindex P_i: Lösungs- bzw. Zustimmungsrate eines Items; für Rating-Skalen entspricht der Schwierigkeitsindex dem Item-Mittelwert M_i (Bortz und Döring, 2016)
- Itemstandardabweichung SD_i: Maß für die Differenzierungsfähigkeit eines Items (Moosbrugger und Kelava, 2020)
- Diskriminationsindex D_i: Maß für die Unterscheidung eines Testitems zwischen Personen mit hohen und niedrigen Gesamtskalenwerten (Doran, 1980; Ebel und Frisbie, 1991)
- Trennschärfekoeffizient r_{it}: Korrelation von Item und Gesamtskalenwert (Bortz und Döring, 2016; Ebel und Frisbie, 1991)

Anhand dieser Kenngrößen wurde eine Itemselektion vorgenommen (Tab. 7 für einen Überblick der Kennwerte), die einer weiteren Validierung des Testinstruments diente. Zusätzlich wurde die Reliabilität der resultierenden (Sub-)Skalen anhand der internen Konsistenz der Items untersucht. Als Indikator für die Reliabilität aller Skalen, die durch mehr als zwei Items abgebildet wurden, wurde Cronbachs α verwendet (Krüger et al., 2014). Für Skalen, die nur aus zwei Items bestanden, wurde der Empfehlung von Eisinga et al. (2012) folgend der Spearman-Brown-Koeffizienten ρ zur Erfassung der Split-Half-Reliabilität herangezogen. Zum Zweck einer weiteren Itemselektion involvierte die Reliabilitätsprüfung hierbei auch die Beobachtung von Veränderungen der Reliabilität einer Skala, wenn ein Item ausgeschlossen wurde (als $\alpha_{ex.}$ bezeichnet).

Da parametrische Testverfahren zumeist eine Normalverteilung der untersuchten Daten voraussetzen (Kap. 4.5.4.1), wurden die resultierenden (Sub-)Skalen in einem letzten Schritt einer Normalverteilungsanalyse unterzogen. Diese involvierte die Untersuchung der Häufigkeitsverteilungen einzelner Items sowie der Gesamtskala anhand von Histogrammen und die Signifikanzprüfung der Normalverteilungstests von Kolmogorov-Smirnov und Shapiro-Wilk (Bortz und Schuster, 2010; George und Mallery, 2019; Razali und Wah, 2011). Da die Ergebnisse von Normalverteilungstests durch die Stichprobengröße beeinflusst werden, empfehlen Razali und Wah (2011) zusätzlich Formparameter der Verteilung, d. h. Schiefe s und Kurtosis k, bei der Beurteilung heranzuziehen. Die Schiefe einer Verteilung ist ein Indikator für ihre Asymmetrie in Bezug auf den Skalenmittelwert und die Kurtosis misst, wie spitz oder flach die Wölbung der Verteilung ist (George und Mallery, 2019). Hierbei wurden in Anlehnung an George und Mallery (2019) absolute Werte im Intervall $[-2; 2]$ als akzeptabel bewertet. Bei Abweichungen von einer Normalverteilung wurde die Itemzusammensetzung erneut modifiziert. Für einen Stichprobenumfang $N \geq 30$ kann gemäß dem zentralen Grenzwerttheorem zudem davon ausgegangen werden, dass die Mittelwertverteilung hinreichend normal ist (Bortz und Döring, 2016).

Tab. 7: Übersicht der psychometrischen Kennwerte und ihres Zielbereichs bei Item- und Skalenanalysen von Performanztests und Fragebögen in dieser Arbeit.

Kennwert	Itemanalyse	Skalenanalyse	Zielbereich[a]	Referenz
Schwierigkeitsindex[b]	Itemschwierigkeit P_i, Itemmittel M_i	mittlere Itemschwierigkeit P, Skalenmittel M	$[0.3; 0.9]$	Doran (1980)
Standardabweichung[c]	Itemstandardabweichung SD_i	mittlere Standardabweichung SD	–	–
Diskriminationsindex	Item-diskrimination D_i	mittlere Itemdiskrimination D	≥ 0.3	Doran (1980); Ebel und Frisbie (1991)
Trennschärfekoeffizient	Item-Skala-Korrelation r_{it}	–	≥ 0.2	Piedmont (2014); Ding und Beichner (2009)
Reliabilitätskoeffizient	–	Cronbach's α_C, Spearman-Brown-Koeffizient ρ	≥ 0.7	Blanz (2015)

Anmerkungen: [a]Der Zielbereich bezieht sich auf Performanztests und Fragebögen entsprechend der Empfehlungen in den angegebenen Referenzen; [b]Bei Fragebögen entspricht der Schwierigkeitsindex dem arithmetischen Mittelwert des Items; [c]Ausprägungen der (Item-)Standardabweichung werden durch den Schwierigkeitsindex begrenzt, sie wird zur Vollständigkeit angegeben

4.4.2 Erfassung kognitiv-visueller Prozesse durch Blick- und Verbaldaten

Kognitiv-visuelle Prozesse wurden im Gegensatz zur punktuellen Messung der latenten Merkmale kontinuierlich anhand des Blickverhaltens während des Lernens und Assessments sowie verbaler Erläuterungen der Vorgehensweise erfasst (Kap. 4.4.2.1 und 4.4.2.2). Die gegenseitige Ergänzung psychophysiologischer sowie subjektiv-verbaler Indikatoren gilt als wertvoller Ansatz, um Einblicke in die zeitliche Dynamik der Informationsverarbeitung und der Aufgabenbearbeitung zu erhalten (Bortz und Döring, 2016). Die Auswertung von Blick- und Verbaldaten erforderte im Vorfeld statistischer Analysen eine Datenaufbereitung (Kap. 4.5.1 und 4.5.2).

4.4.2.1 Visuelle Aufmerksamkeit

Kognitiv-visuelle Prozesse im Umgang mit Vektorfelddiagrammen und multi-repräsentationalen Lehr-Lern-Materialien spielen eine zentrale Rolle im Rahmen dieser Arbeit und wurden mit Blick auf die Ausführungen in Kap. 3.2 anhand der visuellen Aufmerksamkeit operationalisiert. Die Blickdaten

wurden dabei sowohl mithilfe stationärer Eye-Tracking-Systeme am Bildschirm als auch anhand mobiler Eye-Tracking-Brillen aufgenommen. Dies erfolgte mit verschiedenen Modellen der Firma Tobii. Als stationäre Eye-Tracking-Systeme wurden der Eye-Tracker Tobii X3-120 (Genauigkeit von $< 0.4°$, Abtastfrequenz von 120 Hz) und der Eye-Tracker Tobii Pro Fusion (Genauigkeit von $< 0.3°$, Abtastfrequenz von 120 Hz) verwendet (Kap. 6 und 7). Die Stimuli wurden in diesem Fall auf 22- bzw. 24-Zoll-Computerbildschirmen mit einer Auflösung von 1920×1080 Pixel und einer Bildwiederholrate von 75 Hz bzw. 60 Hz präsentiert. Die Datenaufnahme erfolgte über die Software Tobii Studio bzw. Tobii Pro Lab. Beide Eye-Tracking-Systeme nutzten eine 9-Punkt-Kalibration vor jeder Messung, bei der die Proband:innen einem Punkt zu neun verschiedenen Positionen auf dem Computerbildschirm mit ihrem Blick folgten. Anschließend wurde die Differenz zwischen dem tatsächlichen Kalibrierungspunkt und dem gemessenen Blickpunkt überprüft. Die mobile Blickdatenaufnahme erfolgt mithilfe der Eye-Tracking-Brille Tobii Pro Glasses 3 (Genauigkeit von $< 0.3°$, Abtastfrequenz von 50 Hz), der Tobii Glasses Software und einer systemgesteuerten 1-Punkt Kalibration mithilfe einer Kalibrationskarte.

Alle verwendeten Eye-Tracking-Systeme erfassen die Blickdaten mithilfe einer Kamera über die Reflexion von Infrarotstrahlung an der Hornhaut des Auges, der sogenannten Cornea (Holmqvist et al., 2011). Diese Methode beruht auf Veränderungen der Relation der geometrischen Zentren von Pupille und cornealer Reflexion im Zuge der Augenbewegung. Hierbei kann unter der Prämisse, dass sich die Pupille schneller bewegt als die corneale Reflexion, die Blickposition berechnet werden (Holmqvist et al., 2011). Die durchgeführten Kalibrationen liefern hierbei Referenzpunkte, die Informationen über bestimmte Punkte auf dem Stimulus und die zugehörigen Pupillen- und Reflexions-Positionen beinhalten.

Im Rahmen der vorgestellten Studien erfolgte die Unterscheidung zwischen Fixationen und Sakkaden mithilfe eines Geschwindigkeitsschwellenwertes von $30°/s$ entsprechend der Velocity-Threshold Identification (I-VT; Salvucci und Goldberg, 2000). Diese Methode bietet im Gegensatz zu den Pixelstandorten der Blickpunkte den Vorteil, dass die aufgenommen Blickdaten unabhängig von der Bildschirmgröße sowie -auflösung sind (Shareghi Najar et al., 2015). Der Algorithmus nutzt die Eigenschaft, dass Fixationspunkte eher geringe (typischerweise $< 50°/s$) und Sakkadenpunkte vergleichsweise hohe (z.T. $> 300°/s$) Punkt-zu-Punkt-Geschwindigkeiten aufweisen (Holmqvist et al., 2011; Salvucci und Goldberg, 2000). Liegt ein Datenpunkt unterhalb des Schwellenwertes, wird er als Teil einer Fixation gewertet, liegt seine Punkt-zu-Punkt-Geschwindigkeit oberhalb der Schwelle, gilt er als Sakkadenpunkt (Holmqvist et al., 2011).

4.4.2.2 Argumentationsweise

Neben dem Blickverhalten stellt die Argumentationsweise eine weitere Zielvariable zur Analyse der kognitiv-visuellen Prozesse im Umgang mit Vektorfelddiagrammen und multi-repräsentationalen Lehr-Lern-Materialien dar. Im Sinne eines explorativen Ansatzes (Kap. 6) erfolgte die Erhebung dieser Variable dabei anhand eines offenen Formats durch die Aufgabe einer verbalen Begründung und

Erläuterung einer selbstgewählten Antwort. In Anlehnung an die Klassifizierung von Rütter (1973) eignen sich offene Items aufgrund der freien Gestaltung der Antwort nicht für eine Leistungserfassung. Sie können jedoch Einblicke in Gedanken, Interpretationen und Deutungen von Reizvorlagen geben (Bortz und Döring, 2016). Die Verbaldaten dienten dabei als wertvolle Ergänzung zum Blickverhalten, indem sie eine Interpretation der Blickdaten durch lernergenerierte qualitative Daten unterstützten (Kap. 3.2).
Die transkribierten Verbaldaten wurden zum Zweck einer Systematisierung der verwendeten Argumente einer zusammenfassenden, qualitativen Inhaltsanalyse nach Mayring (2015) unterzogen (Kap. 4.5.2).

4.4.3 Soziodemographische Merkmale

Zur Charakterisierung der untersuchten Stichprobe und zum Vergleich mit anderen Studien wurden für alle Studien im Rahmen dieser Arbeit soziodemographische Merkmale mit Einzelindikatoren erhoben (Bortz und Döring, 2016). Neben typischen Angaben, wie dem Alter und dem Geschlecht, wurden auch studienspezifische Merkmale erfasst. Dazu zählen zum einen Informationen über den Bildungskontext der Proband:innen, d. h. Abiturnote, Studiengang und Fachsemester. Zum anderen wurde ihr potentielles Vorwissen, d. h. Leistungskurse im Abitur, Einschätzung der Leistung bezüglich der Schulphysik und -mathematik und bereits besuchte Lehrveranstaltungen mit mathematischem und physikalischem Inhalt erfasst. Da alle Instrumente, Lehr-Lern-Materialien und Anweisungen in deutscher Sprache formuliert sind, wurde außerdem das Sprachniveau erfasst.

4.5 Analysemethoden

In diesem Kapitel werden die zur Analyse der erhobenen quantitativen sowie qualitativen Daten eingesetzten Auswertungsmethoden beschrieben. Die erhobenen Blick- und Verbaldaten wurden im Vorfeld statistischer Analysen einer Datenaufbereitung durch die Definition stimulispezifischer Untersuchungsgebiete (Kap. 4.5.1) oder der Kategorienbildung im Rahmen einer qualitativen Inhaltsanalyse (Kap. 4.5.2) unterzogen. Anschließend wurden die aufbereiteten Blick- und Verbaldaten sowie die psychometrischen Skalenwerte der Performanztests und Fragebögen zur Untersuchung der Forschungsfragen und -hypothesen mittels statistischer Analyseverfahren ausgewertet (Kap. 4.5.4). Entsprechend des Skalenniveaus der Daten wurden hierbei Testverfahren für die Untersuchung parametrischer und nicht-parametrischer Merkmale unterschieden (Kap. 4.5.4.1 und 4.5.4.2). Explorative Herangehensweisen griffen zudem auf die Methode der hierarchischen Clusteranalyse zurück (Kap. 4.5.3).

Tab. 8: Übersicht der Analysemethoden der Studien in dieser Arbeit.

Studie[a]	Kap.	Thema	Analysemethoden	Kap.
Review	5	Eye-Tracking in der physikdidaktischen Forschung	–	–
Strategien	6	Strategien beim Wechsel zwischen Formel und Diagramm	• Blickdatenanalyse	4.5.1
			• Zusammenfassende, qualitative Inhaltsanalyse	4.5.2
			• Agglomerative, hierarchische Clusteranalyse	4.5.3
			• Statistische Analyseverfahren (parametrische und nicht-parametrische Variablen)	4.5.4
Zeichnen	7	Zeichnen beim meR Lernen von Divergenz	• Blickdatenanalyse	4.5.1
			• Statistische Analyseverfahren (parametrische und nicht-parametrische Variablen)	4.5.4
Lern-aufgaben	(8), 9	digitalgestützte Lernaufgaben in der universitären Lehre	Statistische Analyseverfahren (parametrische Variablen)[b]	4.5.4[b]

Legende: Anmerkungen: [a]Kurztitel der Studien aus Tab. 6; [b]Datenerhebung noch nicht abgeschlossen

4.5.1 Blickdatenanalyse

Während Blickdaten aus stationären Eye-Tracking-Erhebungen das Blickverhalten bezüglich einem auf dem Bildschirm dargestellten Stimulus widerspiegeln, wird bei der Aufnahme von Blickdaten mit einer Eye-Tracking-Brille ein Video des Blickpfads im Raum aufzeichnet. Für eine Analyse dieser Daten bedarf es ihrer Transformation in eine interpretierbare, d. h. statische und zweidimensionale, Darstellungsform. Zu diesem Zweck fand ein Mapping der Blickpunkte im Video statt, bei dem die Position der Fixationen im Video ihrem entsprechenden Ort in einem zweidimensionalen Bild des untersuchten Stimulus oder der Szenerie zugeordnet wurden.

Im Rahmen der hier vorgestellten Studien wurden die Blickdaten sowohl qualitativ in Form von scanpaths als auch quantitativ anhand der Definition stimulispezifischer AOIs ausgewertet. Bei scanpaths wird die Blickbewegung durch nummerierte Punkte, deren Durchmesser proportional zur Fixationsdauer ist, und Verbindungslinien zwischen diesen visualisiert. Die quantitative Blickdatenanalyse beruhte auf der Definition stimulispezifischer AOIs, die z. B. verschiedene Repräsentationen einer Instruktionsseite oder das Vektorfelddiagramm beim Assessment umfassten. Mit Blick auf bestehende Eye-Tracking-Untersuchungen in der Lehr-Lern-Forschung (Kap. 3.2) und im Kontext der Vektoranalysis (Kap. 3.3) wurden hierbei sowohl fixationsbasierte als auch sakkadische Metriken herangezogen. Dazu zählten Fixations-, Transitions- und Sakkadenzahl, Anzahl und Länge horizontaler und vertikaler Sakkaden, mittlere Fixationsdauer und Zeit bis zur ersten Fixation. Diese sind intervall- oder verhältnisskaliert und wurden daher anhand parametrischer Analyseverfahren ausgewertet (Kap. 4.5.4.1) oder hinsichtlich der Bildung von Clustern untersucht (Kap. 4.5.3).

4.5.2 Zusammenfassende, qualitative Inhaltsanalyse

Um die in einem offenen Aufgabenformat erhobenen Verbaldaten für quantitative Auswertungen zugänglich zu machen, bedarf es ihrer Aufbereitung und Strukturierung. Im Rahmen dieser Arbeit wurde daher eine induktive (generative) Kategorienbildung am Material im Sinne einer zusammenfassenden, qualitativen Inhaltsanalyse nach Mayring (2015) durchgeführt. Diese verfolgte das Ziel der Entwicklung eines Kategorien- oder Codesystems zur Identifikation der verwendeten Argumente. Nach Mayring (2015) strebt ein solches Verfahren „nach einer möglichst naturalistischen, gegenstandsnahen Abbildung des Materials ohne Verzerrungen durch Vorannahmen des Forschers, eine Erfassung des Gegenstandes in der Sprache des Materials“ (Mayring, 2015, S. 86).
Die Bildung thematischer Kategorien erfolgte anhand des Prozessmodells der induktiven Kategorienbildung als Spezialfall der zusammenfassenden Inhaltsanalyse nach Mayring (2015). Dabei wurde vorab ein Selektionskriterium eingeführt, das die Aspekte des Materials festlegt, die für die Kategorienbildung verwendet werden und unwesentliche, ausschmückende oder abweichende Inhalte ausschließt. Anschließend wurden alle Teile, die das Selektionskriterium erfüllen, paraphrasierend auf einheitlichem Abstraktions- und Sprachniveau zusammengefasst und generalisiert. Am Ende dieser Reduktionsphase ergab sich ein erstes Codesystem, welches durch eine Rücküberprüfung des gesamten Materials auf seine Passung zum Ausgangsmaterial geprüft wurde. Im Folgenden wurde das Codesystem solange iteriert, bis die einzelnen Kategorien disjunkt und erschöpfend waren (Kuckartz, 2018). Anschließend wurde im Sinne der Überprüfung der Intra-Kodierer-Reliabilität das gesamte Ausgangsmaterial mithilfe des endgültigen Kategoriensystems kodiert ohne bisherige Kategoriezuordnungen zu berücksichtigen (Bortz und Döring, 2016; Kuckartz, 2018). Zur Ermittlung der Inter-Kodierer-Reliabilität wurde ein zweiter unabhängiger Beurteilender in Bezug auf die Fragestellung und die Bedeutung der Kategorien geschult, um einen zufällig gewählten Ausschnitt des Ausgangsmaterial zu kodieren (Bortz und Döring, 2016). Abweichende Kategoriezuordnungen wurden im Sinne eines konsensuellen Kodierens diskutiert.
Als Maß zur Bewertung der Übereinstimmungsgüte (Inter-Kodierer-Reliabilität) beider Beurteilungen wurde der Cohens-Kappa-Koeffizient κ verwendet (Cohen, 1960). Dieser berücksichtigt neben dem prozentualen Anteil der tatsächlich beobachteten Übereinstimmungen p_0 zudem, dass gleiche Klassifizierungen mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit p_e auch zufällig getroffen worden sein können. Der Wertebereich von Cohens κ liegt im Intervall $[-1;1]$, wobei $\kappa = 1$ bedeutet, dass beide Kodierer in allen Fällen übereinstimmen (Krüger et al., 2014). Entsprechend konventioneller Standards wurde ein Zielwert von $\kappa > 0.60$ bzw. $p_0 > 80\,\%$ für eine „gute Übereinstimmung“ herangezogen (Bortz und Döring, 2016). Nach Abschluss der Kategorienbildung wurden die resultierenden Häufigkeiten der finalen Kategorien anhand nicht-parametrischer Tests ausgewertet (Kap. 4.5.4.2).

4.5.3 Agglomerative, hierarchische Clusteranalyse

Hierarchische Clusteranalysen umfassen die systematische Untersuchung von Datenmengen auf das Vorhandensein inhärenter Muster und Strukturen. Die Methode beruht dabei auf der Gruppierung von Objekten mit ähnlichen Merkmalen und der hierarchischen Organisation dieser Gruppen (Antonenko et al., 2012; Battaglia et al., 2016). Die Ähnlichkeit zweier Objekte bzw. Datenpunkte auf Intervallskalenniveau wurde im Rahmen dieser Arbeit über den quadratischen euklidischen Abstand ermittelt, der die Summe der quadrierten Differenzen zwischen je zwei Datenpunkten erfasst (Antonenko et al., 2012; Gore, 2000). Die quadratische euklidische Distanz ist in den Sozial- und Verhaltenswissenschaften die am weitesten verbreitete Methode zur Abstandsmessung, da sie alle drei Dimensionen multivariater Daten, d. h. Datenpunkt, Streuung und Verteilungsform, widerspiegelt (Antonenko et al., 2012; Everitt et al., 2011; Gore, 2000).
Im Gegensatz zur nicht-hierarchischen Clusteranalyse, die a priori-Festlegungen, z. B. der Clusteranzahl, erfordert (Speece, 1994), ermöglicht die hierarchische Clusteranalyse eine explorative Datenanalyse in dem Fall, dass keine Prädiktion der Clusteranzahl im Datensatz möglich ist (Antonenko et al., 2012; Everitt und Dunn, 1983; Speece, 1994). Um eine unterschiedliche Gewichtung der einbezogenen Daten zu vermeiden, wurden die Variablen im Vorfeld der Analysen z-transformiert (Huberty et al., 2005; Speece, 1994). Im Sinne einer agglomerativen, hierarchischen Clusteranalyse erfolgte dann die Clusterbildung durch sequentielle Verbindung von Clustern (Antonenko et al., 2012; Battaglia et al., 2016; Speece, 1994). Die Verbindung zweier Cluster beruhte dabei auf dem Konzept der minimalen Varianz (Ward-Methode; Battaglia et al., 2016; Gore, 2000; Ward, 1963).
Als Indikator für die Qualität der Clusterbildung wurde die Silhouette betrachtet. Ein hoher Silhouette-Wert indiziert eine hohe Güte des Cluster-Zusammenhalts und der Cluster-Separation (Rousseeuw, 1987). Mit dem Ziel einer Maximierung der durchschnittlichen Silhouettenbreite wurde diese zur Bestimmung der Clusteranzahl herangezogen (engl. average silhouette approach; Rousseeuw, 1987). Zur weiteren Charakterisierung der resultierenden Cluster wurden zusätzliche Indikatoren zwischen den Clustern mithilfe statistischer Testverfahren verglichen (Kap. 4.5.4).

4.5.4 Statistische Hypothesentests

Mit Blick auf Kap. 4.1 und 4.3 zielen die Forschungsziele und die Studien dieser Arbeit auf die Untersuchung von Zusammenhängen zwischen Variablen ab. Die Analysen im Rahmen dieser Arbeit basierten daher auf der Durchführung statistischer Signifikanztests entsprechend der in den Studien formulierten Forschungshypothesen und -fragen. Unter der Annahme, dass alle Datenpunkte von einander unabhängig sind, wurden dabei eine Alternativhypothese H_1, die den erwarteten Effekt postuliert, und eine entgegengerichtete Nullhypothese H_0 auf Brauchbarkeit geprüft (Bortz und Schuster, 2010). Alternativhypothesen können neben der Existenz des Effektes auch seine Richtung postulieren (gerichtete Hypothese). In diesem Fall wird ein einseitiger Signifikanztest durchgeführt

(Bortz und Döring, 2016). Im Zuge des Signifikanztests wird die Irrtumswahrscheinlichkeit (α-Fehler-Wahrscheinlichkeit) berechnet, die angibt, mit welcher bedingten Wahrscheinlichkeit das gefundene Untersuchungsergebnis auftritt, wenn in der Stichprobe die Nullhypothese gilt (Bortz und Döring, 2006). Für geringe Irrtumswahrscheinlichkeiten wird die Alternativhypothese angenommen und das Ergebnis gilt als (statistisch) signifikant. In Anlehnung an Bortz und Döring (2006, 2016) und Rasch et al. (2014) gilt im Rahmen dieser Arbeit für alle Signifikanztests das traditionelle 5 %-Signifikanzniveau. In diesem Zusammenhang wurde ein Ergebnis mit $p < 0.05$ (*) als signifikant bezeichnet, Ergebnisse mit $p < 0.01$ (**) bzw. $p < 0.001$ (***) waren sehr bzw. hoch signifikant. Um zu vermeiden, dass kleine Effekte aufgrund ihrer Signifikanz überbewertet werden und um Aussagen über die praktische Bedeutung des Populationseffekts treffen zu können, wurde abhängig vom jeweiligen analytischen Test zudem eine Effektgröße berechnet. Im Rahmen der Studien dieser Arbeit wurden dabei zum Zweck einer guten Vergleichbarkeit und Interpretierbarkeit standardisierte Effektgrößenmaße verwendet (Bortz und Döring, 2016; Rasch et al., 2014). In Tab. 9 sind die Interpretationen dieser Maße, die in den Studien dieser Arbeit angewendet wurden, gegeben.

Tab. 9: Interpretation der Effektgrößen für statistische Hypothesentests in dieser Arbeit nach Chen et al. (2010) und Cohen (1988). Aufgeführt sind die Effektgrößen Cohens d, (partielles) Eta-Quadrat η^2/η_p^2, Cohens f, Vierfelder-Korrelationskoeffizient φ und Odds Ratio OR für t-Tests, Varianzanalysen und χ^2-Tests.

Stärke des Zusammenhangs	d	η^2/η_p^2	f	φ	OR
Kleiner Effekt	0.2	0.01	0.1	0.1	1.68
Mittlerer Effekt	0.5	0.06	0.25	0.3	3.47
Großer Effekt	0.8	0.14	0.4	0.5	6.71

Für den Fall eines nicht-signifikanten Ergebnisses kann anhand der β-Fehler-Wahrscheinlichkeit, d. h. der bedingten Wahrscheinlichkeit des gefundenen empirischen Ergebnisses unter Annahme der Gültigkeit von H_1, entschieden werden, ob stattdessen die Nullhypothese angenommen werden kann. Dem Vorschlag von McDonald (2014) und Rasch et al. (2010) folgend wurde in den Studien dieser Arbeit hierfür eine Teststärke (engl. power) von $1 - \beta \geq 0.9$ vorausgesetzt. Für $1 - \beta < 0.9$ gilt der Signifikanztest aufgrund einer zu geringen Datenbasis als nicht eindeutig interpretierbar. Um dies zu vermeiden, wurde bereits bei der Studienplanung, d. h. a priori, mithilfe von Teststärkeanalysen ein optimaler Stichprobenumfang N ermittelt, der mindestens notwendig ist, um einen Effekt bestimmter Größe mit einer Teststärke von mindestens 90 % aufdecken zu können (Bortz und Döring, 2016). Die veranschlagte Effektgröße richtete sich dabei nach Ergebnissen vorangegangener (Pilot-)Studien.

Die Studien in dieser Arbeit zielten, wie in den Sozialwissenschaften und der Psychologie üblich, auf die Untersuchung von Unterschieds-, Veränderungs- und Zusammenhangshypothesen ab. Erstere postulieren Unterschiede zwischen zwei oder mehr Gruppen, wobei sie den Einfluss einer unabhängigen (Gruppierungs-)Variable auf eine abhängige Variable untersuchen. Zweitere postulieren Veränderungen einer festen Gruppe über die Zeit und letztere postulieren Zusammenhänge

zwischen zwei oder mehr Variablen (Bortz und Döring, 2016). Als Maß für die Beschreibung der Stärke des Zusammenhangs zweier verhältnisskalierter Variablen x und y mit den Standardabweichungen s_x und s_y und der Kovarianz s_{xy} wurde im Rahmen dieser Arbeit der (Bravais-Pearson-)Korrelationskoeffizient,

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y},$$

herangezogen (Bortz und Schuster, 2010). Dieser setzt eine bivariate Normalverteilung der Merkmale voraus, reagiert jedoch auf Verletzungen dieser Voraussetzung i. d. R. robust (Bortz und Schuster, 2010). Der Wertebereich von r liegt im Intervall $[-1; 1]$, wobei $r = |1|$ eine lineare Korrelation der beiden Variablen impliziert. Für $|r| > 0.5$ besitzt ein Zusammenhang nach Cohen (1988) eine starke Korrelation.

Im Folgenden werden die parametrischen Testverfahren zur Überprüfung der Unterschieds- und Veränderungshypothesen für intervall- oder verhältnisskalierte Daten (Kap. 4.5.4.1) und die nicht-parametrischen Tests für kategorial-nominale Daten (Kap. 4.5.4.2), die im Rahmen dieser Arbeit genutzt wurden, zusammengefasst und ihre Anwendungsvoraussetzungen vorgestellt.

4.5.4.1 Analyse von Unterschieden und Veränderungen: Parametrische Variablen

Die meisten Variablen im Rahmen dieser Arbeit, z. B. blickbasierte Metriken einer AOI oder Scores eines Performanztests, wurden auf Intervall- oder Verhältnisskalenniveau erfasst. Zur Untersuchung, ob sich die Mittelwerte dieser Variablen zwischen zwei Gruppen A und B (der Größen n_A und n_b) statistisch relevant unterscheiden, wurden t-Tests durchgeführt. Hierbei wird als Nullhypothese angenommen, dass sich die Mittelwerte der Gruppen nicht unterscheiden $(H_0 : \mu_A = \mu_B)$. Dementsprechend lautet die Alternativhypothese, dass die Mittelwerte nicht gleich sind. Die Durchführung von t-Tests setzt eine Normalverteilung des untersuchten Merkmals in beiden Gruppen voraus (Bortz und Schuster, 2010).

Für die Untersuchung einer Unterschiedshypothese im Rahmen eines Zweigruppenplans wurde in dieser Arbeit ein t-Test für unabhängige Stichproben herangezogen, der den Einfluss einer zweistufigen, unabhängigen Variable auf eine abhängige Variable analysiert. Neben obigen Anforderungen setzt dieser Test zudem homogene Varianzen der Gruppen voraus (Bortz und Schuster, 2010; Rasch et al., 2014). Im Rahmen der Studien dieser Arbeit wurde die Varianzgleichheit anhand des Levene-Test geprüft (siehe Bortz und Schuster, 2010, S. 129f. für eine ausführliche Beschreibung). Im Fall vorliegender Varianzhomogenität kann die Prüfgröße t über

$$t(df) = \frac{\overline{x}_A - \overline{x}_B}{s_{\overline{x}_A - \overline{x}_B}} = \frac{\overline{x}_A - \overline{x}_B}{s\sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}}}$$

anhand der Differenz der Gruppenmittelwerte $\overline{x}_A$ und $\overline{x}_b$ und der Standardabweichung dieser Differenz $s_{\overline{x}_A - \overline{x}_B}$ bestimmt werden. Diese ist für die Annahme der Nullhypothese mit $df = n_A + n_B - 2$

Freiheitsgraden t-verteilt. s ist hierbei die gepoolte Standardabweichung, die mit den Gruppenvarianzen s_A^2 und s_B^2 über

$$s = \sqrt{\frac{(n_A - 1) \cdot s_A^2 + (n_B - 1) \cdot s_B^2}{(n_A - 1) + (n_B - 1)}}$$

ermittelt wird. Im Falle einer Verletzung der Varianzhomogenität wurde in Anlehnung an Derrick et al. (2016) und Ruxton (2006) in dieser Arbeit auf die robustere Variante des Welch t-Tests zurückgegriffen (Welch, 1947). Diese beruht auf einer Modifizierung der Standardabweichung der Mittelwertsdifferenz $s_{\overline{x}_A - \overline{x}_B}$ und der Freiheitsgrade df (siehe Bortz und Schuster, 2010, S. 123 für eine ausführliche Darstellung).

Beim Vergleich zweier Gruppen, deren Objekte einander paarweise zugeordnet sind wurde für die Untersuchung der Veränderungshypothese ein t-Test mit abhängigen Stichproben (gepaarter t-Test) verwendet. Durch die paarweise Zuordnung der Beobachtungen können die vorliegenden Daten hierbei als eine Stichprobe von n_{AB} Differenzen D aufgefasst werden. Die Prüfgröße t ergibt sich dann über

$$t(df) = \sqrt{n_{AB}} \left(\frac{\overline{D}}{s_D} \right)$$

aus dem Mittel der Differenzen $\overline{D}$ und der Standardabweichung der Differenzen s_D. Diese ist unter Annahme der Nullhypothese mit $df = n_{AB} - 1$ Freiheitsgraden t-verteilt.

Die Effektstärke des Vergleichs zweier Gruppen A und B wurde anhand von Cohens d angegeben (Cohen, 1988). Beim t-Test für unabhängige Stichproben ergibt sich Cohens d über

$$d = \frac{\overline{x}_A - \overline{x}_B}{s}$$

als Mittelwertunterschied der unabhängigen Gruppen in Bezug auf ihre gepoolte Standardabweichung. Im Falle eines t-Tests mit abhängigen Stichproben wird stattdessen der Mittelwertunterschied der paarweise verbundenen Datenpunkte in Bezug auf die Standardabweichung der Differenzen herangezogen. Es gilt

$$d = \frac{\overline{D}}{s_D}.$$

In Tab. 9 ist die Interpretation von Cohens d nach Cohen (1988) gegeben.

Für die Analyse von zwei oder mehr unabhängigen Variablen, sog. Faktoren, ggf. mit zwei oder mehr Ausprägungen, sog. Stufen, wurden Varianzanalysen (ANOVAs) durchgeführt. Wird die gleiche Stichprobe unter verschiedenen Bedingungen, untersucht, d. h. sind die Objekte verschiedener Gruppen untereinander verbunden, handelt es sich um eine Messwiederholung (ANOVA-RM; Bortz und Schuster, 2010; Rasch et al., 2010). Wird der Einfluss zweier Faktoren A und B mit k bzw. l Stufen auf die abhängige Variable untersucht, wird auch von einer gemischten $k \times l$ Varianzanalyse gesprochen (Rasch et al., 2010). Hierbei wird der, vom jeweils anderen Faktor unabhängige, systematische Einfluss der Faktoren anhand unabhängiger Hypothesentests auf Signifikanz geprüft (Haupteffekte). Zusätzlich wird in einem dritten Hypothesentest die Signifikanz des Interaktionseffekts $A \times B$ untersucht, der durch das Zusammenwirken bestimmter Stufen der beiden Faktoren auf die abhängige Variable

ausgeübt wird und nicht durch die Haupteffekte allein zu erklären ist. Da Varianzen aufgrund ihrer Quadrierung nur positive Werte annehmen können, testen Varianzanalysen immer zweiseitig; die Alternativhypothese kann demnach nur unspezifisch überprüft werden (Rasch et al., 2010).
Das Prinzip der Varianzanalyse beruht auf der Untersuchung der Gesamtvarianz einer Stichprobe, d. h. der Analyse der Variation aller Messwerte (Rasch et al., 2010). Varianzanalysen setzen dabei, wie t-Tests, eine Intervallskalierung der abhängigen Variable, eine Normalverteilung des untersuchten Merkmals sowie Homogenität der Varianzen in den einzelnen Gruppen voraus. ANOVAs ohne Messwiederholung erfordern zudem eine Unabhängigkeit aller Messwerte. Da diese Voraussetzung für Varianzanalysen mit Messwiederholung verletzt wird, gilt in diesen Fall die Anforderung der Sphärizitätsannahme. Diese besagt, dass die Varianzen der Differenzen zwischen jeweils zwei Stufen des messwiederholten Faktors homogen sind (Rasch et al., 2010). Besitzt der messwiederholte Faktor nur zwei Stufen, ist dieses Kriterium immer erfüllt. Für einen Faktor mit mehr als zwei Stufen wurde die Sphärizität im Rahmen dieser Arbeit mithilfe des Mauchly-Tests geprüft (Rasch et al., 2010). Eine Verletzung dieser Annahme wurde durch eine Adjustierung der Freiheitsgrade kompensiert. Girden (1992) empfiehlt dabei anhand des Greenhouse-Geisser-Epsilons ϵ_{GG} entweder die liberale Huynh-Feldt-Korrektur (für $\epsilon_{GG} > 0.75$) oder die konservative Greenhouse-Geisser-Korrektur (für $\epsilon_{GG} < 0.75$) zu verwenden (siehe Bortz und Schuster, 2010, S. 300ff. für eine ausführliche Darstellung).
Im einfachsten Fall einer einfaktoriellen Varianzanalyse mit k Gruppen gleicher Größe n_G beruht das Testverfahren auf der Zerlegung der Gesamtvarianz in die systematische Varianz und die Residualvarianz. Erstere ist auf die unabhängige Variable, d. h. die experimentelle Manipulation, zurückzuführen. Die Residualvarianz wird hingegen durch unsystematische Einflüsse, die weder intendiert noch durch das Experiment systematisch erfassbar sind, hervorgerufen (Rasch et al., 2010). Die Schätzung der Residualvarianz erfolgt dabei anhand der durchschnittlichen Varianz innerhalb der einzelnen Gruppen,

$$s^2_{innerhalb} = \frac{QS_{innerhalb}}{df_{innerhalb}},$$

als Quotient der Quadratsumme $QS_{innerhalb}$ der Abweichungen der einzelnen Datenpunkte von ihrem jeweiligen Gruppenmittelwert und der Freiheitsgrade $df_{innerhalb} = k \cdot (n_G - 1)$. Die systematische Varianz wird durch den mittleren Abstand der Gruppenmittelwerte von ihrem Mittelwert also durch die Varianz zwischen den Gruppen geschätzt,

$$s^2_{zwischen} = \frac{QS_{zwischen}}{df_{zwischen}}.$$

Da die Gruppenmittelwerte bereits mit unsystematischen Einflüssen behaftet sind, schätzt $s^2_{zwischen}$ neben der systematischen auch die Residualvarianz. Für k Gruppen ergeben sich dabei $df_{zwischen} = k - 1$ Freiheitsgrade. Die Prüfgröße der einfaktoriellen Varianzanalyse ergibt sich somit als Varianzquotient

$$F(df_{zwischen}, df_{innerhalb}) = \frac{s^2_{zwischen}}{s^2_{innerhalb}}$$

durch die Prüfung der Varianz zwischen den Gruppen an der Varianz innerhalb der Gruppen. Diese ist für die entsprechende Gruppenanzahl k mit je Größe n_G unter Annahme der Nullhypothese F-verteilt. Durch die Bildung eines Varianzquotienten, bei dem die Erwartungswerte von Zähler und Nenner dieselben Komponenten bis auf den zu untersuchenden Effekt enthalten, kann die statistische Bedeutsamkeit des interessierenden Effekts untersucht werden (Rasch et al., 2010). Für zweifaktorielle Varianzanalysen oder Varianzanalysen mit Messwiederholung wird das beschriebene Grundprinzip der Varianzzerlegung erweitert, indem weitere Varianzen berücksichtigt werden (siehe Rasch et al., 2010, S. 55ff. für eine ausführliche Beschreibung der mathematischen Grundlagen zwei- oder mehrfaktorieller Varianzanalysen mit Messwiederholung).
Das standardisierte Effektgrößenmaß der einfaktoriellen Varianzanalyse ist Cohens f,

$$f = \frac{s_{Effekt}}{s_{Res}},$$

als Quotient der durch den untersuchten Effekt bedingten Standardabweichung der Populationsmittelwerte s_{Effekt} und der Standardabweichung der Residuen s_{Res}. Mit Blick auf obige Terminologie wird zudem häufig Eta-Quadrat,

$$\eta^2 = \frac{QS_{zwischen}}{QS_{zwischen} + QS_{innerhalb}},$$

als Effektgröße angegeben. Dieses Maß schätzt anhand der Quadratsummen den Anteil der systematischen Varianz an der Gesamtvarianz, d. h. der Summe aus systematischer und Residualvarianz, auf Ebene der Stichprobe (Rasch et al., 2010). Aus ihr ergibt sich Cohens f als Effektgrößenmaß auf Stichprobenebene über

$$f = \sqrt{\frac{\eta^2}{1-\eta^2}}.$$

Für Varianzanalysen mit mehreren Faktoren oder mit Messwiederholung empfehlen Bortz und Döring (2016) und Rasch et al. (2010) das partielle Eta-Quadrat,

$$\eta_p^2 = \frac{QS_{Effekt}}{QS_{Effekt} + QS_{Res}},$$

als Effektgröße. Hierbei bezieht sich die Varianzaufklärung im Gegensatz zum Eta-Quadrat nicht auf die Gesamtvarianz sondern auf die Summe aus systematischer Varianz des jeweiligen (Haupt- oder Interaktions-)Effekts und Residualvarianz (Bortz und Döring, 2016; Cohen, 1988). In Tab. 9 ist eine Interpretation der Effektgrößen η^2 bzw. η_p^2 und f nach Cohen (1988) gegeben. Wird die Wirkung der unabhängigen Variable(n) auf die abhängige Variable durch Störvariablen beeinflusst, ermöglicht eine Kovarianzanalyse (ANCOVA) den Einfluss dieser Störvariable zu partialisieren (siehe Bortz und Schuster, 2010, S. 305ff. für eine ausführliche Darstellung).

4.5.4.2 Analyse von Unterschieden und Veränderungen: Nicht-parametrische Variablen

Kategoriezuordnungen oder die Beantwortung einzelner Items eines Performanztests wurden als Häufigkeiten dichotom-nominalskalierter Variablen erfasst. Zur Untersuchung der Frage, ob zwei dichotome Merkmale unabhängig voneinander sind, d. h. ob sich ihre Häufigkeiten zwischen zwei Gruppen unterscheiden, wurde in dieser Arbeit der χ^2-Unabhängigkeitstest herangezogen. Dieser überprüft die Nullhypothese einer Unabhängigkeit beider Merkmale. Anhand einer 2×2-Kontingenztafel der insgesamt N_H beobachteten Häufigkeiten mit vier Merkmalskombinationen a, b, c und d ergibt sich die Prüfgröße über die Differenz der zellenweise beobachteten Häufigkeiten und der entsprechenden erwarteten Häufigkeiten m_a, m_b, m_c und m_d,

$$\begin{aligned}\chi^2 &= \frac{(a-m_a)^2}{m_a} + \frac{(b-m_b)^2}{m_b} + \frac{(c-m_c)^2}{m_c} + \frac{(d-m_d)^2}{m_d} \\ &= \frac{N_H \cdot (ad-bc)^2}{(a+b)\cdot(c+d)\cdot(a+c)\cdot(b+d)}\,.\end{aligned}$$

Diese ist bei Gültigkeit der Nullhypothese mit $df = 1$ Freiheitsgraden χ^2-verteilt (siehe Bortz und Schuster, 2010, für eine ausführliche Darstellung). Dieses Testverfahren setzt eine Unabhängigkeit der Beobachtungen und erwartete Häufigkeiten größer als fünf voraus (Bortz und Schuster, 2010).
Für Analysen mit Messwiederholung, bei denen ein Merkmal dichotomer Ausprägung zwischen zwei Messungen für verbundene Stichproben verglichen wird, wurde in dieser Arbeit eine Spezialisierung des χ^2-Tests verwendet, der McNemar-Test (McNemar, 1947). Dieser berücksichtigt mit Blick auf die 2×2-Kontingenztafel ausschließlich die Fälle, bei denen eine Veränderung eingetreten ist (b bzw. d Fälle für die jeweilige Veränderungsrichtung). Dabei wird analog zum χ^2-Test vorausgesetzt, dass die erwarteten Häufigkeiten m_b und m_c größer als fünf sind (Bortz und Schuster, 2010). Der Signifikanztest überprüft die Nullhypothese, dass beide Veränderungsrichtungen gleich häufig vorkommen. Die Prüfgröße ergibt sich vereinfacht über

$$\chi^2 = \frac{(|b-c|-1)^2}{b+c}$$

(mit Edwards-Korrektur; Breslow und Day, 1980).
Als Effektgröße von χ^2-Unabhängigkeitstests mit zwei dichotomen Merkmalen wurde im Rahmen dieser Arbeit der Phi-Koeffizient φ,

$$\varphi = \sqrt{\frac{ad-bc}{\sqrt{(a+b)\cdot(c+d)\cdot(a+c)\cdot(b+d)}}}\,,$$

als korrelatives Maß der dichotomen Variablen herangezogen (Rasch et al., 2010). Lehr (2018) empfehlen diesen auch beim McNemar-Test anzugeben.

Breslow und Day (1980) und Haddock et al. (1998) hingegen empfehlen als Effektgröße für den McNemar-Test eine spezifische Form von Odds Ratio, welches sich über

$$OR = \frac{b}{c}$$

aus der Anzahl diskordanter Fälle ergibt. Interpretationen vom Vierfelder-Korrelationskoeffizienten φ und Odds Ratio nach Chen et al. (2010) sind in Tab. 9 gegeben.

4.5.5 Auswertungssoftware

Die Auswertung der Daten erfolgte unter Verwendung des Statistikprogramms SPSS (Version 26, 27 und 28; IBM Corp., 2019, 2020, 2021) und der (frei verfügbaren) Programmiersprache R (Version 3.6.3; R Core Team, 2021).
Letztere wurde dabei vorwiegend bei der Berechnung der Clusteranalysen (Kap. 4.5.3) und der tetrachorischen Korrelationen (Kap. 4.4.1.4) eingesetzt. Über die vorinstallierten Pakete in R hinaus wurden für die Clusteranalysen die Pakete *cluster* (Version 2.1.0; Maechler et al., 2019), *factoextra* (Version 1.0.7; Kassambara und Mundt, 2020) und *dendextend* (Version 1.14.0; Galili, 2015) verwendet. Die tetrachorischen Korrelationen wurden mit dem Paket *polycor* (Version 0.8-1; Fox und Dusa, 2022) durchgeführt.
Die Berechnung der optimalen Stichprobengröße erfolgte mithilfe der Software G*Power 3.1 (Version 3.1.9.6; Faul et al., 2009). Für die Blickdatenanalysen wurden die Softwareprodukte des Eye-Tracker-Herstellers Tobii verwendet, Tobii Studio 3.4.8 (Tobii AB, 2020) bzw. Tobii Pro Lab 1.204 (Tobii AB, 2022).

5 Eye-Tracking in der physikdidaktischen Forschung: Ein systematisches Literaturreview

Vorangegangene Arbeiten zum multimedialen und -repräsentationalen Lernen im Allgemeinen und im Kontext der Vektoranalysis im Speziellen verdeutlichten das Potential der Eye-Tracking-Methode für die Analyse von Lern- und Problemlöseprozesse auch für die physikdidaktische Forschung (Kap. 3.2 und 3.3). Während die Arbeiten von Strohmaier et al. (2020) und von Alemdag und Cagiltay (2018) einen Überblick über die Verwendung dieser Methode in der mathematikdidaktischen Forschung bzw. in der Forschung zum multimedialen Lernen geben, liegt für die Physikdidaktik jedoch noch keine disziplinspezifische Analyse der Eye-Tracking-Methode vor.
Aus diesem Grund wurde ein systematisches Literaturreview zum aktuellen Forschungsstand von Eye-Tracking in der physikdidaktischen Forschung durchgeführt. Dieses umfasst $n = 33$ empirische Studien, die zwischen März 2005 und April 2021 veröffentlicht wurden. Im Rahmen einer Forschungssynthese wurden diese hinsichtlich dreier Forschungsfragen untersucht, die die Verbreitung der Eye-Tracking-Methode in der physikdidaktischen Forschung (1), die methodische Implementation der Eye-Tracking-Studien (2) und ihre Ergebnisse sowie Implikationen (3) adressierten.
Damit dient das Review einer disziplinspezifischen Synthese der methodischen Umsetzung und ihrer Ergebnisse. Dies ermöglichte die Identifizierung von Potentialen und Limitationen zur Verwendung der Eye-Tracking-Methode für zukünftige Forschungsvorhaben in der Physikdidaktik im Allgemeinen und speziell für Diagnostik- und Wirksamkeitsstudien im Kontext der Vektoranalysis. Indem es die bestehende Lücke einer fehlenden Forschungssynthese schließt, kann es darüber hinaus Orientierung für das Design zukünftiger Eye-Tracking-Studien in der physikdidaktischen Forschung bieten. Im Rahmen dieser Dissertation adressiert das systematische Literaturreview somit Forschungsziel FZ1 (Kap. 4.1).
Das Literaturreview wurde in dem folgenden Artikel publiziert:

> Hahn, L., & Klein, P. (2022). Eye tracking in physics education research: A systematic literature review. *Physical Review Physics Education Research*, *18*(1), 013102. https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.18.013102

PHYSICAL REVIEW PHYSICS EDUCATION RESEARCH **18,** 013102 (2022)

Review Article

Eye tracking in physics education research: A systematic literature review

L. Hahn[*] and P. Klein[†]

Faculty of Physics Education Research, University of Göttingen, Friedrich-Hund-Platz 1, 37077 Göttingen, Germany

(Received 6 October 2021; accepted 22 December 2021; published 2 March 2022)

Eye tracking is becoming increasingly popular in physics education research (PER). As technology has advanced considerably in recent years and has become more user friendly, it is anticipated that eye tracking will play an increasingly significant role in assessing student learning at the process level in future studies. The main objective of this systematic review is to summarize the current status quo regarding eye tracking in PER and reviewing (a) the dissemination, (b) the methodological implementation, and (c) the insights provided by eye tracking in PER. We identified 33 journal articles, published between March 2005 and April 2021, that used eye tracking for original empirical research in the area of physics education. The results reveal that although eye tracking has been used in many different areas of physics, a clear focus on mechanics is evident, particularly for measuring visual attention in assessment scenarios like problem solving. While a high methodological rigor in the selection and analysis of the visual stimuli was apparent, only a few studies have provided a complete documentation of the technological implementation (e.g., movement restrictions, accuracy, and calibration information) and a theoretical embedding for interpreting eye-tracking data. To synthesize the results of the different studies, we created an inductive category system in accordance with the considered independent variables of the studies. Accordingly, visual attention was most frequently compared between levels of performance (correct vs incorrect or high vs low achievers), thereby leading to performance-discriminating factors of eye movement across studies. Furthermore, learners' eye movements were compared across different stimuli, different time points, or between student groups to inform multimedia design and shed light on students' learning progression. In summary, eye tracking is particularly useful for studying processes in different domains that are relevant to PER. Specific gaps in the literature, methodological limitations, and implications of existing findings were also identified to recommend future research and practices.

DOI: 10.1103/PhysRevPhysEducRes.18.013102

I. INTRODUCTION

The eyes play a crucial role in information intake. Eye movements reveal information regarding a person's visual attention—that is, the location where a person's eyes are fixated. Eye tracking enables researchers to study the allocation of visual attention, thereby implying it can tell us which elements of a visual stimulus (e.g., learning material) a participant looked at, for how long, and in what order. Observing eye movements and shifts in visual attention among different regions can potentially provide valuable insights into cognitive processing. For this reason, eye-tracking studies have been conducted by physics education researchers for over a decade to gain insights into students' learning processes or problem-solving strategies. What is unique about using eye tracking in physics education research (PER) is the challenge of investigating disciplinary concepts as opposed to other fields, such as multimedia research and cognitive science. As Rouinfar *et al.* put it, "physics problem solving is among the most intellectually and cognitively demanding processes that human beings are capable of engaging in" [1] (p. 1). Hence, it is not clear *per se* which educational topics in physics can be addressed by eye tracking or whether learning processes in physics can be informed by something as mundane as the perceptual functions involved in visual attention at all. Against this background, it is useful to have an overview of the research conducted in this field thus far.

Indeed, contributions to understanding students' eye movements are noticeably increasing, particularly in the journal Physical Review Physics Education Research [2]. Owing to commercial systems that are easy to use, and due to ample basic literature on methodological implementation and theoretical connections (e.g., Refs. [3,4]), researchers can enter this field of research with increasing

[*]larissa.hahn@uni-goettingen.de
[†]pascal.klein@uni-goettingen.de

Published by the American Physical Society under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International license. Further distribution of this work must maintain attribution to the author(s) and the published article's title, journal citation, and DOI.

ease. Having an overview helps connecting one's own work to the emerging field of eye tracking, while showing how various methods have been used in the PER community thus far.

While four reviews summarized eye-tracking research in the areas of expertise research [5], learning processes [6], multimedia learning [7], and mathematics education [8], to the best of our knowledge, there is still no systematic review of eye tracking in PER; moreover, existing reviews are not characteristic of PER. Therefore, in light of the above arguments, this article aims to fill this gap by disclosing the current inventory of where and how eye tracking has been used in PER thus far and what added value the method might offer to the field of PER.

II. GOALS AND RESEARCH QUESTIONS

Conducting a systematic literature review that includes all studies that use eye tracking in PER can have several purposes. First, an overview would provide insight into PER-specific approaches to use eye tracking as a research method that can be related to and opposed to general approaches in other education research practices. Second, in addition to technical, bibliographical, and methodological aspects, the educational impact of the use of eye tracking will be considered. More specifically, we intend to reveal the extent to which the use of eye tracking can provide added value for PER. Third, the literature review indicates the potential for further studies and points towards research topics that have not been exploited yet, hence providing (beginning) researchers with guidance in this regard. Fourth, as this review concentrates on eye tracking, the common practices and established procedures become evident by extracting documentation on the technological implementation. Thus, the following research questions are addressed:

RQ1: How widespread is the eye-tracking method in PER?

The first research question addresses the dissemination of the method. This includes identifying the number of PER studies that have used eye tracking thus far, when and where they were published, and which learning scenarios were investigated therein. We also address the (domain-specific) subject areas that have been investigated.

RQ2: What experimental setups have been used in PER-related eye-tracking studies?

The second research question characterizes the methodological implementation of eye tracking in PER—including analysis methods of visual stimuli, participants, technical equipment and procedure—and additional data.

RQ3: How was the eye-movement data interpreted, what results were obtained, and what are the implications of eye-tracking studies for PER?

Finally, we also identify the insights that eye tracking has provided to the field of PER. Therefore, we extract the reported eye-tracking metrics and the other variables that were collected in extant studies. We summarize the relevant findings on visual attention that are important for PER. In addition, we analyze how the results have been interpreted and theoretically framed, and present the limitations that have been mentioned in the studies.

III. METHOD

With this systematic review, we aim to comprehensively summarize the existing literature pertaining to our research questions. To do this, we examine the studies with the highest quality and those that are most up to date and that are characterized by a rigorous peer-review process for quality assurance. Therefore, we decided to include only journal articles to answer the research questions. However, being comprehensive requires finding as many published studies as possible, including those that may only be progress reports described in proceedings or book chapters. In addition, to provide a comprehensive picture of the use of eye tracking in PER, we identified other sources through a snowball search, but only included them with respect to the first research question (dissemination) and the task type of the stimuli (RQ2). Mainly due to their brevity, studies published as proceedings or book chapters do not contain sufficient information for our research questions to assess the design, methods, results, and outcomes of the reported studies. This applies, for example, to one of the most important conference proceedings in PER—that are, the PERC proceedings, which are limited to four pages.

To sum it up, our search strategy reflects a trade-off between quality and completeness of coverage. To ensure a high level of transparency in the selection process and to improve the reporting of our review, the PRISMA instructions have been incorporated into the methodology [9].

A. Search strategy

As the first step (see Fig. 1, "Identification"), the *Web of Science* database was selected to access the relevant research studies in this review by logically linking variants of the following keywords using the AND Boolean operator: "eye tracking," "science or physics," and "learning-related terms." The exact string reads ("eye gaze" OR "eye movement" OR "eye movements" OR "eye-movement" OR "eye-movements" OR "eyetracking" OR "eye tracking" OR "eye-tracking" OR "eye gaze tracking" OR "eye-gaze tracking" OR "eye-based gaze tracking" OR "eyegaze tracking" OR "visual attention") AND ("science" OR "physics") AND ("education" OR "instruction" OR "teaching" OR "learning" OR "problem solving" OR "students"). Searching this database ensures that the highest quality and most up-to-date research can be examined by limiting the literature search to those studies that have been published as articles in peer-reviewed journals (Fig. 1, top level, left).

After applying the inclusion criteria (see next section), the bibliographies of the remaining articles were screened

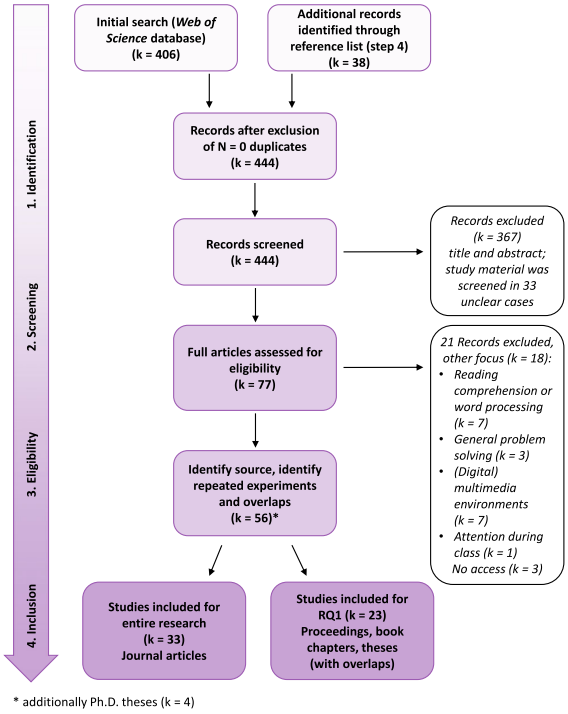


FIG. 1. Selection process of finding studies related to the research questions.

and a reverse search was conducted using GoogleScholar (i.e., all articles citing the remaining articles were identified). Qualifying journal articles were included in the search at the same level (Fig. 1, top level, right). In this step, studies from other sources (proceedings, book chapters, theses) that refer to the journal articles were also identified through citations.

B. Study selection process

The *Web of Science* search returned $k = 406$ articles (without duplicates). In the second step (Fig. 1, "Screening"), all of them were screened independently by two raters, according to inclusion criteria using the titles and abstracts of the articles (see Table I also for some exclusion notes). Dissenting judgments occurred in less than 5% and were resolved through discussion. Unclear cases were marked as "review required," and these studies were briefly skimmed for content in order to make a judgment. Full-text access was obtained for all remaining articles ($k = 77$), and the texts were reviewed again according to the inclusion criteria (Fig. 1, "Eligibility").

In particular, a distinction was made between studies that are clearly related to PER and those that use only physics-related stimuli without focusing on physics education or physics learning. As we are interested in the specific conclusions and implications of the studies for physics education, for each article, an individual inclusion decision was made based on the theoretical background, the research questions or hypotheses the study answered, and the implications the article derived for learning. More specifically, we examined whether the studies drew on the PER literature, whether physics-specific questions were addressed, and whether physics-specific implications were given. The eligibility of 77 articles was discussed between both raters and the reasons for exclusion or inclusion were documented. Based on full-text review, it turned out that seven studies on reading comprehension were excluded despite using physics contexts as study material. More specifically, studies in this area compare the cognitive processing of refuting and nonrefuting texts [10,11] or use conspiracy texts [12], investigate word processing when replacing physical concepts with familiar words [13,14], investigate text comprehension as a prerequisite for science learning [15], or investigate the influence of mood on text processing and comprehension [16]. In these cases, the choice of physical examples were not crucial in terms of the research questions or implications of the studies. The same applies to the studies that primarily address multimedia learning environments [17–23]. In fact, all these studies are either covered by the review on eye tracking in exploring learning in general [6] or by the review paper on eye tracking in *Multimedia Learning* [7] if they were published within the time ranges covered by these reviews (i.e., by the end of 2012 or 2016, respectively). Further, three more studies were excluded because they deal with problem solving in general, focusing on gender differences [24], item difficulty and cognitive load [25], or gifted

TABLE I. Inclusion criteria and notes for exclusions.

Inclusion criteria	Notes for exclusions
The article has been published in a peer-reviewed journal in English.	The article is not written in English or it is not a journal publication[a].
The article reports original and empirical research.	The article is a review or commentary article.
The article is in the field of physics education research.	The article uses physics-related visual stimuli, but other than that, had little to no relation to physics education or PER (as indicated by the educational background, research questions, and implications of the article).
Eye-tracking technology was used in the research.	

[a]Sources other than journal articles were documented to answer RQ1 and for the purpose of completeness.

students [26]. While all these pedagogical topics are peripherally related to PER, the argument of content replaceability also applies to these studies and, finally, to a study focusing on visual attention during instruction [27].

As described above, snowballing and reverse snowballing were used to identify cited and citing papers, including nonjournal articles (proceedings, book chapters, theses). These studies were put through the same procedure, yielding a total of $k = 56$ eligible records (Fig. 1, "Inclusion"; three proceedings had to be excluded because they were not available and could not be located through regional libraries) and $k = 4$ additional Ph.D. theses. Overlaps that occurred between different proceedings or between journal articles and other literature sources were documented. Thirty-three journal articles were included in our analysis for answering RQs 1–3, and an additional 23 resources (proceedings and book chapters) were considered with respect to RQ1 and the task type (visual stimuli; RQ2). Because of the large overlap between the Ph.D. theses and the associated journal articles, proceedings, and book chapters, the former were not considered for analysis regarding our research questions. Among the 33 journal articles, 27 were found by the *Web of Science* data search, and six articles were added by snowballing. The latter were published in rather "PER-atypical journals," for example, Applied Cognitive Psychology.

It is worth noting that none of these 56 eligible studies have been reported by the reviews by Lai *et al.* [6] or Alemdag and Cagiltay [7], and only one study (thematically based around vector fields) is included in the review by Strohmeier *et al.* on eye tracking in mathematics education research [8]. This indicates minimal overlap of our review and the reviews conducted by others, thereby suggesting that the applications and implications of eye tracking that are specific for PER can be distilled from our selection of studies.

C. Coding scheme and analysis

The journal articles selected for this review were analyzed according to the research questions. A complete survey on all studies included in this review with selected information can be found in the tables in the Appendix. With respect to RQ1, we categorized (i) *publication* (year and journal), (ii) *(eye-tracking) scenario* (e.g., assessment), and (iii) the *topical area* (e.g., conceptual understanding) as well as the *physics domain* (e.g., kinematics; see Table VII). For the eye-tracking scenario, we were able to distinguish three learning scenarios in which participants' eye movements were measured: First, if the eye movements were recorded while students were solving physical problems or working on tasks, then we grouped them into the *assessment* scenario. Typical task types include, for example, solving standardized assessment instruments such as the Test of Understanding Graphs in Kinematics [28] or the Force Concept Inventory [29], synthesis problems, troubleshooting tasks, or the interpretation of representations. We also indicated whether the assessment took place once (single point), repeatedly (longitudinal), or as an adaptive testing sequence. A typical example of longitudinal assessment is the use of pre- and post-tests. Solving a series of tasks was not assessed as longitudinal (e.g., solving several questions of a concept test). If the test items were flexibly adapted during processing, we labeled this scenario as an adaptive assessment. For the second category, the participants acquired knowledge during an instructional design, referred to as the *knowledge construction* category. Examples include engaging with instructional designs, such as reading text, operating simulations, viewing animations, or teaching in the classroom. In the third category, students were involved into *laboratory work* including experimentation (virtual or real)—that is, operating equipment, collecting data, and analyzing data. Studies could also be assigned into more than one category (e.g., assessment and knowledge construction). The topical areas were classified based on the synthesis given by Dockter and Mestre of PER [30] and involved conceptual understanding, graph understanding, representations, etc. (cf. Sec. IV C for further details). The physics domain was directly mentioned in most articles or became obvious by examining the stimuli used.

With regard to RQ2, we extracted the methodological information from the studies, such as (iv) *stimuli* (task type and areas of interest), (v) *sample* [learners and sample; for (iv) and (v) see Table VIII], (vi) *device* (manufacturer, sampling rate, calibration, movement restrictions, distance between participant and screen, fixation detection algorithm, and accuracy information), and (vii) additional data (see Table IX). For the task type of the stimuli (iv) all 56 studies (journal articles, proceedings, and book chapters) were considered (cf. Sec. V A), although nonjournal articles are not presented in Table IX. For the journal articles, we considered the level of detail with which eye movements were investigated.

Further, we introduce the terms *global* and *local* to distinguish between analysis at the level of complete stimuli (e.g., a graph as a whole) and at a smaller level of visual units (e.g., axis labels, specific graph regions; see Fig. 2). More specifically, a *global* label was assigned whenever eye movements were examined based on obvious surface features of the stimuli—for example, the AOIs were defined to separately cover the stem and options of an item stimulus, or a learning page was divided into look zones that covered the introduction, main text, and diagram. If a stimulus was analyzed at the *local* level, the AOIs covered specific parts of the stimulus, such as relevant components of an electrical circuit or relevant areas within a graph (compared to viewing the diagram as one unit). By differentiating the analysis according to the level of granularity, we also echo the thinking of Andrá *et al.* who distinguish a *macro*-, a *meso*-, and a *microlevel* of eye-tracking analysis based on the definition of AOIs [31]. In this regard, the

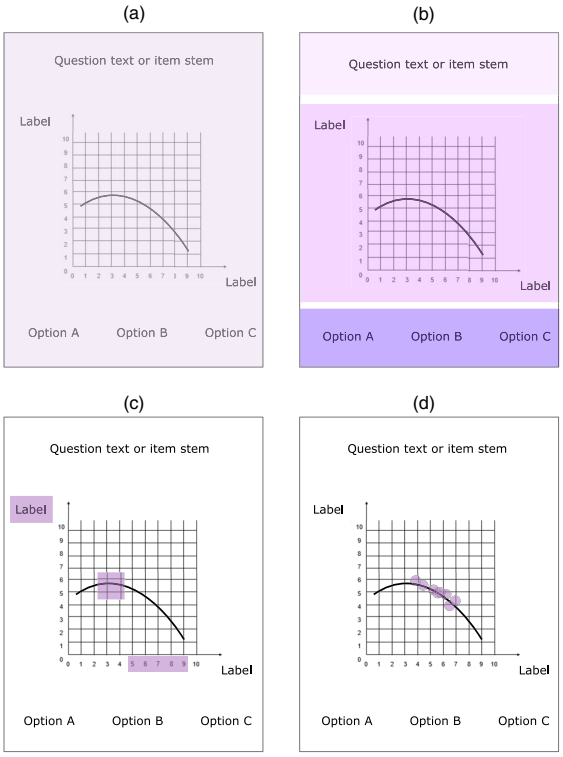


FIG. 2. Illustration of global and local analyses of a visual stimulus (RQ2). For (a)–(d), the figure shows the identical visual stimuli, comprising a question text, a diagram, and response options. We use the term *global analysis* when, for example, gaze behavior is considered on the whole stimulus (a). The subdivision into surface features of the task format (b) is also considered as a global analysis. If, on the other hand, task-relevant elements within a representation are considered, we use the term *local analysis* (c). This includes task-relevant or irrelevant areas, or areas that are of special interest for the research question under investigation. Also, when the temporal evolution of gaze behavior is considered within a representation, for example, whether eye movements follow the graph, we refer to this as a local analysis (d).

authors refer to a distinction from Holmqvist *et al.* that distinguishes *focused* versus *overview* eye-movement behavior on a stimulus to reflect different search and problem-solving processes [32]. To distinguish between local and global, it is important to look at how the eye-tracking data are analyzed in addition to the areas of interest (AOI) size. A local analysis involves examining the task-specific movements of the eye, for example, whether they depict the perceptual executive actions (as when tracking a graph to determine its slope). The analysis of expertlike or novicelike areas is also part of a local analysis. Global analyses aggregate the information content of eye movements and can often be performed equally for different stimuli, regardless of their content. Similar efforts can be found in the literature to subdivide this level of analysis when a stimulus consists of multiple elements, for example, in problem-solving strategies versus navigation [33,34]. Independently of eye tracking, Brünken *et al.* refer to local and global coherence formation, referring to the processing of information within a representation and the linking between multiple ones, respectively [35]. In Rau's work this is reflected in the terms *visual understanding* and *connectional understanding* [36].

Last, subjects in the studies were classified as school students, university students (including college and undergraduate students and above), or mixed.

RQ3 led to the category (viii) *eye-tracking measures and variables* (metrics, theories, and split criteria for data analyses; see Table X). According to the categories defined above, we summarized the results of the studies, the framing theories for interpreting eye movements, and the implications and limitations. The relationship among the eye-tracking measurements, cognitive frameworks of interpreting eye movements, and learning performance was identified by synthesizing common and conflicting findings among the studies reviewed. Based on the reported findings, general conclusions were drawn with regard to how eye tracking provided insights into physics education and which limitations became apparent.

For all 33 studies, the information regarding RQ1–3 was extracted independently by both authors after agreement on a coding scheme and definitions of categories. The same procedure was applied for the 23 additional publications regarding RQ1 and the task type. Disagreements of double coding were discussed and resolved.

IV. DISSEMINATION OF EYE-TRACKING STUDIES IN PER (RESULTS PERTAINING TO RQ1)

We structure the results according to the research questions (see also the tables in the Appendix, Tables VII–X). For better readability, it must be noted that Ref. [1] as well as Refs. [37–68] refer to journal articles that are part of the review. Subsequently, the secondary sources [69–95] are listed for completeness.

A. Number of studies and publication information

For the journal articles, the earliest study was conducted in 2005 by Van Gog *et al.* [44], and it was found that an increasing number of studies have been published since 2014 (see Fig. 3). With 27 out of 33 journal studies published since 2014 (82%) and 22 out of 33 since 2017 (67%), the number of publications using eye tracking in PER has been growing steadily, while 2020 forms the present peak in the number of studies conducted, with seven studies published. The journals cover the fields of physics, education, psychology, and technology. In total, the publications were issued in 14 different journals, with the majority of the studies being published in Physical

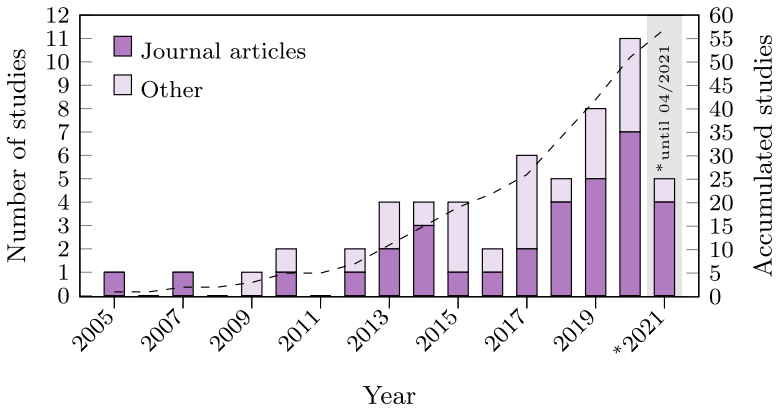


FIG. 3. Number of eye-tracking studies in PER per year (left vertical axis) and in total (right vertical axis). For 2021, all articles published until the end of April have been included.

Review Physics Education Research (16 studies or 48%). Two publications were published in European Journal of Physics, Computers and Education, Frontiers in Psychology, and Scienta in Educatione, respectively.

For the proceedings and book chapters, a similar chronology was found. From among 23 records, 18 were published since 2014 (78%) and 13 were published since 2017 (57%). The most common resource for eye-tracking studies in PER aside from journals are the PERC Conference Proceedings (5 studies or 22%), the AIP Conference Proceedings (5), and the ETRA Conference Proceedings (4). Only three articles were published as book chapters.

The similarity in chronology to the journal articles is not surprising, as most work published in conference proceedings has been reconsidered for publication in regular journal articles (cf. Sec. IV C). Because of this canonical overlap, we always report results on both publication types separately to avoid aggregation bias of duplicate reports. A visual overview of these relationships between all proceedings and book chapters identified in the search

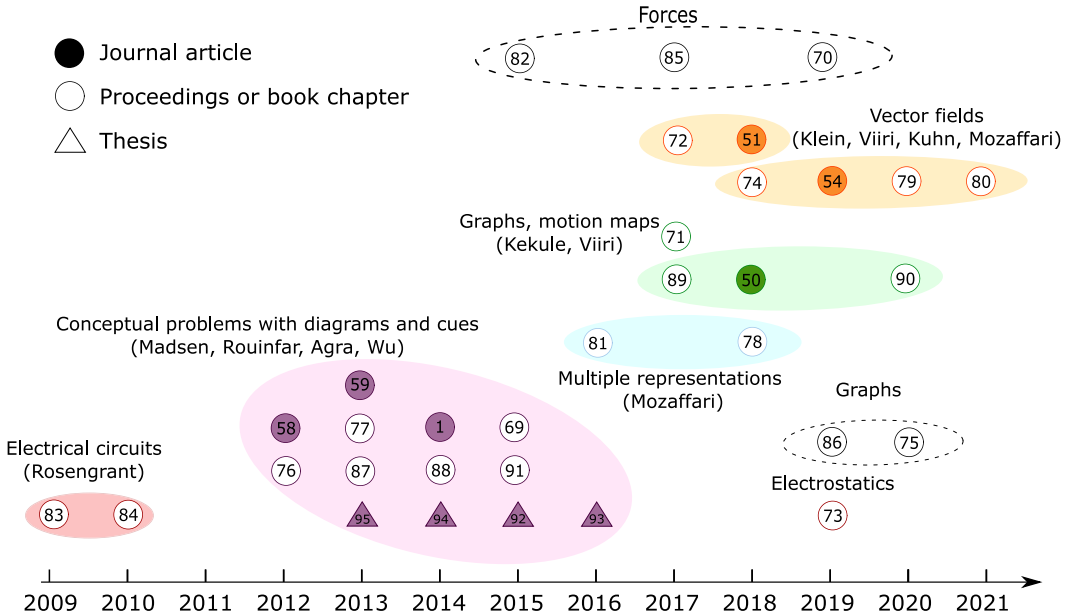


FIG. 4. A visual summary of all proceedings and book chapters identified in the search ($k = 23$; circles not filled in color). Associated journal articles (circles filled in color) and Ph.D. theses ($N = 4$; triangles) to these records are also presented. The colored ellipses indicate related studies from overlapping author groups. The dashed ellipses indicate thematically related studies from different author groups. The numbering refers to the references in the bibliography.

and the associated journal articles is presented in Fig. 4. For completion, the Ph.D. theses of the corresponding research groups, that were not considered for analysis, are also included here. The high degree of similarity between journal and nonjournal articles is also evident in the next sections and supports the decision of restricting further analysis to the journal articles.

B. Learning scenarios when eye tracking was used

For each study, we extracted the type of learning situation the participants were in while their eye movements were recorded. We distinguished between (i) *assessment* or *problem solving* (single point and longitudinal), (ii) *knowledge construction*, and (iii) *laboratory work*.

The categorization of the studies is documented in Table II (first column, italic categories). In order to clarify the categories, we will show their distinction with some examples below. For example, the study by Han *et al.* [45] examined students' attention while solving the TUG-K at the beginning and the end of a physics course. This qualifies the study to be included in the (longitudinal) assessment category. Because eye-movement data was not collected during learning between the two tests, this study is not categorized as knowledge construction. In the study by Klein *et al.* [54], students were instructed via written texts on how to interpret vector fields. Before and after this intervention, students solved a series of tasks. In this case, eye movements were recorded during both (longitudinal) assessment and knowledge construction. In the studies by Rouinfar *et al.* and Madsen *et al.* students solved a series of conceptual tasks [1,59]. Based on their answers, students were given cues in follow-up tasks that visually highlighted conceptually relevant areas of the diagram. The authors also measured the

TABLE II. Dissemination and use scenarios of eye tracking. References to nonjournal articles are included in parentheses. Note that studies that appear in both the *assessment* and *knowledge construction* category used eye tracking in both scenarios.

Scenario and topical area	Physics domain	Visual stimuli or task type[a]
Student assessment or problem solving		
Conceptual understanding	Statics	CATS test items [37]
	Forces	FCI test items [45,56] ([70,82,85,90])
	Energy conservation, work	Items with diagrams [1,58,59] ([69,87,88,91])
	Various concepts	MC test items [41] ([76,77])
		Synthesis problems [48]
	Electrostatics	Integration of charge distribution ([73])
Graph understanding	Kinematics	Line graphs [38,39,52,64]
		TUG-K test items [49,53,55,56] ([71,75])
		Distance-time graphs [1,58,59]
		Vertical toss problem ([86])
	Various domains	Linear and nonlinear graphs [61] ([69,77,87,88,91])
Representations	Kinematics	Multiple representation tasks [68] ([78,81])
	Forces, motion, energy	Items with diagrams (R-FCI, other) [46,50,65] ([89,90])
	Electrical circuits	Troubleshooting tasks [44] Calculate resistance ([83,84])
	Wave optics	Interference and diffraction patterns [66,67]
	Vector fields	Interpretation of divergence or curl [51,54] ([72,74,79,80])
	Inertial forces	Trajectories in frames of reference [57]
	Coordinate systems	Transfer data to diagram [47,57]
	Measurement uncertainty	Data representations [63]
Knowledge construction		
Learning from text with representations	Forces (inclined plane)	Text and picture combination [60]
	Mechanics	Worked-out examples with text and math [62]
	Electricity	Online learning module [40]
	Vector fields	Instructional texts [54] ([74])
Computer-based learning	Kinematics, energy	Tasks with overlaid cues or hints [1,59] ([69,87,88,91])
	Optics (refraction of light)	Simulation interface [43]
	Coordinate systems	Multimedia instruction [47]
Laboratory work		
Experimentation	Ideal gas law	Conduct experiment, complete worksheet [42]

[a](Representational) Force Concept Inventory (R-)FCI, Test of Understanding Graphs in Kinematics (TUG-K), Concept Assessment Tool for Statics (CATS), multiple choice (MC).

impact of these cues on knowledge acquisition during the testing period. We categorized these studies as adaptive assessment and knowledge construction, because, on the one hand, there was a test situation and, on the other hand, students' knowledge was specifically influenced by training.

Eye tracking was most frequently used in assessment scenarios, in journal articles (28 studies or 85%) as well as other publications (23 of 23), and independent from the publication type, longitudinal assessment was rare (6 of 28 and 3 of 23, respectively). Visual attention during knowledge construction was examined in eight journal articles and five other articles (24% and 22%), respectively. There is only one journal publication on visual attention during laboratory work.

C. Physics domains and topical areas

Among the physics topics, a large emphasis is placed on the domain of mechanics, such as kinematics, motion, (inertial) forces, energy, or work (21 of 33 journal articles, and 16 of 23 proceedings and book chapters). Other research interests included, for example, vector fields, electrostatics, measurement uncertainty, and (wave) optics. The coverage of the subject areas in the studies is documented in Table II (second column). Note that in order to obtain a better idea about the physics domains, the table also includes stimuli information (third column), although this belongs to RQ2(iv) and is reported in detail in the next section (cf. Sec. VA).

While reading the articles and examining the tasks for the participants, we noticed a few topical clusters that had accumulated. Some tasks, for example, required handling and working with discipline-specific visual representations (such as interference patterns or electrical circuits). Other problems were aimed at conceptual understanding. The learning scenarios often involved reading texts enriched with representations, dealing with multimedia learning environments, or testing instructional-design principles. This led us to assign the articles to topical areas in an inductive process—inspired by the work of Dockter and Mestre [30]—which are also listed in Table II (first column). Because of the cross-cutting nature of numerous problems, a few studies that were included in a particular section (e.g., conceptual understanding) could have also been included in another section (e.g., representations); therefore, this classification serves only to support an overview and we refrain from counting the number of studies that belong to individual topical areas. However, it is evident that there are emphases on graph understanding in kinematics and conceptual understanding of energy and work. Presenting the stimuli information used in the studies in Table II (third column) also provides a more complete picture of what has been investigated in the studies with respect to the topical areas.

Upon further examination of conference publications and book chapters, we found a large overlap with journal articles pertaining to the same subject area and physics domain. In Fig. 4, all nonjournal articles (circles not filled in color) and the associated journal articles (circles filled in color) as well as theses (triangles) are shown as points on a timeline, and the thematic grouping is indicated by ellipses. For example, the studies reported in Refs. [74,79,80] use the same stimuli as in the journal publication [54]. Another overlap regarding research questions and stimuli also became apparent between the studies reported in Refs. [69,76,77,87,88,91] and the journal publications [1,58,59]; in this case, all studies were framed in four Ph.D. theses available online [92–95]. The illustration not only reveal the relationships among the studies but also the chronological progression of various projects.

V. METHODOLOGICAL IMPLEMENTATION AND VISUAL STIMULI (RESULTS PERTAINING TO RQ2)

A. Stimuli used in the studies and subdivision into areas of interest

The stimuli used can be inferred from Table II (third column). In the case of assessment scenarios, test items were used, which mostly consisted of a question statement (item stem), multiple-choice alternatives (options), and a diagram or graph. For the knowledge construction scenario, the stimuli consisted of learning materials—that is, written texts with illustrations presented on the computer or multimedia learning environments also viewed or controlled on the computer. In the study investigating laboratory work, students' visual attention on worksheets and equipment was measured.

To analyze the eye movements on the visual stimuli quantitatively, look zones, so-called areas of interest (AOIs), were defined in all studies with the exception of two [46,49].

The analysis of gaze behavior can be differentiated into two levels of finesse—that is, a global level and a local level. This distinction finds support in a critical discussion on the level of finesse used in the studies by Chien *et al.* [42], Küchemann *et al.* [57], and Klein *et al.* [55]. Smith *et al.* [62] also discuss *different levels of granularity* when they decompose their worked-out examples into text and equations, once globally for text and mathematics and once blockwise for each step of thought. Regarding the distinction in a global and a local level of AOIs [31], for example, Madsen *et al.* [58] used student interviews to identify novice- and expertlike AOIs in diagrams involved in conceptual physics problems regarding speed and energy conservation. These AOIs covered small areas within the diagrams, and students' visual attention to these areas was measured [1,58,59]. Thus, local eye movement evaluations can be used to investigate cognitive processes involved when using specific representations at a more detailed level compared to a global evaluation [48].

Table VIII in the Appendix presents the assignment to global and local evaluations for each study, specifying AOI

definitions. Overall, 27 studies subdivided the stimuli based on surface features (global), and 16 studies considered attention at a local level (11 studies conducted analyses at both the global and local levels). As mentioned before, two studies considered heat maps or gazeplots to qualitatively discuss the data and did not define AOIs at all [46,49].

B. Subjects

The participants in most studies were undergraduate students (17 of 33; including college students), followed by high school students (11 of 33; including junior, middle, and high school students). Mixed samples were used in five studies, including, for example, Ph.D. students, teachers, or faculty members. Three publications reported on multiple substudies [56,58,63]; in these cases, subject information was extracted only for the cohort that was examined with eye tracking. One study by Kozhevnikov *et al.* referred to students who were recruited from a general participant pool, without providing more detail [56]. However, the authors refer to a sample from another substudy, in which the sample is described to comprise undergraduate students.

In all publications, participants were tested individually. On average, each study included a sample of $N = 54.4$ participants (SD = 29.9), ranging from $N_{\min} = 15$ [56] to $N_{\max} = 119$ [47]. Seven studies reported exclusion of participant datasets for technical reasons [46,47,50,52,59–61]. In these cases, dropouts ranged from 2.9% to 32.4%, with an average of 16.1%. Four studies excluded participant data based on a performance criterion [42–44,59], like including only extreme performance groups.

C. Eye-tracking devices and calibration procedures

Eye-tracking devices can be divided into two classes: Remote eye trackers are statically attached to the stimuli, typically at the computer screen. In contrast, mobile systems are attached to the subject's head or are contained in glasses worn by the subject. In this review, only one study by Chien *et al.* used head-mounted eye-tracking systems [42], while all other studies used remote eye-tracking systems from leading manufacturers in accordance with Holmqvist *et al.* [3]—Tobii Technology (15 of 33), SensoMotoric Instruments (SMI; 8), and SR Research (6). It must be noted that studies from the same group of researchers are not independent of each other in terms of technological equipment. Therefore, these figures only provide an orientation and are not suitable for a quantitative comparison.

Further, the sampling rate of the eye trackers was mentioned in all but two publications. Depending on the device, it varied from 30 Hz for the eye tracker from the Danish company Eye Tribe to 1000 Hz for the EyeLink from the Canadian company SR Research. Most eye trackers recorded gaze data at a sampling rate of 120 Hz or below (18 of 31 studies that reported a sampling rate). The eye tracker's spatial accuracy was documented in approximately half of all studies (18 of 33) and was in all cases reported as being below 0.5°. The average distance between the participants and the screen varied between 50 and 70 cm, as reported in 18 of 33 studies. The calibration procedure was mentioned in 22 studies and was reported as a 5-point (6 studies), 9-point (13 studies), or 13-point procedure (3 studies). Only three studies reported a threshold agreement regarding the calibration procedure [1,47,58], and another eight studies mentioned a verification of the calibration results [37,49–51,56,61,66,67]—for example, "calibration data and visual inspection of scan paths showed a reasonably good quality" [66] (p. 3). In addition, 21 of the 33 publications provided information on movement restrictions, where we judged statements like "the participants were asked to keep their head fixed" as head-free gaze capturing [63–65]. From among these 21 studies, seven reported using a chin or forehead rest (or both) [1,43,44,56,58,59,68]. In most cases, movement was restricted for the purpose of increasing measurement accuracy. In addition, 22 studies reported fixation identification algorithms, mostly referring to the classification of Salvucci and Goldberg [96]. In 14 studies, a velocity-threshold algorithm was used to separate and label fixations and saccades, five studies used a dispersion-based identification, and three studies reported using an algorithm that was not further specified. Moreover, all studies were examined regarding a specification of the captured eye positions as an indicator for the accuracy and validity of the data obtained. However, since this information was only reported in one article (stating that "the eye positions [were recorded] during approximately 90% of time" [66] (p. 3)), this aspect was not included in Table IX in the Appendix.

D. Additional data

Apart from gaze-data analysis, approximately two-thirds of the studies collected additional data from the subjects as control variables. Most frequently, oral or written explanations from the students, spatial skills, confidence or mental effort ratings are collected to better interpret the eye-tracking data. Often the additional data are used as split criteria for the analyses of the eye-tracking data; in the following sections, these analyses and the independent variables against which the eye-tracking metrics were evaluated are examined (cf. Secs. VI and VII).

VI. DEPENDENT AND INDEPENDENT VARIABLES (PREPARING THE RESULTS PERTAINING TO RQ3)

A major challenge in eye-tracking data collection is establishing a link between the collected data and the underlying cognitive processes. Here, the selected eye-tracking metrics and their theoretical interpretation play a crucial role. In this section, we report the metrics and variables that were used, including the dependent and independent variables that were related to the eye-movement

measures. By doing so, we prepare the structure of the results and implications obtained in the studies (Sec. VII).

Two studies qualitatively interpreted eye movements exclusively using gazeplots or heat maps [46,49]. The remaining 31 studies reported at least one of the following metrics, with the number in parentheses denoting the frequency: Total fixation duration or viewing time (also referred to as dwell time) (25), fixation count (16), mean fixation duration (8), transition count (8), saccadic angle (4), saccade length (3), and other (such as rereading time or time to first fixation). If studies reported metrics as ratios or proportions, the associated primary measure was noted—for example, total fixation duration per area was scored as (total) fixation duration. An overview and definition of the most common eye-tracking metrics is provided in Table III.

In addition, all independent variables were extracted for which the eye-tracking data have been evaluated referring to qualitative as well as quantitative analysis approaches. Independent variables can either be defined by the study design (as an *a priori criterion*) or they can result from one or more *post hoc* splits of the datasets (e.g., comparing visual attention between correct and incorrect responses). We identified the most frequent independent variables in the following manner and summarize them in Table IV.

(i) *Performance*.—In most of the studies (23 of 33), the eye-tracking metrics have been compared between correct and incorrect responses, between high and low confidence responses, or between overall very good and very poor learners (low vs high performers or experts vs novices). Here, the performance assessment was not based on an external criterion but inferred from test scores obtained during eye tracking.

(ii) *Stimuli*.—In 19 studies, the stimulus was varied and the influence of the different stimuli on eye movements was investigated. Typically, stimuli contrasts are used in studies comparing learning with different materials—for example, quiz vs homework problems [62], text with or without representation [40,60,63], or animation vs interactive training [47]. This criterion also applies when the participants worked on different types of tasks—for example, Brückner *et al.* [39], Susac *et al.* [64], and Klein *et al.* [52] compared eye movements for different graph task types (qualitative vs quantitative or slope vs area concept).

(iii) *Progression*.—In 10 studies, visual attention was compared among different time points or phases. This applies, for example, when a stimulus is presented repeatedly (pre- vs post-test [39,45,54] or initial vs transfer problem [1]) or when there are different experimental or problem-solving phases [42–44,57]. This category also applies if the gaze data is divided, *post hoc*, into small time periods to look at progression of visual attention over the time course of reading or problem solving [41,43,54,59].

(iv) *Students*.—In eight studies, visual attention was compared between different groups of students (here, group membership is not defined by using different materials or stimuli [see (ii)]). A few

TABLE III. Overview of the most common eye-tracking metrics reported in the PER studies and their relevance.

Metric	Definition and synonyms	Use and interpretation
Fixation count	The number of fixations	Often used as a measure of attention directed to defined areas of visual stimuli. High numbers indicate more attention.
Total fixation duration	Dwell time, total visit duration, or viewing time; sum of all fixation durations and saccade durations	Similar to fixation count, (total) fixation duration measures how long information is accessed. Higher fixation durations indicate more visual attention to certain areas.
Mean fixation duration	The average duration of single eye fixations typically range from 100 to 600 ms.	This metric is often considered an indicator of cognitive processing demand and may also indicate, for example, the effort required to discard individual options in multiple-choice assessment scenarios. Higher values typically indicate a higher cognitive effort to process information.
Transition count	Number of gaze shifts from one area to another area	Indicates integration processes among different sources of information—that is, for example, to study gaze switches between options and question stem in multiple-choice scenarios or to study text-image integration during reading.
Saccadic length	Spatial distance between two consecutive fixations	Can be used to explore reading behavior.
Saccadic angle	The angle between the horizontal and the saccade	Can be used to investigate the direction in which learners move their eyes over visual representations. In graph tasks, for example, saccade angle information can be used to investigate whether learners trace the graphs with their eyes.

TABLE IV. Structuring the study results according to the split criteria used to analyze eye movements.

Independent variable	Contrast	Specification (studies)
Performance	Response accuracy (correct vs incorrect, option choice)	Impact on fixation measures on global and local levels [1,37,38,41,43,45,49–51,53,53,58,62,65–67], transition counts [38,43,44,48,55], and other (gaze) metrics (e.g., saccadic length) [41,43,51,54]
	Achievement (high vs low)	Impact on several indicators of visual attention [40,42,44–46,49–51,53,54]
	Confidence (high vs low)	Impact on several indicators of visual attention [53,55,57]
Stimuli	Representations (task type, strategies)	Investigating graphs in kinematics [39,52,55,64], multiple representations (motion maps, kinematics, and vector fields) [48,50,51,68], or texts and diagrams [41,63,65]
	Learning materials	Text-picture combinations [40,47,60,62], visual cuing [1,54,59], laboratory work [42]
Progression	Repeated presentation (e.g., pre- vs post-test)	[1,39,45,54]
	Separating different phases of learning	[42–44,57]
	Exploration of learning progression	[41,54,59]
Students	Spatial ability (high vs low)	[56]
	Expertise	[45,61,67,68]
	Study background (physics vs nonphysics)	[39,52,64]

studies employed an external performance criterion to separate student groups [56,61,68], whereas other studies examined students with different study domains (e.g., physics vs psychology students) [39,52,64] or students who attended different courses prior to the assessment [67]. In the study by Han *et al.* [45], a pre- and post-test design with two randomly selected groups from the same (on-going) physics course were used with several weeks between pre- and post-test. In this case, the student and the progression criteria apply in the same manner.

It is not surprising that certain studies use multiple split criteria to answer the research questions and, therefore, also consider interaction effects—for example, between stimuli and students [39,52,64,68]. Moreover, certain studies compared students' visual attention on different AOIs for the same stimuli (e.g., globally, that is, the time spent on the options vs the time spent on the item stem of a question). Information on the segmentation of stimuli into AOIs has already been provided in Sec. V A, and we did not use the AOI as a split criterion or as the independent variable.

The next section is divided according to the factors identified here and thoroughly refers to the eye-tracking scenarios identified in Sec. IV B (*assessment, knowledge construction*, and *laboratory work*). Whenever possible, sections are also meaningfully sorted by the eye-tracking metrics that represented the target variables in the studies.

VII. FINDINGS, INTERPRETATIONS, AND LIMITATIONS (RESULTS PERTAINING TO RQ3)

A. Performance-based analysis of eye-movement data

In assessment scenarios, several studies report a link between visual attention and the accuracy of the given solution or the expertise of the students. Visual attention has also been compared between successful and less successful students in learning contexts. Here, we summarize the main findings of the studies with respect to performance measures. An overview of the results presented here can be found in Table V.

1. Linking eye-tracking indicators with response accuracy

Total viewing time.—Almost uniformly, the total time spent on the tasks was reported not to correlate with accuracy, either in (kinematics) graph tasks [53] or in conceptual tasks related to statics [37] or forces [45]. Susac *et al.* also reported similar dwell times on questions between student groups despite differences in performance on the wave optics test [67]. In addition, Klein *et al.* as well as Smith *et al.* found no relationship between time spent on instruction and student performance on the target problems on vector fields and mechanics, respectively [54,62]. Finally, Susac *et al.* reported eye-tracking data and response accuracies for solving six questions on energy (with and without diagrams) [65]. Since only in one task a correlation between response accuracy and eye-tracking data was tested, we disregard the study at this point.

TABLE V. Overview of performance-related results from the eye-tracking studies. The results are phrased as statements, and studies that do or do not support the statements are listed.

Statement	Supporting studies with topic	Rejecting studies with topic
Total viewing times or fixation counts on the stimuli are not correlated with response accuracy	*Assessment:* Kinematics graphs [53] Statics [37] Forces [45] Wave optics [67] *Knowledge construction:* Vector fields [54] Mechanics [62]	
Longer viewing times or higher fixation counts on correct options or relevant parts of the stimuli are associated with correct answers	Wave optics [66] Graphs in kinematics [38,49,53] Motion maps [50] Forces [45] Vector fields [51] Energy and motion [1,58] Light refraction [43]	Statics [37]
Higher transition counts are associated with better performance	*Knowledge construction*: Light refraction [43] Electrical circuit [40]	Assessment scenarios: Synthesis problems [48] Troubleshooting tasks [44] Graph tasks [38,55]
Longer mean fixation durations and shorter saccade lengths are associated with better performance	Conceptual questions [41]	Vector fields [51] Energy questions with diagrams [65]
High-performing students devote their attention more quickly to relevant parts of the stimuli, have longer viewing times or higher fixation counts on relevant parts of the stimuli and use different strategies	Graph tasks [46,49,50] Troubleshooting tasks [44] Laboratory work [42] Vector fields [51,54]	(Graphs in kinematics [53]) (Forces [45])
Shorter total viewing times or lower fixation counts on the stimuli are associated with higher confidence	Kinematics graphs [53,55,57] (Wave optics [67])	...

However, if one applies a more detailed analysis—for example, by examining the tasks individually or dividing them into different areas (on a global or local level), the differences in visual attention become visible, as is shown in the next paragraphs.

Time spent on different parts of the stimuli.—Considering multiple-choice test items, students who answered correctly were found to have spent more time on the correct option than on others and, conversely, students who answered incorrectly spent more time on incorrect options. This was found for the topics of interference patterns in wave optics [66], graphs in kinematics [38,49,53], motion maps [50], and forces [45], but could not be confirmed for conceptual questions on statics [37]. For statics questions, it was found that correct solvers (i.e., those who provide accurate responses) fixate less on the questions and accompanying diagrams since they can extract key information faster [37]. In other contexts, correct responses were also related with shorter times on globally defined parts of the stimuli—for example, when correctly judging the divergence, students tend to spent less time looking at the vector field plots [51], at least when using one of the two strategies investigated by Klein *et al.* Furthermore, in wave optics it was found that students attend to most of the patterns that they identify correctly [67].

When learning to conduct an optics simulation, Chiou *et al.* found that students with correct parameter choices took a shorter time to read the guiding question and set up the simulation than students who made incorrect choices [43].

Time spent on relevant and irrelevant areas in visual representations.—There are consistent results that indicate that correct solvers look more at relevant areas—for example, in kinematics graph tasks [38] or conceptual questions on energy and motion (in most cases) [1,58]. Madsen *et al.* found that students who answered incorrectly spent a higher percentage of viewing time looking at areas

of the diagram consistent with novicelike responses that represented common misconceptions that are well documented in the PER literature, whereas students who answered correctly spent more time on thematically relevant AOIs [58]. This finding was confirmed in the follow-up studies by Rouinfar *et al.* [1]. In addition, Chiou *et al.* found that students who failed to set up an optics simulation gave less attention to relevant parts of the simulation [43].

Transition counts.—To investigate the relationship between gaze switches and response accuracy, Ibrahim and Ding and Van Gog *et al.* examined transitions between different parts of the diagram in synthesis problems [48] and between different parts of electrical circuits in troubleshooting tasks [44], respectively. The researchers found no correlation between accuracy and the number of gaze transitions. Moreover, Klein *et al.* found that gaze transitions between options and questions or between different options were not correlated with performance in kinematics graph tasks [55]. In a similar context, Brückner *et al.* also confirmed that an isolated analysis of fixation durations and transitions provided only limited insight into graph-solving behavior. However, by applying a more detailed analysis combining fixation durations and transition metrics, Brückner *et al.* were able to show that correct solvers verify solutions more often by cross-checking different options and relating them with the item stem, thereby indicating that a relationship between accuracy and gaze switches cannot be precluded *per se* [38].

In scenarios of knowledge construction, two studies successfully related gaze transitions with response accuracy. Chiou *et al.* reported that successful students performed visual transitions among relevant areas of the simulation to observe the effect of parameter variations on light refraction [43]. Chen and She found that high-performing students put in more effort to assign correspondences between a water circuit and an electrical circuit when reading metaphorical texts on parallel circuits [40].

Other gaze metrics.—Mixed results were reported with respect to mean fixation duration and saccade length. Chen *et al.* found that correct answers to conceptual physics questions were associated with longer mean fixation durations (for question statements and diagrams) and shorter saccade lengths (for pictures) [41], whereas no such associations were found in the context of vector fields [51] or energy questions with diagrams (considering mean fixation duration) [65]. Further, the correct use of partial vector derivatives in the context of vector fields was reflected in the distribution of saccade angles. The saccadic angles reliably indicated whether or not students followed changes in field vectors in the appropriate direction or not [51,54]. This result became clearer when a stronger contrast was made between groups by comparing high-performing vs low-performing students, as is shown in the next section.

2. Correlation between overall performance and visual attention

In addition to the difference between correct and incorrect answers, certain studies also examined differences between high- and low-performing participants, thereby revealing a stronger contrast among subjects. Here, we summarize the results obtained from a relative distinction between achievement groups from the assessment (*post hoc*). At the global level, low achievers were found to spend more time on item questions and options (e.g., on graph tasks [46]), show less orientation through trial-and-error approaches (e.g., on electrical circuit debugging [44]), and browse through misconceptions by estimating them option by option [46,50]. In addition, for real laboratory work it was shown that low achievers needed more time to perform experiments and re-did them more often than high achievers [42]. Moreover, low-performing students also experienced high cognitive load in planning, conducting, and improving the experiments, as well as in interpreting the results, as indicated by high mean fixation durations [42].

In contrast, high-ability learners eliminate incorrect solutions more quickly by comparing relevant options and identifying differences and key features [46,50]. Consistent with the results reported above, high-achieving students spent more time on relevant areas of the problem and focused their attention more quickly on relevant sources [46]—for example, they focused on critical components in electrical circuits [44]. A deeper analysis of eye-movement data revealed that high-performing students also used other strategies during problem solving. They were found to focus their attention on specific areas in the field plot when interpreting vector fields and to exhibit sharp distributions of saccade angles in the horizontal and vertical directions [51,54]. In kinematics, they considered the graph as a whole rather than focusing on smaller regions [50], and in electrical circuit debugging, they spent relatively more time before deciding on a direction and evaluation [44]. When comparing mean fixation durations between low- and high-achieving students, Van Gog *et al.* found that high-achieving students have relatively shorter mean fixation durations in the problem-orientation phase and higher mean fixation durations in the problem-solving phase [44]. This is consistent with the finding of Klein *et al.*, which demonstrated higher mean fixation durations for high-performing students during the interpretation of vector field plots; these students also had shorter saccades when comparing adjacent vectors [51]. Despite these differences between high- and low-performing students, Klein *et al.* and Han *et al.* reported that high-performing students still devoted some of their attention to popular incorrect choices, thereby indicating conceptual mixing despite accurate responses [45,53].

3. Response confidence and visual attention

In three studies, a relationship was established between visual attention and the level of response confidence. Low confidence was consistently reported to be related to longer visit durations (for both correct and incorrect responses) [53,57]. Students with low confidence may consider more options, compare them, and take more time to select an option. Analyzing the gaze transitions between questions and options of TUG-K items, Klein *et al.* reported a difference between high and low confidence responses, which was much larger than between correct and incorrect responses [55]. This result suggests that gaze transitions may be more strongly correlated with confidence than accuracy at the global level. Other studies that collected confidence ratings did not relate them with measures of visual attention [39,52,54].

For tasks related to wave optics, Susac *et al.* also assumed that shorter means for dwell times were associated with higher response confidence, which put into perspective the elevation of confidence ratings [67].

B. Stimuli-based analysis of eye-movement data

We separately report the results related to the comparison of different task types and the influence of different learning materials on gaze behavior. The stimuli-based analysis also elucidates a few properties regarding the representations themselves that are mentioned here, for example, with regard to visual attention when working with graphs.

1. Processing graphs in kinematics

In the context of kinematics graphs, Susac *et al.* reported that students spent more time on diagrams when evaluating the area under the curve compared to the slope of the (line) graph [64]. Moreover, students spent similar amounts of time on the graphs when performing qualitative and quantitative evaluations; however, students fixated on the graph more often when the area had to be evaluated qualitatively compared to the slope. The follow-up studies by Klein *et al.* and Brückner *et al.* confirmed these results using the same test items [39,52]. For qualitative slope questions, further data analysis of saccadic directions has revealed that students performed eye movements corresponding to the gradient angle of the graph; hence, the eyes followed the graph, thereby suggesting that slope is an intuitive idea [52]. Longer viewing times on quantitative slope questions as compared to qualitative questions can be attributed to longer viewing times on the axes, as more information has to be extracted in the former [39,52,64]. Here, eye-tracking data can provide evidence for point-interval confusion or slope-height confusion when specific data points are fixated (or not) [52]. Moreover, eye-movement data revealed that students made an effort to understand the axis labels and, in the case of unfamiliar axis labels (e.g., changing the context from kinematics to finance), the labels received more attention [52]. Using a dataset of the Test of Understanding Graphs in Kinematics (TUG-K), it was also revealed that the postulated requirements of the graph tasks are reflected by the eye movements when solving the tasks [55]. For this purpose, the gaze transitions between the individual elements of the questions (item stem and answer options) were extracted and subjected to a cluster analysis. The clusters corresponded exactly to the postulated task groups, which required a mapping from graph to graph, text to graph, and vice versa.

2. Revealing different visual strategies for interpreting (multiple) representations

The differences between multiple-representation tasks were addressed in a study by Kekule and Viiri in the context of kinematics [50]. They found that expertise showed up differently for the two types of tasks—that is, for graphs by looking at them as broadly as possible and for motion maps by looking at individual points in more local detail and comparing them with each other.

Wu and Liu investigated how students coordinate their attention when presented with multiple representations of a motion process [68]. Students were asked to evaluate the accuracy of statements regarding the movement based on the representations and to generate conclusions from the data. The researchers found that the different task demands were associated with different gaze transitions between the representations.

Further, Klein *et al.* reported that different visual strategies for interpreting the divergence of vector fields induced different visual processing of field diagrams, thereby reflecting different cognitive demands [51]. In an integration approach, students performed more fixations of longer duration and had shorter saccades compared to a differentiation approach. In the latter, eye movements reflected skimming the field and looking at adjacent arrows.

Extending previous research on single-concept problems, Ibrahim and Ding found that different kinds of synthesis problems were processed differently by students [48]. For simultaneous problems, students performed less within-diagram transitions and integrated visual information from the diagram and the text to make sense of the situation. In contrast, sequential problems evoked more within-diagram transitions and, thus, students made greater cognitive attempts to process the diagrams and treated each diagram more as a single event. Therefore, eye tracking reflects the different demands of both problem types in terms of linking multiple events and concepts.

3. Adding diagrams to test items

Apart from comparing different item types, several studies also investigated students' visual attention on tasks with or without accompanying pictures or diagrams. Susac *et al.* found that adding graphical data representations to data tables did not change the total time spent on

measurement uncertainty tasks; instead, it changed the distribution of visual attention [63]. With graphical representations, students looked less at the numbers or data tables. Thus, graphical representations of measurement data helped students to visualize the data presented, to focus attention on important features, and to reduce cognitive load by providing more resources for processing the data and making sense of it [63]. In a follow-up investigation using conceptual energy items, Susac *et al.* confirmed that total viewing time remained constant between both conditions (with or without supportive diagram) [65]. A more detailed analysis revealed that dwell times and number of fixations on the item stem decreased when a diagram was presented, thereby indicating that students spent less time reading the text of the problem and providing faster orientation for the initial phase [65]. Chen *et al.* also found that physics concepts can be represented more efficiently by pictures than by text [41]. Because of the sequential processing of text, areas that are crucial can be identified more quickly in images.

4. Text-picture combinations

Chen and She compared learning about electrical circuits between metaphors and analogies using texts and text-image combinations [40]. Learning with analogies resulted in stronger and longer integration processes compared to metaphors because they emphasize a one-to-one correspondence between the electrical circuit and the water pipes. In contrast, texts with metaphors required more attention overall to look for corresponding parts between systems because the structural relationships were more implicitly given. With regard to the presentation modality, learning with pictures evoked more integration processes between systems overall than learning with texts [40]. Accordingly, the pictorial elements can better lead learners to extract and infer relevant information, thereby leading to better understanding. Transitions were also indicative of learning in the study on coordinate systems by Hoyer and Girwidz [47]. They found that deeper processing of information occurred with interactive learning materials since students performed longer saccades corresponding to transitions between the important components of the learning material. Similarly, Smith *et al.* reported that students attended to conceptual information presented by text in worked-out mechanics problems [62]. The students also performed numerous transitions between text and math, thereby indicating learning and integration of information, independent of using the examples in a quiz or homework condition. Against the authors' expectations, the students incorporated textual explanations as an integral part of their approach when studying worked-out examples. Consistent with these results, Mason *et al.* found that combining an abstract illustration of an inclined plane with text promoted more attempts to integrate information, thereby resulting in better performance compared to using concrete illustrations [60]. The abstract material promotes more efficient processing, as evidenced by shorter time spent on the text and shorter rereading time.

5. Visual cueing

Three studies have compared the effect of visual cues on students' attention. Madsen *et al.* found that participants who were shown cues after giving incorrect answers to conceptual questions localized more attention in expertlike AOIs and avoided novicelike areas in a transfer problem [59]. Consequently, seeing cues influenced their visual behavior, which can be interpreted as the first step towards thinking correctly about the problem. Consistent with this finding, Rouinfar *et al.* reported, in a follow-up study, that students who saw a cue were more likely to switch from an incorrect to a correct response [1]. In the cued condition, more participants displayed learning behavior after several trials of training with cues. However, students who changed their answer from incorrect to correct spent less time on the expertlike AOIs in the transfer problem, thereby indicating greater automaticity in extracting relevant information. This was also supported by the lower average fixation time on the expertlike AOIs. Thus, students can automate the extraction of relevant information through cuing [1]. Klein *et al.* used two divergence instructions with written explanations, equations, and visual representations that differed in the presence of visual cues within the diagram [54]. Students' eye movements were recorded as they processed the written instructions. It was found that the group with cues paid more attention to the diagram, made more transitions between the text and the diagram, and achieved better learning outcomes than the group without cues.

6. Laboratory work

Chien *et al.* were able to demonstrate that virtual and real laboratory scenarios are treated with different learning strategies using eye tracking [42]. In the virtual lab, students found it easier to focus on task-relevant zones in the experiment, whereas the worksheet received less attention. Consequently, they conducted more experiments than in the hands-on lab group. There was deeper cognitive processing of the questions on the worksheet; students thought and planned before they did anything.

C. Progression-based analysis of eye movements

1. Comparing visual attention between the pre- and post-test

Brückner *et al.* recorded students' eye movements while responding to line graph tasks at both the beginning and end of a lecture period [39]. They found that the results reported above regarding task type (qualitative vs quantitative) and concept (slope vs area) remained stable over time, whereas overall viewing times decreased from pre- to post-test. Specifically, dwell time on the options remained

stable from pre- to post-test, while dwell time on the questions and graph decreased. The researchers concluded that there were no recall effects regarding task solutions. In addition, no differences were found in dwell times between familiar and unfamiliar axis labels [39].

Further, Han *et al.* compared visual attention during problem solving at the beginning and end of a lecture period using the FCI in a web-based assessment [45]. While students' conceptual understanding increased significantly from the pre- to the post-test, the total time spent solving the FCI did not change; however, it must be noted that no matched samples were used. By analyzing the time spent on the different options of the FCI questions, they found that students' visual attention followed the conceptual progression in such a manner that students shifted their attention more to the expert choices in the post-test (while still maintaining a high level of attention on the naive choices, as reported above).

In contrast to these two studies, which reported differences on a fairly large timescale (several weeks between the pre- and post-test), four studies reported immediate effects of brief interventions on students' gaze behavior. When students were required to judge the divergence of vector fields in an initial task prior to any intervention, Klein *et al.* found that students focused primarily on the center of the vector field plots [54]. This area was perceptually salient and visually attractive because the direction of the arrows changed. Students were found to make eye movements in many directions, thereby indicating a nonsystematic sweeping of the field. Thus, students' visual attention was not guided by conceptual thoughts or heuristics. After the intervention, students performed predominantly horizontal and vertical saccades, and the distribution of saccade angles had peaks in these directions. This result reveals that students' gaze behavior changed meaningfully as a result of the intervention. As reported above, Rouinfar *et al.* also studied how students' attention changed as a result of repetitive training with or without cues [1]. The cued students' showed greater automaticity when extracting information from relevant areas of the diagrams, as reflected by less time spent on the areas. In line with these results, Küchemann *et al.* reported that the total viewing time for identical test items decreased when comparing the predict and observe phases before and after students had viewed a demonstration experiment on inertial forces [57].

2. Separating different phases during learning or problem solving

Visual attention data was used to separate different phases in the learning process; for example, when students explored a simulation on the refraction of light [43], worked through a worksheet for conducting experiments [42], or troubleshooted electrical circuits [44]. By breaking down the learning process into a setting-up and implementation phase and analyzing visual transitional patterns within the phases, Chiou *et al.* concluded that the sequence of visual transitions between AOIs is an important factor that determines the outcome of learning with simulations [43]. Based on this result, they advocated using step-by-step guidance for making adequate visual transitions in order to observe and comprehend the target phenomena. Further, Van Gog *et al.* found differences in attention allocation between the problem-orientation phase compared to the problem-solving phase, thereby reflecting the perceptual encoding processes and careful examination, respectively [44]. Chien *et al.* sampled three sets of eye-tracking data, each encompassing crucial components in scientific inquiry, including messing about, reading, planning, and conducting experiments, generating research questions, and designing new experiments [42]. By doing so, the researchers identified what elements of the worksheet or experiment were fixated upon with what frequency for the different phases during experimentation, and they identified different learning behaviors between simulation-based experiments and microbased laboratories.

3. Exploration of learning progression

In order to analyze processing of the instructional page, Klein *et al.* divided the reading time into several time intervals of equal width for each student [54]. Within each time interval, the number of fixations on each AOI and the transitions between the AOIs were determined and then compared between the stimulus conditions (instruction with vs without cues). The time series (also referred to as gaze probability analysis) showed that cognitive integration processes occurred simultaneously in both groups, but were significantly more pronounced for students using cues, thereby reflecting a greater attempt to construct a coherent mental representation during the learning process. Chen *et al.* conducted a deeper examination of the order of fixation points as students responded to conceptual physics problems [41]. They found that the fifth and ninth to eleventh fixation points, in terms of their position and average duration, were critical in predicting the accuracy of the student's response. In a similar experimental setup to the one by Rouinfar *et al.* described above [1], Madsen *et al.* found that the scan paths of correctly answering students were similar for repeated trials, thereby indicating that similar gaze behavior is established over time for comparable tasks [59].

D. Students

1. Comparing visual attention between high- and low-spatial ability students

Bi and Reid, Hoyer and Girwidz, Mason *et al.,* and Klein *et al.* state that spatial reasoning ability played an important role in solving the physics problems in their studies and additionally examined this variable [37,47,54,60].

However, they did not relate eye movements to spatial ability, but used the variable to rule out *a priori* differences between groups or to establish the relationship between spatial skills and performance.

On the other hand, Kozhevnikov *et al.* used a paper folding test to estimate students' spatial ability and then defined low- and high-spatial ability groups [56]. The students' eye movements were recorded while the students solved an extrapolation problem (i.e., a moving puck receives a kick and the resulting motion is to be described) and a graphing problem. The researchers found that students with high spatial abilities imagined the path the puck would travel, as indicated by fixations in that region. Thus, they directed their attention away from the elements depicted in the figure to empty areas. These students also visualized the results of the two motion components by upward and rightward saccades. For the graph problem, Kozhevnikov *et al.* found that students with high spatial awareness were better at translating graph information into integrated functional relationships.

2. Comparing visual attention among students with different levels of expertise

A few studies used an external criterion to define expertise and compared visual attention during problem solving for the different expertise groups. Han *et al.* used the FCI in two groups of students [45]. One group was selected at the beginning of the semester, while the other group was selected towards the end of the semester. Since this is also a progression-based analysis, the results are already summarized in Sec. VII C 1. Susac *et al.* investigated the understanding of interference patterns between two groups of students who had previously taken different courses [67]. The experimental group performed hands-on experiments on the topic, while the control group experienced lecture demonstrations. They found that the experimental group spent less time on the choices of interference patterns and revisited them less often before responding. This suggests that the students who performed hands-on experiments may be more familiar with interference and diffraction patterns and were more confident in selecting the correct pattern [67]. In the study of Škrabánková and Beitlová, the expertise groups were divided based on teachers' judgments prior to the test [61]. This turned out to be problematic because the division did not correspond to the subjects' performance and visual attention also did not indicate adequate group division.

Further, Wu and Liu also used an external criterion to define expertise—that is, the number of points achieved in TUG-K [68]. The students were then divided into high and low achievers and worked on a problem with multiple representations in kinematics. In this manner, the researchers were able to investigate which representation (table, equation, or graph) was focused on more often by which group and how often transitions took place. Wu and Liu reported that the group with a high level of prior knowledge made more transitions overall, more often fixated the equation, and—depending on the type of task (identifying content, establishing connections, or making predictions)—focused either on tables and equations or graphs more often. The group with low prior knowledge mainly made transitions between the question and the table, while the group with high prior knowledge made transitions between question and equation or between table and graph. Thus, high prior knowledge students were found to be more inclined to infer and integrate information among multiple representations, skilled at flexibly moving across them and connecting or transforming representations [68].

3. Comparing visual attention between physics and nonphysics students

Susac *et al.* compared physics and nonphysics (psychology) students' understanding of line graphs in different contexts while capturing eye movements [64]. Klein *et al.* and Brückner *et al.* reported follow-up studies using identical materials and a different sample of nonphysics (economics) students [39,52]. In these studies, participants can also be viewed as discipline experts or novices (with high or low prior knowledge on average) located at different points on the knowledge continuum. All studies reported that physics students spent longer periods of time dealing with problems they were unfamiliar with (i.e., financial graph tasks) than with known problems (i.e., kinematics graphs). Susac *et al.* found that novice learners (i.e., the psychology students) spent less time on problems that they could not solve and that were very difficult for them, which represents novel findings that are in contrast to the results obtained in other studies comparing expertise groups [64]. However, this was not confirmed by the follow-up studies on economics students. Instead, it was revealed that the economics students had similar viewing times on the diagrams as physics students, but their visual attention distribution was more novicelike [39,52] (see Sec. VII A for more details).

E. Theoretical framing

A particular challenge in the use of eye tracking is the meaningful interpretation of the gaze data. Because of the great freedom in terms of evaluation possibilities, which can lead to different results depending on the choice of metrics and the definition of the AOIs, a theoretical basis is important in order to enable a well-founded interpretation of the data. Numerous theories of cognitive psychology provide reference points for this. Less than half of the articles (14 of 33) explicitly reported a (cognitive) theoretical anchoring of the eye-tracking method. Almost all of the 14 articles that theoretically embed their analyses referred to Just and Carpenter's *eye-mind assumption* [97] (13 of 14 articles), which states that a fixation point of the eye corresponds to a fixation point of attention. Thus, gaze

duration is an indicator of the time required to process a newly fixated word. In addition, two articles mentioned the *immediacy assumption*, also established by Just and Carpenter [43,60], according to which a reader attempts to interpret each content word of a text immediately and without delay, even at the expense of assumptions that occasionally turn out to be wrong [97]. Of the articles examined, only Rouninfar *et al.* referred to another theory [1]—Henderson's rubber band model of eye movements and attention [98,99].

F. Limitations

Several studies reported limitations when analyzing and interpreting eye-movement data. The following subsections summarize the most common limitations that were reported in extant literature.

1. Calling for additional (verbal) data to interpret eye movements

Numerous studies collected additional verbal data to infer meaning from students' eye movements or to reduce noise in the data. For example, Van Gog *et al.* combined eye tracking with concurrent verbal protocols to shed more light on students' troubleshooting performance [44]. Susac *et al.* used additional written explanations of multiple-choice test items to assess the correctness of student responses [64]. Studies without additional verbal or written data sources lacked interpretations and explanations, such as why information was not retained despite reading the text [62] or why students failed to make important transitions despite instructional guidance [43]. Moreover, several publications indicated that additional verbal data would be required to fully understand the results obtained via eye tracking [38,39,42,43,55,60,62,68].

One fear is that parallel speaking might influence the eye movements. The study of Ibrahim and Ding provides a methodical example to overcome this problem by processing the tasks once with and once without thinking aloud [48]. Thus, on the one hand, one measures the undistorted attention without the additional burden of thinking aloud in the first run and, on the other hand, still obtains the verbal data in the second run. However, this creates the problem that learners see the same stimulus twice in a short period of time. In this context, Klein *et al.* also indicated that eye-tracking data can be biased when the same or similar stimuli are viewed repeatedly [51]. Han *et al.* also expressed the concern that memorization and familiarity effects imply that pre- and post-testing is not easy; hence, they used different samples for pre- and post-test instead of matched samples to avoid students seeing the questions twice [45].

2. Low number of students

A desire to increase the sample size was expressed in many studies, which falls short of the size of questionnaire studies due to the time-consuming nature of the data collection process [38–40,44,58,60,63,66]. Small sample sizes lead to lower statistical power; therefore, a few studies refrained from performing statistical significance tests and instead relied on the calculation of effect sizes [58] or on nonparametric procedures [43]. In assessment scenarios, the number of individuals who chose certain distractors shrinks further with small initial samples, thereby making group comparisons difficult [66]. In addition, small samples limit the ability to conduct mediator and moderator analyses, such as how reading comprehension affects the processing of text-picture combinations [60].

3. Stimuli restrictions

A few studies also reported limitations in terms of stimuli. For example, the studies presented only a limited range of stimuli [38,58], thereby causing the interpretations of eye movements to not be applicable to other types of graphs or charts. Low ecological validity was also mentioned with respect to the clinical nature of eye-tracking studies—for example, only a single example text was presented that students were required to understand [60].

It was also mentioned that certain stimuli must be analyzed individually, which leads to higher effort and lower generalizability [38,47]. This is the case, for example, when comparing different types of training that include moving and static images, which makes it difficult to define corresponding AOIs [47]. Thus, inconsistent item formats or different numbers of alternatives must be avoided when similar analysis procedures are required to be applied for every item [53,66]. On the other hand, individual analyses, for example of gaze paths, enable the provision of individualized feedback [46] and specificity would be lost if eye-tracking data were averaged over too many different stimuli [47].

Similarly, specificity would be lost if AOIs were selected too coarsely [42,62]. This can be remedied by qualitative analyses of heat maps [49] or exploratory analyses of AOI patterns [52,57], where attention can be viewed on small stimulus segments. Conversely, the studies of Madsen *et al.* and Rouinfar *et al.* revealed how relevant and irrelevant areas in the stimuli can be determined by preliminary studies through interviews [1,58,59]. This preliminary work made it possible to define high-resolution look zones that could be used to pinpoint differences in expertise.

4. Mobile eye tracking and real learning scenarios

Only one study uses eye-tracking glasses to capture visual attention in hands-on experiments [42]. While the high potential of this approach for typical learning scenarios in physics is apparent, Chien *et al.* reported that tremendous manpower is required for analyzing these data. The learners changed their visual space and moved objects from moment to moment; thus, the look zones must be adjusted manually frame by frame to derive accurate

results. This resulted in only a part of the data being analyzed. If automated gaze mapping in real-world scenarios would become possible through software solutions in the future, additional scenarios for physics learning could open up. This overcomes, for example, the limitation mentioned by Susac *et al.* whereby paper-and-pencil data cannot be captured with screen-based gaze tracking [63].

VIII. DISCUSSION

A. Dissemination of eye tracking in PER (RQ1)

1. Increasing use of eye tracking in PER

In this literature review, the current status quo regarding eye tracking in PER was examined and summarized. A thorough paper selection process yielded 33 studies that used eye tracking in physics education to investigate learning processes that were published in journals since 2005 and an additional 23 studies that were published as proceedings or book chapters. This number is significantly lower compared to mathematics education research [8], which shows the existing potential for eye tracking in PER. Furthermore, similar to previous reviews, there has been a substantial increase in the number of publications, particularly within the most recent years [6–8]. This confirms the ongoing popularity and importance of eye tracking; as explained by Strohmaier *et al.*, technological progress has made the implementation of studies easier and this leads to a greater awareness of fields beyond education [8]. The dynamic development of eye-tracking studies within physics education can also be gauged by comparing it to the development of eye-tracking methodology in general. For PER studies within the period 2014–2017, a relative increase of approximately 30% per year and within the period 2017–2020 of approximately 50% per year became evident, whereas it was 10% per year for the mentioning of eye tracking in general [100,101]. Although this result does not provide a qualitative argument for the validity of eye tracking in PER, it can be interpreted quantitatively as an argument in favor of the use of eye trackers in PER studies, as researchers have now recognized its potential and benefits.

2. Convenient use of eye tracking in assessment scenarios

Most of the research conducted thus far has concentrated on assessment scenarios. The importance of assessment in PER is reflected in the growing number of research-based distractor-driven multiple-choice items since the development of the FCI in the 1990s [30,102]; the further development of assessment is also considered as an important future research direction in PER [103]. Eye tracking enables access to process-related components in such scenarios without interfering with the process of information extraction and elaboration. Thus, eye tracking can provide the researcher with greater insight into the participants' problem-solving behavior, thinking, and approach to solving physical problems. For example, a participant who answers correctly may still spend a significant amount of time analyzing incorrect choices, thereby suggesting that students have difficulty overcoming incorrect concepts [45]. Considering that concept inventories are continuously used for research purposes and researchers still put efforts into developing new instruments and modifying existing ones, visual attention analysis could reveal further information regarding the functionality of distractors, discrimination, and students' cognitive processes in problem solving at the test and single-item levels, which would overall promote instrument validation. The first steps in this direction of using eye tracking in terms of item and test analyses have already been mentioned and executed [45,48,53,55]. For example, Klein *et al.* confirmed item objectives by clustering eye-movement transitions in the context of kinematics graphs. Ibrahim and Ding stated that eye movements can reflect task demands on a procedural level well beyond classical measures in the context of synthesis problems [48]. The large number of studies in assessment scenarios can also be explained by the fact that these studies are rather suitable for eye-tracking data collection and comparatively easy to set up. The items can be presented as a whole on one screen, no scrolling is necessary, and no collaboration with other learners is required. Since eye trackers are designed to track the eye movements of a single participant sitting in front of a screen, they can be used to represent such scenarios very well. Hence, the good research situation in this scenario suggests that eye tracking will likely be increasingly used in assessment scenarios in the future.

3. Potential of eye tracking in learning scenarios and laboratory work

In contrast, the scenarios investigating knowledge construction by instructional designs or laboratory work were barely focused on. Here, the main focus was on learning physics using technological tools such as animations [47], simulations [42,43], visualization tools [1,59], or text-image combinations [40,54,60]. There is a broad base of eye-tracking studies in similar scenarios outside PER, summarized in several other reviews and not included here (e.g., Ref. [6]). In general, eye tracking offers the opportunity to contribute to an evaluation of how a particular learning material or method relates to higher or lower levels of learning. Further, specific added value for PER is evident, for example, in the research-based use of visual cues in conceptual tasks [1], physics-type work with measurement data [47], or the use of the predict-observe-explain method in demonstration experiments [57]. Eye tracking can be used to better understand how learners interact with simulations [43], how they use instructions [54], or how they read display elements in a simulation [42]. Eye-tracking data can help interpret the effectiveness or ineffectiveness of training, for example, by

revealing why students fail [43]. In addition, eye-tracking studies can be used to derive important practical implications for the design of textbooks and materials, such as which cues are displayed [1,54] or which visual stimuli are more comprehensible [40]. In perspective, eye tracking can be used as a diagnostic tool for adaptive learning systems (e.g., Ref. [104]) or serve as a learning method involved in targeted training of eye movements [105]. Only one study was identified with regard to laboratory work [42]. Process-based analysis of experimentation can reveal facets that are hidden from product-based analysis and can provide much insight into difficulties in experimentation, thus indicating the specific value of eye tracking in PER. Eye tracking can contribute to the clarification of physics education questions, for example, by studying the visual complexity of experimental setups [106], collaborative work and joint attention on relevant tasks [107], how this can be positively influenced, and which phases of experimentation cause difficulties. The lack of studies on laboratory work is probably due to the difficulty of setting up the eye-tracking environment for such tasks [42].

4. Focus on (multiple) representations with a broad coverage of physical topics

With regard to the studies' physical topics, a clear focus on learning of mechanics concepts became apparent—that is, kinematics, statics, forces, energy, and work. Mechanics is an essential basis for understanding the entire domain of the pursuing physics curriculum as it provides conceptual and mathematical foundations for all areas of physics [108]. However, the basis of this understanding is set in school and, thus, more studies using appropriate samples are needed (see Sec. VIII B). In addition to the aforementioned potential for eye tracking in general, perspectives for various areas of modern physics might be particularly promising, particularly those using one ore more central representations—for example, quantum mechanics [109–111]. With respect to the educational topics, according to Ref. [30], eye-tracking research in PER focuses on examining the handling and choice of external representations (graphs, diagrams, motion maps, interference patterns, electrical circuits, vector fields, etc.). This emphasizes the scientific consensus that a gaze-data analysis "is very suited to study differences in attentional processes evoked by different types of multimedia and multirepresentational learning materials" [112] (p. 95). Since external representations are of great importance in physics education, eye tracking allows an analysis of the "behaviors that are difficult to articulate" [113] (p. 200) when dealing with representations and learning materials. Since eye movements reflect more than just consciously focused operations, gaze-data analysis reveals more complete information regarding the underlying mental processes [113] and, thus, can make an important contribution to the evaluation of material designs for teachers. Furthermore, for multiple representations, there is sizable meta-analytic evidence in favor of a strong impact on learning (Cohen's $d = 0.75$) [114]. Based on these results, eye tracking, when it is used to inform teaching practice (beyond research purposes), can act with considerable educational "leverage"—that is, on instructional variables with established practical significance.

B. Methodological implementation of eye tracking in PER (RQ2)

1. High methodological standard of eye-tracking studies in PER

Going beyond the dissemination of the method, the second research question focused on the publications' specific methodological characteristics. In a meta-analysis on educational innovations in PER, Ruiz-Primo *et al.* identified the lack of attention given to the psychometric properties of the instruments used to measure learning outcomes as a major methodological threat to the validity of the studies [115]. This was not observed in the papers included in this study. With regard to the visual stimuli, it was found that many studies used pre-existing test materials to study attention, such as items from concept tests (e.g., TUG-K [49,55], FCI [45,56], R-FCI [46,50], CATs [37]) or items that had already been used in a similar manner in other studies (e.g., sets of problem pairs [38,63,64]). This reflects the long tradition and concurrent specificity in PER of developing and applying concept tests to analyze misconceptions and learning difficulties (see also Ref. [102]) and results in a high degree of standardization in empirical investigations in PER. Most studies quantitatively analyzed the eye movements on the visual stimuli by defining look zones, so-called AOIs. Only two studies used qualitative analysis approaches. Quantitative research methodology, in particular, satisfies the modern approach for improving education by using components of experimental scientific research practices based on objective data, disseminating results, and utilizing modern technology [116]. The predominance of this approach in the context of eye tracking shows the contemporary added value of the method in educational research and particularly in PER. Globally defined AOIs allowed the researchers to examine attention to large sections of the stimuli as well as gaze switches between them—for example, between question and options in multiple-choice tests. This was often used to examine stimuli characteristics and differences between student groups or to find correlations between performances, as discussed in the next section. On the other hand, locally defined AOIs enabled statements regarding the processing of the stimuli themselves, for example, to gain insights into relevant and irrelevant areas [58]. The results at the local level could be strongly linked to physics education implications—for example, the identification of misconceptions [44,53] or the targeted use of cues [1,59].

2. The challenge of small sample sizes

Considering the participants in eye-tracking studies, it was found that the studies in PER investigated larger samples than, for example, in mathematics education research ($M = 28.56 \pm 21.70$ participants [8]). Large samples imply a great technological and organizational effort, but they are highly desirable to aggregate statistically robust results, thereby enabling the highest possible statistical generalizability. A few studies highlighted sample size as an issue requiring improvements. To achieve larger samples, multiple eye trackers can be used in parallel to speed up data collection [40]. Indeed, Klein *et al.* as well as Susac *et al.* reported using four and three eye trackers in parallel, respectively [53,66]. However, despite the considerable evolution of eye trackers over the years, they are still not available in large quantities to a large number of researchers due to the high cost. Susac *et al.* addressed this issue and reported using inexpensive eye trackers with sufficient accuracy for the purpose of the study [66]. Another approach involves recruiting a large sample and performing eye tracking with only a subsample. Susac *et al.* showed that the test situation (eye tracking vs paper and pencil) did not influence students' test scores [63].

3. Prevalence of undergraduate students

With regard to the age group, the review revealed a dominance of introductory university students due to their availability, whereas approximately one-third of the studies were conducted with school students. Age is an important factor influencing eye movements [3], which is why attention must be paid to the fit of the learning material to the age of the target group. In this context, Strohmaier *et al.* expressed concerns regarding the transferability and generalizability of the results from students to pupils [8]. Considering the potential of eye tracking to serve school teachers in evaluating instructional materials, there is a need to focus more on this target group in future studies, in addition to the desire for larger samples.

4. Complete documentation of technological features is often lacking

As this review focuses on eye-tracking methodology, we also addressed the technological implementation of eye tracking. Creating a comfortable working environment for the subjects is important so that they can work with the study materials without being adversely affected. A balance must be achieved between the movement restrictions due to head or chin rests and the quality of the data. Note that when deciding on an eye-tracking device, price also plays a role when aiming for high precision and high temporal resolution in head-free conditions. Approximately half of the studies reported head-free conditions; in this case, a specification of measurement accuracy, for example, by indicating the amount of captured eye positions, would be desirable to assess the accuracy of the data. It must be noted that possible exclusion criteria as well as eye-tracking devices, sampling rate, accuracy, and movement restrictions were not adequately reported in all studies. At this point, the importance of full documentation and reporting as stressed by Strohmaier *et al.* must be emphasized again [8]. As the authors state, this includes "a precise description of the apparatus including sampling rate and average accuracy; the existence or nonexistence of movement restrictions and information regarding the setup; the size of the stimuli; the distance between the stimuli and the participant; the monitors refresh rate; the calibration procedure and calibration accuracy threshold; the event detection algorithm and event detection thresholds; the position and size of any AOIs; the correlation between all used measures; and the amount of and reasons for data loss" [8] (p. 165).

5. The importance of additional data sources in interpreting gaze data

With regard to additional data, approximately two-thirds of the studies collected, for example, oral or written explanations from the subjects in order to triangulate them with the gaze data. This is a development that was already demanded by Lai *et al.*, as they called for establishing a link "between the micro-measurements (i.e., eye-tracking measurements) and the macro-measurements (i.e., performance or behavioral measurements)" [6] (p. 99) as a goal for future studies. Such a methodological triangulation enables approaching cognitive processing from different angles and, thus, helps to interpret eye-movement research in meaningful ways [105,117] as well as to improve confidence in results [118]. In multimedia learning, Hyönä calls for complementing eye-tracking data by off-line measures that index the outcome of learning in order to yield new insights into the multimedia processes [119]. Following eye-tracking research from other educational fields, methodological triangulation must particularly be used if the research question aims "to answer why people look where they look" [117] (p. 121) which applies, for example, if students' processing of representations is explored (e.g., Refs. [52,64]).

C. Findings, interpretation, and limitations of eye tracking in PER (RQ3)

Working through the identified studies, we inductively created four categories that structured the report on the findings. For a better orientation, we refer to Fig. 5, in which these categories are presented again with their characteristics. The following three sections (VIII C 1–VIII C 3) refer to the upper left square—that is, the performance-based analysis of eye-tracking data. Thereafter, the remaining results are summarized.

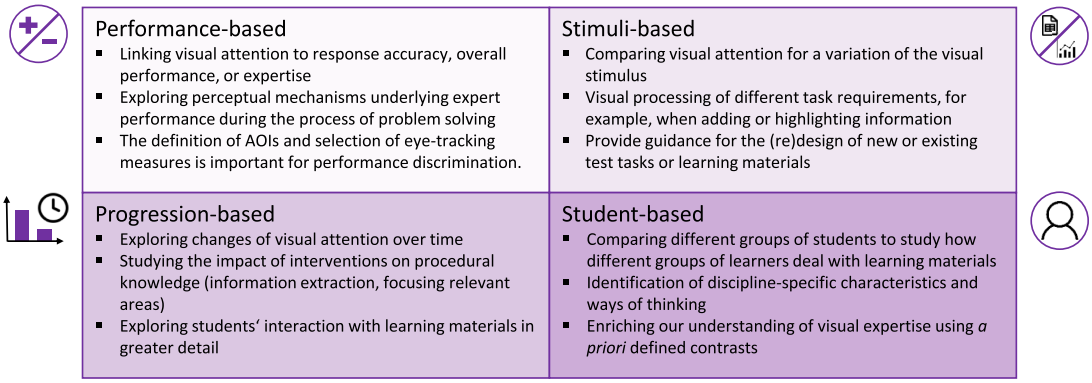


FIG. 5. Overview of the most frequent independent variables for which the eye-tracking metrics have been evaluated and their characteristics.

1. The connection between accurate responses and time-aggregated eye-movement measures becomes apparent when the visual stimulus is partitioned meaningfully

Our analysis revealed a clear focus of PER eye-tracking studies on a performance-based comparison of gaze data between correct and incorrect answers and between experts and novices. Previous reviews in educational research found a lack of evidence for the relationship between eye-movement measures and student (learning) performance [6]. However, our findings suggest an anticipation in the field of PER in recent years for eye tracking to be centrally used in assessment scenarios; accordingly, research on competency differences is emphasized, which is rather similar to other educational settings, for example, medical education [120,121]. Researchers see the added value of using eye-tracking methodology for this purpose in gaining "significant insights into some of the perceptual mechanisms underlying expert performance" [5] (p. 524). However, a closer examination of the study results reveals that the choice of eye-movement measurements and the definition of AOIs is crucial in this line of research [119]. A consistent result of the studies reviewed here was the lack of relationship between response accuracy and total viewing time or number of fixations during an entire task. To elucidate performance differences using eye-tracking metrics, a finer analysis of attentional distribution is required, which could be achieved, for example, by finer segmentation of the stimulus or the use of progression-based measures. Thus, in order to draw valid inferences from eye-tracking data, a sensitive, theory-driven experimental design and operationalization of the dependent variables—that are, eye-tracking measures and AOIs, is required. Further, when viewing times or fixation counts were compared for relevant and irrelevant areas, a correlation with performance was consistently found in all the studies. Returning to the previous research question, this segmentation of stimuli into smaller sections was based either on surface features (global AOIs) or on educational considerations (e.g., specific areas in a diagram; local AOIs), which provided insights into representation-specific misconceptions and processing strategies (local AOIs).

Further, by creating a stronger contrast by comparing high-performing and low-performing students (experts and novices), the above-mentioned results become even clearer. Here, there are consistent results across contexts that reveal that high-performing students focus their attention more quickly on relevant parts of the stimuli, spend more time on relevant areas, and have longer average fixation durations during problem solving than low-performing students. This finding is well in line with the results reported by Gegenfurtner *et al.*, thereby confirming the information reduction hypothesis, which proposes that "expertise optimizes the amount of processed information by neglecting task-irrelevant information and actively focusing on task-relevant information" [5] (p. 539f).

At this point, the sensitivity of the eye-tracking method became especially clear as differences in the evaluation and interpretation of the gaze data (e.g., AOI definition) produced seemingly contradictory results. Similar effects were reported by Gegenfurtner *et al.* as well as Strohmeier *et al.* as they found optimized information processing to be associated, on the one hand, with faster information extraction (and, thus, less time and fixations on important areas) and, on the other hand, with relatively more time on relevant than on irrelevant areas [5,8]. Thus, this emphasized the need for a sensitive, theory-driven experimental design as well as a well-considered, critical evaluation once again.

2. Transition measures have been most informative in learning scenarios

Some of the studies considered here used other measures in addition to the number of fixations and dwell times, which is generally strongly advocated in educational

research because these measures allow a more detailed picture of cognitive-visual behavior [119]. For example, gaze transitions have been analyzed with respect to performance. Here, no clear correlation emerged for assessment scenarios, but for knowledge construction processes. For the latter, the reported results fit the current body of research—that is, that a higher number of transitions between different elements in multimedia learning environments is associated with better learning performance [122–124]. This is also supported by the learning theory, since according to the cognitive theory of multimedia learning by R. E. Mayer [125] transitions among elements reflect mental integration processes [7]. On the other hand, in assessment scenarios, erratic behavior between questions and options or between different options may indicate uncertainty, although integration mechanisms between different elements of a task, such as stem and graph, might be necessary. More systematic studies are required in this regard to understand the role of gaze transitions in assessment scenarios. There is a limited number of studies in PER that go beyond these metrics and investigated mean fixation duration and saccade length in the context of performance.

3. Time-based measures provide information regarding response confidence

In addition to response accuracy, certain studies also used students' confidence as a split criterion for their analyses. In educational research, confidence judgments are well recognized as being an important part of knowledge assessment [126] since they include the subjects' metacognitive abilities [127]. As our analysis has revealed, there is consensus that confident answers were correlated with shorter viewing times. Thus, the combination of eye tracking, response accuracy, and response confidence can be a fruitful method to test knowledge more thoroughly [126] and to elucidate the connection between metacognitive abilities and content knowledge.

4. The comparison of visual attention across different stimuli informs material development

More than half of the studies investigated gaze behavior between different stimuli, for example, by adding a form of representation, contrasting two different forms of representation or task, or teaching different strategies. On the one hand, this line of research succeeds in identifying specific properties of the stimuli that would remain hidden without eye tracking—for example, the visual processing of different diagram concepts. On the other hand, it also allows tracing back instructional effects to the visual processing of the stimuli. This supports the statement by Van Gog and Scheiter that "for research on multimedia multi-representational learning materials eye tracking can provide unique information concerning what medium or representations are visually attended to, in what order, and for how long" [112] (p. 59). As a result, the analysis of eye movements enables a detailed understanding of the material and the triggered cognitive processes, indicates misconceptions, and can provide guidance for the (re)design of new or existing test tasks or learning materials. However, analyzing visual attention patterns of correct problem solvers in certain FCI items revealed that students' visual strategies are strongly representation dependent [56]. Thus, viewing patterns associated with correct responses cannot be generalized for questions with different representations. In fact, gaze behavior for graphs is strongly dependent on the context in which it is presented.

5. The development of attention over time enables conclusions to be drawn regarding learning effects

The progression-based analysis of eye movements sheds light on the impact of teaching interventions on changes in students' visual attention. As demonstrated in the studies, this information can be used to explore the result of learning—that is, strengthening expertise—on a process level in addition to test scores. This is particularly useful when instructions aim at representational competencies that require information extraction from visual stimuli. Here, changes of how learners interact with the stimuli can be explored. This might also be helpful when interventions fail. In this context, visual information can provide information on whether the problem-solving behavior was influenced (possibly for the worse) by an instruction.

Apart from comparing visual attention between two or more time points, the continuous progression of visual attention over time when students engage with learning material was also analyzed. In addition to a global static analysis (which might not be able to capture the learning process in minute detail [119]), a fine-grained analysis of eye-movement measures over time can reveal the point at which students fail.

6. Comparing visual attention among different student groups

Studies that compare gaze data among different groups of students aim to identify discipline-specific characteristics and ways of thinking, which can, in turn, inform material development. The advantage of examining research questions that establish a contrast based on external criteria that are fixed *a priori* (such as expertise, spatial abilities, etc.) is to obtain conclusions that go beyond correlative relationships.

For example, spatial abilities are attributed a crucial role in physical problem solving and reasoning [128,129] and eye tracking can reveal the differences in visual behavior between students with high and low spatial ability. In this manner, we obtain information on how different groups of learners deal with learning material in order to subsequently generate intervention measures that are appropriate for the target group.

By comparing experts and novices or physicists and nonphysicists, important insights are gained regarding

the different levels of information extraction, information processing, and problem solving, which, in turn, enrich our understanding of visual expertise and provide directions for improvement to those who need them.

7. Pragmatic justifications for the use of eye tracking predominate in PER eye-tracking studies

Most of the research examined in this paper adopted a pragmatic viewpoint and assumed that there is a link between visual attention and cognitive mechanisms or, alternatively, cited prior work that has found such a link. While this approach is not under criticism, it does impede a theory-driven selection of eye-tracking metrics that goes beyond the distribution of attention as aggregated time or count measures. In their meta-analysis, Alemdag and Cagiltay reveal which cognitive processes in knowledge acquisition can be operationalized by which eye-tracking measures [7]. Now, this very recent work was not available to most researchers, and it is also unclear whether these operationalizations are valid for assessment scenarios. As eye movements reflect and are influenced by cognitive processes, but cognitive processes cannot be directly inferred from eye-tracking data [105], we wish to emphasize the general awareness of considering theoretical frameworks when setting up eye-tracking studies. Following Jarodzka *et al.*, for an appropriate interpretation of eye-tracking data, theoretical approaches and models always need to be the basis for designing experiments as well as for analyzing and interpreting eye-tracking data [105].

8. Addressing the limitations of eye-tracking studies

This synthesis clearly demonstrated the added value that can be expected when using eye-tracking methodology in PER. However, the analysis of eye movements also has clear limitations and restrictions with regard to its application in research and the interpretation of the data, as listed in Sec. VII F. We summarize these limitations and possible ways to handle them in Table VI.

Therefore, for an appropriate and thoughtful use of the method as well as the development of an understanding of what can be derived from eye-movement data, an awareness and understanding of these limitations is crucial [117]. In particular, before conducting one's first eye-tracking study, the limitations must be reflected upon and incorporated into the experimental design and research questions. At this point, however, it must be added that there were only few qualitative studies that evaluate and compare the above-mentioned approaches with regard to coping with particular limitations. Regarding the collection of additional verbal data, emerging studies compare the use of two different methods—that are, concurrent and retrospective think aloud with eye tracking [130]. In an early

TABLE VI. Methodological limitations of eye tracking and how researchers have dealt with them.

Limitation	Actions or measures	Conflicts or challenges
Ambiguity in the interpretation of eye-movement data → collection of additional qualitative data	Concurrent think aloud (verbal) data	Cognitive burden—that is, thinking and speaking (eye movements might be influenced by the cognitive processes regarding verbal articulation)
	Present stimuli twice, once with and without verbal data	Memorization and familiarity effects during the second run (use different subsamples)
	Retrospective think aloud	Requires training and adequate questions of the investigator to describe eye movements
	Combining multiple-choice answers with written explanations	Reduces noise in the performance data but does not inform interpretation of eye movements
Small number of students	Use eye trackers in parallel to speed up data collection	High cost of accurate eye-tracking systems, requires more researchers, challenge of merging the datasets
	Use low-cost eye trackers	Accuracy issues
	Using eye tracking only for a subset of the sample	Incomplete datasets, different test situations
Ecological validity suffers from stimuli restrictions and setting	Keep the setting as natural as possible (head-free tracking)	Accuracy issues
	Pilot studies for optimizing visual stimuli	More time required
No access to visual attention during real-world scenarios (lab work, paper and pencil) with screen-based eye tracking	Using mobile eye-tracking glasses	Tremendous manpower required for data analysis (option for short measurements)

methodological study in PER, Van Gog *et al.* studied the amount of problem-solving process information that could be uncovered using concurrent and retrospective think aloud without gaze data and cued retrospective think aloud with eye tracking [131]. Thus, there is a need for further research in this area on a methodological level, especially for PER-specific questions. The subsequent presentation of stimuli in combination with eye tracking, as conducted by Ibrahim and Ding, represents another alternative in this research direction that must be evaluated in comparison with other methods. Regarding the other limitations, such as the use of eye tracking with only a subset of the sample, there are also no systematic studies in PER.

IX. FUTURE DIRECTIONS

As our work has revealed, eye-tracking technology is capable of revealing learning scenarios that describe the underlying psychological processes of different learning goals in physics education research—that is, investigating assessment, knowledge acquisition, and laboratory work. However, there is an imbalance in the number of studies that have been conducted in these areas and this suggests that more efforts are needed to explore, for example, laboratory work. Experimentation plays a central role in physics education, particularly at the action level, and enables collaboration among learners. Here, eye tracking can help to obtain clues to student difficulties in experimentation through visual attention. The visual perception of (demonstrated) experiments with different setups can also be helpful both for physics in the lecture hall and for teaching physics online. Whether and to what extent collaborative experimentation is successful compared to isolated learning can be investigated by process-based analysis, like eye tracking with glasses. Joint visual attention plays a significant role in this, as Schneider and Pea found that awareness of visual attention can enhance collaborative colleagues' joint visual attention and improve learning gains [132]. Since the effort for eye-tracking studies with glasses is very high and time consuming, methodological steps must be taken to investigate meaningful experimental settings in a controlled manner.

As the research has shown, several cognitive processes (e.g., expert and novice thinking, learning difficulties) can be identified by analyzing visual attention. This information can be used to develop adaptive learning systems that take the learners' level of knowledge into account. Adaptive learning systems equipped with eye-tracking technology can provide dynamic learning aids for all students to enable better learning. For example, a system can respond adaptively when the viewer looks at certain areas in a diagram that are off-target or related to a misconception. Although this may appear technically possible, the extent to which such adaptive systems actually improve the learning process needs to be tested empirically.

In general, visual-spatial skills play an important role in physical problem solving and reasoning, particularly when (multiple) representations have to be interpreted. This ability has already been considered in a few studies, but it appears useful to investigate the relationship between eye movements and spatial abilities in more detail in the future. There is potential for deeper insights into the facets of cognitive-spatial skills and their link to cognitive-visual processes. Here, targeted training of eye movements (e.g., through modeled gaze paths and eye-movement modeling examples [105]) can help low-spatial ability students to target their gaze to relevant areas or to force the reading of a representation. This dual role of eye tracking—as a research and learning tool—is also evident in the presentation of the students' own view paths for reflecting on their learning. Therefore, eye tracking can make conscious and unconscious processes of learners visible when dealing with digital learning materials—for example, how they perceive simulations or animations. This allows conclusions to be drawn regarding design principles and a criterion-guided selection of learning materials.

Another trend emerging from recent work is the use of eye tracking for task analysis and validation in order to enrich product-based analysis techniques (analysis of test scores) with behavioral measures through visual attention. In particular, the expansion to more complicated tasks compared to single-concept problems (e.g., synthesis problems, multiple representations) make it worthwhile to learn more about this underresearched type of problems.

X. CONCLUSION

As our study results reveal, an increasing number of physics education researchers are using eye tracking to learn more about physics learning by analyzing students' visual attention. Eye tracking was most commonly used in representation-rich assessment scenarios to establish a link between visual attention and expertise. Our analysis found that this is most successful when extreme groups (high vs low achievers) are considered or when the analysis considers the spatial separation of relevant and irrelevant information (local AOIs). In this manner, known misconceptions (e.g., in the interpretation of diagrams) were further validated or unknown ones were observed. Eye tracking has also enriched physics education research by providing additional information on the test tasks themselves, the cognitive processes they evoke, and how different tasks differ on a process level. Moreover, in learning scenarios, the effectiveness of visual cues or different multimedia presentations for physics understanding could be better investigated and interpreted through eye tracking.

Eye tracking has the potential to provide new insights into physics problem solving and learning. Given the growing number of studies in which eye-movement measurement is already being applied, we hope that this review can guide future researchers in this field and assist them in using eye tracking in a reflective manner.

ACKNOWLEDGMENTS

This material is based on work supported by the Joachim Herz Foundation under Project No. 850030 ("eyePhysics"). We further acknowledge support by the Open Access Publication Funds of the Göttingen University. We are very grateful for the thorough comments from Prof. Andreas Müller (Université de Genève) in the preparation of our story and from three anonymous reviewers during the review process.

APPENDIX

Tables VII–X contain the information about the eye-tracking studies under consideration in this systematic review. Specifically, Table VII contains the information about the dissemination of the eye-tracking studies referring to RQ1 (i.e., publication year, scenario, topical area, and physics domain). Note that both journal publications and secondary literature are listed there.

Further, Tables VIII and IX belong to RQ2 and contain information about the methodological implementation of eye tracking (i.e., stimuli used in the studies, areas of interest segmentation, sample, sample size, device, eye-tracking calibration information, accuracy, and additional data).

Finally, Table X addresses the aspects of the third research question (i.e., eye-tracking measures, theoretical background, and data split).

TABLE VII. Dissemination of eye-tracking studies in physics education research: RQ1.

Publication	Scenario[a]	Topical area[b]	Physics domain
Journal articles			
Bi and Reid [37]	Assessment (S)	Conceptual understanding	Statics
Brückner *et al.* [38]	Assessment (S)	Graph understanding	Kinematics
Brückner *et al.* [39]	Assessment (L)	Graph understanding	Kinematics
Chen *et al.* [40]	Knowledge construction	Learning from text w. Rs.	Electricity (electric circuits, electric potential difference)
Chen *et al.* [41]	Assessment (S)	Conceptual understanding	Various (mechanics, optics, electromagnetics, and thermodynamics)
Chien *et al.* [42]	Laboratory work	Experimentation	Thermodynamics (ideal gas law)
Chiou *et al.* [43]	Knowledge construction	Computer-based learning	Optics (refraction of light)
Van Gog *et al.* [44]	Assessment (S)	Representations	Electrical circuits
Han *et al.* [45]	Assessment (L)	Conceptual understanding	Forces
Hejnová and Kekule [46]	Assessment (S)	Representations	Forces
Hoyer and Girwidz [47]	Assessment (L) Knowledge construction	Representations Computer-based learning	Coordinate systems
Ibrahim and Ding [48]	Assessment (S)	Conceptual understanding	Various (Synthesis problems, mechanics)
Kekule [49]	Assessment (S)	Graph understanding	Kinematics
Kekule and Viiri [50]	Assessment (S)	Representations	Mechanics (forces)
Klein *et al.* [51]	Assessment (L)	Representations	Vector fields
Klein *et al.* [52]	Assessment (S)	Graph understanding	Kinematics
Klein *et al.* [53]	Assessment (S)	Graph understanding	Kinematics
Klein *et al.* [54]	Assessment (L) Knowledge construction	Representations Learning from text w. Rs.	Vector fields
Klein *et al.* [55]	Assessment (S)	Graph understanding	Kinematics
Kozhevnikov *et al.* [56]	Assessment (S)	Conceptual understanding, graph understanding	Kinematics, forces
Küchemann *et al.* [57]	Assessment (L)	Representations	Coordinate systems, inertial forces
Madsen *et al.* [58]	Assessment (S)	Conceptual understanding, graph understanding	Energy, kinematics, motion
Madsen *et al.* [59]	Assessment (A) Knowledge construction	Conceptual understanding, graph understanding Computer-based learning	Energy, kinematics, motion
Mason *et al.* [60]	Knowledge construction	Learning from text w. Rs.	Forces (inclined plane)
Rouinfar *et al.* [1]	Assessment (A) Knowledge construction	Conceptual understanding, graph understanding Computer-based learning	Energy, kinematics, motion

(Table continued)

TABLE VII. *(Continued)*

Publication	Scenario[a]	Topical area[b]	Physics domain
Škrabánková *et al.* [61]	Assessment (S)	Graph understanding	Various (kinematics, oscillations and waves, molecular physics)
Smith *et al.* [62]	Knowledge construction	Learning from text w. Rs.	Mechanics
Susac *et al.* [63]	Assessment (S)	Representations	Measurement uncertainty
Susac *et al.* [64]	Assessment (S)	Graph understanding	Kinematics
Susac *et al.* [65]	Assessment (S)	Representations	Energy
Susac *et al.* [66]	Assessment (S)	Representations	Wave optics
Susac *et al.* [67]	Assessment (S)	Representations	Wave optics
Wu and Liu [68]	Assessment (S)	Representations	Kinematics
Conference Proceedings and book chapters			
Agra *et al.* [69]	Assessment (A)	Conceptual understanding, graph understanding	Energy conservation, speed
	Knowledge construction	Computer-based learning	
Holubová *et al.* [70]	Assessment (S)	Conceptual understanding	Forces
Kekule [71]	Assessment (S)	Graph understanding	Kinematics
Klein and Kuhn [72]	Assessment (L)	Representations	Vector fields
Klein *et al.* [73]	Assessment (S)	Representations	Electrostatics
Klein *et al.* [74]	Assessment (S)	Representations	Vector fields
	Knowledge construction	Learning from text w. Rs.	
Küchemann *et al.* [75]	Assessment (S)	Graph understanding	Kinematics
Madsen *et al.* [76]	Assessment (S)	Conceptual understanding	Various topics, mechanics (motion)
Madsen *et al.* [77]	Assessment (S)	Conceptual understanding, graph understanding	Various (mechanics (motion, energy conservation, torque, pendulum), electrostatics (parallel plate capacitors))
Mozaffari *et al.* [78]	Assessment (S)	Representations	Kinematics (trajectory, air resistance, motion)
Mozaffari *et al.* [79]	Assessment (L)	Representations	Vector fields
Mozaffari *et al.* [80]	Assessment (L)	Representations	Vector fields
Mozaffari *et al.* [81]	Assessment (S)	Representations	Kinematics (trajectory, air resistance, motion)
Ohno *et al.* [82]	Assessment (S)	Conceptual understanding	Forces
Rosengrant *et al.* [83]	Assessment (S)	Representations	Electrical circuits
Rosengrant [84]	Assessment (S)	Representations	Electrical circuits
Rosiek *et al.* [85]	Assessment (S)	Conceptual understanding	Forces
Rosiek *et al.* [86]	Assessment (S)	Graph understanding	Kinematics
Rouinfar *et al.* [87]	Assessment (A)	Conceptual understanding, graph understanding	Energy, kinematics, motion
	Knowledge construction	Computer-based learning	
Rouinfar *et al.* [88]	Assessment (A)	Conceptual understanding, graph understanding	Energy, kinematics, motion
	Knowledge construction	Computer-based learning	
Viiri *et al.* [89]	Assessment (S)	Representations	Forces
Viiri *et al.* [90]	Assessment (S)	Representations, conceptual understanding	Forces
Wu *et al.* [91]	Assessment (A)	Conceptual understanding, graph understanding	Energy, kinematics, motion
	Knowledge construction	Computer-based learning	

[a]S = Single point (one time) assessment, L = longitudinal assessment, A = adaptive assessment.
[b]Learning from text w. Rs. = Learning from text with representations.

TABLE VIII. Stimuli used in the studies, areas of interest, and sample: RQ2.

Publication	Stimuli information[a]	AOI segmentation[b]	Sample[c]
Bi and Reid [37]	CATS items	Global (question, diagram, options)	20 U
Brückner *et al.* [38]	Four isomorphic pairs of linear graph tasks	Global (question, graph, options), local (graph, axes, axis labels)	23 U
Brückner *et al.* [39]	Four isomorphic pairs of linear graph tasks	Global (task question, the graph itself, options), local (axes, graph, axis labels)	41 U
Chen *et al.* [40]	Online electricity learning program	Global (base and target domains), local (pump, water wheel, water-level difference)	80 S
Chen *et al.* [41]	Computer-based physics concept questions	Global (whole presentation), local (picture, text)	63 U
Chien *et al.* [42]	Experiment in simulation-based or microcomputer-based laboratory, worksheet	Global (worksheet, experimental zone)	50 S (7[d])
Chiou *et al.* [43]	Physics simulation interface	Global (up panel, question, down panel, light, reflection, and refraction)	51 S (24[d])
Van Gog *et al.* [44]	Troubleshooting tasks (malfunctioning circuits, offered in a simulation program)	Global (whole circuit), local (battery, lamp and switch)	26 M (11[d])
Han *et al.* [45]	Full test: FCI in a web-based interface	Global (narrative text, picture (if any), choices, and other areas)	89 U
Hejnová and Kekule [46]	R-FCI items	No AOIs defined (qualitative analysis)	34 M (11[e])
Hoyer and Girwidz [47]	Eight assignment task (transfer data to diagram); dynamic animation	Global (one AOI with experimental setting and diagram)	119 S (6[e])
Ibrahim and Ding [48]	Four synthesis problems (sequential and simultaneous problems)	Global (problem statement, diagram), local (depicting entities and labels in diagram)	22 U
Kekule [49]	TUG-K items	No AOIs defined (qualitative analysis)	25 M
Kekule and Viiri [50]	R-FCI items	Global (quesion, options)	46 M (11[e])
Klein *et al.* [51]	Eight vector field plots	Global (whole vector field), local (axes)	41 U
Klein *et al.* [52]	Four isomorphic pairs of linear graph tasks	Global (question, graph, options), local (axis and tick labels, AOI pattern)	69 U (2[e])
Klein *et al.* [53]	Full test: TUG-K	Global (questions, options)	115 S
Klein *et al.* [54]	Initial vector field, instruction pages, 8 vector field plots	Global (definition, strategy, vector field, hint)	32 U
Klein *et al.* [55]	Full test: TUG-K	Global (questions, options)	115 S
Kozhevnikov *et al.* [56]	Mechanics diagnostic test items and FCI items	Local (axes, axis-labels, line segments within the graph)	15 S
Küchemann *et al.* [57]	Multiple-choice tasks with trajectories as options	Local (AOI pattern covering the figure of the item stimulus)	21 U
Madsen *et al.* [58]	Ten multiple-choice conceptual physics problems (with diagram)	Global (whole diagram), local (relevant AOIs, salient AOIs, and novicelike AOIs)	24 M
Madsen *et al.* [59]	Four sets of related conceptual introductory physics problems (with diagram)	Local (AOI pattern, expertlike, and novicelike AOI)	63 U (4[d,e])
Mason *et al.* [60]	Information text (with an abstract/concrete illustration)	Global (text, illustration), local (topic text sequence, medial text sequence)	74 S (14[e])
Rouinfar *et al.* [1]	Four sets of related conceptual introductory physics problems (with diagram)	Local (AOI pattern, expertlike, and novicelike AOI)	80 U
Škrabánková *et al.* [61]	Seven problem-solving tasks with graphs	Global (whole simuli, task, options)	52 S (12[e])
Smith *et al.* [62]	Worked-out-example with text and math	Global (textual and mathematical information), local (smaller granularity)	43 U
Susac *et al.* [63]	Eight multiple-choice test items about measurement uncertainties (PMQ)	Global (introduction, data, question, graphical representation, all)	30 U
Susac *et al.* [64]	Four isomorphic pairs of linear graph tasks	Global (question, graph, options), local (axes labels, graph)	90 U
Susac *et al.* [65]	Six multiple-choice questions on energy	Global (question, options, diagram, all)	60 U
Susac *et al.* [66]	Four multiple-choice questions on interference and diffraction patterns	Global (question, options)	35 S
Susac *et al.* [67]	Seven multiple-choice questions on interference and diffraction patterns	Global (question, options, patterns)	52 S

(Table continued)

TABLE VIII. *(Continued)*

Publication	Stimuli information[a]	AOI segmentation[b]	Sample[c]
Wu and Liu [68]	Three argumentation evaluation tasks and one argumentation generation task	Global (question stem, table, figure, equation)	96 U

[a]Concept Assessment Tool for Statics (CAS), Test of Understanding Graphs in Kinematics (TUG-K), Force Concept Inventory (FCI), Representational variant of the FCI (R-FCI), Physics measurement questionnaire (PMQ).
[b](cf. Sec. V).
[c]Undergraduates (U), School (S), Mixed (M).
[d]Excluded based on selection criteria.
[e]Excluded due to technical issues.

TABLE IX. Device, eye-tracking procedure information, and additional data: RQ2.

Publication	Device[a]	Calibration[b]	Accuracy[c]	Additional data[d]
Bi and Reid [37]	Tobii X (60)	HF	R	S, V, other
Brückner *et al.* [38]	Tobii X3 (120)	HF, 60 cm, 9-point, I-VT		
Brückner *et al.* [39]	Tobii X3 (120)	9-point, I-VT	0.4 deg	C
Chen *et al.* [40]	EyeLink (1000)	9-point		
Chen *et al.* [41]	EyeLink (1000)	52 cm, 9-point		
Chien *et al.* [42]	FaceLAB, MobileEye (30)	HF, I-VT		
Chiou *et al.* [43]	Eye tribe (30)	CR, 68 cm		
Van Gog *et al.* [44]	SMI (50)	FHR, 70 cm, I-DT	0.5 deg	V, mental effort
Han *et al.* [45]	SMI RED (60)	HF, 50 cm, 9-point	0.5 deg	
Hejnová and Kekule [46]	Tobii TX (300)	70 cm, 5-point, I-VT	0.5 deg	V
Hoyer and Girwidz [47]	LC eye follower (60)	HF, I-DT	0.4 deg, TA	S
Ibrahim and Ding [48]	EyeLink (1000)			V
Kekule [49]	Tobii TX (300)	70 cm, 5-point, I-VT	0.5 deg, R	V, other
Kekule and Viiri [50]	Tobii TX (300)	5-point, I-VT	0.5 deg, R	V
Klein *et al.* [51]	Tobii X3 (120)	HF, 61 cm, 9-point, I-VT	0.4 deg, R	V
Klein *et al.* [52]	Tobii X3 (120)	HF, 9-point, I-VT	0.4 deg	C
Klein *et al.* [53]	Tobii X3 (120)	HF, 9-point, I-VT	0.4 deg	C
Klein *et al.* [54]	Tobii X3 (120)	I-VT		C, S, mental effort, other
Klein *et al.* [55]	Tobii X3 (120)	62 cm, 5-point, I-VT	0.4 deg	C
Kozhevnikov *et al.* [56]	SMI iView-X RED (n.a.)	CR and FHR, 9-point	R	S
Küchemann *et al.* [57]	Tobii X3 (120)		0.4 deg	C, V
Madsen *et al.* [58]	EyeLink (1000)	FHR, 61 cm, 9-point, I-VT	0.5 deg. TA	V
Madsen *et al.* [59]	EyeLink (1000)	FHR, 61 cm, 9-point, I-VT	0.5 deg	V
Mason *et al.* [60]	Tobii T (120)	I-VT		S, other
Rouinfar *et al.* [1]	EyeLink (1000)	CR and FHR, 61 cm, 9-point	0.5 deg, TA	V
Škrabánková *et al.* [61]	GazePoint 3 (60)	I-DT	R	
Smith *et al.* [62]	Tobii 1750 (n.a.)	HF		
Susac *et al.* [63]	SMI iview HiSpeed (500)	HF, 50 cm, 13-point, O	0.25–0.5 deg	V
Susac *et al.* [64]	SMI iview HiSpeed (500)	HF, 50 cm, 13-point, O	0.25–0.5 deg	Paper pencil data, other
Susac *et al.* [65]	SMI iview HiSpeed (500)	HF, 50 cm, 13-point, O	0.25–0.5 deg	
Susac *et al.* [66]	SMI RED (120)	HF, 50 cm, 5-point, I-DT	R	
Susac *et al.* [67]	SMI RED (120)	HF, 50 cm, 5-point, I-DT	R	Paper pencil data
Wu and Liu [68]	Tobii X3 (120)	FHR, 70 cm, 9-point		V

[a]Frequency in Hz in parentheses.
[b]Information on movement restriction [head-free (HF), chin rest (CR), forehead rest (FHR)], distance between participant and screen, *n*-point calibration (where available), and fixation identification algorithm [velocity-threshold identification (I-VT), dispersion-threshold identification (I-DT), other (O)].
[c]Spatial resolution of device in degree visual angle and information about accuracy [threshold agreement (TA), reported otherwise (R)].
[d]Confidence (C), spatial ability (S), verbal data (V).

TABLE X. Eye-tracking measures and variables used in the studies: RQ3.

Publication	ET measure[a]	ET theory[b]	Data analysis (data split)[c]
Bi and Reid [37]	TFD, FC	EMA	Performance (correct vs incorrect)
Brückner *et al.* [38]	FC, TC	EMA	Performance (correct vs incorrect)
Brückner *et al.* [39]	TFD	EMA	Stimuli (task type), student (physics vs economics), progression (pre vs post)
Chen *et al.* [40]	TFD, other		Stimuli (pictorial vs text, anlogies vs metaphors), performance (high vs low performers)
Chen *et al.* [41]	MFD, SL, other	EMA	Stimuli (picture vs text), Performance (correct vs incorrect), post-hoc progression (duration of n-th fixation)
Chien *et al.* [42]	FC, MFD	EMA	Stimuli (laboratory setting), progression (worksheet sections), performance (high vs low achievers)
Chiou *et al.* [43]	TFD, FC, MFD, other	IA, EMA	Performance (correct vs incorrect), post-hoc progression (different simulation phases)
Van Gog *et al.* [44]	TFD, FC, MFD, TC		Progression (problem phases), performance (high vs low expertise)
Han *et al.* [45]	TFD	EMA	Student = progression (pre vs post), performance (option choice, high vs low achievers)
Hejnová and Kekule [46]	none		Qualitative analysis (performance; high vs low achievers)
Hoyer and Girwidz [47]	FC, SA, SL	EMA	Stimuli (trainings condition)
Ibrahim and Ding [48]	TFD, TC	EMA	Stimuli (sequential vs simultanous tasks), performance (correct vs incorrect)
Kekule [49]	None		Qualitative analysis; heat maps split based on performance (correct vs incorrect, high vs low achievers)
Kekule and Viiri [50]	TFD	EMA	Stimuli (test version), performance (correct vs incorrect, high vs low achievers)
Klein *et al.* [51]	FC, MFD, SA, SL	EMA	Stimuli (strategy), performance (correct vs incorrect, high vs low achievers)
Klein *et al.* [52]	TFD, FC, SA		Stimuli (task type), student (physics vs economics)
Klein *et al.* [53]	TFD		Performance (high vs intermediate vs low confidence, correct vs incorrect, achievement level)
Klein *et al.* [54]	TFD, FC, TC, SA		Stimuli (cues vs no cues), progression (pre vs post), performance (high vs low achievers, correct vs incorrect), post-hoc progression (time intervals)
Klein *et al.* [55]	TC		Stimuli (task type), performance (correct vs incorrect, high vs low confidence)
Kozhevnikov *et al.* [56]	TFD, FC		Student (high vs low spatial ability)
Küchemann *et al.* [57]	TFD	EMA	Progression (predict vs observe phase), performance (high vs low confidence)
Madsen *et al.* [58]	TFD		Performance (correct vs incorrect)
Madsen *et al.* [59]	TFD		Stimuli (cues vs no cues), performance (correct vs incorrect), post-hoc progression (eye-movement similarities between trials)
Mason *et al.* [60]	TFD, FC, TC, other	IA, EMA	Stimuli (reading conditions)
Rouinfar *et al.* [1]	TFD, MFD	Rubber band model of eye movements and attention	Stimuli (cues vs no cues), progression (initial vs transfer), performance (correct vs incorrect)
Škrabánková *et al.* [61]	TFD, FC		Student (expertise groups by physics teacher classification)
Smith *et al.* [62]	TFD, TC		Stimuli (quiz vs homework)
Susac *et al.* [63]	TFD, FC		Stimuli (with vs without graphical representation)
Susac *et al.* [64]	TFD		Stimuli (task type), student (physics vs psychology)
Susac *et al.* [65]	TFD, FC, MFD		Stimuli (with vs without diagram), performance (correct vs incorrect)
Susac *et al.* [66]	TFD, FC, MFD, other		Performance (correct vs incorrect)
Susac *et al.* [67]	TFD, FC, other		Student (experimental vs control group), performance (option choice)

(Table continued)

TABLE X. *(Continued)*

Publication	ET measure[a]	ET theory[b]	Data analysis (data split)[c]
Wu and Liu [68]	TFD, TC		Stimuli (different tasks), student (high vs low prior knowledge)

[a]Total fixation duration (TFD), fixation count (FC), transition count (TC), mean fixation duration (MFD), saccade length (SL), saccadic angle (SA).
[b]Eye-mind assumption (EMA), immediacy assumption (IA).
[c]Independent variables (cf. Sec. VI).

[1] A. Rouinfar, E. Agra, A. M. Larson, N. S. Rebello, and L. Loschky, Linking attentional processes and conceptual problem solving: Visual cues facilitate the automaticity of extracting relevant information from diagrams, Front. Psychol. **5**, 1094 (2014).

[2] K. Wright, Eye tracking gets complex, Physics **14**, 59 (2021).

[3] K. Holmqvist, M. Nyström, R. Andersson, R. Dewhurst, H. Jarodzka, and J. Van de Weijer, *Eye Tracking: A Comprehensive Guide to Methods and Measures* (Oxford University Press, Oxford, 2011).

[4] A. Duchowski, *Eye Tracking Methodology, Theory and Practice* (Springer, London, 2007).

[5] A. Gegenfurtner, E. Lehtinen, and R. Säljö, Expertise differences in the comprehension of visualizations: A meta-analysis of eye-tracking research in professional domains, Educ. Psychol. Rev. **23**, 523 (2011).

[6] M.-L. Lai, M.-J. Tsai, F.-Y. Yang, C.-Y. Hsu, T.-C. Liu, S. W.-Y. Lee, M.-H. Lee, G.-L. Chiou, J.-C. Liang, and C.-C Tsai, A review of using eye-tracking technology in exploring learning from 2000 to 2012, Educ. Res. Rev. **10**, 90 (2013).

[7] E. Alemdag and K. Cagiltay, A systematic review of eye tracking research on multimedia learning, Comput. Educ. **125**, 413 (2018).

[8] A. R. Strohmaier, K. J. MacKay, A. Obersteiner, and K. M. Reiss, Eye-tracking methodology in mathematics education research: A systematic literature review, Educ. Stud. Math. **104**, 147 (2020).

[9] M. J. Page, J. E. McKenzie, P. M. Bossuyt, I. Boutron, T. C. Hoffmann, C. D. Mulrow, L. Shamseer, J. M. Tetzlaff, E. A. Akl, S. E. Brennan *et al.*, The PRISMA 2020 statement: An updated guideline for reporting systematic reviews, Br. Med. J. **372**, n71 (2021).

[10] N. Ariasi and L. Mason, Uncovering the effect of text structure in learning from a science text: An eye-tracking study, Instr. Sci. **39**, 581 (2011).

[11] N. Ariasi, J. Hyönä, J. K. Kaakinen, and L. Mason, An eye-movement analysis of the refutation effect in reading science text, J. Comput. Assist. Learn. **33**, 202 (2017).

[12] G. Trevors, R. Feyzi-Behnagh, R. Azevedo, and F. Bouchet, Self-regulated learning processes vary as a function of epistemic beliefs and contexts: Mixed method evidence from eye tracking and concurrent and retrospective reports, Learn. Instr. **42**, 31 (2016).

[13] Y.-C. Jian, M.-L. Chen, and H.-W. Ko, Context effects in processing of Chinese academic words: An eye-tracking investigation, Read. Res. Q. **48**, 403 (2013).

[14] Y.-C. Jian and H.-W. Ko, Investigating the effects of background knowledge on Chinese word processing during text reading: Evidence from eye movements, J. Res. Read. **37**, S71 (2014).

[15] A. Stott and T. Beelders, The influence of science reading comprehension on South African township learners' learning of science, S. Afr. J. Sci. **115**, 1 (2019).

[16] S. Scrimin and L. Mason, Does mood influence text processing and comprehension? Evidence from an eye-movement study, Br. J. Educ. Psychol. **85**, 387 (2015).

[17] L. Mason, P. Pluchino, and M. C. Tornatora, Effects of picture labeling on science text processing and learning: Evidence from eye movements, Read. Res. Q. **48**, 199 (2013).

[18] P. A. O'Keefe, S. M. Letourneau, B. D. Homer, R. N. Schwartz, and J. L. Plass, Learning from multiple representations: An examination of fixation patterns in a science simulation, Comput. Hum. Behav. **35**, 234 (2014).

[19] M.-J. Tsai, L.-J. Huang, H.-T. Hou, C.-Y. Hsu, and G.-L. Chiou, Visual behavior, flow and achievement in game-based learning, Comput. Educ. **98**, 115 (2016).

[20] M. A. Lindner, A. Eitel, B. Strobel, and O. Köller, Identifying processes underlying the multimedia effect in testing: An eye-movement analysis, Learn. Instr. **47**, 91 (2017).

[21] T. Zu, J. Hutson, L. C. Loschky, and N. S. Rebello, Using eye movements to measure intrinsic, extraneous, and germane load in a multimedia learning environment, J. Educ. Psychol. **112**, 1338 (2020).

[22] C.-J. Wu, C.-Y. Liu, C.-H. Yang, and C.-Y. Wu, Children's reading performances in illustrated science texts: Comprehension, eye movements, and interpretation of arrow symbols, Int. J. Sci. Educ. **43**, 105 (2021).

[23] C.-C. Liu, I.-C. Hsieh, C.-T. Wen, M.-H. Chang, S. H. F. Chiang, M.-J. Tsai, C.-J. Chang, and F.-K. Hwang, The affordances and limitations of collaborative science simulations: The analysis from multiple evidences, Comput. Educ. **160**, 104029 (2021).

[24] P.-S. Huang and H.-C. Chen, Gender differences in eye movements in solving text-and-diagram science problems, Int. J. Sci. Math. Educ. **14**, 327 (2016).

[25] M. Andrzejewska and A. Stolińska, Comparing the difficulty of tasks using eye tracking combined with subjective and behavioural criteria, J. Eye Mov. Res. **9**, 1 (2016).

[26] J. Škrabánková, L. Laš, and P. Bujok, Visualisation and interpretation of student strategies in solving natural science-based tasks using the eye-tracker, J. Eye Mov. Res. **11**, 1 (2018).

[27] D. Rosengrant, D. Hearrington, and J. O'Brien, Investigating student sustained attention in a guided inquiry lecture course using an eye tracker, Educ. Psychol. Rev. **33**, 11 (2021).

[28] R. J. Beichner, Testing student interpretation of kinematics graphs, Am. J. Phys. **62**, 750 (1994).

[29] D. Hestenes, M. Wells, and G. Swackhamer, Force concept inventory, Phys. Teach. **30**, 141 (1992).

[30] J. L. Docktor and J. P. Mestre, Synthesis of discipline-based education research in physics, Phys. Rev. ST Phys. Educ. Res. **10**, 020119 (2014).

[31] C. Andrá, P. Lindström, F. Arzarello, K. Holmqvist, O. Robutti, and C. Sabena, Reading mathematics representations: An eye-tracking study, Int. J. Sci. Math. Educ. **13**, 237 (2015).

[32] K. Holmqvist, C. Andrá, P. Lindström, F. Arzarello, F. Ferrara, O. Robutti, and C. Sabena, A method for quantifying focused versus overview behavior in AOI sequences, Behav. Res. **43**, 987 (2011).

[33] R. Groner, F. Walder, and M. Groner, Looking at faces: Local and global aspects of scanpaths, Adv. Psychology **22**, 523 (1984).

[34] H. H. Kornhuber, Blickmotorik, in *Physiologie des Menschen, Band 13: Sehen, Sinnespsychologie*, edited by O. H. Gauer, K. Kramer, and R. Jung (Urban & Schwarzenberg, München, Berlin, Wien, 1978), pp. 357–426.

[35] R. Brünken, T. Seufert, and S. Zander, Förderung der Kohärenzbildung beim Lernen mit multiplen Repräsentationen, Z. Pädagogische Psychol. **19**, 61 (2005).

[36] M. A. Rau, Conditions for the effectiveness of multiple visual representations in enhancing STEM learning, Educ. Psychol. Rev. **29**, 717 (2017).

[37] Y. Bi and T. Reid, Evaluating students' understanding of statics concepts using eye gaze data, Int. J. Eng. Educ. **33**, 225 (2017), https://sites.ji.sjtu.edu.cn/youyibi/wp-content/uploads/sites/3/2021/03/pdf-3.pdf.

[38] S. Brückner, J. Schneider, O. Zlatkin-Troitschanskaia, and H. Drachsler, Epistemic network analyses of economics students' graph understanding: An eye-tracking study, Sensors **20**, 6908 (2020).

[39] S. Brückner, O. Zlatkin-Troitschanskaia, S. Küchemann, P. Klein, and J. Kuhn, Changes in students' understanding of and visual attention on digitally represented graphs across two domains in higher education: A postreplication study, Front. Psychol. **11**, 2090 (2020).

[40] S.-C. Chen and H.-C. She, Effects of analogical learning approaches and presentation modalities on ninth graders learning outcome and eye movements: A preliminary study, J. Sci. Educ. Technol. **29**, 547 (2020).

[41] S.-C. Chen, H.-C. She, M.-H. Chuang, J.-Y. Wu, J.-L. Tsai, and T.-P. Jung, Eye movements predict students' computer-based assessment performance of physics concepts in different presentation modalities, Comput. Educ. **74**, 61 (2014).

[42] K.-P. Chien, C.-Y. Tsai, H.-L. Chen, W.-H. Chang, and S. Chen, Learning differences and eye fixation patterns in virtual and physical science laboratories, Comput. Educ. **82**, 191 (2015).

[43] G.-L. Chiou, C.-Y. Hsu, and M.-J. Tsai, Exploring how students interact with guidance in a physics simulation: Evidence from eye-movement and log data analyses, Interact. Learn. Environ., 1 (2019).

[44] T. Van Gog, F. Paas, and J. J. G. Van Merriënboer, Uncovering expertise-related differences in troubleshooting performance: Combining eye movement and concurrent verbal protocol data, Appl. Cogn. Psychol. **19**, 205 (2005).

[45] J. Han, L. Chen, Z. Fu, J. Fritchman, and L. Bao, Eye-tracking of visual attention in web-based assessment using the Force Concept Inventory, Eur. J. Phys. **38**, 045702 (2017).

[46] E. Hejnová and M. Kekule, Observing students problem solving strategies in mechanics by eye-tracking method, Scientia Educatione **9**, 102 (2018).

[47] C. Hoyer and R. Girwidz, Animation and interactivity in computer-based physics experiments to support the documentation of measured vector quantities in diagrams: An eye tracking study, Phys. Rev. Phys. Educ. Res. **16**, 020124 (2020).

[48] B. Ibrahim and L. Ding, Sequential and simultaneous synthesis problem solving: A comparison of students' gaze transitions, Phys. Rev. Phys. Educ. Res. **17**, 010126 (2021).

[49] M. Kekule, Students' approaches when dealing with kinematics graphs explored by eye-tracking research method, Eur. J. Sci. Math. Educ. **2**, 108 (2014).

[50] M. Kekule and J. Viiri, Students' approaches to solving R-FCI tasks observed by eye-tracking method, Sci. Educat. **9**, 117 (2018).

[51] P. Klein, J. Viiri, S. Mozaffari, A. Dengel, and J. Kuhn, Instruction-based clinical eye-tracking study on the visual interpretation of divergence: How do students look at vector field plots?, Phys. Rev. Phys. Educ. Res. **14**, 010116 (2018).

[52] P. Klein, S. Küchemann, S. Brückner, O. Zlatkin-Troitschanskaia, and J. Kuhn, Student understanding of graph slope and area under a curve: A replication study comparing first-year physics and economics students, Phys. Rev. Phys. Educ. Res. **15**, 020116 (2019).

[53] P. Klein, A. Lichtenberger, S. Küchemann, S. Becker, M. Kekule, J. Viiri, C. Baadte, A. Vaterlaus, and J. Kuhn, Visual attention while solving the test of understanding graphs in kinematics: An eye-tracking analysis, Eur. J. Phys. **41**, 025701 (2020).

[54] P. Klein, J. Viiri, and J. Kuhn, Visual cues improve students' understanding of divergence and curl: Evidence from eye movements during reading and problem solving, Phys. Rev. Phys. Educ. Res. **15**, 010126 (2019).

[55] P. Klein, S. Becker, S. Küchemann, and J. Kuhn, Test of understanding graphs in kinematics: Item objectives

confirmed by clustering eye movement transitions, Phys. Rev. Phys. Educ. Res. **17**, 013102 (2021).

[56] M. Kozhevnikov, M. A. Motes, and M. Hegarty, Spatial visualization in physics problem solving, Cogn. Sci. **31**, 549 (2007).

[57] S. Küchemann, P. Klein, H. Fouckhardt, S. Gröber, and J. Kuhn, Students' understanding of non-inertial frames of reference, Phys. Rev. Phys. Educ. Res. **16**, 010112 (2020).

[58] A. M. Madsen, A. M. Larson, L. C. Loschky, and N. S. Rebello, Differences in visual attention between those who correctly and incorrectly answer physics problems, Phys. Rev. ST Phys. Educ. Res. **8**, 010122 (2012).

[59] A. Madsen, A. Rouinfar, A. M. Larson, L. C. Loschky, and N. S. Rebello, Can short duration visual cues influence students reasoning and eye movements in physics problems?, Phys. Rev. ST Phys. Educ. Res. **9**, 020104 (2013).

[60] L. Mason, P. Pluchino, M. C. Tornatora, and N. Ariasi, An eye-tracking study of learning from science text with concrete and abstract illustrations, J. Exp. Educ. **81**, 356 (2013).

[61] J. Škrabánková, S. Popelka, and M. Beitlová, Students' ability to work with graphs in physics studies related to three typical student groups, J. Balt. Sci. Educ. **19**, 298 (2020).

[62] A. D. Smith, J. P. Mestre, and B. H. Ross, Eye-gaze patterns as students study worked-out examples in mechanics, Phys. Rev. ST Phys. Educ. Res. **6**, 020118 (2010).

[63] A. Susac, A. Bubic, P. Martinjak, M. Planinic, and M. Palmovic, Graphical representations of data improve student understanding of measurement and uncertainty: An eye-tracking study, Phys. Rev. Phys. Educ. Res. **13**, 020125 (2017).

[64] A. Susac, A. Bubic, E. Kazotti, M. Planinic, and M. Palmovic, Student understanding of graph slope and area under a graph: A comparison of physics and nonphysics students, Phys. Rev. Phys. Educ. Res. **14**, 020109 (2018).

[65] A. Susac, A. Bubic, M. Planinic, M. Movre, and M. Palmovic, Role of diagrams in problem solving: An evaluation of eye-tracking parameters as a measure of visual attention, Phys. Rev. Phys. Educ. Res. **15**, 013101 (2019).

[66] A. Susac, M. Planinic, A. Bubic, L. Ivanjek, and M. Palmovic, Student recognition of interference and diffraction patterns: An eye-tracking study, Phys. Rev. Phys. Educ. Res. **16**, 020133 (2020).

[67] A. Susac, M. Planinic, A. Bubic, K. Jelicic, L. Ivanjek, K. M. Cvenic, and M. Palmovic, Effect of students' investigative experiments on students' recognition of interference and diffraction patterns: An eye-tracking study, Phys. Rev. Phys. Educ. Res. **17**, 010110 (2021).

[68] C.-J. Wu and C.-Y. Liu, Eye-movement study of high- and low-prior-knowledge students' scientific argumentations with multiple representations, Phys. Rev. Phys. Educ. Res. **17**, 010125 (2021).

[69] E. Agra, D. Johnson, J. Hutson, L. Loschky, and N. S. Rebello, Influence of visual cueing and outcome feedback on students' visual attention during problem solving, in *Proceedings of the 2015 Physics Education Research Conference, College Park, MD*, edited by A. D. Churukian, D. L. Jones, and L. Ding (AIP, New York, 2015), pp. 27–30, 10.1119/perc.2015.pr.002.

[70] R. Holubová, A. Krčmářová, L. Richterek, and J. Říha, Analysis of some selected Force Concept Inventory tasks using eye-tracking and correlation with scientific reasoning skills, in *Proceedings of the 3rd International Baltic Symposium on Science and Technology Education (BalticSTE2019), Šiauliai, Lithuania*, edited by V. Lamanauskas (Scientia Socialis Press, Lithuania, 2019), pp. 63–66.

[71] M. Kekule, Learning style preferences and their influence on students' problem solving in kinematics observed by eye-tracking method, AIP Conf. Proc. **1804**, 030002 (2017).

[72] P. Klein and J. Kuhn, Analyzing student understanding of vector field plots with respect to divergence, in *Proceedings of the 2017 Physics Education Research Conference, Cincinnati, OH*, edited by L. Ding, A. Traxler, and Y. Cao (AIP, New York, 2017), pp. 220–223, 10.1119/perc.2017.pr.050.

[73] P. Klein, S. Küchemann, P. Van Kampen, L. Doughty, and J. Kuhn, Picture bias in upper-division physics education, in *Frontiers and Advances in Positive Learning in the Age of Information PLATO*, edited by O. Zlatkin-Troitschanskaia (Springer Nature Switzerland, Cham, 2019), pp. 135–142.

[74] P. Klein, J. Viiri, and J. Kuhn, Visual understanding of divergence and curl: Visual cues promote better learning, in *Proceedings of the 2018 Physics Education Research Conference, Washington, DC*, edited by A. Traxler, Y. Cao, and S. Wolf (AIP, New York, 2018), 10.1119/perc.2018.pr.Klein.

[75] S. Küchemann, P. Klein, S. Becker, N. Kumari, and J. Kuhn, Classification of students' conceptual understanding in STEM education using their visual attention distributions: A comparison of three machine-learning approaches, in *Proceedings of the 12th International Conference on Computer Supported Education (CSEDU '20)* edited by H. C. Lane, S. Zvacek, and J. Uhomoibhi (SciTePress, Setbal, Portugal, 2020), 10.5220/0009359400360046.

[76] A. Madsen, A. M. Larson, L. C Loschky, and N. S. Rebello, Using ScanMatch scores to understand differences in eye movements between correct and incorrect solvers on physics problems, in *Proceedings of the Symposium on Eye Tracking Research and Applications (ETRA '12), Santa Barbara, California* (Association for Computing Machinery, New York, 2012), pp. 193–196.

[77] A. M. Madsen, A. Rouinfar, A. M. Larson, L. C. Loschky, and N. S. Rebello, Do perceptually salient elements in physics problems influence students' eye movements and answers?, AIP Conf. Proc. **1513**, 274 (2013).

[78] S. Mozaffari, P. Klein, J. Viiri, S. Ahmed, J. Kuhn, and A. Dengel, Evaluating similarity measures for gaze patterns in the context of representational competence in physics education, in *Proceedings of the 2018 ACM Symposium on Eye Tracking Research & Applications (ETRA '18), Warsaw, Poland* (Association for Computing Machinery, New York, 2018), pp. 1–5.

[79] S. Mozaffari, M. Al-Naser, P. Klein, S. Küchemann, J. Kuhn, T. Widmann, and A. Dengel, Classification of visual strategies in physics vector field problem solving, in *Proceedings of the 12th International Conference on Agents and Artificial Intelligence (ICAART '20), Valletta,*

Malta, edited by A. Rocha, L. Steels, and J. Van den Herik (SciTePress, Setbal, Portugal, 2020), pp. 257–267, 10.5220/0009173902570267.

[80] S. Mozaffari, P. Klein, M. Al-Naser, S. Küchemann, J. Kuhn, T. Widmann, and A. Dengel, Quantifying gaze-based strategic patterns in physics vector field divergence, in Agents and Artificial Intelligence, *ICAART '20. Lecture Notes in Computer Science*, Vol. 12613, edited by A. P. Rocha, L. Steels, and J. Van den Herik (Springer International Publishing, Basel, 2021), pp. 465–481.

[81] S. Mozaffari, J. Kuhn, P. Klein, A. Dengel, and S. S. Bukhari, Entropy based transition analysis of eye movement on physics representational competence, in *Proceedings of the 2016 ACM International Joint Conference on Pervasive and Ubiquitous Computing (UbiComp '16), Heidelberg, Germany* (Association for Computing Machinery, New York, 2016), pp. 1027–1034, 10.1145/2968219.2968564.

[82] E. Ohno, A. Shimojo, and M. Iwata, Analysis of problem solving processes in physics based on eye-movement data, in *Proceedings of GIREP-EPEC 2015 International Conference, Wroclaw, Poland, (Key Competences in Physics Teaching and Learning)*, edited by T. Greczylo and E. Debowska (Institute of Experimental Physics, University of Wroclaw, Wroclaw, Poland, 2015), pp. 64–70.

[83] D. Rosengrant, C. Thomson, and T. Mzoughi, Comparing experts and novices in solving electrical circuit problems with the help of eye-tracking, AIP Conf. Proc. **1179**, 249 (2009).

[84] D. Rosengrant, Gaze scribing in physics problem solving, in *Proceedings of the Symposium on Eye Tracking Research and Applications (ETRA '10), Austin, Texas* (Association for Computing Machinery, New York, 2010), pp. 45–48.

[85] R. Rosiek, M. Sajka, E. Ohno, A. Shimojo, M. Iwata, and D. Wcisło, An excerpt from an eye-tracking comparative study between Poland and Japan with the use of Force Concept Inventory, AIP Conf. Proc. **1804**, 060003 (2017).

[86] R. Rosiek and M. Sajka, One task - Many strategies of interpreting and reasons of decision making in the context of an eye-tracking research, AIP Conf. Proc. **2152**, 030028 (2019).

[87] A. Rouinfar, E. Agra, J. Murray, A. M. Larson, L. C. Loschky, and N. S. Rebello, Can visual cues and correctness feedback influence students reasoning?, in *Proceedings of the 2013 Physics Education Research Conference, Portland, OR*, edited by P. V. Engelhardt, A. D. Churukian, and D. L. Jones (AIP, New York, 2013), pp. 305–308, 10.1119/perc.2013.pr.064.

[88] A. Rouinfar, E. Agra, J. Murray, A. M Larson, and L. C. Loschky, Influence of visual cueing on students' eye movements while solving physics problems, *Proceedings of the Symposium on Eye Tracking Research and Applications (ETRA '14), Safety Harbor, Florida* (Association for Computing Machinery, New York, 2014), pp. 191–194.

[89] J. Viiri, M. Kekule, J. Isoniemi, and J. Hautala, Eye-tracking the effects of representation on students problem solving approaches, in *Proceedings of the Finnish Mathematics and Science Education Research Association (FMSERA) Annual Symposium, 2017*, edited by M. A. Asikainen and P. E. Hirvonen (FMSERA Journal, Helsinki, Finland, 2017), pp. 88–98, https://journal.fi/fmsera/article/view/60941/27043.

[90] J. Viiri, J. Kilpeläinen, M. Kekule, E. Ohno, and J. Hautala, Eye-movement study of mechanics problem solving using multimodal options, in *Research and Innovation in Physics Education: Two Sides of the Same Coin*, edited by J. Guisasola and K. Zuza (Springer Nature Switzerland, Cham, 2020), pp. 145–154.

[91] X. Wu, J. Hutson, L. C. Loschky, and N. S. Rebello, How do multimedia hints affect students eye movements on conceptual physics problems?, in *Proceedings of the 2015 Physics Education Research Conference, College Park, MD*, edited by A. D. Churukian, D. L. Jones, and L. Ding (AIP, New York, 2015), pp. 383–386, 10.1119/perc.2015.pr.091.

[92] E. Agra, A conceptual model for facilitating learning from physics tasks using visual cueing and outcome feedback: Theory and experiments, Ph.D. thesis, Kansas State University, Manhattan, Kansas, 2015.

[93] X. Wu, Influence of multimedia hints on conceptual physics problem solving and visual attention, Ph.D. thesis, Kansas State University, Manhattan, Kansas, 2016.

[94] A. Rouinfar, Influence of visual cueing and outcome feedback on physics problem solving and visual attention, Ph.D. thesis, Kansas State University, Manhattan, Kansas, 2014.

[95] A. M. Madsen, Studies of visual attention in physics problem solving, Ph.D. thesis, Kansas State University, Manhattan, Kansas, 2013.

[96] D. D. Salvucci and J. H. Goldberg, Identifying fixations and saccades in eye-tracking protocols, in *Proceedings of the Symposium on Eye Tracking Research and Applications (ETRA '00), Palm Beach Gardens, Florida* (Association for Computing Machinery, New York, 2000), pp. 71–78.

[97] M. A. Just and P. Carpenter, A theory of reading: From eye fixations to comprehension, Psychol. Rev. **87**, 329 (1980).

[98] J. M. Henderson, Visual attention and eye movement control during reading and picture viewing, in *Eye Movements and Visual Cognition*, edited by K. Rayner (Springer Series in Neuropsychology, New York, 1992), pp. 260–283, 10.1007/978-1-4612-2852-3_15.

[99] J. M. Henderson, Visual attention and saccadic eye movements, in *Perception and Cognition: Advances in Eye Movement Research. Studies in Visual Information Processing*, edited by G. d'Ydewalle and J. Van Rensbergen (North-Holland/Elsevier Science Publishers, Amsterdam, 1993), pp. 37–50.

[100] J.-B. Michel, Y. K. Shen, A. P. Aiden, A. Veres, M. K. Gray, J. P. Pickett, D. Hoiberg, D. Clancy, P. Norvig, J. Orwant, S. Pinker, M. A. Nowak, and E. L. Aiden, Quantitative analysis of culture using millions of digitized books, Science **331**, 176 (2011).

[101] Google Ngram Viewer, https://books.google.com/ngrams/graph?content=eye+tracking&year_start=2014&year_end=2019&corpus=26&smoothing=3.

[102] PhysPort—Supporting physics teaching with research-based resources, https://www.physport.org.

[103] L. Bao and K. Koenig, Physics education research for 21st century learning, Discip. Interdscip. Sci. Educ. Res. **1**, 2 (2019).

[104] H. Schmidt, B. Wassermann, and G. Zimmermann, An adaptive and adaptable learning platform with realtime eye-tracking support: lessons learned, in *DeLFI 2014—Die 12. e-Learning Fachtagung Informatik*, edited by S. Trahasch, R. Plötzner, G. Schneider, D. Sassiat, C. Gayer, and N. Wöhrle (Gesellschaft für Informatik e.V., Bonn, 2014), pp. 241–252.

[105] H. Jarodzka, H. Gruber, and K. Holmqvist, Eye tracking in educational science: Theoretical frameworks and research agendas, J. Eye Mov. Res. **10**, 1 (2017).

[106] A. Nehring and S. Busch, Chemistry demonstrations and visual attention: Does the setup matter? Evidence from a double-blinded eye-tracking study, J. Chem. Educ. **95**, 1724 (2018).

[107] B. Schneider, K. Sharma, S. Cuendet, G. Zufferey, P. Dillenbourg, and R. Pea, Leveraging mobile eye-trackers to capture joint visual attention in co-located collaborative learning groups, Int. J. Comput. Support. Collab. Learn. **13**, 241 (2018).

[108] P. Klein, A. Müller, and J. Kuhn, Assessment of representational competence in kinematics, Phys. Rev. Phys. Educ. Res. **13**, 010132 (2017).

[109] A. Kohnle, S. E. Ainsworth, and G. Passante, Sketching to support visual learning with interactive tutorials, Phys. Rev. Phys. Educ. Res. **16**, 020139 (2020).

[110] S. B. McKagan, K. K. Perkins, M. Dubson, C. Malley, S. Reid, R. LeMaster, and C. E. Wieman, Developing and researching PhET simulations for teaching quantum mechanics, Am. J. Phys. **76**, 406 (2008).

[111] C. Singh, M. Belloni, and W. Christian, Improving students understanding of quantum mechanics, Phys. Today **59**, No. 8, 43 (2006).

[112] T. Van Gog and K. Scheiter, Eye tracking as a tool to study and enhance multimedia learning, Learn. Instr. **20**, 95 (2010).

[113] K. L. Havanki and J. R. VandenPlas, Eye tracking methodology for chemistry education research, in *Tools of Chemistry Education Research*, edited by D. M. Bunce and R. S. Cole (ACS Publications, Washington DC, 2014), pp. 191–218, 10.1021/bk-2014-1166.ch011.

[114] R. J. Marzano, D. J. Pickering, and J. E. Pollock, *Classroom Instruction that Works: Research-Based Strategies for Increasing Student Achievement* (Association for Supervision and Curriculum Development, Alexandria, VA, 2001).

[115] M. A. Ruiz-Primo, D. Briggs, H. Iverson, R. Talbot, and L. A. Shepard, Impact of undergraduate science course innovations on learning, Science **331**, 1269 (2011).

[116] C. Wieman, Why not try a scientific approach to science education?, Change **39**, 9 (2007).

[117] E. M. Kok and H. Jarodzka, Before your very eyes: The value and limitations of eye tracking in medical education, Med. Educ. **51**, 114 (2017).

[118] S. Cullipher, S. J. Hansen, and J. R. VandenPlas, Eye tracking as a research tool: An introduction, in *In Eye Tracking for the Chemistry Education Researcher*, edited by J. R. VandenPlas, S. J. R. Hansen, and S. Cullipher (American Chemical Society, Washington, DC, 2018), pp. 1–9, 10.1021/bk-2018-1292.ch001.

[119] J. Hyönä, The use of eye movements in the study of multimedia learning, Learn. Instr. **20**, 172 (2010).

[120] M. Wilson, J. McGrath, S. Vine, J. Brewer, D. Defriend, and R. Masters, Psychomotor control in a virtual laparoscopic surgery training environment: Gaze control parameters differentiate novices from experts, Surg. Endosc. **24**, 2458 (2010).

[121] H. Ashraf, M. H. Sodergren, N. Merali, G. Mylonas, H. Singh, and A. Darzi, Eye-tracking technology in medical education: A systematic review, Med. Teach. **40**, 62 (2018).

[122] K. Krejtz, A. T. Duchowski, I. Krejtz, A. Kopacz, and P. Chrząstowski-Wachtel, Gaze transitions when learning with multimedia, J. Eye. Mov. Res. **9**, 1 (2016).

[123] J. Holsanova, N. Holmberg, and K. Holmqvist, Reading information graphics: The role of spatial contiguity and dual attentional guidance, Appl. Cogn. Psychol. **23**, 1215 (2009).

[124] A. Schüler, Investigating gaze behavior during processing of inconsistent text-picture information: Evidence for text-picture integration, Learn. Instr. **49**, 218 (2017).

[125] R. E. Mayer, Cognitive theory of multimedia learning, in *The Cambridge Handbook of Multimedia Learning* (Cambridge University Press, New York, 2005), pp. 31–48.

[126] A. R. Gardner-Medwin, Confidence assessment in the teaching of basic science, ALT-J **3**, 80 (1995).

[127] J. E. Dowd, I. Araujo, and E. Mazur, Making sense of confusion: Relating performance, confidence, and self-efficacy to expressions of confusion in an introductory physics class, Phys. Rev. ST Phys. Educ. Res. **11**, 010107 (2015).

[128] J. Scheid, A. Müller, R. Hettmannsperger, and W. Schnotz, Improving learners representational coherence ability with experiment-related representational activity tasks, Phys. Rev. Phys. Educ. Res. **15**, 010142 (2019).

[129] M. Opfermann, A. Schmeck, and H. E. Fischer, Multiple representations in physics and science education: Why should we use them?, in *Multiple Representations in Physics Education*, edited by D. Treagust, R. Duit, and H. Fischer (Springer, Cham, 2017), pp. 1–22, 10.1007/978-3-319-58914-5_1.

[130] M. Prokop, L. Pilař, and I. Tichá, Impact of think-aloud on eye-tracking: A comparison of concurrent and retrospective think-aloud for research on decision-making in the game environment, Sensors **20**, 2750 (2020).

[131] T. Van Gog, F. Paas, J. J. Van Merriënboer, and P. Witte, Uncovering the problem-solving process: Cued retrospective reporting versus concurrent and retrospective reporting, J. Exp. Psychol. Gen. **11**, 237 (2005).

[132] B. Schneider and R. Pea, Real-time mutual gaze perception enhances collaborative learning and collaboration quality, Intern. J. Comput.-Support. Collab. Learn. **8**, 375 (2013).

6 Visuelle Strategien beim Repräsentationswechsel zwischen Vektorfelddarstellungen

Bisherige Blickdatenanalysen im Umgang Vektorfelddiagrammen untersuchten nahezu ausschließlich visuelle Handlungen bei der qualitative Interpretation der Differentialoperatoren, d. h. der Divergenz und Rotation (Kap. 3.3). Zur vertiefenden Analyse der Repräsentationsform wurde in der nachfolgenden Studie eine weitere zentrale Anforderung im Umgang mit Vektorfelddiagrammen betrachtet, der Repräsentationswechsel zwischen Vektorfelddiagramm und Formeldarstellung. Im Rahmen einer empirischen Laborstudie ordneten $N = 147$ Studierende verschiedener Ingenieurswissenschaften im Rahmen eines Multiple-Choice-Formats eine Formel einem Vektorfelddiagramm zu. Anschließend gaben sie eine Formel zu einem gegebenen Vektorfelddiagramm an und begründeten ihre Antwort. In ersterer Multiple-Choice-Phase wurde dabei das Blickverhalten der Studierenden erfasst. Dieses Design erfüllt durch die Erhebung von Blick- sowie Verbaldaten die Forderung von Gegenfurtner et al. (2017) nach einer Kombination quantitativer und qualitativer Methoden zur Prozessanalyse.
Die beschriebene Studie verfolgte das Ziel, anhand blickdatenbasierter Clusteranalysen Strategien bei der Koordination von Vektorfelddiagramm und Formeldarstellung zu identifizieren und zu charakterisieren. Konkret adressierten die Forschungsfragen die Identifikation visueller Muster der Koordinationsstrategien beim Repräsentationswechsel zwischen Vektorfelddiagramm und Formeldarstellung (1) sowie die Charakterisierung der entstehenden Gruppen anhand verschiedener Performanzindikatoren und verbaler Begründungen (2). Durch die Erweiterung bisheriger Untersuchungen zum Lernen im Umgang mit Vektorfelddiagrammen um ein weiteres Anforderungsszenario bietet diese Studie Anhaltspunkte für repräsentationsbezogene, visuelle Prozesse, Handlungen und Schwierigkeiten im Umgang mit Vektorfelddiagrammen. Daher adressiert sie alle vier Forschungsziele dieser Dissertation, vor allem aber die Forschungsziele FZ2 und FZ3 (Kap. 4.1).
Die Ergebnisse der Clusteranalysen zur visuellen Aufmerksamkeit beim Repräsentationswechsel zwischen Vektorfelddiagramm und Formel wurden in dem folgenden Artikel publiziert:

> Hahn, L., & Klein, P. (2023). Clustering eye-movement data uncovers students' strategies for coordinating equations and diagrams of vector fields. *Educational Studies in Mathematics*. https://doi.org/10.1007/s10649-023-10243-y

Alle verwendeten Materialien und Instrumente sind in Anhang A.2 dargestellt. Die Ergebnisse der nachfolgenden Publikation werden außerdem durch drei Vor- sowie Detailanalysen des Datensatzes ergänzt (siehe Hahn et al., 2021, 2022; Hahn und Klein, 2023a).

Educational Studies in Mathematics
https://doi.org/10.1007/s10649-023-10243-y

Clustering eye-movement data uncovers students' strategies for coordinating equations and diagrams of vector fields

Larissa Hahn[1] · **Pascal Klein**[1]

Accepted: 9 May 2023
© The Author(s) 2023

Abstract
In mathematics education, students are repeatedly confronted with the tasks of interpreting and relating different representations. In particular, switching between equations and diagrams plays a major role in learning mathematical procedures and solving mathematical problems. In this article, we investigate a rather unexplored topic with precisely such requirements—that is, vector fields. In our study, we first presented a series of multiple-choice tasks to 147 introductory university students at the beginning of their studies and recorded students' eye movements while they matched vector field diagrams and equations. Thereafter, students had to solve a similar coordination task on paper and justify their reasoning. Two cluster analyses were performed including (i) transition and fixation data on diagrams and options (Model 1), and (ii) additionally the number of horizontal and vertical saccades on the diagram (Model 2). In both models, two clusters emerge—with Model 1 distinguishing behaviors related to representational mapping and Model 2 additionally differentiating students according to representation-specific demands. Model 2 leads to a better distinction between the groups in terms of different performance indicators (test score, response confidence, and spatial ability) which also transfers to another task format. We conclude that vertical and horizontal saccades reflect executive actions of perception when approaching vector field coordination tasks. Thus, we recommend targeted interventions for mathematics lessons; these lessons must focus on a visual handling of the vector field diagram. Further, we infer that students' difficulties can be attributed to covariational reasoning, thereby indicating the need for further investigations. From a methodological perspective, we reflect on the triangulation of eye-tracking and verbal data in (multiple-choice) assessment scenarios.

Keywords Eye tracking · Multiple representations · Vector field diagrams · Cluster analysis · Coordination strategies

Larissa Hahn
larissa.hahn@uni-goettingen.de

Pascal Klein
pascal.klein@uni-goettingen.de

[1] Physics Education Research, Georg-August-University Göttingen, Faculty of Physics, Friedrich-Hund-Platz 1, 37077 Göttingen, Germany

Published online: 02 August 2023

1 Introduction

Visual representations have been associated with mathematical thinking for a long time. Their use can be traced back to the early development of mathematics in Mesopotamia and classical Greece (Clagett, 1959). Considering the use of diagrams in Euclid's Elements or the idea underlying integration and differentiation through sums and differences, one could reasonably claim that diagrams are as old as mathematics itself. Moreover, visual representations have a high value in mathematics education, which can be explained using cognitive learning theories (Stylianou & Silver, 2004).

In mathematics and science education, learners need to have the ability to work with both symbolic and visual representations (e.g., equations and diagrams) and to relate them to each other in order to solve problems or understand relationships (Acevedo Nistal et al., 2013; Gates, 2018). A basic representation for university mathematics courses in multivariable and vector calculus is vector fields assigning a vector with length and directional properties to every point in a subset of space (Arens et al., 2013). As such, they prepare the track for vector differential operators (e.g., divergence or curl), higher-order differential and integral calculus, and ordinary differential equations (Rasmussen & Blumenfeld, 2007). While complex concepts of multivariable calculus—for example, vector line integrals (Jones, 2020), have already been investigated, vector field representations, which are used in learning such concepts (Arens et al., 2013), have not been studied thus far. In this context, the coordination of different representational forms, the representational change between vector field diagrams and equations, requires representational competencies related to covariational reasoning (Hahn & Klein, 2022b; Jones, 2022) and demanding a flexible handling of both representations.

However, which specific coordination strategies occur between vector field diagrams and equations (in a multiple-choice environment) and what constitutes successful strategies has remained unknown thus far and, therefore, is investigated in this work. To study such mental coordination processes, eye tracking is a promising method, as it enables—for example—the observation of gaze switches between and movements within representations and, thus, visualizes procedures in representational change that are difficult to articulate or that are not necessarily consciously reflected (Havanki & VandenPlas, 2014). Hence, we aim to obtain insight into students' coordination strategies through the use of eye tracking as well as triangulating gaze, performance, and verbal data in order to obtain clues for difficulties encountered by students and the design of targeted support and learning materials.

2 Theoretical background

2.1 Multiple representations of vector fields in mathematics education

As stated above, the coordination between different representations is a central cognitive mechanism in mathematics education (Arcavi, 2003) taking place in different areas of school and university learning—for example, fractions (Rau et al., 2009), trigonometry (Cooper et al., 2018), probabilities (Zahner & Corter, 2010), proof construction (Gallagher & Infante, 2022), and, particularly, (multivariable) functions (e.g., De Bock et al., 2015; Kabael, 2011; Makonye, 2014; Martínez-Planell & Gaisman, 2012; Yerushalmy, 1997). Based on the

central functions of multiple representations to foster learning (Ainsworth, 1999), numerous researchers report a strong connection to and a positive effect of multiple representations on knowledge acquisition and problem-solving skills (e.g., Even, 1998; Gagatsis & Shiakalli, 2004; Rau et al., 2009; Rosengrant et al., 2007; Souto Rubio & Gómez-Chacón, 2011; Trigueros & Martínez-Planell, 2010; Villegas et al., 2009).

However, there is also evidence that the use of multiple representations does not, per se, lead to higher learning success (e.g., Acevedo Nistal et al., 2009; Andrà et al., 2009; Vogel et al., 2019). The positive effect on learning depends on the learner's active engagement with the representations (Booth & Thomas, 1999; Zazkis et al., 2016), aiming to process information from different sources integratively into a coherent knowledge structure—that is, generating coherence formation (Brünken et al., 2005; Seufert, 2003, 2019). Moreover, two subprocesses of coherence formation can be identified—local and global coherence formation (Brünken et al., 2005). On the one hand, local coherence formation refers to each representation, including analyses of the individual parts within a representation and their relationships—for example, algebraic symbols in equations or vector components in vector field diagrams. On the other hand, global coherence formation refers to mapping of the identified elements and analysis of relationships between multiple representations.

With regard to vector algebra, decades of research on school and university mathematics and physics education have revealed that students encounter difficulties with basic vector concepts, such as interpreting graphical properties like vector decomposition (e.g., Appova & Berezovski, 2013; Barniol & Zavala, 2014; Liu & Kottegoda, 2019; Sandoval & Possani, 2016; Van Deventer & Wittmann, 2007; Watson et al., 2003). However, despite its great relevance for university mathematics courses (Arens et al., 2013), mathematics education research on students' understanding and difficulties regarding multivariable calculus and, particularly, vector calculus is still in its early stages. Previous research in this field has primarily focused on the generalization of single variable functions (e.g., Martínez-Planell et al., 2015a; Yerushalmy, 1997), multivariate integrals (e.g., Jones & Dorko, 2015), and partial derivatives (e.g., Martínez-Planell et al., 2015a, 2015b). While the aforementioned studies refer to single vectors and scalar functions of two (or more) variables, vector calculus, and—in particular—vector fields as a multivariable function have barely been studied. A study by Jones (2020), aimed at students' understanding of vector line integrals, revealed initial clues for students' local coherence formation by reporting that students have a diverse understanding of a vector field as, for example, being a collection of literal "arrows." Further, a study by Bollen et al. (2017) revealed that coordination between vector field diagrams and equations presents a major challenge for students, thereby indicating that students have difficulties establishing global coherence formation.

In this article, we use Cartesian coordinate systems, which are commonly used for the introduction of vector fields in mathematics as they are easy to visualize and provide a general framework for most problems in vector calculus (Dray & Manogue, 1999). The following is the symbolic representation of the vector fields depicted in Fig. 1:

$$\vec{F}_1(x,y) = \begin{pmatrix} F_{1,x} \\ F_{1,y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{F}_2(x,y) = \begin{pmatrix} const. \\ f(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ x \end{pmatrix}.$$

For simplicity and w.l.o.g., we have defined that any constant other than 0 equals ± 1 and that all dependencies are proportional (i.e., x, $-x$, y, or $-y$). To coordinate these representations, covariational reasoning—particularly reasoning about the simultaneous covariation

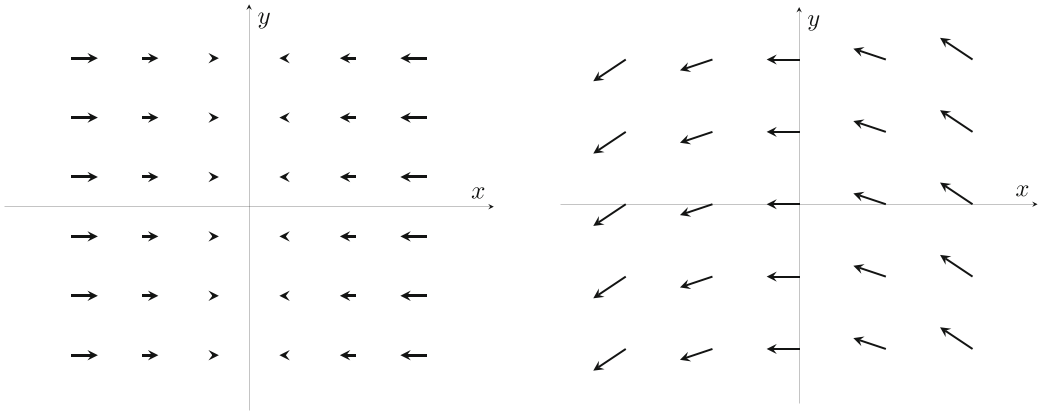


Fig. 1 Examples of vector field diagrams used in the study: $\vec{F}_1(x, y)$ (left) and $\vec{F}_2(x, y)$ (right; further development of Klein et al. (2018, 2019))

of the component lengths (F_x and F_y) and the coordinate directions (x and y)—is demanded (Jones, 2022). A change in the vertical direction is related with a y-dependency of a vector field component, and a change in the horizontal direction with an x-dependency. In mathematics learning, the skill of covariational reasoning is considered fundamental to students' mathematical development (e.g., Carlson et al., 2002; Confrey & Smith, 1995; Johnson, 2012; Thompson & Carlson, 2017).

2.2 Eye tracking to study assessment scenarios and coordination processes

Eye-tracking studies are becoming increasingly popular in mathematics education research. In a systematic review by Strohmaier et al. (2020), three benefits of the use of eye tracking are provided, all of which apply to the assessment situation here: observing solution processes (e.g., Ögren et al., 2017), working with visual representations (e.g., Andrà et al., 2009), and studying cognitive processes that cannot be consciously reported because they are, for example, difficult to articulate (Havanki & VandenPlas, 2014). When changing between vector field diagrams and equations, two processes are inseparably connected and occur alternately: domain-specific mental operations related to local coherence formation (decomposing vectors, comparing rows or columns) and strategies resulting from representational mapping (e.g., comparisons) related to global coherence formation. With regard to the latter, previous studies in mathematics education research draw on fixation measures to quantify visual processing of multiple representations (e.g., Andrà et al., 2015; Malone et al., 2020; Ott et al., 2018). Following the eye-mind hypothesis (Just & Carpenter, 1976), fixation count is associated with attention allocation to a particular representation, which may indicate its relevance to the task or the effort required for information processing (Orquin & Loose, 2013); further, fixation count has been shown to relate to expertise (Epelboim and Suppes, 2001). In addition, pairwise comparisons, which refer to transitions between two representations, are assumed to reflect actual or attempted integration processes (Andrà et al., 2015; Malone et al., 2020; Ott et al., 2018; Ögren et al., 2017). As shown by Schüler (2017), when different

forms of representation—such as text and diagram—need to be integrated, transitions provide information regarding students' coordination behavior. Furthermore, representational change is typically assessed using multiple-choice tasks that require students to choose the correct representation from among multiple (commonly four) alternatives. Here, previous studies reported that expertise influences attention allocation to different response options and, further, that transitions between different options are related to decision-making processes (Glaholt & Reingold, 2011; Lindner et al., 2014; Nugrahaningsih et al., 2013; Tsai et al., 2012)

With regard to representation-specific mental operations, three studies investigated students' eye movements when interpreting vector field diagrams to assess the fields' divergence (Klein et al., 2018, 2019, 2021b). All three studies concluded that frequencies of horizontal and vertical saccades were important indicators of performance, because they reflected visual inspection along relevant field directions. Following this line, when studying the eye movements of novices and experts as they navigated to points in a Cartesian coordinate system, Chumachemko et al. (2014) and Krichevets et al. (2014) found that experts performed saccades in vertical and horizontal directions more frequently than in other directions. Referring to "theoretical" perceptual actions, they conclude that these saccades reflect the cultural manner of approaching the Cartesian coordinate system. Additionally, in a first case study, eye tracking was shown to successfully visualize individual processes related to covariational reasoning with graphs (Thomaneck et al., 2022).

Further, a skill that is closely related to the development of perceptual actions is spatial ability. With regard to vector fields, it was shown that students' spatial abilities—as measured by the Spatial Span Task (SST) by Shah & Miyake (1996)—are related to the number of horizontal and vertical saccades (Klein et al., 2021b).

2.3 The present study

In the present study, the representational coordination between vector field diagrams and equations is assessed in a multiple-choice format. Thus, extending previous work, a close integration of representational mapping, representation-specific coordination, and representational change strategies is required for problem-solving. Further, we use eye-tracking, as well as performance and verbal data, to provide clues for analyses and characterization of coordination strategies.

We address the following research goals: (1) to identify different patterns of students' coordination strategies referring to global and local coherence formation based on their gazing behavior when translating between vector field diagrams and equations, and (2) to characterize the identified student groups and coordination strategies through several achievement measures (i.e., test performance, response confidence, and spatial skills) and students' verbal reasoning. Considering the aforementioned studies on divergence of vector fields, it is reasonable to assume that the frequencies of horizontal and vertical saccades are related to performance when changing between vector field diagrams and equations.

To achieve goal (1), hierarchical cluster analyses based on different eye-tracking measures that are related to global and local coherence formation (see Sections 2.2 and 3.6) are performed. In order to achieve goal (2), students in the emerging clusters are compared in terms of performance indicators and verbal reasoning.

3 Methods

3.1 Sample

The sample was drawn from engineering students at a German university in the context of a large-scale compulsory introductory physics lecture. At the time of the study, which was in the first weeks of the lecture, vector fields and basic concepts had already been introduced. In total, 147 students (114 male, average age 20.5 years), mostly in their first year of study, participated in the study.

3.2 Study procedure

The procedure is summarized in Table 1, which includes an overview of all instruments and data. Subjects were individually guided to the eye-tracking laboratory, where their prior knowledge was assessed through pretest tasks (see Appendix), and a standardized test on spatial abilities was administered. In the subsequent eye-tracking phase, after successful calibration (see Section 3.4), participants were given a short written introduction to the topic of vector fields before they had to solve eight coordination tasks. In each task, they were presented with a vector field diagram and four equations alternatives (see Fig. 2). Once they chose an option, they pressed a key to mark their answer and rank their response confidence on an input page. There were no time constraints during the study, and students were not given feedback, allowed to seek help, or jump back. Later, subjects were presented with two of the tasks again. This time, they had to write down the equation on their own and provide a detailed verbal explanation of their procedure (see Section 3.7). Finally, subjects completed a short questionnaire about their demographics, which was used to characterize the sample (e.g., gender).

Table 1 Study procedure and overview of instruments and data collected. For relevant data and variables, reliability of the instruments is also indicated (Cronbach's alpha α, Spearman-Brown coefficient ρ)

Phase	Description	Time (min)	Instruments and data collected (source and ptly. reliability of the instruments)
1	Pretest: prior knowledge and spatial abilities	5	Prior knowledge test, Spatial Span Task (Shah & Miyake, 1996; Section 3.3)
2	Computer-based multiple-choice test: vector field diagram - equation	10	Eight coordination tasks (Klein et al., 2018, 2019): • Response accuracy ($\alpha = 0.77$) • Response confidence ($\alpha = 0.92$) • Gaze data
3	Paper-based coordination task: open response and verbal data	15	Two coordination tasks (equal to phase 2): • Response accuracy ($\rho = 0.78$) • Verbal data (see Sections 3.7 and 4.3)
4	Demographic data	5	Questionnaire

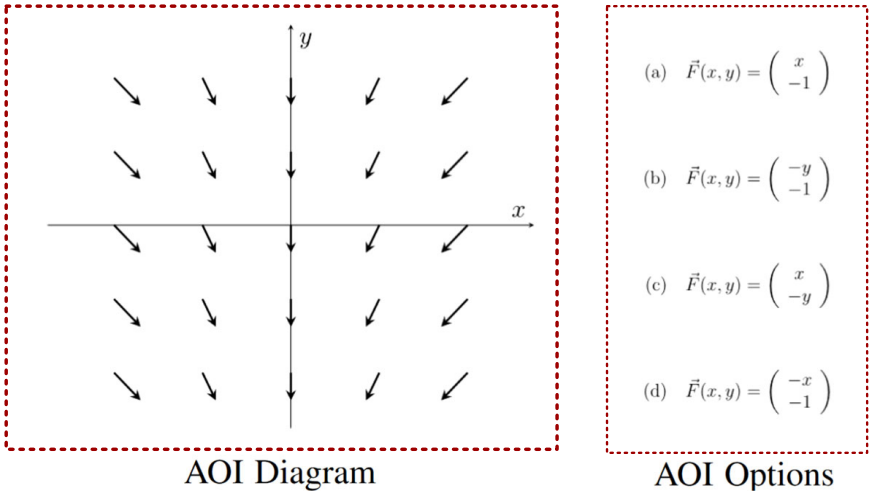


Fig. 2 Example illustration of the areas of interest (AOIs) that have been defined for each of the eight vector fields, with the global look zones being indicated with dotted lines (Diagram, Options)

3.3 Study material

Vector field plots. The vector field diagrams used in the study meet the requirements mentioned in Section 2.1 and have been previously used in prior studies (see Figs. 1, 2 and 3). All eight task pages were designed identically, with the vector field diagrams and options being the same size and placed in the exact same location. The diagrams occupied a space of 550 × 500 pixels, the options area a space of 250 × 500 pixels, and each option a space of about 250 × 125 pixels.

Spatial span task (SST). For the assessment of spatial ability, we used a version of the SST by Shah & Miyake (1996), which measures the ability to simultaneously process and hold spatial information in memory.

3.4 Eye-tracking procedure and areas of interest

All tasks were presented on a 22-inch computer screen (1920 × 1080 pixel resolution, 75 Hz frame rate). Eye movements were recorded using a stationary, head-free eye-tracking system from Tobii (Tobii X3-120), which has an accuracy of less than 0.4° visual angle and a sampling frequency of 120 Hz. A 9-point calibration was used, and calibration was considered acceptable when falling below the accuracy threshold of 0.4°. Further, agreement between the measured gaze positions and the actual points on the screen was checked, and calibration was repeated if the result was not satisfactory. Seven participants were discarded due to insufficient fit. The average distance between participants and the screen was 63 cm, and the distinction between fixations and saccades was made using a velocity threshold of $30°/s$ (Salvucci & Goldberg, 2000). Visualization and analysis of the data were performed using Tobii Studio 3.4.8 software. To evaluate the gaze data, two areas of interest (AOIs) were defined for all items (see Fig. 2).

3.5 Cluster analysis

To group students according to their visual behavior, hierarchical cluster analyses were performed using agglomerative methods based on the squared Euclidean distance (i.e., the sum of the squared differences between each pair of participants; Antonenko et al., 2012; Gore, 2000). By using hierarchical clustering of eye-tracking data, students are partitioned into different groups, not necessarily relevant for mathematics education, in which consistent properties were searched for. The analysis starts from single-element clusters and then sequentially combines clusters, reducing their number at each step until all cases are combined into one cluster, thus generating a hierarchy of nested clusters (Antonenko et al., 2012; Battaglia et al., 2016; Speece, 1994). Which clusters are linked in each step depends on the calculation of dissimilarity between clusters and is determined by the choice of the distance measure within the cluster agglomeration method, called the linkage method (e.g., single, complete, average linkage, or Ward's method; Gore, 2000; Ward Jr, 1963). Hence, hierarchical cluster analysis, commonly visualized by dendrograms (Battaglia et al., 2016; Gore, 2000), offers an exploratory method for researchers who do not have a preconceived idea about the likely number of clusters by identifying homogeneous subtypes of persons from a heterogeneous sample (Antonenko et al., 2012; Everitt & Dunn, 1983; Speece, 1994).

A crucial step of agglomerative hierarchical clustering is choosing the optimal number of clusters—for example, by examining the clusters' silhouette (Rousseeuw, 1987). By considering the average silhouette width for different numbers of cluster k, the average silhouette approach enables choosing k "appropriately", which means "to select that value of k for which the overall average silhouette width is a large as possible" (Rousseeuw, 1987, p. 59).

3.6 Eye-tracking measures and data analysis

Referring to the aforementioned eye-tracking studies on representational mapping, multiple-choice tasks, and vector fields (see Section 2.2), the following eye-movement measures were included for hierarchical cluster analyses.

Fixation count (FC) refers to the total number of fixations on the AOI *Diagram* and the AOI *Options* (see Fig. 3, green circles). For cluster analyses, normalization at the individual level was performed to examine the distribution of attention between the diagram and options, thus the *proportion of fixation counts* (FCP) was included. Further, we refer to the ratio of fixation counts on the diagram (index D) or options (index O) to the total number of fixations (sum of fixation counts on the diagram and options),

$$FCP_D = \frac{FC_D}{FC_D + FC_O},$$
$$FCP_O = \frac{FC_O}{FC_D + FC_O} = 1 - FCP_D\,.$$

Transition count (TC) refers to the total number of times when the gaze switches between the AOI *Diagram* and the AOI *Options*, or between different option choices (see Fig. 3, green connectional lines). For the latter, four additional AOIs within the AOI *Options* (not shown in Fig. 2) were defined. Here, we refer to DO- and OO-transition counts, or more precisely,

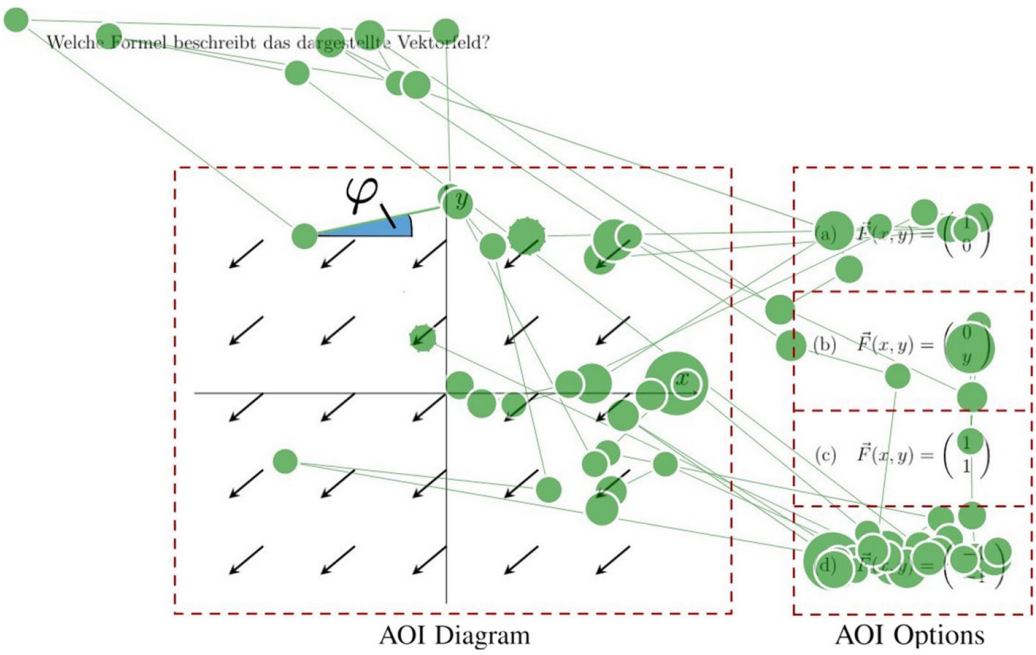


Fig. 3 Eye-gaze path including fixations, saccades, and transitions during representational change between vector field and equations in a multiple-choice format. Green circles indicate fixations with the size of the circles related to the fixations' duration. Connectional lines between two fixations are either transitions (connecting two fixations in different AOIs) or saccades (both fixations are within the same AOI), and the (blue) angle φ between the horizontal and the saccade indicates the absolute saccadic angle

proportion of DO- and OO-transitions,

$$TCP_{DO} = \frac{TC_{DO}}{TC_{DO} + TC_{OO}},$$
$$TCP_{OO} = \frac{TC_{OO}}{TC_{DO} + TC_{OO}} = 1 - TCP_{DO}\,.$$

Absolute saccadic angle describes the angle enclosed between the horizontal and the saccades (see Fig. 3, blue angle φ). For cluster analyses, the number of horizontal and vertical saccades within the diagram (saccade count, SC) was extracted within a tolerance margin of $\pm 5°$ and used as the *proportion of horizontal and vertical saccades*,

$$SCP_H = \frac{SC_H}{SC_{total}},$$
$$SCP_V = \frac{SC_V}{SC_{total}}\,.$$

These eye-tracking metrics were included in two separate models for cluster analysis, namely Model 1 and Model 2. The first model uses metrics that address global coherence formation (TCP and FCP measures), and the second additionally uses the measures related to local coherence formation (SCP measures). In addition to the eye-tracking studies mentioned in Section 2.2 and with respect to Cognitive Theory of Multimedia Learning (Alemdag & Cagiltay, 2018; Mayer, 2005), fixation counts reflect organizational processes in the processing of symbolic and graphic representations. More precisely, they characterize an initially unspecific processing of the respective representation (diagram or options) with the goal of

integrating all representations into a coherent mental model indicated by transitions and, therefore, reflecting global coherence formation. In contrast, horizontal and vertical saccades represent a procedural, representation-specific handling and processing of the vector field diagram (see Section 2.2). More precisely, they indicate that participants observe adjacent vectors in a column or row, thus addressing local coherence formation, as they reflect the way participants skim over the plot. Moreover, the first model is nested within the second model.

All data from subjects were included in the analyses, regardless of their performance. Cluster analyses were performed in R using the packages named *cluster (v. 2.1.0)*, *factoextra*, and *dendextend* after z-transforming all variables (Huberty et al., 2005; Speece, 1994). The emerging clusters were compared with respect to different performance measures (test score, response confidence, and spatial ability) using standard methods of quantitative statistics (e.g., analysis of variance). Additionally, mean fixation durations and saccade lengths were extracted from subjects' data. As there is no theoretical indication that these measures reflect coherence formation, they were solely used to further characterize the emerging clusters.

Saccade length refers to the (angular) distance between two consecutive fixations within the vector field diagram. Following Strohmaier et al. (2020), saccade length can be used as an indicator for local strategies in information retrieval, associated with expertise (Klein et al., 2018).

Mean fixation duration is calculated by dividing the total fixation duration on the diagram by the number of fixations on the diagram, representing the cognitive effort of visual information intake (Mason et al., 2013; Miller, 2015).

3.7 Classification of verbal data

Assuming that certain (particularly conscious) coordination strategies underlie students' justifications, students' arguments were extracted and classified for triangulation with the identified clusters. For category formation, a bottom-up procedure (Kuckartz, 2018; Mayring, 2015) was performed, including only those parts of the reasoning that address the relationship between vector field diagrams and equations. Coding of the arguments referred exclusively to the use of an argument; correctness was not considered. Furthermore, an explanation can be assigned to several categories at the same time, thus containing different arguments.

Analyses revealed that students used two types of arguments— descriptive and structural. Descriptive arguments refer to surface characteristics that derive from the vector field diagram. They are based on descriptions of the graphical properties of the diagram—for example, subjects referred to the direction, position, or magnitude of the arrows. An example (translated from the original German) is:

[...] The x part points in opposite direction. [...]

In contrast, arguments encoded as structural use systematic-formal approaches. In terms of mathematical procedures, they refer to changes in properties, differentiation of value ranges, or concrete calculations. An example of a structural argument is:

[...] With increasing x value the arrows become longer in the opposite direction. [...] F_x increases with increasing x. [...]

Once this distinction was made and classification criteria were available, 25 out of 140 responses were randomly selected and assessed by a second independent rater, resulting in high intercoder reliability ($\kappa = 0.86$).

Although detailed analyses of verbal arguments were not the scope of this work, it was noticeable during coding that many structural justifications were related to the concept of change. Therefore, it was also coded when a structural argument refers to changes of variables (change argument). Frequencies of arguments in relation to the clusters are analyzed in Section 4.3.

4 Results

On the pretest, participants achieved an average score of 0.88 ± 0.19, thus, indicating that the students had sufficient prior knowledge to follow the study content (see Appendix). Further, in the first part of the assessment (computer-based multiple-choice test; eye tracking), subjects achieved average scores of 0.74 ± 0.27, 0.67 ± 0.25, and 0.44 ± 0.21 for performance, response confidence, and spatial ability, respectively. In the second part of the assessment (free-response coordination task; verbal data), subjects achieved a performance score of 0.69 ± 0.37.

4.1 Clustering eye-movement data

For the first model (Model 1 or global model, G), the proportion of transition counts (TCP) and the proportion of fixation counts (FCP) were subjected to hierarchical cluster analysis. Since TCP_{DO} and TCP_{OO} are highly correlated by definition, it is sufficient to include one of the two metrics, and the same applies to the FCP metrics. Ward's method was assessed to provide the strongest cluster structure, yielding an agglomerative coefficient of $AC = 0.99$ and outperforming other methods (average linkage $AC = 0.93$, single linkage $AC = 0.78$, and complete linkage $AC = 0.96$). The clustering results are presented in the dendrogram in Fig. 4 (left part, Model 1). The right row of the dendrogram (140 nodes) representsthe initial

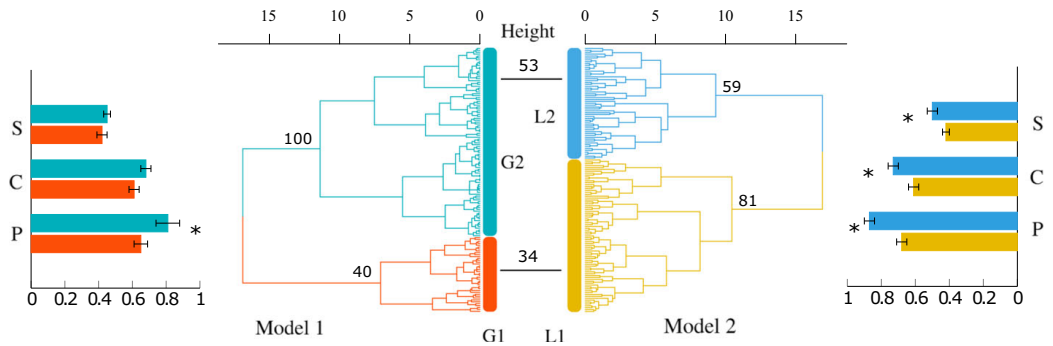


Fig. 4 Results of both cluster models. The dendrogram illustrates the arrangement of the clusters produced by the hierarchical cluster analysis using the Ward method. For Model 1 and Model 2, two clusters emerge, referred to as G1, G2, L1, and L2, respectively. The numbers indicate the participants per group, and the numbers in the center indicate the overlap. The diagrams at the edges (including error bars representing the standard error of the mean) show how the dependent variables differ between the resulting groups in terms of performance (P), response confidence (C), and spatial ability (S). Statistically significant differences between the clusters are marked with *

data (subjects), and the remaining nodes further to the left indicate the clusters to which the subjects belong, with the horizontal lines representing the dissimilarity. The height of each node in the plot is proportional to the value of the inter-group dissimilarity between its two daughters. Inspecting the dendrogram, one can argue for a two- or three-cluster solution, whereas a two-cluster solution was confirmed using the average silhouette approach, see. Figure 5(a). The first cluster (referred to as cluster G1 hereafter) includes 40 subjects, and the second cluster (G2) includes 100 subjects. In a next step, we performed a 2×2 analysis of variance with TCP and FCP metrics as within-subject factors and cluster as the between-subject factor. We found a statistically significant interaction between metric and cluster, $F(1, 138) = 6.65$, $p = 0.011$, $\eta_p^2 = 0.05$, $f = 0.22$, with small effect size (Cohen, 1988).

For the second model (Model 2, L), four measures of eye movements were subjected to hierarchical cluster analysis, namely TCP, FCP, SCP_H, and SCP_V. Again, Ward's method was found to yield the strongest cluster structure ($AC = 0.96$). The dendrogram shown in the right part of Fig. 4 (Model 2) indicates a two-cluster solution; denoted as L1 and L2 with 81 and 59 subjects, respectively, which is also confirmed by the silhouette approach, see Fig. 5(a). Again, a statistically significant interaction between metric and cluster, Huynh-Feldt $F(2.70, 372.98) = 74.80$, $p < 0.001$, $\eta_p^2 = 0.35$, $f = 0.74$, with a medium effect size (Cohen, 1988) was found using a 4×2 mixed ANOVA. Furthermore, Fig. 4 places the solutions of both cluster models side by side, illustrating that 53 of the 59 subjects in cluster L2 are also included in cluster G2; and 34 of the 40 subjects in G1 are also part of L1. Therefore, adding saccadic information essentially splits the second cluster in the first model.

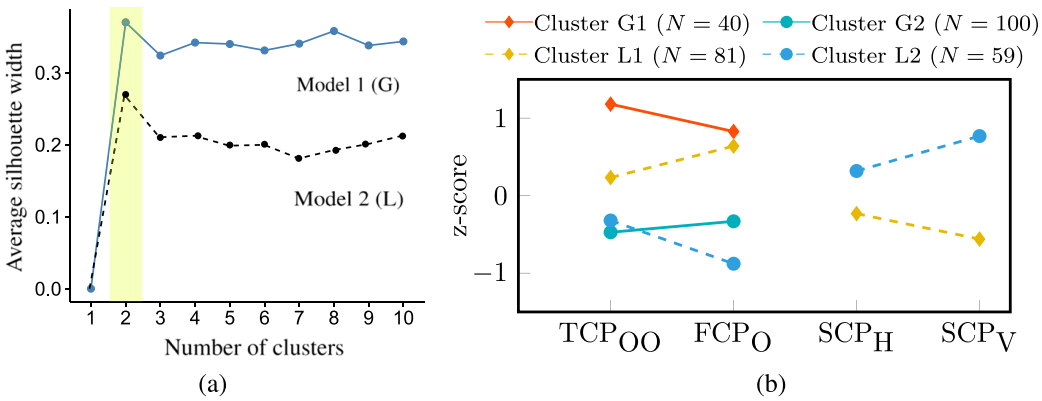


Fig. 5 Results of cluster analyses. (a) Due to the maximum at 2, the silhouette approach suggests a two-cluster solution for both models. (b) Characterization of clusters emerging from cluster analyses based on measures of eye movements during problem solving. TCP_{OO}: Proportion of transition counts between options to the total number of transitions; FCP_O: Proportion of fixation counts on the options to the total number of fixations; $SCP_{H/V}$: Proportion of horizontal/vertical saccades to the total number of saccades, restricted to the diagram region. Note that SCP_H and SCP_V measures were not included in Model 1

4.2 Comparing student clusters

With regard to Fig. 5(b) and Table 2, clusters G1 and L1 are characterized by a high proportion of OO-transitions and O-fixations compared to clusters G2 and L2. Thus, the latter are typified by a higher proportion of DO-transitions and D-fixations. TCP differences are more pronounced in the first model ($d = 2.49$) than in the second ($d = 0.58$), and the reverse is true for FCP differences ($d = 1.36$ and $d = 2.29$; large effect sizes). Regarding the proportion of horizontal and vertical saccades, there are no group differences in the first model. In Model 2, we find that cluster L2 is characterized by significantly higher proportions of horizontal and vertical saccades compared to L1 (medium effect sizes; $d = 0.57$ and $d = 1.67$).

Regarding the side plots in Fig. 4 and the results in Table 2, group differences with respect to the cognitive variables are larger in Model 2 than in Model 1. Subjects in clusters G2 and L2 achieved significantly higher test scores compared to subjects in G1 and L1 with medium effect sizes ($d = 0.63$ and $d = 0.77$, respectively). In the second model, subjects in cluster L2 also indicated significantly higher response confidence ($d = 0.50$) and achieved significantly higher spatial ability scores ($d = 0.39$) compared to subjects in L1. Lastly, saccade length is significantly higher for cluster L1 ($d = 0.86$) compared to L2, whereas no group differences regarding saccade length between the clusters were present in Model 1. Regarding mean fixation duration, no differences were found.

4.3 Verbal arguments

Qualitative content analysis, including subjects' reasoning, resulted in two sets of arguments—that are, descriptive arguments and structural arguments. Overall, 55% of all identified arguments were descriptive in nature, indicating that these were used more often than structural-symbolic explanations. Table 3 compares the number of descriptive arguments (DA) and structural arguments (SA) used by subjects in each cluster for both cluster models. Please note that the four clusters are of different sizes. Thus, the proportion of descriptive arguments (DAP) and structural arguments (SAP) was also compared referring to

$$DAP = \frac{DA}{DA + SA} \quad \text{and} \quad SAP = \frac{SA}{DA + SA}.$$

It can be seen that there are larger differences in terms of arguments between the clusters in Model 1 than in Model 2. In Model 1, subjects in cluster G2 used a higher proportion of mathematical-structural arguments than subjects in G1 (small effect size; $\varphi = 0.23$). Regarding the other comparisons, no significant differences were found; however, it can be observed that subjects in clusters G2 and L2 tend to formulate a higher proportion of structural arguments than subjects in G1 and L1, while the latter use a higher proportion of descriptive arguments. Regarding performance in the paper-based coordination task, subjects in clusters G2 and L2 achieve significantly higher scores than subjects in G1 and L1 with medium effect sizes ($d = 0.57$ and $d = 0.72$ respectively; see Table 3). In addition, the use of change arguments as a subcategory of structural arguments was coded. Again, Table 3 compares the number ("Change") as well as the proportion ("ChangeP") of those arguments used by subjects in each cluster for both cluster models, with the proportion of change arguments defined as

$$ChangeP = \frac{Change}{DA + SA}.$$

Table 2 Four clusters based on metrics related to global and local coherence formation (mean, standard deviation, p-values of t-tests for independent samples, effect size d)

Variable	Model 1 ($AC = 0.99$)				Model 2 ($AC = 0.96$)			
	Cluster G1 ($N = 40$)	Cluster G2 ($N = 100$)	p	d	Cluster L1 ($N = 81$)	Cluster L2 ($N = 59$)	p	d
TCP(Option-Option)	0.22 ± 0.04	0.13 ± 0.04	< 0.001	2.49	0.17 ± 0.06	0.13 ± 0.06	0.001	0.58
TCP(Diagram-Options)**	0.78 ± 0.04	0.88 ± 0.04	(< 0.001)	(2.49)	0.83 ± 0.06	0.87 ± 0.06	(0.001)	(0.58)
FCP(Options)	0.50 ± 0.07	0.39 ± 0.08	< 0.001	1.36	0.48 ± 0.06	0.34 ± 0.06	< 0.001	2.29
FCP(Diagram)**	0.50 ± 0.07	0.61 ± 0.08	(< 0.001)	(1.36)	0.52 ± 0.06	0.66 ± 0.06	(< 0.001)	(2.29)
SCP(Horizontal)	0.15 ± 0.04	0.15 ± 0.04	n.s.	...	0.14 ± 0.04	0.17 ± 0.04	0.001	0.57
SCP(Vertical)	0.09 ± 0.04	0.10 ± 0.03	n.s.	...	0.08 ± 0.02	0.12 ± 0.03	< 0.001*	1.67
Performance	0.65 ± 0.28	0.81 ± 0.24	0.001	0.63	0.68 ± 0.27	0.87 ± 0.22	< 0.001*	0.77
Response confidence	0.61 ± 0.22	0.68 ± 0.27	n.s.*	...	0.61 ± 0.25	0.73 ± 0.25	0.004	0.50
Spatial ability	0.42 ± 0.20	0.46 ± 0.21	n.s.	...	0.42 ± 0.19	0.50 ± 0.23	0.024	0.39
Saccade length (deg.)	4.76 ± 0.94	4.77 ± 1.01	n.s.	...	5.09 ± 0.95	4.31 ± 0.86	< 0.001	0.86
Mean fixation duration (ms)	0.24 ± 0.06	0.23 ± 0.06	n.s.	...	0.23 ± 0.06	0.24 ± 0.06	n.s.	...

* Welch t-test due to a lack of homogeneity of variance
** Please note that TCP(Option-Option) and TCP(Diagram-Options) as well as FCP(Options) and FCP(Diagram) are complementary by definition
n.s. means "(statistically) not significant" indicating p-values > 0.05

It was found that 50% of all subjects used a change argument at least in one of the tasks. Regarding the clusters, in Table 3, one can see that subjects in cluster G2 refer to changes significantly more often than subjects in G1, with small effect size ($d = 0.19$). When comparing those who referred to changes and those who did not, a Welsh t-test for independent samples revealed that the former achieved significantly higher scores in the paper-based coordination task, $t(119.54) = 5.63$, $p < 0.001$, $d = 0.95$. With a score of 0.86 ± 0.25, the performance of these subjects is higher than the sample mean, whereas the score of those who did not use a change argument is much lower (0.55 ± 0.39). Further, statistical analysis showed that subjects who invoked a change argument during the open-response phase were not more or less likely to perform saccades in the vertical or horizontal direction during computer-based assessment.

In order to gain a deeper insight into the use of change arguments and draw conclusions about specific strategies, the explanations were individually examined. The following examples express that subjects' understanding and reasoning were far from precise despite referencing the concept of covariation:

> *[...] The more negative the x values, the more negative are also the y values [...]*
> *[...] There is no change in y direction. [...] In x direction the arrows go opposite to the x value. [...]*
> *[...] x is always -1 and y corresponds to the change of the x coordinate, because changes can only be detected at the 0-pass. [...]*

In two of the three examples given, subjects interchanged coordinates and components; an error many other subjects also made (see Section 5.3).

Table 3 Number and proportion of arguments used by subjects in the groups for both cluster models the first three rows. Report the total numbers of arguments and the statistical results of group comparisons using χ^2-tests ($df = 140$, effect size (ES) φ, DA: Number of descriptive arguments, SA: Number of mathematical arguments, Change: arguments that refer to changes or covariation of variables or properties). The following three rows show the proportions of arguments (P) to all arguments by subjects from a cluster. The performance in the paper-based coordination task is shown in the last row. The p-values refer to (Welch) t-tests for independent samples, effect size (ES) d

	Model 1				Model 2			
Argument	G1	G2	p	ES	L1	L2	p	ES
DA	32	88	n.s.	...	67	53	n.s.	...
SA	22	78	0.007	0.23	54	46	n.s.	...
Change	14	56	0.025	0.19	36	34	n.s.	...
DAP	0.59	0.53	...	...	0.55	0.54	...	...
SAP	0.41	0.47	...	...	0.45	0.46	...	...
ChangeP	0.26	0.34	...	...	0.30	0.34	...	...
Performance	0.56	0.77	0.004*	0.57	0.61	0.85	< 0.001*	0.72

* Welch t-test due to a lack of homogeneity of variance
n.s. means "(statistically) not significant" indicating p-values > 0.05

5 Discussion

5.1 Eye-movement data reveal problem-solving strategies regarding multiple-choice questions

Cluster analysis using fixation and transition measures (Model 1) revealed two groups that differed in terms of the solution process and, thus, show different representational-mapping procedures within the multiple-choice format. The larger group of subjects (G2, $N = 100$) devoted a higher proportion of attention to the diagram than to the options and performed a smaller percentage of gaze switches between options than between the diagram and options. This group outperformed the smaller group ($N = 40$) with medium effect size. These findings regarding the distribution of attention between the diagram and options are similar to results by Andrà et al. (2009) and Chumachemko et al. (2014), who found that for multiple-choice items referring to representational change, experts were searching for clues to the answer in the input representation, instead of searching among the alternatives as novices did. Thus, expertise differences regarding attention allocation on the diagram and options can be confirmed using Model 1. Further, the browsing and seeking behavior between the options was found to be an indicator of the test format related problem-solving behavior of weaker students (Andrà et al., 2009; Hejnová & Kekule, 2018; Nugrahaningsih et al., 2013; Tsai et al., 2012).

Moreover, these results suggest that, similar to findings reported by Andrà et al. (2009), there are two successful strategies for representational mapping in a multiple-choice format in the context of vector fields: either starting from the diagram with examining the covariation of components and coordinates in order to identify the correct equation, and then back-checking the solution with excursions to the alternatives; or using a trial-and-error approach by verifying the alternatives in the diagram. The latter is equally conceivable and will achieve the desired goal, but might be less effective and probably more likely to be found among weaker students (also found, e.g., by Barnes, 2004; Puspitasari et al., 2018; Van Gog et al., 2005). As a main result of this model, the relevance of the diagram's processing to form global coherence was shown. Therefore, a starting point for mathematics lessons could be to practice the necessary procedures on the basis of the diagram (decomposing vectors, comparing rows or columns), formulate them verbally, and then convert them into an equation. Additionally, practicing the reverse procedure increases flexibility, which is particularly important when using the test format used here.

Regarding the proportion of horizontal and vertical saccades of all saccades, both groups do not differ. Further, the proportion of horizontal and vertical saccades is low at about 30% of all saccades, which indicates many oblique eye movements. In other studies, this has been used to justify an unsystematic approach (Chumachemko et al., 2014; Klein et al., 2018, 2019; Krichevets et al., 2014), and indeed, the verbal data support that many subjects reason descriptively (see Section 5.3), which was associated with low expertise in previous studies (Jacobs et al., 2010; Reuker, 2017)—a relation, that could not be confirmed. Furthermore, horizontal saccades appear more often than vertical saccades. The dominance of horizontal saccades can be attributed, on the one hand, to the influence of the writing culture in Western countries (Chumachemko et al., 2014; Dragoi et al., 2001), and, on the other hand, to oculomotor factors of the eye (Foulsham et al., 2008). Thus, a task-based determinant of saccade direction indicates targeted top-down processes of visual attention, which indicates the necessity for learning and training of conscious vertical eye movements—for example, by pointing or visual cues. This assumption is supported by the results in Model 2 (see

Section 5.2). Taken together, despite differences related to global coherence formation, the two groups do not differ in the visual handling of the vector field diagram on a local level.

5.2 Accounting for task-specific characteristics in the cluster model magnifies the group differences

Adding the metrics about saccade direction to Model 1 reallocates the subjects, again resulting in two groups. These groups still differ in the same way with respect to the fixation and transition metrics (Section 5.1), allowing to transfer the aforementioned conclusions to Model 2. In addition, by performing horizontal and vertical saccades more frequently, and thus looking less often in oblique directions, better-performing subjects observe the vector field more systematically in the preferred direction of the coordinates, which means that they compare vectors lying next to or on top of each other more often (Klein et al., 2018, 2019). Furthermore, subjects in the better group make shorter saccades, which is consistent with previous results (Klein et al., 2018). The average saccade length of 4.31° corresponds to a real distance of 4.7 cm on the screen. Thus, the saccade lengths of the better group are closer to the average distance of the vectors (3 cm), which supports the argument of comparing adjacent vectors. These results strongly support the impression of Model 1 that the vector field diagram plays a central role for representational change and, thus, should be the starting point for instructions. Furthermore, the importance of mathematical operations related to covariational reasoning (e.g., comparisons of vectors) could be inferred, again indicating the necessity of these operations being central subject of mathematical instructions in the context of vector fields.

Besides performance differences, the resulting groups in Model 2 also differ regarding response confidence and spatial ability. It is reasonable to assume a relationship between spatial skills and subjects' ability to decompose vectors into components and further operations related to covariational reasoning.

5.3 Verbal data reveal frequent but inaccurate use of covariation concepts

Beyond the inclusion of quantitative data on eye gaze and performance indicators, we analyzed subjects' verbal explanations. In addition to differentiating between descriptive and structural arguments, change arguments, which refer to changes or covariations in variables or components, were identified as a subcategory of structural arguments. It was found that half of all subjects invoked a change argument in their explanations. However, a closer look revealed that using an argument that refers to change does not unambiguously indicate a high level of covariational reasoning (levels of covariational reasoning; see Carlson et al., 2002). Moreover, despite talking about change, many explanations exhibit linguistic and technical inaccuracies and errors that illustrate a frequently incorrect or insufficient use of change arguments. As illustrated above, many subjects confused components and coordinates, a typical error found in previous research (Bollen et al., 2017; Gire & Price, 2012). However, with respect to the general use of change arguments, an explanation about changes in variables or components was found to be closely related to subjects' performance in the coordination task, with a large effect size. This is consistent with previous results of Klein et al. (2018, 2019), although no significant relationship with the proportion of horizontal and vertical saccades was found. Possible reasons are discussed in Section 5.4.

We found tendency of subjects in the higher-performing clusters G2 and L2 to use arguments of a symbolic-mathematical nature more frequently than subjects in the lower-performing clusters G1 and L1—a difference that is also evident when comparing the performance of the clusters in the paper-based coordination task. This relationship between performance and mathematical formalization in communication reflects a property of mathematics described by Freudenthal (1973) as conscious engagement with language as an exact means of expression. Confirmation of this relationship, however, requires further investigation.

5.4 The occurrence of different types of verbal arguments is unlikely to match the results of the gaze-based cluster analysis

Regarding the triangulation of performance and gaze with verbal data, it is important to note that the former were collected using multiple-choice items, whereas justifications were based on a free-response format without answer options. Performance was found to be relatively independent of the task format, yielding similar mean scores for both formats. In contrast, the cognitive solution processes, which are accessible through eye movements, are significantly influenced by the task format, as it was found that cluster differences in the quantitative data did not translate to differences in the verbal data. A possible explanation could be that, despite answering correctly, students may not articulate their coordination strategies, either because the test format does not explicitly ask for these strategies, or because they are unable to do so. This highlights the necessity of explicitly practicing verbalization of problem-solving strategies. From a methodological perspective, these results underline the value of involving and triangulating both gaze and verbal data when analyzing coordination strategies related to representational change, as one data source cannot reveal all facets of the actual underlying coordination strategies (similar results found by Schindler & Lilienthal, 2018)—a point to keep in mind for further investigations. Furthermore, the appearance of change arguments may not be sensitive enough to match correct covariation strategies revealed by gaze data. As the level of covariational reasoning is more important, a more detailed analysis of verbal data, including—for example, the correct use of change arguments or referring to the mental actions of the covariation framework (Carlson et al., 2002), may yield additional insights.

5.5 Limitations and implications, outlook

As mentioned above, we observed difficulties in relating verbal data collected during open-response questions to quantitative (eye-tracking) data based on multiple-choice questions. This demonstrates that when triangulating gaze and verbal data, attention should be paid to a clear prompt asking for strategies and a consistent task format that immediately includes verbal data collection (concurrent think-aloud methods, e.g., Olson et al., 2018) or uses retrospective interviews (retrospective think-aloud methods, e.g., Van den Haak et al., 2009). Moreover, gaze-cued (retrospective) think-aloud methods, in which subjects are shown recordings of task processing with their gaze paths overlaid (e.g., Alhadreti et al., 2017), would explicitly enable a connection between verbal and gaze data. Additionally, instructional consequences related to the focus of interventions and instructions when changing the representation of vector fields can be derived, as these should primarily target the diagram. Furthermore, the comparison of Model 1 and Model 2 underscores the sustained relevance of local coherence formation when changing between representations in the context of vector fields. Moreover, the associated differences in gaze measures (saccade angle and length)

appear to be closely related to the ability of covariational reasoning. Hence, this provides a starting point for further investigations detached from the multiple-choice format. At this point, we would also like to point out the richness of the field for research, including, for example, different coordinate systems (to which the covariation argument is transferable; Moore et al., 2013), differential operators, three-dimensional fields (multivariational reasoning; Jones, 2022), and transfer to physics contexts.

6 Conclusion

In this study, students' coordination strategies when switching from vector field diagrams to equations were investigated by clustering different eye-tracking metrics referring to global and local coherence formation. Separating two models—one addressing global coherence formation only and one addressing global and local coherence formation—yielded two clusters each. The model that includes local coherence formation measures provides a finer resolution of cognitive strategies by discriminating not only in terms of performance but also in terms of response confidence and spatial ability (Fig. 6). This indicates the relevance of the vector field diagram and its representation-specific operations related to covariational reasoning that are visualized through horizontal and vertical saccades.

From a mathematics education perspective, this extends previous findings of learning in the context of vector fields by revealing that frequencies of horizontal and vertical saccades are crucial performance indicators not only for vector field properties but also for the representational change between diagrams and equations. Beyond vector fields concepts—for example, divergence—that are defined by partial derivatives, it can be shown that operations related to covariational reasoning are also central for procedures that do not include the change principle by definition. Covariational reasoning was also found in the verbal data

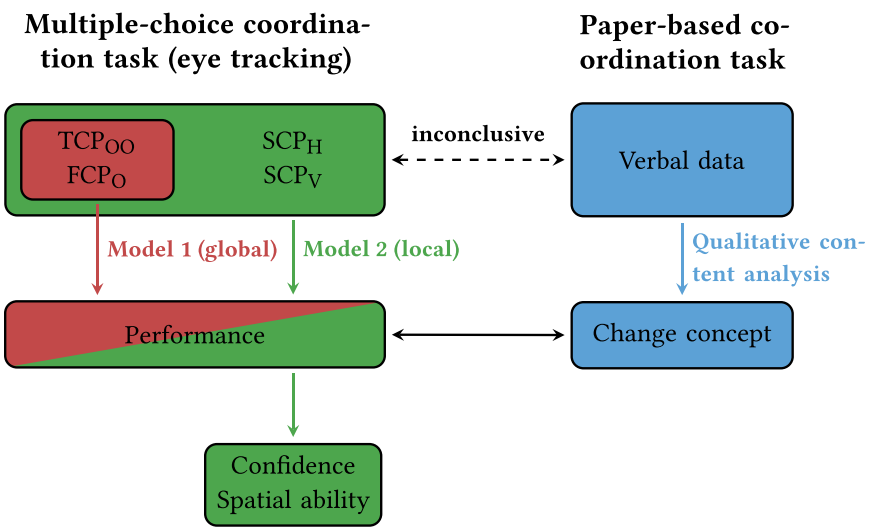


Fig. 6 Overview of the triangulation in this article. On the left, results from cluster analyses are shown (red: Model 1; green: Model 2; TCP_{OO}: Proportion of transition counts between options to the total number of transitions; FCP_{O}: Proportion of fixation counts on the options to the total number of fixations; $SCP_{H/V}$: Proportion of horizontal/vertical saccades to the total number of saccades, restricted to the diagram region). On the right, the inclusion of verbal data is illustrated. Since the relationship between verbal data and eye-tracking measures has not yet been established, there is a need for further research

in our study, even though triangulation between arguments and clusters was difficult for conceptual and methodological reasons (Section 5.4).

As a major contribution to the field of mathematics education research, this study reveals the first results regarding (successful) coordination strategies that learners use when relating vector field diagrams and their equations in a multiple-choice environment and provides insights into students' difficulties, thereby opening the door for specific concept- and task-related support. As such, the diagram was identified to be the key representation for a successful representational change; however, further, a missing or unsystematic handling of the diagram was shown to be associated with low achievement. Therefore, targeted instructions need to address typical student challenges related to the diagram, such as vector decomposition and covariation of components and coordinates. At this point, particularly video recordings superimposed with gaze data could provide instructional support (eye-movement modeling examples, EMME; Halszka et al., 2017) by visualizing gaze data of experts with accurate problem-solving procedures. Additionally, simulations and game-based learning might offer opportunities regarding practicing representational change in the context of vector fields (Klein et al., 2021a; Ponce Campuzano et al., 2019).

It is expected that multiple-choice tasks will be widely used in future eye-tracking studies because (i) assessment is an important component of empirical mathematics education research and (ii) these studies are comparatively easy to set up (Hahn & Klein, 2022a). As typical scenarios from mathematics education can be presented very well in this manner, it is particularly important to be aware of the limitations of eye tracking in multiple-choice tasks.

Moreover, a first attempt to relate covariational reasoning and vector fields was made in this article, particularly by triangulating gaze data with verbal justifications referring to changes. While covariational reasoning is fundamental in different fields of mathematics education, the need for further research in the context of vector fields becomes apparent—for example, analysis of verbal data that refers to different levels of covariational reasoning when switching between representations. Following this line of thinking, targeted instructions geared toward students' problems regarding covariational reasoning—addressing students with low spatial skills in particular, need to be the goal for further research.

Acknowledgements We thank Prof. Jochen Kuhn (LMU München) for providing support for the recording of the eye-tracking data. We thank Prof. Stefan Halverscheid (U Göttingen) for helpful discussions on the topic at an early stage of the work.

Author Contributions L. Hahn: Methodology, data analysis, writing of draft, visualization; P. Klein: Conceptualization, data collection, reviewing & editing, project administration & supervision.

Funding The work is supported by the Lower Saxony Ministry of Science and Culture ("Niedersächsisches Ministerium für Wissenschaft und Kultur"; Open Educational Resources in university education) under Project No. 56000016-24/UGOE ("Entwicklung und Distribution von OER-Materialien für einen anschaulichen Einstieg in mathematische Konzepte physikalisch-technischer Studiengänge"). Further, we acknowledge support by the Open Access Publication Funds of the Göttingen University.

Code availability R code is available upon reasonable request.

Declarations

Originality of the work The authors confirm that the work submitted here is not published or submitted for publication elsewhere.

Ethics and approval and consent to participate We confirm that the data collection from university students was carried out in accordance with informed consent and with the principles outlined in the ethical policy of Educational Studies in Mathematics. The evaluation was approved by the local data protection office.

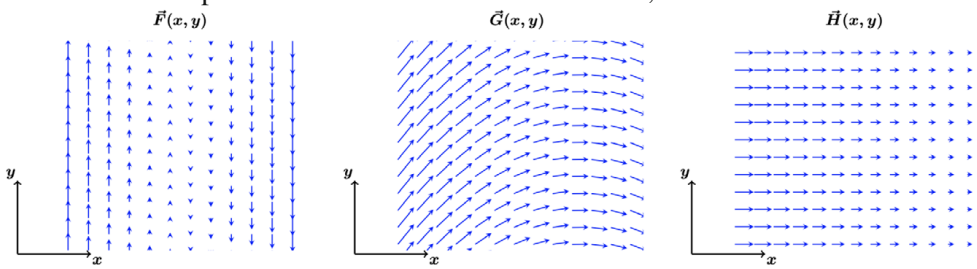
Consent for publication Upon acceptance of the manuscript, we agree to publication, including open access publishing.

Open Access This article is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License, which permits use, sharing, adaptation, distribution and reproduction in any medium or format, as long as you give appropriate credit to the original author(s) and the source, provide a link to the Creative Commons licence, and indicate if changes were made. The images or other third party material in this article are included in the article's Creative Commons licence, unless indicated otherwise in a credit line to the material. If material is not included in the article's Creative Commons licence and your intended use is not permitted by statutory regulation or exceeds the permitted use, you will need to obtain permission directly from the copyright holder. To view a copy of this licence, visit http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/.

Appendix

The following test was used to assess students' prior knowledge of vector fields and vector decomposition.

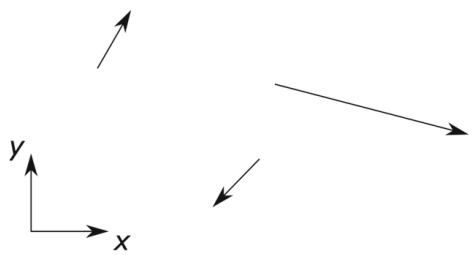
I) Given are the graphs of the two-dimensional vector fields $\vec{F}(\vec{r}))$, $\vec{G}(\vec{r}))$ and $\vec{H}(\vec{r}))$. F_x denotes the component of the field $\vec{F}$ in the x-direction, etc.:



Tick whether the statement is true or false:

		correct	incorrect		Response confidence				
a)	$F_x = 0$ overall	[ ]	[ ]	very confident	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	not confident
b)	$F_y = 0$ overall	[ ]	[ ]		[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	
c)	$G_x = 0$ overall	[ ]	[ ]		[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	
d)	$G_y = 0$ overall	[ ]	[ ]		[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	
e)	$H_x = 0$ overall	[ ]	[ ]		[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	
f)	$H_y = 0$ overall	[ ]	[ ]		[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	

II) Given three vectors in the x-y plane. Sketch the vector component decomposition in x- and in y-direction:



References

Acevedo Nistal, A., Van Dooren, W., Clarebout, G., Elen, J., & Verschaffel, L. (2009). Conceptualising, investigating and stimulating representational flexibility in mathematical problem solving and learning: a critical review. *ZDM - Mathematics Education, 41*(5), 627–636. https://doi.org/10.1007/s11858-009-0189-1

Acevedo Nistal, A., Van Dooren, W., & Verschaffel, L. (2013). Students' reported justifications for their representational choices in linear function problems: An interview study. *Educational Studies, 39*(1), 104–117. https://doi.org/10.1080/03055698.2012.674636

Ainsworth, S. (1999). The functions of multiple representations. *Computers & Education, 33*(2), 131–152. https://doi.org/10.1016/S0360-1315(99)00029-9

Alemdag, E., & Cagiltay, K. (2018). A systematic review of eye tracking research on multimedia learning. *Computers & Education, 125*, 413–428. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2018.06.023

Alhadreti, O., Elbabour, F., & Mayhew, P. (2017). Eye tracking in retrospective think-aloud usability testing: Is there added value? *Journal of Usability Studies*, *12*(3), 95–110. Retrieved from https://ueaeprints.uea.ac.uk/id/eprint/64991/1/Accepted_manuscript.pdf

Andrà, C., Arzarello, F., Ferrara, F., Holmqvist, K., Lindström, P., Robutti, O., & Sabena, C. (2009). How students read mathematical representations: An eye tracking study. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & C. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 49–56). Psychology of Mathematics Education.

Andrà, C., Lindström, P., Arzarello, F., Holmqvist, K., Robutti, O., & Sabena, C. (2015). Reading mathematics representations: An eye-tracking study. *International Journal of Science and Mathematics Education, 13*(2), 237–259. https://doi.org/10.1007/s10763-013-9484-y

Antonenko, P. D., Toy, S., & Niederhauser, D. S. (2012). Using cluster analysis for data mining in educational technology research. *Educational Technology Research and Development, 60*(3), 383–398. https://doi.org/10.1007/s11423-012-9235-8

Appova, A. & Berezovski, T. (2013). Commonly identified students' misconceptions about vectors and vector operations. In S. Brown, G. Karakok, K. H. Roh & M. Oerthman (Eds.), *Proceedings of the 16th annual Conference on Research in undergraduate Mathematics Education* (vol. 2, pp. 8–17). Special Interest Group of the Mathematical Association of America (SIGMAA) on Research in Undergraduate Mathematics Education.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52*(3), 215–241. https://doi.org/10.1023/A:1024312321077

Arens, T., Busam, R., Hettlich, F., Karpfinger, C., & Stachel, H. (2013). *Grundwissen Mathematikstudium - Analysis und Lineare Algebra mit Querverbindungen*. Springer Spektrum.

Barnes, H. (2004). Realistic mathematics education: Eliciting alternative mathematical conceptions of learners. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education, 8*(1), 53–64. https://doi.org/10.1080/10288457.2004.10740560

Barniol, P., & Zavala, G. (2014). Test of understanding of vectors: A reliable multiple-choice vector concept test. *Physical Review Special Topics - Physics Education Research, 10*(1), 010121. https://doi.org/10.1103/PhysRevSTPER.10.010121

Battaglia, O. R., Di Paola, B., & Fazio, C. (2016). A new approach to investigate students' behavior by using cluster analysis as an unsupervised methodology in the field of education. *Applied Mathematics, 7*(15), 1649–1673. https://doi.org/10.4236/am.2016.715142

Bollen, L., van Kampen, P., Baily, C., Kelly, M., & De Cock, M. (2017). Student difficulties regarding symbolic and graphical representations of vector fields. *Physical Review Physics Education Research, 13*(2), 020109. https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.13.020109

Booth, R. D., & Thomas, M. O. (1999). Visualization in mathematics learning: Arithmetic problem-solving and student difficulties. *The Journal of Mathematical Behavior, 18*(2), 169–190. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(99)00027-9

Brünken, R., Seufert, T., & Zander, S. (2005). Förderung der Kohärenzbildung beim Lernen mit multiplen Repräsentationen: Fostering Coherence Formation in Learning with Multiple Representations. *Zeitschrift für Pädagogische Psychologie, 19*(1/2), 61–75. https://doi.org/10.1024/1010-0652.19.12.61

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(5), 352–378. https://doi.org/10.2307/4149958

Chumachemko, D., Shvarts, A., & Budanov, A. (2014). The development of the visual perception of the cartesian coordinate system: An eye tracking study. In C. Nicol, P. Liljedahl, S. Oesterle & D. Allan (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting 2 - 313 of PME 38 and PME-NA 36* (vol. 2, pp. 313–

320). Psychology of Mathematics Education. Retrieved from https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED599779.pdf

Clagett, M. (1959). The application of two-dimensional geometry to kinematics. The science of mechanics in the Middle Ages.

Cohen, J. (1988). *Statistical power analysis for the behavioral sciences*. Lawrence Erlbaum Associates, 2 edition.

Confrey, J., & Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(1), 66–86. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.26.1.0066

Cooper, J. L., Sidney, P. G., & Alibali, M. W. (2018). Who benefits from diagrams and illustrations in math problems? Ability and attitudes matter. *Applied Cognitive Psychology, 32*(1), 24–38. https://doi.org/10.1002/acp.3371

De Bock, D., Van Dooren, W., & Verschaffel, L. (2015). Students' understanding of proportional, inverse proportional, and affine functions: Two studies on the role of external representations. *International Journal of Science and Mathematics Education, 13*(1), 47–69. https://doi.org/10.1007/s10763-013-9475-z

Dragoi, V., Turcu, C. M., & Sur, M. (2001). Stability of cortical responses and the statistics of natural scenes. *Neuron, 32*(6), 1181–1192. https://doi.org/10.1016/S0896-6273(01)00540-2

Dray, T., & Manogue, C. A. (1999). The vector calculus gap: Mathematics $\neq$ physics. *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies, 9*(1), 21–28. https://doi.org/10.1080/10511979908965913

Epelboim, J., & Suppes, P. (2001). A model of eye movements and visual working memory during problem solving in geometry. *Vision research, 41*(12), 1561–1574. https://doi.org/10.1016/S0042-6989(00)00256-X

Even, R. (1998). Factors involved in linking representations of functions. *Journal of Mathematical Behavior, 17*(1), 105–121. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(99)80063-7

Everitt, B. S., & Dunn, G. (1983). *Advanced methods of data exploration and modelling*. Heinemann.

Foulsham, T., Kingstone, A., & Underwood, G. (2008). Turning the world around: Patterns in saccade direction vary with picture orientation. *Vision Research, 48*(17), 1777–1790. https://doi.org/10.1016/j.visres.2008.05.018

Freudenthal, H. (1973). *Mathematik als pädagogische Aufgabe* (vol 2). Klett.

Gagatsis, A., & Shiakalli, M. (2004). Ability to translate from one representation of the concept of function to another and mathematical problem solving. *Educational Psychology, 24*(5), 645–657. https://doi.org/10.1080/0144341042000262953

Gallagher, K., & Infante, N. E. (2022). A case study of undergraduates' proving behaviors and uses of visual representations in identification of key ideas in topology. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 8*(1), 176–210. https://doi.org/10.1007/s40753-021-00149-6

Gates, P. (2018). *The importance of diagrams, graphics and other visual representations in STEM teaching* (pp. 169–196). Springer. https://doi.org/10.1007/978-981-10-5448-8_9

Gire, E. & Price, E. (2012). Graphical representations of vector functions in upper-division E&M. In N. S. Rebello, P. V. Engelhardt & C. Singh (Eds.), *AIP Conference Proceedings* (vol. 1413, pp. 27–30). American Institute of Physics. https://doi.org/10.1063/1.3679985

Glaholt, M. G., & Reingold, E. M. (2011). Eye movement monitoring as a process tracing methodology in decision making research. *Journal of Neuroscience, Psychology, and Economics, 4*(2), 125–146. https://doi.org/10.1037/a0020692

Gore, P. (2000). *Cluster analysis* (pp. 297–321). Academic Press. https://doi.org/10.1016/B978-012691360-6/50012-4

Hahn, L., & Klein, P. (2022a). Eye tracking in physics education research: A systematic literature review. *Physical Review Physics Education Research, 18*(1), 013102. https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.18.013102

Hahn, L., & Klein, P. (2022b). Wechsel zwischen Diagramm und Formel im Kontext von Vektorfeldern: Einfluss der Aufgabenkomplexität auf Indikatoren visueller Aufmerksamkeit. In P. Klein, N. Graulich, J. Kuhn, & M. Schindler (Eds.), *Eye-Tracking in der Mathematik- und Naturwissenschaftsdidaktik - Forschung und Praxis* (pp. 193–208). Springer Nature.

Halszka, J., Gruber, H., & Holmqvist, K. (2017). Eye tracking in educational science: Theoretical frameworks and research agendas. *Journal of Eye Movement Research, 10*(1), 1–18. https://doi.org/10.16910/jemr.10.1.3

Havanki, K. L. & VandenPlas, J. R. (2014). Eye tracking methodology for Chemistry Education Research. In D. M. Bunce & R. S. Cole (Eds.), *Tools of Chemistry Education Research* (pp. 191–218). ACS Publications. https://doi.org/10.1021/bk-2014-1166.ch011

Hejnová, E., & Kekule, M. (2018). Observing students' problem solving strategies in mechanics by eye-tracking method. *Scientia in Educatione, 9*(2), 102–116. https://doi.org/10.14712/18047106.1018

Huberty, C. J., Jordan, E. M., & Brandt, W. C. (2005). Cluster Analysis in Higher Education Research. In J. C. Smart (Ed.), *Higher Education: Handbook of Theory and Research* (vol 20), pp. 437–457. Springer. https://doi.org/10.1007/1-4020-3279-X_8

Jacobs, V. R., Lamb, L. L., & Philipp, R. A. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 169–202. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.41.2.0169

Johnson, H. L. (2012). Reasoning about variation in the intensity of change in covarying quantities involved in rate of change. *The Journal of Mathematical Behavior, 31*(3), 313–330. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2012.01.001

Jones, S. R. (2020). Scalar and vector line integrals: A conceptual analysis and an initial investigation of student understanding. *The Journal of Mathematical Behavior, 59*, 100801. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2020.100801

Jones, S. R. (2022). Multivariation and students' multivariational reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior, 67*, 100991. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2022.100991

Jones, S. R., & Dorko, A. (2015). Students' understandings of multivariate integrals and how they may be generalized from single integral conceptions. *The Journal of Mathematical Behavior, 40*, 154–170. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.09.001

Just, M. A., & Carpenter, P. A. (1976). Eye fixations and cognitive processes. *Cognitive Psychology, 8*(4), 441–480. https://doi.org/10.1016/0010-0285(76)90015-3

Kabael, T. U. (2011). Generalizing single variable functions to two-variable functions, function machine and apos. *Educational Sciences: Theory and Practice*, *11*(1), 484–499. Retrieved from https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ919912.pdf

Klein, P., Burkard, N., Hahn, L., Dahlkemper, M. N., Eberle, K., Jaeger, T., & Herrlich, M. (2021a). Coordinating vector field equations and diagrams with a serious game in introductory physics. *European Journal of Physics, 42*(4), 045801. https://doi.org/10.1088/1361-6404/abef5c

Klein, P., Hahn, L., & Kuhn, J. (2021b). Einfluss visueller Hilfen und räumlicher Fähigkeiten auf die graphische Interpretation von Vektorfelder: Eine Eye-Tracking-Untersuchung. *Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften, 27*, 181–201. https://doi.org/10.1007/s40573-021-00133-2

Klein, P., Viiri, J., & Kuhn, J. (2019). Visual cues improve students' understanding of divergence and curl: Evidence from eye movements during reading and problem solving. *Physical Review Physics Education Research, 15*(1), 010126. https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.15.010126

Klein, P., Viiri, J., Mozaffari, S., Dengel, A., & Kuhn, J. (2018). Instruction-based clinical eye-tracking study on the visual interpretation of divergence: How do students look at vector field plots? *Physical Review Physics Education Research, 14*(1), 010116. https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.14.010116

Krichevets, A. N., Shvarts, A. Y., & Chumachenko, D. V. (2014). Perceptual action of novices and experts in operating visual representations of a mathematical concept. *Psychology. Journal of Higher School of Economics*, *11*(3), 55–78. Retrieved from https://psy-journal.hse.ru/data/2015/02/24/1090737757/Krichevets,%20Shvarts,%20Chumachenko_3_2014_55_78.pdf

Kuckartz, U. (2018). *Qualitative Inhaltsanalyse. Methoden, Praxis, Computerunterstützung*. Grundlagentexte Methoden. Beltz Juventa, 4 edition.

Lindner, M. A., Eitel, A., Thoma, G.-B., Dalehefte, I. M., Ihme, J. M., & Köller, O. (2014). Tracking the decision-making process in multiple-choice assessment: Evidence from eye movements. *Applied Cognitive Psychology, 28*(5), 738–752. https://doi.org/10.1002/acp.3060

Liu, D., & Kottegoda, Y. (2019). Disconnect between undergraduates' understanding of the algebraic and geometric aspects of vectors. *European Journal of Physics, 40*(3), 035702. https://doi.org/10.1088/1361-6404/ab0509

Makonye, J. P. (2014). Teaching functions using a realistic mathematics education approach: A theoretical perspective. *International Journal of Educational Sciences, 7*(3), 653–662. https://doi.org/10.1080/09751122.2014.11890228

Malone, S., Altmeyer, K., Vogel, M., & Brünken, R. (2020). Homogeneous and heterogeneous multiple representations in equation-solving problems: An eye-tracking study. *Journal of Computer Assisted Learning, 36*(6), 781–798. https://doi.org/10.1111/jcal.12426

Martínez-Planell, R. & Gaisman, T. M. (2012). Activity sets to help student graphing of functions of two variables. In S. J. Cho (Ed.), *Proceedings of the 12th International Congress of Mathematics Education - Intellectual and Attitudinal Challenges* (pp. 2759–2769). Springer.

Martínez-Planell, R., Trigueros Gaisman, M., & McGee, D. (2015a). On students' understanding of the differential calculus of functions of two variables. *The Journal of Mathematical Behavior, 38*, 57–86. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.03.003

Martínez-Planell, R., Trigueros Gaisman, M., & McGee, D. (2015b). Student understanding of directional derivatives of functions of two variables. In T. G. Bartell, K. N. Bieda, R. T. Putnam, K. Bradfield & H. Dominguez (Eds.), *Proceedings of the 37th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 355–362). Michigan State University. Retrieved from https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED584220.pdf

Mason, L., Tornatora, M. C., & Pluchino, P. (2013). Do fourth graders integrate text and picture in processing and learning from an illustrated science text? Evidence from eye-movement patterns. *Computers & Education, 60*(1), 95–109. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2012.07.011

Mayer, R. E. (2005). *Cognitive Theory of Multimedia Learning* (pp. 31–48). Cambridge University Press.

Mayring, P. (2015). *Qualitative Inhaltsanalyse. Grundlagen und Techniken*. Beltz Juventa, 12 edition.

Miller, B. W. (2015). Using reading times and eye-movements to measure cognitive engagement. *Educational Psychologist, 50*(1), 31–42. https://doi.org/10.1080/00461520.2015.1004068

Moore, K. C., Paoletti, T., & Musgrave, S. (2013). Covariational reasoning and invariance among coordinate systems. *The Journal of Mathematical Behavior, 32*(3), 461–473. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.05.002

Nugrahaningsih, N., Porta, M., & Ricotti, S. (2013). Gaze behavior analysis in multiple-answer tests: An eye tracking investigation. In *Proceedings of the 12th International Conference on Information Technology Based Higher Education and Training (ITHET)* (pp. 1–6). IEEE.

Ögren, M., Nyström, M., & Halszka, J. (2017). There's more to the multimedia effect than meets the eye: is seeing pictures believing? *Instructional Science, 45*(2), 263–287. https://doi.org/10.1007/s11251-016-9397-6

Olson, G. M., Duffy, S. A., & Mack, R. L. (2018). *Thinking-out-loud as a method for studying real-time comprehension processes* (pp. 253–286). Routledge.

Orquin, J. L., & Loose, S. M. (2013). Attention and choice: A review on eye movements in decision making. *Acta Psychologica, 144*(1), 190–206. https://doi.org/10.1016/j.actpsy.2013.06.003

Ott, N., Brünken, R., Vogel, M., & Malone, S. (2018). Multiple symbolic representations: The combination of formula and text supports problem solving in the mathematical field of propositional logic. *Learning and Instruction, 58*, 88–105. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2018.04.010

Ponce Campuzano, J., Roberts, A., Matthews, K., Wegener, M. J., Kenny, E., & McIntyre, T. (2019). Dynamic visualization of line integrals of vector fields: A didactic proposal. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 50*(6), 934–949. https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1510554

Puspitasari, L., In'am, A., & Syaifuddin, M. (2018). Analysis of students' creative thinking in solving arithmetic problems. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *14*(1), 49–60. https://doi.org/10.12973/iejme/3962

Rasmussen, C., & Blumenfeld, H. (2007). Reinventing solutions to systems of linear differential equations: A case of emergent models involving analytic expressions. *The Journal of Mathematical Behavior, 26*(3), 195–210. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2007.09.004

Rau, M., Aleven, V., & Rummel, N. (2009). Intelligent Tutoring Systems with Multiple Representations and Self-Explanation Prompts Support Learning of Fractions. In V. Dimitrova, R. Mizoguchi, B. du Boulay & A. Graesser (Eds.), *Proceedings of the 14th International Conference on Artificial Intelligence in Education, 2009 Building Learning Systems that Care: From Knowledge Representation to Affective Modelling* (pp. 441–448). IOS Press. https://doi.org/10.3233/978-1-60750-028-5-441

Reuker, S. (2017). The knowledge-based reasoning of physical education teachers: A comparison between groups with different expertise. *European Physical Education Review, 23*(1), 3–24. https://doi.org/10.1177/1356336X15624245

Rosengrant, D., Heuvelen, A. V., & Etkina, E. (2007). An Overview of Recent Research on Multiple Representations. In L. McCullough, L. Hsu & P. Heron (Eds.), *AIP Conference Proceedings*, (vol. 883, pp. 149–152). American Institute of Physics. https://doi.org/10.1063/1.2508714

Rousseeuw, P. J. (1987). Silhouettes: A graphical aid to the interpretation and validation of cluster analysis. *Journal of Computational and Applied Mathematics, 20*, 53–65. https://doi.org/10.1016/0377-0427(87)90125-7

Salvucci, D. D. & Goldberg, J. H. (2000). Identifying fixations and saccades in eye-tracking protocols. In A. T. Duchowski (Ed.), *Proceedings of the 2000 Symposium on Eye Tracking Research & Applications* (ETRA '00, pp. 71–78). Association for Computing Machinery. https://doi.org/10.1145/355017.355028

Sandoval, I., & Possani, E. (2016). An analysis of different representations for vectors and planes in $\mathbb{R}^3$. *Educational Studies in Mathematics, 92*(1), 109–127. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9675-2

Schindler, M. & Lilienthal, A. (2018). Eye-tracking for studying mathematical difficulties: Also in inclusive settings. In *Proceedings of Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics*

Education (PME-42) (vol. 4, pp. 115–122). Psychology of Mathematics Education. Retrieved from https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:1284102/FULLTEXT01.pdf

Schüler, A. (2017). Investigating gaze behavior during processing of inconsistent text-picture information: Evidence for text-picture integration. *Learning and Instruction, 49*, 218–231. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2017.03.001

Seufert, T. (2003). Supporting coherence formation in learning from multiple representations. *Learning and Instruction, 13*(2), 227–237. https://doi.org/10.1016/S0959-4752(02)00022-1

Seufert, T. (2019). Training for coherence formation when learning from text and picture and the interplay with learners' prior knowledge. *Frontiers in Psychology, 10*, 193. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2019.00193

Shah, P., & Miyake, A. (1996). The separability of working memory resources for spatial thinking and language processing: An individual differences approach. *Journal of Experimental Psychology: General, 125*(1), 4–27. https://doi.org/10.1037/0096-3445.125.1.4

Souto Rubio, B. & Gómez-Chacón, I. M. (2011). Challenges with visualization. The concept of integral with undergraduate students. In M. Pytlak, T. Rowland & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of European Society for Research in Mathematics Education (CERME-7)*, pages 1–11. University of Rzeszów.

Speece, D. L. (1994). Cluster analysis in perspective. *Exceptionality, 5*(1), 31–44. https://doi.org/10.1207/s15327035ex0501_3

Strohmaier, A. R., MacKay, K. J., Obersteiner, A., & Reiss, K. M. (2020). Eye-tracking methodology in mathematics education research: A systematic literature review. *Educational Studies in Mathematics, 104*, 147–200. https://doi.org/10.1007/s10649-020-09948-1

Stylianou, D. A., & Silver, E. A. (2004). The role of visual representations in advanced mathematical problem solving: An examination of expert-novice similarities and differences. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(4), 353–387. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0604_1

Thomaneck, A., Vollstedt, M., & Schindler, M. (2022). Students' perception of change in graphs: An eye-tracking study. In G. Bolondi & J. Hodgen (Eds.), *Proceedings of the Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12)* (pp. 1–11). University of Bolzano. Retrieved from https://hal.science/hal-03765579v1/document

Thompson, P. W. and Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In Cai, J., editor, *Compendium for research in mathematics education*, pages 421–456. National Council of Teachers of Mathematics. Retrieved from https://www.researchgate.net/profile/Patrick-Thompson-2/publication/302581485_Variation_covariation_and_functions_Foundational_ways_of_thinking_mathematically/links/583c389208ae502a85e3a224/Variation-covariation-and-functions-Foundational-ways-of-thinking-mathematically.pdf

Trigueros, M., & Martínez-Planell, R. (2010). Geometrical representations in the learning of two-variable functions. *Educational Studies in Mathematics, 73*(1), 3–19. https://doi.org/10.1007/s10649-009-9201-5

Tsai, M.-J., Hou, H.-T., Lai, M.-L., Liu, W.-Y., & Yang, F.-Y. (2012). Visual attention for solving multiple-choice science problem: An eye-tracking analysis. *Computers & Education, 58*(1), 375–385. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2011.07.012

Van den Haak, M. J., de Jong, M. D., & Schellens, P. J. (2009). Evaluating municipal websites: A methodological comparison of three think-aloud variants. *Government Information Quarterly, 26*(1), 193–202. https://doi.org/10.1016/j.giq.2007.11.003

Van Deventer, J. & Wittmann, M. C. (2007). Comparing student use of mathematical and physical vector representations. In L. Hsu, C. Henderson & L. McCullough (Eds.), *AIP Conference Proceedings* (vol. 951, pp. 208–211). American Institute of Physics. https://doi.org/10.1063/1.2820935

Van Gog, T., Paas, F., & Van Merriënboer, J. J. (2005). Uncovering expertise-related differences in troubleshooting performance: Combining eye movement and concurrent verbal protocol data. *Applied Cognitive Psychology, 19*(2), 205–221. https://doi.org/10.1002/acp.1112

Villegas, J. L., Castro, E., Gutiérrez, J., et al. (2009). Representations in problem solving: A case study with optimization problems. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 7*(17), 279–308. https://doi.org/10.25115/ejrep.v7i17.1342

Vogel, M., Böcherer-Linder, K., & Eichler, A. (2019). Mathematizing Bayesian situations in school by using multiple representations. In J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín & E. Molina-Portillo (Eds.), *Proceedings of the III International Virtual Congress on Statistical Education, 2019*. Universidad de Granada. Retrieved from https://digibug.ugr.es/bitstream/handle/10481/55036/vogel.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Ward, J. H., Jr. (1963). Hierarchical grouping to optimize an objective function. *Journal of the American Statistical Association, 58*(301), 236–244. https://doi.org/10.2307/2282967

Watson, A., Spyrou, P., & Tall, D. (2003). The relationship between physical embodiment and mathematical symbolism: The concept of vector. *The Mediterranean Journal of Mathematics Education*, *1*(2), 73–97. Retrieved from http://annapoynter.net/Phd%20and%20Articles/vector-embodiment-procept%5B1%5D.pdf

Yerushalmy, M. (1997). Designing representations: Reasoning about functions of two variables. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(4), 431–466. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.28.4.0431

Zahner, D., & Corter, J. E. (2010). The process of probability problem solving: Use of external visual representations. *Mathematical Thinking and Learning, 12*(2), 177–204. https://doi.org/10.1080/10986061003654240

Zazkis, D., Weber, K., & Mejía-Ramos, J. P. (2016). Bridging the gap between graphical arguments and verbal-symbolic proofs in a real analysis context. *Educational Studies in Mathematics, 93*(2), 155–173. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9698-3

Publisher's Note Springer Nature remains neutral with regard to jurisdictional claims in published maps and institutional affiliations.

7 Zeichenaktivitäten beim instruktionalen Lernen zur Divergenz

Sowohl beim Repräsentationswechsel von Vektorfelddarstellungen als auch bei der Divergenzbeurteilung von Vektorfelddiagrammen zeigte sich ein positiver Zusammenhang zwischen charakteristischen Blickbewegungen auf dem Vektorfelddiagramm und der Performanz von Studierenden beim Assessment (Kap. 3.3 und 6). So war das Blickverhalten erfolgreicher Studierender durch horizontale und verikale Sakkaden auf dem Diagramm gekennzeichnet. Bestehende Instruktionen zur qualitativen Interpretation der Divergenz von Vektorfelddiagrammen mit visuellen Hilfestellungen im Diagramm riefen Blickmuster dieser Art häufiger hervor als Lehr-Lern-Materialien ohne visuelle Hilfestellungen (Klein et al., 2019). Untersuchungen zur Wirksamkeit dieser Materialien zeigten jedoch auch für die Instruktion mit visuellen Hilfen noch weiteren Optimierungsbedarf bezüglich der Transferfähigkeit des Gelernten sowie einer Unterstützung von Lernenden mit geringem visuell-räumlichem Vorstellungsvermögen (Klein et al., 2019, 2021b).

Die Überlegungen in Kap. 2.2 zu mentalen Prozessen bei der Divergenzbeurteilung und Ergebnisse vorangegangener Arbeiten zum zeichenbasierten Lernen (Kap. 3.1.4.1) legen nahe, dass Zeichenaktivitäten eine gewinnbringende Unterstützungsmethode in diesem Zusammenhang darstellen können. Daher wurden die bestehenden Lehr-Lern-Materialien zur Divergenz überarbeitet und um eine zeichenbasierte Vorübung zur Vektordekomposition und partiellen Ableitungen erweitert und durch weitere Zeichenaktivitäten ergänzt (für eine konzeptionelle Beschreibung siehe Hahn und Klein, 2021). Im Sinne der Designprinzipien multimedialer Lernumgebungen (Kap. 3.1.3.2) folgten diese dem Multimedia-, dem Kontinuitäts-, dem Segmentierungs- und dem Vortrainingsprinzip. So wurden Text und Diagramm, wie bereits bei Klein et al. (2018, 2019, 2021b), nebeneinander präsentiert, um Such- und Aufrechterhaltungsprozesse durch räumliche oder zeitliche Trennung von Informationen zu reduzieren. Die Förderung eines tieferen Verständnisses der Divergenz wird dabei im Sinne des DeFT-Orientierungsrahmens zudem durch explizite Verweise zwischen Erklärtext und Vektorfelddiagramm gestärkt (Kap. 3.1.3.1). Außerdem wurde die Lehr-Lern-Einheit in mehrere Lernabschnitte zur Komponentenzerlegung, den partiellen Ableitungen und der Divergenzbeurteilung unterteilt. Die Vorübung zur Komponentenzerlegung und den partiellen Ableitungen führte vor der Divergenzinstruktion bereits in die zentralen Begriffe und Konzepte der dieser ein. Diese Umsetzung des Vortrainingsprinzips ging dabei über die Formulierung von Mayer (2009) hinaus, die sich vor allem auf die Einführung der Elemente einer multimedialen Lernumgebung bezieht. Sie diente allerdings dem gleichen Zweck einer Reduktion kognitiver Belastung durch die vorangegangene Einführung in zentrale Konzepte. Mit Blick auf bestehende Ansätze zum zeichenbasierten Lernen zielten die Zeichenaktivitäten durch die Externalisierung mentaler Aufrechterhaltungsprozesse der Komponentenzerlegung auf eine Unterstützung des qualitativen Ansatzes zur Divergenzbeurteilung ab (Kap. 2.2). Im Sinne der Ergebnisse von Wu und Rau (2019) dienen sie damit als zielgerichtete, dem Bedarf angemessene Unterstützung des

Lernprozesses (Kap. 3.1.4.1). Durch eine Instruktion repräsentationsspezifischer Zeichenaktivitäten weichen diese jedoch von der Methode des lerner-generierten Zeichnens ab (Kap. 3.1.4.1).
Die Wirksamkeit der Zeichenaktivitäten wurde im Rahmen einer experimentellen Studie mit zwei Teilstudien analysiert. Diese untersuchte anhand eines Vergleichsdesigns zwischen Kontroll- und Interventionsgruppe den Einfluss der Zeichenaktivitäten auf Performanz-, Prozess- und Belastungsindikatoren ($N = 84$). Dabei wurde neben der bildschirmbasierten Blickdatenaufnahme bei der Divergenzbeurteilung ($N = 53$) zudem der Blick der Lernenden bei der Bearbeitung der Instruktion mit mobilen Eye-Tracking-Brillen aufgenommen ($N = 32$). Die Forschungsfragen zielten zum einen auf die Wirkung der Lehr-Lern-Materialien auf das konzeptuelle Verständnis ab (1). Zum anderen adressierten sie den Einfluss der Zeichenaktivitäten als unabhängige Variable auf die Performanz bei der Divergenzbestimmung und der Beurteilung partieller Vektorableitungen (2), auf die wahrgenommenen kognitive Belastung (3) und auf das Blickverhalten während der Instrukionsbearbeitung (4a) und beim anschließenden Assessment (4b). Dabei kam der Untersuchung der Belastung als abhängige Variable eine besondere Relevanz zu, um die belastungsreduzierende Wirkung des Zeichnens, die sich in anderen Kontexten zeigte, für vektorfelddiagrammspezifische Zeichenaktivitäten zu überprüfen (Kap. 3.1.4.1). Die beschriebene Studie adressiert alle vier Forschungsziele dieser Dissertation, vor allem aber Forschungsziel FZ4 (Kap. 4.1).
Die Ergebnisse der Wirksamkeitsstudie zum Einsatz von Zeichenaktivitäten beim vektorfelddiagrammzentrierten Lernen zur Divergenz wurden in dem folgenden Artikel publiziert:

> Hahn, L., & Klein, P. (2023). Analysis of eye movements to study drawing in the context of vector fields. *Frontiers in Education*, *8*, 1162281. https://doi.org/10.3389/feduc.2023.1162281

Dem Artikel ist ein Anhang beigefügt, der die Lehr-Lern-Materialien der Interventionsgruppe in Originalsprache beinhaltet. Dieser ist in Anhang A.1 zu finden. Darüber hinaus sind alle verwendeten Materialien und Instrumente in Anhang A.2 dargestellt. Die Ergebnisse der Publikation werden außerdem durch zwei Detailanalysen ergänzt (siehe Hahn und Klein, 2022a, 2023b).

frontiers | Frontiers in Education

TYPE Original Research
PUBLISHED 22 June 2023
DOI 10.3389/feduc.2023.1162281

Check for updates

OPEN ACCESS

EDITED BY
André Bresges,
University of Cologne, Germany

REVIEWED BY
Cédric Sueur,
UMR7178 Institut pluridisciplinaire Hubert Curien (IPHC), France
Bianca Watzka,
Otto von Guericke University Magdeburg, Germany

*CORRESPONDENCE
Larissa Hahn
larissa.hahn@uni-goettingen.de

RECEIVED 09 February 2023
ACCEPTED 15 May 2023
PUBLISHED 22 June 2023

CITATION
Hahn L and Klein P (2023) Analysis of eye movements to study drawing in the context of vector fields. *Front. Educ.* 8:1162281.
doi: 10.3389/feduc.2023.1162281

COPYRIGHT
© 2023 Hahn and Klein. This is an open-access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution License (CC BY). The use, distribution or reproduction in other forums is permitted, provided the original author(s) and the copyright owner(s) are credited and that the original publication in this journal is cited, in accordance with accepted academic practice. No use, distribution or reproduction is permitted which does not comply with these terms.

Analysis of eye movements to study drawing in the context of vector fields

Larissa Hahn* and Pascal Klein

Physics Education Research, Faculty of Physics, University of Göttingen, Göttingen, Germany

Research has shown that visual representations can substantially enhance the learning and understanding of STEM concepts; despite this, students tend to struggle in using them fluently and consistently. Consequently, educators advocate for explicit instructions that support the coordination of multiple representations, especially when concepts become more abstract and complex. For recent years, the drawing (or sketching) technique has received increasing attention. Theoretical considerations and prior research suggest that drawing has the potential to support knowledge construction and to provide cognitive relief. In this article, we present two studies that investigate the impact of drawing activities in a multi-representational, instruction-based learning scenario from physics, more precisely, in the context of vector fields. Further, mobile and remote eye tracking was used to record students' gaze behavior in addition to monitoring indicators of performance and cognitive load. Here, eye movements provide information about cognitive processes during the completion of the instruction, on the one hand, and during subsequent problem solving, on the other hand. Comparisons of a treatment group instructed with drawing activities and a control group instructed without drawing activities revealed significant differences in students' perceived cognitive load ($p = 0.02$, $d = 0.47$ and $p = 0.0045$, $d = 0.37$), as well as their response accuracy ($p = 0.02$, $d = 0.51$) and their response confidence ($p = 0.02$, $d = 0.55$ and $p = 0.004$, $d = 0.64$) during assessment after instruction ($N = 84$). Moreover, students instructed with drawing activities were found to distribute more visual attention to important parts of the instruction (vector field diagram and instructional text, $N = 32$) compared to the control group and, further, showed effective, expert-like behaviors during subsequent problem solving ($N = 53$). Finally, as a contribution to current trends in eye-tracking research, the application of mobile and remote eye-tracking in drawing-based learning and assessment scenarios is compared and critically discussed.

KEYWORDS

drawing, multiple representations, physics, vector fields, eye movements, instruction-based learning, conceptual understanding, eye tracking

1. Introduction

Multiple external representations (MERs) and their interpretations play a central role in STEM and, particularly, in STEM learning. As different representations focus on different characteristics of a concept or a learning subject, and thus complement and constrain each other, multiple, visual representations enable a deep understanding of fundamental scientific concepts (Ainsworth, 1999; Seufert, 2003; Rau, 2017). Moreover, a flexible and conscious use of different representations, which requires enhanced representational competencies, was found to have positive effects on knowledge acquisition, development of conceptual understanding, and problem-solving skills (e.g., Nieminen et al., 2012; Chiu and Linn, 2014; Rau, 2017).

However, learning from and with multiple representations in STEM education often places special demands on the visuo-spatial working memory, hence increasing cognitive load (Baddeley, 1986; Cook, 2006; Logie, 2014). Therefore, current research advocates assistance through drawing activities, for example, by sketching (or drawing) visual cues or by transforming textual information into a drawing (e.g., Figure 1, Left; Kohnle et al., 2020; Ainsworth and Scheiter, 2021). As visualizations are integral to scientific thinking, Ainsworth et al. (2011) emphasized the potential of drawing as an effective learning strategy. Following the authors, the externalizing approach of drawing aligns with the visual-spatial demands of science learning, thus helping students to visually make sense of concepts and providing cognitive relief (Bilda and Gero, 2005; Wu and Rau, 2018). Previous studies have confirmed these theoretical considerations by demonstrating positive learning outcomes of sketching activities in multi-representational learning environments (Leopold and Leutner, 2012; Wu and Rau, 2018; Hellenbrand et al., 2019; Kohnle et al., 2020; Ainsworth and Scheiter, 2021). As such, sketching increased attention and engagement with the representation, allowed to pay more attention to details and important parts of a representation, and thus supported a (visual) understanding of concepts.

Studies investigating cognitive load often postulate limited capacity of working memory resources. This is typically broken down into three types of cognitive load—that are, intrinsic, extraneous, and germane cognitive load (Cognitive Load Theory; Sweller, 2010). Intrinsic cognitive load refers to the inherent complexity of the information to be understood (further specified below for the context of vector fields), extraneous cognitive load to the design of the instructional material, and germane cognitive load to the mental capacities a learner devotes to the learning subject. In that context, sketching activities are considered to allow a more effective use of visuo-spatial working memory resources (Bilda and Gero, 2005; Sweller, 2010). Moreover, studies have shown that using multiple external representations in STEM education, particularly with a focus on drawing, can enhance knowledge acquisition, conceptual understanding, and problem-solving skills while reducing cognitive load (Leopold and Leutner, 2012; Wu and Rau, 2018; Hellenbrand et al., 2019).

In recent years, eye-tracking as a nonintrusive process-based assessment technique has become increasingly popular in research on (multimedia) learning (Hyönä, 2010; Lai et al., 2013; Alemdag and Cagiltay, 2018) and STEM education (e.g., reviews in physics and mathematics see Strohmaier et al., 2020; Hahn and Klein, 2022a). Following the eye-mind hypothesis by Just and Carpenter (1976), refined by Wu and Liu (2022), many studies postulate a relationship between visual attention and cognitive processing (e.g., Tsai et al., 2012). In this context, eye-tracking measures, such as total and mean fixation duration, fixation and transition count, and time to first fixation, are typically used to study students' attention and visual behavior during learning and assessment activities. This includes analyzing their engagement with instructional designs, their strategies during problem solving, and performance on concept tests or tasks (Lai et al., 2013; Hahn and Klein, 2022a), thus allowing to study expertise differences (Gegenfurtner et al., 2011). Thereby, research focused on cognitive processes in learning or assessment scenarios; studies analyzing gaze data during instruction and subsequent assessment, in contrast, were hardly conducted (Hahn and Klein, 2022a). In physics education research, gaze data is typically collected on a screen using remote eye-tracking methods; only one study used mobile eye-tracking glasses thus far (Hahn and Klein, 2022a). As, particularly paper-based, drawing activities significantly influence learning behaviors, mobile eye tracking promises to be particularly suited to track its constructive mechanisms and to gain insight into frequency and timing of externalization (Hellenbrand et al., 2019).

In university physics, vector field representations play a central role, being represented either algebraically as a formula or graphically as a vector field diagram (see Figure 1). When representing a quantity as a vector field, the field's divergence, a measure for its sources and sinks, is of particular relevance for physics applications (Griffiths, 2013). For electrodynamics, one of the largest subfields of physics, an extensive preparation in vector calculus was found to be highly correlated with students' performance at university (Burkholder et al., 2021). However, further research also revealed that students often lack a conceptual understanding of vector field representations and, particularly, divergence, which is highly relevant to physics comprehension (e.g., Pepper et al., 2012; Singh and Maries, 2013; Bollen et al., 2015). Recent studies found, for example, that students interpreted the divergence of a vector field literally instead of referring to its physics-mathematical concepts and that they struggled with evaluating the divergence from a vector field diagram (Ambrose, 2004; Pepper et al., 2012; Singh and Maries, 2013; Bollen et al., 2015, 2016, 2018; Baily et al., 2016; Klein et al., 2018, 2019, 2021). Particularly surprising, graduate students struggle with conceptual aspects of divergence, even though they know how to calculate it mathematically (Singh and Maries, 2013). Several studies deepened this line of research and identified various learning difficulties closely related to the Cartesian representation of divergence. In particular, the concept of covariation between field components and coordinates was found to cause difficulties for students (see Figure 1, Left); they confused components with coordinates or committed errors when decomposing vectors into their components (e.g., Gire and Price, 2012; Barniol and Zavala, 2014; Bollen et al., 2017). Additionally, Pepper et al. (2012) reported about student problems in dealing with partial vector derivatives as they, for example, confused the change of a vector with its magnitude. Analysis of students' gaze when viewing vector field diagrams confirmed the difficulties mentioned above (Klein et al., 2018, 2019, 2021). Moreover, it was shown that conceptual gaps regarding vector calculus were transferred to errors in application (e.g., in electrostatics and -magnetism; Ambrose, 2004; Jung and Lee, 2012; Bollen et al., 2015, 2016; Li and Singh, 2017).

Analysis of introductory and advanced physics texts and textbooks by Smith (2014) revealed that divergence is typically introduced using a mathematical expression, but is either not or insufficiently explained or discussed qualitatively or illustratively. In light of the aforementioned empirical findings, several researchers advocated new instructions using visual representations that address a conceptual understanding of vector field concepts and, particularly, divergence. Following this line of research, Klein et al. (2018) developed text-based instructions for visually interpreting divergence using vector field diagrams. Here, the authors referred to two different mathematical approaches, namely flux through boundary (integral approach)

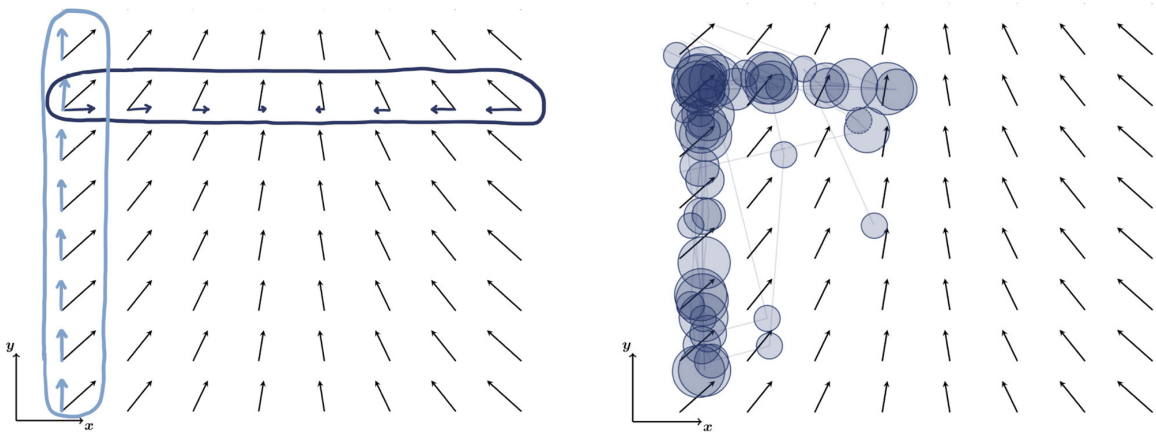


FIGURE 1
Vector field diagram of the field $\vec{F}(x, y) = -x\,\hat{e}_x + \hat{e}_y$ with drawing of visual cues and vector field components **(Left)** and visual evaluation in horizontal and vertical directions **(Right)** to interpret covariation in Cartesian coordinates. *x* and *y* components of the field are sketched in dark and light blue, respectively **(Left)**. To evaluate their change along a row (*x* direction) and a column (*y* direction), the corresponding row or column is circled. Analysis of covariation yields that the *x* component of the field changes in *x* direction (along the row), while the *y* component is constant in *y* direction (along the column). Visual evaluation of covariation along Cartesian directions (*x* and *y* direction) is associated with horizontal and vertical saccades (Scanpath; fixations are visualized by circles; circle size relates to fixation duration; **Right**).

and covariation of components and coordinates (differential approach). A clinical eye-tracking study revealed a quantitative increase in conceptual understanding after students completed the instructions (Klein et al., 2018). However, in post-intervention interviews, some subjects indicated difficulty with diagram-specific mental operations, such as decomposing vectors and evaluating field components along coordinate directions. They further suggested visual aids, for example, sketches of component decomposition, as being helpful to improve their performance. Hence, in a follow-up experimental study, Klein et al. (2019) compared two instructions of the differential strategy, with and without visual cues, and found that adding visual cues for component decomposition actually led to better learning outcomes. Moreover, a positive correlation with students' response confidence was found, as students from the treatment group instructed with visual cues trusted their answers more (Lindsey and Nagel, 2015; Klein et al., 2017, 2019). However, students' transfer performance and their perceived task difficulty during problem-solving did not improve significantly compared to the previous study indicating that visual cues did not fully overcome students' difficulties regarding vector decomposition and partial derivatives. In a third study, using a very similar instruction, Klein et al. (2021) found that particularly students with high or medium spatial abilities—as measured by the Spatial Span Task (SST) by Shah and Miyake (1996)— benefited from the instructional support, whereas students with low spatial abilities perceived high cognitive load and hardly profited from the instruction.

In addition to performance measures, all three studies used eye tracking to analyze students' handling of the instruction and representation-specific visual behaviors during subsequent problem-solving (Klein et al., 2018, 2019, 2021). In the studies by Klein et al. (2019, 2021), it was shown that visual cues increased fixation count and total fixation duration on relevant parts of the instruction. Furthermore, cognitive integration processes indicated by transitions were significantly more pronounced for students instructed with cues. During problem solving, saccadic eye movement patterns of students instructed with visual cues were similar to experts. Here, the authors referred to results by Klein et al. (2018), who found that best-performing students' eye movements are dominated by horizontal and vertical saccades indicating correct interpretation of partial derivatives along Cartesian coordinate directions (Figure 1, Right). Besides characteristic saccadic directions, Klein et al. (2018) found that best-performing students also performed shorter saccades which was associated with a systematic evaluation of component changes in the vector field diagram. However, despite high visuo-spatial demands of the task stimulus, no correlation of such gaze patterns with students' spatial abilities could be confirmed (Klein et al., 2021).

By taking the above-mentioned theoretical considerations into account, the aforementioned multi-representational instructions on divergence (Klein et al., 2018, 2019, 2021) were evolved and extended by dedicated pre-exercises on vector decomposition and partial derivatives. In particular, several task on drawing of vector components or highlighting rows and columns to support evaluation along coordinate directions are incorporated (Hahn and Klein, 2021). The tasks aim at providing cognitive relief, fostering further engagement with the representations and the instructed strategy, and supporting the development of a conceptual understanding of divergence which can be transferred to further concepts. Besides analyzing the general impact of the instruction, this contribution aims at evaluating the value of the drawing activities in a multi-representational

instruction on divergence by presenting two studies both comparing a treatment group instructed with drawing activities and a control group instructed without drawing activities. The following guiding question is investigated: "Does the instruction on divergence including drawing activities have a higher learning impact than the instruction without drawing activities?" Besides typical performance indicators, such as response accuracy and response confidence, eye movements are exploited to reveal between-subjects effects during completion of the instruction and subsequent problem solving. Consequently, considering theoretical frameworks on the use of drawing activities, the following research questions and hypotheses are posed:

(RQ1) What impact do drawing activities have on students' conceptual understanding and their accuracy of judging the divergence of vector field diagrams?
(RQ2) What are the differences between students instructed with and without drawing activities concerning their performance (response accuracy and confidence) as measured by several assessment tasks (including the evaluation of the divergence of vector field diagrams, the interpretation of partial derivatives of vector field diagrams, and conceptual questions on divergence)?
(RQ3) What are the differences between students instructed with and without drawing activities concerning their cognitive load (as measured by a cognitive load questionnaire) during learning and task processing?
(H1) Students instructed with drawing activities perceive less cognitive load (as measured by a cognitive load questionnaire) during learning and task processing.
(RQ4) What are the differences between students instructed with and without drawing activities concerning their visual attention
(a) during processing of the instruction?
(b) when evaluating the divergence of vector field diagrams?

2. Materials and methods

The aforementioned research questions are investigated in two separate studies. Study 1 uses performance measures to quantify the impact of the instruction and, particularly, the drawing activities in order to address research questions RQ1, RQ2 and RQ3 including hypothesis H1. In study 2 cognitive processing is focused using mobile and remote eye tracking during completion of the instruction and subsequent problem solving, thus addressing research questions RQ4(a) and RQ4(b).

2.1. Study 1

2.1.1. Participants

The sample of study 1 was drawn from physics students at a German university (Table 1) in the context of a large-scale voluntary physics pre-course before the first study semester. Prior to the study, students received a short introduction to vector fields in the lecture. In the corresponding recitations, students completed the study material in self study (for study design see Section 2.1.2 and Figure 2, and for materials see

TABLE 1 Sample data of study 1 (Left) and study 2 (Right; treatment group TG, control group CG, number No.).

	Study 1			Study 2		
	Total	TG	CG	Total	TG	CG
Number of subjects	84	43	41	54	27	27
No. of female subjects	19	5	14	17	9	8
Age range (in years)	18 – 23	18 – 21	18 – 23	18 – 26	18 – 26	18 – 22
Mean age (in years)	19.2 ± 0.9	19.2 ± 0.7	19.2 ± 1.0	20.2 ± 1.9	20.2 ± 1.9	20.2 ± 1.8
No. of semesters studied	1	1	1	2.7 ± 1.3	2.6 ± 1.1	2.9 ± 1.5
Average grade for university entrance qualification[a]	1.6 ± 0.5	1.6 ± 0.5	1.6 ± 0.6	1.7 ± 0.7	1.7 ± 0.6	1.7 ± 0.8
No. of subjects with advanced maths course at school	72 (86%)	33 (77%)	39 (95%)	35 (65%)	15 (56%)	20 (75%)
No. of subjects with physics course at school	69 (82%)	38 (88%)	31 (76%)	41 (76%)	20 (74%)	21 (78%)
School performance in mathematics[b]	8.0 ± 1.5	7.8 ± 1.6	8.1 ± 1.4	8.3 ± 1.3	8.4 ± 1.4	8.2 ± 1.3
School performance in physics[b]	8.3 ± 1.3	8.3 ± 1.4	8.4 ± 1.2	8.0 ± 1.6	8.0 ± 1.6	8.1 ± 1.7
Spatial abilities[c]	–	–	–	0.54 ± 0.18	0.55 ± 0.16	0.51 ± 0.22
Pretest score vector fields[d]	0.93 ± 0.17	0.94 ± 0.17	0.93 ± 0.17	0.97 ± 0.13	0.94 ± 0.17	0.99 ± 0.06
Pretest score divergence[d]	0.76 ± 0.23	0.74 ± 0.25	0.79 ± 0.21	0.73 ± 0.24	0.69 ± 0.25	0.77 ± 0.23
No. of correct answers for vector field VF_0	33 (39%)	16 (37%)	17 (41%)	22 (41%)	12 (44%)	10 (37%)

[a]The scale ranges from 1.0 (best performance) to 4.0. The grades are indicated by the students.
[b]The scale ranges from 0 to 10 (best performance). The scores are based on students' self-assessment.
[c]The scale ranges from 0 to 1 (best performance), measured by the spatial span task (conventional score).
[d]The scale ranges from 0 to 1 (best performance).

Section 2.3, Table 2, Figures 3, 4 and Supplementary material). In total, 84 first-year students (19 female, average age 19.2 years) participated in the study (for further characterization of the sample see Table 1, Left). It is notable that the pretest scores on vector fields are rather high, indicating sufficient prior knowledge about visual representations of vector fields and decomposition of single vectors into components of all students to understand the subsequent instruction. But as only 39% of them were able to evaluate the divergence of a vector field diagram the instruction could still have a meaningful impact (Table 1).

2.1.2. Study design, procedure, and data analysis methods

Study 1 uses a mixed design including within- and between-subjects treatments (Figure 2). The study procedure is summarized in Table 2 including an overview of all instruments and data (see Section 2.3 and the Supplementary material). First, students took a prior knowledge test, where they were asked to judge whether field components in a vector field diagram equal zero or not, and a pretest that included conceptual questions about divergence. The students then completed a three-page instruction including a pre-exercise on vector decomposition and partial derivatives (Figure 3) and an instruction on divergence (Figure 4) either with drawing activities (treatment group TG) or without drawing activities (control group CG; instructional material adapted from Klein et al., 2018, 2019, 2021). The group assignment was randomized by recitation group, where students selected a fixed recitation group by their own without knowing about the assignment to a treatment condition and about other group members. After finishing the instruction, the students took the posttest. It included several problem-solving tasks with vector field plots (Figure 5), several transfer tasks on partial derivatives, and the conceptual pretest questions on divergence. Last, students' perceived cognitive load and sociodemographic data have been collected. No significant differences between the two groups (treatment and control group) regarding various sociodemographic data and performance indicators were found (Table 1, Left).

For data analysis, within-subjects effects are investigated through pre and post comparisons of students' achievement in the concept test on divergence and in judging a fields' divergence (initial problem VF_0 and VF_5 from the problem-solving phase). Here, standard methods of quantitative statistics (e.g., *t*-tests) were used by referring to the interpretation of Cohen (1988). Additionally, treatment and control group were statistically compared with respect to students' perceived cognitive load as well as their response accuracy and confidence during problem solving, in the transfer task, and in the posttest.

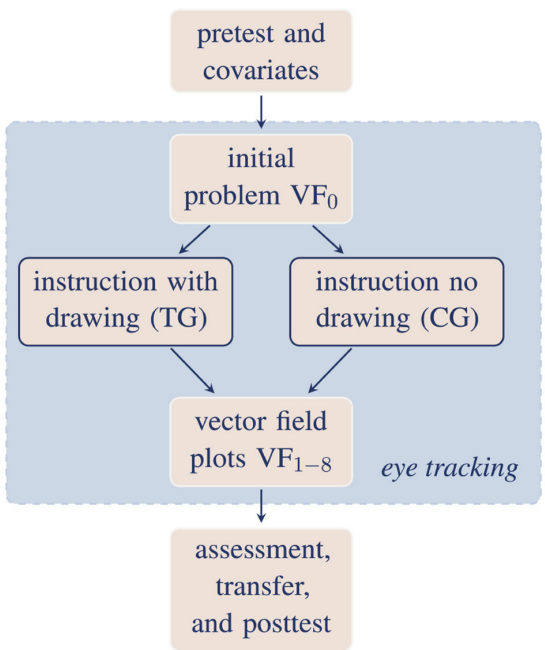


FIGURE 2
Study design for study 1 (beige) and 2 (extension in blue; treatment group TG, control group CG). All parts of study 1 are colored in beige. In study 2, for the initial problem VF_0, the instruction, and the problem-solving task after instruction additional eye-tracking data was collected (colored in blue).

2.2. Study 2

2.2.1. Participants

The sample of study 2 was drawn from physics students at the same German university than study 1 in the context of a large-scale second-semester physics lecture on electromagnetism. Prior to the study, students received a short introduction to vector fields in the context of electric and magnetic fields in the lecture. In total, 54 students (17 female, average age 20.2 years), mostly in their second year of study, participated in the study (for further characterization of the sample see Table 1, Right). Again, students' pretest scores indicated sufficient prior knowledge to understand the subsequent instruction.

2.2.2. Study design and procedure

Study 2 uses the same mixed design as study 1 including drawing activities as between-subjects treatment (Section 2.1.2, Figure 2, Table 2, and Figures 3, 4). Subjects participated voluntarily in the study and were compensated with 20€. Group assignment was randomized before the start of the study and students were guided individually to the eye-tracking laboratory. After prior knowledge assessment, a standardized test on spatial abilities was administered (Spatial Span Task; Shah and Miyake, 1996), which measures the ability to simultaneously process and hold spatial information in memory. In addition to the performance measures from study 1, eye tracking was used to capture gaze behavior during instruction and problem solving (Section 2.4). Again, no significant differences between treatment and control group regarding various sociodemographic data and performance indicators were found (Table 1, Right).

TABLE 2 Study procedure (including approximate time) and overview of instruments and data collected for study 1.

Phase	Description	Time (min)	Instruments and data collected (source and ptly. reliability of the instruments)
1	Pretest: Prior knowledge	10	Prior knowledge test on vector field components (6 items; Klein et al., 2018, 2019, 2021): • response accuracy ($\alpha = 0.76$) • response confidence ($\alpha = 0.98$) Concept test on divergence (6 items; Baily et al., 2016; Bollen et al., 2018; Klein et al., 2018, 2019, 2021; Hahn and Klein, 2022b): • response accuracy ($\alpha = 0.54$) • response confidence ($\alpha = 0.88$)
2	*Spatial abilities*	*5*	*Spatial Span Task (Shah and Miyake, 1996)*
3	Initial problem VF_0	4	• response accuracy • *gaze data (mobile)*
4	Instruction (see Figures 3, 4)	15	• response accuracy (pre-exercise; $\alpha = 0.48$) • *gaze data (mobile)*
5	Problem solving (see Figure 5)	7	Eight vector field plots (8 items; Klein et al., 2018, 2019, 2021): • response accuracy ($\alpha = 0.77$) • response confidence ($\alpha = 0.98$) • *gaze data (mobile and remote)*
6	Assessment	5	Mental demands of task and instruction (Leppink et al., 2013; Klein et al., 2018, 2019, 2021): • Intrinsic Cognitive Load (3 items, $\alpha = 0.88$) • Extrinsic Cognitive Load (3 items, $\alpha = 0.66$) • Germane Cognitive Load (3 items, $\alpha = 0.87$)
7	Transfer (see Figure 5)	8	Three vector field plots (12 items; Klein et al., 2018, 2019, 2021): • response accuracy ($\alpha = 0.86$) • response confidence ($\alpha = 0.99$)
8	Posttest	5	Concept test on divergence (6 items; Baily et al., 2016; Bollen et al., 2018; Klein et al., 2018, 2019, 2021; Hahn and Klein, 2022b): • response accuracy ($\alpha = 0.61$) • response confidence ($\alpha = 0.86$)
9	Sociodemographics	5	Questionnaire

For relevant data and variables, reliability of the instruments is also indicated (Cronbach's alpha α). Additional (eye-tracking) data collection in study 2 is indicated in italics. For detailed description of instruments and materials used in phases 1–8 see Sections 2.1.2 and 2.3 and Supplementary material.

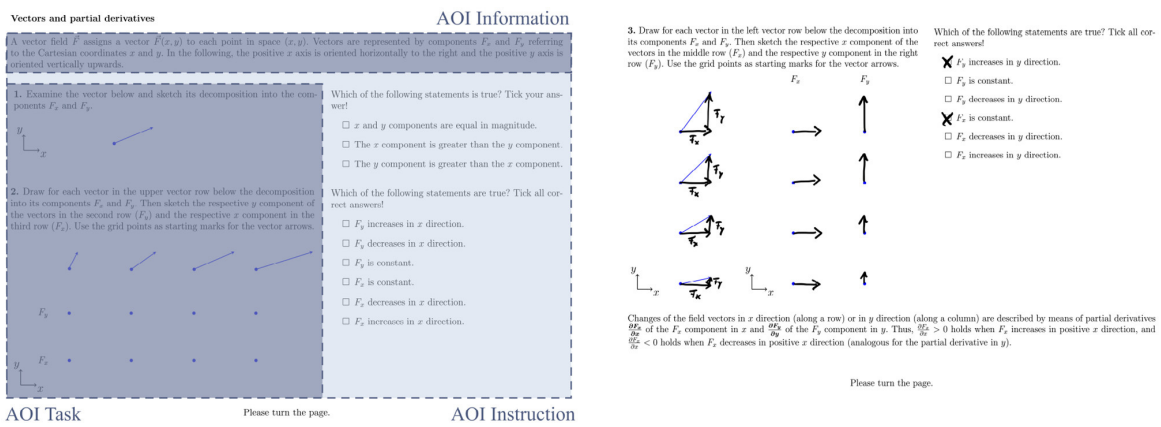


FIGURE 3
Two-sided pre-exercise on vector components and partial derivatives with drawing activities (treatment group) translated from originally German (the original instruction can be found in the Supplementary material). The second pre-exercise page shows an exemplary completion of the task **(Right)**. In the exercise without drawing activities, the decomposition tasks (left side of the page, respectively) are to be completed without drawing vectors (control group). Definition of AOIs for the first pre-exercise page is marked in blue **(Left)**. The AOIs for both pages are defined identically covering the whole instruction (AOI Instruction), the decomposition tasks (AOI Task), and a definition/information about vector fields or partial derivatives (AOI Information), respectively.

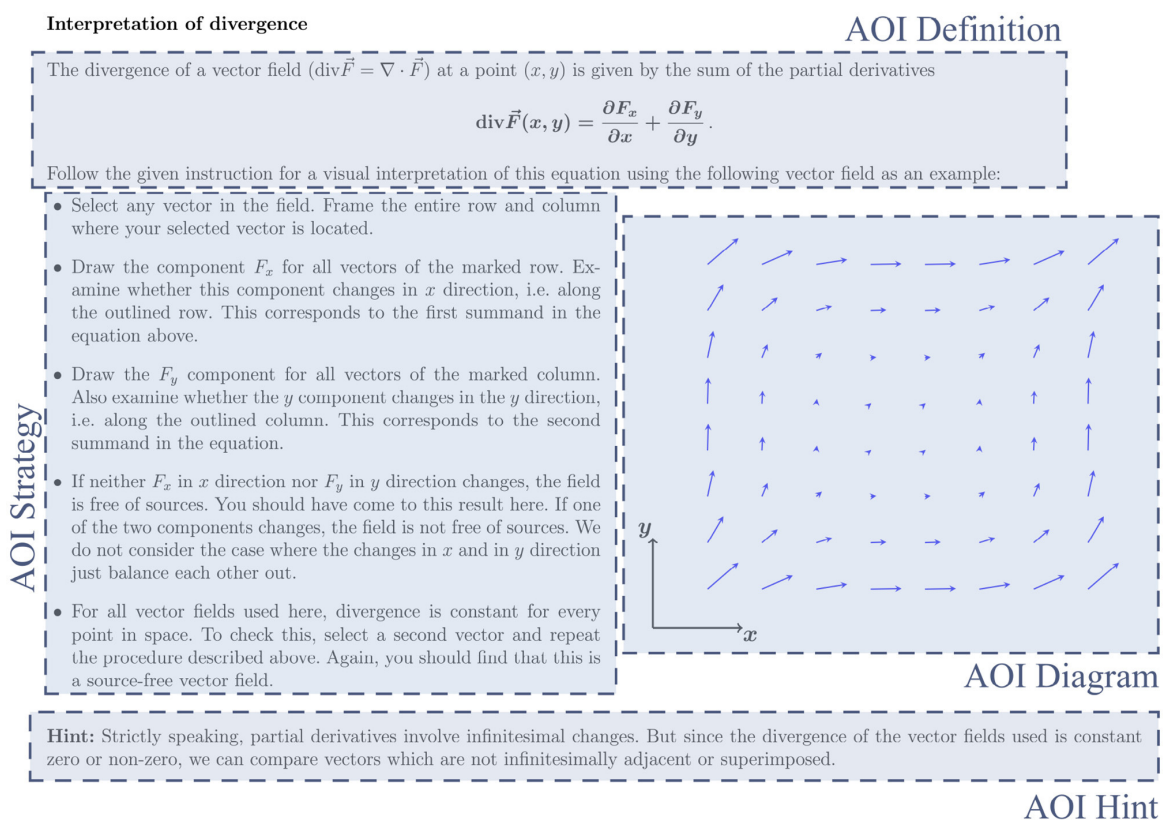


FIGURE 4
Instruction on visually interpreting divergence of vector fields with drawing activities (treatment group) translated from originally German (the original instruction can be found in the Supplementary material). The explanatory text aims at drawing vector components into the adjacent vector field diagram in order to infer the fields' divergence. In the instruction without drawing activities, the explanatory text asks for a mental decomposition of the vectors (control group). The defined AOIs for eye-tracking analysis are marked in blue. The AOIs follow the structure by Klein et al. (2019) covering the definition of divergence (AOI Definition), the instructional text (AOI Strategy), the vector field plot (AOI Diagram), and the concluding note (AOI Hint).

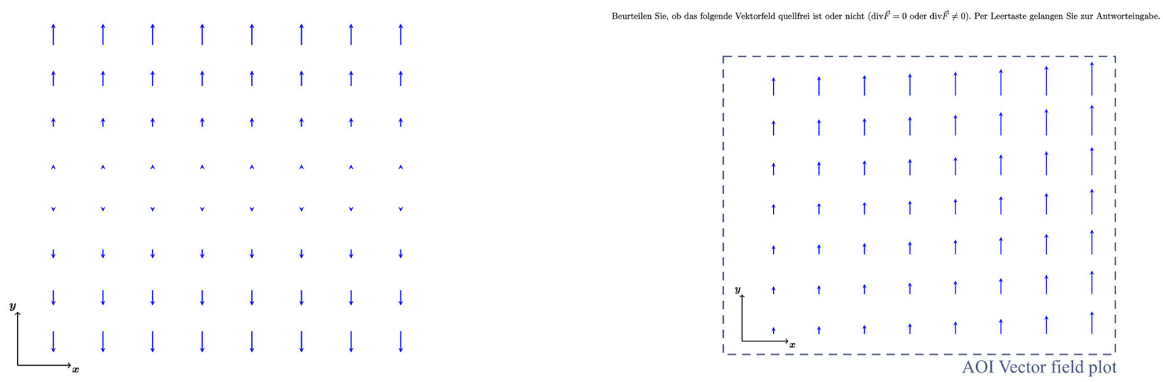


FIGURE 5
Examples of vector field diagrams used in the problem-solving tasks and the transfer tasks (**Left**; further development of Klein et al., 2018, 2019, 2021) and AOI definition **(Right)**.

2.3. Materials and measures

Pre-exercises and divergence instruction. The instruction on visually interpreting the divergence of vector fields included preliminary exercises addressing component decomposition and assessment of component change along an isolated row or column, in other words, partial derivatives (Figure 3). The following instruction on a visual interpretation of divergence consisted of a short introduction, an explanatory text with an adjacent vector field diagram, and a concluding note (Figure 4). The pre-exercise and the divergence instruction differed between treatment and control group in that students in the treatment group were asked to draw the vector components, while students in the control group constructed them mentally. Based on the sketched or mentally represented components, the changes of the components in the direction of the Cartesian coordinates (the partial derivatives), had to be evaluated (pre-exercises) and conclusions about the fields' divergence had to be drawn (divergence instruction). Construction and design of the instruction were based on materials used in prior studies (Klein et al., 2018, 2019, 2021).

Problem solving and transfer: Vector field plots. The vector field diagrams used in the study met certain requirements (Singh and Maries, 2013; Klein et al., 2018); first, the vector fields were created not to reflect any physical reality in order to exclude recognition effects. Second, the length scales were to be interpreted arbitrarily (any non-zero constant equals 1 or -1 by definition), and third, the dependencies of the vector field components were at most linear. Last, all vector fields were embedded in two-dimensional Cartesian coordinate systems, represented with approximately 25 arrows. Examples are given in Figure 5. For the problem-solving tasks, students were asked to indicate if a given vector field plot has zero or non-zero divergence. In the transfer task, it was asked for weather the partial derivatives are < 0, > 0, or $= 0$. In study 2, the first four vector field plots VF_{1-4} as well as the second four vector field plots VF_{5-8} were designed in parallel.

Divergence concept test. For assessment of conceptual knowledge regarding the divergence of vector fields, a concept test including six items was deployed. The items were designed in multiple-choice or true-false format. Most of them were taken from established concept tests on electrodynamics (CURrENT) or have been used and validated in a similar form in previous studies (Baily et al., 2016; Bollen et al., 2018; Klein et al., 2018, 2019, 2021). An example item is "The divergence can be different for every spot in the field" (Baily et al., 2016; translated for the study into German).

Questionnaire on cognitive load. The questionnaire addressing the mental demands of instruction and task processing consisted of nine items from an established instrument for measuring cognitive load (Leppink et al., 2013). All three types of cognitive load are addressed by three items each. A fourth item, which was originally dedicated to measure germane cognitive load, was omitted due to insufficient fit.

For both studies, the same materials were used.

2.4. Eye-tracking procedure, areas of interest, and data analysis methods (study 2)

Eye-tracking data collection was two-fold: Mobile eye tracking was used during instruction reading and solving the first four vector field problem-solving tasks VF_{1-4} and remote eye-tracking was used while working on the last four vector field diagrams VF_{5-8}. While remote eye-tracking was used to collect data for all 54 students, in the mobile eye-tracking phase due to technical capacities only the gaze of 33 students was tracked.

Mobile gaze data was recorded using wearable eye-tracking glasses from Tobii (Tobii Pro Glasses 3) with a sampling rate of 50 Hz and an accuracy of 0.6° visual angle. Tobii Glasses software and a one-point system-controlled calibration including a calibration card was used for data collection. Further, all materials were provided on large-scale paper sheets and on a tripod to enable a perpendicular viewing angle. One participant had to be discarded from analysis due to data loss caused by technical issues.

The last four problem-solving tasks were presented on a 24-inch computer screen (1920 × 1080 pixel resolution, 60 Hz frame rate) and eye movements were recorded using a stationary head-free eye-tracking system from Tobii (Tobii Pro Fusion). The eye tracker operates with an accuracy of less than 0.3° visual angle and a sampling frequency of 120 Hz. A 9-point calibration was used and agreement between the measured gaze positions and the actual points on the screen was checked by the experimenter. Calibration was repeated if the accuracy result was not satisfactory. A calibration plot showed error bars for each of the nine positions, indicating the differences between the gaze point calculated by the eye tracker and the actual dot position. When the eye tracker could not detect enough calibration data, the participant was re-positioned in front of the eye tracker and checked for any factors that could have been interfering with pupil detection. After careful checking of calibration results, one participant had to be discarded due to insufficient fit. Average distance between participant and screen was 64 cm.

For all gaze data, the distinction between fixations and saccades was made using a velocity threshold of $30°/s$ (Tobii I-VT Fixation Filter; Olsen, 2012). Data visualization and analysis was performed using Tobii Pro Lab 1.204 software. First, mobile eye-tracking data was mapped to the corresponding instruction and problem-solving pages by also marking whenever students were focusing outside the worksheet, on their hand, or the answer sheet. Then, areas of interest (AOIs) were defined for quantitative analysis of all three instruction pages (Figures 3, 4). For gaze-data analysis during problem solving, one area of interest covering the vector field diagram was defined for all eight tasks (Figure 5, Right). Due to the identical design of the problem-solving pages, same-sized AOIs could be placed at the same position for all eight tasks.

To investigate differences in cognitive processing of the instruction, fixation count, mean fixation duration, and time to first fixation are compared between both groups (with and without drawing activities) by analyzing visual attention distribution on the defined AOIs of the pre-exercises and the divergence instruction.

As total fixation duration and fixation count were found to be dependent, thus showing analogous effects, only fixation count is reported (Susac et al., 2019). Furthermore, to analyze gaze behavior on the vector field diagram during problem solving, process-based metrics—that are, proportion and length of horizontal and vertical saccades within a tolerance margin of ±5°—are analyzed. For mobile eye tracking, saccades (and transitions) were mostly not tracked correctly as the eye-tracking glasses seem to lose track during gaze movement. This was indicated by comments such as "EyesNotFoundMovement" and "UnknownEyeMovement" in the raw gaze data. Thus, for mobile gaze-data analysis, only fixation-based metrics—that are, fixation count, mean fixation duration, and time to first fixation—are used (see Discussion Section 4.3). All comparisons are conducted by use of standard methods of quantitative statistics (e.g., *t*-tests) and by referring to the interpretations of Cohen (1988).

3. Results

3.1. Study 1

Students' performance improved after instruction, as shown by the increase in their accuracy in the concept test (from 0.76±0.23 to 0.85 ± 0.21) and in solving the initial problem (from 0.39 ± 0.49 to

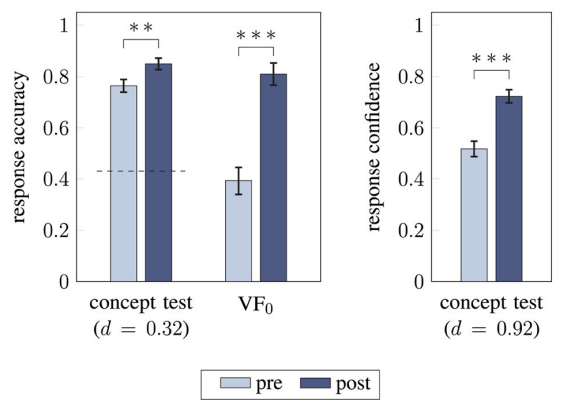


FIGURE 6
Comparison of students' performance before and after instruction using paired *t*-tests and McNemar-test (two-sided). Response accuracy for concept test and initial problem **(Left)** as well as response confidence for the concept test **(Right)** are compared between pre and post (**/*** statistical significance ($p < 0.01$ / $p < 0.001$), effect size *d*, the dashed line indicates the guessing probability, error bars represent 1 SEM).

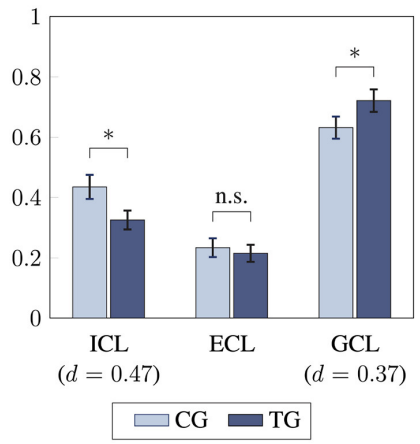


FIGURE 8
Comparison of students' perceived cognitive load in control and treatment group using unpaired *t*-tests (one-sided). Intrinsic cognitive load (ICL), extraneous cognitive load (ECL), and germane cognitive load (GCL) are compared between treatment group (TG) and control group (CG; * statistical significance ($p < 0.05$), n.s. "(statistically) not significant" indicating p-values > 0.05, effect size *d*, error bars represent 1 SEM).

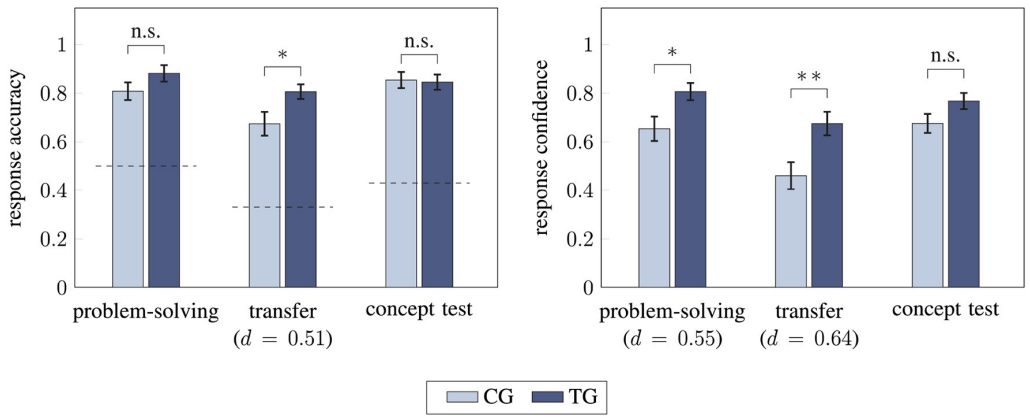


FIGURE 7
Comparison of students' performance in control and treatment group using unpaired (Welch) *t*-tests (two-sided). Response accuracy **(Left)** and response confidence **(Right)** for the problem-solving tasks, the transfer tasks, and the concept test are compared between treatment group (TG) and control group (CG; */** statistical significance ($p < 0.05$/$p < 0.01$), n.s. "(statistically) not significant" indicating p-values > 0.05, effect size *d*, the dashed lines indicate the guessing probability, error bars represent 1 SEM).

TABLE 3 Comparison of fixation count (FC), mean fixation duration (MFD in s), and time to first fixation (TFF in s) for the defined areas of interests (AOIs) on pre-exercises and divergence instruction between treatment group (TG) and control group (CG; mean, standard deviation, *p*-values of two-sided (Welch) *t*-tests for independent samples, n.s. "(statistically) not significant" indicating p-values > 0.05, effect size *d*; gaze data was recorded using mobile eye tracking).

AOI	Metric	TG	CG	*p*	*d*	TG	CG	*p*	*d*
Pre-exercise		Partial derivatives I				Partial derivatives II			
Instruction	FC	342.4 ± 143.2	202.3 ± 112.1	**0.005**	1.08	196.3 ± 81.7	125.4 ± 67.7	**0.013**	0.94
	MFD	0.59 ± 0.32	0.69 ± 0.60	n.s.	...	0.51 ± 0.28	0.51 ± 0.26	n.s.	...
	TFF	0.3 ± 0.6	0.1 ± 0.4	n.s.	...	0.5 ± 1.0	0.2 ± 0.6	n.s.	...
Task	FC	241.7 ± 104.6	81.0 ± 49.3	< **0.001***	1.93	154.5 ± 54.4	49.5 ± 28.3	< **0.001***	2.37
	MFD	0.57 ± 0.29	0.40 ± 0.19	n.s.	...	0.49 ± 0.25	0.43 ± 0.19	n.s.	...
	TFF	11.3 ± 10.9	16.7 ± 16.5	n.s.	...	1.3 ± 1.8	1.9 ± 6.7	n.s.	...
Information	FC	25.6 ± 13.9	30.1 ± 30.9	n.s.	...	34.4 ± 23.9	30.6 ± 27.0	n.s.	...
	MFD	0.79 ± 0.57	0.49 ± 0.26	n.s.*	...	0.54 ± 0.42	0.66 ± 0.58	n.s.	...
	TFF	4.9 ± 12.6	1.5 ± 2.3	n.s.	...	60.6 ± 40.9	34.9 ± 19.2	n.s.*	...
Divergence instruction									
Definition	FC	30.1 ± 18.9	30.7 ± 20.6	n.s.	...				
	MFD	0.66 ± 0.56	0.61 ± 0.47	n.s.	...				
	TFF	2.3 ± 5.4	2.3 ± 5.2	n.s.	...				
Strategy	FC	181.6 ± 91.1	121.1 ± 82.5	**0.059**	0.69				
	MFD	0.52 ± 0.41	0.45 ± 0.32	n.s.	...				
	TFF	18.9 ± 18.5	16.4 ± 8.7	n.s.*	...				
Diagram	FC	134.7 ± 74.2	79.6 ± 65.0	**0.034**	0.79				
	MFD	0.79 ± 0.47	0.85 ± 0.94	n.s.	...				
	TFF	10.7 ± 10.4	13.7 ± 12.8	n.s.	...				
Hint	FC	13.2 ± 10.4	16.0 ± 22.8	n.s.	...				
	MFD	0.50 ± 0.35	0.69 ± 0.55	n.s.	...				
	TFF	155.5 ± 98.0	115.4 ± 48.1	n.s.*	...				

* Welch *t*-test due to a lack of homogeneity of variance.

0.81 ± 0.40) reflecting small sized effects [$t(83) = -3.0$, $p = 0.004$, $d = 0.32$ and $\mathcal{X}^2(1) = 24.6$, $p < 0.001$, $OR = 1.098$; Figure 6]. After instruction, students' problem-solving and transfer scores were 0.85 ± 0.23 and 0.74 ± 0.26, respectively. Further, response confidence in the concept test increased significantly with large effect size [$t(83) = -8.4$, $p < 0.001$, $d = 0.92$].

While working with the instruction, students in the treatment and the control group answered the included questions equally [0.89 ± 0.18 and 0.90 ± 0.16 respectively, $p = 0.80$]. After instruction, the problem-solving score and the concept test score did not differ significantly between treatment and control group ($p = 0.14$ and $p = 0.85$) with both groups reaching performances above 80% (Figure 7; for example, for problem solving 0.88 ± 0.22 for the treatment group and 0.81 ± 0.23 for the control group). Students in the treatment group scored higher in the transfer tasks than those in the control group (0.81 ± 0.20 and 0.67 ± 0.31, respectively) and this difference was statistically significant with medium effect size [Welch $t(66.9) = 2.3$, $p = 0.02$, $d = 0.51$]. Additionally, students' confidence level in the treatment and the control group differed significantly in both the problem-solving and the transfer tasks, with medium effect sizes [Welch $t(72.5) = 2.5$, $p = 0.02$, $d = 0.55$ and $t(82) = 2.9$, $p = 0.004$, $d = 0.64$]. For the concept test, no such effect was found ($p = 0.08$). Additionally, there were no significant interaction effects between time and group for response accuracy or response confidence in the concept test ($p = 0.41$ and $p = 0.91$).

Furthermore, students in the treatment group reported significantly lower intrinsic cognitive load and higher germane cognitive load compared to those in the control group (Figure 8). The differences in intrinsic and germane cognitive load had small effect sizes [$t(82) = -2.2$, $p = 0.02$, $d = 0.47$ and $t(82) = 1.7$, $p = 0.0045$, $d = 0.37$]. No significant difference was found in extraneous cognitive load between the two groups ($p = 0.66$).

3.2. Study 2

3.2.1. Mobile eye-tracking analysis of pre-exercise and divergence instruction

Students fixation count on the vector field diagram of the initial problem VF_0 was 26.4 ± 19.5 with a mean fixation duration of (0.59 ± 0.39) s, which did not significantly differ between treatment and control group ($p = 0.91$ and $p = 0.91$). In average, students visited the first pre-exercise page (177.37 ± 73.15) s, the second pre-exercise page (122.5 ± 48.5) s, and the divergence instruction page (232.6 ± 93.5) s. Average visit durations differed significantly between the groups ($p < 0.001$, $p < 0.001$, and $p = 0.004$, respectively). More precisely, the treatment group visited all three pages significantly longer: the pre-exercise pages (383.1 ± 73.6) s [vs. (205.6 ± 33.4) s for the control group] and the divergence instruction page (275.4 ± 83.5) s [vs. (184.1 ± 81.5) s for the control group]. Results of detailed gaze analysis for the defined AOIs on the pre-exercise pages and the divergence instruction page are summarized in Table 3.

AOI-based analysis of visual behavior during completion of the pre-exercises on vector components and partial derivatives showed that students in the treatment group focused more frequently on the entire pre-exercise (AOI *Instruction*) and particularly on the drawing prompt (AOI *Task*). For both pre-exercise pages large differences were observed. These results suggest that students in the treatment group paid more attention to the task when they were asked to draw. Regarding the mean fixation duration and the time to first fixation on the defined AOIs, no group differences were found.

For the instruction on divergence, analysis revealed a significant between-subjects effect for the vector field diagram. It was more frequently fixated by students in the treatment group with medium effect size [$t(30.0) = 2.2$, $p = 0.034$ $d = 0.79$]. Further, the instructional strategy was more often fixated by the treatment group with medium effect size [$t(30.0) = 2.0$, $p = 0.059$, $d = 0.69$]. Neither the definition nor the hint were shown to be treated visually different by both groups. Regarding the mean fixation duration and the time to first fixation, no group differences were found. However, Table 3 indicates that students read the instruction from the top to the bottom, whereas the diagram was fixated slightly faster than the strategy by the treatment group [(18.9 ± 18.5) s strategy vs. (10.7±10.4) s diagram] and the control group [(16.4±8.7) s strategy vs. (13.7 ± 12.8) s diagram].

3.2.2. Mobile eye-tracking analysis VF_{1-4} and remote eye-tracking analysis of VF_{5-8}

In the first part of the assessment (mobile eye tracking, VF_{1-4}), the subjects' average total visit duration on the four task pages was (43.0 ± 13.6) s with no differences between the groups ($p = 0.20$). Additionally, the average fixation count of all subjects was 32.9 ± 18.9 with a mean fixation duration of (0.54 ± 0.34) s. Comparison of fixation-based metrics on the vector field diagram revealed no significant differences between treatment and control group (Table 4). A tendency for the control group to look at the diagram more frequently was observed, but it was not statistically significant.

TABLE 4 Comparison of fixation count (FC), mean fixation duration (MFD in s), and time to first fixation (TFF) on the vector field diagram for vector field plots VF_{1-8} and saccadic count (SC), proportion of horizontal and vertical saccades (SCP_H and SCP_V), and saccadic length of horizontal and vertical saccades (SL in pixels) on the vector field diagram for vector field plots VF_{5-8} between treatment group (TG) and control group (CG; mean, standard deviation, *p*-values of two-sided (Welch) *t*-tests for independent samples, n.s. "(statistically) not significant" indicating *p*-values > 0.05, effect size *d*).

Variable	TG	CG	*p*	*d*
VF_{1-4} (mobile eye tracking)				
FC*	28.1 ± 11.6	38.3 ± 24.0	n.s.	...
MFD	0.56 ± 0.32	0.51 ± 0.38	n.s.	...
TFF	1.7 ± 1.9	1.4 ± 1.7	n.s.	...
VF_{5-8} (remote eye tracking)				
FC*	38.9 ± 12.7	52.5 ± 19.9	0.002	0.82
MFD	0.27 ± 0.06	0.24 ± 0.06	n.s.	...
TFF	0.1 ± 0.3	0.09 ± 0.3	n.s.	...
SC	36.4 ± 12.3	49.7 ± 19.2	0.004	0.83
SCP_H	0.19 ± 0.07	0.21 ± 0.05	n.s.	...
SCP_V	0.14 ± 0.05	0.13 ± 0.05	n.s.	...
SL*/**	175.7 ± 140.9	192.8 ± 155.8	0.002	0.11

* Welch *t*-test due to a lack of homogeneity of variance.
** Reference: average distance between two adjacent vectors in the vector field diagram is 160 pixels.

In the second part of the assessment (computer-based remote eye tracking, VF_{5-8}), subjects spent in average (18.7 ± 7.1) s on the four task pages, without significant group differences ($p = 0.08$). Eye-tracking analysis for selected metrics on the vector field diagram are summarized in Table 4. By comparing treatment and control group, students in the treatment group fixated significantly less and performed significantly less saccades with large effect sizes [Welch $t(51) = -3.0$, $p = 0.002$, $d = 0.82$ and $t(51) = -3.0$, $p = 0.004$, $d = 0.83$]. In addition, mean fixation duration did not differ significantly between the groups, with the fixation duration varying between different fixations (Figure 9, Right). Further, there was a tendency for students in the control group to perform a higher percentage of horizontal saccades and for students in the treatment group to perform a higher percentage of vertical saccades than the respective other group; but no significant differences were found. The saccade plots (Figure 9, Left) indicate symmetrical gaze behavior along the coordinate directions for both groups. Oblique gaze directions were hardly found, regardless of group assignments. Last, students in the treatment group made significantly shorter horizontal and vertical saccades on the diagram with small effect size [Welch $t(2867.4) = -3.1$, $p = 0.002$, $d = 0.11$]. Average saccade length of the horizontal and vertical saccades on the diagram corresponds approximately to the distance between adjacent vectors (see Figure 9, Right). Regarding the time to first fixation, no group differences were found.

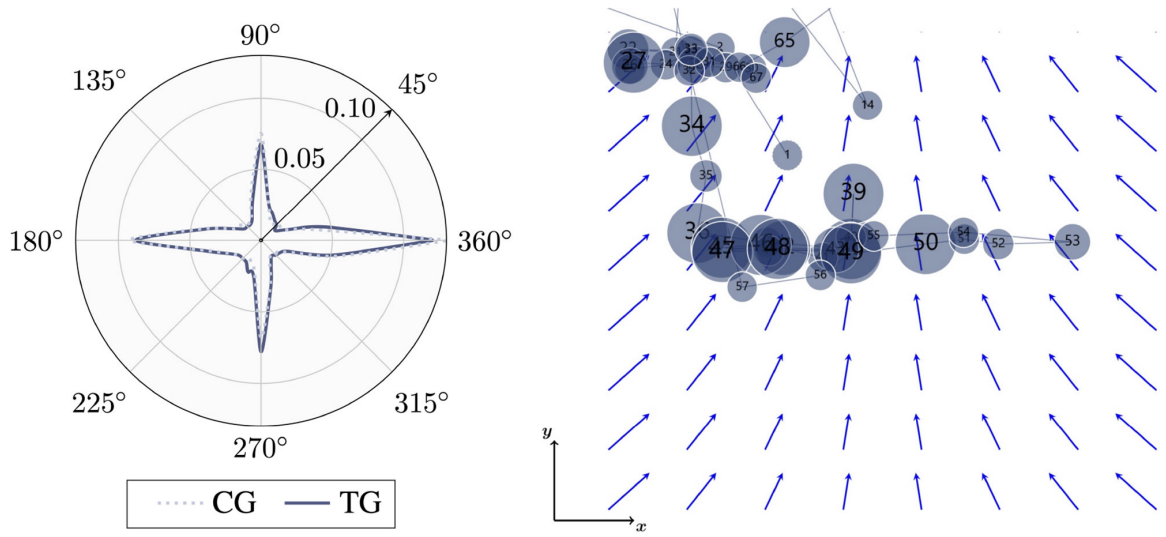


FIGURE 9
Polar distribution of saccade directions on the vector field diagrams VF_{5-8} for treatment group TG and control group CG **(Left)** and scanpath of a student from the treatment group (fixations are visualized by numbered circles; circle size relates to fixation duration) visually comparing adjacent vectors **(Right)**. Gaze data was recorded using remote eye tracking.

4. Discussion

In general, the instruction used in this study is based on prior work by Klein et al. (2018, 2019, 2021), which has been expanded upon theory and empirical findings by drawing activities and pre-exercises on vector decomposition and partial derivatives. Specifically, the prior work comprises eye-tracking studies that analyzed gaze behavior during instruction processing and subsequent problem-solving, which is also part of this study. Moreover, the study sample used in the prior studies and in this study are comparable, as all participants were first-year students at a German university with comparable prior knowledge. Due to the material development and a comparable study design and sample, in the following, the results of this study will be discussed in reference to the aforementioned prior work.

4.1. Study 1

4.1.1. Impact of pre-exercise and divergence instruction on students' achievement (RQ1)

Before instruction, students showed high prior knowledge regarding decomposition of vectors and a high conceptual understanding of divergence (Table 1). But only 39% of them were able to evaluate the divergence of a vector field diagram—a finding that was also reported by previous studies (Singh and Maries, 2013; Baily et al., 2016; Klein et al., 2018, 2019, 2021). After instruction with or without drawing activities, students' accuracy in judging a vector field's divergence and even their response accuracy and confidence in the concept test increased significantly. Then, 81% of the students evaluated the divergence of the initial vector field correctly. Moreover, they achieved a mean score of 85% for all eight vector fields in the problem-solving phase as well as for the concept test. These results underline the educational impact of the instruction, on the one hand, and going beyond, further emphasize the value of instructional support using multiple representations for complex physics concept, on the other hand.

Compared to previous, very similar studies, where students achieved scores of 69% after completing an integral and a differential instruction (Klein et al., 2018) and 77% after being instructed with or without visual cues (Klein et al., 2019), the instruction used here was able to contribute to an even higher improvement in judgment of a vector field's divergence. These findings particularly indicate the added value of the pre-exercises on vector decomposition and partial derivatives which support specific engagement with and learning of the two main concepts that are crucial for divergence. Following theories from cognitive psychology, by staggering the instruction as a step-by-step guide to the main explanation on divergence, the instruction is adapted to the limited working memory capacity (Baddeley, 1986; Rosenshine, 1995). In light of such an instruction as a step-by-step strategy, one could argue that students just learned how to follow the steps, but did not get a superordinate understanding of the underlying concepts—that are, vector decomposition and partial derivatives. However, the high transfer score (74%) referring to superordinate knowledge of partial derivatives beyond divergence, speaks against this effect and indicates an actual growth in conceptual understanding of students from both groups. This conclusion can be supported by comparing the findings with results from Klein et al. (2019), who referred to a matched transfer score of 54% when judging divergence and curl.

4.1.2. Impact of drawing activities on performance measures and cognitive load (RQ2, RQ3, H1)

The instructional support in the treatment group included drawing activities, such as highlighting rows and columns or sketching vector components, which was not provided in the control group. Comparing the results in the transfer tasks (loosely linked with the instruction) students from the treatment group performed particularly better and responded with higher confidence. The transfer tasks covered the concepts of covariation and partial derivatives, and went beyond mere step-by-step instructions on divergence. Our conclusion is that the drawing activities significantly enhanced students' understanding of vector fields and related concepts, such as covariation. Moreover, significant between-subject effects concerning students' perceived intrinsic and germane cognitive load indicated that the drawing activities supported and facilitated students' learning. As germane cognitive load refers to working memory resources that the learner devotes dealing with the matter to be learned, high values of germane cognitive load are associated with targeted devotion of working memory resources and optimized instructional procedures (Sweller, 2010). The aforementioned findings are in line with theories from cognitive psychology that promoted drawing as a powerful learning strategy in multi-representational learning environments by enhancing an effective use of working memory capacities (Bilda and Gero, 2005; Ainsworth et al., 2011; Kohnle et al., 2020; Ainsworth and Scheiter, 2021).

Comparisons between two groups during problem solving and in the concept test on divergence (close to instruction) showed that drawing activities did not yield to better performance, but students had more confidence in their answers. The latter is an equally positive outcome of effective teaching (Lindsey and Nagel, 2015; Klein et al., 2017, 2019). With students from the treatment group achieving a mean score of 88% during problem solving, drawing generated even higher learning outcomes then instructional support including visual cues (82% accuracy; Klein et al., 2019). Similar high performance scores during problem solving were also found for the control group (81%), indicating ceiling effects. These results imply that for tasks close to instruction, the impact of pre-exercises prevailed effects caused by the drawing activities. Here, further research regarding the actual impact of the pre-exercises by systematic manipulation of the instruction is required. Additionally, the positive correlation between performance and confidence that was found in previous studies also regarding instruction-based learning of divergence (Lindsey and Nagel, 2015; Klein et al., 2017, 2019) could be confirmed in this study.

4.2. Study 2

4.2.1. Visual processing of pre-exercises and divergence instruction (RQ4a)

During the instruction, students completed two pages of pre-exercises focused on vector decomposition and partial derivatives and one main instruction page on a visual interpretation of divergence. Since mean fixation duration did not differ between treatment and control group, it can be assumed that students invested the same cognitive effort for learning (Rayner, 1998; Ozcelik et al., 2009). Analysis of the average visit duration regarding the instructional material revealed significant group differences, i.e., students from the treatment group visited all three pages longer than students from the control group. More precisely, the treatment group spent almost twice as much time on the pre-exercise pages compared to the control group, while both groups scored high in the questions contained. Gaze differences were particularly found to result from more frequent fixations on the decomposition task stems. In this process, students systematically manipulated x or y components of vectors, either through drawing or mental imagination, to describe their changes along a row or column. Based on the eye-mind hypothesis, the drawing tasks facilitated a deeper processing of vector decomposition and the evaluation of their changes along coordinate directions, as represented by partial derivatives (Wu and Liu, 2022). Moreover, as both groups spent most of the time fixating the decomposition tasks, it can be assumed that pre-exercises provided a helpful foundation for the subsequent instruction on divergence.

In reference to the visual treatment of the divergence instruction, the findings from Klein et al. (2019) can be drawn upon, as the authors conducted eye-tracking analysis on a similar instruction that included and excluded visual cues. Average visit duration in the study by Klein et al. (2019, 106.8 ± 35.9 s) was similar to the control group's average visit duration in the study reported here, whereas the treatment group's average visit duration was found to be significantly higher. Moreover, definition of AOIs revealed that visual behavior on the diagram reflected the largest difference between students instructed with and without drawing activities—a result, that was also found by Klein et al. (2019, 2021). In general, while here fixation-based metrics for the AOIs *Diagram* and *Strategy* were higher compared to the results reported by Klein et al. (2019), visual attention on the AOIs *Definition* and *Hint* was less pronounced. In the study reported here, students fixated most on the AOIs *Strategy* and *Diagram*, whereas results for the control group in this study were mostly similar to the treatment group in the study by Klein et al. (2019). Thus, visual attention in this study was not evenly distributed over the whole divergence instruction page, but focused on the vector field diagram and the adjacent instructional text. This asymmetric distribution was particularly pronounced for the treatment group. By comparing the eye-tracking results of the previous study by Klein et al. (2019) with those of the study presented here, it thus appeared that drawing activities in the divergence instruction lead to even higher visual attention and, following the eye-mind hypothesis, deeper cognitive processing of the instruction's kernel than adding visual cues to the diagram (Wu and Liu, 2022). This is particularly remarkable since Klein et al. (2019) did not introduce a pre-exercise on component decomposition and partial derivatives which already prefigured central aspects of the divergence instruction. These findings are in line with previous results and theories from cognitive psychology reporting that drawing supported a deeper engagement with details and important parts within a learning environment (Hellenbrand et al., 2019; Kohnle et al., 2020; Ainsworth and Scheiter, 2021). This further underlines the educational impact of drawing activities. As such, eye-tracking data analysis during instruction-based learning

allowed to explain the group differences regarding response confidence and cognitive load during problem solving (Section 4.1.2). However, it has to be noted that in the study by Klein et al. (2019) definition and hint were more elaborated than in the present study. Additionally, when comparing study results, the impact of the administration format needs to be taken into account, as in the studies by Klein et al. (2019, 2021) students completed the instruction on a computer screen and in the study reported here the instruction was given on physical paper sheets. Further, Klein et al. (2019, 2021) used remote eye-tracking, while in this study mobile gaze-data analysis was exploited (discussion see Section 4.3).

4.2.2. Gaze behavior during problem-solving (RQ4b)

In the problem-solving phase, visual behavior was analyzed using mobile as well as remote eye tracking. Comparing students visual behavior on VF_{1-4} with the initial problem VF_0 indicated that both instructions (with and without drawing activities) influenced students' visual handling of vector field diagrams. While no significant group differences for the first four tasks were found (discussion see Section 4.3), students from the treatment group performed significantly less fixations and saccades on the vector field diagram then students from the control group—a tendency that, however, was also indicated in the mobile gaze data. Since there were no differences in the mean fixation duration, this result also means that students from the treatment group needed less time for responding. In previous research, fewer fixations, and thus fast finding of a solution was shown to be associated with expertise (Reingold et al., 2001; Chi, 2006; Susac et al., 2014; Klein et al., 2018). In line with the theory of long-term working memory, which says that experts encode and retrieve information more rapidly than novices (Ericsson and Kintsch, 1995), fewer fixation counts are indicators of such rapid procedures (Gegenfurtner et al., 2011).

Moreover, students in the treatment group were shown to perform significantly shorter horizontal and vertical saccades on the vector field diagram. Since their mean length was close to the mean distance between two adjacent vectors, they exhibited behaviors that indicate a systematic comparison of adjacent vectors along coordinate directions (Figure 9, Right). These findings are in line with results in a previous study by Klein et al. (2018), where best-performing students were found to perform significantly shorter saccades compared to worst-performing students. Moreover, a study by Chen et al. (2014), which investigated students' gaze behavior during working on text- and picture based physics concept tasks, revealed that the mean saccade distance negatively predicts the success of retrieval performance in picture presentations, suggesting a greater probability that students will answer correctly if they make shorter saccade movements. Hence, the positive effect of drawing activities for learning of divergence which was found regarding different performance and cognitive load indicators (Section 4.1.2) and which is in line with theories from cognitive psychology, could be further supported by gaze-data analysis during problem solving.

Furthermore, the proportion of horizontal and vertical saccades on the vector field diagram, showed no significant differences between treatment and control group, however, both groups performed over 30% of horizontal and vertical saccades. For reference, given an equal distribution of gaze directions, approximately 11% of all gaze directions would be horizontal and vertical saccades (referring to a tolerance margin of $\pm 5^{\circ}$). As a high proportion of horizontal and vertical saccades was shown to indicate a systematic handling of vector field plots by reflecting comparisons of vector components along the coordinate directions (Klein et al., 2018, 2019), these findings suggest expert-like procedures for students from both groups. Saccadic angle polar distribution (Figure 9, Left) supported this result as a symmetric distribution, where horizontal and vertical directions are pronounced whereas oblique directions are avoided, was associated with expertise in previous studies (Klein et al., 2018, 2019, 2021). While horizontal eye movements were found to be commonly dominant, for example, when looking at pictures, due to oculomotor eye factors and cultural reading habits, vertical eye movements are atypical and, therefore, can be associated with conscious problem-solving processes (Foulsham et al., 2008; Klein et al., 2021).

4.3. Methodological consideration: mobile and remote eye tracking in learning and assessment scenarios

Previous eye-tracking studies commonly used remote gaze data collection to analyze learning and assessment behavior by presenting work sheets, instructions, or tasks on a screen (Hahn and Klein, 2022a). However, in interactive settings, such as drawing-based learning, this method can no longer be applied. Then, mobile eye-tracking glasses provide the possibility to analyze cognitive processes by enabling a nearly natural setting and by not hindering the constructive process (Hellenbrand et al., 2019; Jarodzka et al., 2021). In contrast to typical methods used in such scenarios, for example, questionnaires and interviews, mobile gaze data analysis allows to gather data during actual behavior, thus increasing objectiveness of the measurement (Mayr et al., 2009). However, to the best of our knowledge, only few studies exploited mobile eye tracking in learning scenarios thus far (Hahn and Klein, 2022a). By investigating mobile eye gaze during learning with a drawing-based instruction, study 2 contributes to this line of research.

Further, by examining the same problem-solving task with both mobile and remote eye-tracking, first indications for a comparison of both eye-tracking methods in STEM, and particularly physics, education research assessment scenarios can be provided. Reconsidering the eye-tracking results from a methodological perspective, it was noticeable that students spent more than twice as much time per task in the mobile eye-tracking phase compared to the remote eye-tracking phase. In addition to learning- and routine-related effects, it seems reasonable to assume that this difference was also due to the method of eye-tracking data collection. Recording with glasses is unfamiliar, particularly for non-eyeglass wearers, and makes them more aware of the tracking (Mayr et al., 2009). This can lead to uncertainty and might influence students' behavior during assessment. Additionally, working on paper allows for active manipulation of the materials beyond the intended drawings, for example, by marking or taking notes, which are not available when the stimulus is given on a screen (Mayr et al., 2009). Furthermore, in the study presented here, it was noticeable

that the glasses provide higher values for mean fixation duration and time to first fixation, while fixation count is significantly lower compared to the remote eye-tracking data when completing the same task. Consequently, mobile eye tracking showed no significant group differences regarding fixation-based metrics while remote eye-tracking did. Again besides learning and routine-related effects, this might be due to the glasses lower sampling rate and accuracy (Mayr et al., 2009). Particularly, the intermediate step of (manually or automatically) mapping video-recorded eye-tracking data to two-dimensional snapshots of the materials affects data accuracy. In case of manual mapping, fixations shown in the video are manually assigned to the corresponding location on the snapshot; saccades, in contrast, are automatically transferred without mapping (Tobii Pro Lab 1.204 software). Given the large number of fixations per video, this requires high time expenditure and leads to great error potential (e.g., skipping of fixations, inaccurate positioning). As a consequence, small effects that require a high level of measurement precision, for example, when analyzing mean fixation duration, or investigation of small AOIs with only a few fixations, can not be resolved precisely by the mobile gaze data.

Additionally, manually mapped gaze data and fixed AOIs only allow to illustrate processes of minimal interaction with the environment. However, to track processes in constructive settings, automatic adapting AOIs are required which are rarely available thus far (Wolf et al., 2018). Moreover, a look at the raw data of the eye-tracking glasses showed incomplete recordings of gaze paths as saccades, in particular, were mostly not completely tracked although the eye tracker indicated to have recorded a high percentage of gaze samples. However, as the calibration was system-controlled, no individual adjustment could be done. Additionally, accuracy is reduced as calibration refers to a fixation distance of 0.5–1 m which, however, continuously changes during data collection—a problem that was also reported to occur in other settings (Mayr et al., 2009). Particularly, analysis of saccadic angles and lengths is strongly affected by the described sources of error. To summarize the experiences in this study, mobile eye tracking provided additional insight into students' cognitive processes during drawing-based learning, however, the data needs to be evaluated and interpreted with caution. Particularly in scenarios that require detailed analysis of specific (particularly small) AOIs or saccade-based procedures, for example, navigating along coordinate directions of vector fields, mobile eye-tracking data is hardly resilient which should be kept in mind in light of the high time requirements for gaze-data mapping.

4.4. Conclusion and future work

In this work, the impact of drawing activities in multi-representational, instruction-based learning in the context of vector fields was investigated in two studies through analysis of different performance measures and eye-tracking data. Besides showing an immense overall impact of the instruction on students' conceptual understanding and their accuracy of judging a vector field's divergence, drawing activities were shown to led to significantly higher learning outcomes in the transfer task. Furthermore, intrinsic cognitive load of the learning subject was lower for students instructed with drawing activities, which increased their germane cognitive load enabling to devote more working memory resources in dealing with the subject matter to be learned. Moreover, eye-tracking analysis revealed that students instructed with drawing activities fixated important parts of the pre-exercises and the divergence instruction, that are, decomposition tasks, vector field diagram, and instructional text, more frequently. During subsequent assessment, both groups showed representation-specific, expert-like behaviors, such as comparing vectors in horizontal and vertical direction along the Cartesian coordinates, indicating a correct interpretation of partial derivatives. Furthermore, students instructed with drawing activities were found to be more effective compared to students instructed without drawing activities by fixating the vector field diagram less frequently in order to determine its divergence, and to systematically compare adjacent vectors along coordinate directions.

Concerning the value of this article for STEM education, it extends previous research on learning in the context of vector fields by showing how dedicated pre-exercises on vector decomposition and partial derivatives, on the one hand, and drawing activities, on the other hand, can further enhance previous instructions on divergence (Klein et al., 2018, 2019, 2021). An explicit focus on covariation for both groups, but particularly for those students who actively sketched them, not only supported students' visual knowledge of divergence, but was shown to actually deepened students' understanding of vector fields. For educational practice, the added value of a pre-exercise aimed at concrete practicing of vector decomposition and partial derivatives could be supported. However, since a systematic manipulation of the pre-exercise was not dedicated focus of this study, further research regarding its actual value and a meaningful design is required. To further continue this line of research, particularly regarding conceptual knowledge that could be transferred to associated concepts of vector fields, such as curl, huge potential emerge for combining drawing activities with other methods, for example, simulations (e.g., Kohnle et al., 2020; Ainsworth and Scheiter, 2021).

Although the instruction used here requires certain prior knowledge, and thus gears to university science students, some implications can also be transferred to other subjects and domains. For instructors, drawing activities aiming at step-by-step introducing a learning strategy or a problem-solving procedure can be recommended. Particularly, if most of the steps were usually done mentally or not explicitly introduced, drawing appears to be a promising learning method also beyond university learning, for example, in school.

From a methodological perspective, this article particularly benefited from existing prior work on previous divergence instructions and the same problem-solving task type (Klein et al., 2018, 2019, 2021), which enabled comparisons and conclusions regarding manipulations of the learning material and different methods of gaze-data collection. In this context, this article revealed valuable insights into mobile gaze-data collection and analysis in drawing-based learning and assessment scenarios, which were found to valuable complement performance and cognitive load data. However, although mobile eye tracking allowed to capture natural visual behaviors, particularly when the learner interacts with the learning environment, data obtained from eye-tracking

glasses proved to be rather unsuitable for detailed analysis on a process level. In problem solving, a non-interactive setting, remote gaze data was shown to provide more reliable resolution of processes and strategies. By discussing limitations of mobile gaze-data analysis in educational settings and comparing mobile and remote eye tracking, this article may provide guidance and support for other researchers, who plan to study such cognitive processes with eye tracking. Specifically, a huge potential of mobile eye tracking emerges, for example, for collaborative learning and in experimental settings (e.g., Chien et al., 2015; Schneider et al., 2018), thus further development, for example, concerning supported mapping and automatic adaption of AOIs, is two-fold, required and promising.

Data availability statement

The raw data supporting the conclusions of this article will be made available by the authors, without undue reservation.

Ethics statement

Ethical review and approval was not required for the study on human participants in accordance with the local legislation and institutional requirements. The patients/participants provided their written informed consent to participate in this study.

Author contributions

PK supervised data collection and gave feedback to the first draft of the manuscript. LH performed the statistical analyses and wrote the first draft of the manuscript. All authors contributed to conception and design of the study. All authors contributed to the article and approved the submitted version.

Funding

Students' expense allowance was funded by the Joachim Herz Foundation under Project No. 850030 (eyePhysics). Further, we acknowledge support by the Open Access Publication Funds of the Göttingen University.

Conflict of interest

The authors declare that the research was conducted in the absence of any commercial or financial relationships that could be construed as a potential conflict of interest.

Publisher's note

All claims expressed in this article are solely those of the authors and do not necessarily represent those of their affiliated organizations, or those of the publisher, the editors and the reviewers. Any product that may be evaluated in this article, or claim that may be made by its manufacturer, is not guaranteed or endorsed by the publisher.

Supplementary material

The Supplementary Material for this article can be found online at: https://www.frontiersin.org/articles/10.3389/feduc.2023.1162281/full#supplementary-material

References

Ainsworth, S. E. (1999). The functions of multiple representations. *Comput. Educ.* 33, 131–152. doi: 10.1016/S0360-1315(99)00029-9

Ainsworth, S. E., Prain, V., and Tytler, R. (2011). Drawing to learn in science. *Science* 333, 1096–1097. doi: 10.1126/science.1204153

Ainsworth, S. E., and Scheiter, K. (2021). Learning by drawing visual representations: Potential, purposes, and practical implications. *Curr. Direct. Psychol. Sci.* 30, 61–67. doi: 10.1177/0963721420979582

Alemdag, E., and Cagiltay, K. (2018). A systematic review of eye tracking research on multimedia learning. *Comput. Educ.* 125, 413–428. doi: 10.1016/j.compedu.2018.06.023

Ambrose, B. S. (2004). Investigating student understanding in intermediate mechanics: Identifying the need for a tutorial approach to instruction. *Am. J. Phys.* 72, 453–459. doi: 10.1119/1.1648684

Baddeley, A. (1986). *Working Memory*. Oxford, UK: Oxford University Press.

Baily, C., Bollen, L., Pattie, A., Van Kampen, P., and De Cock, M. (2016). "Student thinking about the divergence and curl in mathematics and physics contexts," in *Proceedings of the Physics Education Research Conference 2016* (College Park, MD; New York, NY: American Institute of Physics), 51–54. doi: 10.1119/perc.2015.pr.008

Barniol, P., and Zavala, G. (2014). Test of understanding of vectors: a reliable multiple-choice vector concept test. *Phys. Rev. ST Phys. Educ. Res.* 10, 010121. doi: 10.1103/PhysRevSTPER.10.010121

Bilda, Z., and Gero, J. S. (2005). Does sketching off-load visuo-spatial working memory. *Stud. Desig.* 5, 145–160.

Bollen, L., Van Kampen, P., Baily, C., and De Cock, M. (2016). Qualitative investigation into students' use of divergence and curl in electromagnetism. *Phys. Rev. Phys. Educ. Res.* 12, 020134. doi: 10.1103/PhysRevPhysEducRes.12.020134

Bollen, L., Van Kampen, P., Baily, C., Kelly, M., and De Cock, M. (2017). Student difficulties regarding symbolic and graphical representations of vector fields. *Phys. Rev. Phys. Educ. Res.* 13, 020109. doi: 10.1103/PhysRevPhysEducRes.13.020109

Bollen, L., Van Kampen, P., and De Cock, M. (2015). Students' difficulties with vector calculus in electrodynamics. *Phys. Rev. ST Phys. Educ. Res.* 11, 020129. doi: 10.1103/PhysRevSTPER.11.020129

Bollen, L., Van Kampen, P., and De Cock, M. (2018). Development, implementation, and assessment of a guided-inquiry teaching-learning sequence on vector calculus in electrodynamics. *Phys. Rev. Phys. Educ. Res.* 14, 020115. doi: 10.1103/PhysRevPhysEducRes.14.020115

Burkholder, E. W., Murillo-Gonzalez, G., and Wieman, C. (2021). Importance of math prerequisites for performance in introductory physics. *Phys. Rev. Phys. Educ. Res.* 17, 010108. doi: 10.1103/PhysRevPhysEducRes.17.010108

Chen, S.-C., She, H.-C., Chuang, M.-H., Wu, J.-Y., Tsai, J.-L., and Jung, T.-P. (2014). Eye movements predict students' computer-based assessment performance of physics concepts in different presentation modalities. *Comput. Educ.* 74, 61–72. doi: 10.1016/j.compedu.2013.12.012

Chi, M. T. (2006). "Two approaches to the study of experts' characteristics," in *The Cambridge handbook of expertise and expert performance*, eds K. A. Ericsson, N. Charness, P. J. Feltovich, and R. R. Hoffman (Cambridge, UK: Cambridge University Press), 21–30. doi: 10.1017/CBO9780511816796.002

Chien, K.-P., Tsai, C.-Y., Chen, H.-L., Chang, W.-H., and Chen, S. (2015). Learning differences and eye fixation patterns in virtual and physical science laboratories. *Comput. Educ.* 82, 191–201. doi: 10.1016/j.compedu.2014.11.023

Chiu, J. L., and Linn, M. C. (2014). Supporting knowledge integration in chemistry with a visualization-enhanced inquiry unit. *J. Sci. Educ. Technol.* 23, 37–58. doi: 10.1007/s10956-013-9449-5

Cohen, J. (1988). *Statistical Power Analysis for the Behavioral Sciences*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Cook, M. P. (2006). Visual representations in science education: the influence of prior knowledge and cognitive load theory on instructional design principles. *Sci. Educ.* 90, 1073–1091. doi: 10.1002/sce.20164

Ericsson, K. A., and Kintsch, W. (1995). Long-term working memory. *Psychol. Rev.* 102, 211–245. doi: 10.1037/0033-295X.102.2.211

Foulsham, T., Kingstone, A., and Underwood, G. (2008). Turning the world around: Patterns in saccade direction vary with picture orientation. *Vision Res.* 48, 1777–1790. doi: 10.1016/j.visres.2008.05.018

Gegenfurtner, A., Lehtinen, E., and Säljö, R. (2011). Expertise differences in the comprehension of visualizations: a meta-analysis of eye-tracking research in professional domains. *Educ. Psychol. Rev.* 23, 523–552. doi: 10.1007/s10648-011-9174-7

Gire, E., and Price, E. (2012). "Graphical representations of vector functions in upper-division E&M," in *AIP Conference Proceedings* (New York, NY: American Institute of Physics), 27–30. doi: 10.1063/1.3679985

Griffiths, D. J. (2013). *Introduction to Electrodynamics, 4th Edn*. Boston, MA: Pearson.

Hahn, L., and Klein, P. (2021). "Multiple Repräsentationen als fachdidaktischer Zugang zum Satz von Gauß - Qualitative Zugänge zur Interpretation der Divergenz von Vektorfeldern," in P*hyDid B-Didaktik der Physik-Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung*, eds J. Grebe-Ellis and H. Grötzebauch (Fachverband Didaktik der Physik, virtuelle DPG-Frühjahrstagung 2021), 95–100. Available online at: https://ojs.dpg-physik.de/index.php/phydid-b/article/view/1151/1237

Hahn, L., and Klein, P. (2022a). Eye tracking in physics education research: A systematic literature review. *Phys. Rev. Phys. Educ. Res.* 18, 013102. doi: 10.1103/PhysRevPhysEducRes.18.013102

Hahn, L., and Klein, P. (2022b). "Kognitive Entlastung durch Zeichenaktivitäten Eine empirische Untersuchung im Kontext der Vektoranalysis," in *Unsicherheit als Element von naturwissenschaftsbezogenen Bildungsprozessen*, eds S. Habig and H. van Vorst (Gesellschaft für Didaktik der Chemie und Physik, virtuelle Jahrestagung 2021), 384–387. Available online at: https://www.gdcp-ev.de/wp-content/tb2022/TB2022_384_Hahn.pdf

Hellenbrand, J., Mayer, R. E., Opfermann, M., Schmeck, A., and Leutner, D. (2019). How generative drawing affects the learning process: an eye-tracking analysis. *Appl. Cogn. Psychol.* 33, 1147–1164. doi: 10.1002/acp.3559

Hyönä, J. (2010). The use of eye movements in the study of multimedia learning. *Learn. Instr.* 20, 172–176. doi: 10.1016/j.learninstruc.2009.02.013

Jarodzka, H., Skuballa, I., and Gruber, H. (2021). Eye-tracking in educational practice: investigating visual perception underlying teaching and learning in the classroom. *Educ. Psychol. Rev.* 33, 1–10. doi: 10.1007/s10648-020-09565-7

Jung, K., and Lee, G. (2012). Developing a tutorial to address student difficulties in learning curl: a link between qualitative and mathematical reasoning. *Can. J. Phys.* 90, 565–572. doi: 10.1139/p2012-054

Just, M. A., and Carpenter, P. A. (1976). Eye fixations and cognitive processes. *Cogn. Psychol.* 8, 441–480. doi: 10.1016/0010-0285(76)90015-3

Klein, P., Hahn, L., and Kuhn, J. (2021). Einfluss visueller Hilfen und räumlicher Fähigkeiten auf die graphische Interpretation von Vektorfeldern: Eine Eye-Tracking-Untersuchung. *Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften* 27, 181–201. doi: 10.1007/s40573-021-00133-2

Klein, P., Müller, A., and Kuhn, J. (2017). Assessment of representational competence in kinematics. *Phys. Rev. Phys. Educ. Res.* 13, 010132. doi: 10.1103/PhysRevPhysEducRes.13.010132

Klein, P., Viiri, J., and Kuhn, J. (2019). Visual cues improve students' understanding of divergence and curl: evidence from eye movements during reading and problem solving. *Phys. Rev. Phys. Educ. Res.* 15, 010126. doi: 10.1103/PhysRevPhysEducRes.15.010126

Klein, P., Viiri, J., Mozaffari, S., Dengel, A., and Kuhn, J. (2018). Instruction-based clinical eye-tracking study on the visual interpretation of divergence: How do students look at vector field plots? *Phys. Rev. Phys. Educ. Res.* 14, 010116. doi: 10.1103/PhysRevPhysEducRes.14.010116

Kohnle, A., Ainsworth, S. E., and Passante, G. (2020). Sketching to support visual learning with interactive tutorials. *Phys. Rev. Phys. Educ. Res.* 16, 020139. doi: 10.1103/PhysRevPhysEducRes.16.020139

Lai, M.-L., Tsai, M.-J., Yang, F.-Y., Hsu, C.-Y., Liu, T.-C., Lee, S. W.-Y., et al. (2013). A review of using eye-tracking technology in exploring learning from 2000 to 2012. *Educ. Res. Rev.* 10, 90–115. doi: 10.1016/j.edurev.2013.10.001

Leopold, C., and Leutner, D. (2012). Science text comprehension: Drawing, main idea selection, and summarizing as learning strategies. *Learn. Instr.* 22, 16–26. doi: 10.1016/j.learninstruc.2011.05.005

Leppink, J., Paas, F., Van der Vleuten, C. P., Van Gog, T., and Van Merriënboer, J. J. (2013). Development of an instrument for measuring different types of cognitive load. *Behav. Res. Methods* 45, 1058–1072. doi: 10.3758/s13428-013-0334-1

Li, J., and Singh, C. (2017). Investigating and improving introductory physics students' understanding of symmetry and Gauss's law. *Eur. J. Phys.* 39, 015702. doi: 10.1088/1361-6404/aa8d55

Lindsey, B. A., and Nagel, M. L. (2015). Do students know what they know? Exploring the accuracy of students' self-assessments. *Phys. Rev. ST Phys. Educ. Res.* 11, 020103. doi: 10.1103/PhysRevSTPER.11.020103

Logie, R. H. (2014). *Visuo-Spatial Working Memory*. London: Psychology Press. doi: 10.4324/9781315804743

Mayr, E., Knipfer, K., and Wessel, D. (2009). "In-sights into mobile learning: An exploration of mobile eye tracking methodology for learning in museums," in *Researching Mobile Learning: Frameworks, Tools and Research designs*, eds G. Vavoula, N. Pachler, and A. Kukulska-Hulme (Oxford: Peter Lang), 189–204.

Nieminen, P., Savinainen, A., and Viiri, J. (2012). Relations between representational consistency, conceptual understanding of the force concept, and scientific reasoning. *Phys. Rev. ST Phys. Educ. Res.* 8, 010123. doi: 10.1103/PhysRevSTPER.8.010123

Olsen, A. (2012). Tobii I-VT Fixation Filter. *Tobii Technol.* 21, 4–19.

Ozcelik, E., Karakus, T., Kursun, E., and Cagiltay, K. (2009). An eye-tracking study of how color coding affects multimedia learning. *Comput. Educ.* 53, 445–453. doi: 10.1016/j.compedu.2009.03.002

Pepper, R. E., Chasteen, S. V., Pollock, S. J., and Perkins, K. K. (2012). Observations on student difficulties with mathematics in upper-division electricity and magnetism. *Phys. Rev. ST Phys. Educ. Res.* 8, 010111. doi: 10.1103/PhysRevSTPER.8.010111

Rau, M. A. (2017). Conditions for the effectiveness of multiple visual representations in enhancing STEM learning. *Educ. Psychol. Rev.* 29, 717–761. doi: 10.1007/s10648-016-9365-3

Rayner, K. (1998). Eye movements in reading and information processing: 20 years of research. *Psychol. Bull.* 124, 372–422. doi: 10.1037/0033-2909.124.3.372

Reingold, E. M., Charness, N., Pomplun, M., and Stampe, D. M. (2001). Visual span in expert chess players: Evidence from eye movements. *Psychol. Sci.* 12, 48–55. doi: 10.1111/1467-9280.00309

Rosenshine, B. (1995). Advances in research on instruction. *J. Educ. Res.* 88, 262–268. doi: 10.1080/00220671.1995.9941309

Schneider, B., Sharma, K., Cuendet, S., Zufferey, G., Dillenbourg, P., and Pea, R. (2018). Leveraging mobile eye-trackers to capture joint visual attention in co-located collaborative learning groups. *Int. J. Comput. Support. Collab. Learn.* 13, 241–261. doi: 10.1007/s11412-018-9281-2

Seufert, T. (2003). Supporting coherence formation in learning from multiple representations. *Learn. Instr.* 13, 227–237. doi: 10.1016/S0959-4752(02)00022-1

Shah, P., and Miyake, A. (1996). The separability of working memory resources for spatial thinking and language processing: an individual differences approach. *J. Exp. Psychol.* 125, 4–27. doi: 10.1037/0096-3445.125.1.4

Singh, C., and Maries, A. (2013). "Core graduate courses: a missed learning opportunity?," in *AIP Conference Proceedings* (New York, NY: American Institute of Physics), 382–385. doi: 10.1063/1.4789732

Smith, E. M. (2014). *Student & Textbook Presentation of Divergence [Master thesis]*. Corvallis, OR: Oregon State University.

Strohmaier, A. R., MacKay, K. J., Obersteiner, A., and Reiss, K. M. (2020). Eye-tracking methodology in mathematics education research: A systematic literature review. *Educ. Stud. Math.* 104, 147–200. doi: 10.1007/s10649-020-09948-1

Susac, A., Bubic, A., Planinic, M., Movre, M., and Palmovic, M. (2019). Role of diagrams in problem solving: An evaluation of eye-tracking parameters as a measure of visual attention. *Phys. Rev. Phys. Educ. Res.* 15, 013101. doi: 10.1103/PhysRevPhysEducRes.15.013101

Susac, A. N., Bubic, A., Kaponja, J., Planinic, M., and Palmovic, M. (2014). Eye movements reveal students' strategies in simple equation solving. *Int. J. Sci. Math. Educ.* 12, 555–577. doi: 10.1007/s10763-014-9514-4

Sweller, J. (2010). Element interactivity and intrinsic, extraneous, and germane cognitive load. *Educ. Psychol. Rev.* 22, 123–138. doi: 10.1007/s10648-010-9128-5

Tsai, M.-J., Hou, H.-T., Lai, M.-L., Liu, W.-Y., and Yang, F.-Y. (2012). Visual attention for solving multiple-choice science problem: an eye-tracking analysis. *Comput. Educ.* 58, 375–385. doi: 10.1016/j.compedu.2011.07.012

Wolf, J., Hess, S., Bachmann, D., Lohmeyer, Q., and Meboldt, M. (2018). Automating areas of interest analysis in mobile eye tracking experiments based on machine learning. *J. Eye Mov. Res.* 11, 1–11. doi: 10.16910/jemr.11.6.6

Wu, C.-J., and Liu, C.-Y. (2022). Refined use of the eye-mind hypothesis for scientific argumentation using multiple representations. *Instr. Sci.* 50, 551–569. doi: 10.1007/s11251-022-09581-w

Wu, S. P. W., and Rau, M. A. (2018). Effectiveness and efficiency of adding drawing prompts to an interactive educational technology when learning with visual representations. *Learn. Instr.* 55, 93–104. doi: 10.1016/j.learninstruc.2017.09.010

8 Digitalgestützte Visualisierung vektoranalytischer Konzepte

Wirksamkeitsuntersuchungen zeigten, dass auch die entwickelten multi-repräsentationalen text-bild-basierten Lehr-Lern-Materialien zur Divergenz nicht alle Schwierigkeiten von Lernenden bezüglich der qualitativen Interpretation partieller Ableitungen und der Übertragung auf ähnliche Konzepte überwinden konnten (Klein et al., 2018, 2019, 2021b, Kap. 7). Eine breite Forschungsbasis zum Lernen mit Simulationen und digitalen Visualisierungen legt nahe, dass digitalgestützte Werkzeuge eine wertvolle Unterstützung des text-bild-basierten Lernens vektoranalytischer Konzepte bieten können (Kap. 3.1.4.2). Bestehende Simulationen und dynamische Visualisierungen mit Vektorfelddiagrammen wurden bisher jedoch weder fachdidaktisch geleitet gestaltet noch bezüglich ihrer Wirksamkeit untersucht (Kap. 3.3). Aus diesem Grund wurde ein Vektorfeld-Visualisierungswerkzeug entwickelt, das den diagrammzentrierten Lehr-Lern-Ansatz aufgreift und durch dynamische und interaktive Elemente einen digitalgestützten Zugang zu verschiedenen Vektorfeldkonzepten bietet (Tab. 1). Die Funktionen des Werkzeugs adressieren dabei den qualitativen Ansatz der Interpretation von Vektorfelddiagrammen (Kap. 2.2) und berücksichtigen insbesondere bestehende Lern- und Verständnisschwierigkeiten im Umgang mit Vektorfelddarstellungen und -konzepten (Tab. 2). Zur Einführung in das Werkzeug wird zudem ein Erklärvideo der wesentlichen Variablen und Eigenschaften bereitgestellt (Kap. 3.1.4.2).
Im Rahmen einer Feldstudie wurde das Visualisierungswerkzeug in multi-repräsentationale Lernaufgaben zur Vektoranalysis eingebunden und in den Übungen zur Vorlesung „Experimentalphysik II: Elektromagnetismus“ (2. Studiensemester) eingesetzt (Kap. 9). Die Lernaufgaben folgten dabei bestehenden Ansätzen zum Lernen mit interaktiven Visualisierungen und enthielten gezielte Arbeitsaufträge, die das Lernen mit dem Werkzeug strukturieren und leiten (Kap. 3.1.4.2). Im Rahmen der Feldstudie wurde zum Zweck einer ersten Evaluation auch die Wahrnehmung des Werkzeugs durch die Lernenden, d. h. die Benutzer:innenfreundlichkeit und das Design ($N = 125$) sowie der didaktische Mehrwert ($N = 65$), erfasst. Die Ergebnisse tragen zu Forschungsziel FZ4 dieser Arbeit bei (Kap. 4.1).

Das Visualisierungswerkzeug ist online[1] frei verfügbar. Seine Entwicklung, Eigenschaften und die Evaluationsergebnisse wurden in dem folgenden Artikel publiziert:

> Hahn, L., Blaue, S. A., & Klein, P. (2024). A research-informed graphical tool to visually approach Gauss’ and Stokes’ theorems in vector calculus. *European Journal of Physics*, *45*(2), 025706. https://doi.org/10.1088/1361-6404/ad2390

Alle verwendeten Instrumente der Evaluation sind in Anhang A.2 dargestellt.

[1] https://wwwuser.gwdg.de/physik.didaktik/oer/v3ctor/

European Journal of Physics

PAPER • **OPEN ACCESS**

A research-informed graphical tool to visually approach Gauss' and Stokes' theorems in vector calculus

To cite this article: L Hahn *et al* 2024 *Eur. J. Phys.* **45** 025706

View the article online for updates and enhancements.

You may also like

- Vortex flow, a couple important theorems, and an introduction to distributions
A Arenas-Gullo, F Martínez-Manzano and A Fernández-Nieves
- Variations in the magnetic torque acting on a wire
Claudio Bonati
- Black hole thermodynamics, stringy dualities and double field theory
Alex S Arvanitakis and Chris D A Blair

This content was downloaded from IP address 80.187.120.185 on 23/02/2024 at 10:53

OPEN ACCESS
IOP Publishing European Journal of Physics
Eur. J. Phys. **45** (2024) 025706 (18pp) https://doi.org/10.1088/1361-6404/ad2390

A research-informed graphical tool to visually approach Gauss' and Stokes' theorems in vector calculus

L Hahn, S A Blaue and P Klein

Physics Education Research, Faculty of Physics, University of Göttingen, Friedrich-Hund-Platz 1, D-37077 Göttingen, Germany

E-mail: larissa.hahn@uni-goettingen.de

Received 2 August 2023, revised 4 November 2023
Accepted for publication 29 January 2024
Published 21 February 2024

Abstract

Gauss' and Stokes' theorems are fundamental results in vector calculus and important tools in physics and engineering. When students are asked to describe the meaning of Gauss' divergence theorem, they often use statements like this: 'The sum of all sources of a vector field in a region gives the net flux out of the region'. In order to raise this description to a mathematically sound level of understanding, we present an educational approach based on the visual interpretation of the vector differential operators, i.e. divergence and curl. As a starting point, we use simple vector field diagrams for a qualitative approach to connect both sides of the integral theorems, and present an interactive graphical tool to support this connection. The tool allows to visualise two-dimensional vector fields, to specify vector decomposition, to evaluate divergence and curl point wise, and to draw rectangles to determine surface and line integrals. From a meta-perspective, we situate this educational approach into learning with (multiple) representations. Based on prior research, the graphical tool addresses various learning difficulties of vector fields that are connected to divergence and curl. The tool was incorporated into the weekly lecture-based recitations of Physics II (electromagnetism) in 2022 and 2023, and we assessed various educational outcome measures. The students overall reported the tool to be intuitive and user-friendly (level of agreement 76%, $N = 125$), considered it helpful for understanding and recommended its use for introductory physics courses (level of agreement 65%, $N = 65$).

Original content from this work may be used under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 licence. Any further distribution of this work must maintain attribution to the author(s) and the title of the work, journal citation and DOI.

© 2024 The Author(s). Published on behalf of the European Physical Society by IOP Publishing Ltd

Eur. J. Phys. **45** (2024) 025706 L Hahn *et al*

Keywords: vector fields, Gauss' theorem, Stokes' theorem, visual understanding, graphical tool, divergence and curl

1. Introduction and educational background

Vector fields are important mathematical objects used, for example, to describe electromagnetic fields or velocity fields of fluids. As such, they are fundamental in physics and other scientific disciplines. Vector fields are typically represented graphically by a set of arrows indicating the direction and magnitude of the field. For example, velocity vectors can be assigned to every particle of a moving liquid, representing the speed and the direction of the moving particle. The velocity of the liquid in each point $\vec{r}$ then defines a vector field $\vec{v}(\vec{r})$. Likewise, vector fields can be described using mathematical equations. While equations are useful for quantitative calculations, vector field diagrams can present a lot of information at a glance, such as intensities or special field properties, for example, divergence or curl. These concepts play a major role in conservation laws that undergraduate physics students encounter in differential or integral form, for example, the continuity equation. In this context, a close connection to the integral theorem of Gauss is established which reflects the characteristics of a conservation law. Given a vector field $\vec{F}$ and a volume V with a (closed) boundary surface ∂V and its outer normal $\vec{n}$, Gauss' divergence theorem relates the volume integral of the divergence to the net flow across the boundary of the volume,

$$\int_V \operatorname{div} \vec{F} \, \mathrm{d}V = \oint_{\partial V} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{n} \ . \tag{1}$$

As its name already suggests and equation (1) shows, the central concept of Gauss' theorem is the divergence; hence, it addresses several mathematical and physical concepts that are directly connected to divergence, for example, flux through boundaries or sources and sinks. In the context of conservation laws, another theorem is of great importance for physics applications, namely Stokes' theorem. For a vector field $\vec{F}$, a surface A with outer normal $\vec{n}$, and a (closed) boundary ∂A with vector path element $\vec{l}$, Stokes' theorem describes the relation between the surface integral of the curl to the circulation along the boundary of the area,

$$\int_A \operatorname{rot}\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{n} = \oint_{\partial A} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \ . \tag{2}$$

In terms of form similar to Gauss' divergence theorem, Stokes' theorem focuses on the curl of a vector field, thus addressing corresponding concepts from mathematics and physics, i.e. partial derivatives and (surface and line) integration. Thus, both theorems are used to relate the local behaviour of the vector field to its global properties, providing valuable insights and facilitating calculations in various physical and mathematical contexts.

The importance of a sound understanding of vector calculus concepts is emphasised by a recent study which revealed that an extensive preparation in vector calculus is significantly related to students performance in an introductory electricity and magnetism course [1]. This result is consistent with the findings of other studies which have shown that a solid mathematical understanding is essential for fully grasping the principles of physics [2, 3]. In particular, Stokes' theorem fulfils all criteria of a threshold concept [4], which, if fully understood by physics students, represents a fundamental milestone in their physics studies. Mathematics will become increasingly enriched with physical content as we improve our understanding of the corresponding mathematical concept. Without this understanding, a

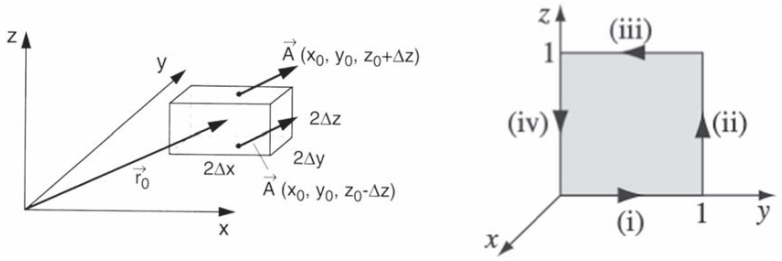


Figure 1. Three-dimensional approach to Gauss' divergence theorem (left) and calculation-based approach to Stokes' theorem (right) in textbooks and lectures [21, 22].

deeper comprehension of physics seems to be unattainable. In this article, we present a graphical vector field tool that takes empirical results on students' difficulties into account (section 1.1) and supports a visual understanding of Gauss' and Stokes' theorems (sections 1.2, 2, and 3). Following previous work in physics education, both sides of the theorems are addressed separately using multiple visual representations by renouncing a physics context as a first step towards a conceptual understanding (section 4). Finally, first results of students' evaluation on usability and perceived educational impact of the graphical tool are reported (section 5).

1.1. Student difficulties with divergence, curl, and integral theorems

A comprehensive review by Smith (2014) found that introductory physics texts rarely provide conceptual details about the divergence theorem [2]; instead, textbooks often focus on mathematical treatments such as calculating both sides of equations (1) and (2) explicitly or they use three-dimensional visualisations to proof the theorems (figure 1) [5, 6]. However, previous studies have shown that calculating divergence and curl hardly presents a problem for students; in contrast, the qualitative assessment is more challenging [3, 7–12]. For example, students have difficulties to judge whether vector field diagrams have zero or non-zero divergence or curl, and they often do not understand that divergence and curl are local properties of the field. Various studies intensified this line of research and found different learning difficulties that are connected to the vector field representation, but transfer to differential vector operators and integral theorems, such as decomposing vector field arrows, interpreting partial vector derivatives, and differentiating field components and independent variables [7–9, 11, 13–16]. In addition, Huffman *et al* (2020) found, that students are moderately able to literally interpret Gauss' theorem, but had great difficulty in formulating an intelligible and correct qualitative interpretation of the theorem, particularly of the left hand side integrand in equation (1). In particular, 48% of the subjects stated that they were not able to formulate any qualitative interpretation [17]. Moreover, more than half of the physics students in a second year undergraduate course on vector calculus at the University of Bristol considered Stokes' theorem to be the most challenging topic of the course, because it was non-intuitive, difficult to visualise, lacked a physical analogy, and required an understanding of various other concepts [4]. In recent research, further, students were found to struggle with interpreting line, surface, and volume integrals and their differential elements, visualising an integration area, as well as balancing positive and negative fluxes through a test volume [7, 11, 18–20].

Studies in the context of electromagnetism and electrostatics went beyond the investigation of mathematical issues with vector fields. These studies demonstrated that conceptual gaps regarding vector fields resulted in an improper comprehension of fundamental principles in physics, namely Maxwell's equations [8, 23] and, in particular, Gauss' and Ampère's law [24].

1.2. Supporting students' visual understanding

As pointed out above, an appropriate visual understanding of differential vector operators and integral theorems is considered to be crucial for approaching fundamental relationships in physics; hence, supporting students in this area turns out to be particularly important. In the aforementioned work, there is consensus that teaching this topic becomes more effective when first introducing it in a purely mathematics context [25, 26], and by using explicit instructions and visual representations [12]. These suggestions relate to a general educational notion, that is, the promotion of students' representational competence [27–31]. In this context, Klein *et al* (2018) introduced explicit text-based instructions for visually interpreting the divergence of vector field diagrams [7]. They presented strategies that refer to both sides of equation (1) and emphasise different mathematical concepts of divergence, namely partial derivatives and flux through boundaries [7]. Both strategies are revisited in section 2. Even though students appreciated the visual approach towards divergence and improved their conceptual understanding, many students indicated that 'additional visual aids, such as sketches of the vector decomposition [...] would have improved [their] performance' [7, p. 010116–14]. In three experimental follow up-studies, it was shown that adding visual cues and drawing activities to the instruction in fact resulted in better learning outcomes [9, 16, 32].

In addition, Bollen *et al* (2016) advocate modern instructional approaches—including technology—when teaching vector calculus, since traditional instruction, i.e. text-based instruction, is insufficient to enable a complete understanding of differential operators [23]. This claim is in line with Wieman's statement about the implementation of modern technology to foster effective science education [33]. Following this direction, some researchers and lecturers developed interactive and dynamic visualisation tools and simulations to support a conceptual understanding of vector fields and vector calculus. Such tools allow to visualise two- and three-dimensional vector field diagrams, calculate, plot, and indicate divergence and curl for a given field [34, 35], and explore vector line integrals by visualising a curve in a given field and calculating circulation and flux of the field around the curve [36]. However, there is no tool integrating all of those field concepts reported in educational literature. Here, we present such a graphical vector field tool that illustrates both sides of the Gauss' and Stokes' theorems using two-dimensional vector field plots. In contrast to the aforementioned work, this tool explicitly takes previous research on students difficulties with vector fields into account and builds upon a visual approach to Gauss' and Stokes' theorems that has been proved to support students' learning about vector fields and differential vector operators [7, 9, 16, 37].

2. Towards a visual interpretation of divergence and Gauss' theorem

Below, we explain a visual approach to Gauss' and Stokes' theorems using simple examples and highlight the underlying educational considerations. We refer to the graphical vector field tool [38], so that interested readers can follow our reasoning. All features of the tool will be summarised in section 4 and the references here relate to the overview in table 1.

Table 1. Integration of educational considerations in the graphical tool. The literature refers to student difficulties with properties of (two-dimensional) vector fields.

Physics property or concept of vector fields	Feature of the graphical tool
1 A selection of arrows represent the vector field. They start at equidistant grid points and are not centred on their location [13, 14]	Visual representation of the field with zoom function; Only few representative vectors are shown
2 A vector field is dense in space. Between any two arrows, there exists a field vector rather than space being empty [13, 14]	Right click on any spot reveals the arrow starting at that spot. When the box *Scan field* is activated, the smooth continuation of the field is experienced when inserting additional arrows (vector path) by clicking, holding, and moving the mouse
3 A vector field has components F_x and F_y; Both components can depend on input variables (x and y) [13–15, 39, 40]	Clear separation of F_x and F_y in the control panel; User must enter x and y explicitly; Decomposition of vectors can be shown
4 Vector decomposition [7, 13, 15, 39, 40]	Highlighting F_x and F_y within a user-defined rectangle and along a vector path using different colours
5 Partial vector derivatives [7, 11].	Highlighting the direction of change within a user-defined rectangle and along a vector path; Inserting a paddle wheel
6 Surface integral/Flux through boundary (sum over scalar products between vector field and outer surface normal) [7, 11]	Highlighting the projection on the outer normal vector; Colour coding for positive and negative flux
7 Vector line integral/circulation around boundary (sum over scalar products between vector field and vector path element) [11, 18]	Highlighting the projection on the vector path element; Colour coding for positive and negative circulation
8 Divergence is a scalar quantity [8, 10, 12]	Calculating numerical values
9 Curl is a vector quantity and has a direction [8, 10, 12]	Spinning of the paddle wheel around a rotation axis
10 Divergence and curl are different for every spot in the field [10, 12]	Tracing vector paths (*Scan field*); calculating local divergence and curl; moving test area; moving paddle wheel (curl)

Gauss' (divergence) theorem combines two intuitions of divergence, that is, the local interpretation of sources or sinks at specific points, given on the left-hand side of equation (1), and the global interpretation as the net outward flow of an area which is represented on the right-hand side of equation (1). Both interpretations can be applied to a vector field representation for a qualitative evaluation of divergence [7, 9, 16]. Hereafter, we demonstrate both interpretations by applying the following educational simplifications:

(i) We restrict our treatment to two dimensions. Thus, the test volume becomes a test area with a boundary in one dimension, whose edges can be varied arbitrarily. By doing so, we avoid the difficulty of representing three-dimensional test volumes and bounding surfaces.
(ii) We use the Cartesian coordinate system with the Cartesian coordinates x and y and the unit vectors $\hat{e}_x$ and $\hat{e}_y$; the field components are functions of x and y.
(iii) The field components depend only linearly on the coordinates x and y.
(iv) We rely on a qualitative approach, so the absolute values of the divergence and the surface integrals are not focused on.

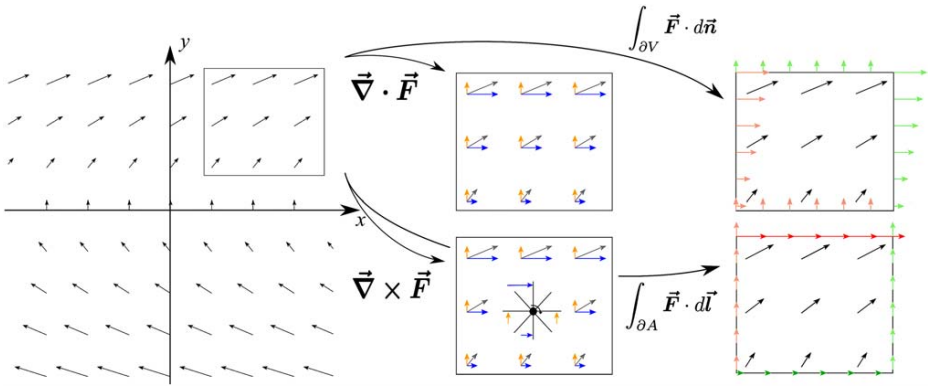


Figure 2. Graphical representation of the two-dimensional vector field $\vec{F}_1$ (left). A region is highlighted to evaluate divergence $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ and curl $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ locally using partial derivatives (middle) and a paddle wheel as well as globally by the flow through the boundary (top right) and by the circulation around the boundary (bottom right). In the middle, x components $F_{1,x}$ are presented with blue arrows and y components $F_{1,y}$ are in orange. On the right, an outward flow (top) and a (mathematically) positive circulation are visualised in green, and an inward flow as well as a (mathematically) negative circulation are presented with red arrows.

(v) We further restrict our treatment to vector fields with constant divergence (either zero or non-zero).

Concerning (iii) and (v), please note that these simplifications can be removed during the learning process. The graphical tool also represents vector fields with complex dependent components and non-constant divergence (sections 4 and 5).

2.1. An example with zero divergence

Figure 2 (left) shows the vector field diagram of $\vec{F}_1$ defined as

$$\vec{F}_1(x, y) = \begin{pmatrix} F_{1,x}(x, y) \\ F_{1,y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Using the definition of divergence in Cartesian coordinates,

$$\operatorname{div} \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} = \partial_x F_x + \partial_y F_y \,, \tag{3}$$

the left-hand side of equation (1) can be interpreted visually by tracing the changes in the field components. Vividly speaking, we need to visually examine the partial derivatives by evaluating the changes of F_x (the x component of the vectors) in x direction, and likewise the changes of F_y in y direction (figure 2, top middle; blue arrow F_x, orange arrows F_y). For $\vec{F}_1$, we find $\partial_x F_{1,x} = 0$ and $\partial_y F_{1,y} = 0$, hence $\operatorname{div} \vec{F}_1 = 0$. This procedure leads to the same result for each point (x, y) of the field $\vec{F}_1$. In general, the local evaluation of divergence indicates local sources and sinks of the vector field. Therefore, the surface integral of the (zero or non-zero) divergence can be referred to as the sum of all sources and sinks within a considered area.

Regarding the right-hand side of equation (1), divergence can also be evaluated by balancing the inward and outward flow through the boundaries of the test area. Using rectangles

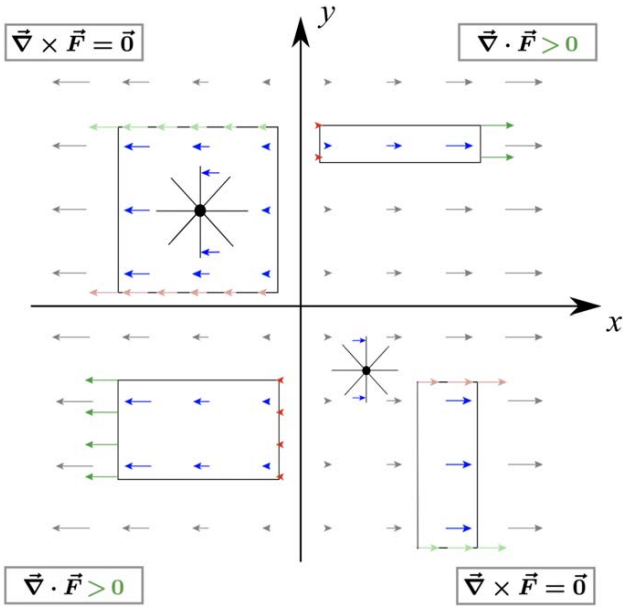


Figure 3. Graphical representation of $\vec{F}_2$ with $F_{2,y} = 0$. In the test areas on the top right and the bottom left of the field (quadrant I and III) divergence is evaluated by tracing changes in the x component $F_{2,x}$ in x direction, i.e. along a row (blue arrows) or by balancing the flow through the boundaries (green and red arrows). In the test areas on the top left and the bottom right of the field (quadrant II and IV) the fields' curl is determined by evaluating changes in the y component $F_{2,x}$ in y direction, i.e. along a column (blue arrows), by balancing circulation around boundaries (green and red arrows), and by inserting a paddle wheel.

as test areas, figure 2 (top right) shows the projection of $\vec{F}_1$ onto the (outer) normal $\vec{n}$. Referring to the surface integral as the sum of all scalar products $\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{n}$ at each point of the boundary, one can qualitatively evaluate the net flux through the test area. Concerning $\vec{F}_1$, it then can be observed that for every arrow entering the test area, there is an equivalent arrow leaving it (for symmetry reasons). Hence, we can conclude that $\int_{\partial V} \vec{F}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{n} = 0$. Similar to the local interpretation, this procedure leads to the same result for any chosen area. The described properties and concepts can be traced with the graphical tool (table 1, **5** and **6**).

2.2. An example with non-zero divergence

For another example, we apply the two visual strategies to $\vec{F}_2$, which is defined as

$$\vec{F}_2(x, y) = \begin{pmatrix} F_{2,x}(x, y) \\ F_{2,y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Because it is $F_{2,y} = 0$, there is no change of $F_{2,y}$ in y direction (figure 3, quadrant I and III), hence $\partial_y F_{2,y} = 0$. Tracing $F_{2,x}$ in positive x direction (figure 3, quadrant I and III, blue arrows), one observes an elongation, i.e. $\partial_x F_{2,x} > 0$. Thus, the qualitative evaluation via partial derivatives [equation (3)] yields a positive divergence. For the global approach regarding the net flow through a test area, we first consider the horizontal boundaries. Since

$F_{2,y}$ is zero, here, all field components are perpendicular to the outer normal vector $\vec{n}$, so the net flux through the horizontal boundaries equals zero (figure 3, quadrant I and III). For the vertical boundaries, the outer normal vectors are parallel to the field vectors, and we observe a positive outward flow; therefore, the integral is non-zero and positive. In figure 3, the visual interpretation is applied to different quadrants of the field yielding $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}_2 > 0$ for every spot in the field.

2.3. Visual connection of both sides of the equation

Let us reconsider both examples to establish an explicit connection between both sides of equation (1). Regarding $\vec{F}_1$, since $F_{1,x}$ does not change in x direction (figure 2 blue arrows, top middle), the flow through the left and the right vertical boundaries is equal and thus cancels out, so the net flow through the vertical boundaries equals zero (figure 2 top right). The same occurs for $F_{1,y}$, where we observe no change of $F_{1,y}$ in y direction (figure 2 orange arrows, top middle) and, thus, the lower and upper horizontal boundaries register no net flow (figure 2 top right). In total, this results in a net flow that equals zero out of the area. In other words, to register a total net flow comparing two vertical (horizontal) boundaries, there must be a change of the x component in the x direction (of the y component in the y direction). This is evident in the second example, $\vec{F}_2$, where we observe an elongation of $F_{2,x}$ in the x direction that results in a positive flow outward from the test area. In summary, we have qualitatively evaluated the divergence of the vector field $\vec{F}_1$ as zero and of the vector field $\vec{F}_2$ as positive, whereas both intuitions of divergence can be connected by Gauss' divergence theorem. On closer inspection, however, it becomes clear from equation (3) that the divergence can be zero, even though a change of the vector field components in x or y direction exists. This is the case when the partial derivatives cancel out exactly. For example, for a vector field $\vec{F}_3 = x\,\hat{e}_x - y\,\hat{e}_y$, it is $\operatorname{div}\vec{F}_3 = 0$, although the partial derivatives are non-zero, i.e. $\partial_x F_{3,x} = 1$ and $\partial_y F_{3,y} = -1$. Using the graphical tool, we observe, that the positive flow through the left edge of a rectangle is compensated with a negative flow through the top or bottom edge, not through the opposite, right edge. Beyond $\vec{F}_3$, a positive inward flow through one edge can also flow out through all other edges. And vice versa: a negative outward flow through one edge can be compensated by the inflow through all other edges. For this reason, it is important to consider and balance the flux over the entire test area.

3. Visually interpreting curl and Stokes' theorem

Comparable to Gauss' divergence theorem, Stokes' theorem combines two intuitions of curl, that is, the local interpretation of vortexes at specific points [left-hand side of equation (2)], and the global interpretation of the circulation around a closed surface [right-hand side of equation (2)]. Basically, by administering the aforementioned simplifications, by transferring the visual interpretation of the partial derivatives from divergence to curl and instead of balancing the projection on the outer normal but on the vector path element, the proposed visual approach to Gauss' theorem can be applied to Stokes' theorem. However, since curl is represented by a vector with a direction perpendicular to the vector field plane, we formally refer to vector fields $\vec{F}(x, y, z) = (F_x, F_y, 0)$ in three dimensions, whereas the z component F_z equals zero. Then, by referring to the definition of curl in Cartesian coordinates in two dimensions,

$$\mathrm{rot}\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\hat{e}_z \,, \tag{4}$$

the visual interpretation of the partial derivatives through tracing the changes in the field components can be applied for an interpretation of the left-hand side of equation (2). Compared to the visual interpretation of divergence, the main change here is that the 'mixed' changes of the F_x component in y direction and the F_y component in x direction are examined [equation (4)]. For $\vec{F_1}$, we find $\partial_x F_{1,y} = 0$ and $\partial_y F_{1,x} = 1\partial$, hence $\mathrm{rot}\vec{F_1} = -1\,\hat{e}_z$ (figure 2, bottom middle). Further, this approach yields $\mathrm{rot}\vec{F_2} = \vec{0}$ for $\vec{F_2}$ (figure 3, quadrant II and IV, blue arrows and paddle wheel). This procedure leads to the same result for each point (x, y) of the field $\vec{F_1}$ and $\vec{F_2}$, respectively. Analogously to the interpretation of divergence, the local evaluation of curl indicates local vortexes of the vector field. For visualisation purposes, the interaction of the field components with an inserted paddle wheel (figure 2, bottom middle) can be considered (table 1, **9**) [12, 41, 42]. Then, changes of the field components lead to a rotation of the paddle wheel, because the field's interaction with the wheel is no longer balanced for all paddles of the wheel. As the wheel rotates around a rotation axis perpendicular to the x–y-level of the field, curl is associated with a vector quantity. Further, by referring to the left-hand side of equation (2) all local vortexes of the field are summed up within the considered area through the surface integral. When using rectangles in the x–y-level as test areas, the curl vector $\mathrm{rot}\vec{F}$ and the areas outer normal vector $\vec{n}$ are parallel oriented in z direction. Therefore, $\mathrm{rot}\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{n}$ is qualitatively interpreted as the value of $\mathrm{rot}\vec{F}$.

Regarding the right-hand side of equation (2), the curl can also be evaluated by balancing the circulation around the boundary of the test area. Here, a positive circulation is referred to as being mathematically positive, i.e. counterclockwise, directed and a negative circulation indicates a mathematically negative, clockwise direction. By referring to the line integral as the sum of all scalar products $\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$, i.e. the projection of the vector field onto the vector path elements $\mathrm{d}\vec{l}$, at each point of the boundary, the net circulation around the test surface be can evaluated qualitatively (figures 2 and 3). Taking the approaches of partial derivatives and circulation into account, we can establish a connection between both sides of equation (2). For $\vec{F_1}$, it can be observed that the change of the x component $F_{1,x}$ in y direction (figure 2 blue arrows, bottom middle) leads to an imbalance of positive and negative circulation along the top and bottom edge of the test area (figure 2 bottom right; table 1, **5** and **7**). Hence, we find a negative net circulation around the surface (figure 2 bottom right). By referring to the paddle wheel approach, one observes a clockwise (mathematically negative) rotation of the wheel due to the imbalanced impact of the field on the top and the bottom paddle (figure 2 bottom middle). From that, we can again conclude that the net circulation is negative. For $\vec{F_2}$, positive and negative circulation are balanced for all edges of the rectangle, thus we observe a zero net circulation. Similar to the local interpretation, this procedure leads to the same result for any chosen area. As for Gauss' divergence theorem, a positive circulation along one edge of the rectangle does not necessarily have to be compensated with a negative circulation along the opposite edge, i.e. the curl can be zero, even though vector field components change in x or y direction. Therefore, balancing all contributions of the circulation around the whole boundary is of particular importance (section 2.3).

4. Features of the graphical vector field tool

In light of previous research on students' difficulties about vector fields and divergence, we developed a graphical tool that takes these findings into account by referring to the

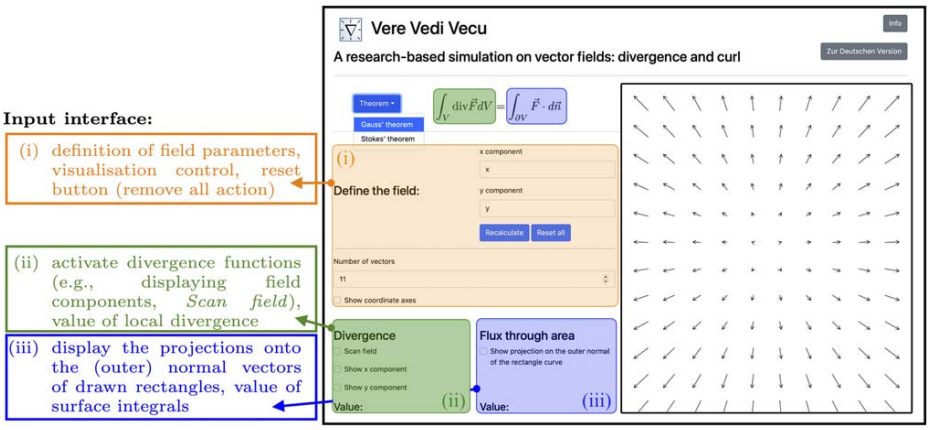


Figure 4. User interface of the graphical tool with Gauss' divergence theorem selected. The features of the input interface (left) are explained left beside. The vector field plot is shown on the right and allows various user actions (e.g., drawing rectangles and drawing vector path). If Stokes' theorem is selected, areas (ii) and (iii) analogously display curl and circulation along a curve, with the only change that an additional check box in (iii) allows to insert a paddle wheel.

approaches explained in sections 2 and 3. The features and how they relate to student difficulties are summarised in table 1. A German and an English version of the tool for desktop computers and laptops is freely available online [38]. Figure 4 illustrates the user interface of the graphical tool with the key functions being highlighted. A short introductory video presenting the visualisation format and all features of the tool related to the visual interpretation of the field concepts is available online [43].

4.1. Vector field representation

To define a vector field, the user can enter both field components separately using Cartesian coordinates x, y, scalars, and mathematical operations. The interface makes a clear distinction between the field components (F_x and F_y) and the input variables (x and y; table 1, **3**). For any vector field, only a representative selection of arrows is displayed, ranging from 5 up to 25 vectors in each line or column, and each vector starts at equidistant grid points (table 1, **1**). For a better overview, very short vectors are completely blanked out. Changing the slider affects the number of vectors as you zoom in and out of the diagram to strengthen the understanding of the diagram as a collection of representatives (table 1, **1**). When the box *Scan field* is activated, clicking with the mouse button in the empty area between any two vectors shows a vector path of the invisible arrows, thus indicating a smooth continuation of the field (table 1, **2**). In addition, holding the mouse button and moving the cursor across the field displays the field arrow of the cursor track, once more emphasising the fields' smooth continuation (table 1, **2**). To facilitate the connection between the algebraic equation and the vector field diagram, the Cartesian coordinate axes can be faded in. For visualisation purposes, the axis scale does not correspond to the displayed vector length. However, since our approach is qualitative in nature, exact numerical values are not necessary to visually understand the divergence theorem, and we recommend to hide the axes.

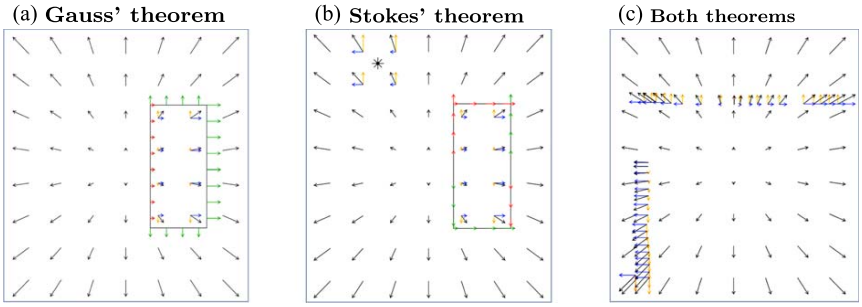


Figure 5. Overview about the main features of the graphical tool for (a) Gauss' divergence theorem setting, (b) Stokes' theorem setting, and (c) both settings. (a) Displaying of vector decomposition (blue and orange arrows) and flux trough boundaries (green and red arrows) for drawn rectangles; (b) Displaying of vector decomposition (blue and orange arrows) and circulation around boundaries (green and red arrows) for drawn rectangles, as well as inserting a paddle wheel (top) with shown vector decomposition around its position; (c) tracing arrows and its components in the field (*Scan field* function).

4.2. Features to visually understand partial vector derivatives, flux through boundaries, and circulation around boundaries

Besides illustrating some basic properties of vector field diagrams, the key feature of the graphical tool consists of approaching the different visual interpretations associated with Gauss' and Stokes' theorems. At the top of the tool, the user can chose the theorem to be studied. Then, the bottom part of the tool adjusts either showing check boxes and values for divergence and flux through area or curl and circulation along a curve.

Independent of the integral theorem, the cursor can be used to draw a rectangle of any size and at any location within the vector field diagram, which serves as the test area for evaluating divergence and curl. For all vectors within that area, the vector decomposition for both components can be highlighted separately for F_x and F_y in different colours [table 1, **4**; figure 5(a) and (b)]. Since previous research has reported that many students struggle with vector addition and decomposition [7, 13, 39, 40], the auxiliary arrows help overcome these problems and also assist in evaluating partial derivatives and, thus, divergence and curl with respect to the left-hand side of equations (1) and (2) (table 1, **5**). Further, when the box *Scan field* is activated, the user can click the mouse button and move the cursor across the field. Then, a vector track highlighting the vector decomposition is displayed, which enables the manual evaluation of changes in the vector components, hence checking partial vector derivatives [table 1, **5**; figure 5(c)]. For curl, inserting a paddle wheel also supports the identification of changes in the vector components [figure 5(b)].

For drawn rectangles, beyond displaying vector decomposition, the projection of the vector field onto the (outer) normal vector or on the vector path element can be visualised by activating the corresponding check boxes, in Gauss' or Stokes' theorems setting respectively. For Gauss' theorem, the inward (negative) flow is represented by red arrows and the outward (positive) flow is represented by green arrows [table 1, **6**; figure 5(a)]. For Stokes' theorem, red arrows indicate a clockwise (mathematically negative) circulation and green arrows indicate an anticlockwise (mathematically positive) circulation [table 1, **7**; figure 5(b)]. Furthermore, the values of the surface and the line integrals as well as divergence and curl are

shown numerically (table 1, **8** and **10**). Thus, the qualitative connection between both sides of Gauss' and Stokes' theorems can be established using the aforementioned strategies.

The user can also move one side of a fixed test area, enlarging or reducing its size. The tool then dynamically adjusts the integral values and the visual highlights. When the user changes the number of arrows, the tool keeps the coordinate range and the drawn test area remains at a fixed position. Consequently, the flux through the boundaries or the circulation around the boundaries does not change when the slider is used. This demonstrates that a higher number of arrows does not affect the fields' properties as the vector field and the considered test area remain the same.

4.3. Features to understand local dependence of divergence and curl

Following the study of Baily *et al* (2015), students often have difficulties to understand that divergence and curl can be different for each spot in the field [10]. To visualise this aspect, the graphical tool allows to move a drawn test area across the field (table 1, **10**). By doing so, the vector decomposition, the in- and outward flow, the circulation, and the value of the surface and the line integral adjust dynamically. To further address the difficulty of local dependence of divergence and curl a left mouse click at any point within the field displays divergence or curl ($\mathrm{rot}\vec{F} \cdot \hat{e}_z$) at this spot numerically (*Scan field* deactivated). As described above, the box *Scan field* can be activated to trace a vector path drawn by holding the left mouse button [figure 5(c)]. Then, the values of divergence and curl continuously adjust. Every path remains until the box *Scan field* is deactivated or all actions are reset. Thus, the user can scan the field, for example, to identify characteristic points (e.g., maximum or zero divergence or curl). In addition, for Stokes' theorem, a paddle wheel can be inserted and moved within the field. Its rotation indicates whether the curl is zero or non-zero. For non-zero curl, the curls' sign (positive or negative) is indicated by the rotational direction. The rotation of the wheel around a rotation axis perpendicular to the field, further, refers to curl as a vector quantity, a common student difficulty (table 1, **9**) [8, 10, 12].

5. Implementation in university courses and evaluation

The graphical tool enables to explore the important concepts of Gauss' and Stokes' theorems by one's own. However, providing an appropriate educational embedding with explicit tasks, that call for user actions, help to avoid misinterpretations and difficulties as well as support scientific working with the tool [44]. For this purpose, we developed research-informed learning tasks, which are based on the visual interpretation of the vector field concepts proposed in sections 2 and 3, integrate drawing activities, and involve the graphical tool in a structured manner (see [45, 46] for conceptualisation of the learning tasks). The materials cover four units on divergence, Gauss' theorem, curl, and Stokes' theorem. Following common educational approaches, links between the units are established and the tasks are designed in parallel for both integral theorems [42]. Hence, the units on divergence and curl refer to the left-hand side of equations (1) and (2) and the units on Gauss' and Stokes' theorems correspond to the right-hand side of the equations and the connection between both sides. First, the tasks aim at formulating observations and drawing conclusions from the tool, for example, to discover divergence and curl as local properties of the field:

Consider the vector field $\vec{C}(x, y)$ *with*

$$\vec{C}(x, y) = \mathrm{xy}\,\hat{e}_x + \hat{e}_y$$

in the tool. For each of the four quadrants, evaluate how the field components of the vectors change along x and y directions, respectively, and conclude whether the divergence within each quadrant is positive, negative, or zero. [learning task on divergence]

Second, some tasks target at drawing vector field diagrams from the graphical tool to focus on characteristic properties of the representation [47] and to examine conceptual relationships exemplarily from it. Moreover, some tasks ask for checking the results of a qualitative evaluation (e.g., of divergence) with the tool to connect different concepts and representational forms (diagram, formula).

In summer semester 2022 and 2023, we implemented the aforementioned multi-representational learning tasks in recitations of a weekly second-semester course on electromagnetism at the University of Goettingen and examined their impact on different outcome variables, for example, conceptual understanding, cognitive load, and representational competencies [46]. Using a rotational design, students were first working with the multi-representational tasks and the tool and completed traditional, calculation-based tasks afterwards or vice versa (see [46] for a detailed description of the study design and the methods). However, learning efficiency is not supposed to be the topic of this article, but we reveal first insights into students' usability and perceived educational impact of the tool. By taking together both studies, at the pretest, $N = 199$ physics students (50 female) with a mean age of 20.3 ± 2.1 years (most of them in the second semester of study) participated in the studies. In summer semester 2022, they were learning with a desktop application (.exe) of the tool and in summer semester 2023, a web application was used.

After both intervention phases, we administered an evaluation questionnaire including eight items on usability and design [48–50] and seven items on students' perceived educational impact of the graphical tool [51] (both scales with agreement on a 6-point Likert-type rating scale from 0 (low agreement) to 1 [high agreement)]. Evaluation of students' perceived usability and design of the tool revealed a scale mean of 0.76 ± 0.16 (including item inverting) and students indicated high values for items that refer to user-friendliness, presentation form, and comprehensibility of the tool and its features ($N = 125$; figure 6, UD1, UD3, UD5, UD6, UD7). Moreover, low values for items UD2 and UD4 suggest a good alignment of the graphical tool, the learning tasks, and students' prior knowledge. Thus, we recommend to integrate the graphical tool in physics preliminary or introductory university courses. Moreover, as a first step, learners should become familiar with the design of the tool and its features. This can be done in a self-discovering way by entering different vector fields, describing and discussing all features and how the tool responds to changes. From the experiences of our implementations, we recommend starting with a constant vector field (e.g., $\vec{F}(x, y) = \hat{e}_x$), then moving to fields with one or two non-constant components that depend on the coordinates x and/or y. To provide a more structured familiarisation, a short explanatory video introducing all features can be used (see e.g., [43]). In figure 6, one recognises that about one third of the students reported technical issues with installing or using the tool, which were mostly related to the use of the desktop application in summer semester 2022 (UD8) and revised afterwards.

Further, students indicated a scale mean of 0.65 ± 0.22 for the perceived educational impact of the tool ($N = 65$; figure 7). More precisely, the graphical tool is considered helpful for understanding (EI1, EI4, EI6) and recommended for first-year students and for its use in university courses in undergraduate physics (EI2, EI5, EI7). Additional discussion about students' experiences with the tool can provide guidance for its further revision and improvement (see section 6).

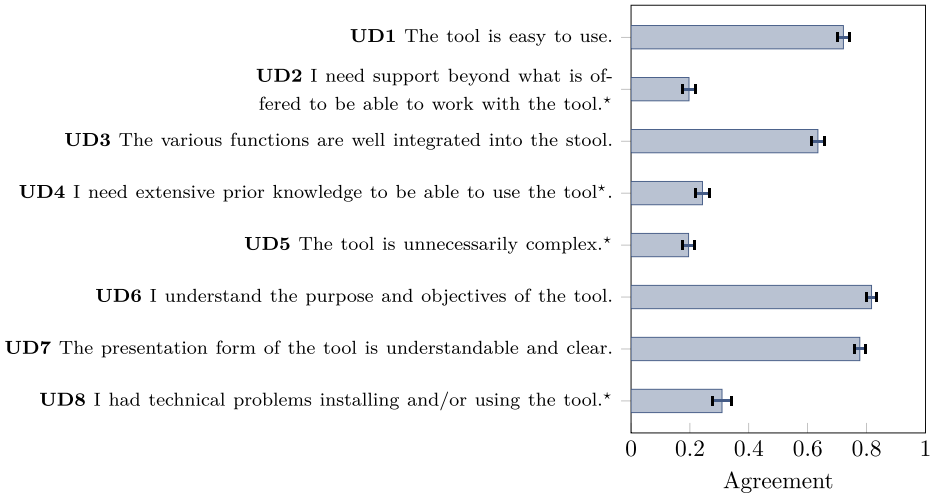


Figure 6. Evaluation results of the usability and design scale for $N = 125$ students (Cronbach's alpha $\alpha_C = 0.82$). Students' agreement ranging from 0 (low agreement) to 1 (high agreement) is visualised for all eight items (*items are inverted for scale analysis; error bars represent 1 SEM; items adapted from validated scales [48–50]).

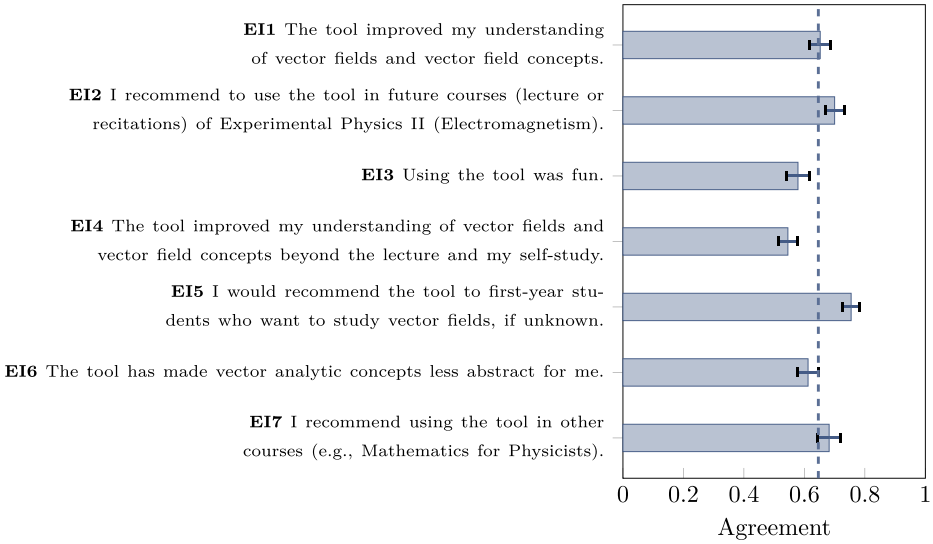


Figure 7. Students' perceived educational impact of the graphical tool ($N = 65$; Cronbach's alpha $\alpha_C = 0.90$). Students' agreement ranging from 0 (low agreement) to 1 (high agreement) is visualised for all seven items (the dashed line indicates the scale mean; error bars represent 1 SEM; items adapted from a prior study [51]).

6. Conclusion and outlook

We have presented an interactive learning environment that provides a qualitative approach to Gauss' and Stokes' theorems in two dimensions. The graphical tool takes several research-

based learning difficulties about vector fields, divergence, curl, surface and line integrals into account, hence it can be considered as a starting point for learning about the integral theorems in a purely mathematical context. In contrast to traditional textbook instructions, the interactive and dynamic features allow students to explore vector fields and differential vector operators and, beyond existing visualisation tools and simulations, addresses both sides of Gauss' and Stokes' theorems as well as their relation. Based on the evaluation results, as next steps, we will extend the tool by including different surface shapes, for example, circles or hexagons to show that a divergence-free field remains divergence-free regardless of the shape of the test surface. We also plan to include several updates to the tool to approach the physics contexts of the theorem, namely an extension to curvilinear coordinates (particularly polar coordinates) and to three dimensions (including cylindrical and spherical polar coordinates). After a non-physical start based on Cartesian coordinates, these additions can support an approximation to physics problems; for example, the electric field of a point charge can be better described with polar coordinates than with Cartesian coordinates. Typical vector fields that correspond to real physics contexts can be included as a default. In addition, we plan to implement the graphical tool in further introductory physics and mathematics courses also to test the educational effectiveness of such revisions.

Please note that there are also some limitations of the tool. Since it focuses on the concepts of Gauss' and Stokes' theorems, some basic misunderstandings of vector field representations are not fully addressed; for example, vector addition or unit vectors [39]. To address these concepts, we recommend using a learning environment that focuses on vectors and fields in general rather than on the integral theorems. Besides these limitations, the work presented here can serve as a basis for physics education and education research to build upon for accessing further concepts of vector calculus that are important in physics.

Acknowledgments

We acknowledge the work of Robert M Hanson from St. Olaf College in Northfield, MN [52] and thank him for providing inspiration and support with the tool in its early stages (https://github.com/BobHanson/SwingJS-Examples/tree/SwingJS).

The work is supported by the Open Access Publication Funds of the Göttingen University.

Data availability statement

The data cannot be made publicly available upon publication because they contain sensitive personal information. The data that support the findings of this study are available upon reasonable request from the authors.

Competing interest/conflict of interest and ethical policy statement

The authors declare that the research was conducted in the absence of any commercial or financial relationships that could be construed as a potential conflict of interest. Ethical review and approval was not required for the study on human participants in accordance with the local legislation and institutional requirements. The participants provided their written informed consent to participate in this study.

ORCID iDs

L Hahn https://orcid.org/0000-0002-5864-1594
P Klein https://orcid.org/0000-0003-3023-1478

References

[1] Burkholder E W, Murillo-Gonzalez G and Wieman C 2021 Importance of math prerequisites for performance in introductory physics *Phys. Rev. Phys. Educ. Res.* **17** 010108
[2] Smith E M 2014 Student and textbook presentation of divergence [Master's Thesis, Oregon State University]. Scholars Archive at OSU (http://hdl.handle.net/1957/54925)
[3] Singh C and Maries A 2013 Core graduate courses: a missed learning opportunity? *AIP Conf. Proc.* **1513** 382–385
[4] Yusaf F 2017 Stokes' theorem: a candidate threshold concept *Practice and Evidence of the Scholarship of Teaching and Learning in Higher Education* **12** 397–410
[5] Forster O 2017 *Analysis 3—Maß- und Integrationstheorie, Integralsätze im R^n und Anwendungen* (Berlin, Heidelberg: Springer) (https://doi.org/10.1007/978-3-658-16746-2)
[6] Königsberger K 2004 *Analysis 2* (Berlin, Heidelberg: Springer) (https://doi.org/10.1007/3-540-35077-2)
[7] Klein P, Viiri J, Mozaffari S and Kuhn J 2018 Instruction-based clinical eye-tracking study on the visual interpretation of divergence: How do students look at vector field plots? *Phys. Rev. Phys. Educ. Res.* **14** 010116
[8] Bollen L, Van Kampen P and De Cock M 2015 Students' difficulties with vector calculus in electrodynamics *Phys. Rev. ST Phys. Educ. Res.* **11** 020129
[9] Klein P, Viiri J and Kuhn J 2019 Visual cues improve students' understanding of divergence and curl: evidence from eye movements during reading and problem solving *Phys. Rev. Phys. Educ. Res.* **15** 010126
[10] Baily C, Bollen L, Pattie A and De Cock M 2015 Student thinking about the divergence and curl in mathematics and physics contexts *Physics Education Research ConferenceProceedings* 51–54
[11] Pepper R E, Chasteen S V, Pollock S J and Perkins K K 2012 Observations on student difficulties with mathematics in upper-division electricity and magnetism *Phys. Rev. ST Phys. Educ. Res.* **8** 010111
[12] Bollen L, Van Kampen P and De Cock M 2018 Development, implementation, and assessment of a guided-inquiry teaching-learning sequence on vector calculus in electrodynamics *Phys. Rev. Phys. Educ. Res.* **14** 020115
[13] Bollen L, Van Kampen P, Baily C, Kelly M and De Cock M 2017 Student difficulties regarding symbolic and graphical representations of vector fields *Phys. Rev. Phys. Educ. Res.* **13** 020109
[14] Gire E and Price E 2012 Graphical representations of vector functions in upper-division E&M *AIP Conf. Proc.* **1413** 27–30
[15] Hahn L and Klein P 2023 Clustering eye-movement data uncovers students' strategies for coordinating equations and diagrams of vector fields *Educ. Stud. Math.* 1–27
[16] Klein P, Hahn L and Kuhn J 2021 Einfluss visueller Hilfen und räumlicher Fähigkeiten auf die graphische Interpretation von Vektorfeldern: Eine Eye-Tracking-Untersuchung *Z. Didakt. Nat. wiss.* **27** 181–201
[17] Huffman J A, Vignal M and Wilcox B R 2020 Investigating upper-division students' interpretations of the divergence theorem *Physics Education Research ConferenceProceedings* 222–227
[18] Jones S R 2020 Scalar and vector line integrals: a conceptual analysis and an initial investigation of student understanding *J. Math. Behav.* **59** 100801
[19] Schermerhorn B P and Thompson J R 2019 Physics students' construction and checking of differential volume elements in an unconventional spherical coordinate system *Phys. Rev. Phys. Educ. Res.* **15** 010112
[20] Schermerhorn B P and Thompson J R 2019 Physics students' construction of differential length vectors in an unconventional spherical coordinate system *Phys. Rev. Phys. Educ. Res.* **15** 010111

[21] Griffiths D J 2023 *Introduction to electrodynamics* (Cambridge University Press) (https://doi.org/10.1017/9781009397735)

[22] Korsch H J 2007 *Mathematische Ergänzungen zur Einführung in die Physik* (Binomi Verlag)

[23] Bollen L, Van Kampen P, Baily C and De Cock M 2016 Qualitative investigation into students' use of divergence and curl in electromagnetism *Phys. Rev. Phys. Educ. Res.* **12** 020134

[24] Li J and Singh C 2017 Investigating and improving introductory physics students' understanding of symmetry and Gauss's law *Eur. J. Phys.* **39** 015702

[25] Hernandez E, Campos E, Barniol P and Zavala G 2023 Students' conceptual understanding of electric flux and magnetic circulation *Phys. Rev. Phys. Educ. Res.* **19** 013102

[26] Dray T and Manogue C A 2023 Vector line integrals in mathematics and physics *Int. J. Res. Undergrad. Math. Educ.* **9** 92–117

[27] Rau M A 2017 Conditions for the effectiveness of multiple visual representations in enhancing STEM learning *Educ. Psychol. Rev.* **29** 717–761

[28] Ainsworth S 2008 The educational value of multiple-representations when learning complex scientific concepts *Visualization: Theory and Practice in Science Education—Models and Modeling in Science Education* ed J K Gilbert, M Reimer and M Nakhleh (Berlin, Heidelberg: Springer) pp 191–208

[29] De Cock M 2012 Representation use and strategy choice in physics problem solving *Phys. Rev. ST Phys. Educ. Res.* **8** 020117

[30] Dufresne R J, Gerace W J and Leonard W J 1997 Solving physics problems with multiple representations *Phys. Teach.* **35** 270–275

[31] Klein P, Müller A and Kuhn J 2017 Assessment of representational competence in kinematics *Phys. Rev. Phys. Educ. Res.* **13** 010132

[32] Hahn L and Klein P 2023 Analysis of eye movements to study drawing in the context of vector fields *Front. Educ.* **8** 1162281

[33] Wieman C E 2007 Why not try a scientific approach to science education? *Change: Mag. Higher Learn.* **39** 9–15

[34] Budi A and Muliyati D 2018 Discovering and understanding the vector field using simulation in android app *J. Phys. Conf. Ser.* **1013** 012062

[35] Ozgun O and Sevgi L 2015 VectGUi: a matlab-based simulation tool *IEEE Antennas Propag. Mag.* **57** 113–118

[36] Ponce Campuzano J C, Roberts A P, Matthews K E, Wegener M J, Kenny E P and McIntyre T J 2019 Dynamic visualization of line integrals of vector fields: A didactic proposal *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.* **50** 934–949

[37] Ruf V, Küchemann S, Kuhn J and Klein P 2022 Comparison of written and spoken instruction to foster coordination between diagram and equation in undergraduate physics education *Human Behav. Emerg. Technol.* **2022** 5860936

[38] https://wwwuser.gwdg.de/physik.didaktik/oer/v3ctor/

[39] Barniol P and Zavala G 2014 Test of understanding of vectors: a reliable multiple-choice vector concept test *Phys. Rev. ST Phys. Educ. Res.* **10** 010121

[40] Knight R 1995 The vector knowledge of beginning physics students *Phys. Teach.* **33** 74–77

[41] Jung K and Lee G 2012 Developing a tutorial to address student difficulties in learning curl: a link between qualitative and mathematical reasoning *Can. J. Phys.* **90** 565–572

[42] Huang H, Wang J, Chen C and Zhang X 2013 Teaching divergence and curl in an electromagnetic field course international *J. Electr. Eng. Educ.* **50** 351–357

[43] https://wwwuser.gwdg.de/physik.didaktik/oer/videos/v3ctor/explanation_v3ctor_en.mp4

[44] McPherson G R 2001 Teaching and learning the scientific method *Am. Biol. Teach.* **63** 242–245

[45] Hahn L and Klein P 2022 Vektorielle Feldkonzepte verstehen durch Zeichnen? Erste Wirksamkeitsuntersuchungen *PhyDid B, Didaktik der Physik, Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung* ed H Grötzebauch and S Heinicke pp. 119–26

[46] Hahn L and Klein P 2023 The impact of multiple representations on students' understanding of vector field concepts: implementation of simulations and sketching activities into lecture-based recitations in undergraduate physics *Front. Psychol.* **13** 1012787

[47] Kohnle A, Ainsworth S E and Passante G 2020 Sketching to support visual learning with interactive tutorials *Phys. Rev. Phys. Educ. Res.* **16** 020139

[48] Altherr S, Wagner A, Eckert B and Jodl H J 2003 Multimedia material for teaching physics (search, evaluation and examples) *Eur. J. Phys.* **25** 7

9 Multi-repräsentationale Lernaufgaben zur Vektoranalysis in der Hochschullehre

Bestehende vektorfelddiagrammzentrierte Lehr-Lern-Materialien zur Divergenz und Rotation erzielten positive Lerneffekte bei Studierenden in empirischen Laborstudien (Klein et al., 2018, 2019, 2021b; Ruf et al., 2022), insbesondere nach Ergänzung repräsentationsspezifischer Zeichenaktivitäten (Kap. 7). Die theoretischen Überlegungen in Kap. 2.2 legen zudem nahe, dass sich die mentalen Prozesse verschiedener Vektorfeldkonzepte ähneln. Aus diesem Grund wurden nach dem Vorbild der Lehr-Lern-Materialien zur Divergenz (Klein et al., 2018, Studie *Zeichnen*) vier parallele Lernaufgaben zur Divergenz, der Rotation, dem Satz von Gauß und dem Satz von Stokes konzipiert. Die theoretischen Grundlagen ihrer Entwicklung, vor allem die Einbeziehung des DeFT-Orientierungsrahmens (Kap. 3.1.3.1), sind ausführlich in Hahn und Klein (2022b) beschrieben. Neben multiplen Repräsentationen und Zeichenaktivitäten wurden die Lernaufgaben durch die Einbindung des interaktiven Visualisierungswerkzeugs unterstützt (Kap. 8). Mit Blick auf vorangegangene Studien zum Lernen mit interaktiven Visualisierungen und Zeichenaktivitäten findet dabei eine enge Verzahnung beider Ansätze durch die Lernaufgaben statt, indem sie z. B. das Abzeichnen eines Vektorfeldes aus dem Werkzeug erfordern (Kap. 3.1.4.2 und 3.1.4.1). Darüber hinaus integrierten die Lernaufgaben auch die Definitionen von Divergenz und Rotation in Polar- und Zylinderkoordinaten (Gln. 6 und 11) sowie erste Anwendungsaufgaben, z. B. zum Problemkontext der Kontinuitätsgleichung inkompressibler Fluide (Entwicklung und Wirksamkeitsuntersuchung im Rahmen einer Masterarbeit, Rabe et al., 2022). Die Lernaufgaben wurden in die Übungen zur Vorlesung „Experimentalphysik II: Elektromagnetismus“ (2. Studiensemester) implementiert und ihre Lernwirksamkeit im Feld anhand eines Rotationsdesigns im Vergleich einer Interventions- und einer Kontrollgruppe untersucht. Die Interventionsgruppe bearbeitete die multi-repräsentationalen Lernaufgaben mit Zeichenaktivitäten und Visualisierungswerkzeug, während die Kontrollgruppe an traditionellen, rechen- bzw. beweisbasierten Aufgaben arbeitete. Die Forschungsfragen adressierten dabei den Einfluss der Lernaufgaben auf die Performanz in einem anschließenden Vektorfeldtest (1) und die kognitive Belastung bei der Aufgabenbearbeitung (2). Aufgrund des Formats einer präregistrierten Studie umfasst die Datenerhebung mehrere Erhebungszeitpunkte (Sommersemester 2022, 2023 und 2024). Die Alpha-Implementierung im Sommersemester 2022 diente dabei der Konsolidierung der Testinstumente, des Studiendesigns und der Materialien. Diese Ergebnisse werden im Zuge der Beta- und Gamma-Implementationen in den Sommersemestern 2023 und 2024 einbezogen. Anschließend wird der gesamte Datensatz zur Beantwortung der Forschungsfragen herangezogen.

Da die Datenerhebung bisher nicht abgeschlossen wurde, liegen noch keine Ergebnisse bezüglich der Wirksamkeit der Lernaufgaben vor. Die Studie adressiert daher zwar das Forschungsziel FZ4 dieser Arbeit (Kap. 4.1), in die Diskussion der Forschungsziele (Kap. 10.4) werden jedoch lediglich erste Ergebnisse der Evaluation des Visualisierungswerkzeugs einbezogen (Kap. 8). Die theoretischen

Hintergründe, die Forschungsziele und das Studiendesign zur Implementation multi-repräsentationaler Lernaufgaben zur Vektoranalysis in die Übungen der Experimentalphysik II (Elektromagnetismus) wurden in dem folgenden Artikel publiziert (Stage 1-Publikation):

> Hahn, L., & Klein, P. (2023). The impact of multiple representations on students' understanding of vector field concepts: Implementation of simulations and sketching activities into lecture-based recitations in undergraduate physics. *Frontiers in Psychology*, *13*, 1012787. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2022.1012787

Dem Artikel ist ein Anhang beigefügt, der Ausschnitte der Testinstrumente sowie Skalen- und Item-analysen beinhaltet. Dieser ist in Anhang A.1 zu finden. Um die Transparenz des Forschungsprozesses zu erhöhen, ist das gesamte Projekt im Open Science Framework (OSF)[1] hinterlegt. Alle verwendeten Materialien und Instrumente sind in Anhang A.2 dargestellt.
In einem gemeinsamen Projekt mit der Abteilung Computational Material Sciences/Engineering der TU Clausthal und dem Simulationswissenschaftlichen Zentrum Clausthal-Göttingen wurden die entwickelten Lernaufgaben zudem als Open Educational Ressources (OER) aufbereitet und auf dem niedersächsischen OER-Portal Twillo bereit gestellt (Hahn et al., 2023).

[1] https://osf.io/ts864/?view_only=9695f1b47b5946e3a43d5f927dcd0f21

frontiers | Frontiers in Psychology

TYPE Registered Report
PUBLISHED 05 January 2023
DOI 10.3389/fpsyg.2022.1012787

Check for updates

OPEN ACCESS

EDITED BY
Sarah Malone,
Saarland University, Germany

REVIEWED BY
Jose Pablo Escobar,
Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile
Christoph Hoyer,
Ludwig Maximilian University of Munich, Germany

*CORRESPONDENCE
Larissa Hahn
larissa.hahn@uni-goettingen.de

SPECIALTY SECTION
This article was submitted to Educational Psychology, a section of the journal Frontiers in Psychology

RECEIVED 05 August 2022
ACCEPTED 05 December 2022
PUBLISHED 05 January 2023

CITATION
Hahn L and Klein P (2023) The impact of multiple representations on students' understanding of vector field concepts: Implementation of simulations and sketching activities into lecture-based recitations in undergraduate physics.
Front. Psychol. 13:1012787.
doi: 10.3389/fpsyg.2022.1012787

COPYRIGHT
© 2023 Hahn and Klein. This is an open-access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution License (CC BY). The use, distribution or reproduction in other forums is permitted, provided the original author(s) and the copyright owner(s) are credited and that the original publication in this journal is cited, in accordance with accepted academic practice. No use, distribution or reproduction is permitted which does not comply with these terms.

The impact of multiple representations on students' understanding of vector field concepts: Implementation of simulations and sketching activities into lecture-based recitations in undergraduate physics

Larissa Hahn* and Pascal Klein

Physics Education Research, Faculty of Physics, University of Göttingen, Göttingen, Germany

Multiple external representations (e.g., diagrams, equations) and their interpretations play a central role in science and science learning as research has shown that they can substantially facilitate the learning and understanding of science concepts. Therefore, multiple and particularly visual representations are a core element of university physics. In electrodynamics, which students encounter already at the beginning of their studies, vector fields are a central representation typically used in two forms: the algebraic representation as a formula and the visual representation depicted by a vector field diagram. While the former is valuable for quantitative calculations, vector field diagrams are beneficial for showing many properties of a field at a glance. However, benefiting from the mutual complementarity of both representations requires representational competencies aiming at referring different representations to each other. Yet, previous study results revealed several student problems particularly regarding the conceptual understanding of vector calculus concepts. Against this background, we have developed research-based, multi-representational learning tasks that focus on the visual interpretation of vector field diagrams aiming at enhancing a broad, mathematical as well as conceptual, understanding of vector calculus concepts. Following current trends in education research and considering cognitive psychology, the tasks incorporate sketching activities and interactive (computer-based) simulations to enhance multi-representational learning. In this article, we assess the impact of the learning tasks in a field study by implementing them into lecture-based recitations in a first-year electrodynamics course at the University of Göttingen. For this, a within- and between-subjects design is used comparing a multi-representational intervention group and a control group working on traditional calculation-based tasks. To analyze the impact

of multiple representations, students' performance in a vector calculus test as well as their perceived cognitive load during task processing is compared between the groups. Moreover, analyses offer guidance for further design of multi-representational learning tasks in field-related physics topics.

KEYWORDS

multiple representations, simulation, conceptual understanding, vector fields, physics, sketching, task-based learning, lecture-based recitations

1. Introduction

Mathematics and physics concepts are often represented in some form of external representation (De Cock, 2012). Thereby, different forms of representation, multiple representations (MRs), allow to express a concept or a (learning) subject in various manners by focusing on different properties and characteristics. In complementing and constraining each other, multiple representations enable a deep understanding of a situation or a construct (Ainsworth, 1999; Seufert, 2003) and, moreover, using multiple representations was found to have positive effects on knowledge acquisition and problem-solving skills (e.g., Nieminen et al., 2012; Rau, 2017). Regarding the understanding and communication of science concepts, visual representations are particularly crucial (Cook, 2006). Following previous research, they can help to eliminate science concepts' abstract nature and were shown to support students to develop scientific conceptions (e.g., Cook, 2006; Chiu and Linn, 2014; Suyatna et al., 2017). However, to benefit from multimedia learning environments, representational competencies based on an understanding of how individual representations depict information, how they relate to each other, and how to choose an appropriate representation to solve a problem are required (DeFT framework; Ainsworth, 2006). Without representational competencies, visual representations cannot fully unfold their potential as meaning-making tools.

Additionally, learning with and mentally processing visual representations often places special demands on the visuo-spatial working memory, thus increasing cognitive load (Baddeley, 1986; Cook, 2006; Logie, 2014). Here, previous research showed that externalizing visuo-spatial information can provide cognitive relief (e.g., Bilda and Gero, 2005). In this regard, sketching (or drawing) visual cues in multimedia learning has become an increasing scientific focus in recent years (Ainsworth and Scheiter, 2021). Following empirical findings, sketching allows to pay more attention to details (Ainsworth and Scheiter, 2021), thus supporting a visual understanding of concepts (Wu and Rau, 2018). Correspondingly, previous studies reported positive learning effects of sketching activities in (multi-)representational learning environments, as they increase attention and engagement with the representations and help to activate prior knowledge, to understand a representations' properties, or to recall information (e.g., Leopold and Leutner, 2012; Wu and Rau, 2018; Kohnle et al., 2020; Ainsworth and Scheiter, 2021). Typical sketching activities are copying a given representation, creating a visual representation with modified individual features or by transforming textual information into a drawing, or inventing a novel representation (e.g., to reason; Kohnle et al., 2020; Ainsworth and Scheiter, 2021). Moreover, with respect to Cognitive Load Theory (Sweller, 2010) which characterizes the limited capacity of working memory resources based on three types of cognitive load—intrinsic, extraneous, and germane cognitive load—sketching activities are able to promote a more effective use of these resources (Bilda and Gero, 2005). In addition to cognitive relief provided by sketching in multi-representational learning, previous work demonstrated the added value of interactive (computer-based) simulations for the development of representational competencies (e.g., Stieff, 2011; Kohnle and Passante, 2017). As such, integration of simulations in multimedia learning environments foster active learning, thus supporting students' use of scientific representations for communication and helping them to integrate their representational knowledge systematically with content knowledge (Linn et al., 2006; Stieff, 2011). Specifically, the complementation of simulation-based learning by the aforementioned sketching activities was found to support a deeper understanding of the representation being presented (Wu and Rau, 2018; Kohnle et al., 2020; Ainsworth and Scheiter, 2021).

Considering the value of multiple representations for science learning, unsurprisingly, they also play a major role in university physics. For instance, in electrodynamics, vector field representations are deeply rooted in the developmental history of the domain (Faraday, 1852), being represented either algebraically as a formula or graphically using arrows. In university experimental lectures, an introduction to electric and magnetic fields typically starts from concrete analogous representations of electric or magnetic field lines, then moving on to more abstract or idealized visual-graphical and symbolical representations (Küchemann et al., 2021). Using demonstration experiments, electric and magnetic field lines are visualized, for example, by semolina grains (Benimoff, 2006; Lincoln, 2017; Küchemann et al., 2021) or iron filings (Thompson, 1878; Küchemann et al., 2021), respectively. When representing a

quantity as a vector field, the fields' properties, its divergence and curl, and further the integral theorems of Gauss and Stokes are of particular importance for physics applications (Griffiths, 2013). Accordingly, a sound understanding of vector calculus is of great importance for undergraduate and graduate physics studies. For example, a study by Burkholder et al. (2021) found a significant correlation between extensive preparation in vector calculus and students' performance in an introductory course on electromagnetism.

However, further research also revealed that a conceptual understanding, which is relevant to physics comprehension, often caused difficulties for students (e.g., Pepper et al., 2012; Singh and Maries, 2013; Bollen et al., 2015). Besides conceptual gaps regarding vector field representations in general, learning difficulties in dealing with vector field concepts such as divergence and curl became particularly apparent. For example, students struggled to extract information about divergence or curl from vector field diagrams and they interpreted and used these concepts literally instead of referring to their physics-mathematical concepts (Ambrose, 2004; Pepper et al., 2012; Singh and Maries, 2013; Bollen et al., 2015, 2016, 2018; Baily et al., 2016; Klein et al., 2018, 2019). In a study on students' difficulties regarding the curl of vector fields, Jung and Lee (2012) diagnosed the gap between mathematical and conceptual reasoning as a major source of comprehension problems. Furthermore, Singh and Maries (2013) concluded that graduate students struggle with the concepts of divergence and curl, even though they know how to calculate them mathematically. In the context of electrostatics and electromagnetism, it was also shown that conceptual gaps regarding vector calculus led to improper understanding and errors in when applying essential principles in physics of essential principles in physics (Ambrose, 2004; Jung and Lee, 2012; Bollen et al., 2015, 2016; Li and Singh, 2017). Regarding these findings, it is noticeable that the aforementioned studies did not strictly distinct between conceptual understanding and representational competencies with respect to vector fields. This is not surprising, since there is strong overlap of the two areas in this subject domain—vector fields are, as such, a form of representation that cannot be understood in a subject context isolated from concepts. Conversely, it is almost impossible to learn electrodynamics concepts without vector field representations.

In introductory physics texts, vector concepts are typically given as mathematical expressions, but are either not or insufficiently explained qualitatively (Smith, 2014). Even in more advanced physics textbooks, there is little geometric explanation or discussion of vector field concepts and integral theorems. Regarding the aforementioned empirical findings, relevance and requirement of new instructions that address a conceptual understanding become even more apparent. Consequently, numerous authors advocated the use of visual representations in order to foster a conceptual understanding. Following this line of research, Bollen et al. (2018) developed a guided-inquiry teaching-learning sequence on vector calculus in electrodynamics aiming at strengthening the connection between visual and algebraic representations. Implementing the tutorials in a second-year undergraduate electrodynamics course revealed a positive effect of the interventions on physics students' conceptual understanding and their ability to visually interpret vector field diagrams. In addition, subjects expressed primarily positive feedback regarding the learning approach. However, as discussed by the authors, the exact results should be interpreted with care as the number of participants was small and the implementation followed a less streamlined structure as, for example, no strict control and intervention group design was used. Additionally, Klein et al. (2018, 2019) developed text-based instructions for visually interpreting divergence using vector field diagrams. Eye tracking was used to analyze representation-specific visual behaviors, such as evaluating vectors along coordinate directions. Here, gaze analyses revealed a quantitative increase in conceptual understanding as a result of this intervention (Klein et al., 2018, 2019). In addition to a positive impact of visual cues on performance measures, a positive correlation with students' response confidence was found. This means that students not only answered correctly more often, but also trusted their answers more, which is a desirable result of successful teaching (Lindsey and Nagel, 2015; Klein et al., 2017, 2019). In subsequent interviews, subjects expressed diagram-specific mental operations, such as decomposing vectors and evaluating field components along coordinate directions, as a main problem source (Klein et al., 2018). Thus, a follow-up experimental study involved sketching activities aiming at generating representation-specific aids (e.g., field components) to support the visual interpretation of divergence (Hahn and Klein, 2021, 2022a). Here, sketching was shown to significantly reduce perceived cognitive load when applying visual problem-solving strategies related to a fields' divergence (Hahn and Klein, 2022a).

With regard to previous findings concerning student problems, building upon the existing multi-representational teaching-learning materials, and using the DeFT framework (Ainsworth, 2006), four multi-representational learning tasks were developed aiming at visually interpreting vector field diagrams (Hahn and Klein, 2022b). Their structure follows the Modeling Instruction approach as each task addresses one vector calculus concept in which the representational forms are used in a coordinated manner aiming at developing conceptual understanding (e.g., McPadden and Brewe, 2017). Furthermore, sketching activities and a vector field simulation are incorporated to provide cognitive relief, to foster engagement with the representations, and to support the development of representational competencies related to vector calculus concepts. Here, representation-specific sketching activities, such as sketching vector components or highlighting rows or columns to support evaluation along coordinate directions, were included (Klein et al., 2018, 2019; Hahn and Klein, 2021, 2022a). Additionally, typical sketching tasks for learning with simulations, such as copying or creating

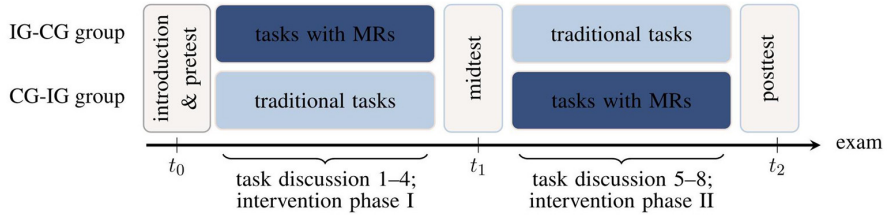


FIGURE 1
Study design with timeline from left (t_0) to right (t_2; intervention group IG, control group CG, multiple representations MRs). The designations "IG-CG group" and "CG-IG group" refer to the chronological order of the groups in the rotational design (first intervention group, then control group, or vice versa).

a vector field diagram, were involved (Kohnle et al., 2020). As part of the present registered report study, the research-based multi-representational learning tasks are implemented into lecture-based recitations in a first-year electrodynamics course. Consequently, the present study aims at evaluating the added value of multiple representations in task-based learning of vector calculus by comparing a multi-representational intervention group and a control group with traditional calculation-based task. Therefore, the following guiding question is investigated: "Do multi-representational learning tasks have a higher learning impact than traditional (calculation-based) tasks in the context of vector fields?" Considering previous research findings and theoretical frameworks from cognitive psychology on multi-representational learning, and on the use of sketching activities and simulations, we hypothesize that multi-representational, sketching- and simulation-based tasks

(H1) promote students' performance as measured by a vector field performance test (that includes tasks related to vector calculus, vector field quantities, and vector field concepts), and
(H2) reduce perceived cognitive load (as measured by a cognitive load questionnaire) during task processing.

2. Methods

Learning tasks are implemented in the weekly recitations on *experimental physics II* in the summer semester 2022 and 2023. Physics students usually attend *experimental physics II* in their second semester of study, then encountering university electromagnetism for the first time. The module includes a lecture with demonstration experiments and weekly recitations in which the compulsory assignments are discussed. Dividing the study into an alpha and a beta implementation (summer semester 2022 and 2023, respectively) primarily serves to consolidate the data. In the alpha implementation, all instruments and learning tasks are tested and psychometrically characterized, thus providing guidance for improvement. Then, alpha as well as beta implementation are used to evaluate the effectiveness of the intervention aiming at answering the guiding question and testing the hypotheses. Study design and procedure are identical in both implementations in order to transfer conclusions from the alpha to the beta implementation.

2.1. Procedure

The studies are based on within- and between-subjects treatments wrapped in a rotational design (Figure 1). At the beginning of the lecture period, all recitation groups are randomly divided into two superordinate groups (IG-CG and CG-IG groups, respectively) both serving as intervention groups (IG) and control groups (CG) at some time but in different order. Students select a fixed recitation group by their own without knowing about the assignment to a treatment condition later on. Before the first intervention phase, students take a performance test on vector calculus (section 2.3). Subsequently, the first intervention phase starts and in each of the following four weeks, students complete a mandatory intervention task (either a multi-representational or a traditional task) in addition to a set of standard tasks which does not differ between the groups. The latter consists of typical, predominantly calculation- and formula-based, problem-solving tasks that have always been used in the course (e.g., they present some vector fields and students must calculate divergence or curl). First, the upper group in Figure 1 is intervention group (IG) and works on the multi-representational learning tasks, while the lower group, acting as a waiting group, is control group (CG) and works on traditional (calculation-based) tasks. All assignments are completed by self-study within one week, submitted for correction, and discussed with a dedicated, independent intervention tutor during the subsequent recitation. Prior to each task discussion, a short questionnaire on perceived cognitive load during task processing and means of task assistance is deployed (section 2.3). After the first intervention phase in the seventh week of the semester, students again complete the performance test on vector calculus and another evaluation questionnaire. Subsequently, the groups switch roles and the second four-week intervention phase starts. Finally, the

performance test on vector calculus and the questionnaire are administered again.

2.2. Power analysis

Due to the lack of comparable studies regarding target group and topic, power analyses are based on effect sizes of methodologically similar studies. Akkus and Cakiroglu (2010) reported medium ($\eta^2 = 0.128$, $f = 0.383$) to large effect sizes ($\eta^2 = 0.233$, $f = 0.551$) when comparing seventh grade students' algebra performance between an experimental group provided with a multiple representation-based algebra instruction and a control group using a conventional instruction. Power analyses with G*Power 3.1 (Faul et al., 2009) indicated that for an analysis of covariance ($p < 0.05$) including two covariates (e.g., semester of study and school leaving examination grade) and an average effect size of $f = 0.467$, a sample size of $N = 51$ students would be required to obtain a desired power of 0.9 (McDonald, 2014). A meta analysis by Sokolowski (2018) found a large overall weighted mean effect size of $f = 0.53$ regarding the use of representations in Pre-K through fifth grade mathematics compared to traditional teaching methods which would require a sample size of $N = 40$ considering the aforementioned assumptions. Regarding the alpha implementation of this study, pre- and midtest were completed by $N = 116$ and $N = 64$ students, respectively. For beta implementation, similar sample sizes can be expected which would be consistent with the power analyses results.

2.3. Materials and measures

Test and scale analyses reported in the following are based on the assessments and responses of the alpha implementation. Here, data from the first implementation phase are used to ensure the largest possible data base. Therefore, the performance test at t_0 ($N = 116$) and the weekly questionnaire used in the first recitation after the pretest ($N = 93$) were examined. The sample from the pretest included 86 male and 27 female undergraduate physics students with a mean age of 20.3 ± 1.9 years, a mean school leaving examination grade of 1.7 ± 0.6 ["Abitur" grade; referring to a scale from 1 (best) to 6], and in their 2.8 ± 1.5 semester of study. Prior to test and scale analyses, all datasets were cleaned of outliers. An overview of all variables and scales used in the study is given in Table 1.

Initially, all subjects completed a test with demographic questions (e.g., age, gender, semester of study) and a performance test on vector calculus assessing conceptual understanding closely linked with representational competencies. The performance test included 19 tasks, partly comprising several subtasks, hence, a total of 65 items

TABLE 1 Overview of variables, instruments, and scales including scale analyses results of the alpha implementation (scale mean *M*, mean difficulty index *P*, mean standard deviation *SD*, mean discrimination index *D*, Cronbach's alpha α_C, Spearman-Brown coefficient ρ).

Variable	Scale	#item	M/P^a	*SD*	*D*	α_C / ρ
Recommendations according to Ding and Beichner (2009)		–	$[0.3; 0.9]^b$	–	≥ 0.3	≥ 0.7
Dependent variables						
Performance[c]	Vector calculus test (V)	65	0.51	0.13	0.34	0.86
Response confidence	Confidence (C)	42	0.52	0.23	0.56	0.97
Cognitive load	Extraneous cognitive load (ECL)	4	0.30	0.22	0.53	0.82
	Intrinsic cognitive load (ICL)	3	0.45	0.24	0.62	0.88
	Germane cognitive load (GCL)	2	0.57	0.25	0.63	0.84
	Effort (E)	2	0.67	0.25	0.63	0.80
Independent variables						
Group	–	–	–	–	–	–
Gender	–	–	–	–	–	–
Control variables						
Tutor behavior	Tutor (T)	6	0.84	0.14	0.33	0.89
Age	–	–	–	–	–	–
Semester of study	–	–	–	–	–	–
Abitur grade	–	–	–	–	–	–

[a]Scale mean is used for evaluation items; mean difficulty index is used for performance test items.
[b]Recommendation refers to mean difficulty index *P*.
[c]Multiple-choice and true-false items of one task are counted separately.

(multiple-choice and true-false items of one task counted separately) covering seven different subtopics of vector calculus. Forty-nine of the items were designed in multiple-choice or true-false format, while the remaining 16 items required a sketch, formula, justification, calculation, or a proof. Most of the items were taken from established concept tests on electrodynamics (CURrENT) or have been used and validated in a similar form in previous studies (Bollen et al., 2015, 2018; Baily et al., 2016, 2017; Klein et al., 2018, 2019, 2021; Hahn and Klein, 2022a; Rabe et al., 2022). Exploratory factor analysis of the performance test did not reveal a distinct factor structure which is a common result for concept tests in STEM education research (e.g., FCI; Heller and Huffman, 1995; Hestenes and Halloun, 1995; Huffman and Heller, 1995; Scott et al., 2012). Therefore, for the following analyses, the performance test is considered in its entirety. With a mean difficulty index of $P = 0.51$, a mean discrimination index of $D = 0.34$, and a reliability of $\alpha_C = 0.86$ (Table 1), the performance test shows satisfactory psychometric properties according to the recommendations of Ding and Beichner (2009). Additionally, for most of the multiple-choice and true-false items, response confidence was assessed using a 6-point Likert-type rating scale (1 = absolutely confident to 6 = not confident at all; $D = 0.56$, $\alpha_C = 0.97$; Table 1) to provide insight into student response behavior beyond performance measures. Since previous studies, also in the context of instruction-based learning of vector field concepts, found positive correlations between performance and confidence (e.g., Lindsey and Nagel, 2015; Klein et al., 2019), it will be investigated whether group membership influences this correlation.

In weekly recitations, students answered a short questionnaire related to the previous learning task providing information about the cognitive load they experienced while completing the task as well as any kind of task assistance. The items regarding cognitive load are based on a scale measuring the three types of cognitive load from Leppink et al. (2013) which was supplemented by items from Klepsch et al. (2017) and Krell (2017). The final questionnaire contained 12 items measuring cognitive load on a 6-point Likert-type rating scale (1 = strongly disagree to 6 = strongly agree). As a result of principal component analysis with varimax rotation $\left[\text{KMO} = 0.74, \mathcal{X}^2(66) = 522.56, p < 0.001\right]$, four subscales can be identified (75.03% variance explanation, excluding item CL10; Table 1): *extraneous cognitive load* (four items, $\alpha_C = 0.82$), *intrinsic cognitive load* (three items, $\alpha_C = 0.88$), *germane cognitive load* (two items, $\rho = 0.84$), and *effort* (two items, $\rho = 0.80$). The three scales for extraneous, intrinsic, and germane cognitive load reflect the three types of cognitive load according to Sweller (2010), with the germane cognitive load scale primarily addressing perceived improvement in understanding. In addition, the effort scale assesses the effort expended in task completion (Paas and Van Merriënboer, 1994; Krell, 2017). Following the recommendations of Ding and Beichner (2009), item and scale analyses yielded good values of item-total correlation ($r_{it} \geq 0.56$) and discrimination indices ($D_i \geq 0.50$) as well as the scales' mean discrimination indices ($D \geq 0.53$) and their reliabilities ($\alpha_C \geq 0.80$). In addition to the perceived cognitive load, means of task assistance (e.g., "working together in a group with students from my course", "looking up in a textbook") were assessed using a choice format.

After the intervention phases, the students again completed the performance test which was extended by a module-specific task on electrostatics. In addition, a questionnaire was used which surveyed the tutor's behavior during task discussion as a control variable using six items (6-point Likert-type rating scale from 1 = strongly disagree to 6 = strongly agree). The items are based on the "tutor evaluation questionnaire" by Dolmans et al. (1994) supplemented by modifications from Baroffio et al. (1999) and Pinto et al. (2001). Following the results of principal component analysis with varimax rotation $\left[\text{KMO} = 0.89, \mathcal{X}^2(15) = 293.91, p < 0.001\right]$, the scale will be considered in its entirety (68.61% variance explanation). It shows a high reliability ($\alpha_C = 0.89$) and a satisfactory discrimination index ($D = 0.33$; Table 1). Further information and detailed documentation of the study material, instruments, scales, and test analyses can be found in the Supplementary material.

2.4. Statistical data analysis

As required for parametric procedures, all scales for dependent and control variables (Table 1) were checked for normal distributed scale expressions. Regarding the hypotheses, statistical analyses will mainly comprise (co-)variance analyses to examine the influence of group membership on the dependent variables. Both intervention phases are methodologically treated equally, but analyzed separately to ensure the largest possible data base. Moreover, the rotational design allows a comparison of the pre-post learning gains of intervention and control group within each phase. Here, a common measure of gain, Hake's gain, as defined by the quotient of absolute gain and maximum possible gain, is used (Hake, 1998). However, a comparison of both conditions (traditional vs. multi-representational) can also take place within the IG-CG and CG-IG groups, since each group is once CG and once IG. In addition, 2×2 analyses of variance will be conducted to examine the impact of the intervention comparing different time points (pre-post comparison). Moreover, the performance test will be examined in more detail using Rasch analysis.

Data availability statement

The raw data supporting the conclusions of this article will be made available by the authors, without undue reservation.

Ethics statement

Ethical review and approval was not required for the study on human participants in accordance with the local legislation and institutional requirements. The patients/participants provided their written informed consent to participate in this study.

Author contributions

PK supervised data collection and gave feedback to the first draft of the manuscript. LH performed the statistical analyses and wrote the first draft of the manuscript. All authors contributed to conception and design of the study.

Funding

We acknowledge support by the Open Access Publication Funds of the Göttingen University.

Conflict of interest

The authors declare that the research was conducted in the absence of any commercial or financial relationships that could be construed as a potential conflict of interest.

Publisher's note

All claims expressed in this article are solely those of the authors and do not necessarily represent those of their affiliated organizations, or those of the publisher, the editors and the reviewers. Any product that may be evaluated in this article, or claim that may be made by its manufacturer, is not guaranteed or endorsed by the publisher.

Supplementary material

The Supplementary Material for this article can be found online at: https://www.frontiersin.org/articles/10.3389/fpsyg.2022.1012787/full#supplementary-material

References

Ainsworth, S. E. (1999). The functions of multiple representations. *Comput. Educ.* 33, 131–152. doi: 10.1016/S0360-1315(99)00029-9

Ainsworth, S. E. (2006). DeFT: a conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learn. Instruct.* 16, 183–198. doi: 10.1016/j.learninstruc.2006.03.001

Ainsworth, S. E., and Scheiter, K. (2021). Learning by drawing visual representations: potential, purposes, and practical implications. *Curr. Dir. Psychol. Sci.* 30, 61–67. doi: 10.1177/0963721420979582

Akkus, O., and Cakiroglu, E. (2010). "The effects of multiple representations-based instruction on seventh grade students' algebra performance," in *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME)*, eds V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, and F. Arzarello (Lyon: Institut National de Recherche Pédagogique), 420–429.

Ambrose, B. S. (2004). Investigating student understanding in intermediate mechanics: identifying the need for a tutorial approach to instruction. *Am. J. Phys.* 72, 453–459. doi: 10.1119/1.1648684

Baddeley, A. (1986). *Working Memory*. Oxford: Oxford University Press.

Baily, C., Bollen, L., Pattie, A., Van Kampen, P., and De Cock, M. (2016). "Student thinking about the divergence and curl in mathematics and physics contexts," in *Proceedings of the Physics Education Research Conference 2016* (College Park, MD: American Institute of Physics), 51–54. doi: 10.1119/perc.2015.pr.008

Baily, C., Ryan, Q. X., Astolfi, C., and Pollock, S. J. (2017). Conceptual assessment tool for advanced undergraduate electrodynamics. *Phys. Rev. Phys. Educ. Res.* 13, 020113. doi: 10.1103/PhysRevPhysEducRes.13.020113

Baroffio, A., Kayser, B., Vermeulen, B., Jacquet, J., and Vu, N. V. (1999). Improvement of tutorial skills: an effect of workshops or experience? *Acad. Med.* 74, S75–S77. doi: 10.1097/00001888-199910000-00045

Benimoff, A. I. (2006). The electric fields experiment: a new way using conductive tape. *Phys. Teach.* 44, 140–141. doi: 10.1119/1.2173317

Bilda, Z., and Gero, J. S. (2005). Does sketching off-load visuo-spatial working memory. *Stud. Designers* 5, 145–160.

Bollen, L., Van Kampen, P., Baily, C., and De Cock, M. (2016). Qualitative investigation into students' use of divergence and curl in electromagnetism. *Phys. Rev. Phys. Educ. Res.* 12, 020134. doi: 10.1103/PhysRevPhysEducRes.12.020134

Bollen, L., Van Kampen, P., and De Cock, M. (2015). Students' difficulties with vector calculus in electrodynamics. *Phys. Rev. ST Phys. Educ. Res.* 11, 020129. doi: 10.1103/PhysRevSTPER.11.020129

Bollen, L., van Kampen, P., and De Cock, M. (2018). Development, implementation, and assessment of a guided-inquiry teaching-learning sequence on vector calculus in electrodynamics. *Phys. Rev. Phys. Educ. Res.* 14, 020115. doi: 10.1103/PhysRevPhysEducRes.14.020115

Burkholder, E. W., Murillo-Gonzalez, G., and Wieman, C. (2021). Importance of math prerequisites for performance in introductory physics. *Phys. Rev. Phys. Educ. Res.* 17, 010108. doi: 10.1103/PhysRevPhysEducRes.17.010108

Chiu, J. L., and Linn, M. C. (2014). Supporting knowledge integration in chemistry with a visualization-enhanced inquiry unit. *J. Sci. Educ. Technol.* 23, 37–58. doi: 10.1007/s10956-013-9449-5

Cook, M. P. (2006). Visual representations in science education: the influence of prior knowledge and cognitive load theory on instructional design principles. *Sci. Educ.* 90, 1073–1091. doi: 10.1002/sce.20164

De Cock, M. (2012). Representation use and strategy choice in physics problem solving. *Phys. Rev. ST Phys. Educ. Res.* 8, 020117. doi: 10.1103/PhysRevSTPER.8.020117

Ding, L., and Beichner, R. (2009). Approaches to data analysis of multiple-choice questions. *Phys. Rev. ST Phys. Educ. Res.* 5, 020103. doi: 10.1103/PhysRevSTPER.5.020103

Dolmans, D. H., Wolfhagen, I., Schmidt, H., and Van der Vleuten, C. (1994). A rating scale for tutor evaluation in a problem-based curriculum: validity and reliability. *Med. Educ.* 28, 550–558. doi: 10.1111/j.1365-2923.1994.tb02735.x

Faraday, M. (1852). III Experimental researches in electricity-twenty-eighth series. *Philos. Trans. R. Soc. Lond.* 142, 25–56. doi: 10.1098/rstl.1852.0004

Faul, F., Erdfelder, E., Buchner, A., and Lang, A.-G. (2009). Statistical power analyses using G* Power 3.1: tests for correlation and regression analyses. *Behav. Res. Methods* 41, 1149–1160. doi: 10.3758/BRM.41.4.1149

Griffiths, D. J. (2013). *Introduction to Electrodynamics*. Boston, MA: Pearson.

Hahn, L., and Klein, P. (2021). "Multiple Repräsentationen als fachdidaktischer Zugang zum Satz von Gauß - Qualitative Zugänge zur Interpretation der Divergenz von Vektorfeldern," in *PhyDid B - Didaktik der Physik - Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung*, eds J. Grebe-Ellis and H. Grötzebauch (Fachverband Didaktik der

Physik, virtuelle DPG-Frühjahrstagung 2021), 95–100. Available online at: https://ojs.dpg-physik.de/index.php/phydid-b/article/view/1151/1237

Hahn, L., and Klein, P. (2022a). "Kognitive Entlastung durch Zeichenaktivitäten? Eine empirische Untersuchung im Kontext der Vektoranalysis," in *Unsicherheit als Element von naturwissenschaftsbezogenen Bildungsprozessen*, eds S. Habig and H. van Vorst (Gesellschaft für Didaktik der Chemie und Physik, virtuelle Jahrestagung 2021), 384–387. Available online at: https://www.gdcp-ev.de/wp-content/tb2022/TB2022_384_Hahn.pdf

Hahn, L., and Klein, P. (2022b). "Vektorielle Feldkonzepte verstehen durch Zeichnen? Erste Wirksamkeitsuntersuchungen," in *PhyDid B - Didaktik der Physik - Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung*, eds H. Grötzebauch and S. Heinicke (Fachverband Didaktik der Physik, virtuelle DPG-Frühjahrstagung 2022), 119–126. Available online at: https://ojs.dpg-physik.de/index.php/phydid-b/article/view/1259/1485

Hake, R. R. (1998). Interactive-engagement versus traditional methods: a six-thousand-student survey of mechanics test data for introductory physics courses. *Am. J. Phys*. 66, 64–74. doi: 10.1119/1.18809

Heller, P., and Huffman, D. (1995). Interpreting the force concept inventory: a reply to Hestenes and Halloun. *Phys. Teach*. 33, 503–511. doi: 10.1119/1.2344279

Hestenes, D., and Halloun, I. (1995). Interpreting the force concept inventory: a response to March 1995 critique by Huffman and Heller. *Phys. Teach*. 33, 502–506. doi: 10.1119/1.2344278

Huffman, D., and Heller, P. (1995). What does the force concept inventory actually measure? *Phys. Teach*. 33, 138–143. doi: 10.1119/1.2344171

Jung, K., and Lee, G. (2012). Developing a tutorial to address student difficulties in learning curl: a link between qualitative and mathematical reasoning. *Can. J. Phys*. 90, 565–572. doi: 10.1139/p2012-054

Klein, P., Hahn, L., and Kuhn, J. (2021). Einfluss visueller Hilfen und räumlicher Fähigkeiten auf die graphische Interpretation von Vektorfeldern: eine Eye-Tracking-Untersuchung. *Z. Didakt. Naturwiss*. 27, 181–201. doi: 10.1007/s40573-021-00133-2

Klein, P., Müller, A., and Kuhn, J. (2017). Assessment of representational competence in kinematics. *Phys. Rev. Phys. Educ. Res*. 13, 010132. doi: 10.1103/PhysRevPhysEducRes.13.010132

Klein, P., Viiri, J., and Kuhn, J. (2019). Visual cues improve students' understanding of divergence and curl: evidence from eye movements during reading and problem solving. *Phys. Rev. Phys. Educ. Res*. 15, 010126. doi: 10.1103/PhysRevPhysEducRes.15.010126

Klein, P., Viiri, J., Mozaffari, S., Dengel, A., and Kuhn, J. (2018). Instruction-based clinical eye-tracking study on the visual interpretation of divergence: how do students look at vector field plots? *Phys. Rev. Phys. Educ. Res*. 14, 010116. doi: 10.1103/PhysRevPhysEducRes.14.010116

Klepsch, M., Schmitz, F., and Seufert, T. (2017). Development and validation of two instruments measuring intrinsic, extraneous, and germane cognitive load. *Front. Psychol*. 8, 1997. doi: 10.3389/fpsyg.2017.01997

Kohnle, A., Ainsworth, S. E., and Passante, G. (2020). Sketching to support visual learning with interactive tutorials. *Phys. Rev. Phys. Educ. Res*. 16, 020139. doi: 10.1103/PhysRevPhysEducRes.16.020139

Kohnle, A., and Passante, G. (2017). Characterizing representational learning: a combined simulation and tutorial on perturbation theory. *Phys. Rev. Phys. Educ. Res*. 13, 020131. doi: 10.1103/PhysRevPhysEducRes.13.020131

Krell, M. (2017). Evaluating an instrument to measure mental load and mental effort considering different sources of validity evidence. *Cogent Educ*. 4, 1280256. doi: 10.1080/2331186X.2017.1280256

Küchemann, S., Malone, S., Edelsbrunner, P., Lichtenberger, A., Stern, E., Schumacher, R., et al. (2021). Inventory for the assessment of representational competence of vector fields. *Phys. Rev. Phys. Educ. Res*. 17, 020126. doi: 10.1103/PhysRevPhysEducRes.17.020126

Leopold, C., and Leutner, D. (2012). Science text comprehension: drawing, main idea selection, and summarizing as learning strategies. *Learn. Instr*. 22, 16–26. doi: 10.1016/j.learninstruc.2011.05.005

Leppink, J., Paas, F., Van der Vleuten, C. P., Van Gog, T., and Van Merriënboer, J. J. (2013). Development of an instrument for measuring different types of cognitive load. *Behav. Res. Methods* 45, 1058–1072. doi: 10.3758/s13428-013-0334-1

Li, J., and Singh, C. (2017). Investigating and improving introductory physics students' understanding of symmetry and Gauss's law. *Eur. J. Phys*. 39, 015702. doi: 10.1088/1361-6404/aa8d55

Lincoln, J. (2017). Electric field patterns made visible with potassium permanganate. *Phys. Teach*. 55, 74–75. doi: 10.1119/1.4974114

Lindsey, B. A., and Nagel, M. L. (2015). Do students know what they know? Exploring the accuracy of students' self-assessments. *Phys. Rev. ST Phys. Educ. Res*. 11, 020103. doi: 10.1103/PhysRevSTPER.11.020103

Linn, M. C., Lee, H.-S., Tinker, R., Husic, F., and Chiu, J. L. (2006). Teaching and assessing knowledge integration in science. *Science* 313, 1049–1050. doi: 10.1126/science.1131408

Logie, R. H. (2014). *Visuo-spatial Working Memory*. London: Psychology Press. doi: 10.4324/9781315804743

McDonald, J. H. (2014). *Handbook of Biological Statistic*. Baltimore, MD: Sparky House Publishing.

McPadden, D., and Brewe, E. (2017). Impact of the second semester University Modeling Instruction course on students' representation choices. *Phys. Rev. Phys. Educ. Res*. 13, 020129. doi: 10.1103/PhysRevPhysEducRes.13.020129

Nieminen, P., Savinainen, A., and Viiri, J. (2012). Relations between representational consistency, conceptual understanding of the force concept, and scientific reasoning. *Phys. Rev. ST Phys. Educ. Res*. 8, 010123. doi: 10.1103/PhysRevSTPER.8.010123

Paas, F. G., and Van Merriënboer, J. J. (1994). Instructional control of cognitive load in the training of complex cognitive tasks. *Educ. Psychol. Rev*. 6, 351–371. doi: 10.1007/BF02213420

Pepper, R. E., Chasteen, S. V., Pollock, S. J., and Perkins, K. K. (2012). Observations on student difficulties with mathematics in upper-division electricity and magnetism. *Phys. Rev. ST Phys. Educ. Res*. 8, 010111. doi: 10.1103/PhysRevSTPER.8.010111

Pinto, P. R., Rendas, A., and Gamboa, T. (2001). Tutors' performance evaluation: a feedback tool for the PBL learning process. *Med. Teach*. 23, 289–294. doi: 10.1080/01421590120048139

Rabe, C., Drews, V., Hahn, L., and Klein, P. (2022). "Einsatz von multiplen Repräsentationsformen zur qualitativen Beschreibung realer Phänomene der Fluiddynamik," in *PhyDid B - Didaktik der Physik - Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung*, eds H. Grötzebauch and S. Heinicke (Fachverband Didaktik der Physik, virtuelle DPG-Frühjahrstagung 2022), 71–77. Available online at: https://ojs.dpg-physik.de/index.php/phydid-b/article/view/1269/1491

Rau, M. A. (2017). Conditions for the effectiveness of multiple visual representations in enhancing STEM learning. *Educ. Psychol. Rev*. 29, 717–761. doi: 10.1007/s10648-016-9365-3

Scott, T. F., Schumayer, D., and Gray, A. R. (2012). Exploratory factor analysis of a Force Concept Inventory data set. *Phys. Rev. ST Phys. Educ. Res*. 8, 020105. doi: 10.1103/PhysRevSTPER.8.020105

Seufert, T. (2003). Supporting coherence formation in learning from multiple representations. *Learn. Instruct*. 13, 227–237. doi: 10.1016/S0959-4752(02)00022-1

Singh, C., and Maries, A. (2013). "Core graduate courses: a missed learning opportunity?" in *AIP Conference Proceedings* (College Park, MD: American Institute of Physics), 382–385. doi: 10.1063/1.4789732

Smith, E. M. (2014). *Student & Textbook Presentation of Divergence* [Master thesis]. Corvallis, OR: Oregon State University.

Sokolowski, A. (2018). The effects of using representations in elementary mathematics: meta-analysis of research. *IAFOR J. Educ*. 6, 129–152. doi: 10.22492/ije.6.3.08

Stieff, M. (2011). Improving representational competence using molecular simulations embedded in inquiry activities. *J. Res. Sci. Teach*. 48, 1137–1158. doi: 10.1002/tea.20438

Suyatna, A., Anggraini, D., Agustina, D., and Widyastuti, D. (2017). "The role of visual representation in physics learning: dynamic versus static visualization," in *Journal of Physics: Conference Series, International Conference on Science and Applied Science, Solo, Indonesia* (Esquimalt, BC: IOP Publishing), 012048. doi: 10.1088/1742-6596/909/1/012048

Sweller, J. (2010). Element interactivity and intrinsic, extraneous, and germane cognitive load. *Educ. Psychol. Rev*. 22, 123–138. doi: 10.1007/s10648-010-9128-5

Thompson, S. P. (1878). A study in magnetism. *Nature* 19, 79–84. doi: 10.1038/019079a0

Wu, S. P. W., and Rau, M. A. (2018). Effectiveness and efficiency of adding drawing prompts to an interactive educational technology when learning with visual representations. *Learn. Instruct*. 55, 93–104. doi: 10.1016/j.learninstruc.2017.09.010

10 Konklusion und Diskussion

Untersuchungsgegenstand dieser Dissertation ist das Lernen und Lehren vektoranalytischer Konzepte in der Studieneingangsphase des Physikstudiums. Vor dem Hintergrund des Lernens mit multiplen Repräsentationen und der CTML fokussiert diese Arbeit dabei einen qualitativen Lehr-Lern-Ansatz, der auf der visuellen Beurteilung von Vektorfelddiagrammen beruht. Das Forschungsinteresse dieser Dissertation zielt auf die methodische Unterstützung, die kognitive Verarbeitung sowie fachdidaktische Potentiale und studentische Schwierigkeiten von und im Umgang mit Vektorfelddiagrammen als Lerninstrument ab. Da es sich bei Vektorfelddiagrammen um depiktive Repräsentationen handelt, fungiert Eye-Tracking neben klassischen Performanz- und Belastungsindikatoren als zentrale Erkenntnismethode zur Analyse der kognitiv-visuellen Prozesse in diesem Zusammenhang. Die Analyse der Implementation, Potentiale und Limitationen dieser Methode in der physikdidaktischen Forschung ergänzt das Forschungsinteresse dieser Arbeit.

Insgesamt ergaben sich aus lerntheoretischen Ansätzen, fachdidaktischen Überlegungen und aufbauend auf bestehenden Arbeiten zum Lernen mit Vektorfelddiagrammen für diese Dissertationsschrift vier Forschungsrichtungen und -ziele (Kap. 4.1). Diese bilden die wesentlichen Stränge des Forschungsprojekts ab und setzen unterschiedliche Forschungsschwerpunkte innerhalb des übergeordneten Forschungsinteresses. Konkret adressieren sie Eye-Tracking als Erkenntnismethode zur Untersuchung von Lern- und Assessmentszenarien in der physikdidaktischen Forschung (Fokus 1), den visuellen Umgang mit Vektorfelddiagrammen (Fokus 2), das kovariate Denken im Kontext der Vektoranalysis (Fokus 3) und die zielgerichtete Unterstützung des Lernens vektoranalytischer Konzepte mit Vektorfelddiagrammen (Fokus 4).

Im Rahmen dieses Forschungsprojekts wurden vier Studien durchgeführt. Die Untersuchungsgegenstände dieser Studien umfassten Eye-Tracking in der physikdidaktischen Forschung (Studie *Review*, Kap. 5), Koordinationsstrategien beim Repräsentationswechsel zwischen Vektorfelddiagramm und Formeldarstellung (Studie *Strategien*, Kap. 6), Zeichenaktivitäten beim instruktionalen Lernen der Divergenz (Studie *Zeichnen*, Kap. 7) und multi-repräsentationale, digitalgestützte Lernaufgaben zur Vektoranalysis in der universitären Lehre (Studie *Lernaufgaben*, Kap. 8 und 9). Die Studien deckten ein breites Spektrum unterschiedlicher Designs ab, indem sie sowohl Theorie- als auch empirische Labor- sowie Feldstudien einschlossen. Dabei adressiert jede Studie die vier Fokusse in unterschiedlichem Maß. Während die Ergebnisse der Studien zumeist zu verschiedenen Zielen beitragen, fokussieren sie oftmals ein Forschungsziel im Besonderen. Die Vielfalt der Untersuchungsdesigns sowie -methoden ermöglicht dabei verschiedene Perspektiven auf den Untersuchungsgegenstand und trägt so zu einem vertiefenden und kohärenten Verständnis von Vektorfelddiagrammen als Lerninstrument bei.

Abschließend werden nun die Erkenntnisse der einzelnen Studien mit Blick auf die formulierten Forschungsziele dieser Arbeit zu einer Gesamtkonklusion und -interpretation zusammengefügt. Zu diesem Zweck werden im Folgenden die wesentlichen Ergebnisse der vorangegangenen Kapitel im Hinblick auf die vier Fokusse bzw. Forschungsziele dieser Arbeit rekapituliert und mit Bezug zu den

theoretischen und fachdidaktischen Hintergründen und Überlegungen in Kap. 2 und 3 diskutiert. Zur Unterstützung der Lesendenfreundlichkeit werden für die Referenzen zu den Studien die Kurztitel aus Tab. 6 verwendet.

10.1 Eye-Tracking in der physikdidaktischen Forschung

Das erste Forschungsziel zielte auf eine Analyse der Implementation, der Potentiale und der Limitationen von Eye-Tracking als Erkenntnismethode zur Untersuchung von Lern- und Assessmentszenarien in der physikdidaktischen Forschung ab. Dieses Forschungsziel wurde im Wesentlichen von der Studie *Review* adressiert. Im Rahmen eines systematischen Literaturreviews wurden dabei 33 Eye-Tracking-Studien in der physikdidaktischen Forschung bis einschließlich April 2021 identifiziert und analysiert. Es zeigte sich ein ansteigender Trend der Verwendung von Eye-Tracking als Erkenntnismethode in der physikdidaktischen Forschung, der das disziplinspezifische Potential der Methode unterstützt.

Kategorisierungen von Blickdatenanalysen: Global vs. lokal und Differenzierung anhand der abhängigen Variable

Die Analyse der Eye-Tracking-Studien in der physikdidaktischen Forschung beinhaltete, im Gegensatz zur Übersichtsarbeit in der Mathematikdidaktik von Strohmaier et al. (2020), neben einen Studienüberblick auch eine Synthese der Untersuchungen und Ergebnisse der einzelnen Studien. Diese führten zum einen zur Unterscheidung zwischen der globalen und lokalen Analyse von Blickdaten (Abb. 2 in Kap. 5) und zum anderen zur Kategorisierung der Studien nach der abhängigen Variable (Abb. 5 in Kap. 5).

Während globale Analysen das Blickverhalten auf einem gesamten Stimulus, z. B. einem Diagramm, untersuchen oder die Aufmerksamkeitsverteilung auf verschiedenen Oberflächenmerkmalen eines Stimulus vergleichen, wird bei lokalen Analysen das visuelle Verhalten auf darstellungsspezifischen Bereichen eines Stimulus ausgewertet. Für die physikdidaktischen Studien zeigte sich hierbei, dass diese zum Großteil globale Analysen durchführten. Weniger als die Hälfte untersuchten hingegen das Blickverhalten auf lokaler Ebene. Auch die Studien *Strategien* und *Zeichnen* lassen sich in diese Unterscheidung einordnen. So involvierten beide Studien globale und lokale Analysen, indem sie sowohl fixationsbasierte Maße auf verschiedenen Repräsentationsformen, d. h. Vektorfelddiagramm und Text bzw. Formel, als auch sakkadische Metriken auf dem Vektorfelddiagramm untersuchten.

Für die Ergebnissynthese der physikdidaktischen Eye-Tracking-Studien wurde eine Kategorisierung anhand der abhängigen Variable herangezogen. Es zeigte sich, dass ein Großteil der Studien die Blickdaten zwischen Proband:innen verschiedener Performanz, z. B. zwischen korrekten und inkorrekten Antworten, verglich. Dies bezog sich dabei ausschließlich auf die Leistung während der Eye-Tracking-Erhebung. Etwa ein Viertel der Studien zogen zudem ein externes Kriterium als Split-Kriterium heran, z. B. verschiedene Expertiselevel der Proband:innen. Die Studie *Strategien* lässt sich beiden genannten Kategorien zuordnen. Sie analysierte sowohl Unterschiede der Antwortkorrektheit und -sicherheit bei

der Aufgabenbearbeitung als auch das visuell-räumliche Vorstellungsvermögen der Studierenden – ein externes, da aufgabenunabhängiges Kriterium – zwischen den blickdatenbasierten Clustern (Abb. 4 und Tab. 2 in Kap. 6). Über die Hälfte der Studien im Review untersuchten darüber hinaus das Blickverhalten auf verschiedenen Stimuli, z. B. Repräsentationen oder Lehr-Lern-Materialien, im Vergleich. Dieses Split-Kriterium zog auch die Studie *Zeichnen* heran, indem das Blickverhalten beim Lernen sowie anschließenden Assessment zwischen der Interventionsgruppe, die mit Zeichenaktivitäten instruiert wurde, und der Kontrollgruppe ohne Zeichenaktivitäten verglichen wurde (Tab. 3, Tab. 4 und Abb. 9 links in Kap. 7). Für eine letzte Kategorie ergab sich außerdem, dass knapp ein Drittel der Studien das Blickverhalten zu verschiedenen Zeitpunkten, z. B. vor und nach einer Intervention, analysierten.
Die Kategorisierungen für Blickdatenanalysen in der physikdidaktischen Forschung unterstützen eine Systematisierung der Verwendung der Methode und können für zukünftige Forschungsvorhaben, in der Physikdidaktik und darüber hinaus, zur Orientierung herangezogen werden.

Eye-Tracking in multi-repräsentationalen Assessmentszenarien: Lokale Analysen und Performanz

In den Studien des *Reviews* wurde Eye-Tracking am häufigsten in repräsentationsreichen Assessmentszenarien eingesetzt, z. B. bei der Bearbeitung von Konzepttests oder konzeptuellen Aufgaben mit multiplen Repräsentationen, auch im Anschluss an eine Instruktion (Tab. 2 in Kap. 5). Dies ermöglichte Einblicke in das konzeptuelle und repräsentationsspezifische Wissen der Lernenden sowie ihr Problemlöseverhalten. Die Blickdatenanalysen brachten dabei die meisten Erkenntnisse, wenn extreme Gruppen bezüglich ihrer Performanz verglichen wurden und wenn die Analysen lokaler Form waren. So zeigte sich im Einklang mit den Ergebnissen von Gegenfurtner et al. (2011), dass leistungsstarke Lernende ihre Aufmerksamkeit schneller auf relevante Teile des Stimulus richteten, diese länger und häufiger betrachteten und andere Strategien verwendeten im Vergleich zu leistungsschwachen Lernenden (Tab. 5 in Kap. 5). Zu diesem Forschungsstrang trug auch die Studie *Strategien* bei, die anhand einer Clusteranalyse auf Basis von Blickdaten repräsentations- und aufgabenformatspezifische visuelle Verhaltensweisen identifizierte. So zeigte sich, dass erst das Hinzufügen sakkadischer Metriken, im Gegensatz zu rein fixationsbasierten Clustern, zu einer Diskrimination bezüglich verschiedener Performanzindikatoren, d. h. Antwortkorrektheit und -sicherheit, führte (Abb. 4 und Tab. 2 in Kap. 6). Wie auch bei der Studie *Zeichnen* boten somit lokale repräsentationsspezifische Metriken Einblick in expert:innenhafte visuelle Verhaltensweisen (Kap. 10.2). Dies ist dabei insbesondere konsistent mit den Erkenntnissen des *Reviews*, welches eine enge Verbindung lokaler Blickmuster mit physikdidaktischen Prozessen konkludiert.
Insgesamt stellt die Verbindung von Blickdaten und Leistungsindikatoren in verschiedenen physikdidaktischen Assessmentszenarien ein zentrales Ergebnis der Studie *Review* dar, das zahlreiche Implikationen für die physikdidaktische Forschung, bzw. konkret den untersuchten Lerngegenstand, bietet. So geben beispielsweise Erkenntnisse über visuelle Strategien und Prozeduren leistungsstarker Lernender Anhaltspunkte für zielgerichtete Instruktionen und Unterstützungsangebote (Kap. 10.2

beispielhaft für Vektorfelddiagramme). Außerdem können Charakteristika typischen Blickverhaltens leistungsschwacher Lernender als Grundlage für die (Weiter-)Entwicklung und Validierung von Konzepttests dienen, z. B. bei der Konzeption von Distraktoren.

Potential von Eye-Tracking für die Analyse von Lernumgebungen und Real-World-Szenarien

Während die Aufgabenbearbeitung aktueller Fokus der physikdidaktischen Eye-Tracking-Forschung ist, zeigten einige Studien im *Review* zudem großes Potential von Eye-Tracking in Lernszenarien, z. B. durch Vergleich der visuellen Aufmerksamkeit für verschiedene Lehr-Lern-Materialien oder den Umgang mit digitalgestützten Werkzeugen. In verschiedenen Studien unterstützte Eye-Tracking ein Verständnis des Materials, machte die getriggerten kognitiven Prozesse sichtbar, gab Hinweise auf Unverständlichkeiten oder Lernhürden und erlaubte so Anhaltspunkte für die Optimierung von Lehr-Lern-Materialien (Tab. 2 in Kap. 5). Vor diesem Hintergrund bietet sich Eye-Tracking insbesondere für die noch ausstehende Wirksamkeitsuntersuchung des Vektorfeld-Visualisierungswerkzeugs an (Kap. 10.4).

Außerdem ergab die Synthese der physikdidaktischen Eye-Tracking-Studien großes, bisher jedoch kaum ausgeschöpftes, Potential für die Verwendung von Eye-Tracking in Real-World-Szenarien, z. B. beim Experimentieren. Von den Studien im *Review* nutzte nur eine Erhebung die mobile Blickdatenanalyse (Tab. 2 in Kap. 5). Es zeigte sich jedoch, dass diese Studie Facetten des Experimentierens aufzeigen konnte, die einer produktbasierten Analyse verborgen blieben (Chien et al., 2015). Diese bezogen sich beispielsweise auf die visuelle Komplexität des Versuchsaufbaus oder die (gemeinsame) Aufmerksamkeit beim kollaborativen Experimentieren. Der Einsatz von Eye-Tracking-Brillen ermöglicht in diesem Zusammenhang die Auflösung einer zentralen Limitation von stationären Eye-Tracking-Systemen, die Nicht-Erfassung realer Szenarien (Tab. 6 in Kap. 5). Die trotz dieses Potentials geringe Anzahl derartiger Studien ist dabei vor allem auf die zeit- sowie arbeitsintensive Aufnahme und Auswertung der Blickdaten mit einer mobilen Eye-Tracking-Brille zurückzuführen. Diese erfordert eine manuell oder halb-automatisierte Zuordnung der Blickdaten aus dem Eye-Tracking-Video zu den entsprechenden Orten in zweidimensionalen Snapshots und/oder eine dauerhafte Anpassung der AOIs an das jeweilige Sichtfeld der Lernenden.

Das Potential von Eye-Tracking beim Experimentieren kann auch auf anderweitige Real-World-Szenarien, z. B. beim zeichenbasierten Lernen, übertragen werden. Die Studie *Zeichnen* trägt durch die Untersuchung des Blickverhaltens von Lernenden während der Bearbeitung einer text-bild-basierten Instruktion zur Divergenz mit und ohne Zeichenaktivitäten zu diesem Forschungsstrang bei. Aus methodischer Perspektive bietet die Studie damit Anhaltspunkte und Erfahrungswerte für die Verwendung von Eye-Tracking-Brillen in konstruktiven Lernumgebungen für nachfolgende Forschungsprojekte dieser Art. Die Auswertung der Blickdaten in der Studie *Zeichnen* erfolgte anhand global definierter AOIs und einem Vergleich der visuellen Aufmerksamkeit zwischen verschiedenen Repräsentationsformen, d. h. Definition, Vektorfelddiagramm, Erkärtext und Hinweis (Tab. 3 in Kap. 7). Vergleiche verschiedener Eye-Tracking-Metriken, d. h. der Fixationszahl, der mittleren Fixationsdauer und der

Zeit bis zur ersten Fixation, lassen dabei Rückschlüsse auf multimediale Informationsverarbeitungsprozesse im Sinne der CTML zu (Kap. 3.2.2). So ermöglichten sie Einblick in die Lernwirkung der Zeichenaktivitäten beim vektorfelddiagrammzentrierten Lernen (Kap. 10.4). Diese Ergebnisse unterstützen zum einen die blickbasierte Operationalisierung der SOI-Prozesse in der CTML aus vorangegangenen Arbeiten (Alemdag und Cagiltay, 2018, Kap. 3.2.2) und bieten zum anderen einen ersten Prototyp für die Analyse kognitiver Prozesse beim repräsentationsspezifischen Zeichnen in der Physikdidaktik. Im Gegensatz zur Studie von Hellenbrand et al. (2019) im Kontext der Immunbiologie wurde jedoch nicht das volle Potential der Eye-Tracking-Methode beim Zeichnen ausgeschöpft, da auf eine Analyse der Transitionen aufgrund unvollständiger Blickpfade bei der Aufnahme durch die Eye-Tracking-Brille verzichtet werden musste. Mit Blick auf die CTML und die Überblicksarbeit von Alemdag und Cagiltay (2018) fehlten damit Informationen über repräsentationsübergreifende Integrationsprozesse im Umgang mit der Instruktion (Kap. 3.2.2).
Über die Arbeit von Hellenbrand et al. (2019) hinaus ermöglichte die Studie *Zeichnen* durch die Untersuchung derselben Aufgaben mit mobiler und stationärer Blickdatenaufnahme zudem erste Anhaltspunkte für einen Vergleich beider Methoden in der physikdidaktischen Forschung. Dies gibt wichtige methodische Implikationen für die Konzeption zukünftiger Forschungsvorhaben mit Eye-Tracking in der Physikdidaktik, vor allem im Hinblick auf die Wahl der Blickdatenerhebungsmethode. So zeigten sich signifikante Unterschiede typischer Blickmetriken zwischen mobilem und stationärem Eye-Tracking, die vermutlich auf die geringere Genauigkeit der mobilen Messung, bedingt durch die geringere Abtastfrequenz und die manuelle oder halb-automatisierte Zuordnung der Blickdaten zum Snapshot, zurückzuführen sind. Es empfiehlt sich daher Überlegungen bzgl. der Positionierung der zu untersuchenden AOIs bei der Verwendung mobiler Eye-Tracking-Systeme bereits in das Design der Stimuli einfließen zu lassen. Die Ergebnisse implizierten darüber hinaus, dass sich mobile Eye-Tracking-Systeme des aktuellen Entwicklungsstandes für die Analyse kleiner Effekte, die eine hohe Messgenauigkeit erfordern, z. B. bei der Untersuchung von kleinen AOIs, als eher ungeeignet erweisen. Der Vergleich der Methoden zeigte zudem auf der einen Seite das Potential auf, die sich aus der größeren Individualität der Lernenden beim mobilen Eye-Tracking ergab, indem z. B. Notizen und Markierungen gemacht werden konnten, indizierte auf der anderen Seite jedoch auch die Beeinflussung durch das Tragen der Brille. Unter Berücksichtigung derartiger Aspekte gilt es, bei zukünftigen Forschungsvorhaben die Blickdatenerhebungsmethode dem zu untersuchenden (Lern-)Szenario entsprechend zu wählen.

Ambiguität des Blickverhaltens als Limitation der Eye-Tracking-Methode

Ein zentrales Ergebnis des *Reviews* stellt auch die Synthese der methodischen Limitationen in den untersuchten Studien dar (Tab. 6 in Kap. 5). Eine wesentliche Limitation von Blickdatenanalysen ist dabei durch die Ambiguität des Blickverhaltens gegeben. Diese wurde bereits ausführlich in der kognitionspsychologischen Forschung diskutiert, beispielsweise durch Kriz und Hegarty (2007), die betonten, dass die Betrachtung lernrelevanter Bereiche allein nicht konsekutiv zu einem Verständnis führt. Eine Vielzahl der Studien im *Review* unterstützen daher den Ansatz von Gegenfurtner et al.

(2017) und argumentierten, dass zusätzliche qualitative Datenquellen erforderlich wären, um die durch Blickbewegungsmessung gewonnenen Ergebnisse umfassend zu verstehen. Von den Studien im *Review* erhoben allerdings nur etwa ein Drittel zusätzlich qualitative Datenquellen, noch weniger verknüpften diese aktiv mit den Blickdaten. Es zeigte sich, dass eine solche Triangulation eine Interpretation der Blickdaten unterstützen konnte, verschiedene Methoden der Verbaldatenaufnahme zeigten jedoch unterschiedliche Vor- sowie Nachteile (Tab. 6 in Kap. 5; siehe auch Hofmann et al., 2023).
Durch Erkenntnisse zur Triangulation in einem Blick- und Verbaldatenaufnahme separierenden Erhebungsformat ergänzt die Studie *Strategien* vorangegangene Ergebnisse zur Triangulation von Blick- und Verbaldaten mithilfe des Lauten Denkens (Van Gog et al., 2005) und durch wiederholte Beantwortung der Aufgaben (Susac et al., 2018a). Während das Blickverhalten bei der Zuordnung einer Formel zu acht Vektorfelddiagrammen im Multiple-Choice-Format aufgezeichnet wurde, erfolgte die Erfassung der Verbaldaten als Erläuterung zur Formelangabe zweier weiterer Vektorfelddiagramme im Anschluss an die Blickdatenaufnahme. Mit Blick auf die Ergebnisse des *Reviews* überwindet dieses Vorgehen eine Vielzahl der Probleme, die bei anderen Methoden auftreten, z. B. Erinnerungs- und Gewöhnungseffekte durch die wiederholte Präsentation des gleichen Stimulus (Tab. 6 in Kap. 5). Allerdings zeigte sich auch, dass das Erhebungsformat eine Triangulation von Verbal- und Blickdaten erschwerte. So resultierte zwar eine Verbindung der Argumentationsstrukturen mit der Performanz der Studierenden beim Repräsentationswechsel, jedoch nicht zwischen Argumentation und repräsentationsspezifischem Blickverhalten (Tab. 3 in Kap. 6; siehe auch Kap. 10.3). Neben fachdidaktischen Schlussfolgerungen bietet diese Studie somit methodische Implikationen für die Triangulation von Verbal- und Blickdaten in physikalischen Assessmentsettings und ergänzt damit die Ergebnisse des *Reviews*.

10.2 Visuelle Expertise im Umgang mit Vektorfelddiagrammen

Während blickbasierte Expertiseforschung, z. B. im Umgang mit Diagrammen, vor allem auf der Unterscheidung relevanter und irrelevanter Bereiche eines Stimulus beruht (Gegenfurtner et al., 2011), lassen sich für Vektorfelddiagramme keine solchen Bereiche identifizieren. Die Arbeiten von Klein et al. (2018, 2019, 2021b) zogen daher sakkadische Metriken heran. Diese ergaben, dass das Blickverhalten leistungsstarker Studierender bei der Beurteilung der Divergenz von Vektorfelddiagrammen durch eine Dominanz horizontaler und vertikaler Sakkaden charakterisiert ist (Kap. 3.3). Die Studie *Zeichnen* konnte diese Ergebnisse bestätigen. Sowohl Studierende, die mit Zeichenaktivitäten instruiert wurden, als auch Studierende, die ohne Zeichenaktivitäten instruiert wurden, zeigten ein systematisches Blickverhalten charakterisiert durch horizontale und vertikale Sakkaden bei der anschließenden Divergenzbeurteilung (Tab. 4 und Abb. 9 in Kap. 7). Dabei ist anzumerken, dass sowohl Studierende der Interventions- als auch der Kontrollgruppe Scores über 80% bei der Divergenzbeurteilung erreichten. Bei beiden Gruppen kann also von einem expert:innenhaften Blickverhalten gesprochen werden kann.

Sakkadische Metriken indizieren repräsentationsspezifische visuelle Handlungen

Während bisherige Studien ausschließlich das Blickverhalten im Umgang mit Vektorfelddiagrammen bei der Beurteilung der Differentialoperatoren untersuchten, erweiterte die Studie *Strategien* diesen Forschungsstrang auf ein weiteres Anforderungsszenario, den Repräsentationswechsel zwischen Vektorfelddiagramm und Formeldarstellung. Hierbei wurden Clusteranalysen in zwei Modellen durchgeführt, zum einen auf Basis von Fixations- und Transitionsmaßen auf Diagramm und Antwortoptionen und zum anderen durch zusätzliche Integration des Anteils horizontaler und vertikaler Sakkaden. Es ergaben sich für beide Modelle zwei Cluster. Je eines der Cluster enthielt dabei Studierende, die ihre visuelle Aufmerksamkeit vor allem auf das Diagramm und weniger auf die Antwortoptionen richteten und häufiger zwischen Diagramm und Optionen wechselten als zwischen verschiedenen Antwortoptionen, während das jeweils andere Cluster durch die komplementären Verhaltensweisen charakterisiert wurde (Tab. 2 in Kap. 6). Studierende in ersterem Cluster erreichten dabei in beiden Modellen Scores von über 80 % beim Repräsentationswechsel, die somit signifikant über der Leistung der Studierenden im jeweils zweiten Cluster lagen. Diese Ergebnisse implizieren formatspezifische visuelle Expertise für den Repräsentationswechsel zwischen Vektorfelddiagramm und Formel, die durch eine diagrammzentrierte Vorgehensweise charakterisiert ist.

Im Vergleich der beiden Clustermodelle zeigte sich zudem, dass erst die Einbeziehung sakkadischer Metriken zu einer Diskrimination mehrerer Performanzindikatoren führte (Tab. 2 in Kap. 6). So erreichten Studierenden des Clusters, dass durch einen hohen Anteil horizontaler sowie vertikaler Sakkaden gekennzeichnet war, neben signifikant höheren Antwortkorrektheiten (87 %) zudem signifikant höhere Antwortsicherheiten (73 %). Der Anteil horizontaler und vertikaler Sakkaden an allen Sakkaden auf dem Diagramm der leistungsstärkeren Studierenden erreichte dabei mit 29 % nahezu die Werte, wie sie Studierende bei der Divergenzbeurteilung nach der Instruktion in der Studie *Zeichnen* aufwiesen (33 % IG, 34 % KG). Diese Werte implizieren bewusste visuelle Verhaltensweisen. Zum Vergleich: Bei einer gleichmäßigen Verteilung der Blickrichtungen wären etwa 11 % aller Richtungen horizontaler und vertikaler Art (bezogen auf eine Toleranzspanne von $\pm 5°$).

Diese Ergebnisse legen nahe, dass der Repräsentationswechsel zwischen Vektorfelddiagramm und Formeldarstellung und die Divergenzbeurteilung anhand eines Vektorfelddiagramms durch ähnliche visuelle Prozeduren und Strategien charakterisiert sind. Dies unterstützt die Überlegungen, dass beide Anforderungen ähnliche mentale Operationen involvieren, und zwar solche, die mit der der zeilen- und spaltenweisen Auswertung der Feldkomponenten entlang der kartesischen Koordinatenrichtungen assoziiert sind (Kap. 2.2). Visuelle Expertise zeigt sich hierbei in der Durchführung horizontaler und vertikaler Sakkaden, die eine prozedurale Abbildung dieser kognitiven Prozesse beschreibt. Mit Blick auf die Arbeiten von Chumachemko et al. (2014) und Krichevets et al. (2014) kann dieses Blickverhalten als Widerspiegelung der exekutiven Wahrnehmungshandlungen des Vektorfelddiagramms interpretiert werden. Im Gegensatz zu Noviz:innen ist diese Wahrnehmung bei Expert:innen theoretisch geleitet und durch speziell entwickelte objektbezogene Handlungen charakterisiert. Dieser Argumentation folgend sind systematische Blickbewegungen in horizontaler und vertikaler Richtung

somit repräsentationsspezifische Handlungen. Diese spiegeln Charakteristika der Darstellungsform, d. h. des Vektorfelddiagramms, wider und beruhen auf dem ihr zugrundeliegenden Konzept der Vektorkomponentenzerlegung. Mit Blick auf die Überlegungen in Kap. 2.2 liegt dabei nahe, dass diese Prozeduren mit Prozessen kovariaten Denkens verbunden sind (Kap. 10.3).
Neben einer höheren Diskriminierung von Performanzindikatoren brachte das Hinzufügen von sakkadischen Metriken zur Clusteranalyse zudem Unterschiede bezüglich des visuell-räumlichen Vorstellungsvermögens der Studierenden hervor (Abb. 4 und Tab. 2 in Kap. 6). So wiesen Studierende des Clusters, dass durch einen hohen Anteil horizontaler und vertikaler Sakkaden sowie hohe Antwortkorrektheit und -sicherheit gekennzeichnet war, ein signifikant höheres visuell-räumliches Vorstellungsvermögen auf. Die untersuchten Vektorfelddiagramme umfassten dabei verschiedene Komplexitätsgrade (siehe auch Hahn et al., 2022) und insbesondere auch homogene Vektorfelder. Die Clusterunterschiede indizieren dabei einen Zusammenhang zwischen einem expert:innenhaften visuellen Blickverhalten im Umgang mit dem Vektorfelddiagramm und einem hohen visuell-räumlichen Vorstellungsvermögen beim Repräsentationswechsel von Vektorfelddarstellungen. Trotz einer engen Verbindung zwischen der Performanz und dem visuell-räumlichen Vorstellungsvermögen bei der Divergenzbeurteilung konnten Klein et al. (2021b) in ihrer Studie keinen Zusammenhang zwischen repräsentationsspezifischen Blickmetriken und dem visuell-räumlichen Vorstellungsvermögen der Proband:innen nachweisen. Nur für ein Vektorfelddiagramm mit hoher Komplexität zeigte sich diese Korrelation, woraus sich die mögliche Erklärung ergab, dass visuell-räumliche Fähigkeiten erst für komplexe Vektorfelddiagramme mit einer Koordinatenabhängigkeit der Komponenten relevant werden. Ob dieser Zusammenhang somit anforderungsspezifisch ist, ein visuell-räumliches Vorstellungsvermögen also beim Repräsentationswechsel zwischen Vektorfelddiagramm und Formel relevanter ist als bei der qualitativen Divergenzbeurteilung, muss empirisch geprüft werden. Weiterführende Untersuchungen mit verschiedenen Anforderungen, d. h. Divergenzbeurteilung und Formelauswahl, können zudem Einblick in den Zusammenhang des visuell-räumlichen Vorstellungsvermögens und der Komplexität von Vektorfeldern, d. h. der Koordinatenabhängigkeit der Vektorfeldkomponenten, geben.

Charakteristische Sakkadenlängen implizieren Vergleiche zwischen Vektoren im Vektorfelddiagramm

Neben der Sakkadenrichtung untersuchten die Studien *Strategien* und *Zeichnen* dem Ansatz von Klein et al. (2018) folgend zudem die Länge der Sakkaden auf dem Vektorfelddiagramm. Für die Studie *Strategien* wurde diese Metrik zwischen den resultierenden Clustern verglichen. Während sich im rein fixationsbasierten Modell keine Clusterunterschiede ergaben, führten Clusteranalysen, die den Anteil horizontaler und vertikaler Sakkaden einbezogen, zu einer Differenzierung der Sakkadenlängen zwischen den resultierenden Clustern (Abb. 4 und Tab. 2 in Kap. 6). So wies das Cluster, das durch einen höheren Anteil horizontaler und vertikaler Sakkaden und eine höhere Performanz charakterisiert wurde, im Einklang mit den Ergebnisse von Klein et al. (2018) signifikant kürzere Sakkaden auf. Darüber hinaus zeigte sich, dass die mittlere Sakkadenlänge in der Größenordnung zweier benachbarter Vektoren im Diagramm lag.

Die Studie *Zeichnen* untersuchte die Länge der horizontalen und vertikalen Sakkaden auf dem Vektorfelddiagramm bei der Divergenzbeurteilung. Obgleich sowohl Studierende, die mit als auch ohne Zeichenaktivitäten instruiert wurden, sich bezüglich der Dominanz horizontaler und vertikaler Sakkaden kaum unterschieden, zeigten sich signifikante Unterschiede beider Gruppen bezüglich der mittleren Länge dieser Sakkaden (Tab. 4 in Kap. 7). So führten Studierende, die mit Zeichenaktivitäten instruiert wurden, signifikant kürzere horizontale und vertikale Sakkaden durch, deren Länge dem Abstand zweier benachbarter Vektoren im Vektorfelddiagramm entsprach.
Mit Blick auf die Überlegungen in Kap. 2.2 kann dieses Blickverhalten mit dem Vergleich benachbarter Vektoren assoziiert werden. Diese Ergebnisse stärken den Bezug zwischen Blickbewegungen und kognitiven Prozeduren im Umgang mit Vekorfelddiagrammen und erweitern so die Ergebnisse von Klein et al. (2018, 2019, 2021b). Als Ergänzung bisheriger Befunde der Charakterisierung visueller Expertise im Umgang mit Vektorfelddiagrammen tragen die Befunde zudem zu einer weiteren Spezifizierung der oben beschriebenen repräsentationsspezifischen Wahrnehmungshandlungen bei.

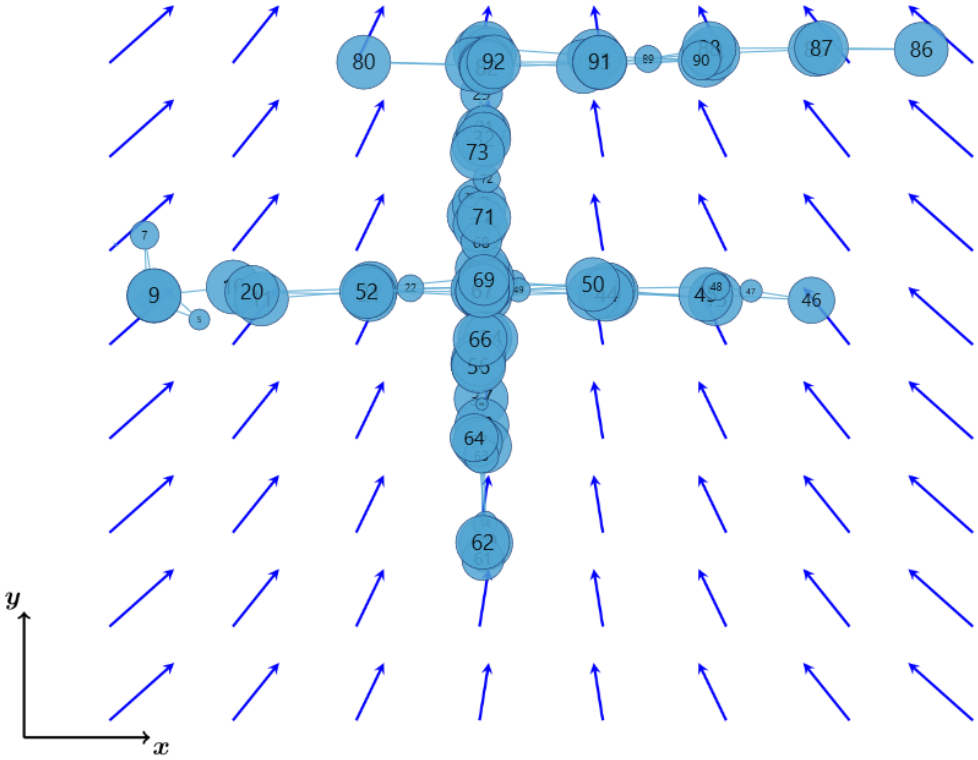


Abb. 7: Expert:innenhafter Blickpfad im Umgang mit Vektorfelddiagrammen charakterisiert durch zeilen- und spaltenweise Evaluation und Vergleiche benachbarter Vektoren. Im scanpath sind Fixationen als nummerierte Punkte dargestellt und durch Linien verbunden (siehe Kap. 4.5.1).

Mit Blick auf die CTVE (Kap. 3.1.2.2) lässt sich schlussfolgern, dass ein hoher Anteil horizontaler und vertikaler Sakkaden sowie eine Sakkadenlänge, die dem Abstand zweier benachbarter Vektoren des Vektorfelddiagramms entspricht, Indikatoren visueller Expertise im Umgang mit Vektorfelddiagrammen darstellen (Abb. 7). Wissen über systematisches Blickverhalten dieser Art kann damit als prozedurales Vorwissen im Umgang mit Vektorfelddiagrammen zu einer expert:innenhaften Verarbeitung der Reprä-

sentationsform beitragen. Für Lehrende ergibt sich daraus großes Potential, Lernprozesse im Umgang mit Vektorfelddiagrammen durch gezielte Anleitung dieser visuellen Praktiken zu unterstützen. Über die in Kap. 10.4 diskutierten Methoden und Ansätze hinaus bieten beispielsweise eine Vorübung visueller Prozeduren ohne Stimulus (Skuballa et al., 2015) oder die Visualisierung des Blickverhaltens von Expert:innen (engl. eye movement modelling examples, EMME; Jarodzka et al., 2017) vielversprechende Ansätze in diesem Zusammenhang. Als Ergänzung der Arbeiten von Klein et al. (2018, 2019, 2021b) tragen die Ergebnisse der Studien *Strategien* und *Zeichnen* zudem zum Verständnis der kognitiven Verarbeitung der Repräsentationsform, d. h. des Vektorfelddiagramms, bei. So unterstützen sie mit Blick auf das representational dilemma eine Konkretisierung der Repräsentationskompetenzen, d. h. des visuellen Verständnisses nach Rau (2017), im Umgang mit Vektorfelddiagrammen (Kap. 3.1.1.2). Vor allem Kompetenzen, die sich auf die visuelle Darstellung der Komponentenzerlegung als Vektorsumme jedes einzelnen Vektors im Diagramm, d. h. in vektorielle Feldkomponenten entlang der Koordinatenrichtungen, beziehen, besitzen in diesem Zusammenhang eine zentrale Rolle. Sie legen den Grundstein für die Ausführung expert:innenhafter visueller Prozeduren im Umgang mit Vektorfelddiagrammen sowohl zur Beurteilung von Differentialoperatoren, wie der Divergenz, als auch zur Bestimmung der Formeldarstellung eines Vektorfelddiagramms.

10.3 Kovariates Denken im Kontext der Vektoranalysis

Eine Analyse der kognitiven Prozesse bei der qualitativen Divergenzbeurteilung von Vektorfelddiagrammen legte nahe, dass die kognitiven Prozesse im Umgang mit Vektorfelddiagrammen mit Strukturen kovariaten Denkens assoziiert werden können (Kap. 2.2). Die Untersuchung der kognitiven Prozesse und Strategien anhand von Blick- sowie Verbaldaten beim Repräsentationswechsel zwischen Vektorfelddiagramm und Formeldarstellung (Studie *Strategien*) liefert erste Anhaltspunkte, die diese Überlegungen unterstützen.

Kovariate Argumentation beim Repräsentationswechsel zwischen Vektorfelddiagramm und Formel

Die Verbaldaten beim Repräsentationswechsel zwischen Vektorfelddiagramm und Formeldarstellung beruhten auf Erläuterungen der Formelangabe zu einem Vektorfelddiagramm in einem offenen Aufgabenformat. Qualitative Analysen ergaben hierbei, dass sich die verwendeten Argumente in graphisch-deskriptive und mathematisch-strukturelle Argumente differenzieren ließen, wobei die Mehrheit der Argumente deskriptiver Natur war (Tab. 3 in Kap. 6). Die Verwendung von Änderungsargumenten, d. h. Argumenten, die auf Veränderungen der Feldkomponenten in Abhängigkeit der Koordinaten beruhten, stellten dabei eine Subkategorie der mathematisch-strukturellen Argumente dar. Insgesamt nutzte die Hälfte aller Studierenden mindestens einmal ein Änderungsargument im Rahmen der Aufgabe. Außerdem zeigte sich im Vergleich zwischen Studierenden, die Änderungsargumente verwendeten, und solchen, die keine Veränderungsargumente formulierten, dass erstere eine signifikant

höhere Performanz erzielten. So bestimmten sie die Formel zum Vektorfelddiagramm zu 86 % korrekt, während Studierende, die keine Veränderungsargumente nutzten, nur einen Score von 55 % erzielten. Mit Blick auf die Ausführungen in Kap. 2.2 spiegeln die in der Studie *Strategien* als Änderungsargumente klassifizierten Argumente, kovariate Argumentationsstrukturen wider. Die Häufigkeit ihrer Verwendung sowie der positive Zusammenhang zwischen der Verwendung von Änderungsargumenten und der Antwortkorrektheit unterstützen dabei die Überlegungen in Kap. 2.2. Damit bietet die Studie erste Anhaltspunkte für die beschriebenen Assoziationen zwischen den kognitiven Prozesse im Umgang mit Vektorfelddiagrammen und kovariaten Denkstrukturen. Die Studie *Strategien* trägt so zum Verständnis der mentalen Verarbeitung von Vektorfelddiagrammen bei und unterstützt mit Blick auf das representational dilemma eine Spezifizierung des visuellen Verständnisses im Umgang mit Vektorfelddiagrammen (Rau, 2017, Kap. 3.1.1.2). Darüber hinaus implizieren diese Ergebnisse Potential von Vektorfelddiagrammen als Lerngelegenheit für repräsentationsübergreifende Prozesse und Fähigkeiten zum kovariaten Denken, wie sie z. B. auch für ein Verständnis von Differentialgleichungen benötigt werden (Jones und Kuster, 2021).

Inkorrekte Verwendung von Veränderungsargumenten

Die Studie *Strategien* zeigte jedoch auch, dass Veränderungsargumente häufig inkorrekt verwendet wurden. Der häufigste Fehler bestand dabei in einer Verwechslung von Komponenten und Koordinaten, wie ihn auch vorangegangene Studien bereits fanden (Kap. 2.3). Darüber hinaus zeigten die Studierenden generelle Schwierigkeiten bezüglich der Feldkomponentenzerlegung und argumentierten häufig über eine Veränderung der x/y-Koordinaten oder -Werte statt der Feldkomponenten. Dies bestätigte die Ergebnisse vorangegangener Arbeiten (Kap. 2.3).

Anhand der Studie *Strategien* lassen sich diese Schwierigkeiten nun mit dem kovariaten Denken in Verbindung bringen. Angesichts dessen, dass die Studierenden in einem Vorwissenstest zur Vektoraddition und Feldkomponenten einen Score von 88 % erreichten, ergeben sich dabei zwei mögliche Interpretationen für die fehlerhafte Verwendung von Änderungsargumenten. Zum einen schließen diese Ergebnisse an die Überlegungen von Bollen et al. (2017) an, dass weniger die Vektoraddition für einen einzelnen Vektor problematisch für Lernende ist, sondern ihnen vor allem die Anwendung in Vektorfeldern Probleme bereitet. Da der Vorwissenstest auch eine Aufgabe zu Vektorkomponenten beinhaltete, liegt nahe, dass sich die Probleme in der Anwendung vor allem auf kovariate Prozesse, d. h. auf die Beurteilung von Komponentenänderungen, beziehen. Hierbei könnten auch Probleme bezüglich der Interpretation und Differenzierung der Vorzeichen von Komponenten und Komponentenänderungen einfließen. Für Lehrende ergäbe sich aus dieser Interpretation die Notwendigkeit einer expliziten Anleitung und Unterstützung der entsprechenden Prozesse.

Vor dem Hintergrund, dass die (korrekte oder inkorrekte) Verwendung von Änderungsargumenten mit einer hohen Performanz beim Repräsentationswechsel einher ging, liegt außerdem noch eine zweite Interpretation nahe: Den Studierenden bereitete weniger die Ausführung kovariater Prozesse Schwierigkeiten, sondern vielmehr ihre Verbalisierung. Mit Blick auf die Differenzierung der Repräsentationskompetenzen nach Rau (2017) würde dies somit Probleme bezüglich des konnektiven Verständnisses der Kovariation von Vektorfelddiagrammen in diagrammatischer und verbaler Repräsen-

tationsform indizieren (Kap. 3.1.1.2). Da die Verbalisierung eine wichtige Komponente physikalischer und mathematischer Argumentation darstellt (Sirnoorkar et al., 2020), ließe sich auch aus dieser Interpretation der Bedarf zielgerichteter Unterstützungsmaßnahmen ableiten. Hierfür bedarf es jedoch weiterer empirischer Untersuchungen.
Auch die Studie *Zeichnen* gibt Einblick in studentische Schwierigkeiten bezüglich kovariater Denkstrukturen. Sie involvierte auf Basis der Ergebnisse von Klein et al. (2018, 2019, 2021b) sowie der Studie *Strategien* und mit Blick auf einen breiten Forschungshintergrund zum zeichenbasierten Lernen (Kap. 3.1.4.1) eine Vorübung zur Vektordekomposition und partiellen Ableitungen sowie Zeichenaktivitäten. Es zeigte sich, dass Studierende, die mit Zeichenaktivitäten instruiert wurden, in einer Transferaufgabe, die auf die Beurteilung partieller Vektorableitungen losgelöst vom Kontext der Divergenz oder Rotation abzielte, signifikant höhere Antwortkorrektheiten erzielten, als Studierende, die ohne Zeichenaktivitäten instruiert wurden (Abb. 7 in Kap. 7). Eine Differenzierung der in der Transferaufgabe untersuchten Ableitungen in instruktionsnahe und -ferne Ableitungen ergab zudem signifikant bessere Scores der Studierenden bei instruktionsnahen Ableitungen für Interventions- sowie Kontrollgruppe (Hahn und Klein, 2023b). So bestimmten die Studierenden beider Gruppen die instruktionsfernen Ableitungen nur zu 69 % korrekt, obwohl sie bei der Bestimmung der instruktionsnahen Ableitungen, d. h. der partiellen Ableitungen, die Teil der Divergenz sind, einen Score von über 80 % erreichten. Im Einklang mit der Studie *Strategien* zeigten sich hier also studentische Schwierigkeiten bezüglich kovariater Prozesse im Umgang mit Vektorfelddiagrammen trotz vorheriger Instruktion zur Divergenz mit dezidierter Vorübung zu partiellen Ableitungen. Da an dieser Stelle keine Verbalisierung notwendig war, liegt nahe, dass die Schwierigkeiten auf die Ausführung kovariater Prozesse zurückzuführen sind. Dies unterstützt im Einklang mit der Studie *Strategien* die Notwendigkeit dezidierter Unterstützungsmaßnahmen zum kovariaten Denken im Zusammenhang mit Vektorfelddiagrammen. Mit Blick auf die Unterschiede zwischen Interventions- und Kontrollgruppe der Studie *Zeichnen* und anknüpfend an bestehende Erkenntnisse bezüglich des Designs von Aufgaben, die kovariates Denken fördern (Stevens et al., 2017), bieten Zeichenaktivitäten großes Potential zur Unterstützung kovariater Prozesse im Umgang mit Vektorfelddiagrammen. Dieses gilt es jedoch noch, empirisch zu überprüfen.

Blickmuster und kovariate Argumentationsstrukturen

Die Überlegung in den Kap. 2.2 und 10.2 sowie die Arbeit von Martsching (2019) legten eine Verbindung der Prozesse kovariaten Denkens und des Blickverhalten auf dem Vektorfelddiagramm nahe. Daher untersuchte die Studie *Strategien* auch die verwendeten Argumente beim Repräsentationswechsel im Vergleich zwischen den blickdatenbasierten Clustern (Tab. 3 in Kap. 6). Obwohl sich hier kaum Unterschiede zwischen den Clustern bezüglich der Verwendung von Änderungsargumenten zeigten, gab die Triangulation von Blick- und Verbaldaten dennoch erste Anhaltspunkte für eine Verbindung repräsentationsspezifischer Blickmuster und kovariater Argumentationsstrukturen. So ergab das fixationsbasierte Clustermodell, dass Studierende, die häufig zwischen Diagramm und Antwortoptionen wechselten und einen großen Anteil ihrer visuellen Aufmerksamkeit auf dem Diagramm allokierten, signifikant mehr strukturell-mathematische sowie Änderungsargumente formulierten als Studierende

deren Blickverhalten auf die Antwortoptionen fokussierte – allerdings mit kleinen Effektgrößen. Wurden zusätzlich sakkadische Metriken zur Clusteranalyse hinzugefügt, traten diese Ergebnisse jedoch nicht mehr auf. Hier zeigte sich lediglich eine schwache, jedoch nicht signifikante Tendenz, dass Studierende, die einen hohen Anteil horizontaler und vertikaler Sakkaden durchführten, mehr Änderungsargumente formulierten. Die Diskussion der fehlenden Verbindung von Veränderungsargumenten und sakkadischen Metriken in Kap. 6 beruhte vor allem auf methodischen und studiendesignspezifischen Aspekten. Sie verdeutlicht, dass die Studie *Strategien* nur einen ersten Schritt in einem breiten und reichhaltigen Forschungsfeld zum kovariaten Denken im Kontext der Vektoranalysis beschreibt, das noch weiterer empirischer Untersuchungen bedarf.

10.4 Zielgerichtete Unterstützung des Lernens mit Vektorfelddiagrammen

Aufbauend auf den Wirksamkeitsuntersuchungen von Klein et al. (2018, 2019, 2021b), unter Berücksichtigung theoriegeleiteter Gestaltungsprinzipien (Kap. 3.1.3) und vor dem Hintergrund bisheriger Ergebnisse zum zeichenbasierten Lernen (Kap. 3.1.4.1) wurde in der Studie *Zeichnen* die Wirksamkeit einer Instruktion zur Divergenz mit und ohne Zeichenaktivitäten untersucht. Dies ergab eine signifikante Steigerung des Konzeptwissens zur Divergenz sowie der Fähigkeit zur Divergenzbeurteilung eines Vektorfelddiagramms infolge beider Instruktionen. Sowohl die Interventionsgruppe, die mit Zeichenaktivitäten instruiert wurde, als auch die Kontrollgruppe ohne Zeichenaktivitäten zeigten dabei im Anschluss an die Instruktion expert:innenhafte visuelle Blickmuster bei der Divergenzbeurteilung (Abb. 9 und Tab. 4 in Kap. 7; Kap. 10.2). Darüber hinaus gaben die Studierenden in beiden Gruppen an, eine geringe extrinsische Belastung durch die Instruktion wahrgenommen zu haben; für die lernrelevante Belastung berichteten sie hingegen hohe Werte (Abb. 8 in Kap. 7). Im Sinne der CLT beinhaltete das Instruktionsdesign der Studie *Zeichnen* daher kaum lernhinderliche Elemente, sondern unterstützte die Wissenskonstruktion (Kap. 3.1.2.1).

Die beschriebenen Ergebnisse untermauern positive Lerneffekte bestehender text-bild-basierter Materialien zum qualitativen Lehr-Lern-Ansatz mit Vektorfelddiagrammen von Klein et al. (2018, 2019, 2021b) und Ruf et al. (2022, Kap. 3.3). Gegenüber der Instruktion von Klein et al. (2019) konnten die Instruktionen in der Studie *Zeichnen* zudem nochmals eine Steigerung der Performanz für die Divergenzbestimmung von Vektorfelddiagrammen erzielen. Auch ein Vergleich der Transferfähigkeit infolge der Instruktion, in der die Studierenden bei Klein et al. (2019) für ein Vektorfelddiagramm sowohl Divergenz als auch Rotation zu 54 % korrekt bestimmten, zeigte eine bemerkenswerte Steigerung auf 74 % für den Score einer vergleichbaren Transferaufgabe (Abb. 7 in Kap. 7).

Obgleich die Umgestaltung der Instruktion unter Verwendung des Segmentierungs- und Vorübungsprinzips nicht kontrolliert manipuliert wurde, liegt mit Blick auf bestehende Untersuchungen zur Wirkung dieser Prinzipien (Kap. 3.1.3) nahe, dass die positiven Veränderungen gegenüber der Studie von Klein et al. (2019) auf die Vorübung zurückzuführen sind. Eine empirische Überprüfung dieser Überlegungen

steht allerdings noch aus und würde zum Forschungsstrang der Wirksamkeit von Segmentierungs- und Vortrainingsprinzip im Sinne der CTML beitragen.
Bisherige positive Ergebnisse eines vektorfelddiagrammzentrierten Ansatzes lassen sich über das Lernen von Differentialoperatoren hinaus auch für den Repräsentationswechsel zwischen Vektorfelddiagramm und Formeldarstellung ableiten. So zeigte sich in der Studie *Strategien*, dass für beide Modelle die Cluster, die sich durch eine visuelle Fokussierung und charakteristische Blickbewegungen auf dem Diagramm auszeichneten, auch durch höhere Performanzindikatoren charakterisiert waren (Abb. 4 und Tab. 2 in Kap. 6).

Zeichenaktivitäten fördern Konzeptverständnis partieller Vektorableitungen

Neben der positiven Wirkung der Lehr-Lern-Materialien im Allgemeinen untersuchte die Studie *Zeichnen* im Rahmen eines Kontroll- und Interventionsgruppen-Designs insbesondere den Einfluss der Zeichenaktivitäten auf Performanz-, Prozess- und Belastungsindikatoren. Hierbei zeigte sich, dass die Interventionsgruppe, die mit Zeichenaktivitäten instruiert wurde, im Vergleich zur Kontrollgruppe ohne Zeichenaktivitäten signifikant stärker auf relevanten Gebieten der Instruktion fokussierte (Tab. 3 in Kap. 7). So führten die Zeichenaktivitäten zu signifikant mehr Fixationen auf den Aufgaben der Vorübung, dem Diagramm der Divergenzinstruktion und der instruierten Strategie. Dies impliziert eine intensivere Auseinandersetzung mit der vermittelten Strategie zur Divergenzbeurteilung sowie den adressierten Konzepten der Vektorkomponentenzerlegung und der partiellen Ableitungen (Kap. 3.2.2). Die Zeit bis zur ersten Fixation unterschied sich hingegen nicht signifikant zwischen den Instruktionen mit und ohne Zeichenaktivitäten. Mit Blick auf die CTML und die Überblicksarbeit von Alemdag und Cagiltay (2018) unterstützten Zeichenaktivitäten somit vor allem Organisationsprozesse innerhalb des Vektorfelddiagramms und des Erklärtexts der Strategie, während Selektionsprozesse durch das Zeichnen nicht maßgeblich beeinflusst wurden (Kap 3.2.2). Durch die fehlende Analyse von Transitionen, können bezüglich ablaufender Integrationsprozesse keine Aussagen getroffen werden.
Neben Unterschieden in der visuellen Aufmerksamkeit erzielten Studierende, die mit Zeichenaktivitäten instruiert wurden, zudem signifikant höhere Antwortkorrektheiten sowie -sicherheiten bei einer anschließenden Transferaufgabe zu partiellen Vektorableitungen (Abb. 7 in Kap. 7). Dies deutet darauf hin, dass die Zeichenaktivitäten eine Zunahme des Konzeptwissens zu partiellen Vektorableitungen förderten. Die starke Korrelation von Antwortkorrektheit und -sicherheit unterstützt zudem die Ergebnisse vorangegangener Studien, die argumentierten, dass hohe Antwortsicherheiten als ein notwendiger Teil des wahren Verständnisses gelten (Kap. 4.4.1.1).
An die Überlegungen von Rau (2017) anknüpfend lässt sich aus diesen Ergebnissen neben einer Förderung des Konzeptwissens auch ein Erwerb von Repräsentationskompetenzen im Umgang mit Vektorfelddarstellungen ableiten. Eine lokale Kohärenzbildung im Umgang mit Vektorfelddiagrammen zeigte sich hierbei durch ein expert:innenhaftes Blickverhalten beider Gruppen im Anschluss an die Instruktion (Kap. 10.2). Zudem zielten die Lehr-Lern-Materialien auf eine Kohärenzbildung zwischen den Repräsentationsformen als Formel und als Vektorfelddiagramm ab. Da die Formeldarstellung in den nachfolgenden Aufgaben zur Divergenz jedoch nur eine untergeordnete Rolle spielte, lassen sich

anhand der Performanz der Studierenden kaum Rückschlüsse auf den Erwerb eines konnektiven Verständnisses zur Divergenz ziehen. Ob die Instruktion eine Kohärenzbildung auf Oberflächen- und/oder Tiefenstrukturebene zwischen Vektorfelddiagramm und Divergenzformel unterstützte, muss daher noch empirisch geprüft werden. Die Transferaufgabe involvierte hingegen sowohl die Formeldarstellung von partiellen Vektorableitungen als auch ihre visuelle Interpretation in Vektorfelddiagrammen. Der Unterschied zwischen Interventions- und Kontrollgruppe deutet an dieser Stelle darauf hin, dass vor allem die Instruktion mit Zeichenaktivitäten zu einem repräsentationsverbindenden Verständnis partieller Vektorableitungen beitragen konnte.

Zeichenaktivitäten verringern strategieinduzierte kognitive Belastung

Mit Blick auf die drei Arten kognitiver Belastung (Kap. 3.1.2.1) nahm die Interventionsgruppe eine signifikant geringere intrinsische kognitive Belastung sowie eine signifikant höhere lernrelevante kognitive Belastung wahr als die Kontrollgruppe (Abb. 8 in Kap. 7). Eine Analyse dessen, was Klein et al. (2019) als „mental stress“ bezeichneten und auf eine Belastung durch repräsentationsspezifische visuelle Prozeduren abzielte, ergab für die Interventionsgruppe mit Zeichenaktivitäten einen Skalenwert von 0.20. Gegenüber der Instruktion mit visuellen Hilfestellungen von Klein et al. (2019), bei der diese Skala einen Wert von 0.33 annahm, konnten die Zeichenaktivitäten somit zu einer Verringerung der strategieinduzierten mentalen Belastung beitragen[1]. Diese Ergebnisse konnten durch eine Detailanalyse unterstützt werden (Hahn und Klein, 2022a). Mit Blick auf die CLT gründet sich der positive Einfluss der Zeichenaktivitäten auf die Lernwirksamkeit somit auf einer Reduzierung der intrinsischen kognitiven Belastung durch eine Unterstützung repräsentationsspezifischer, visueller und mentaler Prozesse (Kap. 2.2 und 10.2). Dies ermöglicht die Aufwendung eines großen Anteils kognitiver Ressourcen für lernförderliche Informationsverarbeitungsprozesse und trägt damit zu einer Maximierung der lernrelevanten kognitiven Belastung bei (Kap. 3.1.2.1).
Insgesamt gliedern sich die Ergebnisse der Studie *Zeichnen* in bisherige Wirksamkeitsbefunde zum Zeichen als Lernstrategie ein (Kap. 3.1.4.1) und unterstützen den Einsatz dieser Methode beim Lernen mit Vektorfelddiagrammen. Die noch ausstehende empirische Überprüfung der Wirksamkeit von Zeichenaktivitäten bei Lernenden mit geringem visuell-räumlichem Vorstellungsvermögen stellt dabei eine Limitation der Studie dar. Auch die Untersuchung der Wirksamkeit des Vektorfeld-Visualisierungswerkzeugs könnte in diesem Zusammenhang vielversprechend sein. Außerdem ist anzumerken, dass die zeichenbasierte Instruktion in der Studie *Zeichnen* vom theoretischen Zeichenbegriff im Sinne lerner-generierten Zeichens abweicht, da sie keine eigenständige Entwicklung einer Zeichnung darstellt (Van Meter und Garner, 2005; Van Meter et al., 2006, Kap 3.1.4.1). Vielmehr erzeugten die Zeichenaktivitäten in der Studie *Zeichnen* eine Externalisierung einzelner Schritte einer mentalen Strategie zur qualitativen Beurteilung der Divergenz und unterstützten so repräsentationsspezifische kognitive Prozesse (Kap. 2.2).

[1] Neben den Items von Leppink et al. (2013) wurden in der Studie *Zeichnen* zudem Items zur mentalen Belastung aus der Studie von Klein et al. (2019) erfasst (siehe Anhang A.2). Die hier beschriebenen Auswertungen dieser Items sind nicht Teil der Publikation in Kap. 7, sondern wurden zur Vertiefung der Analyse in dieser Dissertation ergänzt.

Erste Indizien für das Potential eines digitalgestützten Vektorfeld-Visualisierungswerkzeugs

Insgesamt zeigte die Instruktion mit Zeichenaktivitäten bezüglich des vektoranalytischen Konzeptverständnisses mit Performanzscores von über 80 % eine hohe Lernwirksamkeit für instruktionsnahe sowie -ferne Anforderungen. Diese Ergebnisse lassen jedoch kaum Rückschlüsse auf die Wirkung eines vektorfelddiagrammzentrierten Lehr-Lern-Ansatzes und der zeichenbasierten Instruktion in der universitären Lehre zu. Die Studie *Lernaufgaben* zielt daher darauf ab, diese Lücke zu schließen. Sie verwendete dabei neben text-bild-basierten Lernaufgaben nach dem Vorbild der Divergenzinstruktionen von Klein et al. (2018) sowie der Studie *Zeichnen* zudem ein interaktives, digitalgestütztes Vektorfeld-Visualisierungswerkzeug (Kap. 8). Während empirische Ergebnisse der Lernwirksamkeit aufgrund des Publikationsformats als präregistrierte Studie zum Zeitpunkt der Dissertationsniederschrift noch nicht vorliegen, lassen sich bereits erste Implikationen bezüglich des Mehrwerts des Visualisierungswerkzeugs aus einer Evaluation ableiten (Abb. 6 und 7 in Kap. 8). Neben einer hohen wahrgenommenen Benutzer:innenfreundlichkeit der Bedienung sowie des Designs gaben die Studierenden an, dass sie das Werkzeug für die Verwendung in weiteren Studieneingangsvorlesungen sowie für Studienanfänger:innen im Allgemeinen empfehlen würden. Damit einhergehend berichteten sie, dass das Visualisierungswerkzeug zu einem besseren Verständnis und einer Verringerung der Abstraktion von vektoranalytischen Konzepten (Tab. 1) beitragen konnte. Obwohl noch keine evidenzbasierten Erkenntnisse über die Wirksamkeit des Vektorfeld-Visualisierungswerkzeugs vorliegen, liefern diese Ergebnisse somit ein erstes wichtiges Indiz für das Potential und die mögliche Effektivität dieses Werkzeugs.

10.5 Zusammenfassung und Ausblick

Diese Dissertation untersuchte das Lehren und Lernen vektoranalytischer Konzepte in der Studieneingangsphase Physik mit Fokus auf der Instrumentalisierung von Vektorfelddiagrammen als Lernwerkzeug. Aus methodischer Perspektive kennzeichnete zudem die Analyse von Blickdaten, das Eye-Tracking, als Erkenntnismethode zur Untersuchung kognitiv-visueller Prozesse in der physikdidaktischen Forschung einen zentralen Forschungsgegenstand der Arbeit.

Zusammenfassung studienbezogener Ergebnisse und Implikationen

In vier Studien, deren Ergebnisse die Grundlage für fünf Manuskripte darstellten, wurden insgesamt vier Forschungsfokusse untersucht, die unterschiedliche Schwerpunkte des Forschungsprojekts adressierten. Das erste Forschungsziel dieser Arbeit zielte auf eine Analyse der Implementation, Potentiale und Limitationen der Eye-Tracking-Methode in der physikdidaktischen Forschung ab. Die diesbezüglichen Erkenntnisse beruhten im Wesentlichen auf einem Literaturreview physikdidaktischer Eye-Tracking-Studien bis April 2021 und wurden durch methodische Implikationen zweier weiterer

Eye-Tracking-Studien im Kontext der Vektoranalysis ergänzt. Während sich die Methode vor allem für die Analyse von (multi-) repräsentationalen Assessmentszenarien als gewinnbringend herausstellte, wurde ihr herausragendes Potential auch für den Einsatz in (digitalen) Lernumgebungen deutlich. Die gewonnenen Ergebnisse geben auch über methodische und fachdidaktische Implikationen für die physikdidaktische Forschung hinaus Impulse und Anregungen, z. B. für die Lehrkräfteaus- und Weiterbildung. So ermöglicht die Verwendung mobiler Eye-Tracking-Brillen in Real-World-Szenarien erkenntnisreiche Einblicke in konstruktive oder kollaborative Lern- und Problemlöseprozesse und kann darüber hinaus als Feedbackinstrument für Lehrkräfte dienen. Beispielsweise kann die Rückspiegelung des Blickverhaltens von Schüler:innen bei der Durchführung von Demonstrationsexperimenten wertvolle Informationen enthalten, die eine Selbstreflexion der Lehrenden unterstützen (Schweinberger et al., 2023).

Im Kontext der Vektoranalysis zielte ein wesentliches Forschungsziel dieser Arbeit auf die Charakterisierung expert:innenenhafter visueller Verhaltensweisen im Umgang mit Vektorfelddiagrammen ab. Zwei Eye-Tracking-Studien zum Repräsentationswechsel von Vektorfelddarstellungen sowie der Divergenzbeurteilung nach einer zeichenbasierten, multi-repräsentationalen Instruktion ergänzten einschlägige Vorarbeiten durch die Untersuchung einer neuen Anforderung und unter Bezug auf theoretische Überlegungen zu den kognitiven Prozessen im Umgang mit Vektorfelddiagrammen. Es zeigte sich, dass visuelle Expertise im Umgang mit Vektorfelddiagrammen mit repräsentationsspezifischen visuellen Handlungen assoziiert ist, die durch vertikale und horizontale Blickbewegungen der Länge zweier benachbarter Vektoren im Diagramm charakterisiert sind. Diese Ergebnisse stehen in engem Zusammenhang mit dem dritten Forschungsfokus dieser Arbeit, der auf die Analyse kovariater Denkstrukturen im Umgang mit Vektorfelddiagrammen abzielte. Obgleich im Rahmen dieser Arbeit keine belastbaren Ergebnisse zum Zusammenhang von kovariatem Denken und repräsentationsspezifischen Blickmustern gefunden wurden, lieferten Verbaldatenanalysen dennoch erste Belege dafür, dass kognitive Prozesse im Umgang mit Vektorfelddiagrammen mit kovariaten Denkstrukturen assoziiert sind. Neben dem Potential, das sich dadurch für Vektorfelddiagramme als Lerngelegenheit zur Förderung repräsentationsübergreifender Kompetenzen ergab, offenbarten argumentative Schwierigkeiten zudem Bedarf zur Unterstützung kovariater Denkprozesse im Umgang mit Vektorfelddiagrammen. Insgesamt eröffnen diese Ergebnisse neue Perspektiven für ein reichhaltiges Forschungsfeld zum kovariaten Denken im Kontext der Vektoranalysis. Dieses umfasst beispielsweise krummlinige Koordinatensysteme (Moore et al., 2013), eine Erweiterung des Forschungsstrangs auf multivariate Denkmechanismen (Jones, 2022) sowie eine Verknüpfung mit vorzeichenbezogenen Beurteilungsprozessen (Brahmia et al., 2020). Über kontextfreie Analysen hinaus können Vektorfelddiagramme physikalischer Anwendungsszenarien zudem zur Stärkung des CoRP-Frameworks beitragen. Da bisherige Überlegungen des Orientierungsrahmens im Wesentlichen auf dem physikalischen kovariaten Denken bei graphenbasierten Aufgaben beruhen, können Erkenntnisse im Umgang mit Vektorfelddiagrammen eine gewinnbringende Ergänzung dieser Überlegungen darstellen.

Der letzte Forschungsfokus dieser Arbeit adressierte eine zielgerichtete Unterstützung des Lernens mit Vektorfelddiagrammen. Im Fokus der Untersuchungen stand hierbei das zeichenbasierte Lernen, das durch eine Reduktion der kognitiven Belastung als lernförderliche Methode zur Unterstützung

repräsentationsspezifischer Prozesse im Umgang mit Vektorfelddiagrammen nachgewiesen werden konnte. Erste Evaluationsergebnisse deuteten zudem darauf hin, dass das im Rahmen dieser Dissertation entwickelte digitalgestützte Vektorfeld-Visualisierungswerkzeugs zur Förderung des Verständnisses vektoranalytischer Konzepte beitragen kann. An dieser Stelle ist eine Verknüpfung der beschriebenen Ergebnisse mit der Studie *Lernaufgaben* aussichtsreich, die die Wirkung der Zeichenaktivitäten und des Visualisierungswerkzeugs im universitären Lehrkontext untersucht. Dies kann außerdem zu einer höheren externen Validität der Ergebnisse zum zeichenbasierten Lernen im Kontext der Vektoranalysis beitragen. Weiteres Unterstützungspotential für das Lernen vektoranalytischer Konzepte mit Vektorfelddiagrammen ergibt sich darüber hinaus durch eine gezielte Instruktion expert:innenhafter visueller Blickbewegungen. Dies kann beispielsweise durch eine blickschulende Vorübung (Skuballa et al., 2015) oder Blickvideos von Expert:innen (Jarodzka et al., 2017) erfolgen. Auch die Methode des adaptiven Lernens, z. B. auf Basis von Blickdaten (García-Barrios et al., 2004), bietet sich für den Kontext der Vektoranalysis an (für ein adaptives Lernsystem zu Vektoren siehe Dubey und Barniol, 2023).

Weiterführende Forschungsfragen und -richtungen

Über die untersuchten Forschungsfokusse hinaus lassen sich zudem weiterführende Forschungsfragen formulieren. Diese adressieren zum einen affektiv-motivationale und metakognitive Variablen, die im Rahmen dieser Arbeit nicht berücksichtigt wurden. Motivation und Emotionen besitzen einen erheblichen Einfluss auf die kognitive Verarbeitung und die Lernergebnisse beim multimedialen Lernen (Cognitive-Affective Theory of Learning with Media, CATLM; Integrated Cognitive Affective Model of Learning with Multimedia, ICALM; Moreno, 2005; Park et al., 2014; Plass und Kaplan, 2016). Daher kann die Untersuchung affektiver und metakognitiver Variablen, vor allem mit Blick auf die Wirksamkeit der entwickelten Instruktionen und Lernaufgaben, eine wertvolle Ergänzung der Ergebnisse dieser Arbeit darstellen.

Zum anderen involvierten Untersuchungen der Probleme bezüglich vektoranalytischer Konzepte sowie der Wirksamkeit von vektorfelddiagrammzentrierten Lehr-Lern-Materialien als Stichprobe bisher nahezu ausschließlich Studierende in der Studieneingangsphase Physik. Grundlegende Konzepte der Vektoranalysis sind jedoch auch in den Lehrveranstaltungen höherer Studiensemester von Bedeutung, z. B. in fortgeschrittenen Kursen zur Elektrodynamik und der allgemeinen Relativitätstheorie. Die Arbeiten von Rau (2018a,b), in denen die Autorin argumentiert, dass Lernende zu verschiedenen Zeitpunkten ihres Lernprozesses unterschiedliche Arten instruktionaler Unterstützung benötigen, indizieren an dieser Stelle weiterführenden Forschungsbedarf bezüglich des Lernens vektoranalytischer Konzepte in höheren Studiensemestern. Dies involviert beispielsweise, inwiefern sich die beobachteten Schwierigkeiten auch für fortgeschrittene Studierende zeigen, inwiefern bei diesen andere Schwierigkeiten auftreten und welche Wirkung die entwickelten Lehr-Lern-Materialien in höheren Studiensemester haben.

Bisher können außerdem keine Aussagen darüber getroffen werden, in welcher Art und Weise die Ergebnisse dieser Dissertation auch für Vektorfelddiagramme mit physikalischen Kontexten gelten

und welchen Einfluss ein vektorfelddiagrammzentrierter Lehr-Lern-Ansatz auf das Verständnis der Maxwellschen Gleichungen hat. Die Studie *Lernaufgaben* kann durch zwei Assessment-Aufgaben zum Problemkontext der Kontinuitätsgleichung inkompressibler Fluide und dem Gaußschen Gesetz der Elektrostatik erste Antworten zu diesen Fragen geben. Darüber hinaus bedarf es jedoch dezidierter Untersuchungen, die sowohl die Anwendung der erworbenen Kompetenzen in der Physik als auch zielgerichtete Unterstützungsmaßnahmen diesbezüglich adressieren.
Abschließend sei auf die Reichhaltigkeit des fachdidaktischen Forschungsfeldes hingewiesen, welches beispielsweise eine Erweiterung auf dreidimensionale Felder und die Instrumentalisierung von Vektorfelddiagrammen als Problemlösewerkzeug umfasst. Auch die Integration digitaler Werkzeuge zur Visualisierung von Vektorfeldern beim Experimentieren im Physikstudium ist denkbar, z. B. als datengesteuertes Augmented-Reality-Display, auf welchem anhand aufgenommener Messdaten das elektrische Feld dargestellt wird (Sonntag et al., 2019).

Insgesamt leistet diese Arbeit einen wichtigen Beitrag zum Verständnis des Lernens vektoranalytischer Konzepte in der Studieneingangsphase Physik und bietet zahlreiche Implikationen für eine effektive Unterstützung vektoranalytischer Lernprozesse durch den zielgerichteten Einsatz von Vektorfelddiagrammen. Aus den Ergebnissen und ihrer Diskussion lassen sich jedoch auch Potential sowie Bedarf für weiterführende Untersuchungsrichtungen, sowohl mit fachdidaktischem als auch mit lerntheoretischem und methodischem Forschungsinteresse, ableiten, die die Erkenntnisse dieser Arbeit weiter vertiefen und komplementieren.

Literatur

Abbasi, S., Puttinger, S., Pirker, S., & Lichtenegger, T. (2020). Recurrence analysis and time extrapolation of a confined turbulent jet using modal decomposition. *Physics of Fluids*, *32*(7), 075115. https://doi.org/10.1063/5.0010315

Ainsworth, S. E. (1999). The functions of multiple representations. *Computers & Education*, *33*(2-3), 131–152. https://doi.org/10.1016/S0360-1315(99)00029-9

Ainsworth, S. E. (2006). DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and Instruction*, *16*(3), 183–198. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2006.03.001

Ainsworth, S. E. (2008). The educational value of multiple-representations when learning complex scientific concepts. In J. K. Gilbert, M. Reimer & M. Nakhleh (Hrsg.), *Visualization: Theory and practice in science education. Models and modeling in science education* (S. 191–208). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4020-5267-5_9

Ainsworth, S. E. (2018). Multiple representations and multimedia learning. In F. Fischer, C. E. Hmelo-Silver, S. R. Goldman & P. Reimann (Hrsg.), *International Handbook of the Learning Sciences* (S. 96–105). Routledge.

Ainsworth, S. E., Prain, V., & Tytler, R. (2011). Drawing to learn in science. *Science*, *333*(6046), 1096–1097. https://doi.org/10.1126/science.1204153

Ainsworth, S. E., & Scheiter, K. (2021). Learning by drawing visual representations: Potential, purposes, and practical implications. *Current Directions in Psychological Science*, *30*(1), 61–67. https://doi.org/10.1177/0963721420979582

Albrecht, A. (2011). *Längsschnittstudie zur Identifikation von Risikofaktoren für einen erfolgreichen Studieneinstieg in das Fach Physik* [Dissertation, Freie Universität Berlin]. 10.17169/refubium-8615

Albrecht, A., & Nordmeier, V. (2010). Studienerfolg im Fach Physik. *PhyDid B, Didaktik der Physik, Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung 2010*.

Albrecht, A., & Nordmeier, V. (2013). Interventionsstudie im Lehramtsstudium der Physik. Dem Erfolg auf der Spur. *PhyDid A, Physik und Didaktik in Schule und Hochschule*, *1*(12), 62–72. https://doi.org/10.17169/refubium-20109

Alemdag, E., & Cagiltay, K. (2018). A systematic review of eye tracking research on multimedia learning. *Computers & Education*, *125*, 413–428. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2018.06.023

Ambrose, B. S. (2004). Investigating student understanding in intermediate mechanics: Identifying the need for a tutorial approach to instruction. *American Journal of Physics*, *72*(4), 453–459. https://doi.org/10.1119/1.1648684

Andrà, C., Lindström, P., Arzarello, F., Ferrara, F., Holmqvist, K., Robutti, O., & Sabena, C. (2015). Reading mathematics representations: An eye tracking study. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *13*, 237–259. https://doi.org/10.1007/s10763-013-9484-y

Antonenko, P. D., Toy, S., & Niederhauser, D. S. (2012). Using cluster analysis for data mining in educational technology research. *Educational Technology Research and Development*, *60*(3), 383–398. https://doi.org/10.1007/s11423-012-9235-8

Armstrong, T., & Olatunji, B. O. (2012). Eye tracking of attention in the affective disorders: A meta-analytic review and synthesis. *Clinical Psychology Review*, *32*(8), 704–723. https://doi.org/10.1016/j.cpr.2012.09.004

Ashraf, H., Sodergren, M. H., Merali, N., Mylonas, G., Singh, H., & Darzi, A. (2018). Eye-tracking technology in medical education: A systematic review. *Medical Teacher*, *40*(1), 62–69. https://doi.org/10.1080/0142159X.2017.1391373

Atkinson, R. C., & Shiffrin, R. M. (1968). Human memory: A proposed system and its control processes. *2*, 89–195. https://doi.org/10.1016/S0079-7421(08)60422-3

Ayres, P., & Sweller, J. (2014). The split-attention principle in multimedia learning. In R. E. Mayer (Hrsg.), *The Cambridge Handbook of Multimedia Learning* (2. Aufl., S. 206–226). Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9781139547369.011

Baddeley, A. (1992). Working memory. *Science*, *255*(5044), 556–559. https://doi.org/10.1126/science.1736359

Baddeley, A. (1986). *Working memory*. Oxford University Press.

Baily, C., & Astolfi, C. (2014). Student reasoning about the divergence of a vector field. *Physics Education Research Conference Proceedings*, 31–34. https://doi.org/10.1119/perc.2014.pr.004

Baily, C., Dubson, M., & Pollock, S. J. (2013). Research-based course materials and assessments for upper-division electrodynamics (E&M II). *AIP Conference Proceedings*, *1513*(1), 54–57. https://doi.org/10.1063/1.4789650

Baily, C., Bollen, L., Pattie, A., van Kampen, P., & De Cock, M. (2015). Student thinking about the divergence and curl in mathematics and physics contexts. *Physics Education Research Conference Proceedings*, 51–54. https://doi.org/10.1119/perc.2015.pr.008

Baily, C., Ryan, Q. X., Astolfi, C., & Pollock, S. J. (2017). Conceptual assessment tool for advanced undergraduate electrodynamics. *Physical Review Physics Education Research*, *13*(2), 020113. https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.13.020113

Barniol, P., & Zavala, G. (2014). Test of understanding of vectors: A reliable multiple-choice vector concept test. *Physical Review Special Topics - Physics Education Research*, *10*(1), 010121. https://doi.org/10.1103/PhysRevSTPER.10.010121

Battaglia, O. R., Di Paola, B., & Fazio, C. (2016). A new approach to investigate students' behavior by using cluster analysis as an unsupervised methodology in the field of education. *Applied Mathematics*, *7*(15), 1649–1673. https://doi.org/10.4236/am.2016.715142

Benimoff, A. I. (2006). The electric fields experiment: A new way using conductive tape. *The Physics Teacher*, *44*(3), 140–141. https://doi.org/10.1119/1.2173317

Berthold, K., & Renkl, A. (2009). Instructional aids to support a conceptual understanding of multiple representations. *Journal of Educational Psychology*, *101*(1), 70–87. https://doi.org/10.1037/a0013247

Bilda, Z., & Gero, J. S. (2005). Does sketching off-load visuo-spatial working memory? In J. S. Gero & N. Bonnardel (Hrsg.), *Preprints of the International Workshop on Studying Designers'05* (S. 145–159). Key Centre of Design Computing and Cognition, University of Sydney.

Blanz, M. (2015). *Forschungsmethoden und Statistik für die Soziale Arbeit. Grundlagen und Anwendungen*. Kohlhammer.

Bodemer, D., Ploetzner, R., Feuerlein, I., & Spada, H. (2004). The active integration of information during learning with dynamic and interactive visualisations. *Learning and Instruction*, *14*(3), 325–341. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2004.06.006

Bollen, L., van Kampen, P., & De Cock, M. (2015). Students' difficulties with vector calculus in electrodynamics. *Physical Review Special Topics - Physics Education Research*, *11*(2), 020129. https://doi.org/10.1103/PhysRevSTPER.11.020129

Bollen, L., van Kampen, P., Baily, C., & De Cock, M. (2016). Qualitative investigation into students' use of divergence and curl in electromagnetism. *Physical Review Physics Education Research*, *12*(2), 020134. https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.12.020134

Bollen, L., van Kampen, P., Baily, C., Kelly, M., & De Cock, M. (2017). Student difficulties regarding symbolic and graphical representations of vector fields. *Physical Review Physics Education Research*, *13*(2), 020109. https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.13.020109

Bollen, L., van Kampen, P., & De Cock, M. (2018). Development, implementation, and assessment of a guided-inquiry teaching-learning sequence on vector calculus in electrodynamics. *Physical Review Physics Education Research*, *14*(2), 020115. https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.14.020115

Bortz, J., & Döring, N. (2006). *Forschungsmethoden und Evaluation für Human- und Sozialwissenschaftler* (4. Aufl.). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-540-33306-7

Bortz, J., & Döring, N. (2016). *Forschungsmethoden und Evaluation für Human- und Sozialwissenschaftler* (5. Aufl.). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-41089-5

Bortz, J., & Schuster, C. (2010). *Statistik für Human- und Sozialwissenschaftler* (7. Aufl.). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-12770-0

Brahmia, S. W., Olsho, A., Smith, T. I., & Boudreaux, A. (2020). Framework for the natures of negativity in introductory physics. *Physical Review Physics Education Research*, *16*(1), 010120. https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.16.010120

Brang, D., Miller, L. E., McQuire, M., Ramachandran, V. S., & Coulson, S. (2013). Enhanced mental rotation ability in time-space synesthesia. *Cognitive Processing*, *14*, 429–434. https://doi.org/10.1007/s10339-013-0561-5

Breitschuh, C., Eisenächer, K., Henning, S., & Wetzel, C. (2020). Unterstützung von Studierenden in der Studieneingangsphase. Den Einstieg erleichtern, Vorkenntnisse auffrischen, Studieren lernen. In C. Wetzel, M. Herzog, M. Merkt, A. Lequy & Y. Ding (Hrsg.), *Organisationsentwick-*

lung in der Hochschullehre. Praxisberichte zum Qualitätspakt-Lehre-Projekt der Hochschule Magdeburg-Stendal (S. 17–38). wbv Publikation.

Breslow, N. E., & Day, N. E. (1980). *Statistical methods in cancer research. Volume 1 - The analysis of case control study*. International Agency for Research on Cancer.

Brooke, J. (1996). Sus: a 'quick and dirty' usability scale. In P. W. Jordan, B. Thomas, B. A. Weerdmeester & I. L. McClelland (Hrsg.), *Usability Evaluation in Industry* (S. 189–194). Taylor & Francis.

Budi, A., & Muliyati, D. (2018). Discovering and understanding the vector field using simulation in android app. *Journal of Physics: Conference Series*, *1013*(1), 012062. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1013/1/012062

Burg, K., Haf, H., Wille, F., & Meister, A. (2012). *Vektoranalysis. Höhere Mathematik für Ingenieure, Naturwissenschaftler und Mathematiker* (2. Aufl.). Springer.

Burkholder, E. W., Murillo-Gonzalez, G., & Wieman, C. (2021). Importance of math prerequisites for performance in introductory physics. *Physical Review Physics Education Research*, *17*(1), 010108. https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.17.010108

Byerley, C., & Thompson, P. W. (2017). Secondary mathematics teachers' meanings for measure, slope, and rate of change. *The Journal of Mathematical Behavior*, *48*, 168–193. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.09.003

Campos, E., Zavala, G., Zuza, K., & Guisasola, J. (2020). Students' understanding of the concept of the electric field through conversions of multiple representations. *Physical Review Physics Education Research*, *16*(1), 010135. https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.16.010135

Cao, Y., & Brizuela, B. M. (2016). High school students' representations and understandings of electric fields. *Physical Review Physics Education Research*, *12*(2), 020102. https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.12.020102

Carli, M., Lippiello, S., Pantano, O., Perona, M., & Tormen, G. (2020). Testing students ability to use derivatives, integrals, and vectors in a purely mathematical context and in a physical context. *Physical Review Physics Education Research*, *16*(1), 010111. https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.16.010111

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(5), 352–378. https://doi.org/10.2307/4149958

Chandler, P., & Sweller, J. (1991). Cognitive Load Theory and the format of instruction. *Cognition and Instruction*, *8*(4), 293–332. https://doi.org/10.1207/s1532690xci0804_2

Chang, K.-E., Chen, Y.-L., Lin, H.-Y., & Sung, Y.-T. (2008). Effects of learning support in simulation-based physics learning. *Computers & Education*, *51*(4), 1486–1498. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2008.01.007

Chen, H., Cohen, P., & Chen, S. (2010). How big is a big odds ratio? Interpreting the magnitudes of odds ratios in epidemiological studies. *Communications in Statistics — Simulation and Computation*, *39*(4), 860–864. https://doi.org/10.1080/03610911003650383

Cheng, M., & Gilbert, J. K. (2009). Towards a better utilization of diagrams in research into the use of representative levels in chemical education. In J. K. Gilbert & D. Treagust (Hrsg.), *Multiple representations in chemical education. Models and modeling in science education* (S. 55–73). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4020-8872-8_4

Chien, K.-P., Tsai, C.-Y., Chen, H.-L., Chang, W.-H., & Chen, S. (2015). Learning differences and eye fixation patterns in virtual and physical science laboratories. *Computers & Education*, *82*, 191–201. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2014.11.023

Chiou, G.-L., Hsu, C.-Y., & Tsai, M.-J. (2022). Exploring how students interact with guidance in a physics simulation: Evidence from eye-movement and log data analyses. *Interactive Learning Environments*, *30*(3), 484–497. https://doi.org/10.1080/10494820.2019.1664596

Chumachemko, D. V., Shvarts, A. Y., & Budanov, A. (2014). The development of the visual perception of the cartesian coordinate system. An eye tracking study. In C. Nicol, P. Liljedahl, S. Oesterle & D. Allan (Hrsg.), *Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th Conference of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education* (S. 313–320). Psychology of Mathematics Education.

Cohen, J. (1960). A coefficient of agreement for nominal scales. *Educational and Psychological Measurement*, *20*(1), 37–46. https://doi.org/10.1177/001316446002000104

Cohen, J. (1988). *Statistical power analysis for the behavioral sciences*. Lawrence Erlbaum Associates. https://doi.org/10.4324/9780203771587

Confrey, J., & Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(1), 66–86. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.26.1.0066

Conklin, K., & Pellicer-Sánchez, A. (2016). Using eye-tracking in applied linguistics and second language research. *Second Language Research*, *32*(3), 453–467. https://doi.org/10.1177/0267658316637401

Cooper, M. M., Stieff, M., & DeSutter, D. (2017). Sketching the invisible to predict the visible: From drawing to modeling in chemistry. *Topics in Cognitive Science*, *9*(4), 902–920. https://doi.org/10.1111/tops.12285

Cruz-Prado, H., Bravetti, A., & Garcia-Chung, A. (2021). From geometry to coherent dissipative dynamics in quantum mechanics. *Quantum Reports*, *3*(4), 664–683. https://doi.org/10.3390/quantum3040042

De Bock, D., Verschaffel, L., Janssens, D., van Dooren, W., & Claes, K. (2003). Do realistic contexts and graphical representations always have a beneficial impact on students' performance? Negative evidence from a study on modelling non-linear geometry problems. *Learning and Instruction*, *13*(4), 441–463. https://doi.org/10.1016/S0959-4752(02)00040-3

De Cock, M. (2012). Representation use and strategy choice in physics problem solving. *Physical Review Special Topics - Physics Education Research*, *8*(2), 020117. https://doi.org/10.1103/PhysRevSTPER.8.020117

De Jong, T. (2011). Instruction based on computer simulations. In R. E. Mayer & P. A. Alexander (Hrsg.), *Handbook of Research on Learning and Instruction* (S. 446–466). Routledge.

De Jong, T., Ainsworth, S., Dobson, M., van der Hulst, A., Levonen, J., Reimann, P., Sime, J.-A., van Someren, M., Spada, H., & Swaak, J. (1998). Acquiring knowledge in science and mathematics: The use of multiple representations in technology based learning environments. In M. W. van Someren, P. Reimann, H. P. A. Boshuizen & T. de Jong (Hrsg.), *Learning with multiple representations* (S. 9–40). Pergamon.

De Jong, T., & van Joolingen, W. R. (1998). Scientific discovery learning with computer simulations of conceptual domains. *Review of Educational Research*, *68*(2), 179–201. https://doi.org/10.3102/00346543068002179

De Leone, C. J., & Gire, E. (2006). Is instructional emphasis on the use of non-mathematical representations worth the effort? *AIP Conference Proceedings*, *818*(1), 45–48. https://doi.org/10.1063/1.2177019

Department of Electrical and Computer Engineering University of Waterloo. (2023). *Visualization of Divergence and Vorticity*. https://ece.uwaterloo.ca/~ece206/Supporting_material/37/

Der Rat der Europäischen Union. (2018). Empfehlungen des Rates vom 22. Mai 2018 zu Schlüsselkompetenzen für lebenslanges Lernen. *Amtsblatt der Europäischen Union*, (C 189). https://eur-lex.europa.eu/legal-content/DE/TXT/PDF/?uri=CELEX:32018H0604(01)

Derrick, B., Toher, D., & White, P. (2016). Why Welch's test is Type I error robust. *The Quantitative Methods for Psychology*, *12*(1), 30–38. https://doi.org/10.20982/tqmp.12.1.p030

Ding, L., & Beichner, R. (2009). Approaches to data analysis of multiple-choice questions. *Physical Review Special Topics - Physics Education Research*, *5*(2), 020103. https://doi.org/10.1103/PhysRevSTPER.5.020103

Doran, R. L. (1980). *Basic measurement and evaluation of science instruction*. National Science Teachers Association.

Dray, T., & Manogue, C. A. (1999). The vector calculus gap: Mathematics $\neq$ physics. *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, *9*(1), 21–28. https://doi.org/10.1080/10511979908965913

Dray, T., & Manogue, C. A. (2003). Using differentials to bridge the vector calculus gap. *The College Mathematics Journal*, *34*(4), 283–290. https://doi.org/10.1080/07468342.2003.11922019

Dray, T., & Manogue, C. A. (2023). Vector line integrals in mathematics and physics. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *9*(1), 92–117. https://doi.org/10.1007/s40753-022-00206-8

Dubey, A., & Barniol, P. (2023). Enhancing students' understanding of vectors through personalized adaptive learning. *European Journal of Physics*, *44*(5), 055704. https://doi.org/10.1088/1361-6404/ace826

Düchs, G., & Runge, E. (2023). Studium in der Verlängerung - Statistiken zum Physikstudium in Deutschland 2023. *Physik Journal*, *22*(8/9).

Dufresne, R. J., Gerace, W. J., & Leonard, W. J. (1997). Solving physics problems with multiple representations. *The Physics Teacher*, *35*(5), 270–275. https://doi.org/10.1119/1.2344681

Dutke, S., & Rinck, M. (2006). Multimedia learning. Working memory and the learning of word and picture diagrams. *Learning and Instruction*, *16*(6), 526–537. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2006.10.002

Ebel, R. L., & Frisbie, D. A. (1991). *Essentials of educational measurement* (5. Aufl.). Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs.

Eisinga, R., te Grotenhuis, M., & Pelzer, B. (2012). The reliability of a two-item scale. Pearson, Cronbach, or Spearman-Brown? *International Journal of Public Health*, *58*(4), 637–642. https://doi.org/10.1007/s00038-012-0416-3

Ermakov, A., & Stepanyants, Y. (2021). Description of nonlinear vortical flows of incompressible fluid in terms of a quasi-potential. *Physics*, *3*(4), 799–813. https://doi.org/10.3390/physics3040050

Everitt, B. S., & Dunn, G. (1983). *Advanced methods of data exploration and modelling*. Heinemann.

Everitt, B. S., Landau, S., Leese, M., & Stahl, D. (2011). *Cluster analysis* (5. Aufl.). John Wiley & Sons.

Faul, F., Erdfelder, E., Buchner, A., & Lang, A.-G. (2009). Statistical power analyses using G*Power 3.1. Tests for correlation and regression analyses. *Behavior Research Methods*, *41*(4), 1149–1160. https://doi.org/10.3758/BRM.41.4.1149

Finkelstein, N. D., Adams, W. K., Keller, C. J., Kohl, P. B., Perkins, K. K., Podolefsky, N. S., Reid, S., & LeMaster, R. (2005). When learning about the real world is better done virtually: A study of substituting computer simulations for laboratory equipment. *Physical Review Special Topics - Physics Education Research*, *1*(1), 010103. https://doi.org/10.1103/PhysRevSTPER.1.010103

Florax, M., & Ploetzner, R. (2010). What contributes to the split-attention effect? The role of text segmentation, picture labelling, and spatial proximity. *Learning and Instruction*, *20*(3), 216–224. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2009.02.021

Fox, J., & Dusa, A. (2022). *polycor. Polychoric and polyserial correlations* [R-Paket Version 0.8-1]. https://CRAN.R-project.org/package=polycor

Galili, T. (2015). dendextend. An R package for visualizing, adjusting, and comparing trees of hierarchical clustering. *Bioinformatics*, *31*(22), 3718–3720. https://doi.org/10.1093/bioinformatics/btv428

García-Barrios, V. M., Gütl, C., Preis, A. M., Andrews, K., Pivec, M., Mödritscher, F., & Trummer, C. (2004). AdELE: A framework for Adaptive e-Learning through Eye tracking. *Proceedings of I-Know'04*, 609–616.

Gegenfurtner, A. (2020). *Professional vision and visual expertise* [Habilitation, Universität Regensburg].

Gegenfurtner, A., Lehtinen, E., & Säljö, R. (2011). Expertise differences in the comprehension of visualizations: A meta-analysis of eye-tracking research in professional domains. *Educational Psychology Review*, *23*, 523–552. https://doi.org/10.1007/s10648-011-9174-7

Gegenfurtner, A., Siewiorek, A., Lehtinen, E., & Säljö, R. (2013). Assessing the quality of expertise differences in the comprehension of medical visualizations. *Vocations and Learning*, *6*, 37–54. https://doi.org/10.1007/s12186-012-9088-7

Gegenfurtner, A., & Seppänen, M. (2013). Transfer of expertise. An eye tracking and think aloud study using dynamic medical visualizations. *Computers & Education*, *63*, 393–403. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2012.12.021

Gegenfurtner, A., Kok, E., van Geel, K., De Bruin, A., Jarodzka, H., Szulewski, A., & van Merriënboer, J. J. G. (2017). The challenges of studying visual expertise in medical image diagnosis. *Medical Education*, *51*(1), 97–104. https://doi.org/10.1111/medu.13205

George, D., & Mallery, P. (2019). *IBM SPSS Statistics 25 step by step. A simple guide and reference* (15. Aufl.). Routledge. https://doi.org/10.4324/9781351033909

Ginns, P. (2006). Integrating information: A meta-analysis of the spatial contiguity and temporal contiguity effects. *Learning and Instruction*, *16*(6), 511–525. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2006.10.001

Girden, E. R. (1992). *ANOVA. Repeated Measures*. Sage Publications.

Gire, E., & Price, E. (2012). Graphical representations of vector functions in upper-division E&M. *AIP Conference Proceedings*, *1413*(1), 27–30. https://doi.org/10.1063/1.3679985

Girwidz, R. (2020). Multimedia und digitale Medien im Physikunterricht. In E. Kircher, R. Girwidz & H. Fischer (Hrsg.), *Physikdidaktik. Grundlagen* (S. 457–527). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-662-59490-2_13

Glaser, M., & Schwan, S. (2015). Explaining pictures: How verbal cues influence processing of pictorial learning material. *Journal of Educational Psychology*, *107*(4), 1006–1018. https://doi.org/10.1037/edu0000044

Goldberg, J. H., & Helfman, J. I. (2010). Comparing Information Graphics: A Critical Look at Eye Tracking. *Proceedings of the 3rd BELIV'10 Workshop: BEyond Time and Errors: Novel EvaLuation Methods for Information Visualization*, 71–78. https://doi.org/10.1145/2110192.2110203

Gore, P. A. (2000). Cluster analysis. In H. E. A. Tinsley & S. D. Brown (Hrsg.), *Handbook of Applied Multivariate Statistics and Mathematical Modeling* (S. 297–321). Academic Press. https://doi.org/10.1016/B978-012691360-6/50012-4

Griffiths, D. J. (2023). *Introduction to electrodynamics* (5. Aufl.). Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/9781009397735

Guisasola, J., Almudí, J. M., Salinas, J., Zuza, K., & Ceberio, M. (2008). The Gauss and Ampere laws. Different laws but similar difficulties for student learning. *European Journal of Physics*, *29*(5), 1005–1016. https://doi.org/10.1088/0143-0807/29/5/013

Guisasola, J., Zolman, D., Bollen, L., van Kampen, P., Baily, C., De Cock, M., Dreef, T., Buning, J., Fokkema, D., Hijmans, T., Kuik, G., Fazio, C., Battaglia, O. R., & Zuza, K. (2019). Different approaches to research and innovation in physics education at college and university. *Journal of Physics: Conference Series*, *1286*(1), 012060. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1286/1/012060

Haddock, C. K., Rindskopf, D., & Shadish, W. R. (1998). Using odds ratios as effect sizes for meta-analysis of dichotomous data: a primer on methods and issues. *Psychological Methods*, *3*(3), 339–353. https://doi.org/10.1037/1082-989X.3.3.339

Hahn, L., Halverscheid, S., Kuhn, J., & Klein, P. (2021). Einfluss der Aufgabenkomplexität auf die Blickbewegungen beim Koordinieren multipler Repräsentationen im Kontext von Vektorfeldern. In S. Habig (Hrsg.), *Naturwissenschaftlicher Unterricht und Lehrerbildung im Umbruch. Gesellschaft für Didaktik der Chemie und Physik online Jahrestagung 2020* (S. 306–309). Gesellschaft für Didaktik der Chemie und Physik.

Hahn, L., & Klein, P. (2021). Multiple Repräsentationen als fachdidaktischer Zugang zum Satz von Gauß. Qualitative Zugänge zur Interpretation der Divergenz von Vektorfeldern. In J. Grebe-Ellis & H. Grötzebauch (Hrsg.), *PhyDid B, Didaktik der Physik, Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung 2021* (S. 95–100).

Hahn, L., & Klein, P. (2022a). Kognitive Entlastung durch Zeichenaktivitäten? Eine empirische Untersuchung im Kontext der Vektoranalysis. In S. Habig & H. van Vorst (Hrsg.), *Unsicherheit als Element von naturwissenschaftsbezogenen Bildungsprozessen. Gesellschaft für Didaktik der Chemie und Physik virtuelle Jahrestagung 2021* (S. 384–387). Gesellschaft für Didaktik der Chemie und Physik.

Hahn, L., & Klein, P. (2022b). Vektorielle Feldkonzepte verstehen durch Zeichnen? Erste Wirksamkeitsuntersuchungen. In H. Grötzebauch & S. Heinicke (Hrsg.), *PhyDid B, Didaktik der Physik, Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung 2022* (S. 119–126).

Hahn, L., Halverscheid, S., Kuhn, J., & Klein, P. (2022). Wechsel zwischen Diagramm und Formel im Kontext von Vektorfeldern. Einfluss der Aufgabenkomplexität auf Indikatoren visueller Aufmerksamkeit. In P. Klein, N. Graulich, J. Kuhn & M. Schindler (Hrsg.), *Eye-Tracking in der Mathematik- und Naturwissenschaftsdidaktik: Forschung und Praxis* (S. 193–208). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-662-63214-7_12

Hahn, L., & Klein, P. (2023a). Clusterbildung mit Blickbewegungen zur Analyse von Personen- und Aufgabenmerkmalen. In H. van Vorst (Hrsg.), *Lernen, Lehren und Forschen in einer digital geprägten Welt. Gesellschaft für Didaktik der Chemie und Physik, Jahrestagung in Aachen 2022* (S. 490–493). Gesellschaft für Didaktik der Chemie und Physik.

Hahn, L., & Klein, P. (2023b). Multiple Repräsentationen und Zeichenaktivitäten als Zugänge zu Vektorfeldkonzepten. In H. Grötzebauch & S. Heinicke (Hrsg.), *PhyDid B, Didaktik der Physik, Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung 2023* (S. 107–114).

Hahn, L., Blaue, S. A., Höhn, P., Merkert, N., & Klein, P. (2023). Open Educational Resources für den Hochschulbereich. Anschauliche Vektoranalysis für die Studieneingangsphase. In H. Grötzebauch & S. Heinicke (Hrsg.), *PhyDid B, Didaktik der Physik, Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung 2023* (S. 123–130).

Han, J., Chen, L., Fu, Z., Fritchman, J., & Bao, L. (2017). Eye-tracking of visual attention in web-based assessment using the Force Concept Inventory. *European Journal of Physics*, *38*(4), 045702. https://doi.org/10.1088/1361-6404/aa6c49

Havanki, K. L., & VandenPlas, J. R. (2014). Eye tracking methodology for chemistry education research. In D. M. Bunce & R. S. Cole (Hrsg.), *Tools of chemistry education research* (S. 191–218). ACS Publications. https://doi.org/10.1021/bk-2014-1166.ch011

Helle, L. (2017). Prospects and pitfalls in combining eye-tracking data and verbal reports. *Frontline Learning Research*, *5*(3), 81–93. https://doi.org/10.14786/flr.v5i3.254

Hellenbrand, J., Mayer, R. E., Opfermann, M., Schmeck, A., & Leutner, D. (2019). How generative drawing affects the learning process: An eye-tracking analysis. *Applied Cognitive Psychology*, *33*(6), 1147–1164. https://doi.org/10.1002/acp.3559

Hernandez, E., Campos, E., Barniol, P., & Zavala, G. (2023). Students' conceptual understanding of electric flux and magnetic circulation. *Physical Review Physics Education Research*, *19*(1), 013102. https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.19.013102

Herrlinger, S., Höffler, T. N., Opfermann, M., & Leutner, D. (2017). When do pictures help learning from expository text? Multimedia and modality effects in primary schools. *Research in Science Education*, *47*, 685–704. https://doi.org/10.1007/s11165-016-9525-y

Hettmannsperger, R., Mueller, A., Scheid, J., & Schnotz, W. (2016). Developing conceptual understanding in ray optics via learning with multiple representations. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft*, *19*, 235–255. https://doi.org/10.1007/s11618-015-0655-1

Heublein, U., Hutzsch, C., & Schmelzer, R. (2020). Die Entwicklung der Studienabbruchquoten in Deutschland. *DZHW Brief*, *3*. https://doi.org/10.34878/2020.03.dzhw_brief

Heublein, U., Hutzsch, C., & Schmelzer, R. (2022). Die Entwicklung der Studienabbruchquoten in Deutschland. *DZHW Brief*, *5*.

Heublein, U., Ebert, J., Hutzsch, C., Isleib, S., König, R., Richter, J., & Woisch, A. (2017). Zwischen Studienerwartungen und Studienwirklichkeit - Ursachen des Studienabbruchs, beruflicher Verbleib der Studienabbrecherinnen und Studienabbrecher und Entwicklung der Studienabbruchquote an deutschen Hochschulen. *Forum Hochschule*, *1*.

Hillmayr, D., Ziernwald, L., Reinhold, F., Hofer, S. I., & Reiss, K. M. (2020). The potential of digital tools to enhance mathematics and science learning in secondary schools: A context-specific meta-analysis. *Computers & Education*, *153*, 103897. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2020.103897

Hofmann, J., Hahn, L., Jelicic, K., Sušac, A., & Klein, P. (2023). Triangulation von Verbal- und Blickdaten: Eine Eye-Tracking-Studie. In H. Grötzebauch & S. Heinicke (Hrsg.), *PhyDid B, Didaktik der Physik, Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung 2023* (S. 135–141).

Hohenadler, M. (2018). *Mathematische Rechenmethoden 2* [Skriptum, Universität Würzburg]. https://fachschaft.physik.uni-wuerzburg.de/wp-content/uploads/2020/04/Rechenmethoden2.pdf

Holmqvist, K., Nyström, M., Andersson, R., Dewhurst, R., Jarodzka, H., & van de Weijer, J. (2011). *Eye tracking: A comprehensive guide to methods and measures*. Oxford University Press.

Holzinger, A., Kickmeier-Rust, M. D., Wassertheurer, S., & Hessinger, M. (2009). Learning performance with interactive simulations in medical education: Lessons learned from results of learning complex physiological models with the HAEMOdynamics SIMulator. *Computers & Education*, *52*(2), 292–301. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2008.08.008

Hubber, P., Tytler, R., & Haslam, F. (2010). Teaching and learning about force with a representational focus: Pedagogy and teacher change. *Research in Science Education*, *40*, 5–28. https://doi.org/10.1007/s11165-009-9154-9

Huberty, C. J., Jordan, E. M., & Brandt, W. C. (2005). Cluster analysis in higher education research. In J. C. Smart (Hrsg.), *Higher Education. Handbook of Theory and Research* (S. 437–457). Springer. https://doi.org/10.1007/1-4020-3279-X_8

Huffman, J. A., Vignal, M., & Wilcox, B. R. (2020). Investigating upper-division students' interpretations of the Divergence Theorem. *Physics Education Research Conference Proceedings*, 222–227. https://doi.org/10.1119/perc.2020.pr.Huffman

Hyönä, J. (2010). The use of eye movements in the study of multimedia learning. *Learning and Instruction*, *20*(2), 172–176. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2009.02.013

IBM Corp. (2019). *IBM SPSS Statistics for Macintosh* (Version 26.0) [Software]. IBM Corp. https://www.ibm.com/

IBM Corp. (2020). *IBM SPSS Statistics for Macintosh* (Version 27.0) [Software]. IBM Corp. https://www.ibm.com/

IBM Corp. (2021). *IBM SPSS Statistics for Macintosh* (Version 28.0) [Software]. IBM Corp. https://www.ibm.com/

International Committee of Medical Journal Editors. (2023). *Recommendations: Defining the Role of Authors and Contributors*. http://www.icmje.org/recommendations/browse/roles-and-responsibilities/defining-the-role-of-authors-and-contributors.html

Jaarsma, T., Jarodzka, H., Nap, M., van Merriënboer, J. J. G., & Boshuizen, H. P. A. (2014). Expertise under the microscope. Processing histopathological slides. *Medical Education*, *48*(3), 292–300. https://doi.org/10.1111/medu.12385

Jarodzka, H., Holmqvist, K., & Gruber, H. (2017). Eye tracking in educational science: Theoretical frameworks and research agendas. *Journal of Eye Movement Research*, *10*(1). https://doi.org/10.16910/jemr.10.1.3

Johnson, H. L. (2012). Reasoning about variation in the intensity of change in covarying quantities involved in rate of change. *The Journal of Mathematical Behavior*, *31*(3), 313–330. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2012.01.001

Johnson, H. L., Hornbein, P., & Azeem, S. (2016). Investigating functions with a Ferris wheel. *The Mathematics Teacher*, *110*(5), 344–351. https://doi.org/10.5951/mathteacher.110.5.0344

Jones, S. R. (2020). Scalar and vector line integrals: A conceptual analysis and an initial investigation of student understanding. *The Journal of Mathematical Behavior*, *59*, 100801. https://doi.org//10.1016/j.jmathb.2020.100801

Jones, S. R. (2022). Multivariation and students' multivariational reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior*, *67*, 100991. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2022.100991

Jones, S. R., & Kuster, G. E. (2021). Examining students' variational reasoning in differential equations. *The Journal of Mathematical Behavior*, *64*, 100899. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2021.100899

Jung, K., & Lee, G. (2012). Developing a tutorial to address student difficulties in learning curl: A link between qualitative and mathematical reasoning. *Canadian Journal of Physics*, *90*(6), 565–572. https://doi.org/10.1139/p2012-054

Just, M. A., & Carpenter, P. A. (1976). Eye fixations and cognitive processes. *Cognitive Psychology*, *8*(4), 441–480. https://doi.org/10.1016/0010-0285(76)90015-3

Just, M. A., & Carpenter, P. A. (1980). A theory of reading: From eye fixations to comprehension. *Psychological Review*, *87*(4), 329–354. https://doi.org/10.1037/0033-295X.87.4.329

Kalyuga, S. (2011). Cognitive load theory: How many types of load does it really need? *Educational Psychology Review*, *23*, 1–19. https://doi.org/10.1007/s10648-010-9150-7

Kassambara, A., & Mundt, F. (2020). *factoextra. Extract and visualize the results of multivariate data analyses* [R-Paket Version 1.0.7]. https://CRAN.R-project.org/package=factoextra

Keehner, M., Montello, D. R., Hegarty, M., & Cohen, C. (2004). Effects of interactivity and spatial ability on the comprehension of spatial relations in a 3D computer visualization. *Proceedings of the annual meeting of the cognitive science society*, 1576.

Kertil, M. (2014). *Pre-service elementary mathematics teachers' understanding of derivative through a model development unit* [Dissertation, Middle East Technical University]. https://hdl.handle.net/11511/23389

Kertil, M. (2020). Covariational reasoning of prospective mathematics teachers. How do dynamic animations affect? *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, *11*(2), 312–342. https://doi.org/10.16949/turkbilmat.652481

Kirschner, P. A. (2002). Cognitive load theory: Implications of cognitive load theory on the design of learning. *Learning and Instruction*, *12*(1), 1–10. https://doi.org/10.1016/S0959-4752(01)00014-7

Kirschner, P. A., Sweller, J., & Clark, R. E. (2006). Why minimal guidance during instruction does not work: An analysis of the failure of constructivist, discovery, problem-based, experiential, and inquiry-based teaching. *Educational Psychologist*, *41*(2), 75–86. https://doi.org/10.1207/s15326985ep4102_1

Kirschner, P. A., Ayres, P., & Chandler, P. (2011). Contemporary cognitive load theory research: The good, the bad and the ugly. *Computers in Human Behavior*, *27*(1), 99–105. https://doi.org/10.1016/j.chb.2010.06.025

Klein, P., Viiri, J., Mozaffari, S., Dengel, A., & Kuhn, J. (2018). Instruction-based clinical eye-tracking study on the visual interpretation of divergence: How do students look at vector field plots? *Physical Review Physics Education Research*, *14*(1), 010116. https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.14.010116

Klein, P., Viiri, J., & Kuhn, J. (2019). Visual cues improve students' understanding of divergence and curl: Evidence from eye movements during reading and problem solving. *Physical Review Physics Education Research*, *15*(1), 010126. https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.15.010126

Klein, P., Lichtenberger, A., Küchemann, S., Becker, S., Kekule, M., Viiri, J., Baadte, C., Vaterlaus, A., & Kuhn, J. (2020). Visual attention while solving the test of understanding graphs in kinematics: An eye-tracking analysis. *European Journal of Physics*, *41*(2), 025701. https://doi.org/10.1088/1361-6404/ab5f51

Klein, P., Burkard, N., Hahn, L., Dahlkemper, M. N., Eberle, K., Jäger, T., & Herrlich, M. (2021a). Coordinating vector field equations and diagrams with a serious game in introductory physics. *European Journal of Physics*, *42*(4), 045801. https://doi.org/10.1088/1361-6404/abef5c

Klein, P., Hahn, L., & Kuhn, J. (2021b). Einfluss visueller Hilfen und räumlicher Fähigkeiten auf die graphische Interpretation von Vektorfeldern: Eine Eye-Tracking-Untersuchung. *Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften*, *27*(1), 181–201. https://doi.org/10.1007/s40573-021-00133-2

Klepsch, M., Schmitz, F., & Seufert, T. (2017). Development and validation of two instruments measuring intrinsic, extraneous, and germane cognitive load. *Frontiers in Psychology*, *8*, 1997. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2017.01997

Klepsch, M., & Seufert, T. (2020). Understanding instructional design effects by differentiated measurement of intrinsic, extraneous, and germane cognitive load. *Instructional Science*, *48*(1), 45–77. https://doi.org/10.1007/s11251-020-09502-9

Knight, R. D. (1995). The vector knowledge of beginning physics students. *The Physics Teacher*, *33*(2), 74–77. https://doi.org/10.1119/1.2344143

Kohl, P. B., Rosengrant, D., & Finkelstein, N. D. (2007). Strongly and weakly directed approaches to teaching multiple representation use in physics. *Physical Review Special Topics - Physics Education Research*, *3*(1), 010108. https://doi.org/10.1103/PhysRevSTPER.3.010108

Kohnle, A., & Passante, G. (2017). Characterizing representational learning: A combined simulation and tutorial on perturbation theory. *Physical Review Physics Education Research*, *13*(2), 020131. https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.13.020131

Kohnle, A., Ainsworth, S. E., & Passante, G. (2020). Sketching to support visual learning with interactive tutorials. *Physical Review Physics Education Research*, *16*(2), 020139. https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.16.020139

Konferenz der Fachbereiche Physik. (2011). Empfehlung der Konferenz der Fachbereiche Physik zum Umgang mit den Mathematikkenntnissen von Studienanfängern der Physik. https://www.kfp-physik.de/dokument/KFP-Empfehlung-Mathematikkenntnisse.pdf

Königsberger, K. (2004). *Analysis 2* (4. Aufl.). Springer. https://doi.org/10.1007/3-540-35077-2

Korsch, H. J. (2007). *Mathematische Ergänzungen zur Einführung in die Physik* (4. Aufl.). Binomi Verlag.

Kozma, R., & Russell, J. (2005). Students becoming chemists. Developing representational competence. In J. K. Gilbert (Hrsg.), *Visualization in science education* (S. 121–145). Springer. https://doi.org/10.1007/1-4020-3613-2_8

Krejtz, K., Duchowski, A. T., Krejtz, I., Kopacz, A., & Chrząstowski-Wachtel, P. (2016). Gaze transitions when learning with multimedia. *Journal of Eye Movement Research*, *9*(1). https://doi.org/10.16910/jemr.9.1.5

Krell, M. (2017). Evaluating an instrument to measure mental load and mental effort considering different sources of validity evidence. *Cogent Education*, *4*(1), 1280256. https://doi.org/10.1080/2331186X.2017.1280256

Krell, M., Xu, K. M., Rey, G. D., & Paas, F. G. W. C. (2022). Recent approaches for assessing cognitive load from a validity perspective. *Frontiers in Education*, *6*, 838422. https://doi.org/10.3389/feduc.2021.838422

Krey, O., & Schwanewedel, J. (2018). Lernen mit externen Repräsentationen. In D. Krüger, I. Parchmann & H. Schecker (Hrsg.), *Theorien in der naturwissenschaftsdidaktischen Forschung* (S. 159–175). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-662-56320-5_10

Krichevets, A. N., Shvarts, A. Y., & Chumachemko, D. V. (2014). Perceptual action of novices and experts in operating visual representations of a mathematical concept. *Psychology. Journal of Higher School of Economics*, *11*(3), 55–78.

Kriz, S., & Hegarty, M. (2007). Top-down and bottom-up influences on learning from animations. *International Journal of Human-Computer Studies*, *65*(11), 911–930. https://doi.org/10.1016/j.ijhcs.2007.06.005

Krüger, D., Parchmann, I., & Schecker, H. (Hrsg.). (2014). *Methoden in der naturwissenschaftsdidaktischen Forschung*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-37827-0

Kruger, J., & Dunning, D. (1999). Unskilled and unaware of it: How difficulties in recognizing one's own incompetence lead to inflated self-assessments. *Journal of Personality and Social Psychology*, *77*(6), 1121–1134. https://doi.org/10.1037/0022-3514.77.6.1121

Kubinger, K. D. (2003). On artificial results due to using factor analysis for dichotomous variables. *Psychology Science*, *45*(1), 106–110.

Küchemann, S., Malone, S., Edelsbrunner, P., Lichtenberger, A., Stern, E., Schumacher, R., Brünken, R., Vaterlaus, A., & Kuhn, J. (2021). Inventory for the assessment of representational competence of vector fields. *Physical Review Physics Education Research*, *17*(2), 020126. https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.17.020126

Kuckartz, U. (2018). *Qualitative Inhaltsanalyse. Methoden, Praxis, Computerunterstützung.* (4. Aufl.). Beltz Juventa.

Kulawiak, P. R., & Wilbert, J. (2017). Komplementäre Studiendesigns zur Evidenzbasierung in der Bildungswissenschaft. In R. Haring & J. Siegmüller (Hrsg.), *Evidenzbasierte Praxis in den Gesundheitsberufen: Chancen und Herausforderungen für Forschung und Anwendung* (S. 17–31). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-662-55377-0_2

Kumar, K., Bandyopadhyay, P., Singh, S., Dharodi, V. S., & Sen, A. (2023). Kelvin-Helmholtz instability in a compressible dust fluid flow. *Scientific Reports*, *13*(1), 3979. https://doi.org/10.1038/s41598-023-30992-3

Kuo, E., Hull, M. M., Gupta, A., & Elby, A. (2013). How students blend conceptual and formal mathematical reasoning in solving physics problems. *Science Education*, *97*(1), 32–57. https://doi.org/10.1002/sce.21043

Kuo, Y.-R., Won, M., Zadnik, M., Siddiqui, S., & Treagust, D. F. (2017). Learning optics with multiple representations: Not as simple as expected (D. Treagust, R. Duit & H. Fischer, Hrsg.). *Multiple representations in physics education. Models and modeling in science education*, 123–138. https://doi.org/10.1007/978-3-319-58914-5_6

Lai, M.-L., Tsai, M.-J., Yang, F.-Y., Hsu, C.-Y., Liu, T.-C., Lee, S. W.-Y., Lee, M.-H., Chiou, G.-L., Liang, J.-C., & Tsai, C.-C. (2013). A review of using eye-tracking technology in exploring learning from 2000 to 2012. *Educational Research Review*, *10*, 90–115. https://doi.org/10.1016/j.edurev.2013.10.001

Lehr, R. G. (2018). McNemar's Test. In S.-C. Chow (Hrsg.), *Encyclopedia of Biopharmaceutical Statistics* (4. Aufl., S. 1320–1325). CRC Press.

Lehrstuhl für Numerik und Geometrische Modellierung. (2018). *Vektoranalysis* [Vortragsfolien, Universität Stuttgart]. https://vhm.mathematik.uni-stuttgart.de/Vorlesungen/Vektoranalysis/Folien_Vektoranalysis.pdf

Leopold, C., & Leutner, D. (2012). Science text comprehension: Drawing, main idea selection, and summarizing as learning strategies. *Learning and Instruction*, *22*(1), 16–26. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2011.05.005

Leppink, J., Paas, F. G. W. C., van der Vleuten, C. P. M., van Gog, T., & van Merriënboer, J. J. G. (2013). Development of an instrument for measuring different types of cognitive load. *Behavior Research Methods*, *45*(4), 1058–1072. https://doi.org/10.3758/s13428-013-0334-1

Leppink, J., Paas, F. G. W. C., van Gog, T., van der Vleuten, C. P. M., & van Merriënboer, J. J. G. (2014). Effects of pairs of problems and examples on task performance and different types of cognitive load. *Learning and Instruction*, *30*, 32–42. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2013.12.001

Leutner, D., Leopold, C., & Sumfleth, E. (2009). Cognitive load and science text comprehension: Effects of drawing and mentally imagining text content. *Computers in Human Behavior*, *25*(2), 284–289. https://doi.org/10.1016/j.chb.2008.12.010

Li, J., & Singh, C. (2017). Investigating and improving introductory physics students' understanding of symmetry and Gauss's law. *European Journal of Physics*, *39*(1), 015702. https://doi.org/10.1088/1361-6404/aa8d55

Lincoln, J. (2017). Electric field patterns made visible with potassium permanganate. *The Physics Teacher*, *55*(2), 74–75. https://doi.org/10.1119/1.4974114

Lindner, M. A., Eitel, A., Thoma, G.-B., Dalehefte, I. M., Ihme, J. M., & Köller, O. (2014). Tracking the decision-making process in multiple-choice assessment: Evidence from eye movements. *Applied Cognitive Psychology*, *28*(5), 738–752. https://doi.org/10.1002/acp.3060

Lindsey, B. A., & Nagel, M. L. (2015). Do students know what they know? Exploring the accuracy of students' self-assessments. *Physical Review Special Topics - Physics Education Research*, *11*(2), 020103. https://doi.org/10.1103/PhysRevSTPER.11.020103

Linn, M. C., Lee, H.-S., Tinker, R., Husic, F., & Chiu, J. L. (2006). Teaching and assessing knowledge integration in science. *Science*, *313*(5790), 1049–1050. https://doi.org/10.1126/science.1131408

Liu, T.-C., Lin, Y.-C., & Kinshuk. (2010). The application of Simulation-Assisted Learning Statistics (SALS) for correcting misconceptions and improving understanding of correlation. *Journal of Computer Assisted Learning*, *26*(2), 143–158. https://doi.org/10.1111/j.1365-2729.2009.00330.x

Liu, H.-C., & Chuang, H.-H. (2011). An examination of cognitive processing of multimedia information based on viewers' eye movements. *Interactive Learning Environments*, *19*(5), 503–517. https://doi.org/10.1080/10494820903520123

Maechler, M., Rousseeuw, P., Struyf, A., Hubert, M., & Hornik, K. (2019). *cluster. Cluster analysis basics and extensions* [R-Paket]. https://CRAN.R-project.org/package=cluster

Mandal, G., Biswas, S. K., Saha, S., & Al Mamon, A. (2022). Dynamical system analysis of logotropic dark fluid with a power law in the rest-mass energy density. *Physics of the Dark Universe*, *35*, 100970. https://doi.org/10.1016/j.dark.2022.100970

Martsching, W. (2019). *Identifying potential relationships between fixation patterns and in-the-moment ways of reasoning* [Masterarbeit, University of Central Arkansas].

Mason, L., Lowe, R., & Tornatora, M. C. (2013). Self-generated drawings for supporting comprehension of a complex animation. *Contemporary Educational Psychology*, *38*(3), 211–224. https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2013.04.001

Mason, S., & Merga, M. (2018). Integrating publications in the social science doctoral thesis by publication. *Higher Education Research & Development*, *37*(7), 1454–1471. https://doi.org/10.1080/07294360.2018.1498461

Massachusetts Institute of Technology. (2023). *2-D Vector Field Simulation*. https://web.mit.edu/jorloff/www/chaosTalk/falstad/vector/index.html

May, D. B., & Etkina, E. (2002). College physics students' epistemological self-reflection and its relationship to conceptual learning. *American Journal of Physics*, *70*(12), 1249–1258. https://doi.org/10.1119/1.1503377

Mayer, R. E. (2009). *Multimedia learning* (2. Aufl.). Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511811678

Mayer, R. E. (2005). Cognitive Theory of Multimedia Learning. In R. E. Mayer (Hrsg.), *The Cambridge Handbook of Multimedia Learning* (S. 31–48). Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511816819.004

Mayer, R. E. (2017). Using multimedia for e-learning. *Journal of Computer Assisted Learning*, *33*(5), 403–423. https://doi.org/10.1111/jcal.12197

Mayer, R. E., & Fiorella, L. (2014). Principles for reducing extraneous processing in multimedia learning: Coherence, signaling, redundancy, spatial contiguity, and temporal contiguity principles. In R. E. Mayer (Hrsg.), *The Cambridge Handbook of Multimedia Learning* (2. Aufl., S. 279–315). Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9781139547369.015

Mayring, P. (2015). *Qualitative Inhaltsanalyse. Grundlagen und Techniken* (12. Aufl.). Beltz.

McDonald, J. H. (2014). *Handbook of biological statistic* (3. Aufl.). Sparky House Publishing.

McElhaney, K. W., Chang, H.-Y., Chiu, J. L., & Linn, M. C. (2015). Evidence for effective uses of dynamic visualisations in science curriculum materials. *Studies in Science Education*, *51*(1), 49–85. https://doi.org/10.1080/03057267.2014.984506

McNemar, Q. (1947). Note on the sampling error of the difference between correlated proportions or percentages. *Psychometrika*, *12*(2), 153–157. https://doi.org/10.1007/BF02295996

Meyer, J. H. F., & Land, R. (2005). Threshold concepts and troublesome knowledge (2). Epistemological considerations and a conceptual framework for teaching and learning. *Higher Education*, *49*, 373–388. https://doi.org/10.1007/s10734-004-6779-5

Michler, G., & Kowalsky, H.-J. (2008). *Lineare Algebra* (12. Aufl.). Walter de Gruyter.

Moher, D., Liberati, A., Tetzlaff, J., & Altman, D. G. (2011). Bevorzugte Report Items für systematische Übersichten und Meta-Analysen. Das PRISMA-Statement. *Deutsche Medizinische Wochenschrift*, *136*(08), e9–e15. https://doi.org/10.1055/s-0031-1272978

Moore, K. C., Paoletti, T., & Musgrave, S. (2013). Covariational reasoning and invariance among coordinate systems. *The Journal of Mathematical Behavior*, *32*(3), 461–473. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.05.002

Moosbrugger, H., & Kelava, A. (2020). *Testtheorie und Fragebogenkonstruktion* (3. Aufl.). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-662-61532-4

Moreno, R. (2005). Instructional technology: Promise and pitfalls. In L. Pytlikzillig, M. Bodvarsson & R. Bruning (Hrsg.), *Technology-based education: Bringing researchers and practitioners together* (S. 1–19). Information Age Publishing.

Moynihan, R. (2018). *Developing and assessing student's conceptual understanding of electrostatics in upper secondary physics* [Dissertation, Dublin City University]. https://doras.dcu.ie/22504/1/Richard_Moynihan_PhD.pdf

Mozaffari, S., Al-Naser, M., Klein, P., Küchemann, S., Kuhn, J., Widmann, T., & Dengel, A. (2020). Classification of visual strategies in physics vector field problem-solving. *Proceedings of the 12th International Conference on Agents and Artificial Intelligence (ICAART 2020)*, *2*, 257–267. https://doi.org/10.5220/0009173902570267

Mozaffari, S., Klein, P., Al-Naser, M., Küchemann, S., Kuhn, J., Widmann, T., & Dengel, A. (2021). Quantifying Gaze-Based Strategic Patterns in Physics Vector Field Divergence. In A. P. Rocha, L. Steels & J. van den Herik (Hrsg.), *Agents and Artificial Intelligence. ICAART 2020. Lecture Notes in Computer Science* (S. 465–481). https://doi.org/10.1007/978-3-030-71158-0_22

Nguyen, N.-L., & Meltzer, D. E. (2003). Initial understanding of vector concepts among students in introductory physics courses. *American Journal of Physics*, *71*(6), 630–638. https://doi.org/10.1119/1.1571831

Nguyen, D.-H., & Rebello, N. S. (2011). Students' difficulties with multiple representations in introductory mechanics. *US-China Education Review*, *8*(5), 559–569.

Nieminen, P., Savinainen, A., & Viiri, J. (2010). Force Concept Inventory-based multiple-choice test for investigating students' representational consistency. *Physical Review Special Topics - Physics Education Research*, *6*(2), 020109. https://doi.org/10.1103/PhysRevSTPER.6.020109

Nieminen, P., Savinainen, A., & Viiri, J. (2017). Learning about forces using multiple representations. In D. Treagust, R. Duit & H. Fischer (Hrsg.), *Multiple representations in physics education. Models and modeling in science education* (S. 163–182). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-58914-5_8

Oehrtman, M., Carlson, M. P., & Thompson, P. W. (2008). Foundational reasoning abilities that promote coherence in students' function understanding. In M. P. Carlson & C. Rasmussen (Hrsg.),

Making the connection. Research and teaching in undergraduate mathematics education (S. 27–41). Mathematical Association of America. https://doi.org/10.5948/UPO9780883859759.004

Olsho, A., Zimmerman, C. M., & Brahmia, S. W. (2023). *A framework for characterizing covariational reasoning in physics* [arXiv]. https://doi.org/10.48550/arXiv.2310.06941

Opfermann, M., Schmeck, A., & Fischer, H. E. (2017). Multiple representations in physics and science education. Why should we use them? In D. Treagust, R. Duit & H. Fischer (Hrsg.), *Multiple representations in physics education. Models and modeling in science education* (S. 1–22). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-58914-5_1

Ozgun, O., & Sevgi, L. (2015). VectGUI: A MATLAB-based simulation tool [Testing ourselves]. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, *57*(3), 113–118. https://doi.org/10.1109/MAP.2015.2463152

Paas, F. G. W. C., & van Merriënboer, J. J. G. (1994). Instructional control of cognitive load in the training of complex cognitive tasks. *Educational Psychology Review*, *6*, 351–371. https://doi.org/10.1007/BF02213420

Paas, F. G. W. C., Tuovinen, J. E., Tabbers, H., & van Gerven, P. W. M. (2003). Cognitive load measurement as a means to advance cognitive load theory. *Educational Psychologist*, *38*(1), 63–71. https://doi.org/10.1207/S15326985EP3801_8

Page, M. J., McKenzie, J. E., Bossuyt, P. M., Boutron, I., Hoffmann, T. C., Mulrow, C. D., Shamseer, L., Tetzlaff, J. M., Akl, E. A., Brennan, S. E., Chou, R., Glanville, J., Grimshaw, J. M., Hróbjartsson, A., Lalu, M. M., Li, T., Loder, E. W., Mayo-Wilson, E., McDonald, S., … Moher, D. (2021). The PRISMA 2020 statement: An updated guideline for reporting systematic reviews. *International Journal of Surgery*, *88*, 105906. https://doi.org/10.1016/j.ijsu.2021.105906

Paivio, A. (1990). *Mental representations: A dual coding approach*. Oxford University Press. https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780195066661.001.0001

Paoletti, T., & Moore, K. C. (2018). A covariational understanding of function. Putting a horse before the cart. *For the Learning of Mathematics*, *38*(3), 37–43.

Papula, L. (2008). *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 3. Vektoranalysis, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Mathematische Statistik, Fehler- und Ausgleichsrechnung* (5. Aufl.). Vieweg+Teubner.

Park, B., Plass, J. L., & Brünken, R. (2014). Cognitive and affective processes in multimedia learning. *Learning and Instruction*, *29*, 125–127. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2013.05.005

Park, B., Korbach, A., & Brünken, R. (2015a). Do learner characteristics moderate the seductive-details-effect? A cognitive-load-study using eye-tracking. *Journal of Educational Technology & Society*, *18*(4), 24–36.

Park, B., Knörzer, L., Plass, J. L., & Brünken, R. (2015b). Emotional design and positive emotions in multimedia learning: An eyetracking study on the use of anthropomorphisms. *Computers & Education*, *86*, 30–42. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2015.02.016

Pepper, R. E., Chasteen, S. V., Pollock, S. J., & Perkins, K. K. (2010). Our best juniors still struggle with Gauss's Law. Characterizing their difficulties. *AIP Conference Proceedings*, *1289*(1), 245–248. https://doi.org/10.1063/1.3515212

Pepper, R. E., Chasteen, S. V., Pollock, S. J., & Perkins, K. K. (2012). Observations on student difficulties with mathematics in upper-division electricity and magnetism. *Physical Review Special Topics - Physics Education Research*, *8*(1), 010111. https://doi.org/10.1103/PhysRevSTPER.8.010111

Pfeiffer, T. G. (2008). *Visualisierung zeitabhängiger Vektorfelder durch Flächenstrukturen*. https://nablux.net/tgp/works/pfeiffer_flowvis.pdf

Piedmont, R. L. (2014). Inter-item correlations. In A. C. Michalos (Hrsg.), *Encyclopedia of quality of life and well-being research* (S. 3303–3304). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0753-5_1493

Pitarma, R. A., Ramos, J. E., & Carvalho, M. G. (2005). Numerical and experimental validation procedures for the simulation of refrigerated rooms. In C. A. Brebbia & G. M. Carlomagno (Hrsg.), *Computational Methods and Experimental Measurements XII*. WIT Press.

Plass, J. L., & Kaplan, U. (2016). Emotional design in digital media for learning. In S. Tettegah & M. Gartmeier (Hrsg.), *Emotions, technology, design, and learning* (S. 131–161). Academic Press. https://doi.org/10.1016/B978-0-12-801856-9.00007-4

Ponce Campuzano, J. C., Roberts, A. P., Matthews, K. E., Wegener, M. J., Kenny, E. P., & McIntyre, T. J. (2019). Dynamic visualization of line integrals of vector fields. A didactic proposal. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *50*(6), 934–949. https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1510554

Popa, L., Selejan, O., Scott, A., Mureşanu, D. F., Balea, M., & Rafila, A. (2015). Reading beyond the glance: Eye tracking in neurosciences. *Neurological Sciences*, *36*(5), 683–688. https://doi.org/10.1007/s10072-015-2076-6

Porst, R. (2014). Arten von Skalen. In *Fragebogen: Ein Arbeitsbuch* (S. 51–67). VS Verlag für Sozialwissenschaften. https://doi.org/10.1007/978-3-531-92884-5_5

Putranta, H., Jumadi & Wilujeng, I. (2019). Physics learning by PhET simulation-assisted using problem based learning (PBL) model to improve students' critical thinking skills in work and energy chapters in MAN 3 Sleman. *Asia - Pacific Forum on Science Learning and Teaching*, *20*(1), 1–44.

R Core Team. (2021). *R. A Language and Environment for Statistical Computing* [Software]. R Foundation for Statistical Computing. https://www.R-project.org/

Rabe, C., Drews, V., Hahn, L., & Klein, P. (2022). Einsatz von multiplen Repräsentationsformen zur qualitativen Beschreibung realer Phänomene der Fluiddynamik. In H. Grötzebauch & S. Heinicke (Hrsg.), *PhyDid B, Didaktik der Physik, Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung 2022* (S. 71–77).

Rakoczi, G. (2012). Eye Tracking in Forschung und Lehre. Möglichkeiten und Grenzen eines vielversprechenden Erkenntnismittels. In G. Csanyi, F. Reichl & A. Steiner (Hrsg.), *Digitale Medien - Werkzeuge für exzellente Forschung und Lehre.* (S. 87–98). Waxmann. https://doi.org/10.25656/01:8301

Rasch, B., Hofmann, W., Friese, M., & Naumann, E. (2010). *Quantitative Methoden 2. Einführung in die Statistik für Psychologen und Sozialwissenschaftler* (3. Aufl.). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-05270-5

Rasch, B., Friese, M., Hofmann, W., & Naumann, E. (2014). *Quantitative Methoden 1. Einführung in die Statistik für Psychologen und Sozialwissenschaftler* (4. Aufl.). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-662-43524-3

Rathore, S., & Singh, S. S. (2023). Dynamical system analysis of interacting dark energy in LRS Bianchi type I cosmology. *Scientific Reports*, *13*(1), 13980. https://doi.org/10.1038/s41598-023-40457-2

Rau, M. A. (2017). Conditions for the effectiveness of multiple visual representations in enhancing STEM learning. *Educational Psychology Review*, *29*(4), 717–761. https://doi.org/10.1007/s10648-016-9365-3

Rau, M. A. (2018a). Making connections among multiple visual representations: How do sense-making skills and perceptual fluency relate to learning of chemistry knowledge? *Instructional Science*, *46*(2), 209–243. https://doi.org//10.1007/s11251-017-9431-3

Rau, M. A. (2018b). Sequencing support for sense making and perceptual induction of connections among multiple visual representations. *Journal of Educational Psychology*, *110*(6), 811–833. https://doi.org/10.1037/edu0000229

Rau, M. A., & Wu, S. P. W. (2018). Combining instructional activities for sense-making processes and perceptual-induction processes involved in connection-making among multiple visual representations. *Cognition and Instruction*, *36*(4), 361–395. https://doi.org/10.1080/07370008.2018.1494179

Razali, N. M., & Wah, Y. B. (2011). Power comparisons of Shapiro-Wilk, Kolmogorov-Smirnov, Lilliefors and Anderson-Darling tests. *Journal of Statistical Modeling and Analytics*, *2*(1), 21–33.

Rebello, N. S. (2012). How accurately can students estimate their performance on an exam and how does this relate to their actual performance on the exam? *AIP Conference Proceedings*, *1413*(1), 315–318. https://doi.org/10.1063/1.3680058

Redish, E. F. (2006). Problem solving and the use of math in physics courses. *Proceedings of the conference World View on Physics Education in 2005: Focusing on Change*, 1–10.

Rey, G. D., Beege, M., Nebel, S., Wirzberger, M., Schmitt, T. H., & Schneider, S. (2019). A meta-analysis of the segmenting effect. *Educational Psychology Review*, *31*, 389–419. https://doi.org/10.1007/s10648-018-9456-4

Römer, H., & Forger, M. (1993). *Elementare Feldtheorie: Elektrodynamik, Hydrodynamik, spezielle Relativitätstheorie*. Wiley-VCH.

Rosengrant, D., Etkina, E., & van Heuvelen, A. (2007). An overview of recent research on multiple representations. *AIP Conference Proceedings*, *883*(1), 149–152. https://doi.org/10.1063/1.2508714

Rosengrant, D., van Heuvelen, A., & Etkina, E. (2005). Free-Body Diagrams: Necessary or sufficient? *AIP Conference Proceedings*, *790*(1), 177–180. https://doi.org/10.1063/1.2084730

Rosengrant, D., van Heuvelen, A., & Etkina, E. (2006). Case study: Students' use of multiple representations in problem solving. *AIP Conference Proceedings*, *818*(1), 49–52. https://doi.org/10.1063/1.2177020

Rosengrant, D., van Heuvelen, A., & Etkina, E. (2009). Do students use and understand free-body diagrams? *Physical Review Special Topics - Physics Education Research*, *5*(1), 010108. https://doi.org/10.1103/PhysRevSTPER.5.010108

Rousseeuw, P. J. (1987). Silhouettes: A graphical aid to the interpretation and validation of cluster analysis. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, *20*, 53–65. https://doi.org/10.1016/0377-0427(87)90125-7

Ruf, V., Küchemann, S., Kuhn, J., & Klein, P. (2022). Comparison of written and spoken instruction to foster coordination between diagram and equation in undergraduate physics education. *Human Behavior and Emerging Technologies*, *2022*, 5860936. https://doi.org/10.1155/2022/5860936

Ruiz-Primo, M. A., Briggs, D., Iverson, H., Talbot, R., & Shepard, L. A. (2011). Impact of undergraduate science course innovations on learning. *Science*, *331*(6022), 1269–1270. https://doi.org/10.1126/science.1198976

Rütter, T. (1973). *Formen der Testaufgabe: Eine Einführung für didaktische Zwecke*. Beck.

Ruxton, G. D. (2006). The unequal variance t-test is an underused alternative to student's t-test and the Mann–Whitney U test. *Behavioral Ecology*, *17*(4), 688–690. https://doi.org/10.1093/beheco/ark016

Sağlam, M., & Millar, R. (2006). Upper high school students' understanding of electromagnetism. *International Journal of Science Education*, *28*(5), 543–566. https://doi.org/10.1080/09500690500339613

Salvucci, D. D., & Goldberg, J. H. (2000). Identifying fixations and saccades in eye-tracking protocols. *Proceedings of the 2000 symposium on Eye tracking research & applications*, 71–78. https://doi.org/10.1145/355017.355028

Saß, S., Wittwer, J., Senkbeil, M., & Köller, O. (2012). Pictures in test items: Effects on response time and response correctness. *Applied Cognitive Psychology*, *26*(1), 70–81. https://doi.org/10.1002/acp.1798

Scheid, J., Müller, A., Hettmannsperger, R., & Schnotz, W. (2019). Improving learners' representational coherence ability with experiment-related representational activity tasks. *Physical Review Physics Education Research*, *15*(1), 010142. https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.15.010142

Scheiter, K., & Eitel, A. (2015). Signals foster multimedia learning by supporting integration of highlighted text and diagram elements. *Learning and Instruction*, *36*(1), 11–26. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2014.11.002

Scheiter, K., Schleinschok, K., & Ainsworth, S. E. (2017). Why sketching may aid learning from science texts: Contrasting sketching with written explanations. *Topics in Cognitive Science*, *9*(4), 866–882. https://doi.org/10.1111/tops.12261

Schermerhorn, B. P., & Thompson, J. R. (2019a). Physics students' construction and checking of differential volume elements in an unconventional spherical coordinate system. *Physical Review*

Physics Education Research, *15*(1), 010112. https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.15.010112

Schermerhorn, B. P., & Thompson, J. R. (2019b). Physics students' construction of differential length vectors in an unconventional spherical coordinate system. *Physical Review Physics Education Research*, *15*(1), 010111. https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.15.010111

Schmidgall, S. P., Eitel, A., & Scheiter, K. (2019). Why do learners who draw perform well? Investigating the role of visualization, generation and externalization in learner-generated drawing. *Learning and Instruction*, *60*, 138–153. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2018.01.006

Schnotz, W., & Bannert, M. (2003). Construction and interference in learning from multiple representation. *Learning and Instruction*, *13*(2), 141–156. https://doi.org/10.1016/S0959-4752(02)00017-8

Schnotz, W., Baadte, C., Müller, A., & Rasch, R. (2010). Creative thinking and problem solving with depictive and descriptive representations. In L. Verschaffel, E. De Corte, T. de Jong & J. Elen (Hrsg.), *Use of representations in reasoning and problem solving. Analysis and improvement* (S. 11–35). Routledge.

Schroeder, N. L., & Cenkci, A. T. (2018). Spatial contiguity and spatial split-attention effects in multimedia learning environments: A meta-analysis. *Educational Psychology Review*, *30*, 679–701. https://doi.org/10.1007/s10648-018-9435-9

Schüler, A. (2017). Investigating gaze behavior during processing of inconsistent text-picture information: Evidence for text-picture integration. *Learning and Instruction*, *49*, 218–231. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2017.03.001

Schüler, A., Scheiter, K., & van Genuchten, E. (2011). The role of working memory in multimedia instruction. Is working memory working during learning from text and pictures? *Educational Psychology Review*, *23*(3), 389–411. https://doi.org/10.1007/s10648-011-9168-5

Schulz, K. F., Altman, D. G., & Moher, D. (2010). CONSORT 2010 statement. Updated guidelines for reporting parallel group randomised trials. *Journal of Pharmacology and Pharmacotherapeutics*, *1*(2), 100–107. https://doi.org/10.4103/0976-500X.72352

Schwamborn, A., Mayer, R. E., Thillmann, H., Leopold, C., & Leutner, D. (2010). Drawing as a generative activity and drawing as a prognostic activity. *Journal of Educational Psychology*, *102*(4), 872–879. https://doi.org/10.1037/a0019640

Schweinberger, M., Watzka, B., & Girwidz, R. (2023). Eye tracking as feedback tool in physics teacher education. *Frontiers in Education*, *8*, 1140272. https://doi.org/10.3389/feduc.2023.1140272

Scott, T. F., Schumayer, D., & Gray, A. R. (2012). Exploratory factor analysis of a Force Concept Inventory data set. *Physical Review Special Topics - Physics Education Research*, *8*(2), 020105. https://doi.org/10.1103/PhysRevSTPER.8.020105

Seiler, W. (2012). *Mathematische Visualisierung* [Skriptum, Universität Mannheim]. http://hilbert.math.uni-mannheim.de/~seiler/MV15/Kap1.pdf

Seufert, T. (2003). Supporting coherence formation in learning from multiple representations. *Learning and Instruction*, *13*(2), 227–237. https://doi.org/10.1016/S0959-4752(02)00022-1

Seufert, T., & Brünken, R. (2006). Cognitive load and the format of instructional aids for coherence formation. *Applied Cognitive Psychology*, *20*(3), 321–331. https://doi.org/10.1002/acp.1248

Shah, P., & Miyake, A. (1996). The separability of working memory resources for spatial thinking and language processing: An individual differences approach. *Journal of Experimental Psychology: General*, *125*(1), 4–27. https://doi.org/10.1037/0096-3445.125.1.4

Shareghi Najar, A., Mitrovic, A., & Neshatian, K. (2015). Eye tracking and studying examples: How novices and advanced learners study SQL examples. *Journal of Computing and Information Technology*, *23*(2), 171–190. https://doi.org/10.2498/cit.1002627

Shellman, S. M., & Turan, K. (2006). Do simulations enhance student learning? An empirical evaluation of an IR simulation. *Journal of Political Science Education*, *2*(1), 19–32. https://doi.org/10.1080/15512160500484168

Sherin, B. L. (2001). How students understand physics equations. *Cognition and Instruction*, *19*(4), 479–541.

Singh, C. (2006). Student understanding of symmetry and Gauss's law of electricity. *American Journal of Physics*, *74*(10), 923–936. https://doi.org/10.1119/1.2238883

Singh, C., & Maries, A. (2013). Core graduate courses: A missed learning opportunity? *AIP Conference Proceedings*, *1513*, 382–385. https://doi.org/10.1063/1.4789732

Sirnoorkar, A., Mazumdar, A., & Kumar, A. (2020). Towards a content-based epistemic measure in physics. *Physical Review Physics Education Research*, *16*(1), 010103. https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.16.010103

Skuballa, I. T., Fortunski, C., & Renkl, A. (2015). An eye movement pre-training fosters the comprehension of processes and functions in technical systems. *Frontiers in Psychology*, *6*, 598. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2015.00598

Slavin, R. E. (2002). Evidence-based education policies: Transforming educational practice and research. *Educational Researcher*, *31*(7), 15–21. https://doi.org/10.3102/0013189X031007015

Smith, E. M. (2014). *Student & textbook presentation of divergence* [Masterarbeit, Oregon State University]. Scholars Archive at OSU. http://hdl.handle.net/1957/54925

Sohn, Y. W., & Doane, S. M. (2004). Memory processes of flight situation awareness. Interactive roles of working memory capacity, long-term working memory, and expertise. *Human Factors*, *46*(3), 461–475. https://doi.org/10.1518/hfes.46.3.461.50392

Sonntag, D., Albuquerque, G., Magnor, M., & Bodensiek, O. (2019). Hybrid learning environments by data-driven augmented reality. *Procedia Manufacturing*, *31*, 32–37. https://doi.org/10.1016/j.promfg.2019.03.006

Spanjers, I. A. E., van Gog, T., & van Merriënboer, J. J. G. (2010). A theoretical analysis of how segmentation of dynamic visualizations optimizes students' learning. *Educational Psychology Review*, *22*, 411–423. https://doi.org/10.1007/s10648-010-9135-6

Speece, D. L. (1994). Cluster analysis in perspective. *Exceptionality*, *5*(1), 31–44. https://doi.org/10.1207/s15327035ex0501_3

Statistisches Bundesamt. (2024). Studienanfänger/-innen im 1. Fachsemester nach Fächergruppen. https://www.destatis.de/DE/Themen/Gesellschaft-Umwelt/Bildung-Forschung-Kultur/Hochschulen/Tabellen/studierende-erstes-fs-faechergruppen.html

Stevens, I. E., Paoletti, T., Moore, K. C., Liang, B., & Hardison, H. (2017). Principles for designing tasks that promote covariational reasoning. *Proceedings of the 20th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*, 928–936.

Stieff, M. (2011). Improving representational competence using molecular simulations embedded in inquiry activities. *Journal of Research in Science Teaching*, *48*(10), 1137–1158. https://doi.org/10.1002/tea.20438

Stieff, M., & McCombs, M. (2006). Increasing representational fluency with visualization tools. *Proceedings of the 7th international conference on Learning Sciences*, 730–736.

Stone, N. J. (2000). Exploring the relationship between calibration and self-regulated learning. *Educational Psychology Review*, *12*, 437–475. https://doi.org/10.1023/A:1009084430926

Straube, A. V., Pagès, J. M., Ortiz-Ambriz, A., Tierno, P., Ignés-Mullol, J., & Sagués, F. (2018). Assembly and transport of nematic colloidal swarms above photo-patterned defects and surfaces. *New Journal of Physics*, *20*(7), 075006. https://doi.org/10.1088/1367-2630/aac3c6

Strohmaier, A. R., MacKay, K. J., Obersteiner, A., & Reiss, K. M. (2020). Eye-tracking methodology in mathematics education research: A systematic literature review. *Educational Studies in Mathematics*, *104*, 147–200. https://doi.org/10.1007/s10649-020-09948-1

Susac, A., Bubic, A., Martinjak, P., Planinic, M., & Palmovic, M. (2017). Graphical representations of data improve student understanding of measurement and uncertainty: An eye-tracking study. *Physical Review Physics Education Research*, *13*(2), 020125. https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.13.020125

Susac, A., Bubic, A., Kazotti, E., Planinic, M., & Palmovic, M. (2018a). Student understanding of graph slope and area under a graph: A comparison of physics and nonphysics students. *Physical Review Physics Education Research*, *14*(2), 020109. https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.14.020109

Susac, A., Planinic, M., Klemencic, D., & Milin Sipus, Z. (2018b). Using the Rasch model to analyze the test of understanding of vectors. *Physical Review Physics Education Research*, *14*(2), 023101. https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.14.023101

Susac, A., Planinic, M., Bubic, A., Jelicic, K., & Palmovic, M. (2023). Effect of representation format on conceptual question performance and eye-tracking measures. *Physical Review Physics Education Research*, *19*(2), 020114. https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.19.020114

Sutopo & Waldrip, B. (2014). Impact of a representational approach on students' reaspning and conceptual understanding in learning mechanics. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *12*, 741–765. https://doi.org/10.1007/s10763-013-9431-y

Sweller, J. (2005). Implications of Cognitive Load Theory for multimedia learning. In R. E. Mayer (Hrsg.), *The Cambridge Handbook of Multimedia Learning* (S. 19–30). Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511816819.003

Sweller, J. (2010). Element interactivity and intrinsic, extraneous, and germane cognitive load. *Educational Psychology Review*, *22*(2), 123–138. https://doi.org/10.1007/s10648-010-9128-5

Sweller, J., van Merriënboer, J. J. G., & Paas, F. G. W. C. (1998). Cognitive architecture and instructional design. *Educational Psychology Review*, *10*, 251–296. https://doi.org/10.1023/A:1022193728205

Sweller, J., Ayres, P., & Kalyuga, S. (2011). *Cognitive Load Theory*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-8126-4

Sweller, J., van Merriënboer, J. J. G., & Paas, F. G. W. C. (2019). Cognitive architecture and instructional design: 20 years later. *Educational Psychology Review*, *31*, 261–292. https://doi.org/10.1007/s10648-019-09465-5

Tabachnick, B. G., & Fidell, L. S. (2019). *Using multivariate statistics* (7. Aufl.). Pearson.

The University of Queensland. (2023). *Vector Fields*. https://teaching.smp.uq.edu.au/scims/Adv_calculus/Vector_field.html

Thees, M., Kapp, S., Strzys, M. P., Beil, F., Lukowicz, P., & Kuhn, J. (2020). Effects of augmented reality on learning and cognitive load in university physics laboratory courses. *Computers in Human Behavior*, *108*, 106316. https://doi.org/10.1016/j.chb.2020.106316

Thomaneck, A., Vollstedt, M., & Schindler, M. (2022). Students' perception of change in graphs. An eye-tracking study. In J. Hodgen, E. Geraniou, G. Bolondi & F. Ferretti (Hrsg.), *Proceedings of the Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (S. 4352–4359). Free University of Bolzano.

Thompson, S. P. (1878). A study in magnetism. *Nature*, *19*(474), 79–84. https://doi.org/10.1038/019079a0

Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (Hrsg.), *Compendium for research in mathematics education* (S. 421–456). National Council of Teachers of Mathematics.

Tobii AB. (2020). *Tobii Studio* (Version 3.4.8) [Software]. Tobii AB. https://www.tobii.com/

Tobii AB. (2022). *Tobii Pro Lab* (Version 1.204) [Software]. Tobii AB. https://www.tobii.com/

Tsai, M.-J., Hou, H.-T., Lai, M.-L., Liu, W.-Y., & Yang, F.-Y. (2012). Visual attention for solving multiple-choice science problem: An eye-tracking analysis. *Computers & Education*, *58*(1), 375–385. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2011.07.012

Unver, V., Basak, T., Watts, P., Gaioso, V., Moss, J., Tastan, S., Iyigun, E., & Tosun, N. (2017). The reliability and validity of three questionnaires: The student satisfaction and self-confidence in learning scale, simulation design scale, and educational practices questionnaire. *Contemporary Nurse*, *53*(1), 60–74. https://doi.org/10.1080/10376178.2017.1282319

Urhahne, D., & Harms, U. (2006). Instruktionale Unterstützung beim Lernen mit Computersimulationen. *Unterrichtswissenschaft*, *34*(4), 358–377. https://doi.org/10.25656/01:5523

Urhahne, D., Nick, S., & Schanze, S. (2009). The effect of three-dimensional simulations on the understanding of chemical structures and their properties. *Research in Science Education*, *39*, 495–513. https://doi.org/10.1007/s11165-008-9091-z

Van der Meij, J., & de Jong, T. (2011). The effects of directive self-explanation prompts to support active processing of multiple representations in a simulation-based learning environment. *Journal of Computer Assisted Learning*, *27*(5), 411–423. https://doi.org/10.1111/j.1365-2729.2011.00411.x

Van Deventer, J., & Wittmann, M. C. (2007). Comparing student use of mathematical and physical vector representations. *AIP Conference Proceedings*, *951*(1), 208–211. https://doi.org/10.1063/1.2820935

Van Gog, T., Paas, F. G. W. C., & van Merriënboer, J. J. G. (2005). Uncovering expertise-related differences in troubleshooting performance: Combining eye movement and concurrent verbal protocol data. *Applied Cognitive Psychology*, *19*(2), 205–221. https://doi.org/10.1002/acp.1112

Van Gog, T., & Paas, F. G. W. C. (2008). Instructional efficiency: Revisiting the original construct in educational research. *Educational Psychologist*, *43*(1), 16–26. https://doi.org/10.1080/00461520701756248

Van Gog, T., Kester, L., Nievelstein, F., Giesbers, B., & Paas, F. G. W. C. (2009). Uncovering cognitive processes. Different techniques that can contribute to cognitive load research and instruction. *Computers in Human Behavior*, *25*(2), 325–331. https://doi.org/10.1016/j.chb.2008.12.021

Van Meter, P., & Garner, J. (2005). The promise and practice of learner-generated drawing: Literature review and synthesis. *Educational Psychology Review*, *17*, 285–325. https://doi.org/10.1007/s10648-005-8136-3

Van Meter, P., Aleksic, M., Schwartz, A., & Garner, J. (2006). Learner-generated drawing as a strategy for learning from content area text. *Contemporary Educational Psychology*, *31*(2), 142–166. https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2005.04.001

Wagner, J. (2016). *Einstieg in die Hochschulmathematik. Verständlich erklärt vom Abiturniveau aus*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-662-47513-3

Wallace, C. S., & Chasteen, S. V. (2010). Upper-division students' difficulties with Ampère's law. *Physical Review Special Topics - Physics Education Research*, *6*(2), 020115. https://doi.org/10.1103/PhysRevSTPER.6.020115

Ward, J. H. (1963). Hierarchical grouping to optimize an objective function. *Journal of the American Statistical Association*, *58*(301), 236–244. https://doi.org/10.2307/2282967

Weber, E., & Thompson, P. W. (2014). Students' images of two-variable functions and their graphs. *Educational Studies in Mathematics*, *87*, 67–85. https://doi.org/10.1007/s10649-014-9548-0

Wedel, M., & Pieters, R. (2008). A review of eye-tracking research in marketing. In N. K. Malhotra (Hrsg.), *Review of Marketing Research* (S. 123–147). Emerald Group Publishing. https://doi.org/10.1108/S1548-6435(2008)0000004009

Welch, B. L. (1947). The generalization of 'student's' problem when several different population varlances are involved. *Biometrika*, *34*(1-2), 28–35. https://doi.org/10.2307/2332510

Wendt, C., Rathmann, A., & Pohlenz, P. (2016). Erwartungshaltungen Studierender im ersten Semester. Implikationen für die Studieneingangsphase. In T. Brahm, T. Jenert & D. Euler (Hrsg.), *Pädagogische Hochschulentwicklung. Von der Programmatik zur Implementierung* (S. 221–237). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-658-12067-2_14

Wieman, C. E. (2007). Why not try a scientific approach to science education? *Change: The Magazine of Higher Learning*, *39*(5), 9–15. https://doi.org/10.3200/CHNG.39.5.9-15

Wieman, C. E., Adams, W. K., & Perkins, K. K. (2008). PhET: Simulations that enhance learning. *Science*, *322*(5902), 682–683. https://doi.org/10.1126/science.1161948

Wieman, C. E., Adams, W. K., Loeblein, P., & Perkins, K. K. (2010). Teaching physics using PhET simulations. *The Physics Teacher*, *48*(4), 225–227. https://doi.org/10.1119/1.3361987

Williamson, V. M., & Abraham, M. R. (1995). The effects of computer animation on the particulate mental models of college chemistry students. *Journal of Research in Science Teaching*, *32*(5), 521–534. https://doi.org/10.1002/tea.3660320508

Winberg, T. M., & Hedman, L. (2008). Student attitudes toward learning, level of pre-knowledge and instruction type in a computer-simulation: Effects on flow experiences and perceived learning outcomes. *Instructional Science*, *36*, 269–287. https://doi.org/10.1007/s11251-007-9030-9

Wolf, D., Biziere, N., Sturm, S., Reyes, D., Wade, T., Niermann, T., Krehl, J., Warot-Fonrose, B., Büchner, B., Snoeck, E., Gatel, C., & Lubk, A. (2019). Holographic vector field electron tomography of three-dimensional nanomagnets. *Communications Physics*, *2*(1), 87. https://doi.org/10.1038/s42005-019-0187-8

Wu, H.-K., Krajcik, J. S., & Soloway, E. (2001). Promoting understanding of chemical representations: Students' use of a visualization tool in the classroom. *Journal of Research in Science Teaching*, *38*(7), 821–842. https://doi.org/10.1002/tea.1033

Wu, H.-K., & Puntambekar, S. (2012). Pedagogical affordances of multiple external representations in scientific processes. *Journal of Science Education and Technology*, *21*, 754–767. https://doi.org/10.1007/s10956-011-9363-7

Wu, S. P. W., & Rau, M. A. (2018). Effectiveness and efficiency of adding drawing prompts to an interactive educational technology when learning with visual representations. *Learning and Instruction*, *55*, 93–104. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2017.09.010

Wu, S. P. W., & Rau, M. A. (2019). How students learn content in science, technology, engineering, and mathematics (STEM) through drawing activities. *Educational Psychology Review*, *31*, 87–120. https://doi.org/10.1007/s10648-019-09467-3

Wu, C.-J., & Liu, C.-Y. (2022). Refined use of the eye-mind hypothesis for scientific argumentation using multiple representations. *Instructional Science*, *50*(4), 551–569. https://doi.org/10.1007/s11251-022-09581-w

Xue, B. C. (2021). *Identifying and addressing student difficulties with the source-field relationship using tutorials in upper-division electromagnetism* [Dissertation, University of Washington]. http://hdl.handle.net/1773/47123

Yang, F.-Y., Tsai, M.-J., Chiou, G.-L., Lee, S. W.-Y., Chang, C.-C., & Chen, L.-L. (2018). Instructional suggestions supporting science learning in digital environments based on a review of eye tracking studies. *Journal of Educational Technology & Society*, *21*(2), 28–45.

Yusaf, F. (2017). Stokes' Theorem: A candidate threshold concept. *Practice and Evidence of the Scholarship of Teaching and Learning in Higher Education*, *12*(2), 397–410.

Zavala, G., & Barniol, P. (2010). Students' understanding of the concepts of vector components and vector products. *AIP Conference Proceedings*, *1289*(1), 341–344. https://doi.org/10.1063/1.3515240

Zhang, Z. H., & Linn, M. C. (2011). Can generating representations enhance learning with dynamic visualizations? *Journal of Research in Science Teaching*, *48*(10), 1177–1198. https://doi.org/10.1002/tea.20443

Zimmerman, C. M. (2023). *Characterizing and assessing covariational reasoning in introductory physics contexts* [Dissertation, University of Washington]. http://hdl.handle.net/1773/50891

Zimmerman, C. M., Olsho, A., Loverude, M., & Brahmia, S. W. (2023). *Expert covariational reasoning resources in physics graphing tasks* [arXiv]. https://doi.org/10.48550/arXiv.2306.00921

A Anhang

A.1 Ergänzendes Material der Publikationen

Studie *Zeichnen*

frontiers

Supplementary Material

The supplementary material includes the study material in original language (German). For an English translation please see Fig. 3 and 4 in the article. Further materials will be provided on request.

Original study material:

S1 Pre-exercise on vector components and partial derivatives

S2 Divergence instruction

ORIGINAL STUDY MATERIAL

Vektoren und partielle Ableitungen

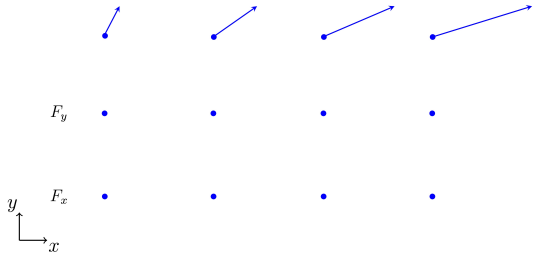
Ein Vektorfeld $\vec{F}$ ist eine Abbildung, die jedem Raumpunkt (x, y) einen Vektor $\vec{F}(x, y)$ zuordnet. Die Vektoren werden mithilfe der Komponenten F_x und F_y bzgl. der Koordinaten x und y dargestellt, wobei die positive x-Achse im Folgenden in horizontaler Richtung nach rechts und die positive y-Achse in vertikaler Richtung nach oben orientiert ist.

1. Betrachten Sie den folgenden Vektor und skizzieren Sie seine Zerlegung in die Komponenten F_x und F_y.

Welche der folgenden Aussagen trifft zu? Markieren Sie!

- ☐ x- und y-Komponente sind gleich groß.
- ☐ Die x-Komponente ist größer als die y-Komponente.
- ☐ Die y-Komponente ist größer als die x-Komponente.

2. Zeichnen Sie nun für jeden Vektor der nachfolgenden oberen Vektorzeile die Zerlegung in die Komponenten F_x und F_y ein. Skizzieren Sie anschließend die jeweilige y-Komponente der Vektoren in der zweiten Zeile (F_y) und die jeweilige x-Komponente in der dritten Zeile (F_x). Nutzen Sie die Gitterpunkte als Startmarkierungen für die Vektorpfeile.

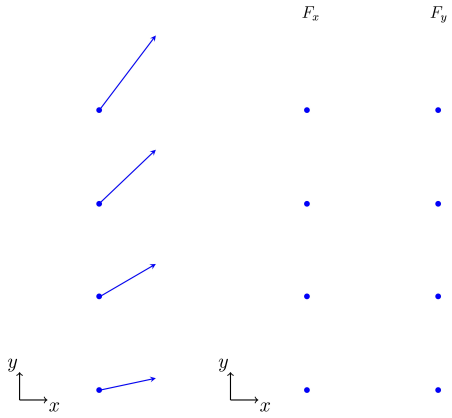


Welche der folgenden Aussagen trifft zu? Markieren Sie alle richtigen Aussagen.

- ☐ F_y nimmt in x-Richtung zu.
- ☐ F_y nimmt in x-Richtung ab.
- ☐ F_y ist konstant.
- ☐ F_x ist konstant.
- ☐ F_x nimmt in x-Richtung ab.
- ☐ F_x nimmt in x-Richtung zu.

Bitte umblättern.

3. Zeichnen Sie in der nachfolgenden linken Vektorspalte für jeden Vektor die Vektorkomponentenzerlegung ein. Skizzieren Sie anschließend jeweils die x-Komponente der Vektoren in der mittleren Spalte (F_x) und die jeweilige y-Komponente in der rechten Spalte (F_y). Nutzen Sie die Gitterpunkte als Startmarkierungen für die Vektorpfeile.



Welche der folgenden Aussagen trifft zu? Markieren Sie alle richtigen Aussagen.

- ☐ F_y nimmt in y-Richtung zu.
- ☐ F_y ist konstant.
- ☐ F_y nimmt in y-Richtung ab.
- ☐ F_x ist konstant.
- ☐ F_x nimmt in y-Richtung ab.
- ☐ F_x nimmt in y-Richtung zu.

Die Änderung der Feldvektoren in x-Richtung (entlang einer Zeile) oder in y-Richtung (entlang einer Spalte) wird mithilfe der partiellen Ableitungen $\frac{\partial F_x}{\partial x}$ der F_x-Komponente nach x bzw. $\frac{\partial F_y}{\partial y}$ der F_y-Komponente nach y beschrieben. Es gilt $\frac{\partial F_x}{\partial x} > 0$, wenn F_x in positiver x-Richtung zunimmt und $\frac{\partial F_x}{\partial x} < 0$, wenn F_x in positiver x-Richtung abnimmt (analog für die partielle Ableitung nach y).

Bitte umblättern.

Figure S1: Two-sided pre-exercise on vector components and partial derivatives with drawing activities (treatment group) in original language (German). In the exercise without drawing activities, the decomposition tasks (left page side) are to be completed without drawing vectors (control group).

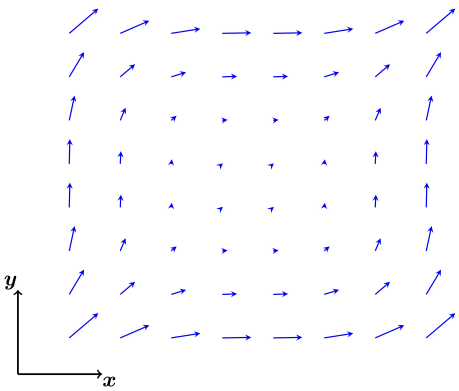
Interpretation der Divergenz

Die Divergenz eines Vektorfeldes ($\mathrm{div}\vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}$) an einem Ort (x, y) ergibt sich über die Summe der partiellen Ableitungen

$$\mathbf{div}\vec{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{\partial \boldsymbol{F_x}}{\partial \boldsymbol{x}} + \frac{\partial \boldsymbol{F_y}}{\partial \boldsymbol{y}}.$$

Interpretieren Sie diese Gleichung anschaulich am Beispiel des folgenden Vektorfeldes, indem Sie wie folgt vorgehen:

- Wählen Sie einen beliebigen Vektor im Feld aus. Zerlegen Sie diesen Vektor gedanklich in eine x- und eine y-Komponente.
- Untersuchen Sie, ob sich die x-Komponente des Vektorfeldes in x-Richtung (entlang einer Zeile) ändert. Dies entspricht dem ersten Summanden in obiger Gleichung.
- Untersuchen Sie auch, ob sich die y-Komponente des Vektorfeldes in y-Richtung (entlang einer Spalte) ändert. Dies entspricht dem zweiten Summanden in der Gleichung.
- Sollte sich weder F_x in x-Richtung noch F_y in y-Richtung ändern, so ist das Feld quellfrei. Zu diesem Ergebnis sollten Sie hier gekommen sein. Ändert sich eine der beiden Komponenten, ist das Feld nicht quellfrei. Den Fall, dass sich die Veränderungen in x- und in y-Richtung gerade aufheben, betrachten wir nicht.
- Bei allen hier verwendeten Vektorfeldern ist die Divergenz räumlich konstant. Um dies zu überprüfen, wählen Sie einen zweiten beliebigen Vektor und führen sie das beschriebene Vorgehen erneut durch. Auch hier sollten Sie zu dem Ergebnis kommen, dass es sich um ein quellfreies Vektorfeld handelt.



Hinweis: Streng genommen bedeuten partielle Ableitungen infinitesimale Änderungen. Da die Divergenz der Vektorfelder hier aber konstant Null oder nicht-Null ist, können wir Vektoren miteinander vergleichen, die nicht infinitesimal neben- bzw. übereinander liegen.

Figure S2: Instruction on visually interpreting divergence of vector fields with drawing activities (treatment group) in original language (German). The explanatory text aims at drawing vector components into the adjacent vector field diagram in order to infer the fields' divergence. In the instruction without drawing activities, the explanatory text asks for a mental decomposition of the vectors (control group).

Studie *Lernaufgaben*

Hinweis: Die Itemformulierungen zur Erfassung der kognitiven Belastung wurden für die Lernaufgaben zum Satz von Gauß, zur Rotation und zum Satz von Stokes entsprechend adaptiert.

frontiers

Supplementary Material

The supplementary material follows the structure given below. For an impression of the performance test on vector calculus, the first half of the test is provided. Test and evaluation questionnaire items are presented in German original language; an English translations will be provided on request.

1 Study material
- 1.1 Performance test on vector calculus
- 1.2 Evaluation questionnaires

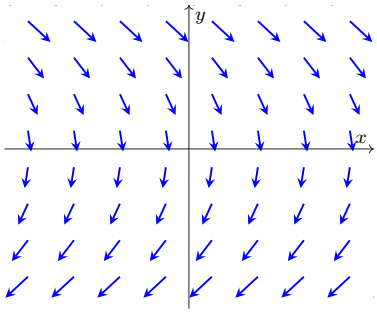
2 Test analyses
- 2.1 Outlier analyses
- 2.2 Factor analyses, item and scale analyses
  - 2.2.1 Performance test on vector calculus
  - 2.2.2 Evaluation questionnaires
- 2.3 Normal distribution analyses

1 STUDY MATERIAL

1.1 Performance test on vector calculus

I Vektorfelder

V1) Gegeben ist das Schaubild des zweidimensionalen Vektorfeldes $\vec{F}(x, y)$. F_x bezeichnet die x-Komponente des Feldes $\vec{F}$ und F_y seine y-Komponente.



1. Kreuzen Sie an, welche der folgenden Formeln $\vec{F}(x, y)$ beschreibt.

☐ $\vec{F}_1(x, y) = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y$

☐ $\vec{F}_2(x, y) = -\hat{e}_x + x\hat{e}_y$

☐ $\vec{F}_3(x, y) = y\hat{e}_x - \hat{e}_y$

☐ $\vec{F}_4(x, y) = y\hat{e}_x - x\hat{e}_y$

2. Kreuzen Sie an, ob die Aussage richtig oder falsch ist und geben Sie außerdem an, wie sicher Sie sich Ihrer Antwort sind (auf einer Skala von 1 = "absolut sicher" bis 6 = "absolut unsicher").

	richtig	falsch	Antwortsicherheit 1					6
(a) $F_x = 0$ überall	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
(b) $F_y = 0$ überall	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

V2) Gegeben ist das Vektorfeld $\vec{G}(r, \varphi) = r\hat{e}_\varphi$.

1. Skizzieren Sie $\vec{G}(r, \varphi)$ in der x-y-Ebene.

2. Kreuzen Sie an, ob die Aussage richtig oder falsch ist und geben Sie außerdem an, wie sicher Sie sich Ihrer Antwort sind (auf einer Skala von 1 = "absolut sicher" bis 6 = "absolut unsicher").

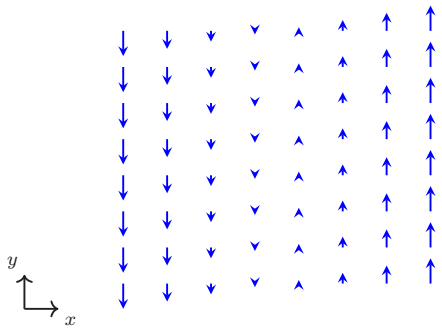
	richtig	falsch	Antwortsicherheit 1					6
(a) $\vec{G}$ besitzt nur eine r-Komponente, die von φ abhängt.	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
(b) $\vec{G}$ besitzt nur eine φ-Komponente, die von r abhängt.	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

II Divergenz von Vektorfeldern

V3) Geben Sie einen mathematischen Ausdruck (eine Formel) zur Berechnung der Divergenz eines Vektorfeldes $\vec{F}(x, y)$ in kartesischen Koordinaten an.

☐ Mir fällt gerade keine Formel ein.

V4) Gegeben ist das folgende Schaubild eines Vektorfeldes $\vec{F}(x, y)$.



1. Welche Aussage können Sie über die Divergenz des Vektorfeldes formulieren? Markieren Sie Ihre Antwort!

☐ Das Vektorfeld besitzt keine Divergenz. (Das bedeutet, dass die Divergenz an jeder Stelle gleich Null ist.)

☐ Die Divergenz ist an wenigstens einer Stelle im Vektorfeld von Null verschieden.

☐ Die Divergenz ist an jeder Stelle im Vektorfeld von Null verschieden.

2. Begründen Sie Ihre Antwort kurz.

V5) Kreuzen Sie an, ob die folgenden Aussagen über die Divergenz richtig bzw. falsch sind und geben Sie außerdem an, wie sicher Sie sich Ihrer Antwort sind (auf einer Skala von 1 = "absolut sicher" bis 6 = "absolut unsicher").

	richtig	falsch	Antwortsicherheit 1					6
1. Die Divergenz gibt die Richtung des steilsten Anstiegs an.	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
2. Wenn die Divergenz eines Vektorfeldes an jeder Stelle positiv ist, existiert an jeder Stelle eine Quelle.	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

	richtig	falsch	Antwortsicherheit 1					6
3. Die Divergenz gibt an, ob die Vektorpfeile auseinanderlaufen.	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
4. Die Divergenz kann für jede Stelle eines Vektorfeldes verschieden sein.	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
5. Die Divergenz ist eine globale Feldeigenschaft: Entweder sie ist räumlich konstant oder Null.	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
6. Die Divergenz kann mit der Anzahl von Vektoren in Verbindung gebracht werden.	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
7. Die Divergenz hängt mit infinitisimalen Feldänderungen zusammen.	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
8. Das Feld einer Punktladung in der Umgebung dieser Ladung ist divergenzfrei.	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
9. Für die Divergenz gilt: div $\vec{F} = ...$			☐	☐	☐	☐	☐	☐
☐ $\nabla \vec{F}$								
☐ $\nabla \times \vec{F}$								
☐ $\nabla \cdot \vec{F}$								
10. Die Divergenz an einer Stelle eines Vektorfeldes ist ...			☐	☐	☐	☐	☐	☐
☐ ein Skalar								
☐ ein Skalarfeld								
☐ ein Vektor								
☐ ein Vektorfeld								
11. Die Divergenz des Vektorfeldes $\vec{F}(r, \varphi)$ in ebenen Polarkoordinaten ist definiert durch ...			☐	☐	☐	☐	☐	☐
☐ div $\vec{F} = \frac{\partial}{\partial r} F_r + \frac{\partial}{\partial \varphi} F_\varphi$								
☐ div $\vec{F} = \frac{\partial}{\partial r}(rF_r) + \frac{\partial}{\partial \varphi} F_\varphi$								
☐ div $\vec{F} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rF_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} F_\varphi$								
☐ div $\vec{F} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rF_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}(r^2 F_\varphi)$								

V6) Berechnen Sie die Divergenz des Vektorfeldes $\vec{F}(x, y, z) = x\hat{e}_x + x\hat{e}_y - 2xz\hat{e}_z$.

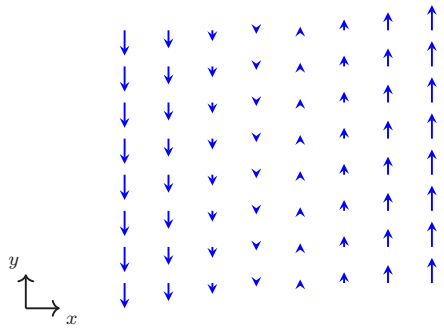
III Rotation von Vektorfeldern

V7) Geben Sie einen mathematischen Ausdruck (eine Formel) zur Berechnung der Rotation eines Vektorfeldes $\vec{F}(x, y, z)$ in kartesischen Koordinaten an.

_____

☐ Mir fällt gerade keine Formel ein.

V8) Gegeben ist das folgende Schaubild eines Vektorfeldes $\vec{F}(x, y)$.



1. Welche Aussage können Sie über die Rotation des Vektorfeldes formulieren? Markieren Sie Ihre Antwort!

☐ Das Vektorfeld besitzt keine Rotation. (Das bedeutet, dass die Rotation an jeder Stelle gleich Null ist.)

☐ Die Rotation ist an wenigstens einer Stelle im Vektorfeld von Null verschieden.

☐ Die Rotation ist an jeder Stelle im Vektorfeld von Null verschieden.

2. Begründen Sie Ihre Antwort kurz.

_____

_____

V9) Kreuzen Sie an, ob die folgenden Aussagen über die Rotation richtig bzw. falsch sind und geben Sie außerdem an, wie sicher Sie sich Ihrer Antwort sind (auf einer Skala von 1 = "absolut sicher" bis 6 = "absolut unsicher").

	richtig	falsch	Antwortsicherheit 1					6
1. Die Rotation gibt die Richtung des steilsten Anstiegs an.	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
2. Die Rotation ist nur dann verschieden von Null, wenn sich die Richtung des Feldes ändert.	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
3. Die Rotation gibt an, ob die Vektorpfeile zusammenlaufen.	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
4. Die Rotation kann für jede Stelle eines Vektorfeldes verschieden sein.	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

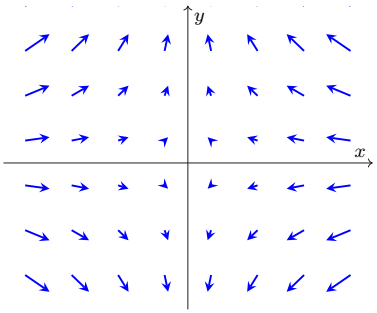
	richtig	falsch	Antwortsicherheit 1					6
5. Die Rotation ist eine globale Feldeigenschaft: Entweder sie ist räumlich konstant oder Null.	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
6. Die Rotation gibt an, ob Feldvektoren gekrümmt sind.	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
7. Die Rotation ist ein Maß für infinitisimale Wirbel eines Feldes.	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
8. Das Feld einer Punktladung in der Umgebung dieser Ladung ist rotationsfrei.	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
9. Für die Rotation gilt: rot $\vec{F} = ...$			☐	☐	☐	☐	☐	☐
☐ $\nabla \vec{F}$								
☐ $\nabla \times \vec{F}$								
☐ $\nabla \cdot \vec{F}$								
10. Die Rotation an einer Stelle eines Vektorfeldes ist ...			☐	☐	☐	☐	☐	☐
☐ ein Skalar								
☐ ein Skalarfeld								
☐ ein Vektor								
☐ ein Vektorfeld								
11. Die Rotation des Vektorfeldes $\vec{F}(r, \varphi, z = 0)$ in Zylinderkoordinaten ist definiert durch ...			☐	☐	☐	☐	☐	☐
☐ rot $\vec{F} = \left(\frac{\partial F_\varphi}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \varphi}\right) \hat{e}_z$								
☐ rot $\vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial r}(rF_\varphi) - \frac{\partial F_r}{\partial \varphi}\right) \hat{e}_z$								
☐ rot $\vec{F} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rF_\varphi) - \frac{\partial F_r}{\partial \varphi}\right) \hat{e}_z$								
☐ rot $\vec{F} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rF_\varphi) - \frac{\partial}{\partial \varphi}(r^2 F_r)\right) \hat{e}_z$								

V10) Berechnen Sie die Rotation des Vektorfeldes $\vec{F}(x, y, z) = x\hat{e}_x + x\hat{e}_y - 2xz\hat{e}_z$.

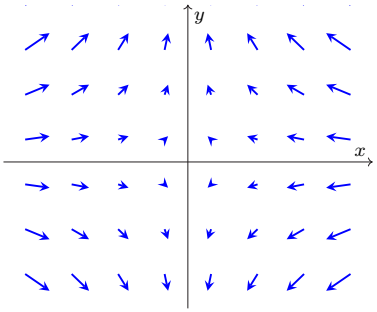
IV Partielle Ableitungen

V11) Gegeben sind die Schaubilder der zweidimensionalen Vektorfelder $\vec{F}(x, y)$ und $\vec{G}(x, y)$. F_x bezeichnet die x-Komponente des Feldes $\vec{F}$ (analog für alle weiteren Komponenten).

$\vec{F}(x, y)$



$\vec{G}(x, y)$



Markieren Sie, welches der Vergleichszeichen (> 0, < 0 oder $= 0$) für die partiellen Ableitungen $\frac{\partial F_x}{\partial x}$, $\frac{\partial F_y}{\partial y}$, $\frac{\partial F_x}{\partial y}$ und $\frac{\partial F_y}{\partial x}$ (analog für $\vec{G}$) von $\vec{F}$ und $\vec{G}$ gilt. Geben Sie außerdem an, wie sicher Sie sich Ihrer Antwort sind (auf einer Skala von $1 =$ " absolut sicher" bis $6 =$ "absolut unsicher").

	> 0	< 0	$= 0$	Antwortsicherheit 1					6
1. $\frac{\partial F_x}{\partial x}$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
2. $\frac{\partial F_y}{\partial y}$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
3. $\frac{\partial F_x}{\partial y}$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
4. $\frac{\partial F_y}{\partial x}$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
5. $\frac{\partial G_x}{\partial x}$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
6. $\frac{\partial G_y}{\partial y}$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
7. $\frac{\partial G_x}{\partial y}$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
8. $\frac{\partial G_y}{\partial x}$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Table S1. Overview of topic, task type, and source of performance test tasks (topics: vector fields VF, divergence DIV, curl CU, partial derivatives PD; task type: multiple-choice item with three/four options MC3/4, true-false item TF, Sketch S, Open format O (formula, justification, or calculation)). Tasks that ask for response confidence are marked with * (asterisks).

Task	Topic	Task type	Source
V1	VF	MC4, TF*	Klein et al. (2018, 2019, 2021)
V2	VF	S, TF*	–
V3	DIV	O	Bollen et al. (2015); Klein et al. (2018, 2019, 2021)
V4	DIV	MC3, O	Klein et al. (2018, 2019, 2021)
V5	DIV	TF*, MC3*, MC4*	Baily et al. (2016); Bollen et al. (2018); Hahn and Klein (2022); Klein et al. (2018, 2019, 2021)
V6	DIV	O	Bollen et al. (2015)
V7	CU	O	Klein et al. (2018, 2019, 2021)
V8	CU	MC3, O	Bollen et al. (2015)
V9	CU	TF*, MC3*, MC4*	Baily et al. (2016); Bollen et al. (2018); Hahn and Klein (2022); Klein et al. (2018, 2019, 2021)
V10	CU	O	Bollen et al. (2015)
V11	PD	MC3*	Hahn and Klein (2022)

1.2 Evaluation questionnaires

Table S2: Questionnaire items with sources (cognitive load items CL, tutor items T).

Item	Item phrasing	Source
Cognitive load (CL)[a]		
CL1	Das behandelte Thema der Divergenz von Vektorfeldern habe ich als komplex empfunden.	LPC1
CL2	Die behandelten Formeln zur Divergenz habe ich als komplex empfunden.	LPC2
CL3	Die behandelten Konzepte und Definitionen zur Divergenz habe ich als komplex empfunden.	LPC3
CL4	Die Aufgabenstellungen waren unklar.	LPC4
CL5	In den Aufgabenstellungen wurden unklare und unbekannte Begriffe verwendet.	LPC6
CL6	Bei dieser Aufgabe war es mühsam, die wichtigsten Informationen zu erkennen.	KSS6
CL7	Bei dieser Aufgabe war es schwer, die zentralen Inhalte miteinander in Verbindung zu bringen.	KSS8
CL8	Die Aufgabe enthielt Elemente, die mich unterstützten, das Divergenzkonzept besser zu verstehen.	KSS7
CL9	Die Aufgabe hat mein Verständnis der Divergenz verbessert.	LPC7
CL10	Die Aufgabe hat mein Verständnis der Formeln zur Divergenz verbessert.	LPC9
CL11	Ich habe mir Mühe gegeben, um diese Aufgabe zu lösen.	KRE12
CL12	Es ging mir beim Bearbeiten der Aufgabe darum, alles richtig zu verstehen.	KSS4
Tutor (T)[b]		
T1	Die Tutorin wirkte motiviert.	DWS11
T2	Die Tutorin war ansprechbar für Fragen.	BKV9/10

T3	Die Tutorin motivierte zur aktiven Mitarbeit aller Teilnehmenden.	DWS2
T4	Die Tutorin zeigte Interesse am Lernerfolg der Studierenden.	DWS12
T5	Die Tutorin trug zu einem besseren Verständnis der Übungsaufgaben bei.	DWS10
T6	Die Tutorin wirkte gut vorbereitet.	DWS1

[a]Source abbreviations CL: LPC (Leppink et al., 2013), KRE (Krell, 2017), KSS (Klepsch et al., 2017)
[b]Source abbreviations T: DWS (Dolmans et al., 1994) BKV (Baroffio et al., 1999)

2 TEST ANALYSES

Since all data except the performance test data were given in values between 1 and 6, a linear transformation to the interval $[0; 1]$ was performed. Then, in order to form content-valid and psychometrically reliable scales, questionnaires were subjected to test analyses. For this purpose, the collected data were first checked for outliers before subjecting the outlier-corrected data to explorative factor analyses. Subsequently, item and scale analyses were conducted and the scales' psychometric parameters were determined. Finally, all scales were checked for normal distributed scale expressions. Analyses were performed with SPSS (version 27), Excel, or R (version 3.6.3, packages *foreign* and *polycor*).

2.1 Outlier analyses

Initially, all questionnaires except the performance test were subjected to outlier analyses. Number and frequency of data points whose $|z|$ values exceed the critical value of 3.29 (Tabachnick and Fidell, 2019) are shown in Table S3. Outliers were winsorized at the 99.9th percentile ($M \pm 3SD$; sign determined by outlier direction).

Table S3. Item-level outlier analyses.

Questionnaire	Outlier $\|z\| > 3.29$	Outlier [%]
Confidence	0	0
Cognitive load	0	0
Tutor behavior	13	2.55

2.2 Factor analyses, item and scale analyses

2.2.1 Performance test on vector calculus

For analyzing the performance test, a core item group of items which were included in pre-, mid-, and posttest were selected. For 65 dichotomous core items, tetrachoric correlations were determined and factor analysis was performed (Scott et al., 2012). However, as the matrix was singular, it was not appropriate for factor analysis. Results of item analyses (Table S4) showed that the guidelines for difficulty index, discrimination index, and item-total correlation according to Ding and Beichner (2009) were not fulfilled for most of the items. Therefore, after reducing the number of items based on these criteria, factor analysis based on the tetrachoric matrix was repeated. However, no clear factor structure was found. Therefore, the test is considered in its entirety (Table S4, scale analysis). Further analyses (e.g. Rasch analysis) are in prospect. Since an exploratory factor analysis of the response confidence did not yield a clear factor structure neither, this scale is also considered in its entirety (Table S5).

Supplementary Material 7

Table S4: Results of item and scale analyses of the performance test (item difficulty index P_i, item discrimination index D_i, item-total correlation r_{it}, Crombach's alpha when item i is excluded α_{ex}, mean difficulty index P, mean discrimination index D, standard deviation SD, Crombach's Alpha α_C).

	Item analysis			
Item	P_i	D_i	r_{it}	α_{ex}
V1.1	0.61	0.59	0.45	0.85
V1.2a	0.90	0.28	0.32	0.85
V1.2b	0.95	0.14	0.29	0.85
V2.1	0.52	0.52	0.38	0.85
V2.2a	0.86	0.24	0.27	0.85
V2.2b	0.73	0.31	0.24	0.85
V3	0.44	0.66	0.47	0.85
V4.1	0.39	0.48	0.35	0.85
V4.2	0.20	0.55	0.54	0.85
V5.1	0.64	0.17	0.12	0.86
V5.2	0.52	0.03	0.01	0.86
V5.3	0.36	-0.17	-0.23	0.86
V5.4	0.77	0.31	0.18	0.86
V5.5	0.82	0.31	0.30	0.85
V5.6	0.70	0.31	0.12	0.86
V5.7	0.83	0.24	0.20	0.85
V5.8	0.25	-0.10	-0.18	0.86
V5.9	0.73	0.34	0.22	0.85
V5.10	0.71	0.28	0.20	0.86
V5.11	0.41	0.59	0.40	0.85
V6	0.43	0.66	0.42	0.85
V7	0.30	0.41	0.29	0.85
V8.1	0.17	0.24	0.23	0.85
V8.2	0.14	0.28	0.28	0.85
V9.1	0.90	0.31	0.35	0.85
V9.2	0.28	0.21	0.14	0.86
V9.3	0.80	0.28	0.28	0.85
V9.4	0.69	0.55	0.39	0.85
V9.5	0.68	0.59	0.45	0.85
V9.6	0.47	0.34	0.23	0.85
V9.7	0.89	0.14	0.16	0.86
V9.8	0.73	0.59	0.44	0.85
V9.9	0.92	0.28	0.30	0.85
V9.10	0.63	0.45	0.26	0.85
V9.11	0.32	0.31	0.20	0.86
V10	0.34	0.69	0.45	0.85
V11.1	0.68	0.45	0.36	0.85
V11.2	0.84	0.34	0.32	0.85
V11.3	0.52	0.69	0.47	0.85
V11.4	0.54	0.59	0.44	0.85

V11.5	0.72	0.55	0.43	0.85
V11.6	0.82	0.45	0.36	0.85
V11.7	0.66	0.55	0.47	0.85
V11.8	0.72	0.31	0.31	0.85
...				

Scale	P	SD	D	α_C
Vector calculus test	0.51	0.13	0.34	0.86

Table S5: Item and scale analyses results of response confidence in the performance test (item mean M_i, item standard deviation SD_i, item discrimination index D_i, item-total correlation r_{it}, Crombach's alpha when item i is excluded α_{ex}, scale mean M, mean standard deviation SD, mean discrimination index D, Crombach's Alpha α_C).

	Item analysis				
Item	M_i	SD_i	D_i	r_{it}	α_{ex}
V1.2a	0.44	0.38	0.44	0.46	0.97
V1.2b	0.43	0.37	0.44	0.47	0.96
V2.2a	0.44	0.35	0.40	0.44	0.97
V2.2b	0.44	0.36	0.47	0.47	0.97
V5.1	0.49	0.31	0.49	0.61	0.96
V5.2	0.53	0.36	0.53	0.54	0.96
V5.3	0.53	0.34	0.65	0.71	0.96
V5.4	0.45	0.29	0.40	0.53	0.96
V5.5	0.46	0.38	0.60	0.61	0.96
V5.6	0.50	0.35	0.51	0.54	0.96
V5.7	0.41	0.34	0.55	0.68	0.96
V5.8	0.54	0.37	0.75	0.80	0.96
V5.9	0.37	0.38	0.42	0.40	0.97
V5.10	0.43	0.34	0.45	0.54	0.96
V5.11	0.55	0.36	0.40	0.42	0.97
V9.1	0.54	0.36	0.51	0.51	0.96
V9.2	0.57	0.33	0.53	0.64	0.96
V9.3	0.55	0.34	0.49	0.59	0.96
V9.4	0.51	0.36	0.64	0.73	0.96
V9.5	0.47	0.37	0.64	0.73	0.96
V9.6	0.43	0.38	0.64	0.67	0.96
V9.7	0.44	0.35	0.45	0.60	0.96
V9.8	0.48	0.37	0.69	0.73	0.96
V9.9	0.39	0.41	0.42	0.36	0.97
V9.10	0.52	0.35	0.62	0.64	0.96
V9.11	0.67	0.38	0.44	0.35	0.97
V11.1	0.52	0.35	0.71	0.78	0.96
V11.2	0.50	0.35	0.73	0.78	0.96
V11.3	0.56	0.34	0.62	0.71	0.96

V11.4	0.57	0.33	0.62	0.72	0.96
V11.5	0.56	0.35	0.69	0.76	0.96
V11.6	0.55	0.37	0.64	0.68	0.96
V11.7	0.55	0.36	0.73	0.74	0.96
V11.8	0.55	0.37	0.71	0.79	0.96
...					

Scale	M	SD	D	α_C
Confidence	0.52	0.23	0.56	0.97

2.2.2 Evaluation questionnaires

Prior to performing factor analyses, all data were checked regarding their suitability for this method (Table S6). With a Kaiser-Meyer-Olkin value ≥ 0.6 and a significant Bartlett test for sphericity, the requirements for performing a principal component analysis were met for cognitive load as well as tutor behavior questionnaire (George and Mallery, 2019).

Table S6. Test results for requirements of principal component analysis (Kaiser-Meyer-Olkin criterion KMO; Bartlett test for sphericity: Chi-Squared statistics $\mathcal{X}^2$, degrees of freedom df, significance p).

Questionnaire	KMO	Bartlett test			Total variance explained [%]
		$\mathcal{X}^2$	df	p	
Cognitive load	0.74	522.56	66	< 0.001	75.03
Tutor behavior	0.89	293.91	15	< 0.001	68.61

Via Kaiser criterion (eigenvalue > 1) and based on the screeplot, a principal component analysis with varimax rotation for the items of cognitive load yielded a four-factor solution explaining 75.03% of variance. The items CL4, CL5, CL6, and CL7 (extraneous cognitive load) loaded on the first factor, CL1, CL2, and CL3 (intrinsic cognitive load) loaded on the second factor, CL8, CL9, and CL10 (germane cognitive load) loaded on the third factor, and CL11 and CL12 (effort) loaded on the fourth factor (Table S7). Concerning item analyses of the four scales, except of CL10 ("The task enhanced my understanding of the divergence formulas.") all items had a item-total correlation of $r_{it} \geq 0.56$ and a discrimination index of $D_i \geq 50$. Moreover, the reliability of the germane cognitive load scale was improved from 0.79 to 0.84 by excluding CL10. As CL10 demonstrated the lowest factor loading and the lowest communality, and because CL10 was highly similar to CL9 ("The task enhanced my understanding of divergence."), CL10 was removed from the scale.

A principal component analysis with varimax rotation for tutor behavior revealed, via the Kaiser criterion (eigenvalue > 1) and based on the screeplot, that all items loaded on one factor explaining 68.61% of variance (Table S8). Accordingly, the scale can be considered unidimensional. Since no psychometric abnormalities were found, all items were retained.

Table S7. Results of factor, item, and scale analyses for the cognitive load questionnaire (factors 1, 2, 3, 4, communality κ, item mean M_i, item standard deviation SD_i, item discrimination index D_i, item-total correlation r_{it}, Crombach's alpha when item i is excluded α_{ex}, scale mean M, mean standard deviation SD, mean discrimination index D, Crombachs Alpha α_C, Spearman-Brown coefficient ρ).

	Factor analysis					Item analysis					excl. CL10		
Item	1	2	3	4	κ	M_i	SD_i	D_i	r_{it}	α_{ex}	D_i	r_{it}	α_{ex}
Extraneous cognitive load													
CL6	0.88	0.16	-0.08	-0.03	0.80	0.27	0.28	0.58	0.76	0.72			
CL4	0.78	0.08	-0.18	0.12	0.66	0.33	0.28	0.52	0.56	0.81			
CL5	0.74	0.24	-0.06	-0.25	0.67	0.28	0.29	0.53	0.62	0.79			
CL7	0.69	0.38	-0.13	-0.12	0.64	0.33	0.26	0.50	0.64	0.78			
Intrinsic cognitive load													
CL1	0.22	0.90	0.03	0.11	0.87	0.49	0.28	0.68	0.83	0.78			
CL3	0.14	0.89	-0.02	0.08	0.81	0.47	0.25	0.57	0.76	0.85			
CL2	0.29	0.82	0.06	0.02	0.75	0.40	0.28	0.61	0.74	0.87			
Germane cognitive load													
CL9	-0.10	-0.04	0.90	0.14	0.83	0.56	0.28	0.63	0.72	0.60	0.67	0.72	-
CL8	-0.12	-0.06	0.86	0.12	0.77	0.58	0.25	0.60	0.67	0.67	0.58	0.72	-
CL10	- 0.13	0.15	0.67	0.21	0.54	0.60	0.26	0.43	0.51	0.84	-	-	-
Effort													
CL11	-0.03	0.10	0.16	0.88	0.82	0.67	0.28	0.61	0.67	-			
CL12	-0.11	0.07	0.29	0.86	0.84	0.67	0.27	0.64	0.67	-			

Scale (excl. CL10)	M	SD	D	α_C /ρ
Extraneous cognitive load	0.30	0.22	0.53	0.82
Intrinsic cognitive load	0.45	0.24	0.62	0.88
Germane cognitive load	0.57	0.25	0.63	0.84
Effort	0.67	0.25	0.63	0.80

Table S8. Results of factor, item, and scale analyses for the tutor behavior questionnaire (factor 1, communality κ, item mean M_i, item standard deviation SD_i, item discrimination index D_i, item-total correlation r_{it}, Crombach's alpha when item i is excluded α_{ex}, scale mean M, mean standard deviation SD, mean discrimination index D, α_C = Crombachs Alpha).

	Factor analysis		Item analysis				
Item	1	κ	M_i	SD_i	D_i	r_{it}	α_{ex}
T1	0.85	0.72	0.88	0.14	0.27	0.78	0.86
T2	0.84	0.71	0.91	0.12	0.21	0.74	0.87
T3	0.80	0.63	0.68	0.23	0.51	0.71	0.87
T4	0.85	0.73	0.85	0.20	0.37	0.77	0.85
T5	0.80	0.63	0.81	0.23	0.43	0.70	0.87
T6	0.84	0.70	0.93	0.12	0.20	0.74	0.87

Scale	M	SD	D	α_C
Tutor	0.84	0.14	0.33	0.89

2.3 Normal distribution analyses

The scales formed after item exclusion were subjected to normal distribution analyses (Table S9). If the Kolmogorov-Smirnov test and the Shapiro-Wilk test were significant, skewness and kurtosis were considered. If the absolute values of these parameters are ≤ 2, a normal distribution can be assumed (George and Mallery, 2019).

Table S9. Results of normal distribution analyses (test statistics Kolmogorov-Smirnov test K, test statistics Shapiro-Wilk test W, degrees of freedom df, significance p, skewness s, kurtosis k).

		Kolmogorov-Smirnov test			Shapiro-Wilk test				
Variable	Scale	K	df	p	W	df	p	s	k
Performance	V	0.06	116	0.20	0.99	116	0.54	0.06	-0.31
Confidence	C	0.11	41	0.20	0.97	41	0.23	0.26	-0.74
Cognitive load	ECL	0.19	92	< 0.001	0.90	92	< 0.001	1.21	1.46
	ICL	0.08	92	0.10	0.98	92	0.10	0.15	-0.52
	GCL	0.16	93	< 0.001	0.96	93	0.007	-0.26	-0.46
	E	0.16	93	< 0.001	0.92	93	< 0.001	-0.66	-0.49
Tutor behavior	T	0.15	83	< 0.001	0.88	83	< 0.001	-1.27	1.77

REFERENCES

Baily, C., Bollen, L., Pattie, A., Van Kampen, P., and De Cock, M. (2016). Student thinking about the divergence and curl in mathematics and physics contexts. In *Proceedings of the Physics Education Research Conference 2016, College Park, MD* (American Institute of Physics), 51–54. doi:10.1119/perc.2015.pr.008

Baroffio, A., Kayser, B., Vermeulen, B., Jacquet, J., and Vu, N. V. (1999). Improvement of tutorial skills: an effect of workshops or experience? *Academic Medicine* 74, S75–S77

Bollen, L., Van Kampen, P., and De Cock, M. (2015). Students' difficulties with vector calculus in electrodynamics. *Physical Review Special Topics - Physics Education Research* 11, 020129. doi:10.1103/PhysRevSTPER.11.020129

Bollen, L., van Kampen, P., and De Cock, M. (2018). Development, implementation, and assessment of a guided-inquiry teaching-learning sequence on vector calculus in electrodynamics. *Physical Review Physics Education Research* 14, 020115. doi:10.1103/PhysRevPhysEducRes.14.020115

Ding, L. and Beichner, R. (2009). Approaches to data analysis of multiple-choice questions. *Physical Review Special Topics - Physics Education Research* 5, 020103. doi:10.1103/PhysRevSTPER.5.020103

Dolmans, D. H., Wolfhagen, I., Schmidt, H., and Van der Vleuten, C. (1994). A rating scale for tutor evaluation in a problem-based curriculum: validity and reliability. *Medical Education* 28, 550–558. doi:10.1111/j.1365-2923.1994.tb02735.x

George, D. and Mallery, P. (2019). *IBM SPSS Statistics 25 tep by step: A simple guide and reference* (New York: Routledge)

Hahn, L. and Klein, P. (2022). Kognitive Entlastung durch Zeichenaktivitäten? Eine empirische Untersuchung im Kontext der Vektoranalysis. In *Unsicherheit als Element von*

naturwissenschaftsbezogenen Bildungsprozessen, eds. S. Habig and H. van Vorst (Gesellschaft für Didaktik der Chemie und Physik, virtuelle Jahrestagung 2021), 384–387

Klein, P., Hahn, L., and Kuhn, J. (2021). Einfluss visueller Hilfen und räumlicher Fähigkeiten auf die graphische Interpretation von Vektorfeldern: Eine Eye-Tracking-Untersuchung. *Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften* 27, 181–201. doi:10.1007/s40573-021-00133-2

Klein, P., Viiri, J., and Kuhn, J. (2019). Visual cues improve students' understanding of divergence and curl: Evidence from eye movements during reading and problem solving. *Physical Review Physics Education Research* 15, 010126. doi:10.1103/PhysRevPhysEducRes.15.010126

Klein, P., Viiri, J., Mozaffari, S., Dengel, A., and Kuhn, J. (2018). Instruction-based clinical eye-tracking study on the visual interpretation of divergence: How do students look at vector field plots? *Physical Review Physics Education Research* 14, 010116. doi:10.1103/PhysRevPhysEducRes.14.010116

Klepsch, M., Schmitz, F., and Seufert, T. (2017). Development and validation of two instruments measuring intrinsic, extraneous, and germane cognitive load. *Frontiers in Psychology* 8, 1997. doi:10.3389/fpsyg.2017.01997

Krell, M. (2017). Evaluating an instrument to measure mental load and mental effort considering different sources of validity evidence. *Cogent Education* 4, 1280256. doi:10.1080/2331186X.2017.1280256

Leppink, J., Paas, F., Van der Vleuten, C. P., Van Gog, T., and Van Merriënboer, J. J. (2013). Development of an instrument for measuring different types of cognitive load. *Behavior Research Methods* 45, 1058–1072. doi:0.3758/s13428-013-0334-1

Scott, T. F., Schumayer, D., and Gray, A. R. (2012). Exploratory factor analysis of a Force Concept Inventory data set. *Physical Review Special Topics - Physics Education Research* 8, 020105. doi:10.1103/PhysRevSTPER.8.020105

Tabachnick, B. G. and Fidell, L. S. (2019). *Using multivariate statistics* (Boston: Pearson)

A.2 Lehr-Lern-Materialien und Forschungsinstrumente

Im Folgenden sind die untersuchten Lehr-Lern-Materialien sowie alle weiteren eingesetzten Testinstrumente, d. h. Performanztests und Fragebögen (Kap. 4.4), für die drei empirischen Studien dieser Arbeit (Studie *Strategien*, Kap. 6; Studie *Zeichnen*, Kap. 7; Studie *Lernaufgaben*, Kap 8 und 9) dargestellt. Neben der Formulierung der Performanztestaufgaben und der Fragebögenitems ist auch die Referenz der originalen Aufgaben und Items, auf denen diese beruhen, angegeben. Für die Aufgaben der verwendeten Performanztests ist z. T. das Aufgabenformat, eine Kurzbeschreibung oder das Aufgabenthema sowie die Itemschwierigkeit aufgeführt. Die Angabe der Kurzbeschreibung bzw. des Aufgabenthemas bezieht sich dabei auf die Bezeichnung der entsprechenden Aufgabe(n) in der zugehörigen Publikation und soll eine Einordnung der Aufgaben in das Studiendesign unterstützen. Die Darstellung der Aufgaben, die mit Eye-Tracking untersucht wurden, wurde z. T. für die Präsentation am Bildschirm adaptiert.

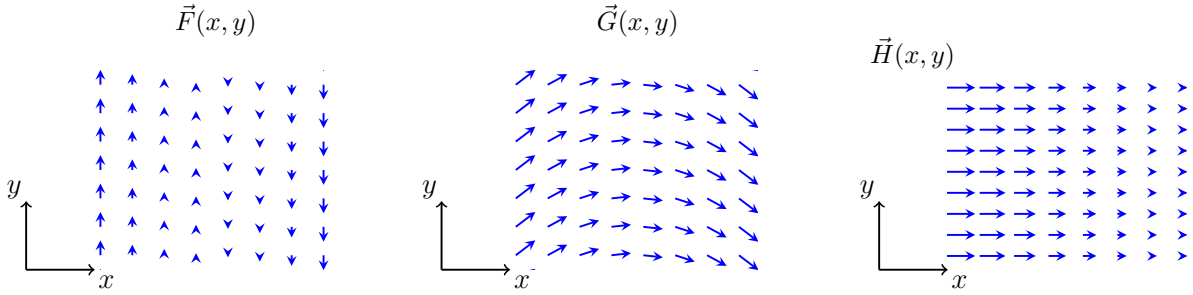
Studie *Strategien*: Aufgaben zur Erfassung der Performanz (Kap. 6)

Hinweis: Die Aufgabenentwicklung sowie die Erhebung dieser Studie erfolgte nicht durch die Verfasserin dieser Dissertation sondern wurde im Vorfeld von der AG Kuhn (TU Kaiserslautern) durchgeführt.

Aufgabe	Beschreibung/Einordnung in die Studie	Format[a]	Referenz	P^b
F1	Vektorfeldkomponenten (Vorwissen)	TF[c]	Klein et al. (2018, 2019, 2021b)	0.93
F2	Komponentenzerlegung (Vorwissen)	O	Klein et al. (2019, 2021b)	0.80
F3	Repräsentationswechsel (computergestützte Koordinationsaufgabe)[d]	MC4[c]	–	0.74
F4	Repräsentationswechsel (papier-basierte Koordinationsaufgabe)	O	Bollen et al. (2017, Aufg. 2b); VFR	0.69

[a] *Aufgabenformat:* MC4 = Multiple-Choice-Item mit vier Optionen, TF = True-False-Item, O = Offenes Antwortformat (Skizze, Formel, Erläuterung);
[b] Itemschwierigkeit; [c] Erhebung der Antwortsicherheit; [d] mit Eye-Tracking untersucht

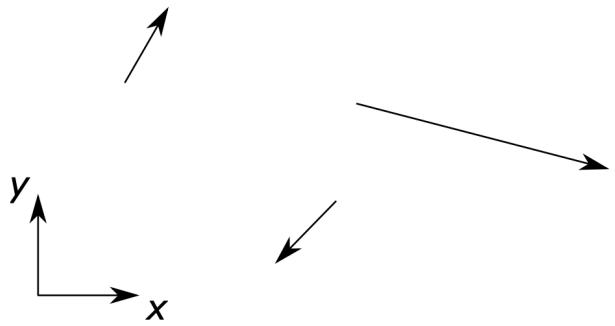
F1) Gegeben sind die Schaubilder der zweidimensionalen Vektorfelder $\vec{F}(x,y)$, $\vec{G}(x,y)$ and $\vec{H}(x,y)$. F_x bezeichnet die Komponente des Feldes $\vec{F}$ in x-Richtung, usw.:



Kreuzen Sie jeweils an, ob die Aussage richtig oder falsch ist:

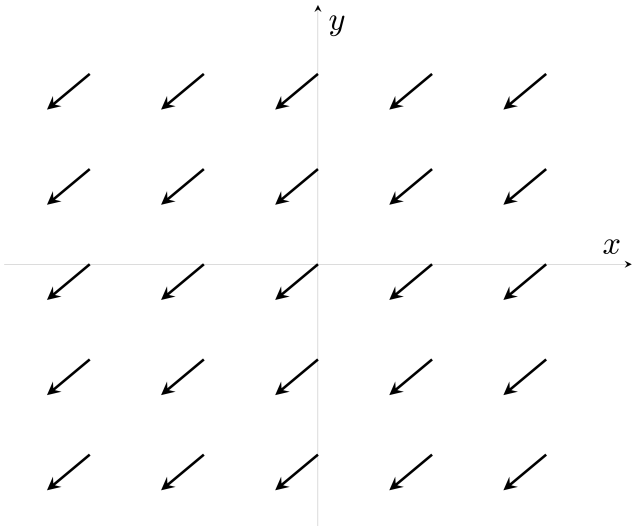
	richtig	falsch	Antwortsicherheit					
1. $F_x = 0$ überall	☐	☐	sehr sicher	☐	☐	☐	☐	unsicher
2. $F_y = 0$ überall	☐	☐		☐	☐	☐	☐	
3. $G_x = 0$ überall	☐	☐		☐	☐	☐	☐	
4. $G_y = 0$ überall	☐	☐		☐	☐	☐	☐	
5. $H_x = 0$ überall	☐	☐		☐	☐	☐	☐	
6. $H_y = 0$ überall	☐	☐		☐	☐	☐	☐	

F2) Gegeben sind drei Vektoren in der x-y Ebene. Skizzieren Sie die Vektorkomponententenzerlegung in x- und y-Richtung:



F3)

1. Welche Formel beschreibt das dargestellte Vektorfeld?



(a) $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$

(c) $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

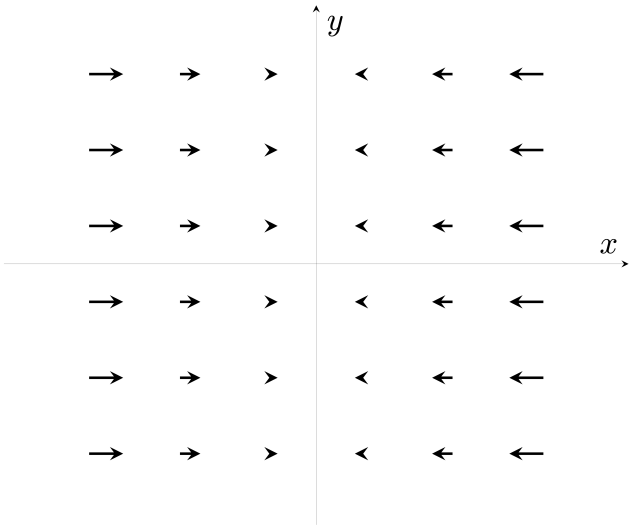
(d) $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Geben Sie bitte an, wie sicher Sie sich Ihrer Antwort sind (auf einer Skala von 1 = „absolut sicher“ bis 6 = „absolut unsicher“).

1 **6**

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

2. Welche Formel beschreibt das dargestellte Vektorfeld?



(a) $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} -x \\ 0 \end{pmatrix}$

(c) $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}$

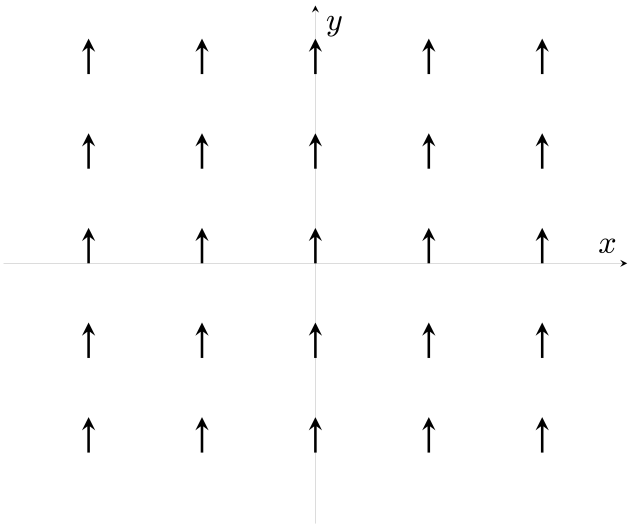
(d) $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$

Geben Sie bitte an, wie sicher Sie sich Ihrer Antwort sind (auf einer Skala von 1 = „absolut sicher“ bis 6 = „absolut unsicher“).

1 **6**

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

3. Welche Formel beschreibt das dargestellte Vektorfeld?



(a) $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$

(c) $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

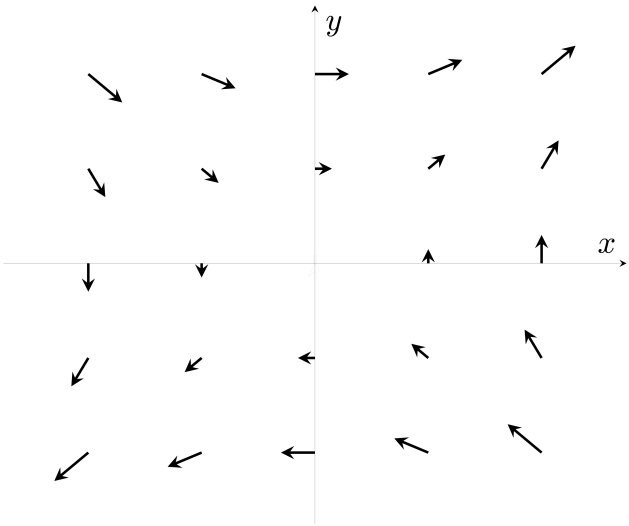
(d) $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Geben Sie bitte an, wie sicher Sie sich Ihrer Antwort sind (auf einer Skala von 1 = „absolut sicher“ bis 6 = „absolut unsicher“).

1 **6**

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

4. Welche Formel beschreibt das dargestellte Vektorfeld?



(a) $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$

(b) $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$

(c) $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} -x \\ x \end{pmatrix}$

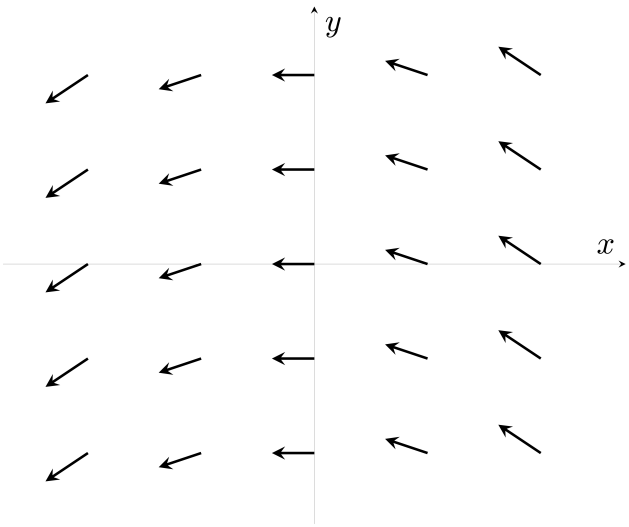
(d) $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix}$

Geben Sie bitte an, wie sicher Sie sich Ihrer Antwort sind (auf einer Skala von 1 = „absolut sicher“ bis 6 = „absolut unsicher“).

1 **6**

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

5. Welche Formel beschreibt das dargestellte Vektorfeld?



(a) $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} -1 \\ x \end{pmatrix}$

(b) $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ -y \end{pmatrix}$

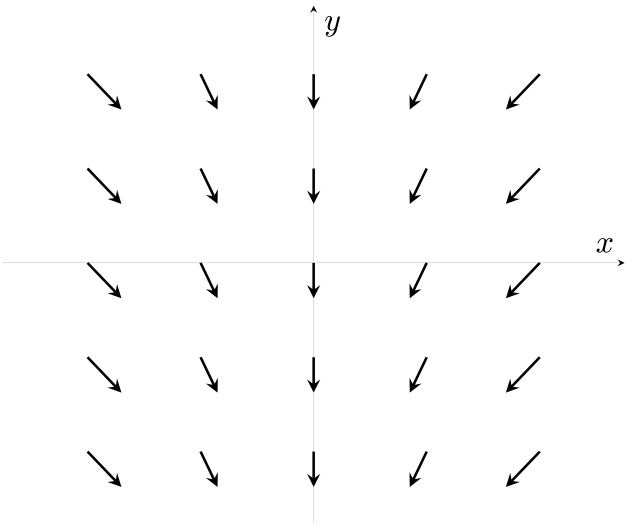
(c) $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} -x \\ 0 \end{pmatrix}$

(d) $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$

Geben Sie bitte an, wie sicher Sie sich Ihrer Antwort sind (auf einer Skala von 1 = „absolut sicher“ bis 6 = „absolut unsicher“).

1					**6**
☐	☐	☐	☐	☐	☐

6. Welche Formel beschreibt das dargestellte Vektorfeld?



(a) $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ -1 \end{pmatrix}$

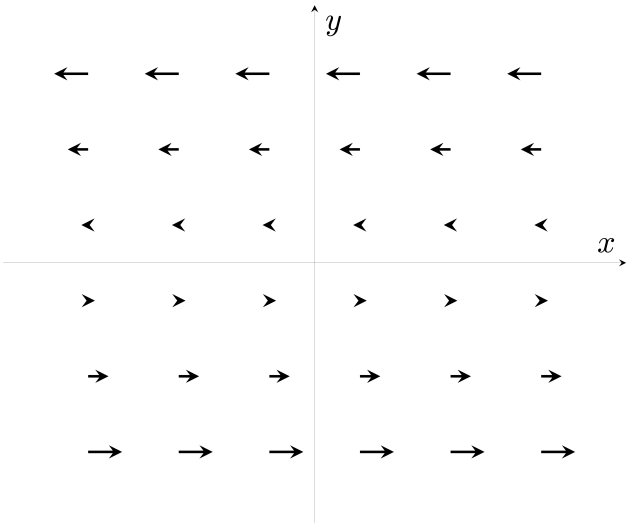
(c) $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$

(d) $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} -x \\ -1 \end{pmatrix}$

Geben Sie bitte an, wie sicher Sie sich Ihrer Antwort sind (auf einer Skala von 1 = „absolut sicher“ bis 6 = „absolut unsicher“).

1					**6**
☐	☐	☐	☐	☐	☐

7. Welche Formel beschreibt das dargestellte Vektorfeld?



(a) $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ 0 \end{pmatrix}$

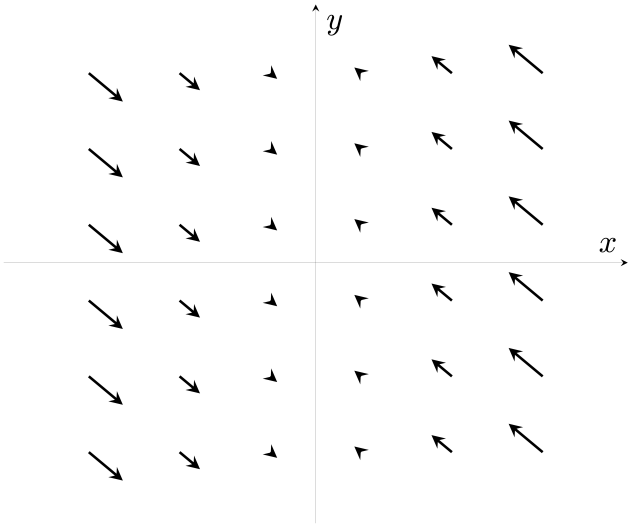
(c) $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} -1 \\ x \end{pmatrix}$

(d) $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$

Geben Sie bitte an, wie sicher Sie sich Ihrer Antwort sind (auf einer Skala von 1 = „absolut sicher“ bis 6 = „absolut unsicher“).

1					**6**
☐	☐	☐	☐	☐	☐

8. Welche Formel beschreibt das dargestellte Vektorfeld?



(a) $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} -x \\ x \end{pmatrix}$

(b) $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$

(c) $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ -y \end{pmatrix}$

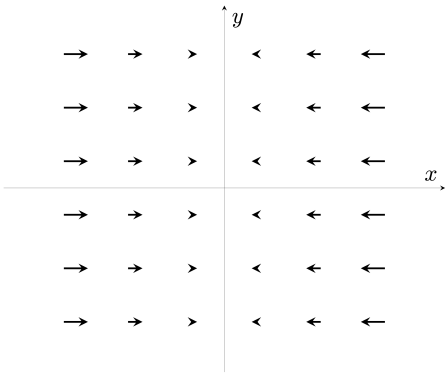
(d) $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Geben Sie bitte an, wie sicher Sie sich Ihrer Antwort sind (auf einer Skala von 1 = „absolut sicher“ bis 6 = „absolut unsicher“).

1					**6**
☐	☐	☐	☐	☐	☐

F4) Gegeben sind Schaubilder von Vektorfeldern. Geben Sie eine Formel an, die das Vektorfeld qualitativ korrekt beschreibt. Erklären Sie auch, wie Sie dabei vorgegangen sind.

1.



Formel:

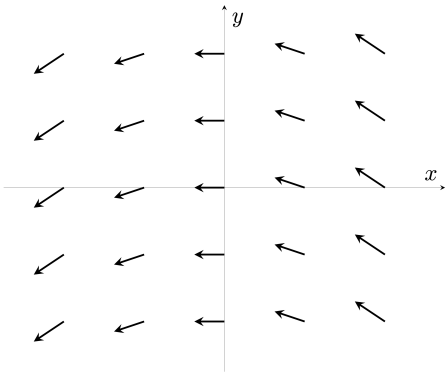
Erklärung: _____

_____

_____

_____

2.



Formel:

Erklärung: _____

_____

_____

_____

Studie *Zeichnen* (Kap. 7)

Lehr-Lern-Materialien: Kontrollgruppe (ohne Zeichenaktivitäten)

Hinweis: Die Lehr-Lern-Materialien der Interventionsgruppe (mit Zeichenaktivitäten) sind der Publikation als ergänzendes Material hinzugefügt (Anhang A.1).

Vektoren und partielle Ableitungen

Ein Vektorfeld $\vec{F}$ ist eine Abbildung, die jedem Raumpunkt (x, y) einen Vektor $\vec{F}(x, y)$ zuordnet. Die Vektoren werden mithilfe der Komponenten F_x und F_y bzgl. der Koordinaten x und y dargestellt, wobei die positive x-Achse im Folgenden in horizontaler Richtung nach rechts und die positive y-Achse in vertikaler Richtung nach oben orientiert ist.

1. Betrachten Sie zunächst den folgenden Vektor und zerlegen Sie ihn gedanklich in seine Komponenten F_x und F_y.

Welche der folgenden Aussagen trifft zu? Kreuzen Sie an!

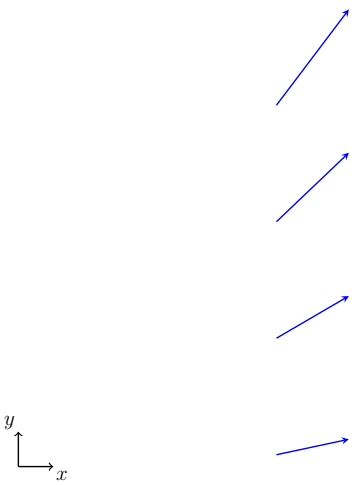
- ☐ x- und y-Komponente sind gleich groß.
- ☐ Die x-Komponente ist größer als die y-Komponente.
- ☐ Die y-Komponente ist größer als die x-Komponente.

2. Zerlegen Sie nun jeden Vektor der nachfolgenden Vektorzeile gedanklich in die Komponenten F_x und F_y.

Welche der folgenden Aussagen trifft zu? Markieren Sie alle richtigen Aussagen.

- ☐ F_y nimmt in x-Richtung zu.
- ☐ F_y nimmt in x-Richtung ab.
- ☐ F_y ist konstant.
- ☐ F_x ist konstant.
- ☐ F_x nimmt in x-Richtung ab.
- ☐ F_x nimmt in x-Richtung zu.

3. Zerlegen Sie die Vektoren der nachfolgenden Vektorspalte gedanklich in ihre Vektorkomponenten.



Welche der folgenden Aussagen trifft zu? Markieren Sie alle richtigen Aussagen.

- ☐ F_y nimmt in y-Richtung zu.
- ☐ F_y ist konstant.
- ☐ F_y nimmt in y-Richtung ab.
- ☐ F_x ist konstant.
- ☐ F_x nimmt in y-Richtung ab.
- ☐ F_x nimmt in y-Richtung zu.

Die Änderung der Feldvektoren in x-Richtung (entlang einer Zeile) oder in y-Richtung (entlang einer Spalte) wird mithilfe der partiellen Ableitungen $\frac{\partial F_x}{\partial x}$ der F_x-Komponente nach x bzw. $\frac{\partial F_y}{\partial y}$ der F_y-Komponente nach y beschrieben. Es gilt $\frac{\partial F_x}{\partial x} > 0$, wenn F_x in positiver x-Richtung zunimmt und $\frac{\partial F_x}{\partial x} < 0$, wenn F_x in positiver x-Richtung abnimmt (analog für die partiellen Ableitungen nach y).

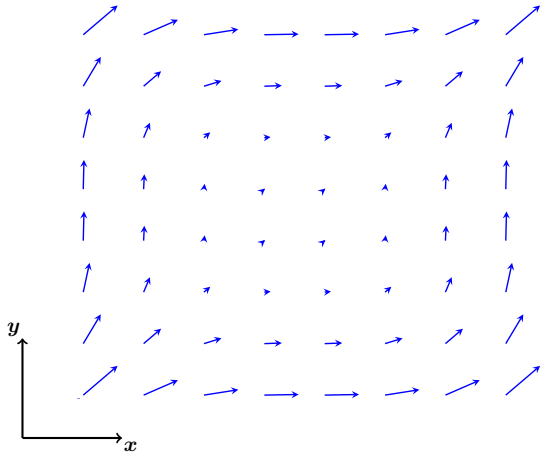
Interpretation der Divergenz

Die Divergenz eines Vektorfeldes ($\operatorname{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}$) an einem Ort (x, y) ergibt sich über die Summe der partiellen Ableitungen

$$\operatorname{div} \vec{F}(x, y) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y}\,.$$

Interpretieren Sie diese Gleichung anschaulich am Beispiel des folgenden Vektorfeldes, indem Sie wie folgt vorgehen:

- Wählen Sie einen beliebigen Vektor im Feld aus. Zerlegen Sie diesen Vektor gedanklich in eine x- und eine y-Komponente.
- Untersuchen Sie, ob sich die x-Komponente des Vektorfeldes in x-Richtung (entlang einer Zeile) ändert. Dies entspricht dem ersten Summanden in obiger Gleichung.
- Untersuchen Sie auch, ob sich die y-Komponente des Vektorfeldes in y-Richtung (entlang einer Spalte) ändert. Dies entspricht dem zweiten Summanden in der Gleichung.
- Sollte sich weder F_x in x-Richtung noch F_y in y-Richtung ändern, so ist das Feld quellfrei. Zu diesem Ergebnis sollten Sie hier gekommen sein. Ändert sich eine der beiden Komponenten, ist das Feld nicht quellfrei. Den Fall, dass sich die Veränderungen in x- und in y-Richtung gerade aufheben, betrachten wir nicht.
- Bei allen hier verwendeten Vektorfeldern ist die Divergenz räumlich konstant. Um dies zu überprüfen, wählen Sie einen zweiten beliebigen Vektor und führen Sie das beschriebene Vorgehen erneut durch. Auch hier sollten Sie zu dem Ergebnis kommen, dass es sich um ein quellfreies Vektorfeld handelt.



Hinweis: Streng genommen bedeuten partielle Ableitungen infinitesimale Änderungen. Da die Divergenz der Vektorfelder hier aber konstant Null oder nicht-Null ist, können wir Vektoren miteinander vergleichen, die nicht infinitesimal neben- bzw. übereinander liegen.

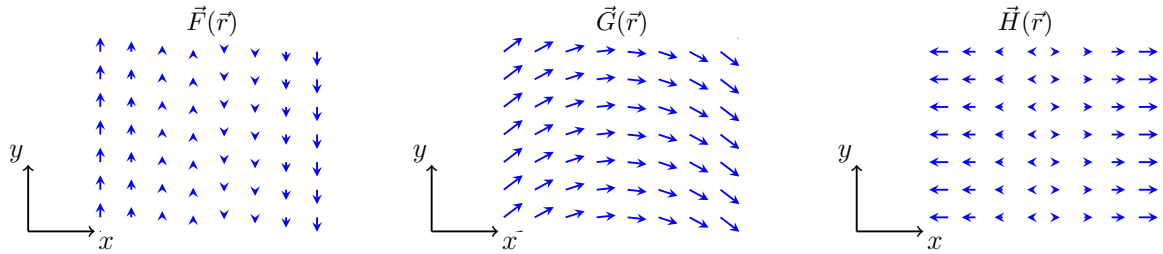
Aufgaben zur Erfassung der Performanz: Vektorfelder und Divergenz

Aufgabe	Beschreibung/Einordnung in die Studie	Format[a]	Referenz	P^b
D1	Vektorfeldkomponenten (Vorwissen)	TF[c]	Klein et al. (2018, 2019, 2021b)	0.93
D2	Konzeptwissen Divergenz[d]	TF[c], MC3[c], MC4[c]	Baily et al. (2015), Bollen et al. (2018) und Klein et al. (2018, 2019, 2021b)	0.76
D3	Visuelle Interpretation der Divergenz (VF_0)[d,f]	MC3	Klein et al. (2018, 2019, 2021b)	0.39
D4	Visuelle Interpretation der Divergenz (Problemlösen)[e,g]	MC2[c]	Bollen et al. (2015, 2018) und Klein et al. (2018, 2019, 2021b)	0.85
D5	Visuelle Interpretation partieller Vektorableitungen (Transfer)[e]	MC3[c]	–	0.74

[a] *Aufgabenformat:* MC2/3/4 = Multiple-Choice-Item mit zwei/drei/vier Optionen, TF = True-False-Item, O = Offenes Antwortformat (Formel, Stichwort);
[b] Itemschwierigkeit (Teilstudie 1; D1-D3 Prätest, D4-D5 Posttest); [c] Erhebung der Antwortsicherheit; [d] Erhebung Prä und Post der Intervention; [e] Nur im Posttest enthalten; [f] Im Posttest Teilaufgabe von D4; [g] mit Eye-Tracking untersucht

A Vektorfelder

D1) Gegeben sind die Schaubilder der zweidimensionalen Vektorfelder $\vec{F}(\vec{r})$, $\vec{G}(\vec{r})$ und $\vec{H}(\vec{r})$. F_x bezeichnet die x-Komponente des Feldes $\vec{F}$ (analog für alle weiteren Komponenten).



Kreuzen Sie jeweils an, ob die Aussage richtig oder falsch ist und geben Sie außerdem an, wie sicher Sie sich Ihrer Antwort sind (auf einer Skala von 1 = „absolut sicher“ bis 6 = „absolut unsicher“).

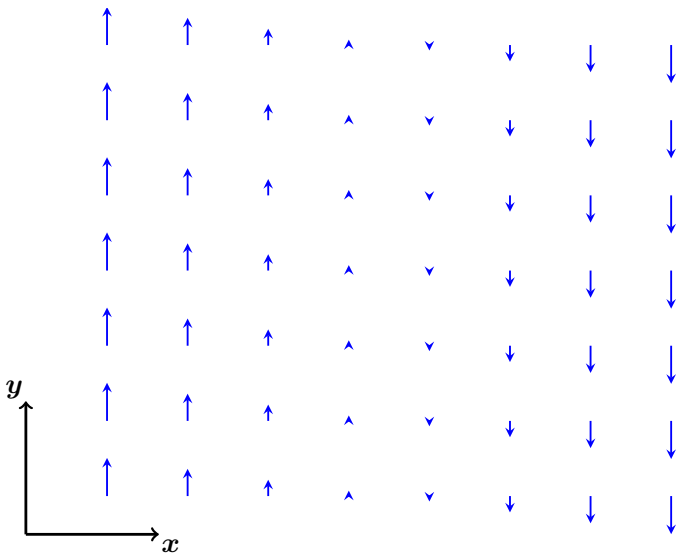
	richtig	**falsch**	**Antwortsicherheit** 1					6
1. $F_x = 0$ überall	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
2. $F_y = 0$ überall	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
3. $G_x = 0$ überall	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
4. $G_y = 0$ überall	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
5. $H_x = 0$ überall	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
6. $H_y = 0$ überall	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

B Divergenz von Vektorfeldern

D2) Kreuzen Sie an, ob die folgenden Aussagen über die Divergenz richtig bzw. falsch sind und geben Sie außerdem an, wie sicher Sie sich Ihrer Antwort sind (auf einer Skala von 1 = „absolut sicher“ bis 6 = „absolut unsicher“).

	richtig	**falsch**	**Antwortsicherheit** **1**					**6**
1. Die Divergenz gibt die Richtung des steilsten Anstiegs an.	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
2. Wenn die Divergenz eines Vektorfeldes an jeder Stelle positiv ist, existiert an jeder Stelle eine Quelle.	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
3. Die Divergenz kann für jede Stelle eines Feldes verschieden sein.	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
4. Die Divergenz ist eine globale Feldeigenschaft: Entweder sie ist räumlich konstant oder null.	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
5. Für die Divergenz gilt: $\operatorname{div} \vec{F} = \ldots$ ☐ $\nabla \vec{F}$ ☐ $\nabla \times \vec{F}$ ☐ $\nabla \cdot \vec{F}$			☐	☐	☐	☐	☐	☐
6. Die Divergenz an einer Stelle eines Vektorfeldes ist ... ☐ ein Skalar ☐ ein Skalarfeld ☐ ein Vektor ☐ ein Vektorfeld			☐	☐	☐	☐	☐	☐

D3) Gegeben ist das folgende Schaubild eines Vektorfeldes $\vec{F}(x, y)$ in der x-y-Ebene.



Welche Aussage können Sie über die Divergenz des Vektorfeldes formulieren? Kreuzen Sie an!

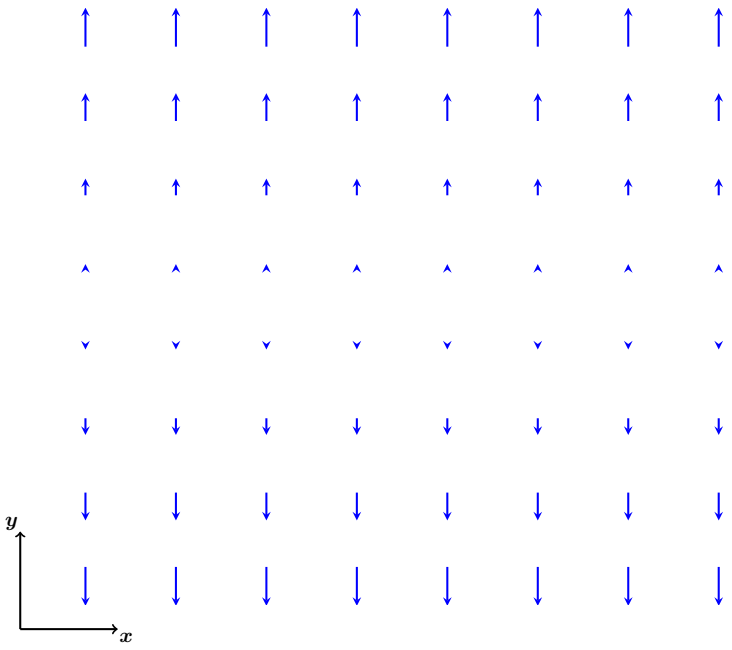
☐ Ich kann darüber keine Aussage treffen.

☐ Das Vektorfeld besitzt eine Divergenz. (Mit anderen Worten ist die Divergenz an wenigstens einer Stelle von Null verschieden.)

☐ Das Vektorfeld besitzt keine Divergenz. (Das bedeutet, dass die Divergenz an jeder Stelle gleich Null ist.)

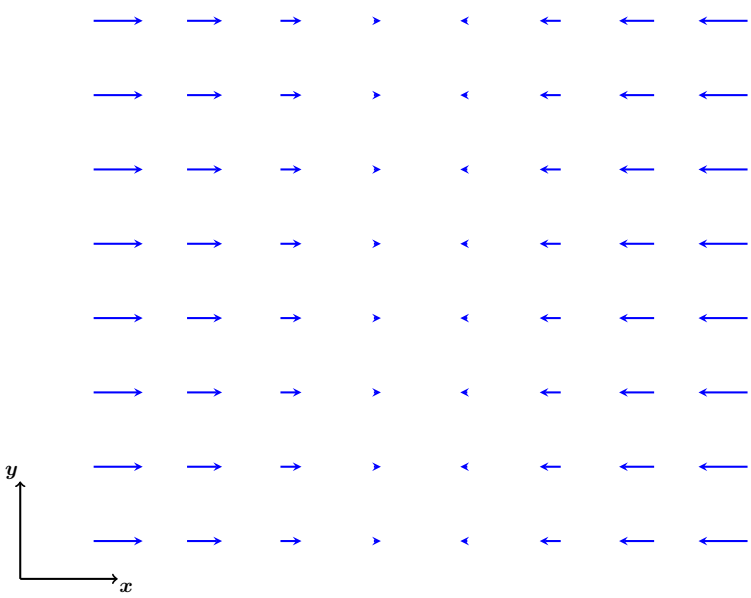
D4)

1. Beurteilen Sie, ob das folgende Vektorfeld quellfrei ist oder nicht (div $\vec{F} = 0$ oder div $\vec{F} \neq 0$). Sobald Sie sich für eine Antwort entschieden haben, kreuzen Sie diese bitte an. Notieren Sie außerdem Ihre Antwortsicherheit (auf einer Skala von 1 = „absolut sicher“ bis 6 = „absolut unsicher“).



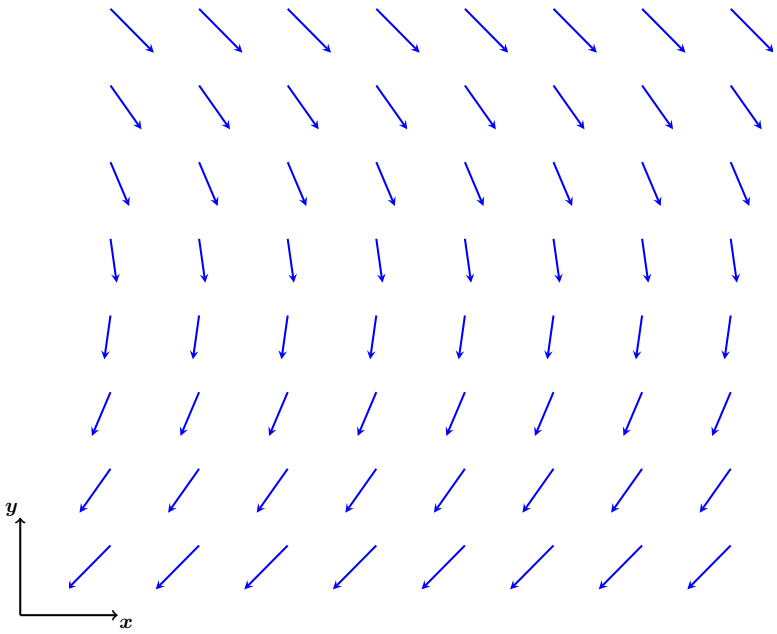
div $\vec{F}$		Antwortsicherheit					
$= 0$	$\neq 0$	1					6
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

2. Beurteilen Sie, ob das folgende Vektorfeld quellfrei ist oder nicht (div $\vec{F} = 0$ oder div $\vec{F} \neq 0$). Sobald Sie sich für eine Antwort entschieden haben, kreuzen Sie diese bitte an. Notieren Sie außerdem Ihre Antwortsicherheit (auf einer Skala von 1 = „absolut sicher“ bis 6 = „absolut unsicher“).



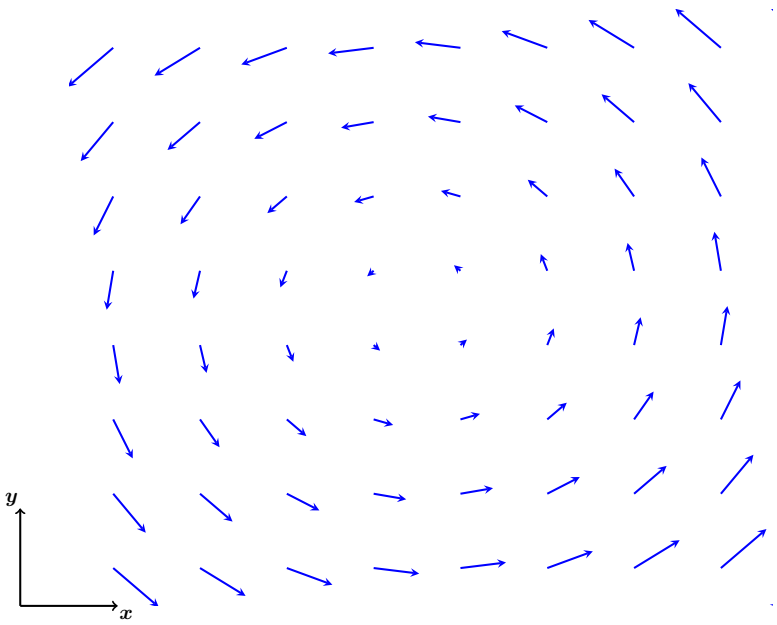
div $\vec{F}$		Antwortsicherheit					
$= 0$	$\neq 0$	1					6
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

3. Beurteilen Sie, ob das folgende Vektorfeld quellfrei ist oder nicht (div $\vec{F} = 0$ oder div $\vec{F} \neq 0$). Sobald Sie sich für eine Antwort entschieden haben, kreuzen Sie diese bitte an. Notieren Sie außerdem Ihre Antwortsicherheit (auf einer Skala von 1 = „absolut sicher“ bis 6 = „absolut unsicher“).



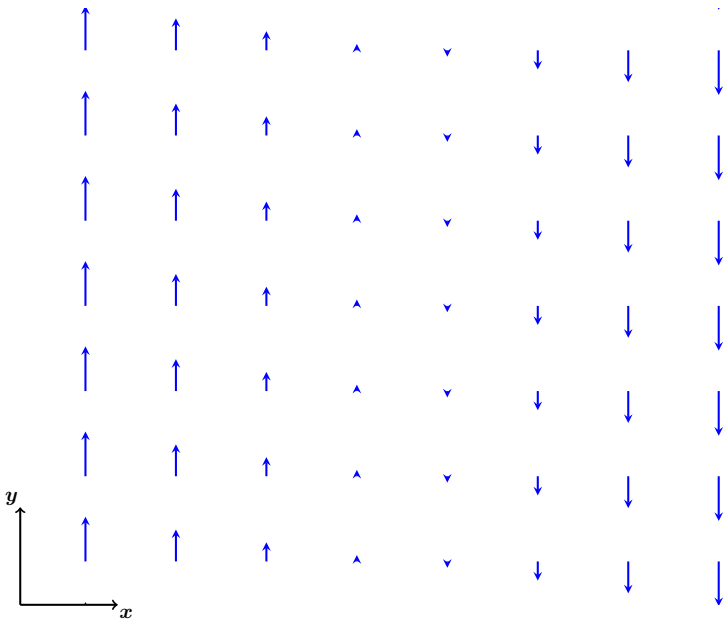
div $\vec{F}$		Antwortsicherheit					
$= 0$	$\neq 0$	1					6
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

4. Beurteilen Sie, ob das folgende Vektorfeld quellfrei ist oder nicht (div $\vec{F} = 0$ oder div $\vec{F} \neq 0$). Sobald Sie sich für eine Antwort entschieden haben, kreuzen Sie diese bitte an. Notieren Sie außerdem Ihre Antwortsicherheit (auf einer Skala von 1 = „absolut sicher“ bis 6 = „absolut unsicher“).



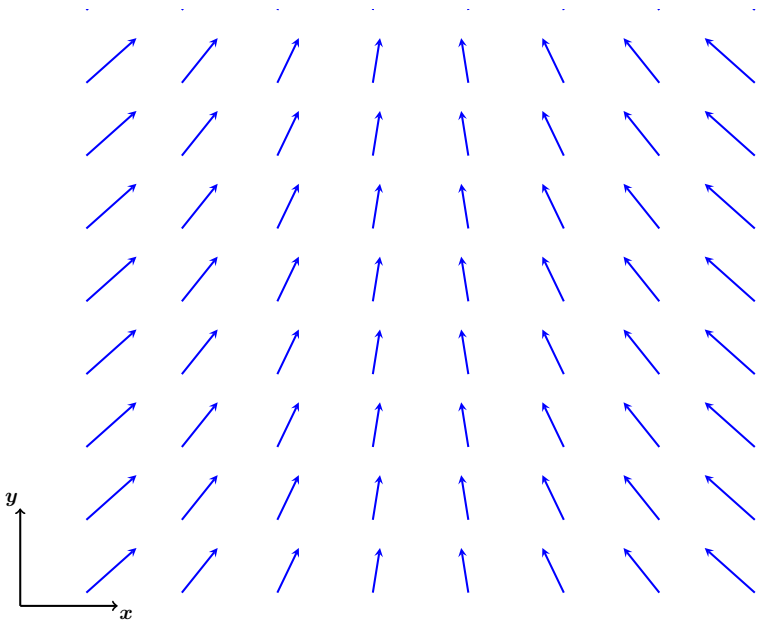
div $\vec{F}$		Antwortsicherheit					
$= 0$	$\neq 0$	1					6
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

5. Beurteilen Sie, ob das folgende Vektorfeld quellfrei ist oder nicht (div $\vec{F} = 0$ oder div $\vec{F} \neq 0$). Sobald Sie sich für eine Antwort entschieden haben, kreuzen Sie diese bitte an. Notieren Sie außerdem Ihre Antwortsicherheit (auf einer Skala von 1 = „absolut sicher“ bis 6 = „absolut unsicher“).



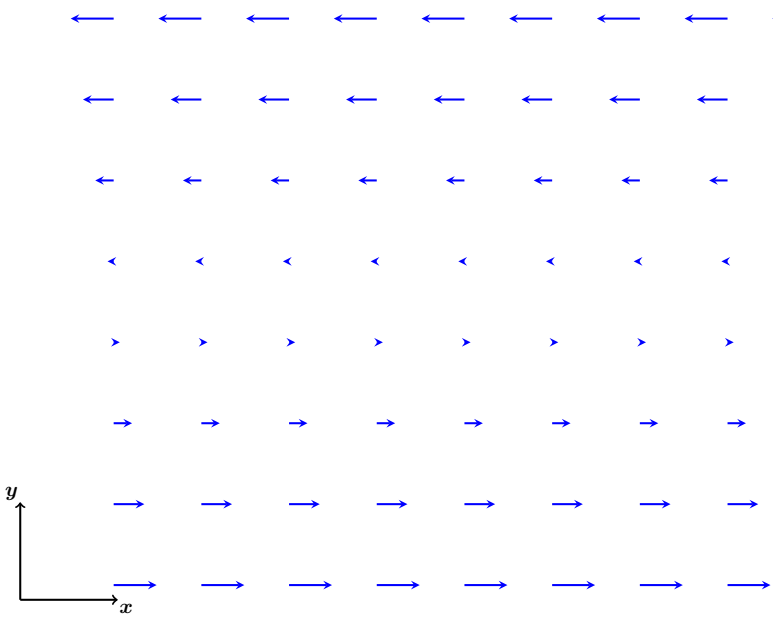
div $\vec{F}$		Antwortsicherheit					
$= 0$	$\neq 0$	1					6
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

6. Beurteilen Sie, ob das folgende Vektorfeld quellfrei ist oder nicht (div $\vec{F} = 0$ oder div $\vec{F} \neq 0$). Sobald Sie sich für eine Antwort entschieden haben, kreuzen Sie diese bitte an. Notieren Sie außerdem Ihre Antwortsicherheit (auf einer Skala von 1 = „absolut sicher“ bis 6 = „absolut unsicher“).



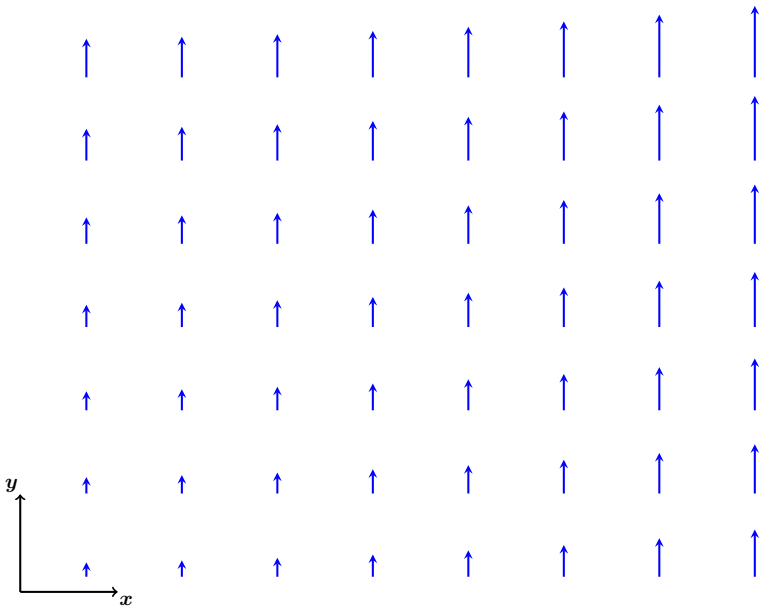
div $\vec{F}$		Antwortsicherheit					
$= 0$	$\neq 0$	1					6
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

7. Beurteilen Sie, ob das folgende Vektorfeld quellfrei ist oder nicht (div $\vec{F} = 0$ oder div $\vec{F} \neq 0$). Sobald Sie sich für eine Antwort entschieden haben, kreuzen Sie diese bitte an. Notieren Sie außerdem Ihre Antwortsicherheit (auf einer Skala von 1 = „absolut sicher“ bis 6 = „absolut unsicher“).



div $\vec{F}$		Antwortsicherheit					
$= 0$	$\neq 0$	1					6
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

8. Beurteilen Sie, ob das folgende Vektorfeld quellfrei ist oder nicht (div $\vec{F} = 0$ oder div $\vec{F} \neq 0$). Sobald Sie sich für eine Antwort entschieden haben, kreuzen Sie diese bitte an. Notieren Sie außerdem Ihre Antwortsicherheit (auf einer Skala von 1 = „absolut sicher“ bis 6 = „absolut unsicher“).



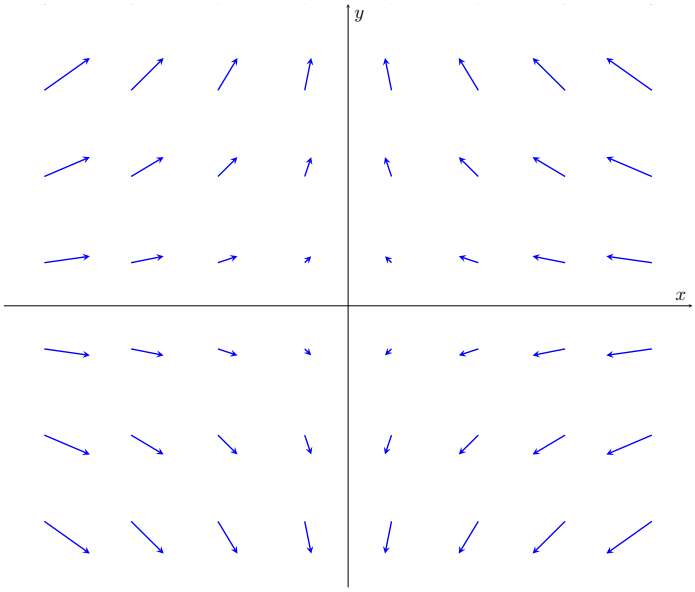
div $\vec{F}$		Antwortsicherheit					
$= 0$	$\neq 0$	1					6
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Bitte umblättern.

D5)

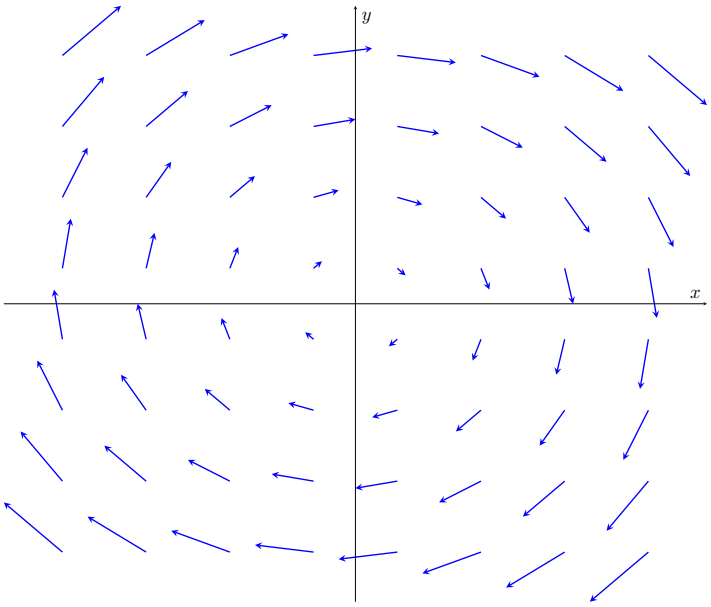
Beachten Sie bitte: Für die nachfolgenden Aufgaben befinden sich die Koordinatenachsen nicht mehr außerhalb des Vektorfelddiagramms, sondern sind zentral in das Vektorfelddiagramm eingezeichnet. Sie helfen Ihnen bei der Orientierung im Vektorfeld.

1. Betrachten Sie das folgende Vektorfeld. Welches der Vergleichszeichen (> 0, < 0 oder $= 0$) gilt für die partiellen Ableitungen $\frac{\partial F_x}{\partial x}$, $\frac{\partial F_y}{\partial y}$, $\frac{\partial F_x}{\partial y}$ und $\frac{\partial F_y}{\partial x}$ dieses Vektorfeldes? Sobald Sie sich für eine Antwort (> 0, < 0 oder $= 0$) entschieden haben, markieren Sie diese bitte in der entsprechenden Zeile für die jeweilige partielle Ableitung. Geben Sie außerdem an, wie sicher Sie sich Ihrer Antwort sind (auf einer Skala von 1 = „absolut sicher“ bis 6 = „absolut unsicher“).



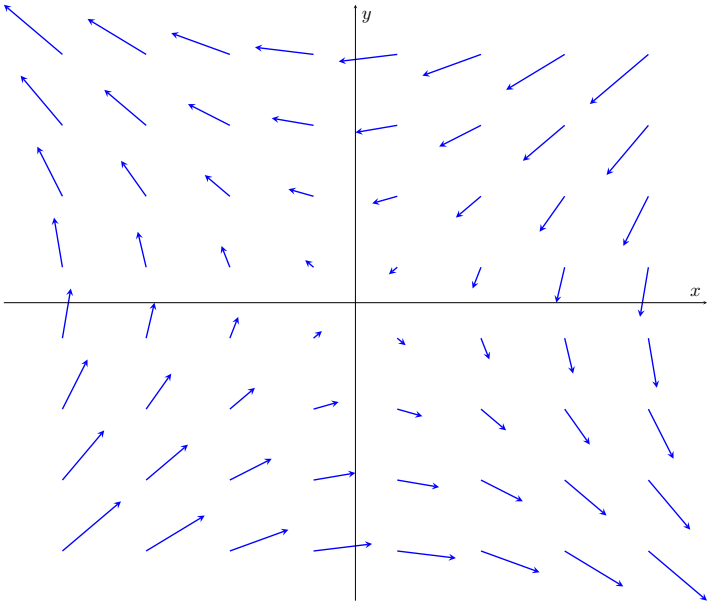
				Antwortsicherheit					
	> 0	< 0	$= 0$	1					6
$\frac{\partial F_x}{\partial x}$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
$\frac{\partial F_y}{\partial y}$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
$\frac{\partial F_x}{\partial y}$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
$\frac{\partial F_y}{\partial x}$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

2. Betrachten Sie das folgende Vektorfeld. Welches der Vergleichszeichen (> 0, < 0 oder $= 0$) gilt für die partiellen Ableitungen $\frac{\partial F_x}{\partial x}$, $\frac{\partial F_y}{\partial y}$, $\frac{\partial F_x}{\partial y}$ und $\frac{\partial F_y}{\partial x}$ dieses Vektorfeldes? Sobald Sie sich für eine Antwort (> 0, < 0 oder $= 0$) entschieden haben, markieren Sie diese bitte in der entsprechenden Zeile für die jeweilige partielle Ableitung. Geben Sie außerdem an, wie sicher Sie sich Ihrer Antwort sind (auf einer Skala von 1 = „absolut sicher“ bis 6 = „absolut unsicher“).



				Antwortsicherheit					
	> 0	< 0	$= 0$	1					6
$\frac{\partial F_x}{\partial x}$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
$\frac{\partial F_y}{\partial y}$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
$\frac{\partial F_x}{\partial y}$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
$\frac{\partial F_y}{\partial x}$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

3. Betrachten Sie das folgende Vektorfeld. Welches der Vergleichszeichen (> 0, < 0 oder $= 0$) gilt für die partiellen Ableitungen $\frac{\partial F_x}{\partial x}$, $\frac{\partial F_y}{\partial y}$, $\frac{\partial F_x}{\partial y}$ und $\frac{\partial F_y}{\partial x}$ dieses Vektorfeldes? Sobald Sie sich für eine Antwort (> 0, < 0 oder $= 0$) entschieden haben, markieren Sie diese bitte in der entsprechenden Zeile für die jeweilige partielle Ableitung. Geben Sie außerdem an, wie sicher Sie sich Ihrer Antwort sind (auf einer Skala von 1 = „absolut sicher“ bis 6 = „absolut unsicher“).



				Antwortsicherheit					
	> 0	< 0	$= 0$	1					6
$\frac{\partial F_x}{\partial x}$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
$\frac{\partial F_y}{\partial y}$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
$\frac{\partial F_x}{\partial y}$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
$\frac{\partial F_y}{\partial x}$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Fragebogen zur kognitiven Belastung

Item	Itemformulierung	Referenz[a]
CL1	Das behandelte Thema der Komponentenzerlegung und Divergenz war sehr komplex.	LPC1
CL2	Die behandelten Formeln zur Komponentenzerlegung und Divergenz habe ich als sehr komplex empfunden.	LPC2
CL3	Die behandelten Konzepte und Definitionen zur Komponentenzerlegung und Divergenz habe ich als sehr komplex empfunden.	LPC3
CL4	Ich fand es schwierig, die Vektoren in Komponenten zu zerlegen.	KVK1.2
CL5	Ich fand es schwierig, die Veränderung von Vektorfeldkomponenten zu beurteilen.	KVK1.1
CL6	Ich fand es anstrengend, mich auf eine Reihe bzw. Spalte zu konzentrieren, um die partielle Ableitung zu evaluieren.	KVK1.3
CL7	Ich fand es schwierig, mich bei zweidimensionalen Feldern auf eine Feldkomponente einzuschränken.	KVK1.5
CL8	Die Anwendung der Strategie zur Beurteilung der Divergenz war für mich sehr anstrengend.	KVK1.4
CL9	Die Anleitungen und Erklärungen waren sehr unklar.	LPC4
CL10	Die wesentlichen Schritte für das Problemlösen wurden hervorgehoben und nachvollziehbar erklärt.	KVK2.1/2
CL11	Die Anleitungen und Erklärungen waren gut strukturiert.	KVK2.3
CL12	Die Anleitungen und Erklärungen beinhalteten alle notwendigen Informationen, um die Divergenz beurteilen zu können.	KVK2.4
CL13	Die Anleitungen und Erklärungen waren nicht effektiv.	LPC5
CL14	Ich hatte das Gefühl, die vermittelte Strategie führte zu zuverlässigen Ergebnissen.	–
CL15	In der Anleitung und den Erklärungen wurden viele unklare und unbekannte Begriffe verwendet.	LPC6
CL16	Ich hatte Schwierigkeiten, die verwendeten Formulierungen sprachlich zu verstehen.	–
CL17	Nach dem Lesen der Aufgaben und Erklärungen war mir klar, was ich zu tun hatte.	KVK2.5
CL18	Die Aufgaben und Erklärungen haben mein Verständnis von Komponentenzerlegung und Divergenz verbessert.	LPC7
CL19	Die Aufgaben und Erklärungen haben mein Verständnis der verwendeten Formeln zur Komponentenzerlegung und Divergenz verbessert.	LPC9
CL20	Die Aufgaben und Erklärungen haben mein Verständnis der Konzepte und Definitionen zur Komponentenzerlegung und Divergenz verbessert.	LPC10
CL21	Ich könnte die Inhalte jemand anderem erklären.	KVK2.6

[a] *Referenzabkürzungen:* LPC Leppink et al. (2013), KVK Klein et al. (2019)

Studie *Lernaufgaben* (Kap. 8 und 9)

Lernaufgaben: Vektoranalysis

Aufgabe: Divergenz von Vektorfeldern
In dieser Aufgabe beschäftigen Sie sich mit der Divergenz von Vektorfeldern anhand einer Simulation (`https://wwwuser.gwdg.de/physik.didaktik/v3ctor.html`). Sie *dürfen* die Simulation bei jeder Teilaufgabe zu Hilfe nehmen. Wenn Sie die Simulation nutzen *sollen*, ist dies explizit angegeben.

(a) Machen Sie sich mit der Simulation vertraut. Geben Sie hierfür verschiedene Vektorfelder ein und testen Sie alle Features. Die Informationsbuttons bieten Ihnen eine Orientierung.
Tipp: Beginnen Sie mit dem Vektorfeld mit x-Komponente $A_x = 1$ und y-Komponente $A_y = 0$ und betrachten Sie anschließend weitere, nicht-konstante Vektorfelder.

(1) Nehmen Sie Stellung zu folgender Aussage: „Der Raum zwischen zwei Vektoren ist leer."

(2) Zeichnen Sie ein zweidimensionales Vektorfeld $\vec{A}_1(x,y)$, das nur eine x-Komponente besitzt, die von der y-Koordinate abhängt. Geben Sie $\vec{A}_1(x,y)$ in der Form $\vec{A}_1(x,y) = A_{1,x}\hat{e}_x + A_{1,y}\hat{e}_y$ an. Zeichnen Sie dann ein zweidimensionales Vektorfeld $\vec{A}_2(r,\varphi)$, das nur eine von der r-Koordinate abhängige φ-Komponente besitzt und geben Sie es in der Form $\vec{A}_2(r,\varphi) = A_{2,r}\hat{e}_r + A_{2,\varphi}\hat{e}_\varphi$ an.

(b) Die Divergenz eines Vektorfeldes ($\operatorname{div}\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A}$) an einem Ort (x,y) ist für kartesische Koordinaten definiert durch die Summe der partiellen Ableitungen

$$\operatorname{div}\vec{A}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}A_x + \frac{\partial}{\partial y}A_y\,.$$

Betrachten Sie das Vektorfeld $\vec{B}(x,y)$ mit

$$\vec{B}(x,y) = -k\,(x\hat{e}_x + y\hat{e}_y)\,, \qquad \text{mit } k \in \mathbb{R} \text{ konstant}\,.$$

(1) Skizzieren Sie $\vec{B}(x,y)$ für $k = -1$.

(2) Wählen Sie einen beliebigen Ort in Ihrer Skizze aus und zeichnen Sie die Feldkomponenten für den Vektor an diesem Ort und für die Vektoren in seiner unmittelbaren Umgebung ein.

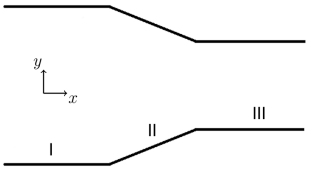
(3) Beurteilen Sie qualitativ anhand Ihrer Skizze, wie sich die Feldkomponenten entlang der Koordinatenrichtungen verändern: Geben Sie also an, ob die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x}B_x$ und $\frac{\partial}{\partial y}B_y$ positiv, negativ oder Null sind. Folgern Sie aus diesem Ergebnis, ob die Divergenz an dem von Ihnen gewählten Ort positiv, negativ oder Null ist. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mithilfe der Simulation sowie einer Rechnung.

(c) Betrachten Sie nun das Vektorfeld $\vec{C}(x,y)$ mit

$$\vec{C}(x,y) = xy\hat{e}_x + \hat{e}_y$$

in der Simulation. Beurteilen Sie für jeden der vier Quadranten, wie sich die Feldkomponenten der Vektoren entlang der x- bzw. y-Richtung verändern und schließen Sie daraus, ob die Divergenz innerhalb der Quadranten jeweils positiv, negativ oder Null ist. Überprüfen und begründen Sie Ihr Ergebnis mithilfe einer Rechnung.

(d) Innerhalb der abgebildeten Rohrgeometrie herrsche eine stationäre, d.h. zeitunabhängige, laminare Strömung in positive x-Richtung, die durch ein Geschwindigkeitsvektorfeld $\vec{v}(x,y)$ mit $v_y = 0$ in den geraden Rohrabschnitten I und III beschrieben wird.



(1) Skizzieren Sie $\vec{v}(x,y)$ mit $|\vec{v}_{\mathrm{III}}| > |\vec{v}_{\mathrm{I}}|$.

(2) Für Strömungen dieser Art gilt die Kontinuitätsgleichung: $\operatorname{div}\vec{v}(x,y) = 0$. Erklären Sie, wie das Strömungsfeld divergenzfrei sein kann, wo doch offensichtlich die horizontale Geschwindigkeitskomponente von I nach III zunimmt.

(e) Die Divergenz eines Vektorfeldes $\vec{A}(r,\varphi)$ an einem Ort (r,φ) ist für ebene Polarkoordinaten definiert durch

$$\operatorname{div}\vec{A}(r,\varphi) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}A_\varphi\,.$$

Das obige Vektorfeld $\vec{B}$ ist in ebenen Polarkoordinaten gegeben durch $\vec{B}(r,\varphi) = -kr\hat{e}_r$ (für $k = -1$). In Teilaufgabe (b) haben Sie den Zusammenhang zwischen der Divergenz und der Änderung der Feldkomponenten entlang der kartesischen Koordinatenrichtungen erarbeitet. Beschreiben Sie anhand einer Skizze von $\vec{B}(r,\varphi)$, wie Sie analog die Definition der Divergenz in ebenen Polarkoordinaten graphisch interpretieren würden. Gehen Sie dabei auf die Besonderheit der Definition in Polarkoordinaten ein. Berechnen Sie $\operatorname{div}\vec{B}(r,\varphi)$ und vergleichen Sie mit Ihrem Ergebnis aus (b).

Aufgabe: Satz von Gauß

In dieser Aufgabe setzen Sie sich mit dem Satz von Gauß auseinander. Hierfür nutzen Sie die Vektorfeld-Simulation von Übungsblatt 1 (`https://wwwuser.gwdg.de/physik.didaktik/v3ctor.html`). Sie *dürfen* die Simulation bei jeder Teilaufgabe zu Hilfe nehmen. Wenn Sie die Simulation nutzen *sollen*, ist dies explizit angegeben.

Betrachten Sie das Vektorfeld $\vec{F}(x,y)$ mit

$$\vec{F}(x,y) = x\hat{e}_x + 2\hat{e}_y\,.$$

(a) Der Fluss Φ eines Vektorfeldes in zwei Dimensionen $\vec{B}(x,y)$ durch den Rand $C = \partial A$ einer Fläche A ergibt sich über das Flächenintegral

$$\Phi = \int_{\partial A} \vec{B}(x,y)\cdot d\vec{n}\,.$$

Dabei ist $d\vec{n} = \hat{n}dl$ und der Kurvennormaleneinheitsvektor $\hat{n}$ ist nach außen gerichtet.

(1) Skizzieren Sie $\vec{F}(x,y)$.

(2) Fügen Sie ein beliebiges Rechteck in Ihre Skizze ein und zeichnen Sie die Kurvennormalen sowie die Projektion der Feldkomponenten auf diese Normalen an die vier Seiten des Rechtecks ein.

(3) Bilanzieren Sie qualitativ die Zu- und Abflüsse der Feldkomponenten in Bezug auf den Rand der Rechteckfläche: Verzeichnet das Rechteck insgesamt einen Zu- oder Abfluss?

(b) Der Satz von Gauß in zwei Dimensionen beschreibt den Zusammenhang zwischen der Divergenz eines Vektorfeldes $\vec{B}(x,y)$ innerhalb einer Fläche A und dem Fluss des Vektorfeldes durch die (geschlossene) Randkurve dieser Fläche ∂A,

$$\int_A \operatorname{div}\vec{B}\,dA = \int_{\partial A} \vec{B}\cdot d\vec{n}\,.$$

(1) Formulieren Sie, wie $\int_A \operatorname{div}\vec{B}\,dA$ anschaulich verstanden werden kann. Nutzen Sie dafür die qualitative Interpretation der Divergenz von Übungsblatt 1 sowie eines Flächenintegrals.

(2) Begründen Sie anhand des Beispiels von $\vec{F}(x,y)$ den Zusammenhang zwischen der Änderung von Feldkomponenten und dem Fluss durch Flächen. Fertigen Sie dazu eine Skizze an.

(3) Nutzen Sie die Simulation, um den Fluss von $\vec{F}(x,y)$ durch den Rand eines Quadrates der Kantenlänge 1 zu bestimmen. Zeigen Sie rechnerisch, dass der Wert mit der linken Seite des Satzes von Gauß übereinstimmt.

(c) Die Definition des Satzes von Gauß in drei Dimensionen lautet entsprechend

$$\int_V \operatorname{div}\vec{B}\,dV = \int_{\partial V} \vec{B}\cdot d\vec{n}$$

für ein Volumen V mit der geschlossenen Oberfläche ∂V. Daraus ergibt sich die koordinatenfreie Definition der Divergenz über

$$\operatorname{div}\vec{B} = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\int_{\partial V} \vec{B}\cdot d\vec{n}\,.$$

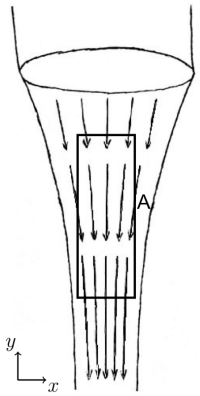
(1) In Teilaufgabe (b) haben Sie den Zusammenhang zwischen der Änderung der Feldkomponenten entlang der Koordinatenrichtungen und dem Fluss durch eine Fläche anhand des Satzes von Gauß erarbeitet. Erklären Sie, inwiefern diese Interpretation des Satzes von Gauß in drei Raumdimensionen angewendet werden kann.

(2) Erläutern Sie mithilfe obiger Grenzwertbeziehung, warum die Divergenz als Maß für die Quellstärke eines Vektorfeldes an einem Ort betrachtet wird.

(d) Die Geschwindigkeit des abgebildeten Wasserstrahls sei durch das dargestellte Geschwindigkeitsvektorfeld $\vec{v}(x,y)$ gegeben.

(1) Für den Wasserstrahl gilt die Kontinuitätsgleichung $\operatorname{div}\vec{v}(x,y) = 0$ und somit $\int_{\partial A}\vec{v}\cdot d\vec{n} = 0$. Erklären Sie, wie der Fluss durch das eingefügte Rechteck A Null sein kann, obwohl die horizontalen Rechteckkanten offensichtlich einen geringeren Zu- als Abfluss verzeichnen.

(2) Ist $\int_{\partial A}\vec{v}\cdot d\vec{n}$ auch dann noch Null, wenn (i) A sehr klein wird, (ii) A kreisförmig ist und (iii) A teilweise außerhalb des räumlich begrenzten Wasserstrahls verläuft? Begründen Sie Ihre Antwort.



Aufgabe: Rotation von Vektorfeldern
In dieser Aufgabe untersuchen Sie die Rotation von Vektorfeldern. Hierfür nutzen Sie die Vektorfeld-Simulation von Übungsblatt 1 und 2 (`https://wwwuser.gwdg.de/physik.didaktik/v3ctor.html`). Sie *dürfen* die Simulation bei jeder Teilaufgabe zu Hilfe nehmen. Wenn Sie die Simulation nutzen *sollen*, ist dies explizit angegeben.

Die Rotation eines Vektorfeldes ($\operatorname{rot}\vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$) an einem Ort (x, y, z) ist für kartesische Koordinaten definiert durch komponentenweise Subtraktion der partiellen Ableitungen mit

$$\operatorname{rot}\vec{A}(x,y,z) = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{e}_z\,.$$

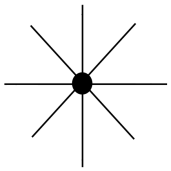
(a) Geben Sie eine vereinfachte Definition der Rotation $\operatorname{rot}\vec{A}$ für ein Vektorfeld $\vec{A}(x, y, z = 0)$ in zwei Dimensionen an.

(b) Betrachten Sie das Vektorfeld $\vec{B}(x, y, z)$ mit

$$\vec{B}(x,y,z) = -y\hat{e}_x + x\hat{e}_y\,.$$

(1) Skizzieren Sie $\vec{B}(x, y, z)$ in der x-y-Ebene.

(2) Fügen Sie ein Schaufelrad (siehe rechts) an einem beliebigen Ort im Feld ein und zeichnen Sie die Feldkomponenten in der Umgebung des Rades ein. Stellen Sie sich vor, das Vektorfeld interagiere mit dem Rad wie ein Fluid. Markieren Sie die Komponenten des Feldes, die auf das Schaufelrad wirken. Rotiert das Schaufelrad? Begründen Sie!



(3) Beurteilen Sie qualitativ anhand Ihrer Skizze, wie sich die Feldkomponenten entlang der Koordinatenrichtungen verändern: Geben Sie also an, ob die partiellen Ableitungen $\frac{\partial B_x}{\partial y}$ und $\frac{\partial B_y}{\partial x}$ positiv, negativ oder Null sind. Folgern Sie aus diesem Ergebnis, ob die Rotation an dem von Ihnen gewählten Ort Null ist, in positive oder negative $\hat{e}_z$-Richtung zeigt. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mithilfe der Simulation sowie einer Rechnung.

(4) Gibt es einen Ort im Vektorfeld $\vec{B}(x, y, z)$, an dem die Rotation verschwindet? Begründen Sie!

(c) Betrachten Sie nun das Vektorfeld $\vec{C}(x, y, z = 0)$ mit

$$\vec{C}(x,y,z=0) = xy\hat{e}_x + \hat{e}_y.$$

in der Simulation. Beurteilen Sie für jeden der vier Quadranten, wie sich die Feldvektoren entlang der x- bzw. y-Richtung verändern und schließen Sie daraus, ob die Rotation innerhalb der Quadranten jeweils Null ist, in positive oder in negative $\hat{e}_z$-Richtung zeigt. Überprüfen und begründen Sie Ihr Ergebnis mithilfe einer Rechnung.

(d) Betrachten Sie eine stationäre, d.h. zeitunabhängige, laminare Luftströmung mit dem zugehörigen Geschwindigkeitsvektorfeld $\vec{v}(x, y, z = 0)$, das inertial nur eine Horizontalgeschwindigkeit verschieden von Null besitzt. Durch eine Störung werde die Strömung in negative y-Richtung abgelenkt, dabei ändere sich die Horizontalgeschwindigkeit nicht.

(1) Skizzieren Sie $\vec{v}(x, y, z = 0)$ in der x-y-Ebene.

(2) Erklären Sie, wieso es infolge der Störung zur Wirbelbildung kommt.

(e) Die Rotation eines Vektorfeldes $\vec{A}(r, \varphi, z = 0)$ an einem Ort $(r, \varphi, z = 0)$ in Zylinderkoordinaten ist definiert durch

$$\operatorname{rot}\vec{A}(r,\varphi,z=0) = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi) - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi}\right)\hat{e}_z\,.$$

Das obige Vektorfeld $\vec{B}$ ist in Zylinderkoordinaten gegeben durch $\vec{B}(r, \varphi, z = 0) = r\hat{e}_\varphi$. In Teilaufgabe (b) haben Sie den Zusammenhang zwischen der Rotation und der Änderung der Feldkomponenten entlang der Koordinatenrichtungen erarbeitet. Beschreiben Sie anhand einer Skizze von $\vec{B}(r, \varphi, z = 0)$, wie Sie analog die Definition der Rotation in Zylinderkoordinaten graphisch (in zwei Dimensionen) interpretieren würden. Gehen Sie dabei auf die Besonderheit der Definition in Zylinderkoordinaten ein. Berechnen Sie $\operatorname{rot}\vec{B}(r, \varphi, z = 0)$ und vergleichen Sie mit Ihrem Ergebnis aus (b).

Aufgabe: Satz von Stokes
In dieser Aufgabe setzen Sie sich mit dem Satz von Stokes auseinander. Hierfür nutzen Sie die Vektorfeld-Simulation von Übungsblatt 1, 2 und 3 (`https://wwwuser.gwdg.de/physik.didaktik/v3ctor.html`). Sie *dürfen* die Simulation bei jeder Teilaufgabe zu Hilfe nehmen. Wenn Sie die Simulation nutzen *sollen*, ist dies explizit angegeben.

Betrachten Sie das Vektorfeld $\vec{F}(x, y, z)$ mit

$$\vec{F}(x, y, z) = y\hat{e}_x + 2\hat{e}_y \,.$$

(a) Die Zirkulation Ψ eines Vektorfeldes in drei Dimensionen $\vec{B}(x, y, z)$ entlang der geschlossenen Randkurve $C = \partial A$ einer Fläche A ergibt sich über das Wegintegral

$$\Psi = \int_{\partial A} \vec{B}(x, y, z) \cdot d\vec{l}.$$

Dabei ist $d\vec{l}$ das vektorielle Wegelement entlang der Randkurve, welches entgegen dem Uhrzeigersinn orientiert ist.

(1) Skizzieren Sie $\vec{F}(x, y, z)$ in der x-y-Ebene.

(2) Fügen Sie ein beliebiges Rechteck in Ihre Skizze ein und zeichnen Sie die vektoriellen Wegelemente sowie die Projektion der Feldkomponenten auf diese Wegelemente an die vier Seiten der Rechteckkurve ein.

(3) Bilanzieren Sie qualitativ die Beiträge der Wegintegrale entlang der Randkurve des Rechtecks: Ist das Wegintegral über die gesamte Randkurve positiv, negativ oder Null?

(b) Der Satz von Stokes beschreibt den Zusammenhang zwischen der Rotation eines Vektorfeldes $\vec{B}(x, y, z)$ innerhalb einer Fläche A und dem Wegintegral entlang der (geschlossenen) Randkurve dieser Fläche ∂A,

$$\int_A \operatorname{rot} \vec{B} \cdot d\vec{n} = \int_{\partial A} \vec{B} \cdot d\vec{l}.$$

(1) Formulieren Sie, wie $\int_A \operatorname{rot} \vec{B} \cdot d\vec{n}$ anschaulich verstanden werden kann. Nutzen Sie dafür die qualitative Interpretation der Rotation von Übungsblatt 3 sowie eines Flächenintegrals.

(2) Begründen Sie anhand des Beispiels von $\vec{F}(x, y, z)$ (in der x-y-Ebene) den Zusammenhang zwischen der Änderung von Feldkomponenten und der Zirkulation entlang einer geschlossenen Randkurve. Fertigen Sie dazu eine Skizze an.

(3) Nutzen Sie die Simulation, um die Zirkulation von $\vec{F}(x, y, z)$ entlang der Randkurve eines Quadrates der Kantenlänge 1 zu bestimmen. Zeigen Sie rechnerisch, dass der Wert mit der linken Seite des Satzes von Stokes übereinstimmt.

(c) Aus dem Satz von Stokes ergibt sich die koordinatenfreie Definition der Rotation mit $d\vec{n} = \hat{n}dA$ über

$$(\operatorname{rot} \vec{B}) \cdot \hat{n} = \lim_{A \to 0} \frac{1}{A} \int_{\partial A} \vec{B} \cdot d\vec{l}.$$

(1) Erläutern Sie mithilfe obiger Grenzwertbeziehung, warum die Rotation als Maß für die Wirbelstärke eines Vektorfeldes an einem Ort betrachtet wird.

(2) Erläutern Sie den Zusammenhang zwischen der Wirbelstärke eines Vektorfeldes und seiner Weg(un)abhängigkeit.

(d) Betrachten Sie eine Luftströmung in der x-z-Ebene. Die Horizontalgeschwindigkeit v_x des zugehörigen Geschwindigkeitsvektorfeldes $\vec{v}(x, y = 0, z) = v_x(z)\hat{e}_x$ nimmt mit zunehmender vertikaler Höhe z zu.

(1) Skizzieren Sie $\vec{v}(x, y = 0, z)$ in der x-z-Ebene.

(2) Erklären Sie durch Einfügen eines Rechtecks A, wieso es in derartigen Luftströmungen zu Wirbelbildung kommt. Wie wirkt sich die Größe und die Form der eingefügten Form A auf Ihre Erklärung aus? Begründen Sie Ihre Antwort.

Performanztest: Vektoranalysis

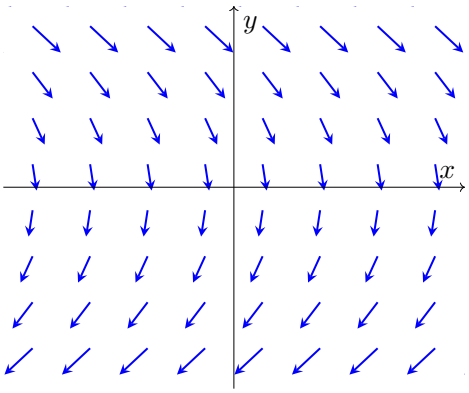
Hinweis: Ein Ausschnitt des Performanztests zur Vektoranalysis ist der Publikation als ergänzendes Material hinzugefügt (Anhang A.1 inkl. Itemschwierigkeiten vom Prätest der alpha-Implementation). Zur Übersicht wird hier der gesamte Test erneut dargestellt.

Aufgabe	Thema[a]	Format[b]	Referenz
V1	VF	MC4, TF[c]	Klein et al. (2018, 2019, 2021b)
V2	VF	S, TF[c]	–
V3	DIV	O	Bollen et al. (2015) und Klein et al. (2018, 2019, 2021b)
V4	DIV	MC3, O	Klein et al. (2018, 2019, 2021b)
V5	DIV	TF[c], MC3[c], MC4[c]	Baily et al. (2015), Bollen et al. (2018) und Klein et al. (2018, 2019, 2021b)
V6	DIV	O	Bollen et al. (2015)
V7	ROT	O	Klein et al. (2018, 2019, 2021b)
V8	ROT	MC3, O	Bollen et al. (2015)
V9	ROT	TF[c], MC3[c], MC4[c]	Baily et al. (2015), Bollen et al. (2018) und Klein et al. (2018, 2019, 2021b)
V10	ROT	O	Bollen et al. (2015)
V11	PV	MC3[c]	–
V12	FD	O, S	Rabe et al. (2022)
V13	FZ	S, TF[c]	Klein et al. (2018)
V14	FZ	S, TF[c]	–
V15	IN	O	–
V16	IN	O	–
V17	IN	O	Baily et al. (2017); CURrENT (Colorado UppeR-division ElectrodyNamics Test)
V18	IN	MC4	–
V19	IN	MC4	–
V20	ES[d]	O	–

[a]*Themen:* VF = Vektorfelder, DIV = Divergenz, ROT = Rotation, PV = Partielle Vektorableitungen, FD = Fluiddynamik, FZ = Fluss und Zirkulation, IN = Integralsätze, ES = Elektrostatik;
[b]*Aufgabenformat:* MC3/4 = Multiple-Choice-Item mit drei/vier Optionen, TF = True-False-Item, S = Skizze, O = Offenes Antwortformat (Formel, Begründung oder Rechnung);
[c]Erhebung der Antwortsicherheit; [d]Nur im Mid- und Posttest enthalten

I Vektorfelder

V1) Gegeben ist das Schaubild des zweidimensionalen Vektorfeldes $\vec{F}(x,y)$. F_x bezeichnet die x-Komponente des Feldes $\vec{F}$ und F_y seine y-Komponente.



1. Kreuzen Sie an, welche der folgenden Formeln $\vec{F}(x,y)$ beschreibt.

- ☐ $\vec{F}_1(x,y) = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y$
- ☐ $\vec{F}_2(x,y) = -\hat{e}_x + x\hat{e}_y$
- ☐ $\vec{F}_3(x,y) = y\hat{e}_x - \hat{e}_y$
- ☐ $\vec{F}_4(x,y) = y\hat{e}_x - x\hat{e}_y$

2. Kreuzen Sie an, ob die Aussage richtig oder falsch ist und geben Sie außerdem an, wie sicher Sie sich Ihrer Antwort sind (auf einer Skala von 1 = „absolut sicher“ bis 6 = „absolut unsicher“).

	richtig	falsch	Antwortsicherheit 1					6
(a) $F_x = 0$ überall	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
(b) $F_y = 0$ überall	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

V2) Gegeben ist das Vektorfeld $\vec{G}(r,\varphi) = r\hat{e}_\varphi$.

1. Skizzieren Sie $\vec{G}(r,\varphi)$ in der x-y-Ebene.

2. Kreuzen Sie an, ob die Aussage richtig oder falsch ist und geben Sie außerdem an, wie sicher Sie sich Ihrer Antwort sind (auf einer Skala von 1 = „absolut sicher“ bis 6 = „absolut unsicher“).

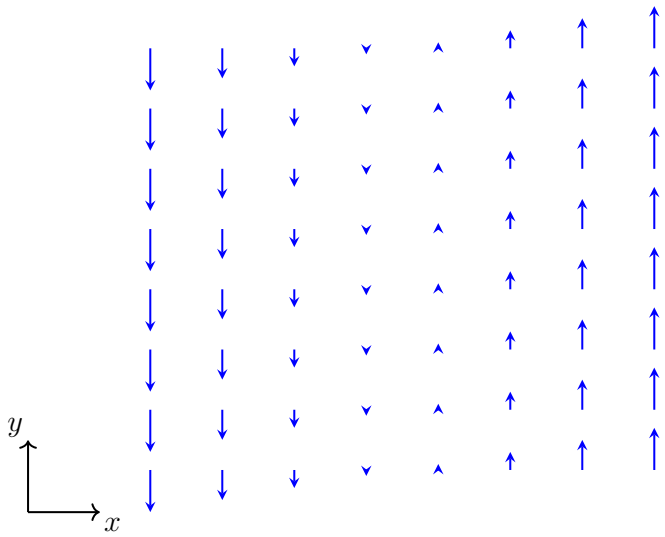
	richtig	falsch	Antwortsicherheit 1					6
(a) $\vec{G}$ besitzt nur eine r-Komponente, die von φ abhängt.	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
(b) $\vec{G}$ besitzt nur eine φ-Komponente, die von r abhängt.	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

II Divergenz von Vektorfeldern

V3) Geben Sie einen mathematischen Ausdruck (eine Formel) zur Berechnung der Divergenz eines Vektorfeldes $\vec{F}(x, y)$ in kartesischen Koordinaten an.

☐ Mir fällt gerade keine Formel ein.

V4) Gegeben ist das folgende Schaubild eines Vektorfeldes $\vec{F}(x, y)$.



1. Welche Aussage können Sie über die Divergenz des Vektorfeldes formulieren? Markieren Sie Ihre Antwort!

☐ Das Vektorfeld besitzt keine Divergenz. (Das bedeutet, dass die Divergenz an jeder Stelle gleich Null ist.)

☐ Die Divergenz ist an wenigstens einer Stelle im Vektorfeld von Null verschieden.

☐ Die Divergenz ist an jeder Stelle im Vektorfeld von Null verschieden.

2. Begründen Sie Ihre Antwort kurz.

V5) Kreuzen Sie an, ob die folgenden Aussagen über die Divergenz richtig bzw. falsch sind und geben Sie außerdem an, wie sicher Sie sich Ihrer Antwort sind (auf einer Skala von 1 = „absolut sicher“ bis 6 = „absolut unsicher“).

	richtig	**falsch**	**Antwortsicherheit** 1					6
1. Die Divergenz gibt die Richtung des steilsten Anstiegs an.	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
2. Wenn die Divergenz eines Vektorfeldes an jeder Stelle positiv ist, existiert an jeder Stelle eine Quelle.	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
3. Die Divergenz gibt an, ob die Vektorpfeile auseinanderlaufen.	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
4. Die Divergenz kann für jede Stelle eines Vektorfeldes verschieden sein.	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
5. Die Divergenz ist eine globale Feldeigenschaft: Entweder sie ist räumlich konstant oder Null.	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
6. Die Divergenz kann mit der Anzahl von Vektoren in Verbindung gebracht werden.	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
7. Die Divergenz hängt mit infinitisimalen Feldänderungen zusammen.	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
8. Das Feld einer Punktladung in der Umgebung dieser Ladung ist divergenzfrei.	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
9. Für die Divergenz gilt: $\operatorname{div}\vec{F} = ...$ ☐ $\nabla\vec{F}$ ☐ $\nabla\times\vec{F}$ ☐ $\nabla\cdot\vec{F}$			☐	☐	☐	☐	☐	☐
10. Die Divergenz an einer Stelle eines Vektorfeldes ist ... ☐ ein Skalar ☐ ein Skalarfeld ☐ ein Vektor ☐ ein Vektorfeld			☐	☐	☐	☐	☐	☐
11. Die Divergenz des Vektorfeldes $\vec{F}(r,\varphi)$ in ebenen Polarkoordinaten ist definiert durch ... ☐ $\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial}{\partial r}F_r + \frac{\partial}{\partial\varphi}F_\varphi$ ☐ $\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial}{\partial r}(rF_r) + \frac{\partial}{\partial\varphi}F_\varphi$ ☐ $\operatorname{div}\vec{F} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rF_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}F_\varphi$ ☐ $\operatorname{div}\vec{F} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rF_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}(r^2F_\varphi)$			☐	☐	☐	☐	☐	☐

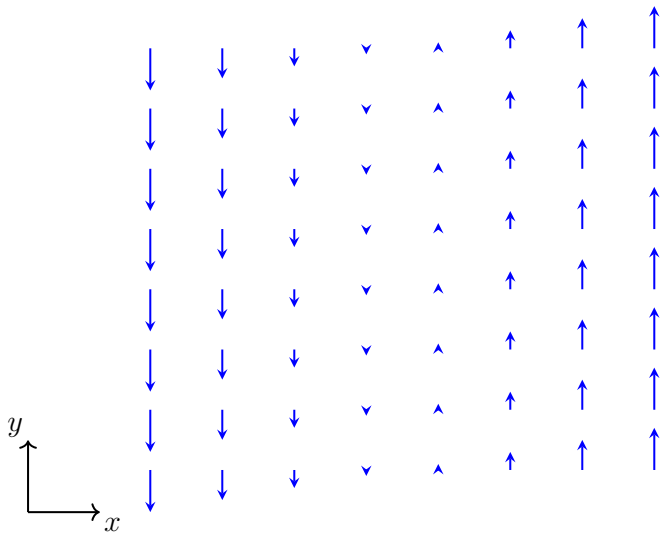
V6) Berechnen Sie die Divergenz des Vektorfeldes $\vec{F}(x,y,z) = x\hat{e}_x + x\hat{e}_y - 2xz\hat{e}_z$.

III Rotation von Vektorfeldern

V7) Geben Sie einen mathematischen Ausdruck (eine Formel) zur Berechnung der Rotation eines Vektorfeldes $\vec{F}(x, y, z)$ in kartesischen Koordinaten an.

☐ Mir fällt gerade keine Formel ein.

V8) Gegeben ist das folgende Schaubild eines Vektorfeldes $\vec{F}(x, y)$.



1. Welche Aussage können Sie über die Rotation des Vektorfeldes formulieren? Markieren Sie Ihre Antwort!

☐ Das Vektorfeld besitzt keine Rotation. (Das bedeutet, dass die Rotation an jeder Stelle gleich Null ist.)

☐ Die Rotation ist an wenigstens einer Stelle im Vektorfeld von Null verschieden.

☐ Die Rotation ist an jeder Stelle im Vektorfeld von Null verschieden.

2. Begründen Sie Ihre Antwort kurz.

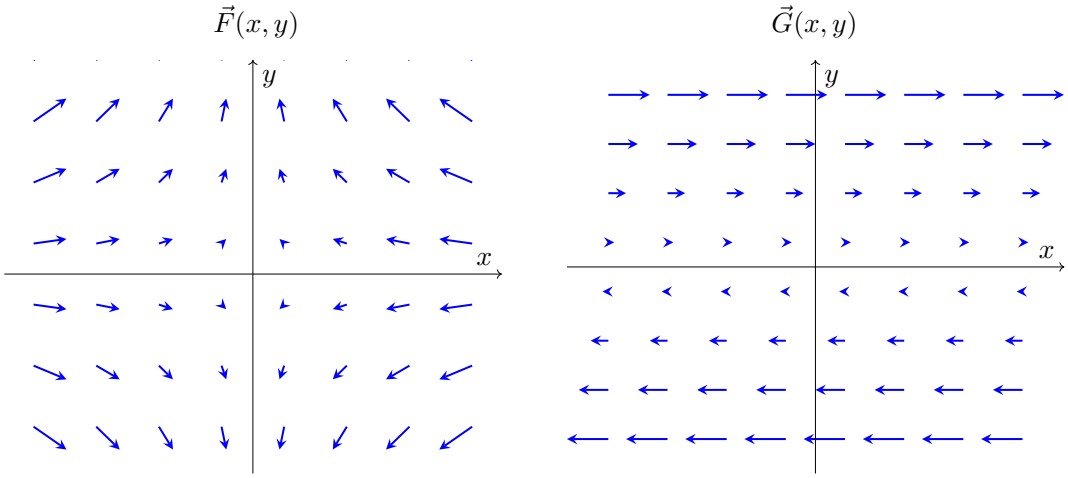
V9) Kreuzen Sie an, ob die folgenden Aussagen über die Rotation richtig bzw. falsch sind und geben Sie außerdem an, wie sicher Sie sich Ihrer Antwort sind (auf einer Skala von 1 = „absolut sicher“ bis 6 = „absolut unsicher“).

	richtig	**falsch**	**Antwortsicherheit** 1					6
1. Die Rotation gibt die Richtung des steilsten Anstiegs an.	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
2. Die Rotation ist nur dann verschieden von Null, wenn sich die Richtung des Feldes ändert.	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
3. Die Rotation gibt an, ob die Vektorpfeile zusammenlaufen.	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
4. Die Rotation kann für jede Stelle eines Vektorfeldes verschieden sein.	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
5. Die Rotation ist eine globale Feldeigenschaft: Entweder sie ist räumlich konstant oder Null.	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
6. Die Rotation gibt an, ob Feldvektoren gekrümmt sind.	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
7. Die Rotation ist ein Maß für infinitisimale Wirbel eines Feldes.	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
8. Das Feld einer Punktladung in der Umgebung dieser Ladung ist rotationsfrei.	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
9. Für die Rotation gilt: $\mathrm{rot}\,\vec{F} = ...$ ☐ $\nabla\vec{F}$ ☐ $\nabla \times \vec{F}$ ☐ $\nabla \cdot \vec{F}$			☐	☐	☐	☐	☐	☐
10. Die Rotation an einer Stelle eines Vektorfeldes ist ... ☐ ein Skalar ☐ ein Skalarfeld ☐ ein Vektor ☐ ein Vektorfeld			☐	☐	☐	☐	☐	☐
11. Die Rotation des Vektorfeldes $\vec{F}(r, \varphi, z = 0)$ in Zylinderkoordinaten ist definiert durch ... ☐ $\mathrm{rot}\,\vec{F} = \left(\frac{\partial F_\varphi}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \varphi}\right)\hat{e}_z$ ☐ $\mathrm{rot}\,\vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial r}(rF_\varphi) - \frac{\partial F_r}{\partial \varphi}\right)\hat{e}_z$ ☐ $\mathrm{rot}\,\vec{F} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rF_\varphi) - \frac{\partial F_r}{\partial \varphi}\right)\hat{e}_z$ ☐ $\mathrm{rot}\,\vec{F} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rF_\varphi) - \frac{\partial}{\partial \varphi}(r^2F_r)\right)\hat{e}_z$			☐	☐	☐	☐	☐	☐

V10) Berechnen Sie die Rotation des Vektorfeldes $\vec{F}(x, y, z) = x\hat{e}_x + x\hat{e}_y - 2xz\hat{e}_z$.

IV Partielle Ableitungen

V11) Gegeben sind die Schaubilder der zweidimensionalen Vektorfelder $\vec{F}(x,y)$ und $\vec{G}(x,y)$. F_x bezeichnet die x-Komponente des Feldes $\vec{F}$ (analog für alle weiteren Komponenten).

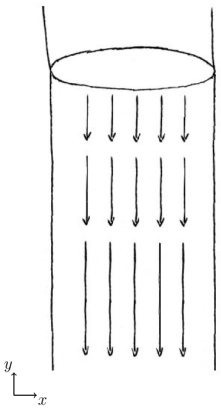


Markieren Sie, welches der Vergleichszeichen (> 0, < 0 oder $= 0$) für die partiellen Ableitungen $\frac{\partial F_x}{\partial x}$, $\frac{\partial F_y}{\partial y}$, $\frac{\partial F_x}{\partial y}$ und $\frac{\partial F_y}{\partial x}$ (analog für $\vec{G}$) von $\vec{F}$ und $\vec{G}$ gilt. Geben Sie außerdem an, wie sicher Sie sich Ihrer Antwort sind (auf einer Skala von 1 = „absolut sicher“ bis 6 = „absolut unsicher“).

		> 0	< 0	$= 0$	Antwortsicherheit 1					6
1.	$\frac{\partial F_x}{\partial x}$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
2.	$\frac{\partial F_y}{\partial y}$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
3.	$\frac{\partial F_x}{\partial y}$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
4.	$\frac{\partial F_y}{\partial x}$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
5.	$\frac{\partial G_x}{\partial x}$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
6.	$\frac{\partial G_y}{\partial y}$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
7.	$\frac{\partial G_x}{\partial y}$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
8.	$\frac{\partial G_y}{\partial x}$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

V Fluidmechanik

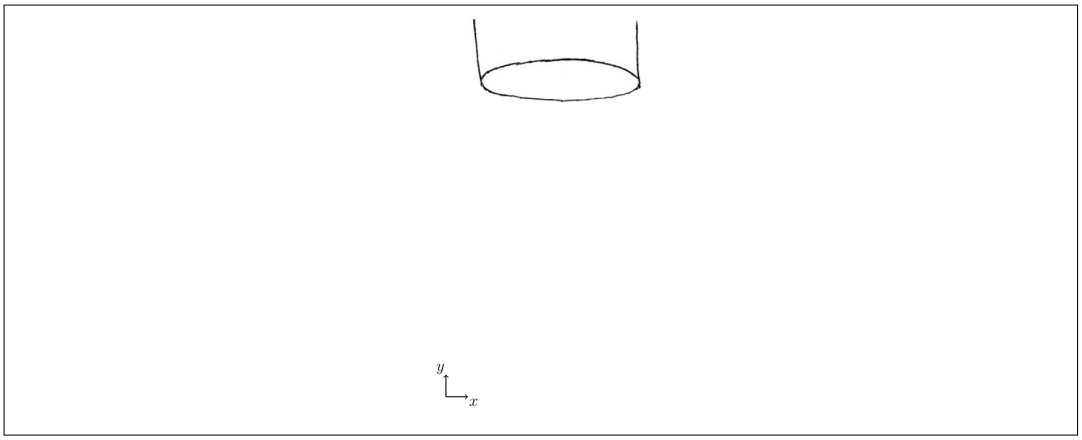
V12) Es fließe Wasser aus einem Wasserhahn. Die Geschwindigkeit des abgebildeten Wasserstrahls ist durch das dargestellte Geschwindigkeitsvektorfeld $\vec{v}(x, y)$ gegeben.



1. Für einen Wasserstrahl gilt im Allgemeinen die Kontinuitätsgleichung und somit für die Geschwindigkeit $\operatorname{div} \vec{v}(x, y) = 0$.

(a) Erklären Sie, warum der abgebildete Wasserstrahl nicht divergenzfrei sein kann.

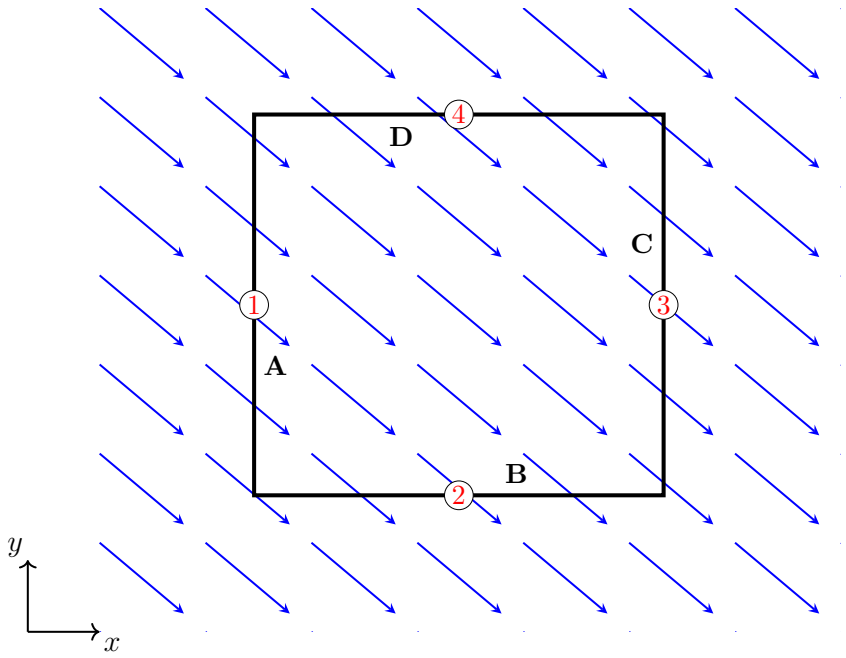
(b) Skizzieren Sie den abgebildeten Wasserstrahl so, dass seine Divergenz verschwindet.



2. Kommt es in dem von Ihnen skizzierten Wasserstrahl zu Wirbelbildung? Begründen Sie!

VI Fluss von Vektorfeldern

V13) Gegeben ist ein homogenes Vektorfeld $\vec{F}(x, y)$ in der x-y-Ebene sowie ein Rechteck mit den Seiten A – D als Testfläche.



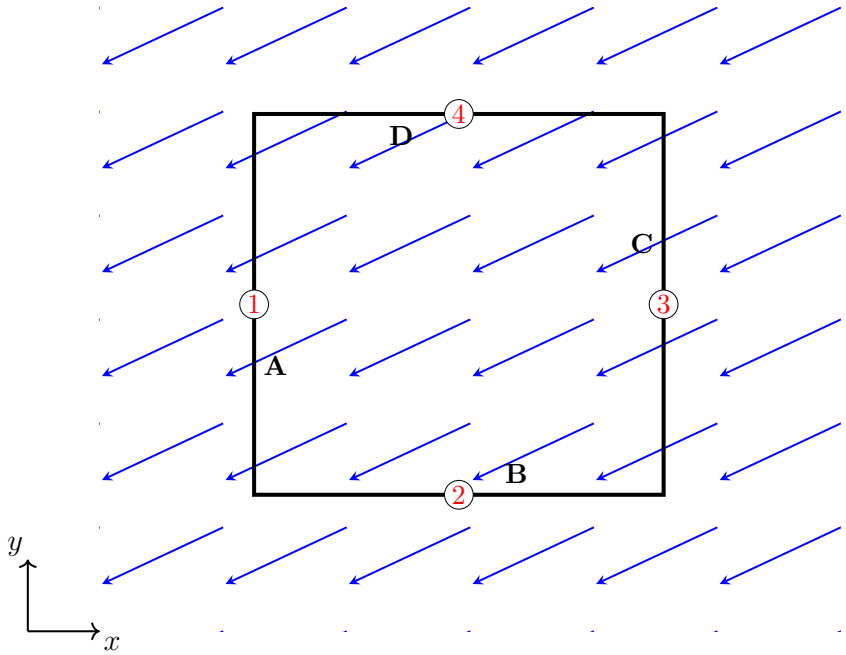
1. Zeichnen Sie an den Punkten 1 – 4 die äußeren Kurvennormalen $d\vec{n}$ an den Rechteckrand ein.

2. Kreuzen Sie jeweils an, ob die Aussage richtig oder falsch ist und geben Sie außerdem an, wie sicher Sie sich Ihrer Antwort sind (auf einer Skala von 1 = „absolut sicher“ bis 6 = „absolut unsicher“).

Der Fluss von $\vec{F}$ ($\int \vec{F} \cdot d\vec{n}$) ...

	richtig	falsch	Antwortsicherheit 1					6
(a) ... durch Randstück **A** ist positv.	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
(b) ... durch Randstück **D** ist negativ.	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
(c) ... durch die vertikalen Randstücke hebt sich auf.	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
(d) ... durch das gesamte Rechteck ist positiv.	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

V14) Gegeben ist ein homogenes Vektorfeld $\vec{F}(x, y)$ in der x-y-Ebene sowie eine rechteckige Testkurve mit den Seiten A – D, welche entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen wird.



1. Zeichnen Sie an den Punkten 1 – 4 die vektoriellen Wegelemente $d\vec{l}$ ein.

2. Kreuzen Sie jeweils an, ob die Aussage richtig oder falsch ist und geben Sie außerdem an, wie sicher Sie sich Ihrer Antwort sind (auf einer Skala von 1 = „absolut sicher“ bis 6 = „absolut unsicher“).

Das Wegintegral von $\vec{F}$ ($\int \vec{F} \cdot d\vec{l}$) ...

			Antwortsicherheit					
	richtig	**falsch**	**1**					**6**
(a) ... entlang des Kurvenstücks **B** ist positiv.	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
(b) ... entlang des Kurvenstücks **C** ist negativ.	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
(c) ... entlang der horizontalen Kurvenstücke hebt sich auf.	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
(d) ... entlang der gesamten Kurve ist negativ.	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

VII Integralsätze

V15) Drücken Sie den Satz von Gauß durch einen mathematischen Ausdruck (eine Formel) aus.

☐ Mir fällt gerade keine Formel ein.

V16) Drücken Sie den Satz von Stokes durch einen mathematischen Ausdruck (eine Formel) aus.

☐ Mir fällt gerade keine Formel ein.

V17) Gegeben sind die Vektorfelder $\vec{F}$ und $\vec{G}$.

1. Übersetzen Sie den folgenden Satz in eine mathematische Gleichung:

„Das Wegintegral von $\vec{G}$ entlang einer geschlossenen Kurve ist gleich dem Fluss von $\vec{F}$ durch eine Fläche mit dieser Kurve als Rand."

2. Sei nun $\vec{F}$ gleich der Rotation von $\vec{G}$. Zeigen Sie mithilfe des Satzes von Stokes, dass der Zusammenhang in **1.** gilt.

V18) Gegeben sind ein dreidimensionales Vektorfeld $\vec{F}$ sowie ein Volumen V mit der geschlossenen Oberfläche A und Flächennormalenvektor $d\vec{n}$.

1. Es ist $\operatorname{div}\vec{F} = 0$. Markieren Sie, welche der folgenden Aussagen korrekt ist/sind.

- ☐ Es folgt aus dem Satz von Gauß, dass der Fluss von $\vec{F}$ durch jede beliebige geschlossene Fläche verschwindet.
- ☐ Es folgt aus dem Satz von Stokes, dass innerhalb von V keine Quellen oder Senken existieren.
- ☐ Es folgt aus dem Satz von Gauß, dass alle partiellen Ableitungen von $\vec{F}$ überall Null sind.
- ☐ Es folgt aus dem Satz von Gauß, dass $\vec{F}$ konservativ ist.

2. Es ist $\int_A \vec{F} \cdot d\vec{n} = 0$. Markieren Sie, welche der folgenden Aussagen korrekt ist/sind.

- ☐ Es folgt aus dem Satz von Stokes, dass innerhalb von V keine Wirbel existieren.
- ☐ Es folgt aus dem Satz von Stokes, dass sich alle partiellen Ableitungen von $\vec{F}$ gegenseitig aufheben.
- ☐ Es folgt aus dem Satz von Gauß, dass $\vec{F}$ keine Quellen und Senken besitzt oder diese sich gegenseitig aufheben.
- ☐ Es folgt aus dem Satz von Gauß, dass $\operatorname{div}\vec{F} = 0$ auf A gilt.

V19) Gegeben ist ein dreidimensionales Vektorfeld $\vec{F}$. C_1 und C_2 sind zwei geschlossene Kurven auf einer geschlossenen Oberfläche A mit vektoriellem Wegelement $d\vec{l}$.

1. Es ist $\operatorname{rot}\vec{F} = 0$. Markieren Sie, welche der folgenden Aussagen korrekt ist/sind.

- ☐ Es folgt aus dem Satz von Stokes, dass der Fluss von $\vec{F}$ durch jede beliebige geschlossene Fläche verschwindet.
- ☐ Es folgt aus dem Satz von Gauß, dass $\vec{F}$ divergenzfrei ist.
- ☐ Es folgt aus dem Satz von Stokes, dass alle partiellen Ableitungen der Feldkomponenten verschwinden.
- ☐ Es folgt aus dem Satz von Stokes, dass die Zirkulation entlang C_1 und die Zirkulation entlang C_2 identisch sind.

2. Es ist $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$. für eine beliebige geschlossene Kurve C auf A. Markieren Sie, welche der folgenden Aussagen korrekt ist/sind.

- ☐ Es folgt aus dem Satz von Stokes, dass die Rotation von $\vec{F}$ auf A verschwindet.
- ☐ Es folgt aus dem Satz von Gauß, dass $\vec{F}$ wirbelfrei ist.
- ☐ Es folgt aus dem Satz von Gauß, dass alle partiellen Ableitungen der Feldkomponenten verschwinden.
- ☐ Es folgt aus dem Satz von Stokes, dass $\vec{F}$ konservativ ist.

VIII Elektrostatik

V20) Zur analytischen Bestimmung des elektrischen Feldes $\vec{E}(\vec{r})$ in einem Volumen V kann das Gauß'sche Gesetz,

$$\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{n} = \frac{Q}{\epsilon_0},$$

verwendet werden. Q beschreibt die Ladung im Volumen V, die von der geschlossenen Randfläche ∂V eingeschlossen wird. Zur Notation: Es gilt $d\vec{n} = d\vec{A} = \hat{n}dA$.

Betrachten Sie die folgenden beiden Aussagen. Geben Sie jeweils an, ob die Aussagen korrekt oder inkorrekt sind und begründen Sie Ihre Antwort.

1. Wenn es in V keine Ladungen gibt ($Q = 0$), dann ist $\vec{E} = 0$ in V.

2. Wenn $\vec{E} = 0$ überall in V gilt, dann gibt es in V keine Ladungen.

Fragebogen zur Bedienung, dem Design und der wahrgenommenen Lernwirkung des Vektorfeld-Visualisierungswerkzeugs

Hinweis: Die Fragebögen der kognitiven Belastung und des Tutor:innenverhaltens sind der Publikation als ergänzendes Material hinzugefügt (Anhang A.1). Hier werden mit Blick auf die Publikation in Kap. 8 ergänzend die Items des Fragebogens zur Bedienung, dem Design und der wahrgenommenen Lernwirkung des Visualisierungswerkzeugs aufgeführt.

Item	Itemformulierung	Referenz[a]
S1	Die Simulation ist einfach zu bedienen.	BRO3
S2	Ich benötige mehr als die angebotene Unterstützung, um mit der Simulation arbeiten zu können.	BRO4
S3	Die verschiedenen Funktionen sind gut in der Simulation integriert.	BRO5
S4	Ich benötige ein umfassendes Vorwissen, um die Simulation nutzen zu können.	BRO10
S5	Die Simulation ist unnötig kompliziert.	BRO2
S6	Ich verstehe den Zweck und die Ziele der Simulation.	UBW2
S7	Die Darstellungsform der Simulation ist verständlich und klar.	UBW3
S8	Ich habe/hatte technische Probleme bei der Installation und/oder Verwendung der Simulation.	–
S9	Die Simulation konnte mein Verständnis von Vektorfeldern und vektoranalytischen Konzepten verbessern.	STU1
S10	Ich empfehle, dass die Simulation auch in künftigen Veranstaltungen (Vorlesung oder Übung) der Experimentalphysik II (Elektromagnetismus) eingesetzt wird.	STU10
S11	Die Nutzung der Simulation hat mir Spaß gemacht.	STU7
S12	Die Simulation konnte mein Verständnis von Vektorfeldern und vektoranalytischen Konzepten auch über die Vorlesung und mein Selbststudium hinaus verbessern.	STU3
S13	Ich würde Studienanfänger:innen, die sich mit Vektorfeldern beschäftigen möchten, diese Simulation empfehlen, wenn sie noch unbekannt ist.	–
S14	Durch die Simulation sind vektoranalytische Konzepte für mich weniger abstrakt geworden.	STU1
S15	Ich empfehle, die Simulation auch in anderen Lehrveranstaltungen (z. B. Rechenmethoden der Physik) einzusetzen.	STU10

[a] *Referenzabkürzungen:* BRO Brooke (1996) STU Shellman und Turan (2006), UBW Unver et al. (2017)